

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU
FACULTÉ DU GENIE DE LA CONSTRUCTION
DÉPARTEMENT DE GENIE MÉCANIQUE



Mémoire de Fin d'Études

En vue de l'obtention du diplôme
De Master en Génie Mécanique
Spécialité : Énergétique
Option : Froid, Chauffage et Climatisation

Thème

*Etude de la conduction thermique dans une structure
multicouche par la méthode des quadripôles*

Réalisé par :

Kahina RAKEM

Hassina RAKEM

Proposé et dirigé par :

A. HADIOUCHE

Promotion : 2021/2022

Remerciement

*Nous remercions tout d'abord **ALLAH** de nous avoir donné le courage, la patience et la chance d'étudier, de suivre et en me faisant entourer des merveilleuses personnes dont nous tenons à remercier ;*

*Notre encadrant, monsieur **Hadiouche Ahmed**, qui nous a guidé et soutenu tout au long de notre travail et qui n'a jamais manqué de nous orienter et de nous conseiller, qu'il trouve ici l'expression de notre respect et de notre profonde gratitude ;*

*Nous tenons à remercier sincèrement les honorables membres du jury qui nous font le grand honneur d'évaluer ce travail, monsieur le Président **Djebouri Hassane** et monsieur **Hamtaoui Malek** comme examinateur ;*

Nous tenons également à remercier tous nos enseignants du département de Génie Mécanique, en particulier ceux d'Énergétique, pour leurs enseignements de qualité et leurs conseils qui nous ont permis de poursuivre nous itinéraire académique jusqu'à présent ;

Sans oublier de remercier nos héros de vie que sont nos Parents et nos frères et sœurs pour leurs aides et encouragement durant tout notre parcours, également nos camarades, ami(e)s et connaissances ;

Tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à l'accomplissement de ce travail

Dédicace

Je dédie ce travail

A ma Mère, pour son encouragement et ses sacrifices.

A mon Père, pour son soutien et la confiance qu'il m'a accordé.

A la mémoire de mon chère Frère

A tous les membres de ma famille et à tous mes amis.

Et nous présentons nos vifs remerciements pour Monsieur l'encadreur, pour son soutien, son accompagnement, sa disponibilité et ses conseils pertinents qui ont aidé de façon très significative à l'amélioration de ce mémoire.

RAKEM Hassina

Dédicace

En cet honorable lieu, avec un simple geste tracé par écrit, mais jaillissant du profond sentiment de gratitude, permettez-moi de citer les noms en guise de mémorandum pour ceux qui ont une place particulière :

A ma très chère mère ;

A mon très cher père ;

A mes très chers frères et sœurs ;

A toute ma famille ;

A tous mes ami(e) s sans exception ;

A la promotion de la 2^e année master énergétique 2021/2022 ;

A tous les assoiffés du savoir ; je dédie ce mémoire, qui est le sens de mes études supérieurs, tel un présent du cœur, en priant ALLAH tout puissant à le mettre au service de notre nation, et qu'il sera une lumière sur mon parcours professionnel.

RAKEM Kahina

Table des matières

Introduction générale	1
CHAPITRE 1 : généralités et définitions.....	3
Définitions	3
1.1 : Transferts thermiques	4
1.2 : Température	4
1.3 : Champ de température	4
1.4 : Surface isothermes	4
1.5 : Gradient de température.....	4
1.6 : Flux thermique	5
1.7 : Résistance thermique	5
1.8 : Coefficient de transfert thermique.....	5
1.9 : Capacité thermique massique.....	5
1.10 : Capacité thermique.....	6
1.11 : La conductivité thermique	6
2 : Principaux modes de transferts thermiques.....	6
2.1. Convection.....	6
2.2 : Rayonnement	7
2.3. Conduction.....	8
2.3.1 : Loi de Fourier	9
2.3.2 : Equation de la chaleur	9
2.3.3 : Conditions initiales et conditions aux limites spatio-temporelles	13
CHAPITRE 2 : Méthodes analytiques pour la résolution de l'équation de la conduction.....	15
2.1 : Méthodes de résolution en régime transitoire (variable).....	15
2.2 : Méthode de la transformation de Laplace.....	15
2.3 : Méthode de la séparation des variables (séries de Fourier)	15
2.4 : Application à un mur simple	19
2.4.1. Méthode de la transformée de Laplace	21
2.4.2: Méthode de la séparation des variables (séries de Fourier).....	23
2.5: Résultats et discussions	27
2.5.1 : Comportement de la température en régime transitoire	28
2.5.2 : Comportement du flux thermique	30

2.5.3 : Influence du nombre de BIOT	32
CHAPITRE 3 : Méthode des quadripôles dans la résolution de l'équation de la Conduction.....	34
1 : Application dans le cas d'un mur simple	35
2 : Distribution de la température	39
3 : Application dans le cas d'une structure multicouche	40
3.1.1 : Calcul des flux aux deux extrémités d'un multicouche	43
3.1.2 : Distribution de la température.....	43
3.2 : Avec résistance thermique de contact	45
4 : Validation du modèle quadripolaire	46
4.1 : Structure à deux couches (Duralumin et brique) sans résistance	48
4.2 : Structure à trois couches (Duralumin, brique et bois) sans résistance	49
4.3: Structure à trois couches (Duralumin, brique et bois) avec résistance	50
Conclusion générale.....	52

Liste des tableaux

Tableau 2.1. Comparaison entre les résultats obtenus par les deux méthodes de résolution pour le cas d'un mur en Duralumin.....	22.
Tableau 3.1. Comparaison entre les résultats obtenus par les deux méthodes (Méthode de Quadripôle et SV) à l'instant $t = 7$ h et 47 minutes.....	47
Tableau 3.2. Comparaison entre les résultats obtenus par les deux méthodes (Méthode de Quadripôle et SV) à l'instant $t = 8$ h et 53 minutes.....	48
Tableau 3.3. Comparaison entre les résultats obtenus par les deux méthodes (Méthode de Quadripôle et SV) à l'instant $t = 10$ h.	48
Tableau 3.4. Comparaison entre les résultats obtenus par les deux méthodes (Méthode de Quadripôle et SV) à l'instant $t = 24$ h.	48

Liste des figures

Figure 1.1 : Gradient de température.....	5
Figure 1.2 : Transfert de chaleur par convection à partir d'une plaque.....	7
Figure 1.3 : Conduction entre deux plaques horizontales.....	9
Figure 1.4 : Bilan thermique sur un système élémentaire.....	10
Figure 2.1 : Représentation de la température en fonction du temps et de position.....	20
Figure 2.2 : Evolution de la température au centre de la paroi.....	28
Figure 2.3 : Evolution de la température au long d'une paroi de brique ayant une Epaisseur de $L = 0.25m$	29
Figure 2.4 : Evolution de flux thermique en fonction de temps pour les différents matériaux.....	30
Figure 2.5 : Evolution de flux thermique au long d'une paroi de brique.....	31
Figure 2.6 : Profils de température pour différentes valeurs de Biot Pour une paroi en brique.....	32
Figure 3.1 : Mur isotrope homogène de conductivité thermique λ et de diffusivité thermique.....	35
Figure 3.2 : Distribution de la température dans la paroi.....	39
Figure 3.3 : Schéma d'une paroi multicouche.....	41
Figure 3.4 : Quadripôle résistance.....	45
Figure 3.5: Evolution de la température au long d'une paroi de bois feuillus légers ayant une Epaisseur de $L = 0.25$ par les deux méthodes de résolution.....	46
Figure 3.6: Evolution de la température le long des parois en duralumin et en brique.....	48
Figure 3.7: Evolution de la température au long de trois plaque (duralumin, brique et bois) ayant une Epaisseur de $L = 0.5$	49
Figure 3.8: Evolution de la température au long de trois plaques avec et sans résistance de contact entre les parois (duralumin, brique et bois), prise à 50 h	

Nomenclature

λ	Coefficient de conductivité thermique	$[\text{W.m}^{-1}.\text{k}^{-1}]$
h	Coefficient de transfert de chaleur par convection	$[\text{W.m}^{-2}.\text{k}^{-1}]$
\dot{q}	Énergie générée par unité de volume	$[\text{W.m}^{-2}]$
T	Température	$[\text{K}]$
T_{∞}	Température extérieur	$[\text{K}]$
T_p	Température de la paroi	$[\text{K}]$
T_f	Température moyenne du fluide	$[\text{K}]$
S	Surface d'un solide	$[\text{m}^2]$
C_p	Capacité thermique massique	$[\text{J.kg}^{-1}.\text{k}^{-1}]$
C	Capacité thermique	$[\text{J.k}^{-1}]$
σ	Constante de proportionnalité appelée constante de Stefan-Boltzmann	$[\text{W.m}^{-2}.\text{k}^{-4}]$
ε_r	La fonction d'émissivité	-
F_g	La fonction géométrique « facture de forme »	-
B_i	Nombre de Biot	-
P	Pression	$[\text{Pa}]$
r	Rayon de cylindre	$[\text{m}]$
φ	Densité de flux de chaleur	
Φ	Flux thermique	$[\text{W}]$
R	Résistance thermique	
α	Diffusivité thermique du matériau	$[\text{m}^2.\text{s}^{-1}]$
V	Volume	$[\text{m}^3]$
L	Épaisseur de la plaque	$[\text{m}]$
$\bar{\theta}$	Transformé de Laplace de température	-
$\bar{\Phi}$	Transformé de Laplace du flux de chaleur	-
ρ	Masse volumique	$[\text{kg.m}^{-3}]$
E_e	Variation de l'énergie interne	$[\text{J}]$

Introduction générale :

Les échanges de chaleur s'effectuent suivant trois modes distincts. A savoir, la conduction, la convection et le rayonnement thermiques. La conduction, rencontrée dans plusieurs applications, que ce soit dans l'industrie (fours, réacteurs, échangeurs thermiques,... etc.) ou dans notre vie quotidienne, tel que le chauffage et la climatisation. Pour maîtriser le comportement thermique de telles applications, il est donc primordial de connaître l'équation de la conduction gouvernant cette application ainsi que sa solution.

Face à la résolution de l'équation de la conduction, on dispose de plusieurs outils. Habituellement, on utilise des méthodes analytiques (méthode de séparation des variables, la transformation de Laplace...etc.) dans le cas de problèmes simplifiés ou la géométrie du corps à étudier est simple. Autrement, on fait recours aux méthodes numériques (géométrie compliquée, problèmes non linéaires, etc.), lorsque la résolution analytique devient difficile, lente voire impossible dans certains cas.

Les parois multicouches, très utilisées dans l'aéronautique, la construction (panneaux sandwich), dans l'isolation thermique ou la construction des Bunkers,...etc, sont portant de configurations géométriques simples (planes ou cylindriques), alors que leurs modélisations par les méthodes classiques (séparation de variables, transformation de Laplace) sont extrêmement difficiles, voire impossibles.

En effet, ce manuscrit, consiste en l'étude de la conduction de la chaleur au sein d'une structure multicouche. D'une autre manière, notre objectif est de développer un modèle de calcul, à base de la méthode des quadripôles, capable de prédire convenablement le comportement thermique d'une structure multicouche, sous différentes sollicitations thermiques.

Ce manuscrit (mémoire) comprend trois chapitres, Le premier chapitre est consacré aux généralités et rappels des notions de base dans les transferts de chaleur.

Le deuxième chapitre traite la conduction thermique, avec la présentation de deux méthodes de résolution les plus utilisées. A savoir, la méthode de la séparation des variables et la technique de la transformation de Laplace. Après avoir présenté les étapes à suivre pour chaque méthode, le cas d'une paroi simple soumise à des conditions de troisième type de chaque côté, a été traité, afin de l'utiliser ensuite comme cas de référence pour valider le modèle à développer par la méthode des quadripôles.

Le troisième chapitre consiste en la présentation du principe de fonctionnement de la méthode des quadripôles, puis son application dans le cas d'une structure multicouche. Une comparaison entre la méthode des quadripôles et la méthode de séparation des variables a été également présentée dans le même chapitre.

Enfin, un ensemble de conclusions ont été tirées et rédigées, concernant la fiabilité et la flexibilité du modèle ici développé, ainsi que le comportement thermique d'une structure multicouche.

Généralités et définitions

Dans la thermodynamique on n'étudie pas la nature et la durée de l'interaction d'un système quelconque avec l'extérieur qui est à l'origine de la variation de l'état de ce système. L'étude de ces mécanismes, en raison de leurs importances, constitue une discipline indépendante appelée « les transferts thermiques ». On distingue trois grandes parties se rattachant chacune à un mode de transfert de chaleur particulier : la conduction, la convection et le rayonnement. Chacun de ces modes étant lui-même lié à un processus physique bien déterminé. Lorsqu'on parle de « transferts thermiques », on cherche à expliquer la façon dont les transferts de chaleur se font ainsi que leur vitesse. Un transfert de chaleur, proprement dit, se fait d'un corps chaud vers un corps froid, ou de façon équivalente d'une température élevée vers une température plus basse.

En effet, comme l'énergie thermique d'un milieu matériel correspond à l'énergie cinétique de ses constituants fondamentaux ayant, une certaine liberté de mouvement (molécules, atomes, électrons libres, ...), ceux-ci pourront échanger tout ou partie de leur énergie thermique, c'est-à-dire gagner ou perdre de l'énergie cinétique :

- Soit par interaction directe avec les particules voisines (choc de molécules par exemple), ce qui correspond à « la conduction ».

- Soit par absorption ou émission de radiations électromagnétiques, ce qui correspond au « rayonnement ».

- Enfin dans le cas d'un gaz ou d'un liquide, on considère également, mais cette fois à l'échelle macroscopique, comme un mode de transfert de chaleur appelé « Convection », les échanges résultant du mélange des diverses parties d'un fluide des températures différentes.

[1].

1. Définitions :

1.1 : Transferts thermiques : Le transfert de chaleur est l'un des modes les plus communs d'échange d'énergie. Il intervient naturellement entre deux systèmes dès qu'il existe entre eux une différence de température et cela quel que soit le milieu les séparant, même vide. De ce fait, les transferts thermiques ont un rôle essentiel, aussi bien dans le domaine des sciences pures que dans celui des applications technologiques. Ce rôle devient même déterminant lorsqu'il est à l'origine des techniques utilisées dans les échangeurs, moteurs thermiques, calorifugeage, utilisation de l'énergie solaire...etc. [1]

1.2 : Température : notée T est une variable d'état thermodynamique qui, d'un point de vue microscopique, caractérise le degré d'agitation des particules de la matière. Elle se mesure au moyen d'un thermomètre et s'exprime fréquemment en Kelvins ou en Celsius. Les termes chaleur et température sont souvent confondus, à tort, ce sont deux concepts bien distincts. Toutefois, ils sont tous les deux en relation avec l'énergie thermique.[2]

$$\text{On retient que : } T [\text{K}] = 273.15 + \theta [^\circ\text{C}] \quad (1.1)$$

1.3 : Champ de température : Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température :

$$T = f(x, y, z, t), \quad (1.2)$$

La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Nous distinguons deux cas [3] :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou transitoire.

1.4 : Surface isotherme : est le lieu des points ayant à chaque instant la même température il est appelé surface isotherme. En régime variable les surfaces isothermes sont mobiles et déformables. En régime permanent, elles sont invariantes. [4].

1.5 : Gradient de température : est un vecteur ayant une grandeur qui détermine la variation de la température dans la direction de la normale commune à deux courbes isothermes voisines, à l'intérieur d'un corps quelconque (Figure1.1). L'expression mathématique du gradient de température donné par l'application de l'opérateur ∇ au champ de température :

$$\overrightarrow{\text{grad}T} = \overrightarrow{\nabla T} = \frac{\partial T}{\partial n} \overrightarrow{n_0} \quad (1.3)$$

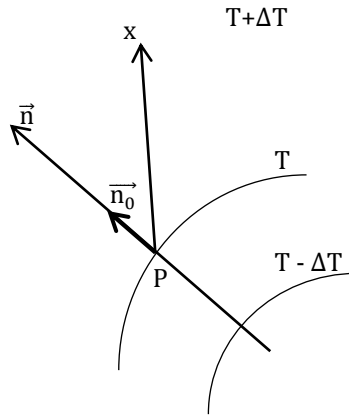


Figure 1.1 : Gradient de température

1.6 : Flux thermique : Le flux thermique c'est la quantité d'énergie thermique qui traverse une surface isotherme par unité de temps.

$$\phi = \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (1.4)$$

1.7 : Résistance thermique par conduction : La résistance thermique (notée R) correspond à la capacité d'un matériau à résister au froid et à la chaleur. Elle est déterminée en divisant l'épaisseur du matériau (e) par la conductivité thermique de ce dernier (λ).

$$R = \frac{e}{\lambda} \quad (1.5)$$

1.8 : Coefficient de transfert thermique : Le coefficient de transfert thermique (notée h) caractérise les déperditions thermiques d'un matériau ou d'une paroi. C'est l'inverse de la résistance thermique (R).

$$h = \frac{1}{R} \quad (1.6)$$

1.9 : Capacité thermique massique : On appelle capacité thermique massique (C_p) la quantité de chaleur qu'il faut appliquer à 1kg de matière pour élever sa température de 1K. c'est une caractéristique liée directement à la nature du matériau, les capacités des matériaux les plus courants sont données dans l'annexe A.1.1.

