

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Mouloud Mammeri Tizi Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MASTER

Spécialité : Mathématique
Option : Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision

Présenté par:
Tinhinane ACHERAIYOU
Saloua TAIB

Sujet:

**Application de la théorie des jeux aux
réseaux de trafic routier**

Devant le jury d'examen composé de :

M ^r AIDENE Mohammed	Professeur	UMMTO	Président
M ^{me} ACHEMINE Farida	M.C.A	UMMTO	Examinatrice
M ^{me} FAHEM Karima	M.C.B	UMMTO	Encadreur

Soutenu le : 25 /09 /2018

Table des matières

Introduction	1
1 Notions fondamentales de la théorie des jeux	5
1.1 Définitions essentielles	5
1.2 Classification des jeux	6
1.2.1 Jeux Coopératifs	6
1.2.2 Jeux Non Coopératifs	7
1.2.3 Jeu à information complète	7
1.2.4 Jeu à information parfaite	7
1.2.5 Autre classes de jeux	7
1.3 Jeux sous forme normale	8
1.3.1 Concepts de solution	9
1.3.2 Équilibre de Nash	10
1.3.3 Équilibre de Nash et Meilleures réponses	11
2 Jeux de congestion et jeux de potentiel	14
2.1 Jeux de congestion	14
2.2 Jeux de potentiel	16
2.3 Jeux de congestion et jeux de potentiel	17
2.4 Équilibre de Nash	18
2.4.1 Existence d'équilibre de Nash	18
3 Jeux de routage	22
3.1 Le modèle	22
3.2 Les paramètres du réseau routier	23
3.3 Modèle de base de Wardrop	24
3.3.1 Les conditions de Wardrop	25

3.3.2	L'équilibre de Wardrop: <i>existence et unicité</i>	28
3.4	L'équilibre de Wardrop et problème d'optimisation	28
3.4.1	Le programme mathématique	29
3.4.2	Existence de solution	33
3.4.3	L'unicité de solution	34
3.5	Le prix de l'anarchie	37
	Conclusion	49
	Bibliographie	49

Introduction

Au quotidien la plupart d'entre nous, afin d'atteindre sa destination, utilise des moyens motorisés que ce soit le transport en commun ou des véhicules personnels, tout en minimisant le coût de ce déplacement, pour cela les voyageurs ont à choisir un itinéraire dont celui-ci est minimal, ce qui dépend du nombre de voyageurs partageant cet itinéraire. En raisonnant de la même manière, tous les voyageurs ayant le même point de départ et d'arrivée se retrouvent dans une situation d'embouteillage dite aussi congestion routière que personne d'entre nous n'apprécie.

Ce problème de congestion routière est l'un des phénomènes les plus difficiles à gérer dans la société moderne; tous les pays à travers le monde se voient confrontés à des bouchons monstres, comme ça été le cas de la ville de Pékin (chine), en Août 2010 qui a duré 12 jours sur $100Km$.

Pour faire face à ce phénomène, plusieurs études ont été consacrées que ce soit dans le domaine économique, politique et environnemental. De plus, ce phénomène est particulièrement grave sur les réseaux routiers. Les chercheurs se sont basés essentiellement sur la programmation mathématique, comme en témoigne M. Patrikson dans son ouvrage [7]. Il existe d'autres approches qui permettent d'étudier les problèmes liés au trafic routier: La théorie des jeux est l'une des plus récentes.

La théorie des jeux est l'étude de situations où plusieurs individus interagissent. Une interaction spécifie le comportement de chaque individu et donne à tous une utilité. Cette dernière se mesure par une fonction réelle, appelée fonction d'utilité, de paiement ou de coût, que tout individu a pour objectif sa maximisation ou minimisation. Un individu est appelé joueur et un comportement (réaction) stratégie. Un concept fondamental dans les jeux stratégiques est l'équilibre de Nash, il s'agit d'un profil de stratégies tel qu'aucune déviation unilatérale ne soit profitable au joueur déviant.

Dans le cadre de ce mémoire, nous allons appliquer les principes de la théorie des jeux dans le but de présenter et analyser un modèle permettant d'élaborer une meilleure affectation des véhicules sur les axes du réseau routier.

Ce mémoire est réparti en trois chapitres et organisé comme suit:

- Dans le premier chapitre nous rappellerons les concepts de bases et notions fondamentales de la théorie des jeux.
- Le deuxième chapitre introduit les jeux de congestion qui sont un cas particulier des jeux de potentiels, ainsi le lien entre eux.
- Le troisième chapitre illustre les jeux de routage dans les réseaux de trafic routier en introduisant le modèle de base de Beckmann et sa transformation en un problème d'optimisation.

Chapitre 1

Notions fondamentales de la théorie des jeux

La théorie des jeux consiste à étudier les situations de conflits qui peuvent exister entre des individus en interaction. Ces conflits sont souvent présentés dans notre vie réelle, sociale, économique ou tout autre domaine où les individus interagissent entre eux. Le but principal pour chaque individu consiste à savoir comment réagir et quelle sera la décision à prendre pour satisfaire son intérêt personnel selon le principe de la rationalité qui vise à maximiser son utilité (gain, profit) ou minimiser son coût. Pour répondre à ces besoins, plusieurs études ont été faites pour pouvoir analyser et, dans certains cas, résoudre ces conflits. Cette étude de conflits d'intérêts est appelée **Théorie des jeux**.

1.1 Définitions essentielles

Un jeu : est une situation où les individus (les joueurs) sont conduits à faire des choix parmi un certains nombres d'actions possibles, et dans un cadre défini à l'avance (les règles de jeu), les résultats de ces choix constituant une issue du jeu, à laquelle est associé un gain, positif ou négatif, pour chacun des participants.