1.10 : Capacité thermique : La capacité thermique est l'énergie qu'il faut apporter à un corps pour augmenter sa température de 1K. Elle s'exprime en (J/K). C'est une grandeur extensive.

$$C = C_p \times m \quad (1.6)$$

1.11 : La conductivité thermique : est une grandeur physique ou le rapport de l'énergie thermique transféré par unité de temps et de surface au gradient de température.

$$\lambda = \frac{\Phi}{\Delta T} \quad (1.7)$$

2. Principaux modes de transferts thermiques :

Dans les transferts thermiques, on distingue trois modes. A savoir, la conduction, le rayonnement et la convection.

2.1. Convection :

La convection est un phénomène de transmission de chaleur entre une surface solide et un fluide adjacent (un liquide ou gaz) en mouvement. La convection fait intervenir les effets de conduction et d'écoulement fluide. En effet, la chaleur est tout d'abord transmise par conduction entre la surface solide et le fluide adjacent, puis elle est emportée par l'écoulement du fluide. Plus l'écoulement est vigoureux, meilleure est la convection. La figure 1.2 illustre un corps chaud refroidi par un écoulement d'air. La chaleur est transmise de la surface solide à haute température à la couche d'air adjacent à basse température par conduction (un mouvement chaotique des molécules d'air), puis elle est emportée par l'écoulement de l'air (un mouvement macroscopique des molécules d'air). La couche d'air chaud emportée fait alors place à une nouvelle couche d'air plus froid.

L'effet global de la convection, est exprimé par la loi de Newton du refroidissement :

$$\phi = h S (T_p - T_\infty) \quad (1.8)$$

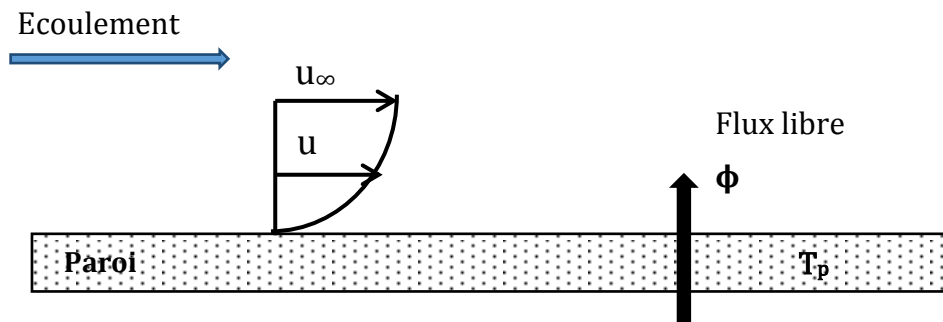


Figure 1.2 : Transfert de chaleur par convection à partir d'une plaque.

Les phénomènes de convection interviennent dans la transmission de la chaleur chaque fois qu'un fluide se déplace par rapport à des éléments fixes. Lorsqu'au sein du fluide, se produit un mouvement, dû simplement aux différences de densité résultant des gradients de température, on dit que la convection est naturelle ou libre. Par contre, si le mouvement du fluide est provoqué par une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé convection forcée.

La convection forcée concerne les mouvements convectifs qui apparaissent sous l'action d'une source externe, telle qu'une pompe ou le déplacement d'un objet dans le fluide, les mouvements induits par une différence de pression sont des mouvements de convection forcée où l'écoulement persiste même en l'absence de gradient de température. Dans la convection forcée, le fluide doit son mouvement à une cause extérieure (pompe, ventilateur, agitateur, etc.). [1]

2.2. Rayonnement :

Contrairement aux deux phénomènes de conduction et de la convection qui impliquent un transfert d'énergie à travers un milieu matériel, la chaleur peut également être transférée à travers des zones où le vide est parfait. Le phénomène dans ce cas est le rayonnement électromagnétique. Des études thermodynamiques montrent qu'un émetteur thermique idéal, ou corps noir, émet de l'énergie à un rythme proportionnel à la quatrième puissance de la température absolue du corps et directement proportionnel à sa surface spécifique. Ainsi l'équation s'écrit :

$$\phi_{\text{émis}} = \sigma S T^4 \quad (1.9)$$

Pour tenir compte de la nature "grise" des surfaces, un autre facteur dans l'équation (1.10), appelé émissivité, qui relie le rayonnement de la surface "grise" à celui d'une surface noire idéale est introduit. De plus, il faut tenir compte du fait que tout le rayonnement sortant d'une surface n'atteindra pas l'autre puisque le rayonnement électromagnétique se déplace en lignes droites et qu'une partie sera perdue dans l'environnement. Donc deux nouveaux facteurs sont introduits dans l'équation (1.8) pour tenir compte des deux situations, de sorte que l'équation s'écrit sous cette forme :

$$\phi = \epsilon_r F_G \sigma S (T_1^4 - T_2^4) \quad (1.10)$$

ϵ_r : L'émissivité du corps considéré (toujours comprise entre 0 et 1)

Et σ_r : la constante de Stefan-Boltzmann est égale à $\sigma_r = 5.66961 \cdot 10^{-8} \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$.

F_G : est la fonction géométrique "facteur de forme"[1].

2.3. Conduction

La conduction est le phénomène de transmission de chaleur résultant de l'interaction entre les particules énergétiques au sein d'une substance. La conduction peut se manifester dans les solides, les liquides et les gaz. Dans les liquides et les gaz, la conduction est due aux collisions entre les molécules animées par un mouvement donné. En ce qui concerne les solides, la conduction est due à la propagation des vibrations des atomes dans le réseau atomique ainsi qu'au déplacement des électrons libres.

On observe que le flux thermique transmis par conduction (Φ) à travers un milieu d'épaisseur Δx est proportionnel à la différence de température ΔT à travers ce milieu et l'aire de la surface normale dans la direction de la transmission de la chaleur S , et elle est inversement proportionnelle à l'épaisseur de ce système.

$$\Phi = -\lambda S \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (1.11)$$

Des matériaux comme le cuivre et l'argent sont de bons conducteurs thermiques et électriques (Leur conductivité est grande). A l'inverse, des matériaux comme le bois, le caoutchouc et la mousse d'uréthane sont des matériaux isolants. Ils sont de mauvais conducteurs de chaleur (leur conductivité est faible).

A la limite lorsque $\Delta x \rightarrow 0$, l'expression devient :

$$\Phi = -\lambda S \frac{dT}{dx} \quad (1.12)$$

L'équation (1.12) est connue sous le nom de **loi de Fourier**. Selon cette loi, la puissance thermique transmise par conduction dans une direction donnée est proportionnelle au gradient de température [5].

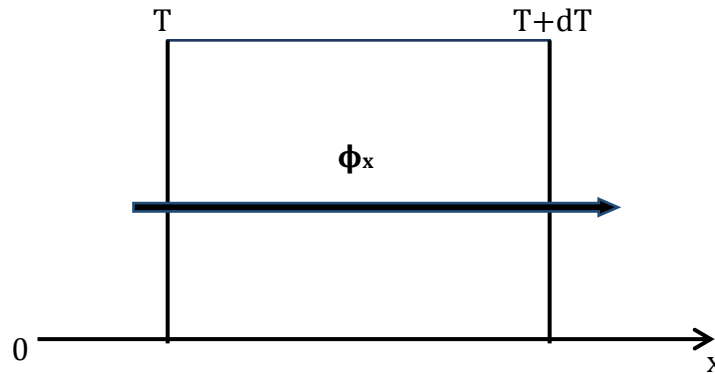


Figure 1.3 : Conduction entre deux plaques horizontales.

2.3.1 : Loi de Fourier

La théorie de la conduction repose sur la loi de Fourier (1807), elle décrit le phénomène de la conductivité thermique, c'est-à-dire la description de la diffusion de la chaleur à travers un matériau solide.

Fourier a découvert que le flux de chaleur qui traverse un matériau d'une face A à une face B est toujours proportionnel à l'écart de température entre les deux faces

Si le matériau a une température homogène (pas d'écart de température) il n'y a pas de flux de chaleur.

Si dans le cas où le matériau est soumis à une différence de température on dit que le système est en état de déséquilibre, un flux de chaleur va se créer du plus chaud vers le plus froid, ce flux est proportionnel à cette différence de chaleur.

L'équation de la loi de Fourier s'écrit :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \cdot S \cdot \overrightarrow{\text{grad } T} \quad (1.13)$$

Ou sous la forme algébrique :

$$\varphi = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.14)$$

2.3.2 : Equation de la chaleur

Considérons le système unidimensionnel illustré à (**la figure 1.4**). Si le système est en régime permanent, c'est-à-dire que la température ne change pas avec le temps, alors le

problème est simple, il suffit d'intégrer l'équation (1.14) et remplacer les valeurs appropriées pour résoudre le problème et trouver l'expression de la température.

Cependant, si la température du solide change avec le temps, ou s'il y a des sources de chaleur ou des puits dans le solide, la situation est plus complexe. Nous considérons le cas général où la température peut changer avec le temps et où des sources de chaleur peuvent être présentes dans le corps. Pour l'élément d'épaisseur dx , le bilan énergétique suivant la direction (Ox) s'écrit :

Énergie générée dans la face gauche + chaleur générée dans l'élément = Variation de l'énergie interne + énergie dissipée en face droite.

- Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit comme suite :

$$dE_{\text{géné}} = m \cdot C_p \cdot dT \quad (1.15)$$

$$E_e - E_s = E_{\text{géné}} \quad (1.16)$$

$$dE = \Phi \cdot dt \quad (1.17)$$

En l'appliquant dans notre bilan on obtient :

$$\Phi_e dt - \Phi_s dt = mC_p \cdot dT \quad (1.18)$$

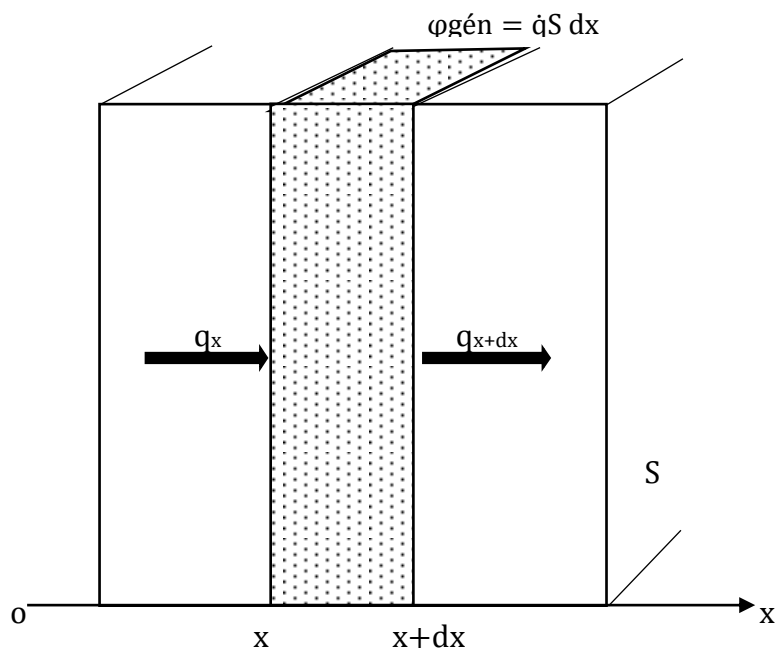


Figure 1.4 : Bilan thermique sur un système élémentaire.

Variation de l'énergie interne

$$dE_e = \rho c S \frac{\partial T}{\partial x} dx \quad (1.19)$$

Sortie d'énergie à droite de la figure

$$q_{x+dx} = -\lambda S \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+dx} \quad (1.20)$$

$$q_{x+dx} = -S \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] \quad (1.21)$$

Dans lequel :

\dot{q} = énergie générée par unité de volume, W / m³

c = chaleur spécifique du matériau, J / kg °C

ρ = masse volumique, kg / m³

En combinant les relations ci-dessus, on obtient :

$$-\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} + \dot{q} S dx = \rho c S \frac{\partial T}{\partial \tau} dx - S \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] \quad (1.22)$$

Où :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.23)$$

C'est l'équation unidimensionnelle de conduction thermique. Pour traiter plus d'un flux de chaleur unidimensionnel, il suffit de tenir compte de la quantité de chaleur qui entre et sort d'un volume unitaire dans les trois coordonnées, comme le montre la figure (1.4). Le bilan énergétique s'écrit :

$$q_x + q_y + q_z + q_{\text{gén}} = q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz} + \frac{dE}{dt} \quad (1.24)$$

Et les quantités d'énergie sont données par :

$$q_x = -\lambda dy dz \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.25)$$

$$q_{x+dx} = \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dy dz \quad (1.26)$$

$$q_y = -\lambda dx dz \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.27)$$

$$q_{y+dy} = \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy \right] dx dz \quad (1.28)$$

$$q_z = -\lambda \, dx \, dy \, \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.29)$$

$$q_{z+dz} = \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz \right] dx \, dy \quad (1.30)$$

$$q_{\text{gèn}} = \dot{q} \, dx \, dy \, dz \quad (1.31)$$

$$\frac{dE}{d\tau} = \rho c \, dx \, dy \, dz \, \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.32)$$

Où la quantité α est appelée la diffusivité thermique du matériau. Plus la valeur de α est élevée, plus la chaleur se diffuse rapidement à travers le matériau. C'est ce que l'on peut constater en examinant les quantités qui composent α . Une valeur élevée de α peut résulter soit d'une valeur élevée de conductivité thermique, qui indiquerait un taux de transfert d'énergie rapide, soit d'une valeur peu élevée de la capacité calorifique ρC_p . La diffusivité thermique α est en mètres carrés par seconde [m^2/s].

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{q} = \frac{1}{\alpha} \frac{dT}{dt} \quad (1.33)$$

Nous nous limitons, dans ce qui suit, à ce type d'équation seulement. On en déduit aisément les cas particuliers suivants que l'on rencontre très fréquemment :

- Milieu avec sources internes, en régime permanent (équation de POISSON):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{q} = 0 \quad (1.34)$$

- Milieu sans source interne, en régime permanent (équation de LAPLACE) :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (1.35)$$

- Milieu sans source interne, en régime variable (équation de FOURIER):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{dT}{dt} \quad (1.36)$$

L'équation générale tridimensionnelle de la conduction thermique s'écrit donc :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{dT}{dt} \quad (1.37)$$

Pour une conductivité thermique constante, l'équation (1.37) se simplifie à :

- En coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.38)$$

• En coordonnées cylindrique :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.39)$$

• En coordonnées sphérique :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.40)$$

2.3.3 : Conditions initiales et conditions aux limites spatio-temporelles

L'équation générale de la chaleur (1.36) est une équation aux dérivées partielles du second ordre en espace et du premier ordre en temps. La résolution de cette équation permet de connaître à chaque instant la température en tout point du matériau. Elle suppose toutefois que la répartition initiale de température ainsi que les conditions aux limites (lois de variation de la température ou de ses dérivées) sur les frontières du domaine à étudier soient définies afin que le problème thermique soit correctement posé (et admette une solution unique).

a. Conditions initiales

En supposant qu'à l'instant $t=0$ la distribution des températures à l'intérieur du corps solide et sur sa surface est connue ; alors on écrit :

$$T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z) \quad (1.41)$$

b. Conditions aux limites :

Les conditions aux limites résultent des différents phénomènes physiques de transfert de chaleur. On distingue plusieurs types :

b. 1. Condition de Dirichlet (température imposée) :

Cette condition se met sous la forme :

$$T = T_{\text{imp}} \quad (1.42)$$

Où T_{imp} , fonction réelle, représente une température imposée sur l'extrémité de la paroi.

b. 2. Condition de Neumann : flux imposé

Généralement cette condition s'assimile à une paroi solide qui a une capacité d'évacuation (ou d'apport) de calories données. C'est le flux de chaleur qui est imposé à l'interface. Cette condition, s'écrit de la manière suivante :

$$\vec{\phi} \cdot \vec{n} = -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \vec{n} = \phi_{\text{imp}} \quad (1.43)$$

Où ϕ_{imp} , fonction réelle, représente pour le problème thermique un flux de chaleur imposé à travers la frontière.

Remarques : Si le flux est nul ($\phi_{\text{imp}} = 0$), on parle alors de condition adiabatique.

Le flux négatif ($\phi_{\text{imp}} < 0$) suggère un apport d'énergie à la paroi contrairement au flux positif ($\phi_{\text{imp}} > 0$) qui induit une perte d'énergie à la paroi.

b. 3. Conduction : échange thermique entre le matériau et un outil.

Elle se caractérise par un transfert thermique entre deux solides en contact ; ce transfert se produisant des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides.

b. 4. Convection/Rayonnement : échange thermique entre le matériau et l'air.

Un phénomène de convection se produit quand un solide (ou fluide très visqueux) est en contact avec un fluide (gaz ou liquide fluide). Autrement dit, ces transferts thermiques ont lieu soit entre un solide et un liquide, soit entre un solide et l'air, soit entre un liquide et l'air. C'est donc le cas d'un matériau en contact avec un fluide dont les particules sont libres de se déplacer. La loi couramment admise est la même que pour la conduction : c'est une loi répondant à la loi de Fourier :

$$(\vec{\phi}) \vec{n} = -\lambda \nabla T \vec{n} = h_{\text{cv}}(T - T_f) \quad (1.44)$$

Où h_{cv} est le coefficient de transfert thermique de convection entre le matériau et le fluide et T_f la température moyenne du fluide, supposée constante.

Le rayonnement, quant à lui, est le dernier mode de transfert de chaleur : "tout corps chaud émet de l'énergie dans toutes les directions". Etablies par Stefan-Boltzmann, les lois de rayonnement permettent d'exprimer le flux de rayonnement échange entre la surface S_4 et le milieu qui entoure S_4 . Nous choisissons une approximation de l'une de ces lois qui se met sous la forme très simplifiée :

$$\vec{\phi} \vec{n} = \varepsilon_r \sigma_r (T^4 - T_\infty^4) \quad (1.45)$$

Où T_∞ est la température extérieure,

En somme, lorsque des transferts thermiques se produisent entre le matériau et l'air à travers la surface S_4 , ces transferts seront à la fois modélisés par un phénomène de convection et de rayonnement émis par le domaine. Ces deux modes de transfert peuvent être regroupés en une seule condition. Nous optons pour une écriture simplifiée :

$$\vec{\phi}\vec{n} = -\lambda\nabla T\vec{n} = h(T - T_\infty) \quad (1.46)$$

$$\text{Avec : } h = h_{cv} + h_r \quad (1.47)$$

Et

$$h_r = \varepsilon_r \sigma_r (T + T_\infty)(T^2 + T_\infty^2) \quad (1.48)$$

Où h , h_{cv} et h_r sont respectivement les coefficients de transfert thermique global, de convection et de rayonnement, T_∞ la température extérieure (supposée constante), ε_r l'émissivité du corps considéré, σ_r la constante de Stefan-Boltzmann et T la température du matériau.

Méthodes analytiques pour la résolution de l'équation de la conduction

Pour résoudre un problème de conduction, on distingue plusieurs méthodes, les plus utilisées sont la méthode analytique, la méthode numérique ou la méthode expérimentale. Le choix de la méthode dépend de plusieurs paramètres ; le régime (permanant ou variable), la nature des conditions spatio-temporelles, la nature du solide et de son environnement (forme géométrique...),...etc. Nous décrivons dans ce chapitre un certain nombre de méthodes analytiques utilisées selon le cas, pour la résolution de l'équation de la chaleur.

La méthode de séparation des variables (problèmes aux valeurs propres); elle est plus pratique à appliquer en dimensions finies. Elle se ramène à un problème aux valeurs propres, qui devient compliqué à résoudre dans le cas multidimensionnel, car les valeurs propres dans les différentes directions sont liées. [8]

2.1. Méthodes de résolution en régime transitoire (variable)

Nous décrivons, dans ce qui suit, un certain nombre de méthodes de résolution de l'équation de la chaleur en régime variable. Le problème consiste à trouver le champ de température $T(M, t)$, ainsi que le flux de chaleur transmis. La recherche de $T(M, t)$ s'effectue en résolvant un système d'équations aux dérivées partielles qui comprend l'équation de la chaleur, les conditions aux limites et la condition initiale.

2.2. Méthode de la transformation de Laplace

La transformée de Laplace est utilisée dans divers domaines scientifiques, que ce soit en physique, en mécanique, ... etc. La difficulté de l'utilisation de la transformée de Laplace est qu'on ne peut pas toujours trouver analytiquement sa transformée inverse. Ainsi, de nouvelles techniques d'inversion numérique se sont apparues, telles que la méthode de Stehfest, la méthode de Zakian, la méthode de séries de Fourier [11], ainsi que d'autres méthodes.

Cette méthode est basée sur la transformation intégrale définie par :

$$L[T(t)] = \theta(p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt)T(t)dt \quad (2.1)$$

$$L^{-1}[\theta(p)] = T(t) \text{ Transformée inverse} \quad (2.2)$$

$$L[T(t)]^{-1} = \frac{\ln 2}{t} \sum_{i=1}^n V_i T\left(\frac{\ln 2}{t} i\right) \quad \text{Algorithme de Stehfest} \quad (2.3)$$

Les coefficients V_i sont donnés par la relation [12] :

$$V_i = (-1)^{\binom{n}{\frac{n}{2}+1}} \sum_{k=\binom{i+1}{\frac{i}{2}}}^{\min\left(i, \frac{n}{2}\right)} \frac{k^{\binom{n}{\frac{n}{2}+1}} (2k)!}{\left(\frac{n}{2} - k\right)! k! (i - k)! (2k - 1)!} \quad (2.4)$$

Le paramètre n représente le nombre de termes utilisés dans la sommation

Il n'existe pas de formule générale permettant de calculer $T(t)$ connaissant (p) . On connaît cependant l'expression exacte de $T(t)$ pour certaines fonctions particulières $\theta(p)$ (cf. annexe A.2.1). L'utilisation de ces tables associées aux propriétés particulières de la transformation de Laplace inverse permet de résoudre certain nombre de cas. On essaiera toujours de décomposer une fonction complexe en somme, produit, ou série de fonctions simples facilement inversibles. En appliquant la transformée de Laplace à l'équation de la conduction dans un système unidimensionnelle sans source :

$$\frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

Si la distribution de température initiale est uniforme ($T(x,0) = T_0$), on obtient [11]

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{p}{\alpha}\theta = \frac{T_0}{\alpha} \quad (2.4)$$

2.3. Méthode de la séparation des variables (séries de Fourier)

Vers 1802-1804, c'est Joseph Fourier qui trouva l'équation de la propagation de la chaleur dans les corps solides. En 1807, il mit au point une méthode pour résoudre cette équation. Il utilisa sa technique mathématique pour élucider de nombreux exemples de propagation de la chaleur. Il remplaçait une fonction unique, mais difficile à décrire mathématiquement, par une série beaucoup plus maniable de fonctions sinus ou cosinus, dont la somme reconstituait la fonction initiale [10].

Soit T une fonction définie et intégrable sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Les nombres a_k et b_k définis par :

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \cos kx \, dx, & k \geq 0 \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \sin kx \, dx, & k \geq 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (2.6)$$

$$T(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (2.7)$$

On cherche s'il existe une solution particulière, à variables séparées, satisfaisant les conditions initiales et les conditions aux limites, qui s'écrit sous la forme suivante :

$$T(x, t) = X(x) \cdot Y(t) \quad (2.8)$$

Où $X(x)$ est en fonction de x et $Y(t)$ est en fonction de t .

En appliquant dans l'équation de la chaleur on obtient :

$$X''(x)Y(t) - \frac{1}{\alpha} X(x)Y'(t) = 0 \quad (2.9)$$

Où encore :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha} \frac{Y'(t)}{Y(t)} \quad (2.10)$$

Le premier membre de l'égalité dépend seulement de x ou peut être une constante. Le second membre dépend seulement de t ou peut être aussi une constante. L'égalité devant être vérifiée pour toutes les valeurs de x et de t , ceci n'est possible que si chaque membre est égal à une constante ; soit :

$$\begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y'(t)}{\alpha Y(t)} = b & (a) \\ \frac{\alpha X''(x)}{X(x)} = \frac{Y'(t)}{Y(t)} = a & (b) \end{cases} \quad \text{Ou} \quad (2.11)$$

Avec : $b = \alpha a$

Le choix des constantes a ou b se fait à partir de considérations physiques :

- Pour les processus thermiques tendant vers une distribution de température constante à l'équilibre, on choisit b, qui doit être nécessairement négatif. En effet l'intégration relative au temps fournit : $Y = A \exp(\alpha at)$, ou A est une constante. Si a était positif, pour des temps croissants, la température tendrait vers une valeur infinie, ce qui est physiquement absurde.

En posant : $a = -\lambda^2$, on obtient $Y = A \exp(-\alpha \lambda^2 t)$,

- Si le phénomène est de nature périodique en fonction du temps, on prend alors b. cela doit être un nombre imaginaire : en effet en posant $b = i\omega$, on obtient la solution :

$$Y = A \exp(i\omega t) = A (\cos\omega t + i \sin\omega t) \quad (2.12)$$

On résout alors le problème dans un domaine complexe et on ne retiendra à la fin que la partie réelle de la solution obtenue.

La solution élémentaire T est le produit des solutions X et Y du système (2.8), dans lesquelles interviennent des constantes. Celles-ci sont déterminées dans chaque cas particulière par les conditions aux limites spatio-temporelles. Ces conditions sont imposées, selon le type de problème, soit à chaque solution élémentaire, soit à la solution somme finie ou infinie de solution élémentaires, soit des deux manières à la fois. La possibilité de faire la somme de plusieurs solution élémentaire (sous réserve de convergence) et due à la linéarité du système des conditions initiales et les conditions aux limites.[4]

2.4. Application à un mur simple :

Soit un mur d'épaisseur L de surface S dont les deux faces sont soumises à de la convection, caractérisée par un coefficient h, avec l'environnement à la température T_∞ . Initialement, la température est uniforme dans le mur T_0 . Si la résistance interne n'est pas négligeable, la température est donc fonction du temps et de la position.

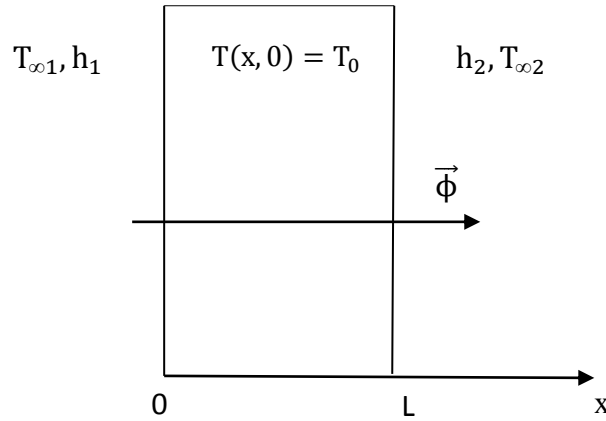


Figure 2.1 : Représentation de la température en fonction du temps et de position

Hypothèses de simplification : $T = T(t, x)$

Pas de génération de chaleur : $\dot{q} = 0$

L'équation de la chaleur s'écrit sous forme :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad x \in [0, L] ; t \geq 0 \quad [0, \infty] \quad (2.13)$$

Les conditions aux limites et initiales sont :

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_0 & t = 0, \quad x \geq 0 \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1 (T_{\infty 1} - T(0, t)) & t \geq 0 \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_2 (T(L, t) - T_{\infty 2}) \end{cases} \quad (2.14)$$

La solution de ce problème sera donc fonction des grandeurs qui apparaissent dans l'équation différentielle et les conditions aux limites et initiales. En introduisant maintenant des nombres adimensionnels, on peut alors obtenir une équation différentielle dont la solution sera plus générale.

On effectue le changement de variable suivant :

$$\theta = T(x, t) - T_0 \quad (2.15)$$

Où :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.16)$$

L'équation (2.1) peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2.17)$$

Les conditions aux limites deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(x, 0) = 0 \\ \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1(\theta(0, t) - \theta_{\infty 1}) \\ -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_2(\theta(L, t) - \theta_{\infty 2}) \end{array} \right. \quad (2.18)$$

2.4.1. Méthode de la transformée de Laplace :

En prenant la transformée de Laplace de l'EDP et des conditions aux limites, on obtient :

La transformée de Laplace de $\theta(x, t)$ par rapport au temps s'écrit :

$$L(\theta(t)) = \int_0^{\infty} [\exp(-pt)\theta(x, t)] dt \quad (2.19)$$

La transformée de Laplace de l'équation (2.1) conduit :

$$\int_0^{\infty} \exp(-pt) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dt - \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \exp(-pt) \frac{\partial \theta}{\partial t} dt = 0 \quad (2.20)$$

On intègre par partie on obtient :

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\infty} \exp(-pt)\theta(x, t) dt - \frac{1}{\alpha} \left[[\exp(-pt)\theta(x, t)] \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} \exp(-pt)\theta(x, t) dt \right] = 0$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\partial \theta}{\partial t} \exp(-pt) dt = \frac{1}{\alpha} p \bar{\theta} - \frac{\theta(x, 0)}{\alpha} \quad (2.21)$$

$$u = \theta \text{ et } v = \exp(-pt)$$

D'après l'intégration par partie on trouve :

$$\theta \exp(-pt) \Big|_0^{\infty} = \int_0^{\infty} \frac{\partial \theta}{\partial t} \exp(-pt) dt - p \int_0^{\infty} \theta \exp(-pt) dt \quad (2.22)$$

$$\bar{\theta} = \int_0^{\infty} \exp(-pt)\theta(x, 0)dt \quad (2.22. a)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} [p\bar{\theta} - \theta(x, 0)] = 0 \quad \text{avec } \theta(x, 0) = 0 \quad (2.23)$$

Cette équation est sous forme :

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} - q^2 \bar{\theta} = 0 \quad \text{avec } q^2 = \frac{p}{\alpha} \quad (2.24)$$

La solution est sous forme :

$$\bar{\theta} = A \exp(-qx) + B \exp(qx) \quad (2.25)$$

D'après les conditions aux limites

Pour $x=0$

$$\begin{cases} \bar{\theta}(0, p) = A + B \\ \left. \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right|_{x=0} = q(-A \exp(-qx) + B \exp(qx)) = q(B - A) \end{cases} \quad (2.26)$$

Pour $x=L$

$$\begin{cases} \bar{\theta}(L, p) = A \exp(-qL) + B \exp(qL) \\ \left. \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right|_{x=L} = q(-A \exp(-qL) + B \exp(qL)) \end{cases} \quad (2.27)$$

On trouve :

$$\begin{cases} -\lambda q(B - A) = h_1(A + B) - h_1 \frac{\theta_{\infty 1}}{p} \\ -\lambda q(-A \exp(-qL) + B \exp(qL)) = h_2(A \exp(-qL) + B \exp(qL)) + h_2 \frac{\theta_{\infty 2}}{p} \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\lambda q B + h_1 B = -h_1 A + \lambda q A + h_1 \frac{\theta_{\infty 1}}{p} \quad (2.29a)$$

$$B(\lambda q + h_1) = A(\lambda q - h_1) + h_1 \frac{\theta_{\infty 1}}{p} \quad (2.29b)$$

$$B = A \frac{(\lambda q - h_1)}{(\lambda q + h_1)} + \frac{h_1}{P(\lambda q + h_1)} \theta_{\infty 1} \quad (2.29c)$$

D'après le dévalement de l'équation (2.13) en trouve :

$$A(\lambda q - h_2) \exp(-qL) = B (\lambda q + h_2) \exp(qL) + h_2 \frac{\theta_{\infty 2}}{p} \quad (2.30)$$

En remplace la valeur de B dans l'équation (2.15) :

$$\begin{aligned} A(\lambda q - h_2) \exp(-qL) &= A \frac{(\lambda q - h_1)}{(\lambda q + h_1)} \\ &+ \frac{h_1}{P(\lambda q + h_1)} \theta_{\infty 1} \left[(\lambda q + h_2) \exp(qL) + h_2 \frac{\theta_{\infty 2}}{p} \right] \end{aligned} \quad (2.30. b)$$

$$\begin{aligned} A(\lambda q - h_2) \exp(-qL) &= A \frac{(\lambda q - h_1)(\lambda q + h_2)}{(\lambda q + h_1)} \exp(qL) + \frac{h_1(\lambda q + h_2)}{p(\lambda q + h_1)} \theta_{\infty 1} \exp(qL) \\ &+ h_2 \frac{\theta_{\infty 2}}{p} \end{aligned} \quad (2.30. b)$$

On trouve

$$A = \frac{h_1(\lambda q + h_2)}{p2\lambda q(h_1 - h_2)} \theta_{\infty 1} + \frac{h_2(\lambda q + h_1)}{p2\lambda q(h_1 - h_2)} \exp(-qL) \quad (2.31)$$

2.4.2: Méthode de la séparation des variables (séries de Fourier)

Son principe est basé sur la décomposition en produit de fonctions et la recherche d'une solution de même fréquence que l'excitation.