Un joueur : est un acteur ou une entité pouvant être une personne, une entreprise, un gouvernement, une cellule, un virus ...etc, agissant dans leur propre intérêt selon le principe de la rationalité.

On notera \mathcal{N} l'ensemble des joueurs participant à un même jeu : $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ où N désigne leur nombre ($N \geq 2$).

Une stratégie : est un plan d'actions complet pour chaque joueur spécifiant ce que fera ce dernier à chaque étape du jeu et face à chaque situation pouvant survenir au cours du jeu. La stratégie décrit totalement le comportement d'un joueur.

Notons par :

- S_i : L'ensemble des stratégies pures du joueur i ;
- Δ_i : L'ensemble des stratégies mixtes du joueur i .

Définition 1.1. Une **stratégie pure** du joueur i est une action, ou un plan d'actions, choisie avec certitude.

Définition 1.2. Une **stratégie mixte** du joueur i est une distribution de probabilité α^i sur l'ensemble des stratégies pures de i^{eme} joueur. Une stratégie mixte pour le joueur i est représentée par un vecteur α défini comme suit

$$\Delta_i = \{\alpha^i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_{n_i}^i) \in \mathbb{R}^{n_i} : 0 \leq \alpha_j^i \leq 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n_i\}, \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j^i = 1\};$$

où n_i est le nombre de stratégies pures du joueur i , et α_j^i représente la probabilité que le i^{eme} joueur choisisse la j^{eme} stratégie.

Une utilité. À chaque profil de stratégies est associée une récompense (un gain ou une perte) pour chaque joueur, découlant d'une fonction d'utilité à valeur pour chaque combinaison possible de stratégies. La sélection d'une stratégie au détriment d'une autre implique un résultat, et donc une satisfaction du joueur, différente. La notion de bien-être ou de satisfaction d'un joueur dans une situation donnée est traduite par cette fonction d'utilité qui associe une série de choix préférentiels à des valeurs numériques.

1.2 Classification des jeux

Les jeux peuvent être classés selon le comportement des joueurs (Jeu Coopératif et non coopératif) et selon l'information que possèdent les joueurs (jeu à information complète et incomplète)

1.2.1 Jeux Coopératifs

On dit que le jeu est coopératif, si les joueurs peuvent se grouper dans des coalitions, où le choix de leurs stratégies est décidé en commun, afin d'améliorer les gains de tous les joueurs coalisés. Notons que les coalitions sont formées ou définies au début du jeu, ainsi

donc on parlera pas de coalitions se formant durant le jeu, ou devenant interdites. Les jeux coopératifs se divisent en deux catégories: Les jeux sans paiements latéraux et les jeux avec paiements latéraux.

1.2.2 Jeux Non Coopératifs

On appelle jeu non coopératif, un jeu où les joueurs ne peuvent pas former de coalitions, par contre ils peuvent communiquer entre eux et échanger les informations, se mettre d'accord sur telle ou telle issue sans jamais contracter d'accord contraignant. Les raisons essentielles d'un tel comportement peuvent être l'impossibilité de communication, les intérêts des joueurs sont opposés, la perte de confiance entre les joueurs, ou bien il y a interdiction de former des coalitions.

Selon l'information que possèdent les joueurs :

1.2.3 Jeu à information complète

Un jeu est dit à information complète si chacun des joueurs connaît la structure du jeu, c'est à dire: l'ensemble des joueurs, les préférences des joueurs, les règles du jeu et le type d'information qu'à chaque moment du jeu chaque joueur possède sur les actions entreprises par les autres joueurs au cours des phases précédentes. Donc chaque joueur peut se mettre à la place de tous les autres joueurs et du modélisateur. Si au moins un des joueurs ne connaît pas entièrement la structure du jeu, le jeu est dit à information incomplète.

1.2.4 Jeu à information parfaite

Un jeu est dit à information parfaite si chacun des joueurs, au moment de choisir son action, a une connaissance parfaite de l'ensemble des décisions prises antérieurement par les autres joueurs. Un jeu est à information imparfaite si un des joueurs ne connaît pas, à un moment du déroulement du jeu, ceux qu'a joué un autre joueur. Ceci peut arriver dans le cas où on cache l'information aux joueurs ou parce que les joueurs jouent simultanément.

1.2.5 Autre classes de jeux

En plus des deux classes citées ci-dessus, on peut classer les jeux selon le nombre de joueurs (Jeu à deux joueurs et jeu à plusieurs joueurs). Selon le gain (jeu à somme nulle et jeu à somme non nulle).

On dit qu'un jeu est à somme nulle si le montant total des gains à la fin de la partie est

à somme nulle, en d'autres termes si le montant total gagné par un joueur est égale au montant perdu par l'autre, les échecs ou le Poker sont des jeux à somme nulle.

1.3 Jeux sous forme normale

La forme normale, également connue sous le nom de forme stratégique, est la représentation la plus familière des interactions stratégiques dans la théorie des jeux. Un jeu écrit de cette façon s'élève à une représentation de l'utilité de chaque joueur, l'ensemble de ses stratégies et les issues possibles du jeu.

Définition 1.3. Un jeu sous forme normale peut être représenté sous la forme

$$\langle \mathcal{N}, \{S_i\}_{i \in \mathcal{N}}, \{f_i\}_{i \in \mathcal{N}} \rangle \quad (1.1)$$

où

1. $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$ est l'ensemble des joueurs, un joueur quelconque est appelé i et donc $i \in \{1, \dots, n\}$;
2. $S_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ désigne l'ensemble des stratégies du joueur $i \in \mathcal{N}$;
 $S = \prod_{i=1}^N S_i$ est l'ensemble des issues du jeu;
3. f_i est la fonction d'utilité du joueur $i \in \mathcal{N}$.