Formulation mathématique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \\ T(x, 0) = T_0 \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1 (T_{\infty 1} - T(0, t)) \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_2 (T(L, t) - T_{\infty 2}) \end{array} \right. \quad (2.32)$$

En effectuant le changement de variable suivant :

$$\theta = T(x, t) - T_0 \quad (2.33)$$

On obtient le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ \theta(x, 0) = 0 \\ \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_0 = h_1(\theta(0, t) - \theta_{\infty 1}) \\ -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_L = h_2(\theta(L, t) - \theta_{\infty 2}) \end{array} \right. \quad (2.34)$$

On remarque que les conditions aux limites ne sont pas homogènes, donc en supposant une solution de genre :

$$\theta(x, t) = \theta^*(x, t) + \psi(x) \quad (2.35)$$

$$\text{I} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \theta^*(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta^*(x, t)}{\partial t} \\ \theta^*(x, 0) = -\psi(x) \\ \lambda \frac{\partial \theta^*(x, t)}{\partial x} \Big|_0 = h_1 \theta^*(0, t) \\ -\lambda \frac{\partial \theta^*}{\partial x} \Big|_L = h_2 \theta^*(L, t) \end{array} \right. \quad (2.36)$$

$$\text{II} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = 0 \\ \lambda \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \Big|_0 = h_1(\psi(0) - \theta_{\infty 1}) \\ -\lambda \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \Big|_L = h_2(\psi(L) - \theta_{\infty 2}) \end{array} \right. \quad (2.37)$$

Solution de système II

$$\psi(x) = Ax + B \quad (2.38)$$

En utilisant les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_0 = h_1(\psi(0) - \theta_{\infty 1}) \\ -\lambda \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_L = h_2(\psi(L) - \theta_{\infty 2}) \end{array} \right. \quad (2.39)$$

On a $\psi(0) = B$ et $\psi(L) = AL + B$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda A = h_1(B - \theta_{\infty 1}) \\ -\lambda A = h_2((AL + B) - \theta_{\infty 2}) \end{array} \right. \quad (2.40)$$

On obtient :

$$A = \frac{h_1}{\lambda} \theta_{\infty 2} \left(\frac{Bi_2}{Bi_1(1 + Bi_2)} \right) \quad (2.41)$$

$$B = \theta_{\infty 1} + \theta_{\infty 2} \left(\frac{Bi_2}{Bi_1(1 + Bi_2)} \right) \quad (2.42)$$

Avec Bi_i est le nombre de Biot.

$$Bi_1 = \frac{h_1 L}{\lambda} \quad , \quad Bi_2 = \frac{h_2 L}{\lambda}$$

Donc :

$$\psi(x) = \left[\frac{h_1}{\lambda} \theta_{\infty 2} \left(\frac{Bi_2}{Bi_1(1 + Bi_2)} \right) \right] x + \theta_{\infty 1} + \theta_{\infty 2} \left(\frac{Bi_2}{Bi_1(1 + Bi_2)} \right) \quad (2.43)$$

Solution de système I par la méthode de séparation de variables

On suppose :

$$\theta^*(x, t) = X(x)\Gamma(t) \quad (2.44)$$

Avec :

$$\Gamma(t) = C \exp -\alpha\beta^2 t \quad (2.45)$$

Et $X(x)$ est la solution de système d'équation Sturm Liouville

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \beta^2 X = 0 \\ \lambda \frac{\partial X}{\partial x} \Big|_0 = h_1 X(0) \\ -\lambda \frac{\partial X}{\partial x} \Big|_L = h_2 X(L) \end{cases} \quad (2.46)$$

Donc la solution est genre

$$X(x) = D \cos(\beta x) + E \sin \beta x \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial X(x)}{\partial x} = \beta [-D \sin \beta x + E \cos \beta x] \quad (2.48)$$

Selon la 1^{er} condition aux limites

$$\lambda \frac{\partial X(x)}{\partial x} \Big|_0 = h_1 X(0) \quad (2.49)$$

$$\Rightarrow \lambda \beta (E \cos(0)) = h_1 D \cos(0)$$

$$\Rightarrow E = \frac{h_1}{\lambda \beta} D \quad (1) \quad (2.50)$$

Selon la 2^{ème} condition et en utilisant (1)

$$-\lambda \frac{\partial X(x)}{\partial x} \Big|_L = h_2 X(L) \quad (2.51)$$

$$-\lambda \beta \left[-D \sin(\beta L) + \frac{h_1}{\lambda \beta} D \cos(\beta L) \right] = h_2 \left[D \cos(\beta L) + \frac{h_1}{\lambda \beta} D \sin(\beta L) \right] \quad (2.52)$$

$$\Rightarrow \left[\lambda \beta \sin(\beta L) - h_1 \cos(\beta L) = h_2 \cos(\beta L) + \frac{h_2 h_1}{\lambda \beta} \sin(\beta L) \right] \frac{1}{\lambda} \quad (2.53)$$

$$\Rightarrow \beta \sin(\beta L) - H_1 \cos(\beta L) = H_2 \cos(\beta L) + \frac{H_2 H_1}{\beta} \sin(\beta L) \quad (2.54)$$

$$\Rightarrow \left(\beta - \frac{H_2 H_1}{\beta} \right) \sin(\beta L) = (H_2 + H_1) \cos(\beta L) \quad (2.55)$$

$$\tan(\beta L) = \frac{\beta(H_2 + H_1)}{\beta^2 - H_2 H_1} \quad (2.56)$$

$$\text{avec } H_1 = \frac{h_1}{\lambda} \quad \text{et } H_2 = \frac{h_2}{\lambda}$$

$$X(\beta_n, x) = D_n \cos(\beta_n x) + E_n \sin(\beta_n x) = D_n \left[\cos(\beta_n x) + \frac{H_1}{\beta} \sin(\beta_n x) \right] \quad (2.57)$$

La solution finale est donnée donc par :

$$\theta^*(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X(\beta_n, x) \exp(-\alpha \beta^2 t) \quad (2.58)$$

On remplace $X(\beta_n, x)$ avec sa valeur en trouve :

$$\theta^*(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[\left(\cos(\beta_n x) + \frac{H_1}{\beta} \sin(\beta_n x) \right) \exp(-\alpha \beta^2 t) \right] \quad (2.59)$$

Avec $X(\beta_n, x)$ sont des fonctions propres et orthonormés.

β_n : les valeurs propres de l'équation transcendante

Tel que

$$\tan(\beta_n L) = \frac{\beta_n (H_2 - H_1)}{\beta_n^2 - (H_2 - H_1)} \quad (2.60)$$

$$C_n = \frac{-1}{N(\beta_n)} \int_0^L X(\beta_n, x) \psi(x) dx \quad (2.61)$$

Avec $C_n = C D_n$ qui peuvent plusieurs valeurs en fonction de β_n

$N(\beta_n)$: est la norme

$$N(\beta_n) = \int_0^L X^2(\beta_n, x) dx \quad (2.62)$$

$$X(\beta_n, x) = \cos \beta_n x + \frac{H_1}{\beta_n} \sin \beta_n x \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} \theta(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[\left(\cos(\beta_n x) + \frac{H_1}{\beta_n} \sin(\beta_n x) \right) \exp(-\alpha \beta_n^2 t) \right] + \left[\frac{h_1}{\lambda} \theta_{\infty 2} \left(\frac{Bi_2}{Bi_1(1 + Bi_2)} \right) \right] x \\ & + \theta_{\infty 1} \\ & + \theta_{\infty 2} \left(\frac{Bi_2}{Bi_1(1 + Bi_2)} \right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Qui nous donne le profil de température :

$$\begin{aligned} T(x, t) = & \left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[\left(\cos(\beta_n x) + \frac{H_1}{\beta_n} \sin(\beta_n x) \right) \exp(-\alpha \beta_n^2 t) \right] + \left[\frac{h_1}{\lambda} \theta_{\infty 2} \left(\frac{Bi_2}{Bi_1(1 + Bi_2)} \right) \right] x \right. \\ & \left. + \theta_{\infty 1} + \theta_{\infty 2} \left(\frac{Bi_2}{Bi_1(1 + Bi_2)} \right) \right] + T_0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

2.5: Résultats et discussions

Cette partie est consacrée à la présentation des résultats obtenus lors de la résolution de l'équation de la chaleur avec les différentes méthodes susmentionnées

Le cas à considérer dans cette partie, est celui d'un mur simple d'épaisseur $L=0,25m$, initialement était à une température $T_0 = 2^\circ C$ soumis aux conditions de troisième type sur les deux côtés, avec $h_1 = 16.66W/m^2^\circ C$ et une température d'ambiance $T_{\infty 1} = 100^\circ C$ sur la face en $x=0$, et $h_2 = 9.08W/m^2^\circ C$ dans une ambiance de $T_{\infty 2} = 20^\circ C$ sur la face en $x=L$

Ici, différents matériaux (Mur métallique, bois et un mur de brique en terre cuite) ont été choisis, afin de déterminer l'évolution de la température en fonction de temps au milieu du mur choisis et le profil de température le long de son épaisseur à des instants différents.

La table 2.1 représente la comparaison entre les résultats obtenus par les deux méthodes (la méthode Laplace et séparation des variables) et l'erreur relative dans le cas d'un mur en Duralumin

La formule qui permet le calcul de l'erreur est donnée comme suit :

$$\varepsilon = \left(\frac{(\text{Résultats issus de la transformation de Laplace} - \text{Résultats issus de la séparation de variables})}{\text{Résultats issus de la séparation des variables}} \right) \times 100$$

Temps [s]	Transformation de Laplace	Séparation des variables	Erreur relative [%]
7 min 8 s	1,23495516	1,23476851	$1,51 \cdot 10^{-02}$
10 min 12 s	1,64441174	1,64417708	$1,43 \cdot 10^{-02}$
20 min 4 s	3,35744785	3,35702193	$1,27 \cdot 10^{-02}$
45 min	7,31344881	7,31265318	$1,09 \cdot 10^{-02}$
1 h	9,60883142	9,60791075	$9,58 \cdot 10^{-02}$
2 h	17,9756318	17,9746977	$5,20 \cdot 10^{-02}$
2 h 45 min	21,3501902	21,3492552	$4,38 \cdot 10^{-02}$
4 h	31,3763429	31,3743368	$6,39 \cdot 10^{-02}$
4 h 45 min	34,1443996	34,1417738	$7,69 \cdot 10^{-02}$
10 h	54,094846	54,1028754	$1,48 \cdot 10^{-02}$

Table 2.1 : Comparaison entre les résultats obtenus par les deux méthodes de résolution pour le cas d'un mur en Duralumin

Nous constatons une légère différence entre les résultats obtenus, cette différence est de l'ordre de $10^{-02}\%$, une précision très satisfaisante, indiquant la fiabilité de la méthode de la transformation de Laplace (inversion par utilisation de l'algorithme de Stehfest) face à la méthode de la séparation des variables considérée comme méthode analytique exacte de référence.

2.5.1 : Comportement de la température en régime transitoire :

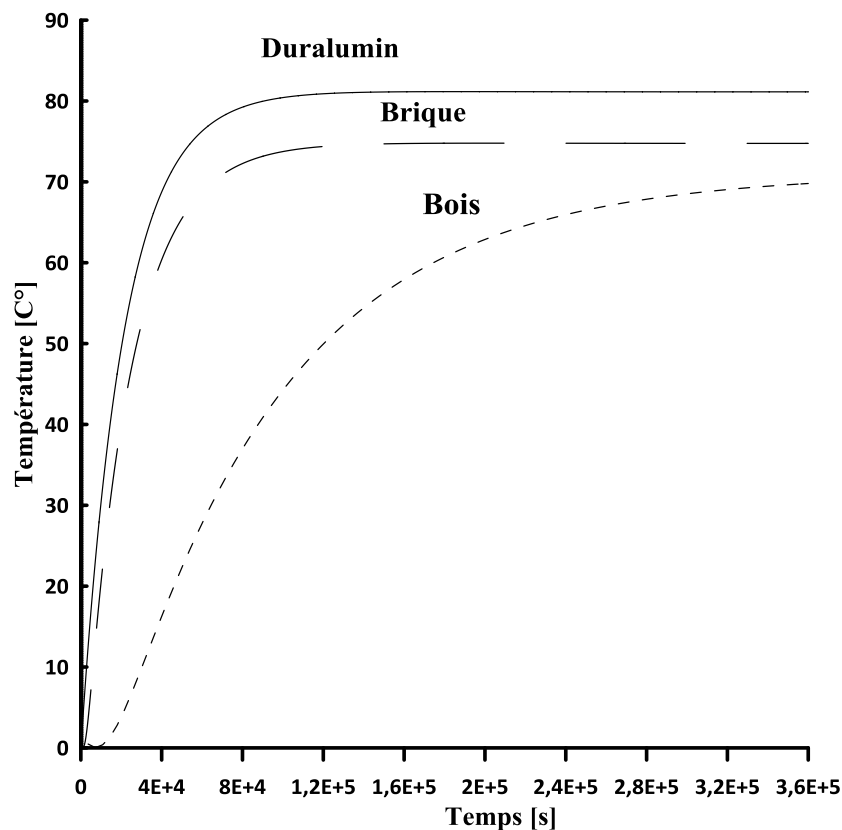


Figure 2.2. : Evolution de la température au centre de la paroi

La **figure 2.2** représente l'évolution de la température en fonction du temps au milieu d'un mur de différents matériaux. La température est en augmentation en fonction exponentielle du temps, jusqu'à une certaine valeur (estimé 81°C pour le mur en duralumin et environ 73°C pour le mur en brique), ou la température devient constante et indépendante du temps, ce qui correspond au régime permanent. Ce régime il est atteint plus rapidement pour le duralumin et la brique, et ça nécessite plus de temps pour le bois. Un comportement lié directement aux propriétés thermo physiques du matériau utilisé, plus précisément à sa diffusivité thermique. Par ailleurs, on constate que la température maximale atteinte en duralumin est plus importante à celle de la brique et celle du bois, portant tous les murs sont soumis aux mêmes conditions, cela est dû essentiellement à la conductivité thermique des matériaux.

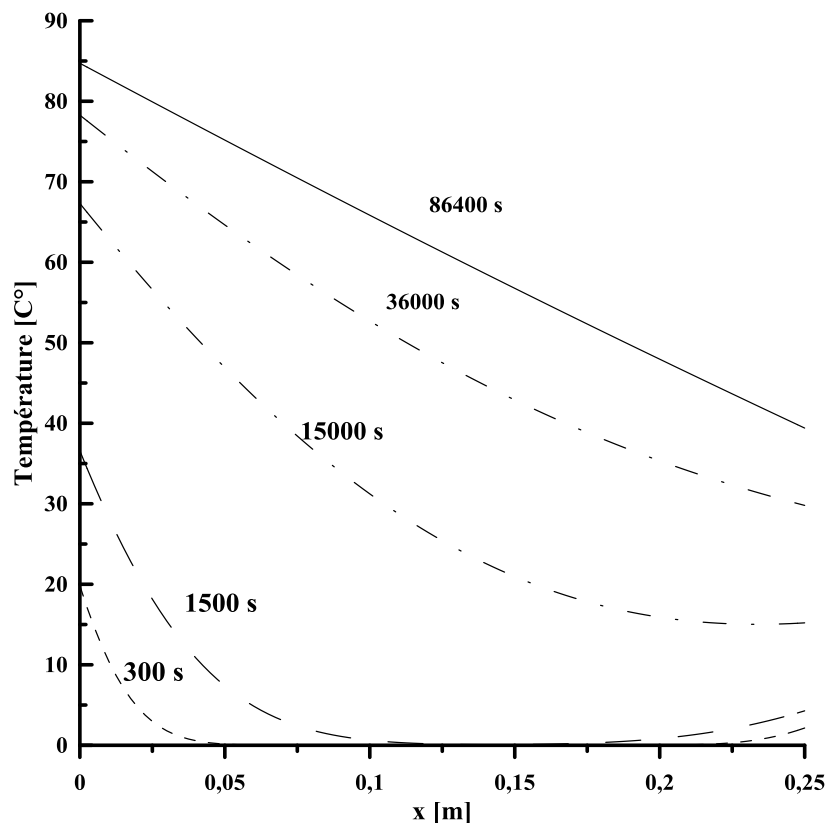


Figure 2.3 : Evolution de la température au long d'une paroi de brique ayant une Epaisseur de $L = 0.25\text{m}$

La **figure 2.3** donne le profil de température au long d'un mur en brique ayant une épaisseur de 0.25m pour des temps différents.

La fonction de la température est décroissante au long du mur, cela est dû à l'écart des températures des ambiances dans lesquelles il a été soumis ce mur. En régime transitoire, le

profil de la température est de forme parabolique qui devient de plus en plus une droite. A l'instant 86400s, le régime atteint est presque permanent et la température est une droite ayant une certaine pente, celle-ci est liée directement à la résistance thermique de la paroi.

2.5.2 : Comportement du flux thermique :

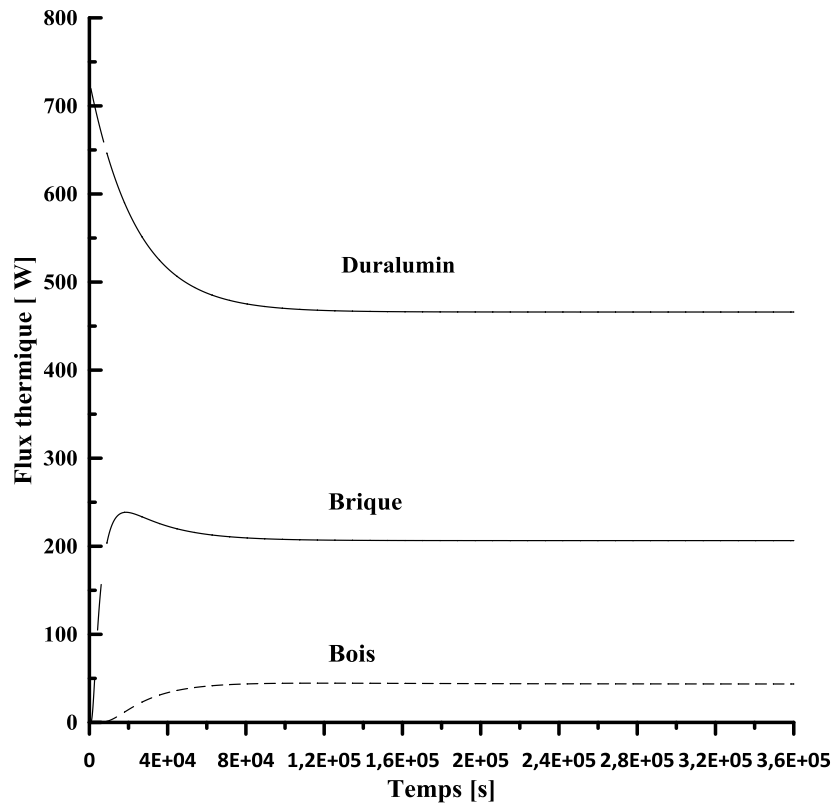


Figure 2.4 : Evolution de flux thermique en fonction de temps pour les différents matériaux

Dans la **figure 2.4**, on présente l'évolution de flux thermique en fonction de temps au milieu du mur pour différents cas de matériaux : le Bois, Brique et Duralumin.

Dans le cas de Duralumin, à l'instant initial le flux atteint un pic d'environ 700 W, puis il commence à diminuer jusqu'à $t = 1,4 \cdot 10^5$ s pour rentrer dans le régime permanent et se stabilise auprès de 500W.

Dans le cas de la brique, on a le même constat que le duralumin, sauf qu'ici, l'augmentation du flux est moins rapide et atteint une valeur maximale de 240W qui est moins importante que celle enregistrée dans le cas de duralumin, et le régime permanent est atteint à $t = 1,7 \cdot 10^5$ s avec une valeur de 210W. Le même constat pour le cas du Bois, ou le flux max est 40W et le régime permanent est atteint à partir $t = 2,8 \cdot 10^5$ s.

En résumé, le bois est le matériau le plus isolant parmi ceux que nous avons utilisé ici, par le fait qu'il possède une grande résistance thermique par conséquent le flux traversant le bois est le plus petit comparativement au Duralumin et la brique

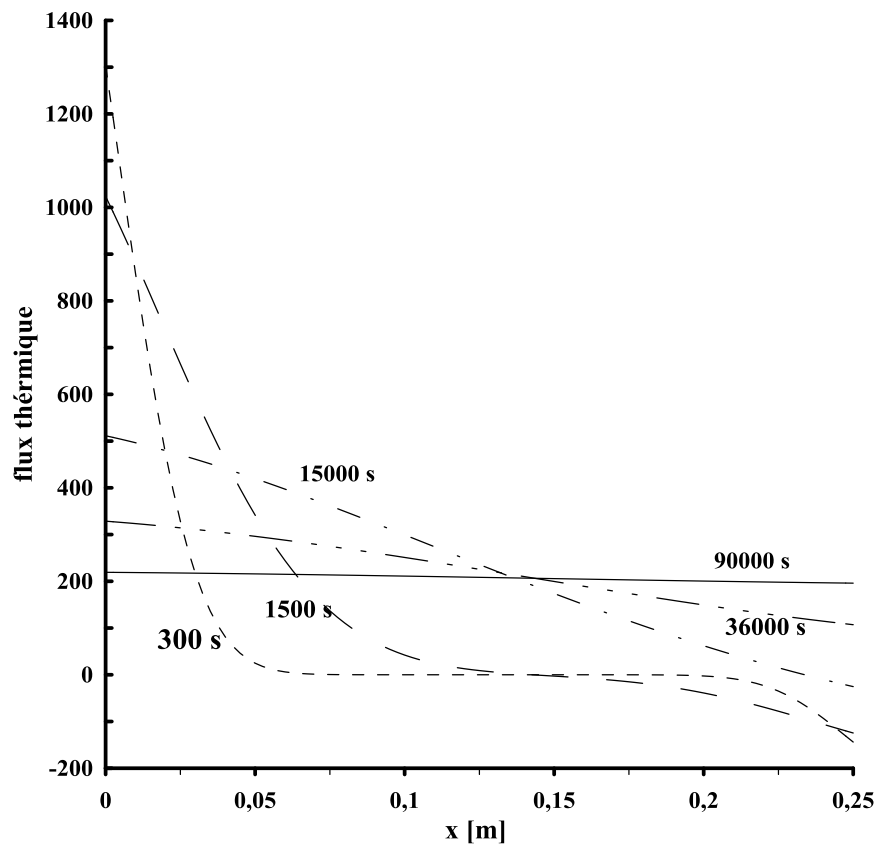


Figure 2.5 : Evolution de flux thermique au long d'une paroi de brique

L'évolution du flux thermique, au long d'un mur en Brique, est donnée par la **figure 2.5**. Ici, plusieurs courbes sont présentées pour des temps différents. Au départ, pour les temps très petits (300s, 1500s), le flux thermique pénètre le mur des deux côtés, ce qui justifie ses valeurs négatives du côté $x=0,16\text{m}$ jusqu'à $0,25\text{m}$, sachant qu'au côté de $x=0,25\text{m}$ la température de l'ambiance est de 20°C , et la température initiale du mur est à 2°C , par la présence d'un tel gradient cela justifie la pénétration du flux thermique de ce côté. Par ailleurs, du côté $x=0$ allant jusqu'au milieu du mur, on remarque que la pente du flux est plus raide que l'autre côté ($x=L$), ce qui pourrait être justifié par le fait que la température du côté $x=0\text{m}$ est très importante (100°C) comparativement au côté opposé (20°C). En régime permanent ($t=90000\text{s}$) le flux thermique est constant au long du mur, représenté ici par une droite parallèle à l'axe des épaisseurs.

2.5.3 : Influence du nombre de BIOT :

Le nombre Biot compare les grandeurs relatives des résistances de convection superficielle et de conduction interne au transfert de chaleur.

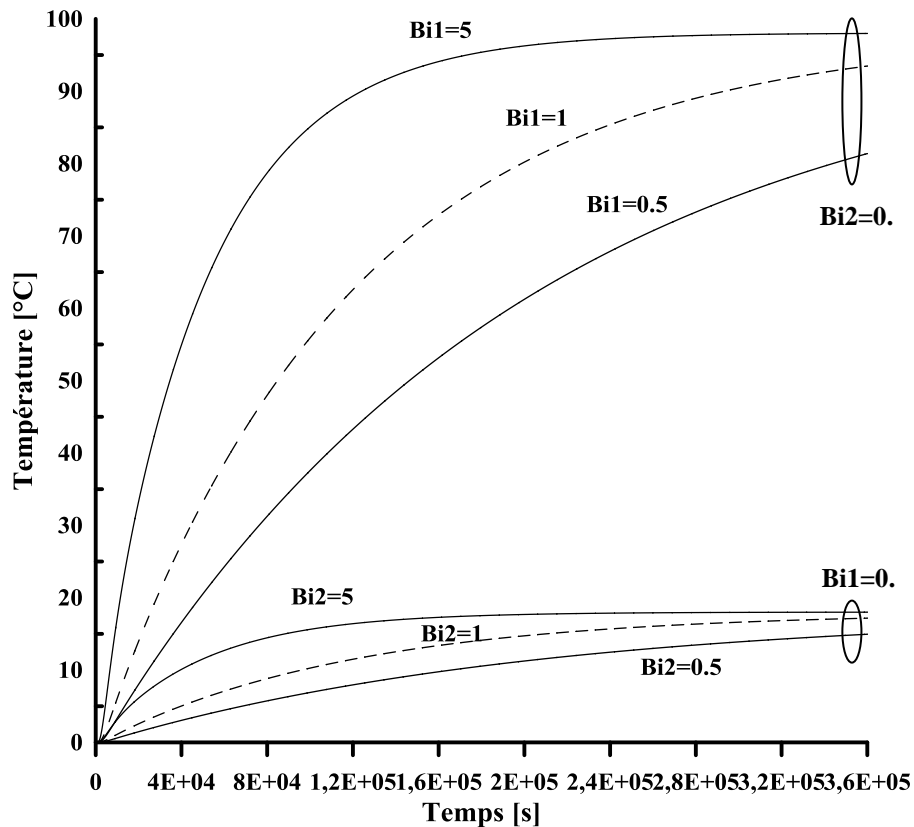


Figure 2.6 : Profils de température pour différentes valeurs de Biot Pour une paroi en brique

Dans la **figure 2.6**, on présente l'influence du nombre Biot Bi_1 et Bi_2 sur l'évolution de la température au milieu d'un mur en brique. Lorsque le nombre de Biot tend vers zéro, cela correspond à un cas d'une face isolée de ce mur, tel il est présenté dans la figure précitée, quand le nombre de Biot $Bi_1=0$ ou $Bi_2=0$. Si on fixe $Bi_1=0$, cela correspond au cas où la face en $x=0$ est soumise à un flux imposé (ici, la face $x=0$ est isolée), si on fait varier Bi_2 , on remarque que la température du mur diminue avec la diminution de Bi_2 . La température maximale est enregistrée quand le nombre de $Bi_2=5$, une situation qui rapproche le cas de température imposée à la face en $x=L$, ou la température de contact dans cette face est égale à la température de l'ambiance (20°C). Donc, dans ce cas on ne peut pas dépasser la valeur de 20°C , car l'autre face (qui est exposée à une ambiance de 100°C) est isolée ($Bi_1=0$), par conséquent, il n'y a pas de pénétration de flux thermique de cette face. Le même constat est

observé lorsqu'on fixe $Bi_2=0$ (cas d'isolation de la face en $x=L$) et on fait varier Bi_1 , sauf qu'ici la température maximale atteinte est proche de l'ambiance en $x=0$ (100°C).

Méthode des quadripôles dans la résolution de l'équation de la Conduction

D'après les méthodes présentées précédemment, dans le deuxième chapitre, lors de leur application dans le cas d'un mur simple soumis aux conditions de troisième type, nous avons constaté que les méthodes utilisées, sont lourdes à mettre en œuvre. Il peut en résulter des erreurs lors d'inversion (avec la technique de la transformée de Laplace) ou lors de calcul des valeurs propres avec la résolution de l'équation transcendante. Pour deux couches (deux parois accolées), on peut le prévoir, les techniques précitées deviendront plus lourdes et difficile à mettre en œuvre, ce qui pourra engendrer plus d'erreurs. La raison pour laquelle, nous proposons dans ce qui suit, la méthode des quadripôles pour la résolution de l'équation de la conduction dans le cas de plusieurs couches accolées.

En fait, la méthode des quadripôles est une méthode explicite exacte de représentation des systèmes linéaires. Basée sur les solutions analytiques des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles résolues par une méthode de transformée de Laplace, elle constitue un formalisme qui permet la résolution rapide et efficace de problèmes dont la géométrie est suffisamment simple. Cette méthode détermine la relation intrinsèque au système liant les conditions aux limites entre elles. Ceci implique une transformée de Laplace sur le temps. Le retour dans l'espace réel est exécuté d'une façon numérique (ici, en utilisant l'algorithme de Stehfst) ; la méthode peut donc être qualifiée de semi-analytique. L'intérêt de la méthode des quadripôles est son caractère analytique rendant transparent le formalisme qui en résulte

1. Application dans le cas d'un mur simple

Considérons l'exemple simple d'un mur homogène isotrope d'épaisseur L sans source de chaleur interne et à l'équilibre thermique à l'instant initial.

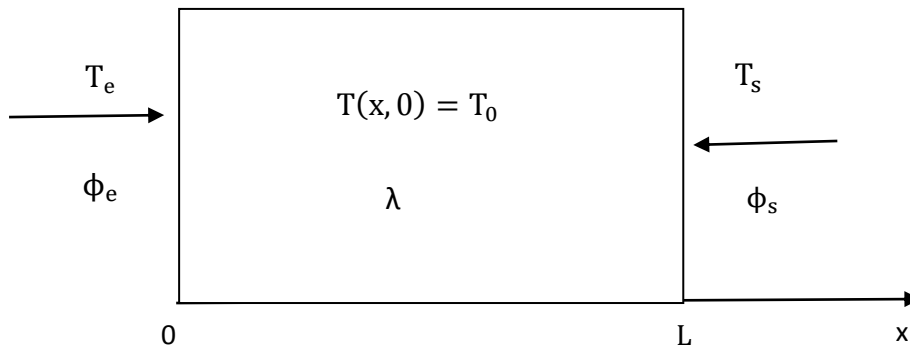


Figure 3.1 : Mur isotrope homogène de conductivité thermique λ et de diffusivité thermique α

Dans ce qui suit, on note :

- $\bar{\theta}_e$ et $\bar{\theta}_s$ Les transformées de Laplace des températures en $x = 0$ et en $x = L$ respectivement.

- $\bar{\phi}_e$ et $\bar{\phi}_s$ Les transformés de Laplace des flux en $x = 0$ et en $x = L$ respectivement.

Le champ thermique vérifie le système de l'équation suivant :

$$(I) \begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad x \in [0, L] ; t \geq 0 \\ T(x, 0) = T_0 \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1 (T_{\infty 1} - T(0, t)) = \phi_e \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_2 (T(L, t) - T_{\infty 2}) = \phi_s \end{cases} \quad (3.1)$$

En appliquant la transformation de Laplace, le système (3.1) se transforme en un système (3.2) simplement différentiel en $\bar{\theta}$

$$(II) \begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} - q^2 \bar{\theta} = 0 \\ -\lambda \left. \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right|_{x=0} = -h_1 (\bar{\theta}(0, t) - \bar{\theta}_{\infty 1}) \\ -\lambda \left. \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right|_{x=L} = h_2 (\bar{\theta}(L, t) - \bar{\theta}_{\infty 1}) \end{cases} \quad (3.2)$$

Avec :

$$\bar{\theta} = L[\theta(x, t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} \theta(x, t) dt \quad \text{et} \quad \frac{p}{\alpha} = q^2 \quad (3.3)$$

Ou p est la variable de Laplace, et $\bar{\theta}$ la transformée de Laplace de la température

L'équation différentielle admet une solution de la forme :

$$\bar{\theta}(x, p) = A \operatorname{Ch}(qx) + B \operatorname{Sh}(qx) \quad (3.3. a)$$

La transformée de Laplace du flux en un point quelconque du mur s'écrit :

$$\bar{\Phi}(x, p) = L \left[-\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right] = -\lambda L \left[\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right] = -\lambda \frac{\partial \bar{\theta}(x, p)}{\partial x} \quad (3.4)$$

Cette relation permet d'exprimer $\bar{\Phi}(x, p)$ en fonction de A et B

$$\bar{\Phi}(x, p) = L \left[-\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right] = -\lambda q [A \operatorname{sh}(qx) + B \operatorname{ch}(qx)] \quad (3.5)$$

Avec les constantes A et B sont déterminées par les conditions aux limites suivantes :

Pour $x = 0$

$$\begin{cases} \bar{\theta}(0, p) = \bar{\theta}_e \rightarrow \bar{\theta}_e = A \\ \bar{\Phi}(0, p) = \bar{\Phi}_e \rightarrow \bar{\Phi}_e = -\lambda q B \rightarrow B = -\frac{1}{\lambda q} \bar{\Phi}_e \end{cases} \quad (3.6)$$

Pour $x = L$

$$\begin{cases} \bar{\theta}_s = A \operatorname{Ch}(qL) + B \operatorname{Sh}(qL) \rightarrow \bar{\theta}_s = -\frac{1}{\lambda q} \operatorname{Sh}(qL) \bar{\Phi}_e + \bar{\theta}_e \operatorname{Ch}(qL) & (a) \\ \bar{\Phi}_s = -\lambda q \operatorname{Sh}(qL) \bar{\theta}_e + \operatorname{Ch}(qL) \bar{\Phi}_e & (b) \end{cases} \quad (3.7)$$

Ce qui revient à exprimer $(\bar{\theta}_e, \bar{\Phi}_e)$ en fonction de $(\bar{\theta}_s, \bar{\Phi}_s)$ on aboutit à :

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_s \\ \bar{\Phi}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Ch}(qL) & -\frac{1}{\lambda q} \operatorname{Sh}(qL) \\ -\lambda q \operatorname{Sh}(qL) & \operatorname{Ch}(qL) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_e \\ \bar{\Phi}_e \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Tel que

$$[M] = \begin{bmatrix} \text{Ch}(qL) & \frac{-1}{\lambda q} \text{Sh}(qL) \\ -\lambda q \text{Sh}(qL) & \text{Ch}(qL) \end{bmatrix} \text{ est appelée matrice quadripolaire.}$$

En multipliant l'équation (a) par $\text{Ch}(qL)$ et l'équation (b) par $\frac{1}{\lambda q} \text{Sh}(qL)$ et en combinant membre à membre on obtient :

$$\begin{cases} \bar{\theta}_s \text{Ch}(qL) = \text{Ch}^2(qL)\bar{\theta}_e - \frac{1}{\lambda q} \text{Sh}(qL)\text{Ch}(qL)\bar{\Phi}_e \\ \bar{\Phi}_s \frac{1}{\lambda q} \text{Sh}(qL) = -\text{Sh}^2(qL)\bar{\theta}_e + \frac{1}{\lambda q} \text{Sh}(qL)\text{Ch}(qL)\bar{\Phi}_e \end{cases} \quad (3.9)$$

$$[\text{Ch}^2(qL) - \text{Sh}^2(qL)]\bar{\theta}_e = \text{Ch}(qL)\bar{\theta}_s + \frac{1}{\lambda q} \text{Sh}(qL)\bar{\Phi}_s \quad (3.10)$$

On sait que :

$$\text{Ch}^2(qL) - \text{Sh}^2(qL) = 1 \quad (3.11)$$

Alors :

$$\begin{cases} \bar{\theta}_e = \text{Ch}(qL)\bar{\theta}_s + \frac{1}{\lambda q} \text{Sh}(qL)\bar{\Phi}_s \\ \bar{\Phi}_e = \lambda q \text{Sh}(qL)\bar{\theta}_s + \text{Ch}(qL)\bar{\Phi}_s \end{cases} \quad (3.12)$$

On a la propriété : $\det(M) = 1$ ce qui permet d'établir la relation réciproque :

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_e \\ \bar{\Phi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Ch}(qL) & \frac{1}{\lambda q} \text{Sh}(qL) \\ \lambda q \text{Sh}(qL) & \text{Ch}(qL) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_s \\ \bar{\Phi}_s \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

D'une manière plus condensée :

$$[E] = [M][S] \quad (3.13.a)$$

Avec $[E]$: vecteur d'entrée.