Remarque 1.1. Un jeu sous forme normale (stratégique) est un jeu ayant les caractéristiques suivantes :

- Il s'agit d'un jeu à information complète.
- Il s'agit d'un jeu simultané (statique) où chaque joueur choisit une stratégie indépendamment du choix de l'autre joueur et le jeu ne se répète pas.
- Les joueurs sont rationnels et leurs objectif est la maximisation de leurs paiement.

Exemple 1.1. *Considérons le jeu suivant appelé « pile ou face ». Dans ce jeu, deux enfants placent secrètement une pièce de un dinar dans le creu de leurs mains. Puis simultanément chaque enfant ouvre sa main et montre à l'autre sa pièce. Si les deux pièces sont toutes les deux de côté pile ou de côté face, l'enfant 1 donne un dinar à l'enfant 2. Dans le cas contraire c'est l'enfant 2 qui donne un dinar à l'enfant 1. C'est un jeu à information imparfaite car les deux enfants ouvrent les mains simultanément sans savoir comment l'un et l'autre avaient placé la pièce dans leur main.*

La forme normale de ce jeu apparaît dans la figure suivante:

		Enfant2	
		Pile	Face
Enfant1	Pile	(-1,1)	(1,-1)
	Face	(1,-1)	(-1,1)

TAB. 1.1

Dans les quatre cases du tableau 1:

- Le premier chiffre est le paiement que reçoit l'enfant 1.
- Le second chiffre est le paiement que reçoit l'enfant 2.

Jeux finis à N joueurs

Définition 1.4. le jeu (1.1) est dit fini, si chacun des joueurs a un ensemble fini de stratégies, c'est-à-dire

$$\langle \mathcal{N}, \{S_i\}_{i \in \mathcal{N}}, \{f_i\}_{i \in \mathcal{N}} \rangle; \quad (1.2)$$

cardinal de $S_i = |S_i| < +\infty, \forall i \in \mathcal{N}$.

1.3.1 Concepts de solution

Maintenant que nous avons défini un jeu sous forme normale et quelles sont les stratégies disponibles aux joueurs, la question est comment raisonner au sujet de tels jeux. Les théoriciens de jeu traitent ce problème en identifiant certains sous-ensembles de résultats, appelés les concepts de solution. Dans cette section, nous décrivons quelques concepts de solution et le concept le plus fondamental à savoir: **équilibre de Nash**.

Définition 1.5. Considérons le jeu sous forme normale (1.1). On dit que la stratégie $s_i \in S_i$ est une **stratégie dominante**, si:

$$\forall s'_i \in S_i, \forall s_{-i} \in S_{-i}, \quad f_i(s_i, s_{-i}) \geq f_i(s'_i, s_{-i})$$

La stratégie $s_i \in S_i$ est dominante pour le joueur i , si s_i domine s'_i .

Définition 1.6. Une stratégie $s_i \in S_i$ est une **stratégie strictement dominante** pour le joueur i dans le jeu (1.1), si:

$$\forall s'_i \in S_i, s'_i \neq s_i, \forall s_{-i} \in S_{-i}, \quad f_i(s_i, s_{-i}) > f_i(s'_i, s_{-i})$$

Définition 1.7. Une stratégie s_i est **faiblement dominante**, si :

$$\begin{aligned} \forall s'_i \in S_i, s'_i \neq s_i, \forall s_{-i} \in S_{-i}, \quad f_i(s_i, s_{-i}) &\geq f_i(s'_i, s_{-i}); \\ \exists s_{-i} \in S_{-i}, \quad f_i(s_i, s_{-i}) &> f_i(s'_i, s_{-i}). \end{aligned}$$

Équilibre en stratégies dominantes Une situation $s = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_N^*) \in S$ est appelée équilibre en stratégies dominantes dans le jeu (1.1), si chaque composante $s_i^* \in S_i$ est une stratégie dominante pour le joueur i , $\forall i \in \mathcal{N}$.

1.3.2 Équilibre de Nash

Le concept clé de la théorie des jeux est le concept d'équilibre de Nash introduit par le mathématicien John Nash en 1950.

Un équilibre de Nash correspond donc à une situation où aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de la situation d'équilibre.

Définition 1.8. Un profil de stratégies $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$ est un **équilibre de Nash** pour le jeu (1.1) si aucun des joueurs n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie s_i^* (quand les autres joueurs continuent à jouer le profil s_i^*). Autrement dit:

$$\forall i \in \mathcal{N}, \forall s_i \in S_i, \quad f_i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*) \geq f_i(s_i, s_{-i}^*) \quad (1.3)$$

Exemple 1.2 (Dilemme du prisonnier). Deux cambrioleurs, notés 1 et 2, sont arrêtés par la police et placés en garde à vue dans des cellules différentes. La police n'a pas assez de preuves, donc elle leur propose un marché : Si les deux coopèrent en ne se dénonçant pas mutuellement, chacun va écoper d'un an de prison. Si l'un trahit en accusant l'autre, alors celui qui a trahi va être libéré, et celui qui s'est tu va écoper 10 ans de prison. Si les deux se dénoncent mutuellement, alors chacun va écoper de 5 ans de prisons.