$[M]$: matrice de transfert inverse.

$[S]$: vecteur de sortie.

D'après les conditions aux limites, on calcule la température et le flux thermique à l'extrémité de la plaque :

Pour $x = 0$:

$$-\lambda \left. \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right|_{x=0} = \bar{\Phi}_e = \frac{\bar{\Phi}_{\infty 1}}{h_1} = h_1 (\bar{\theta}_{\infty 1} - \bar{\theta}_e) \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} \bar{\theta}_e = \bar{\theta}_{\infty 1} - \frac{1}{h_1} \bar{\Phi}_{\infty 1} \\ \bar{\Phi}_e = \bar{\Phi}_{\infty 1} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{\theta}_e \\ \bar{\Phi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_{\infty 1} \\ \bar{\Phi}_{\infty 1} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Qu'on peut écrire

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_{\infty 1} \\ \bar{\Phi}_{\infty 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_e \\ \bar{\Phi}_e \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

On remplace l'équation $\begin{bmatrix} \bar{\theta}_e \\ \bar{\Phi}_e \end{bmatrix}$ par sa valeur on trouve :

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_{\infty 1} \\ \bar{\Phi}_{\infty 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Ch}(qL) & \frac{1}{\lambda q} \text{Sh}(qL) \\ \lambda q \text{Sh}(qL) & \text{Ch}(qL) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_s \\ \bar{\Phi}_s \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Pour $x=L$:

$$\begin{cases} -\lambda \left. \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right|_{x=L} = h_2 (\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_{\infty 2}) \\ \bar{\Phi}_s = \bar{\Phi}_{\infty 2} \end{cases} \rightarrow \bar{\Phi}_s = h_2 (\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_{\infty 2}) \quad (3.18)$$

On obtient :

$$\begin{cases} \bar{\theta}_s = \frac{1}{h_2} \bar{\Phi}_{\infty 2} + \bar{\theta}_{\infty 2} \\ \bar{\Phi}_s = \bar{\Phi}_{\infty 2} \end{cases} \quad (3.19)$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_s \\ \bar{\Phi}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_{\infty 2} \\ \bar{\Phi}_{\infty 2} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

On remplace (3.18) dans (3.19) on obtient :

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_{\infty 1} \\ \bar{\Phi}_{\infty 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Ch}(qL) & \frac{1}{\lambda q} \text{Sh}(qL) \\ \lambda q \text{Sh}(qL) & \text{Ch}(qL) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_{\infty 2} \\ \bar{\Phi}_{\infty 2} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Avec :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{h_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Ch}(qL) & \frac{1}{\lambda q} \text{Sh}(qL) \\ \lambda q \text{Sh}(qL) & \text{Ch}(qL) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{h_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

D'où

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_{\infty 1} \\ \bar{\Phi}_{\infty 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_{\infty 2} \\ \bar{\Phi}_{\infty 2} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Après résolution du système

$$\begin{cases} \bar{\theta}_{\infty 1} = a\bar{\theta}_{\infty 2} + b\bar{\Phi}_{\infty 2} \\ \bar{\Phi}_{\infty 1} = c\bar{\theta}_{\infty 2} + d\bar{\Phi}_{\infty 2} \end{cases} \quad (3.24)$$

on aboutit aux expressions des flux $\bar{\Phi}_{\infty 1}$ et $\bar{\Phi}_{\infty 2}$

$$\begin{cases} \bar{\Phi}_{\infty 2} = \frac{\bar{\theta}_{\infty 1} - a\bar{\theta}_{\infty 2}}{b} \\ \bar{\Phi}_{\infty 1} = c\bar{\theta}_{\infty 2} + \frac{d\bar{\theta}_{\infty 1} - a d\bar{\theta}_{\infty 2}}{b} \end{cases} \quad (3.25)$$

ou :

$$\begin{cases} \bar{\Phi}_{\infty 2} = \frac{\bar{\theta}_{\infty 1} - a\bar{\theta}_{\infty 2}}{b} \\ \bar{\Phi}_{\infty 1} = \frac{d\bar{\theta}_{\infty 1} + (cb - ad)\bar{\theta}_{\infty 2}}{b} \end{cases} \quad (3.26)$$

2 : Distribution de la température

Dans ce qui suit, on veut déterminer la distribution des températures dans la paroi de la structure donnée dans la figure 3.2 en abscisse x

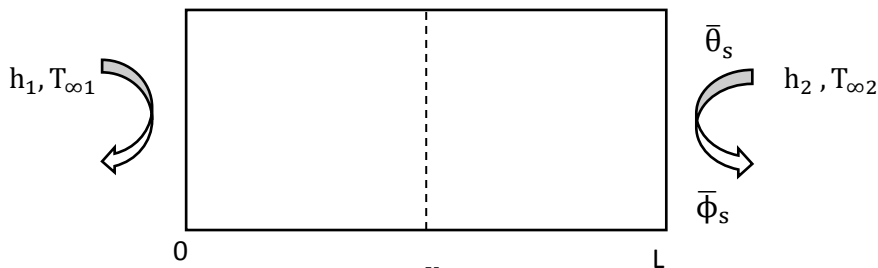


Figure 3.2 : Distribution de la température dans la paroi

La distribution de la température dans la paroi en x est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_{\infty 1} \\ \bar{\Phi}_{\infty 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{h_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Ch}(qx) & \frac{1}{\lambda q} \text{Sh}(qx) \\ \lambda q \text{Sh}(qx) & \text{Ch}(qx) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_x \\ \bar{\Phi}_x \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

On peut écrire aussi

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_{\infty 1} \\ \bar{\Phi}_{\infty 1} \end{bmatrix} = [M'] \begin{bmatrix} \bar{\theta}_x \\ \bar{\Phi}_x \end{bmatrix} \quad \text{tell que} \quad [M'] = \begin{bmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_{\infty 1} \\ \bar{\Phi}_{\infty 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_x \\ \bar{\Phi}_x \end{bmatrix} \quad (3.28a)$$

$$\begin{cases} \bar{\theta}_{\infty 1} = a'\bar{\theta}_x + b'\bar{\Phi}_x \\ \bar{\Phi}_{\infty 1} = c'\bar{\theta}_x + d'\bar{\Phi}_x \end{cases} \quad (3.29)$$

En multipliant la première équation par d' et la seconde par b' et en retranchant membre à membre, on aboutit à l'expression

$$\begin{cases} d'\bar{\theta}_{\infty 1} = a'd'\bar{\theta}_x + b'd'\bar{\Phi}_x \\ b'\bar{\Phi}_{\infty 1} = c'b'\bar{\theta}_x + d'b'\bar{\Phi}_x \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\bar{\theta}_x = \frac{d'\bar{\theta}_{\infty 1} - b'\bar{\Phi}_{\infty 1}}{a'd' - b'c'} \quad (3.31)$$

3 : Application dans le cas d'une structure multicouche :

3.1 Sans résistance thermique aux contacts :

Cette méthode est particulièrement bien adaptée à la résolution de structures multicouches dont un exemple est représenté en **figure 3.3** :

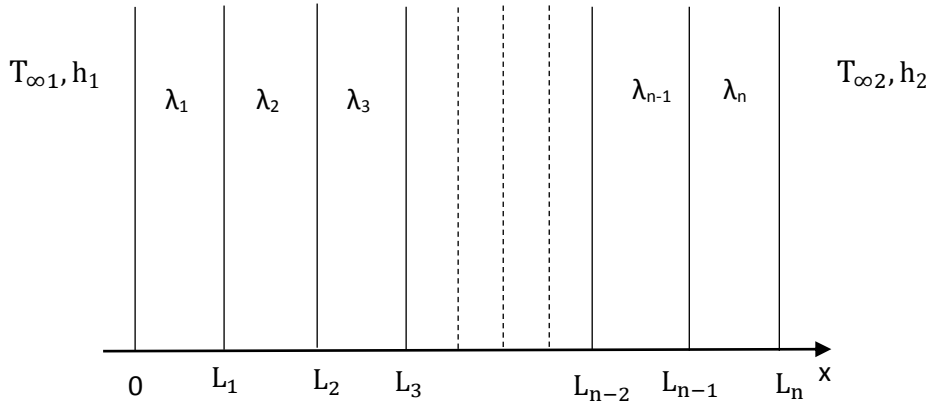


Figure3.3 : Schéma d'une paroi multicouche

On s'intéresse ici, au transfert de chaleur en régime transitoire dans un empilement de murs homogènes successifs, en contact parfait et sans terme source,

Analogiquement au cas d'un mur simple (dont le modèle est développé précédemment), les vecteurs constitués de la température et du flux conductif exprimés dans l'espace de Laplace, en entrée et en sortie d'une couche homogène quelconque (i), sont reliés par la relation quadripolaire suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}(L_i, p) \\ \bar{\phi}(L_i, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}(L_{i+1}, p) \\ \bar{\phi}(L_{i+1}, p) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Ce qu'on peut écrire d'une manière plus simplifiée,

$$[E_i] = [M_i][S_i] \quad (3.33)$$

Avec :

$$[E_i] = \begin{bmatrix} \bar{\theta}(L_i, p) \\ \bar{\phi}(L_i, p) \end{bmatrix} \text{ est le vecteur d'entrée à la couche } i,$$

$$[M_i] = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \text{ est la matrice quadripolaire de la couche } i$$

$$\text{Et } [S_i] = \begin{bmatrix} \bar{\theta}(L_{i+1}, p) \\ \bar{\phi}(L_{i+1}, p) \end{bmatrix} \text{ est le vecteur de sortie de la couche } i.$$

On sait très bien que la sortie de la couche (i) est l'entrée de la couche (i+1), ce qui peut être traduit par la formule suivante :

$$[S_i] = [E_{i+1}] \quad (3.34)$$

En appliquant les équations (3.33) et (3.34) à la première couche, on obtient

$$[E_1]=[M_1] [S_1] \Leftrightarrow [E_1]=[M_1] [E_2] \text{ car } [S_1]=[E_2] \quad (3.35)$$

$[E_2]=[M_2] [S_2] \Leftrightarrow [E_2]=[M_2] [E_3] \text{ car } [S_2]=[E_3]$, on remplace $[E_2]$ dans (3.35)

on obtient,

$$[E_1]=[M_1] [M_2][E_3] \quad (3.36)$$

$[E_3]=[M_3] [S_3] \Leftrightarrow [E_3]=[M_3] [E_4] \text{ car } [S_3]=[E_4]$, on remplace $[E_3]$ dans (3.36)

on obtien,

$$[E_1]=[M_1] [M_2] [M_3] [E_4] \quad (3.37)$$

On répète cela jusqu'à la nième couche, on obtient

$$[E_1]=[M_1] [M_2] [M_3] \dots [M_n] [S_n] \quad (3.38)$$

Ce qui peut être encore simplifié, pour devenir

$$[E_1]=[M_g][S_n] \quad (3.39)$$

Avec

$[M_g]=[M_1] [M_2] [M_3] \dots [M_n]$, le produit des matrices quadripolaires de chaque couche

Qu'on peut écrire aussi sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_e \\ \bar{\Phi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_g & B_g \\ C_g & D_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_s \\ \bar{\Phi}_s \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

avec :

$[M_g] = \begin{bmatrix} A_g & B_g \\ C_g & D_g \end{bmatrix}$ est la matrice quadripolaire globale du mur multicouche.

D'une manière similaire, que le cas d'un mur simple, on fait intervenir les résistances superficielles des ambiances, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_{\infty 1} \\ \bar{\Phi}_{\infty 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{h_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_g & B_g \\ C_g & D_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{h_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_{\infty 2} \\ \bar{\Phi}_{\infty 2} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Qui pourra être simplifié encore, et être écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_{\infty 1} \\ \bar{\Phi}_{\infty 1} \end{bmatrix} = [M'_g] \begin{bmatrix} \bar{\theta}_{\infty 2} \\ \bar{\Phi}_{\infty 2} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$[M'_g] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{h_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_g & B_g \\ C_g & D_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{h_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_g & B'_g \\ C'_g & D'_g \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

3.1.1 Calcul des flux aux deux extrémités d'un multicouche

Le flux de chaleur transmis dépend de l'ordre dans lequel sont placées les différentes couches, en utilisant la formule (3.43), on aura :

$$\begin{cases} \bar{\theta}_{\infty 1} = A'_g \bar{\theta}_{\infty 2} + B'_g \bar{\Phi}_{\infty 2} \\ \bar{\Phi}_{\infty 1} = C'_g \bar{\theta}_{\infty 2} + D'_g \bar{\Phi}_{\infty 2} \end{cases} \quad (3.44)$$

En multipliant par (D'_g) la première équation et par (B_g) la seconde et en retranchant membre à membre on aboutit aux expressions des flux $\bar{\Phi}_{\infty 1}$ et $\bar{\Phi}_{\infty 2}$

$$\begin{cases} \bar{\Phi}_{\infty 1} = \frac{D'_g \bar{\theta}_{\infty 1} - (B'_g C'_g - A'_g D'_g) \bar{\theta}_{\infty 2}}{B'_g} \\ \bar{\Phi}_{\infty 2} = \frac{\bar{\theta}_{\infty 1} - A'_g \bar{\theta}_{\infty 2}}{B'_g} \end{cases} \quad (3.45)$$

3.1.2 Distribution de la température :

On détermine les températures dans les différentes couches, comme suit :

• **Dans la première couche :** on se ramène à la résolution du système ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_{\infty 1} \\ \bar{\Phi}_{\infty 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{h_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Ch}(q_1 x) & \frac{\text{Sh}(q_1 x)}{\lambda_1 q_1} \\ \lambda_1 q_1 \text{Sh}(q_1 x) & \text{Ch}(q_1 x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}(x) \\ \bar{\Phi}(x) \end{bmatrix} \quad \text{avec } x \in [0, L_1] \quad (3.46)$$

Similairement que la résolution du système (3.27), on aura à la fin une solution de la forme suivante :

$$\bar{\theta}_x = \frac{d_1(x) \bar{\theta}_{\infty 1} - b_1(x) \bar{\Phi}_{\infty 1}}{a_1(x) d_1(x) - b_1(x) c_1(x)} \quad (3.47)$$

Avec :

$$\begin{bmatrix} a_1(x) & b_1(x) \\ c_1(x) & d_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{h_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Ch}(q_1 x) & \frac{\text{Sh}(q_1 x)}{\lambda_1 q_1} \\ \lambda_1 q_1 \text{Sh}(q_1 x) & \text{Ch}(q_1 x) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

• **Dans la deuxième couche** : le système à résoudre est le suivant

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_{\infty 1} \\ \bar{\Phi}_{\infty 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Ch}(q_1 L_1) & \frac{\text{Sh}(q_1 L_1)}{\lambda_1 q_1} \\ \lambda_1 q_1 \text{Sh}(q_1 L_1) & \text{Ch}(q_1 L_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Ch}(q_2 x) & \frac{\text{Sh}(q_2 x)}{\lambda_2 q_2} \\ \lambda_2 q_2 \text{Sh}(q_2 x) & \text{Ch}(q_2 x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}(x) \\ \bar{\Phi}(x) \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$\text{Avec : } q_1 = \sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}, q_2 = \sqrt{\frac{p}{\alpha_2}} \quad \text{soit } x \in [0, L_2]$$