		Suspect2	
		Se taire(ST)	Dénoncer(D)
Suspect1	Se taire(ST)	(-1,-1)	(-10,0)
	Dénoncer(D)	(0,-10)	(-5,-5)

TAB. 1.2

Pour le suspect 1:

$$f_i(ST, ST) = 1 < f_i(D, ST) = 0$$

Pour le suspect 2:

$$f_2(ST,ST) = -1 < f_2(ST,D) = 0$$

$\Rightarrow (ST, ST)$ n'est pas un équilibre de Nash. Par contre le profil (D, D) est un équilibre de Nash. En effet:

$$f_1(D,D) = -5 > f_1(ST,D) = -10$$

$$f_2(D,D) = -5 > f_2(D,ST) = -10$$

1.3.3 Équilibre de Nash et Meilleures réponses

Définition 1.9. Pour chaque joueur i et profil d'actions de ses adversaires s_{-i} , on dit que s_i est meilleure réponse contre s_{-i} si:

$$\forall s'_i \in S_i, \quad f_i(s_i, s_{-i}) \geq f_i(s'_i, s_{-i})$$

On appelle correspondance de meilleures réponses du joueur i l'application multivoque MR_i définie de S_{-i} dans l'ensemble des parties 2^{S_i} de S_i qui à chaque s_{-i} associe l'ensemble des meilleures réponses du joueur i .

$$\begin{aligned} MR_i : s_{-i} &\longrightarrow 2^{S_i} \\ s_{-i} &\longrightarrow MR_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i, \quad f_i(s_i, s_{-i}) \geq f_i(s'_i, s_{-i}), \quad \forall s'_i \in S_i\} \\ &= \{s_i \in S_i, \quad f_i(s_i, s_{-i}) = \max_{s'_i} f_i(s'_i, s_{-i})\} \\ &= \arg \max_{s'_i} f_i(s'_i, s_{-i}) \end{aligned}$$

Définition 1.10. On appelle correspondance de meilleures réponses du jeu (1.1) l'application multivoque :

$$\begin{aligned} MR : S &\longrightarrow 2^S \\ s &\longrightarrow MR(s) = \prod_{i \in N} MR_i(s_{-i}) \end{aligned}$$

Proposition 1.1. $s^* \in S$ est un équilibre de Nash pour le jeu (1.1) si et seulement si s^* est un point fixe de la correspondance de meilleures réponses MR de ce jeu, i.e

$$s^* \in MR(s^*).$$

Preuve. Soit s^* un équilibre de Nash du jeu (1.1), donc:

$$\begin{aligned} \forall i \in N, \forall s'_i \in S_i, f_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq f_i(s'_i, s_{-i}^*) &\iff s_i^* \in MR_i(s_{-i}^*) \quad \forall i \\ &\iff s^* \in \prod_{i \in N} MR_i(s_{-i}^*) \\ &\iff s^* \in MR(s^*). \end{aligned}$$

D'où: s^* est un point fixe de MR .

Exemple 1.3. $S_1 = \{a, b, c\}$, $S_2 = \{A, B, C\}$

$$\begin{aligned} MR_1 : S_2 &\longrightarrow 2^{S_1} \\ s_2 &\longrightarrow MR_1(s_2) = \{s_1 \in X_1, f_1(s_1, s_2) \geq f_1(s'_1, s_2), \quad \forall s'_1 \in S_1\} \\ &= \arg \max_{s'_1} f_1(s'_1, s_2) \end{aligned}$$

définie par :

$$MR_1(A) = \{b, c\}$$

$$MR_1(B) = \{a\}$$

$$MR_1(C) = \{b\}$$

Pour le joueur 2:

$$\begin{aligned} MR_2 : S_1 &\longrightarrow 2^{S_2} \\ s_1 &\longrightarrow MR_2(s_1) = \{s_2 \in X_2, f_2(s_1, s_2) \geq f_2(s_1, s'_2), \quad \forall s'_2 \in S_2\} \\ &= \arg \max_{s'_2} f_2(s_1, s'_2) \end{aligned}$$

définie par :

$$MR_2(a) = \{A\}$$

$$MR_2(b) = \{C\}$$

$$MR_2(c) = \{B, C\}$$

		J2		
		A	B	C
J1	a	(1,2) \square_*	(2,0)	(-1, 0)
	b	(3,1) \square	(-3, -3)	(5,5) \square_*
	c	(3,0) \square	(0,1) $_*$	(3,1) $_*$

TAB. 1.3

À partir du tableau 1.3 on peut trouver l'équilibre facilement, en notant par:

- \square : meilleure réponse du joueur 1.

– *: meilleure réponse du joueur 2.

Donc l'équilibre se trouve à l'intersection de la meilleure réponse du joueur 1 et celle du joueur 2.

D'où les équilibres de Nash de ce jeu sont (a, A) et (b, C) . Les gains de chaque joueur en ces points sont: $f_1(a, A) = 1$ et $f_2(a, A) = 2$

$f_1(b, C) = 5$ et $f_2(b, C) = 5$.

Théorème 1.1. *Un jeu sous forme normale (1.1) admet un équilibre de Nash, si les conditions suivantes sont vérifiées:*

1. Les ensembles S_i , des stratégies sont convexes et compacts, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$.
2. Les fonctions $f_i : \prod_{j=1}^N S_j \rightarrow \mathbb{R}$, sont continues, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$.
3. Les fonctions $f_i(s_i, s_{-i}) S_i \rightarrow \mathbb{R}$, sont concaves, $\forall i \in \mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$,
 $\forall s_{-i} \in \prod_{j \in \mathcal{N}, j \neq i} S_j$.

Remarque 1.2. Pour montrer le théorème précédent il suffit de vérifier les hypothèses du théorème de Kakutani (la correspondance de meilleures réponses est à valeur non vide, convexe et compacte sur un compacte S de \mathbb{R}^n et à graphe fermé).

Chapitre 2

Jeux de congestion et jeux de potentiel

Rosenthal décrit une classe de jeux pour lesquels il y a toujours un équilibre de Nash en stratégies pures [10]. Il ne les appelle pas lui-même ”*jeu de congestion*”. Cette appellation fut proposée pour la première fois par Shapley et Monderer en 1996, lorsqu’ils ont eux-mêmes défini les jeux de potentiels [6].

2.1 Jeux de congestion

Les jeux de congestion ont été introduits par Rosenthal en 1973 [10]. Ils font partie d’une classe de jeux où les joueurs participants choisissent leurs ressources simultanément, ces dernières pouvant être partagées entre plusieurs joueurs. Le coût d’un joueur dépend de la ressource choisie, mais également du nombre de joueurs ayant choisi cette même ressource. Le coût de chaque ressource dépend d’une fonction de congestion dite aussi fonction objectif de Rosenthal.

Définition 2.1. Un jeu de congestion est un 4-uplet:

$$\langle \mathcal{N}; (S_i)_{i \in \mathcal{N}}; A; (t_l)_{l \in A} \rangle . \quad (2.1)$$

non coopératif qui est défini comme suit :

- $\mathcal{N} = \{1, \dots, i, \dots, n\}$ l’ensemble des joueurs,
- $A = \{1, \dots, l, \dots, m\}$ l’ensemble des ressources (liaisons),

- $\forall i \in \mathcal{N}$, S_i est l'ensemble des stratégies de joueur i de cardinalité m_i ,
- Pour toute ressource $l \in A$, $t_l : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction du coût de la ressource l qui prend en argument un entier. Cet entier représente le nombre de joueurs qui utilisent cette ressource, ainsi $t_l(n)$ est le coût à payer par chaque utilisateur de l lorsque le nombre est n .

Pour tout joueur i , un élément $s_i \in S_i$ correspond à l'utilisation d'un sous-ensemble non vide de ressources, c'est ce que l'on appelle une stratégie pure ou une action.

Soit $S = \bigcup_{i \in \mathcal{N}} S_i$, l'ensemble de stratégies du jeu comprenant toutes les combinaisons possibles d'actions de tous les joueurs. Pour tout profil du jeu $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ et pour toute ressource l , nous notons $n_l(s)$ le nombre de joueurs qui partagent la ressource l dans le profil s . Le vecteur $n(s) = (n_l(s))_{l \in A} = (n_1(s), n_2(s), \dots, n_m(s))$ est appelé vecteur de congestion associé au profil s . Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, Le coût du joueur i dans le profil s est alors défini par:

$$c_i : S \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$c_i(s) = \sum_{l \in s_i} t_l(n_l(s)). \quad (2.2)$$

où t_l est le coût de la ressource l .

Le coût d'un joueur est donc la somme des coûts associés aux ressources qu'il utilise, et ces coûts dépendent, à chaque fois, du nombre total de joueurs partageant avec lui la même ressource.

Remarque 2.1. Tous les joueurs sont égaux dans le sens où ils ont tous la même importance ou le même poids. Peu importe qui utilise telle ressource, seul compte le nombre d'utilisateurs. C'est une caractéristique importante des jeux de congestion.

Exemple 2.1. Soit $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{a, b, c\}$, $S_i = 2^A \setminus \emptyset$, pour tout $i \in \mathcal{N}$. Supposons que les coûts d'utilisation de chaque ressource soient donnés par:

$t_a(n_a(s)) = 5 - n_a(s)$; $t_b(n_b(s)) = n_b(s)$ et $t_c(n_c(s)) = 3$. Soit s le profil de stratégie défini par $s = (\{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{b\})$.

En appliquant la formule (2.2), qui permet de calculer le coût de chaque joueur, nous obtenons :

$$c_1(s) = t_a(n_a(s)) + t_c(n_c(s)) = t_a(3) + t_c(2) = 2 + 3 = 5.$$

$$c_2(s) = t_a(n_a(s)) + t_b(n_b(s)) = t_a(3) + t_b(3) = 2 + 3 = 5.$$

$$c_3(s) = t_a(n_a(s)) + t_b(n_b(s)) + t_c(n_c(s)) = t_a(3) + t_b(3) + t_c(2) = 2 + 3 + 3 = 8.$$

$$c_4(s) = t_b(n_b(s)) = 3.$$

2.2 Jeux de potentiel

D'après [6], les jeux de potentiel sont les jeux dans lesquels l'incitation de tous les joueurs à changer de stratégie peut être exprimée par une fonction globale unique, appelée *fonction de potentiel*. Il existe plusieurs sous-classes de jeux de potentiel, les jeux de potentiel ordinal, exact et pondéré.

Cette fonction de potentiel, notée P , de l'ensemble des stratégies pures et à valeurs dans \mathbb{R} , est telle qu'étant donné un profil de stratégies pures, si un joueur change de stratégie alors la variation de son coût implique une variation de même type pour P .

Dans le cas d'un jeu de potentiel ordinal, seul le signe de la variation est conservé, une variation positive (resp. négative) du coût implique également une variation positive de la fonction de potentiel (resp. négative). Pour les jeux de potentiel exact, le signe et la valeur de la variation sont identiques. Quant aux jeux de potentiel pondéré, la valeur de la variation est proportionnelle à un certain poids.