La solution obtenue est donnée par

$$\bar{\theta}_x = \frac{d_2(x)\bar{\theta}_{\infty 1} - b_2(x)\bar{\Phi}_{\infty 1}}{a_2(x)d_2(x) - b_2(x)c_2(x)} \quad (3.50)$$

avec :

$$\begin{bmatrix} a_2(x) & b_2(x) \\ c_2(x) & d_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Ch}(q_1 L_1) & \frac{\text{Sh}(q_1 L_1)}{\lambda_1 q_1} \\ \lambda_1 q_1 \text{Sh}(q_1 L_1) & \text{Ch}(q_1 L_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Ch}(q_2 x) & \frac{\text{Sh}(q_2 x)}{\lambda_2 q_2} \\ \lambda_2 q_2 \text{Sh}(q_2 x) & \text{Ch}(q_2 x) \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Ou

$$\begin{bmatrix} a_2(x) & b_2(x) \\ c_2(x) & d_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & h_1 \end{bmatrix} [M_1] \begin{bmatrix} \text{Ch}(q_2 x) & \frac{\text{Sh}(q_2 x)}{\lambda_2 q_2} \\ \lambda_2 q_2 \text{Sh}(q_2 x) & \text{Ch}(q_2 x) \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

• **Dans la nième couche** : Soit à résoudre en $x \in [0, L_n]$, le problème suivant

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_{\infty 1} \\ \bar{\Phi}_{\infty 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & h_1 \end{bmatrix} [M_1][M_2][M_3] \dots [M_{n-1}] \begin{bmatrix} \text{Ch}(q_n x) & \frac{\text{Sh}(q_n x)}{\lambda_n q_n} \\ \lambda_n q_n \text{Sh}(q_n x) & \text{Ch}(q_n x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}(x) \\ \bar{\Phi}(x) \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\text{Avec : } q_i = \sqrt{\frac{p}{\alpha_i}}$$

La solution obtenue est donnée par

$$\bar{\theta}_x = \frac{d_n(x)\bar{\theta}_{\infty 1} - b_n(x)\bar{\Phi}_{\infty 1}}{a_n(x)d_n(x) - b_n(x)c_n(x)} \quad (3.54)$$

avec :

$$\begin{bmatrix} a_n(x) & b_n(x) \\ c_n(x) & d_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & h_1 \end{bmatrix} [M_1][M_2][M_3] \dots [M_{n-1}] \begin{bmatrix} \text{Ch}(q_n x) & \frac{\text{Sh}(q_n x)}{\lambda_n q_n} \\ \lambda_n q_n \text{Sh}(q_n x) & \text{Ch}(q_n x) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

3.2. Avec résistance thermique de contact

Dans la réalité ; le contact interfacial n'est jamais parfait, il existe souvent des vides, de la rouille, des impuretés, ...etc siège de chute brutale de température (cf. Figure 3.4). La condition de contact non-parfait (avec résistance thermique), introduit une discontinuité de part et d'autre de l'interface. Celle-ci est proportionnelle à la densité du flux qui la traverse et l'on écrit en présentation quadripolaire comme suit :

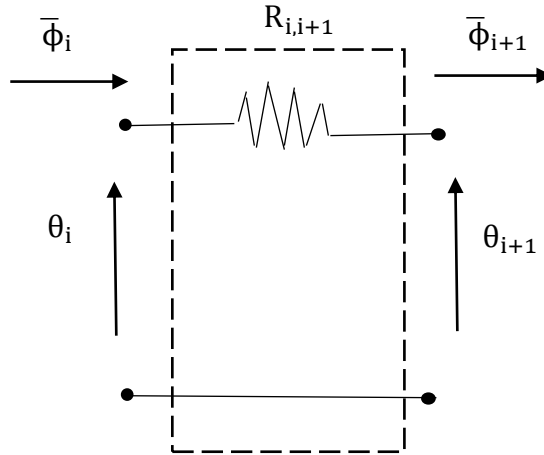


Figure. 3.4 : Quadripôle résistance

$$[C_{i,i+1}] = \begin{bmatrix} 1 & R_{i,i+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.56}$$

Avec $R_{i,i+1}$ est la résistance de contact entre les deux couches (i) et (i+1).

Les résultats auront les mêmes formes que précédemment, en remplaçant

$$[S_i] = [E_{i+1}] \text{ par } [S_i] = [C_{i,i+1}][E_{i+1}] \tag{3.57}$$

Nous aurons donc, à la fin le système suivant :

$$[E_1] = [M_1] [C_{1,2}] [M_2] [C_{2,3}] [M_3] \dots [C_{n-1,n}] [M_n] [S_n] \tag{3.58}$$

dont la solution:

$$\bar{\theta}_x = \frac{d^*_n(x)\bar{\theta}_{\infty 1} - b^*_n(x)\bar{\Phi}_{\infty 1}}{a^*_n(x)d^*_n(x) - b^*_n(x)c^*_n(x)} \tag{3.59}$$

Avec

$$\begin{bmatrix} a^*_n(x) & b^*_n(x) \\ c^*_n(x) & d^*_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & h_1 \\ & 1 \end{bmatrix} [M_1][C_{1,2}][M_2] \dots [C_{n-1,n}] \begin{bmatrix} \text{Ch}(q_n x) & \frac{\text{Sh}(q_n x)}{\lambda_n q_n} \\ \lambda_n q_n \text{Sh}(q_n x) & \text{Ch}(q_n x) \end{bmatrix} \tag{3.60}$$

Les flux thermiques donnée par :

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\Phi}_{\infty 1} &= \frac{D_g^* \bar{\theta}_{\infty 1} - (B_g^* C_g^* - A_g^* D_g^*) \bar{\theta}_{\infty 2}}{B_g^*} \\ \bar{\Phi}_{\infty 2} &= \frac{\bar{\theta}_{\infty 1} - A_g^* \bar{\theta}_{\infty 2}}{B_g^*} \end{aligned} \right. \quad (3.61)$$

et

$$\begin{bmatrix} A_g^* & B_g^* \\ C_g^* & D_g^* \end{bmatrix} = [M_g^*] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [M_1] [C_{1,2}] [M_2] [C_{2,3}] \dots [C_{n-1,n}] [M_n] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

4 : Validation du modèle quadripolaire :

La validation du modèle quadripolaire, ici développé, a été établie par une comparaison avec les résultats obtenus par la méthode de séparation des variables, dans le cas d'un mur simple en bois ayant une épaisseur de 0,25 m, pour des temps différents. Cette comparaison a été rapportée d'abord sur la **figure 3.7**, avec des profils de température le long de l'épaisseur du mur. On constate rapidement que les résultats issus des deux modèles sont presque identiques. Pour mieux comparer entre les deux modèles, les tableaux suivants :

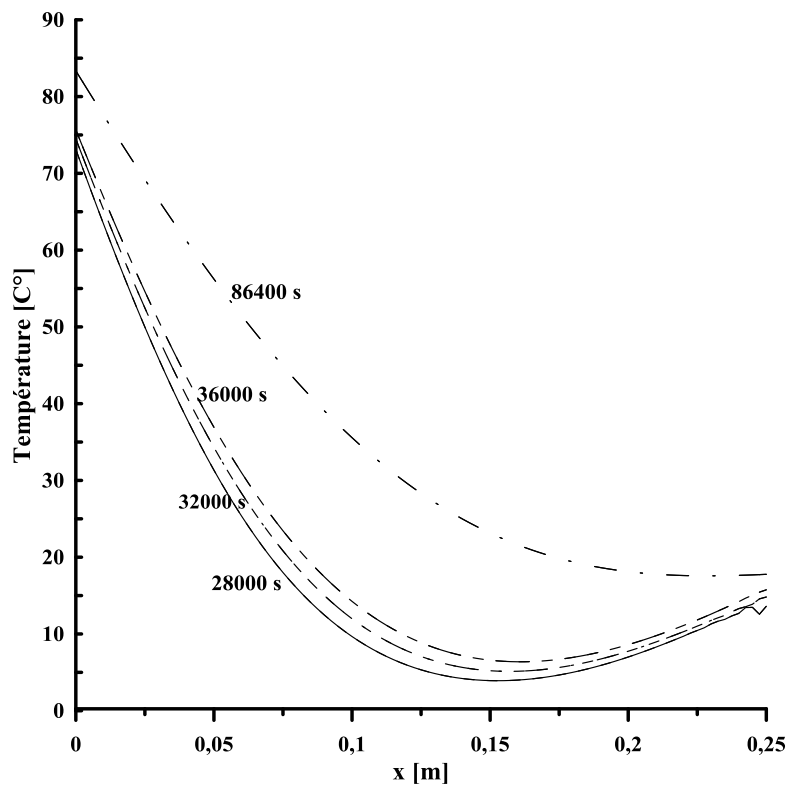


Figure 3.5: Evolution de la température au long d'une paroi de bois feuillus légers ayant une épaisseur de $L = 0.25\text{m}$ par les deux méthodes de résolution

X	Méthode de Quadripôle	Méthode SV	ε %
0,01	63,430141572229	63,46189938385	0,050042327646591
0,03	45,846535916044	45,864783947388	0,039786585204436
0,04	38,173019553546	38,188245996918	0,039872067896324
0,05	31,336124748659	31,349835182679	0,043733671770732
0,08	15,965148357212	15,970745470674	0,035046037592848
0,1	9,6667328002519	9,6611266009839	0,05802842152401
0,13	4,8437712322814	4,8325511101702	0,23217803299731
0,17	4,3662672734727	4,3903992472559	0,54965328718866
0,23	11,302920133068	11,672207387333	3,1638167658429
0,25	13,61034626708	15,387029759861	11,546630639631

Table 3.1 : Comparaison entre les résultats obtenus par les deux méthodes (Méthode de Quadripôle et SV) a l'instant $t = 7$ h et 47 minutes

X	Méthode de Quadripôle	Méthode SV	ε %
0,01	65,311706603898	65,345152481384	0,051183410270323
0,03	48,480415600854	48,499889080444	0,040151596136679
0,04	41,02394010514	41,039816126312	0,038684435435157
0,05	34,295645581054	34,309559608948	0,0405543762503
0,08	18,704000351401	18,711704638154	0,041173623150709
0,1	11,982484403432	11,981103407625	0,011526449279466
0,13	6,4824208519786	6,4741107110003	0,12835957476297
0,17	5,3981494743728	5,4213097391993	0,42720792466525
0,23	11,762516672141	12,107016118412	2,8454529415132
0,25	14,81320865282	15,568225018955	4,8497267043335

Table 3.2 : Comparaison entre les résultats obtenus par les deux méthodes (Méthode de Quadripôle et SV) a l'instant $t = 8$ h et 53 minutes

X	Méthode de Quadripôle	Méthode SV	ε %
0,01	66,920880290621	66,955338104553	0,051463878619576
0,03	50,764829693137	50,784887020508	0,039494677546798
0,04	43,523556797431	43,539564356293	0,03676554669085
0,05	36,924982127483	36,938660408509	0,037029715953123
0,08	21,268705271583	21,277580645234	0,041712325281569
0,1	14,246104529676	14,247579085115	0,010349515732251
0,13	8,1862494244242	8,1766101006488	0,11788899870229
0,17	6,5118249983224	6,5026123820215	0,14167561834544
0,23	12,586664854674	12,515396626835	0,56944442085817
0,25	15,752099661819	15,735683553196	0,10432408968517

Table 3.3 : Comparaison entre les résultats obtenus par les deux méthodes (Méthode de Quadripôle et SV) a l'instant $t = 10$ h

X	Méthode de Quadripôle	Méthode SV	ε %
0,01	77,582070256467	77,622112854309	0,051586585792787
0,03	66,488663439988	66,513431255737	0,037237314752156
0,04	61,238242452346	61,257372126068	0,03122836167898
0,05	56,227456079127	56,24220159198	0,026217879877379
0,08	42,88228190158	42,89081230417	0,019888647780037
0,1	35,567645941072	35,575477110627	0,022012830724932
0,13	27,123163903365	27,128188240908	0,018520726478385
0,17	20,366369582154	20,360678940859	0,02794917257588
0,23	17,572205612862	17,568261655216	0,022449333480076
0,25	17,769123784878	17,775235526539	0,034383463736527

Table 3.4 : Comparaison entre les résultats obtenus par les deux méthodes (Méthode de Quadripôle et SV) a l'instant $t = 24$ h

Ils rapportent les résultats numériques avec l'erreur relative entre les deux méthodes. On remarque que le modèle quadripolaire, donne satisfaction par rapport aux résultats issus du modèle de séparation des variables. On enregistre une bonne précision à proximité de l'ambiance en $x=0$, ou l'erreur relative est d'ordre 0,05%, pour différents temps. Par ailleurs, cette erreur est d'ordre plus important quand le temps est réduit et on est proche de l'autre face du mur ($x=0,25$), environ 11% dans le cas $t=7$ h et 47 minutes, cette erreur devient de plus en plus négligeable lorsque le temps augmente, d'ordre 4% à $t= 8$ h 53min, et 0,03% à $t=24$ h.

4.1 : Structure à deux couches (Duralumin et brique) sans résistance :

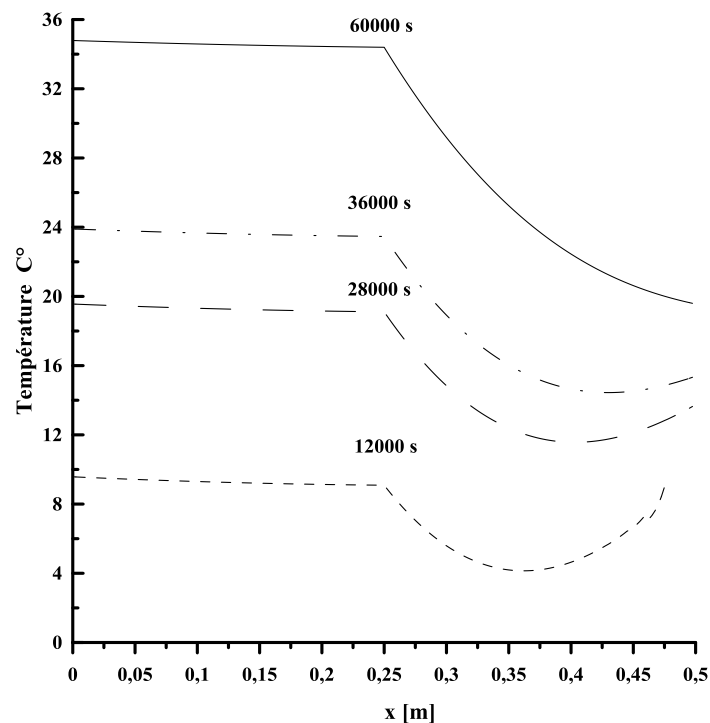


Figure 3.6: Evolution de la température le long des parois en duralumin et en brique

La **figure 3.6** représente l'évolution de la température le long des deux couches pour différentes périodes où on peut distinguer les deux zones en duralumin ($x=0$ jusqu'à $x=0.25$) et en brique ($x=0.25$ jusqu'à $x=0.5$). On constate que les valeurs de température obtenues augmentent avec l'augmentation temps. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'on n'a pas atteint le régime permanent.

La première zone montre de faibles variations et ce suit à la faible résistance (le gradient de température est linéaire) sur la première paroi en duralumin. La deuxième zone de la courbe (0.25m à 0.5m) montre une diminution rapide de température suite à une lente propagation de chaleur sur la paroi en brique.

4.2 Structure à trois couches (Duralumin, brique et bois) sans résistance :

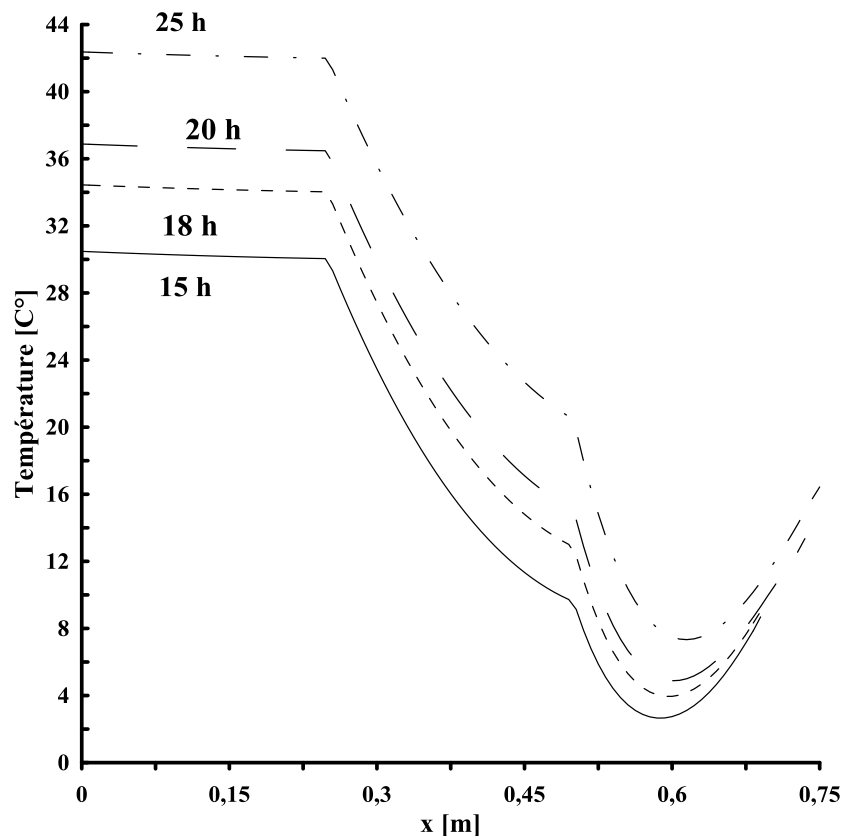


Figure 3.7: Evolution de la température au long de trois plaques (duralumin, brique et bois) ayant une épaisseur de $L = 0.5$ m

La **figure 3.7** représente l'évolution de la température le long des trois murs à savoir le premier mur en duralumin, le deuxième en brique et le troisième en bois. Nous constatons l'augmentation du temps engendre l'augmentation des valeurs de la température. Donc on

peut distinguer trois différentes zones qui représentent l'évolution de température sur une structure à trois couches.