Définition 2.2. [6](**Jeu de potentiel ordinal**) le jeu (1.1) est un jeu de potentiel ordinal, si: $\exists P : S \rightarrow \mathbb{R}$ tel que:

$$\forall i \in \mathcal{N}, \forall s, s' \in S, \text{signe}(P(s) - P(s')) = \text{signe}(c_i(s) - c_i(s')) \quad (2.3)$$

Définition 2.3. [6](**Jeu de potentiel exact**) le jeu (1.1) est un jeu de potentiel exact, si: $\exists P : S \rightarrow \mathbb{R}$ tel que:

$$\forall i \in \mathcal{N}, \forall s, s' \in S, P(s) - P(s') = c_i(s) - c_i(s') \quad (2.4)$$

Définition 2.4. [6](**Jeu de potentiel pondéré**) le jeu (1.1) est un jeu de potentiel pondéré s'il existe des poids $(\omega_i)_{i \in \mathcal{N}}$ et $P : S \rightarrow \mathbb{R}$ tels que pour tout joueur et stratégies pures s et s' , on a:

$$\forall i \in \mathcal{N}, \forall s, s' \in S, P(s) - P(s') = \omega_i(c_i(s) - c_i(s')) \quad (2.5)$$

Notons que $s = (s_i, s_{-i})$ et $s' = (s_i, s'_{-i})$ deux profils différents du jeu entre lesquels seul le joueur i modifie sa stratégie.

Remarque 2.2. Dans notre cas, on s'intéresse au deuxième type de jeu de potentiel (2.4), qui est équivalent à un jeu de congestion avec des utilités décroissantes (coûts).

2.3 Jeux de congestion et jeux de potentiel

Le théorème suivant donne la relation entre les jeux de congestions et ceux de potentiel :

Théorème 2.1. [10] *Tout jeu de congestion est un jeu de potentiel.*

Preuve. Soit le jeu de congestion (2.1), pour tout $s \in S$, posons:

$$P(s) = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^{n_l(s)} t_l(k) \quad (2.6)$$

Montrons que P ainsi définie est une fonction de potentiel, ça revient à vérifier que:

$$P(s_i, s_{-i}) - P(s'_i, s_{-i}) = c_i(s_i, s_{-i}) - c_i(s'_i, s_{-i})$$

Soit $s_i, s'_i \in S_i$ deux stratégies du joueur i et $s_{-i} \in S_{-i}$ le profil de stratégies de ses adversaires. Notons $B = (s_i \cap s'_i) \cup (A \setminus (s_i \cup s'_i))$ le sous-ensemble de A qui contient les éléments communs à s_i et à s'_i ainsi que les ressources non utilisées par s_i et s'_i . Alors, n_b , le nombre d'utilisateurs d'une ressource $b \in B$, reste le même sous les deux profils de stratégies (s_i, s_{-i}) et (s'_i, s_{-i}) .

Notons $s_i \setminus s'_i = \{a \in A \mid a \in s_i, a \notin s'_i\}$. Alors, d'une part:

$$\begin{aligned} P(s_i, s_{-i}) - P(s'_i, s_{-i}) &= \sum_{a \in s_i \setminus s'_i} \left(\sum_{k=0}^{n_a(s_i, s_{-i})} t_a(k) - \sum_{k=0}^{n_a(s'_i, s_{-i})} t_a(k) \right) \\ &\quad - \sum_{b \in s'_i \setminus s_i} \left(\sum_{k=0}^{n_b(s'_i, s_{-i})} t_b(k) - \sum_{k=0}^{n_b(s_i, s_{-i})} t_b(k) \right) \\ &= \sum_{a \in s_i \setminus s'_i} (t_a(n_a(s_i, s_{-i}))) - \sum_{b \in s'_i \setminus s_i} (t_b(n_b(s'_i, s_{-i}))) \end{aligned}$$

d'autre part:

$$\begin{aligned} c_i(s_i, s_{-i}) - c_i(s'_i, s_{-i}) &= \sum_{a \in s_i} t_a(n_a(s_i, s_{-i})) - \sum_{b \in s'_i} t_b(n_b(s'_i, s_{-i})) \\ &= \sum_{a \in s_i \setminus s'_i} t_a(n_a(s_i, s_{-i})) - \sum_{b \in s'_i \setminus s_i} t_b(n_b(s'_i, s_{-i})). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Remarque 2.3. Dans le cas de jeux de congestion non atomique (à infinité de joueurs) la fonction de potentiel est équivalente à la fonction de potentiel discrète (2.6), sauf que dans celle-ci la somme $\sum_{k=1}^{n_l(s)} t_l(k)$ sera remplacée par l'intégrale $\int_0^{x_l} t_l(z) dz$, ce qui conduit à la fonction de potentiel suivante :

$$P(s) = \sum_{l \in A} \int_0^{x_l} t_l(z) dz \quad (2.7)$$

Dans les jeux de congestion, atteindre l'équilibre consiste à répartir les joueurs d'une façon équitable sur l'ensemble des chemins qui compose le réseau routier, et cela afin de minimiser leurs coûts de déplacement.

Lorsque le mot équilibre est employé ci-après, il doit s'interpréter comme une variation de l'équilibre de Nash.

2.4 Équilibre de Nash

Dans les jeux de congestion, l'équilibre de Nash correspond à la situation dans laquelle aucun joueur n'a intérêt à changer son itinéraire (chemin) afin de diminuer son coût.

Définition 2.5. Etant donné le jeu de congestion non coopératif (2.1), soit n joueurs dans ce jeu où chaque joueur i dans \mathcal{N} est représenté par un vecteur de stratégie $s_i \in S_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$ (m_i est un entier positif), et une fonction de coût $c_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ où $S = \prod_{i \in \mathcal{N}} S_i$ et $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^t$; un équilibre de Nash $s^* \in S$ de ce jeu est défini comme un point pour lequel aucun joueur ne peut décroître son coût:

$$c_i(s_i^*, s_j^*) \leq c_i(s_i, s_j^*) \quad \forall s_i \in S_i, \quad j \in \mathcal{N}, j \neq i, \quad (2.8)$$

2.4.1 Existence d'équilibre de Nash

Rosenthal dans [10] a montré à l'aide d'une fonction de potentiel exact que tout jeu de congestion admet au moins un équilibre de Nash.