La première zone représente une température uniforme sur le mur (épaisseur 0 à 0.25m), un équilibre de la température sur la première paroi en duralumin avec une propagation rapide. La deuxième zone (0.25 à 0.5m) montre une diminution rapide de la température suite à une lente propagation de la chaleur sur le mur en brique, cette propagation deviens de plus en plus lente dans la troisième zone (L entre 0.5 et 0.75 m). Nous constatons clairement une diminution très rapide de la température sur ce troisième mur en bois. On constate aussi un léger changement de tendance vers une croissance afin de trouver une température d'équilibre finale.

4.3 : Structure à trois couches (Duralumin, brique et bois) avec résistance :

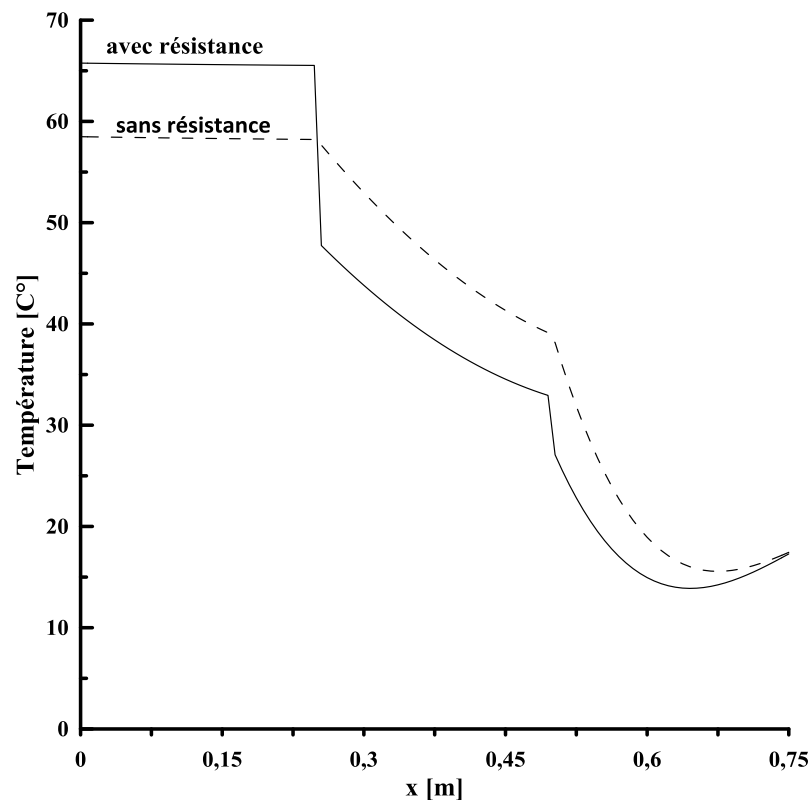


Figure 3.8: Evolution de la température au long de trois plaques avec et sans résistance de contact entre les parois (duralumin, brique et bois), prise à 50 h

La **figure 3.8** représente une comparaison entre les deux structures à trois couches (duralumin, brique et bois) avec et sans résistance et ce pour durer $T=50$ h. Pour les deux cas, on remarque que à chaque fois le temps est important la température enregistrée sur les structures est élevée.

Une différence remarquable sur les limites des couches constituant la structure dans les deux cas :

Lorsque la structure est sans résistance, l'évolution de la température entre les parois est sans variation, la température sur la fin du premier mur est la même sur le début du deuxième, la même explication entre le deuxième et le troisième mur.

Lorsque la structure est avec des résistances entre les murs, l'évolution de la température entre les murs est représentée par une chute presque verticale c'est-à-dire la température sur la fin du premier mur n'est pas la même sur le début du deuxième mur, comme résultat d'une perte importante de chaleur sur la zone de résistance

Conclusion générale

Ce mémoire de fin d'études a eu pour objectif de répondre à la question <Etude de comportement d'une structure multicouche utilisant la loi des quadripôles> et pour conclure nous avons proposé trois parties. La première est pour l'ensemble des définitions et les expressions ainsi que les lois fondamentales nécessaires, la deuxième partie est consacrée à étudier certaines méthodes analytiques de base dédiées aux comportements thermique et à la résolution de l'équation de la chaleur, en l'occurrence : méthode de la transformation de LAPLACE et méthode de séparation de variables (séries de Fourier) avec une application sur une structure à une seule couche (duralumin, brique et/ou bois). la troisième partie est consacrée à l'étude et à la résolution de l'équation de la conduction, en utilisant la méthode des quadripôles avec une application sur une structure simple et une autre à plusieurs couches.

Cependant, au cours de ce travail, nous nous sommes rendu compte que les résultats obtenus sont légèrement différents en appliquant la méthode de la transformation de LAPLACE et séparation des variables, avec un avantage pour la dernière en matière de précision et de rapidité, mais seulement sur des structures à une seule couche. Ensuite, nous avons appliqué la méthode des quadripôles sur la même structure et comparé les résultats avec ceux obtenus en appliquant la méthode de séparation des variables, La comparaison était très satisfaisante.

Selon cet enchaînement nous avons opté à l'application de la méthode de quadripôles sur des structures à plusieurs couches, car les deux premières se sont avérées assez limitées pour ce genre de configurations, autrement dit, difficultés pour la résolution. Nous avons obtenu résultats significatifs sur deux types de structures une à deux couches et une autre à trois couches.

Nous pouvons aussi conclure que la méthode de quadripôles possède plusieurs avantages sur le plan précision, rapidité et facilité à l'application à des structures plus complexes, car le transfert de chaleur est conditionné par la nature de la structure et le nombre de couches qui la constituent.

Nous nous sommes rendus compte que le but d'un travail n'est pas forcément de donner des résultats mais d'essayer de contribuer, même si c'est d'une façon limitée à la compréhension du phénomène du comportement thermique sur les différentes structures.

Annexes

[A .1.1] : Propriétés physiques de certains corps

	ρ [kg.m ⁻³]	c_p [J. kg ⁻¹ . °C ⁻¹]	λ [W. m ⁻¹ . °C ⁻¹]
Métaux et alliages			
Acier au Carbone	7833	465	54
Acier inox 15%Cr.10%Ni	7864	460	20
Acier inox 18%Cr, 8%Ni	7816	460	16,3
Acier inox 25%Cr, 20%Ni	7864	460	13
Alumine			29
Aluminium	2707	896	204
Argent	10525	234	407
Bronze 75%Cu, 25%Sn	8800	377	188
Bronze 92%Cu, 8%Al	7900	377	71
Carbone graphite	2250	707	147
Carbure de silicium			13
Chrome	2118	7160	449
Constantan 60% Cu, 40%Ni	8922	410	22,7
Cuivre	8954	383	386
Cupronickel 70%Cu, 30%Ni	8900	377	29,3
Duralumin	2787	883	164
Etain	7304	226	64
Fer	7870	452	73
Fonte	7849	460	59
Laiton 70%Cu, 30%Zn	8522	385	111
Magnésium	1740	1004	151
Or	19300	128	312
Platine	21400	140	69
Plomb	11373	130	35
Sodium liquide	930	1381	84,5
Titane	4500	523	20,9
Tungstène	19350	134	163
Zinc	7144	384	112

	ρ (kg.m ⁻³)	c_p (j kg ⁻¹ °C ⁻¹)	λ (Wm ⁻¹ °C ⁻¹)
Matériaux de construction			
Ardoise	2400	879	2,2
Basalte	2850	881	1,6
Béton caverneux	1900	879	1,4
Béton plein	2300	878	1,75
Bitume (cartonné)	1050	1305	0,23
Bois feuillus légers	525	3143	0,15
Bois feuillus mi-lourds	675	3156	0,23
Bois feuillus très légers	375	3147	0,12
Bois résineux légers	375	3147	0,12
Bois résineux mi-lourds	500	3160	0,15

Bois résineux très légers	375	3147	0,12
Brique terre cuite	1800	878	1,15
Calcaire dur	2450	882	2,4
Calcaire tendre	1650	879	1
Carrelage	2400	875	2,4
Contre-plaqué okoumé	400	3000	0,12
Contre-plaqué pin	500	3000	0,15
Granite	2600	881	3
Gravier (vrac)	1800	889	0,7
Grès	2500	880	2,6
Lave	2350	881	1,1
Marbre	2700	881	2,5
Plâtre	1440	840	0,48
Schiste	2400	879	2,2

	ρ (kg.m ⁻³)	c_p (jkg ⁻¹ °c ⁻¹)	λ (Wm ⁻¹ °C ⁻¹)
Matériaux divers			
Amiante	575	1046	0,15
Asphalte	2115	920	0,062
Caoutchouc (naturel)	1150		0,28
Caoutchouc (vulcanisé)	1100	2010	0,13
Carton	86	2030	0,048
Cuir	998		0,159
Glace	920	2040	1,88
Plexiglas	1190	1465	0,19
Porcelaine	2400	1088	1,035
Polyéthylène	929	1830	0,46
PVC	1459	930	0,21
Sable	1515	800	0,2-1,0
Téflon	2170	1004	0,25
Terre mouillée	1900	2000	2
Terre sèche	1500	1900	1
Verre	2300	837	1,05
Verre Pyrex	2220	728	1,13

	ρ (kg.m ⁻³)	c_p (jkg ⁻¹ °c ⁻¹)	λ (Wm ⁻¹ °C ⁻¹)
Matériaux isolants			
Balsa	140		0,054
Coton	80	1300	0,06
Kapok			0,035
Laine de roche	20	880	0,047
	55	880	0,038
	135	880	0,041
Laine de verre	8	875	0,051
	10	880	0,045
	15	880	0,041
	40	880	0,035

Liège expansé	120	2100	0,044
Moquette	200	1300	0,06
Polyuréthane (mousse)	32	1300	0,03
	50	1360	0,035
	85	1300	0,045
PVC (mousse rigide)	30	1300	0,031
	40	1300	0,041
Polystyrène expansé	12	1300	0,047
	14	1300	0,043
	18	1300	0,041
Styrofoam	30		0,032

[A.2.1]: Transformation da Laplace inverse.

$$q = \sqrt{\frac{p}{\alpha}} \quad (2.5)$$

$\theta(p) = L\{T(t)\}$	$T(t)$
$\frac{1}{p}$	1
1	$\delta(t)$ Dirac
$\frac{1}{p + \beta}$	$e^{-\beta t}$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t)$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t)$
$\frac{b}{p(b + \sqrt{p})}$	$1 - \exp(b^2 t) \operatorname{erfc}(b\sqrt{t})$
$\frac{\ln(p)}{p}$	$-\ln(t) - \gamma; \gamma = 0.57721$
$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{p\sqrt{p}}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}$
$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$\operatorname{Sh}(\omega t)$
$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$\operatorname{Ch}(\omega t)$
$\frac{1}{p^n} \quad n$ = 1.2.3 ...	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
e^{-qx}	$\frac{x}{2\sqrt{\pi\alpha t^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{q}$	$\left(\frac{\alpha}{\pi t}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{p}$	$\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{pq}$	$2\left(\frac{\alpha t}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - x \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{p^2}$	$\left(t + \frac{x^2}{2\alpha}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - x\left(\frac{t}{\pi\alpha}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$

$\frac{e^{-qx}}{q+h}$	$\left(\frac{\alpha}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{x^2}{4\alpha^2}\right) - h\alpha \exp(hx + \alpha th^2) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + h\sqrt{\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{q(q+h)}$	$\alpha \exp(hx + \alpha th^2) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + h\sqrt{\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{p(q+h)}$	$\frac{1}{h} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \frac{1}{h} \exp(hx + \alpha th^2) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + h\sqrt{\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{pq(q+h)}$	$\frac{2}{h} \left(\frac{\alpha}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha^2}\right) - \frac{1+hx}{h^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) + \frac{1}{h^2} \exp(hx + \alpha th^2) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + h\sqrt{\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{(q+h)^2}$	$-2h \left(\frac{\alpha^3 t}{\pi}\right) \exp\left(\frac{-x^2}{2\alpha t}\right) + \alpha(1+hx+2h^2\alpha t) \exp(hx + \alpha th^2) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + h\sqrt{\alpha t}\right)$

[A.2.2]: solution $X(\lambda_n, x)$ la norme $N(\lambda_n)$, et les valeurs propres λ_n de l'équation différentielle :

Case N°	Condition de limite à $x=0$	Condition de limite à $x=L$	$X(\lambda_n, x)$	$\frac{1}{N(\lambda_n)}$	Les valeurs propres λ_n sont des racines positives de
1	$-\frac{dX}{dx} + H_1 X = 0$	$\frac{dX}{dx} + H_2 X = 0$	$\lambda_n \cos \lambda_n x + H_1 \sin \lambda_n x$	$2 \left[(\lambda_n^2 + H_1^2) \left(L + \frac{H}{\lambda_n^2 + H_2^2} \right) + H_1 \right]^{-1}$	$\tan \lambda_n L = \frac{\lambda_n (H_1 + H_2)}{\lambda_n^2 - H_1 H_2}$
2	$-\frac{dX}{dx} + H_1 X = 0$	$\frac{dX}{dx} = 0$	$\cos \lambda_n (L - x)$	$2 \frac{\lambda_n^2 + H_1^2}{L(\lambda_n^2 + H_1^2) + H_1}$	$\lambda_n \tan \lambda_n L = H_1$
3	$-\frac{dX}{dx} + H_1 X = 0$	$X = 0$	$\sin \lambda_n (L - x)$	$2 \frac{\lambda_n^2 + H_1^2}{L(\lambda_n^2 + H_1^2) + H_1}$	$\lambda_n \cot \lambda_n L = -H_1$
4	$\frac{dX}{dx} = 0$	$-\frac{dX}{dx} + H_2 X = 0$	$\cos \lambda_n x$	$2 \frac{\lambda_n^2 + H_2^2}{L(\lambda_n^2 + H_1^2) + H_2}$	$\lambda_n \tan \lambda_n L = H_2$
5	$\frac{dX}{dx} = 0$	$\frac{dX}{dx} = 0$	$\cos \lambda_n x^a$	$\frac{2}{L}$ pour $\lambda_n \neq 0$; $\frac{1}{L}$ pour $\lambda_0 = 0^a$	$\sin \lambda_n L = 0^a$
6	$\frac{dX}{dx} = 0$	$X = 0$	$\cos \lambda_n x$	$\frac{2}{L}$	$\cos \lambda_n L = 0$
7	$X = 0$	$\frac{dX}{dx} + H_2 X = 0$	$\sin \lambda_n x$	$2 \frac{\lambda_n^2 + H_2^2}{L(\lambda_n^2 + H_2^2) + H_2}$	$\lambda_n \cot \lambda_n L = -H_2$
8	$X = 0$	$\frac{dX}{dx} = 0$	$\sin \lambda_n x$	$\frac{2}{L}$	$\cos \lambda_n L = 0$
9	$X = 0$	$X = 0$	$\sin \lambda_n x$	$\frac{2}{L}$	$\sin \lambda_n L = 0$

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \lambda^2 X(x) = 0 \text{ dans } 0 < x < L$$

Pour le cas particulier $\lambda_0 = 0$ est également la valeur propre correspondant à $X = 1$. $H_1 = h_1/k$ et $H_2 = h_2/k$.

Bibliographies:

- [1]: **J. P. HOLMAN**: Heat transfer. Tenth Edition. The McGraw-Hill Companies, Inc. 2010
- [2]: **RAMESH K. SHAH and DUSAN**: Fundamentals of heat exchanger design. JOHN WILEY & SONS, INC. 2003.
- [3]: **YVES JANNOT**: TRANSFERTS THERMIQUES. 2^{ème}année. 2012
- [4] : **JEAN FRANCOIS : SACADURA**. INITIATION AUX TRANSFERTS THERMIQUE
- [5]: **EUGENE HECHET**: Physique, Edition Thomson(1999).
- [6] : **YUNISA. CENGAL MICHAEL A. BOULES, MARCEL LACROIX** : Thermodynamique une approche pragmatique, Edition de boech (2009).
- [7]: **M. NECATI OZISIK**: HEAT CONDUCTION. Second Edition
- [8]: **M. NECATI OZISIK, DAVID W. HAHN**: HEAT CONDUCTION, Third Edition
- [9] : **Gaël MARANZANA** : Thèse, ingénieur ENSEM, mars 2003
- [10] : **Marguerite GISCON** : A propos de l'équation de la chaleur et de l'analyse de Fourier.
- [11] : **O. ARFI et E. MEZAACHE** : Actes de la Conférence Internationale de 2014 sur l'Énergétique Appliquée et la Pollution, organisée par le laboratoire LEAP, Décembre 14-15, 2014, Constantine, Algérie.