Théorème 2.2. *Tout jeu de congestion admet un équilibre de Nash pur.*

Preuve. *Soit une fonction de Potentiel P vérifiant l'équation (2.4), comme l'ensemble S de stratégies est fini et les fonctions de coût des arcs $(t_l)_{l \in A}$ sont positives, la fonction*

P admet un point de minimum global $s \in S$. Si s n'était pas un équilibre de Nash pur, alors un joueur i aurait pu diminuer son coût en choisissant une autre stratégie s'_i , i.e.: $c_i(s'_i, s_{-i}) < c_i(s_i, s_{-i})$. Or, d'après (2.4), cela signifie que: $P(s'_i, s_{-i}) < P(s_i, s_{-i})$ ce qui contredit la minimalité globale de s .

Remarque 2.4. La démonstration du Théorème 2.2 implique que, dans un jeu de congestion, un point minimum global de la fonction de potentiel (2.6) constitue un équilibre de Nash pur. La réciproque n'est pas vraie; en particulier, il n'y a pas unicité.

Nous allons maintenant analyser ce modèle à travers un exemple, dans lequel des individus doivent se rendre d'un point O à un point D , et ce, en ayant à leur disposition plusieurs itinéraires. Le coût lié au trajet, dépend des préférences et du nombre d'individus empruntant un itinéraire précis. Illustrons ceci avec un exemple à deux joueurs.

Exemple 2.2. Soit $\mathcal{N} = \{1,2\}$ $A = U$ et $m = 5$

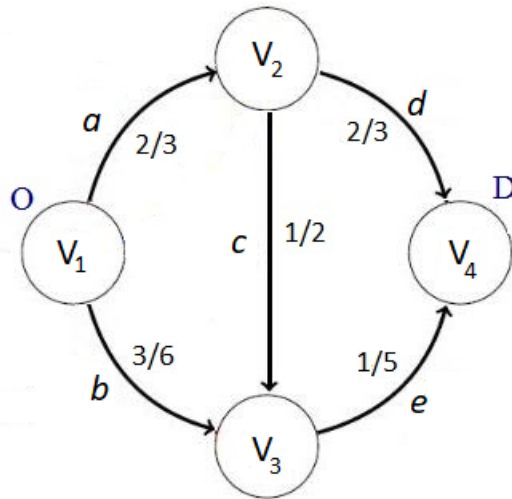


FIG. 2.1 – $G=(X,U)$

Soit $G = (X,U)$, un graphe orienté qui représente un réseau routier, avec $X = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ un ensemble fini de noeuds pouvant être assimilés à des villes, $U = \{a, b, c, e, d\}$ un ensemble fini d'arcs reflétant les différents itinéraires .

les points O et D représentent le point de départ et d'arrivée des joueurs. Les chiffres sur les différents arcs donnent le coût du trajet en fonction du nombre de joueurs qui l'emprunte. Les chiffres 2 et 3 sur l'arc a représentent le coût du trajet a lorsqu'il y a respectivement

un ou deux joueurs. De même, les chiffres 3 et 6 sur l'arc b représentent le coût du trajet b lorsqu'il y a respectivement un ou deux joueurs sur cet arc et de même pour le reste des chiffres. Ces informations peuvent être résumées par les fonctions de paiements suivantes :

$$\begin{aligned} c_a(1) &= 2 & c_a(2) &= 3 \\ c_b(1) &= 3 & c_b(2) &= 6 \\ c_c(1) &= 1 & c_c(2) &= 2 \\ c_d(1) &= 2 & c_d(2) &= 3 \\ c_e(1) &= 1 & c_e(2) &= 5 \end{aligned}$$

La question qui se pose maintenant est la suivante : comment trouver l'équilibre de Nash (c'est-à-dire, celui qui correspond à un coût minimal) ?

L'ensemble des stratégies (chemins) possibles des joueurs 1 et 2 est:

$$S_1 = S_2 = \{(a,d), (b,e), (a,c,e)\}$$

L'ensemble des issues possibles:

$$S_1 \times S_2 = \{A = ((a,d)(a,d)), B = ((a,d)(b,e)), C = ((a,d)(a,c,e)), D = ((b,e)(b,e)), E = ((b,e)(a,c,e)), F = ((a,c,e)(a,c,e)), G = ((b,e)(a,d)), K = ((a,c,e)(b,e)), L = ((a,c,e)(a,d))\}$$

calculons maintenant les coûts de chaque joueur pour chaque issue de stratégie ainsi que la valeur de la fonction de potentiel en chaque profil de stratégies :

Les coûts :

$$c_1(A) = t_a(n_a(s)) + t_d(n_d(s)) = c_2(A) = 3 + 3 = 6$$

$$c_1(D) = c_2(D) = 6 + 5 = 11$$

$$c_1(F) = c_2(F) = 3 + 2 + 5 = 10$$

$$c_1(B) = 2 + 2 = 4 \quad c_2(B) = 3 + 1 = 4$$

$$c_1(C) = 3 + 2 = 5 \quad c_2(C) = 3 + 1 + 1 = 5$$

$$c_1(E) = 3 + 5 = 8 \quad c_2(E) = 2 + 1 + 5 = 8$$

$$c_1(G) = 3 + 1 = 4 \quad c_2(G) = 2 + 2 = 4$$

$$c_1(K) = 2 + 1 + 5 = 8 \quad c_2(K) = 3 + 5 = 8$$

$$c_1(L) = 3 + 1 + 1 = 5 \quad c_2(L) = 3 + 2 = 5$$

Les valeurs de la fonction de potentiel :

$$P(s) = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^{n_l(s)} t_l(k)$$

$$P(A) = t_a(2) + t_d(2) + t_a(2) + t_d(2) = 2 + 2 + 3 + 3 = 10$$

$$P(B) = 2 + 2 + 3 + 1 = 8$$

$$P(C) = 2 + 2 + 3 + 1 + 1 = 9$$

$$P(D) = 3 + 1 + 6 + 5 = 15$$

$$P(E) = 3 + 1 + 2 + 1 + 5 = 12$$

$$P(F) = 2 + 1 + 1 + 3 + 2 + 5 = 14$$

$$P(G) = 3 + 1 + 2 + 2 = 8$$

$$P(K) = 2 + 1 + 1 + 3 + 5 = 12$$

$$P(L) = 2 + 1 + 1 + 3 + 2 = 9$$

Maintenant, nous allons déterminer la stratégie qui nous donne le coût minimum pour chacun des 2 joueurs, c-à-d celle qui minimise la fonction de potentiel $P(S)$:

$$\begin{aligned} \min_{s \in S} P(s) &= \min_{s \in S} \{P(A), P(B), P(C), P(D), P(E), P(F), P(G), P(K), P(L)\} \\ &= \min_{s \in S} P(s) = \min_{s \in S} \{10, 8, 9, 15, 12, 14, 12, 9\} \\ &= 8 \end{aligned}$$

D'où la stratégie qui assure l'équilibre de Nash $s^* = B = \{(a,d), (b,e)\}$.

Le coût de chaque joueur est: $c_1(B) = 4$ et $c_2(B) = 4$

Donc aucun des joueurs ne diminuera son coût en changeant de stratégie.

Dans le chapitre suivant, Nous proposerons l'un des cas d'application possibles des jeux de congestion, en formalisant le problème dès le départ sous la forme d'un jeu de congestion réseau dit aussi jeux de routage, qui a pour but de représenter les problématiques d'encombrement de réseaux routiers. Les joueurs sont des conducteurs(voyageurs) qui cherchent à aller d'une origine du réseau à une destination. L'ensemble des stratégies d'un joueur est l'ensemble des chemins de son origine à sa destination. Les fonctions de coût sur les arcs représentent le coût à payer pour les traverser. L'objectif des joueurs est de minimiser leur coûts de trajet, ce qui correspond à minimiser la somme des coûts de ressources utilisées.

Chapitre 3

Jeux de routage

Un jeu de routage est un jeu non-atomique où il y a une infinité de joueurs, que nous considérons infinitésimaux et dans lequel est défini une certaine notion de flux qui transite dans un réseau. Les joueurs n'ont pas nécessairement même source et même destination. Le modèle de routage réseau que nous utilisons est celui de Wardrop [12]. Il est conçu pour représenter des problèmes de routage, chaque joueur est assigné à une commodité, dans chacune de cette dernière, une certaine quantité de trafic doit être routée, depuis une source jusqu'à une destination donnée, selon un ensemble de plus court chemin qui induit un sous-graphe du réseau général. Une répartition de flux du trafic dans laquelle pour toutes les commodités, les coûts sont minimaux sur tous les chemins utilisés constituent un équilibre de Wardrop.

3.1 Le modèle

On considère une instance du problème de routage du trafic qui est défini comme suit:

$$\mathcal{J} = \langle G, \{S_i\}_{i \in I}, \{c_i\}_{i \in I} \rangle \quad (3.1)$$

où

1. $G = (X, U)$ est un graphe orienté qui représente un réseau routier, avec X l'ensemble des sommets (noeuds) et U l'ensemble des arcs;
2. S_i est l'ensemble de stratégies, supposé non-vide, des plus courts chemins entre O et D , $\forall i \in \{1, \dots, k\}$
3. c_i est une fonction de coût non négative, continue et non décroissante qui représente le coût induit par la commodité $i \in I$ en fonction de flux h , où une commodité

représente une fraction de joueurs en situation de coopération (choisissant la même stratégie), afin de minimiser leur coût du déplacement global.

- L'ensemble des commodités est noté $I = \{1, 2, \dots, k\}$. Toute commodité est caractérisée par: $w \in W$: une paire de noeuds (Origine-Destination(OD)), où W est l'ensemble des paires de noeuds (OD);
- Un flux dans un réseau G est un vecteur non négatif indexé sur l'ensemble des chemins $S = \bigcup_{i=1}^k S_i$.
- Pour un flux h , une paire de noeuds $w \in W$ et un chemin $s \in S_i$, nous interprétons h_{ws} comme la quantité de trafic de la commodité i qui circule sur le chemin s allant de O à D.
- A chaque arc est associé une fonction de coût t_l non négative, continue et non décroissante ce qui donne le coût induit par le trafic sur l en fonction de x_l .

Avant d'introduire la notion d'équilibre dans un réseau de trafic routier, nous allons définir d'abord ses différents paramètres.

3.2 Les paramètres du réseau routier

Le réseau routier sera représenté sous forme d'un graphe orienté:

- a. Origine:** C'est un sommet qui désigne le point de départ d'un usager, c-à-d le lieu où l'usager entre sur le réseau routier réel.
- b. Destination:** C'est un sommet qui désigne le point d'arrivée du voyage d'un usager, c-à-d le lieu où l'usager quitte la circulation une fois parvenu à sa destination qui correspond à une sortie du réseau réel.
- c. Itinéraire:** C'est un chemin continu d'arc reliant deux sommets entre eux, respectivement l'origine et la destination de l'itinéraire.
- d. Coût du parcours:** Le coût du déplacement sur l'arc (liaison) l ($l \in A$) est une fonction qui dépend du nombre d'usagers (flux) traversant cet arc.

$$t_l = t_l(x_l) \tag{3.2}$$

Avec (x_l) et (t_l) représentent respectivement le flux et le coût du déplacement sur l'arc l .

- e. Demandes Origine-Destination:** C'est une donnée essentielle pour les modèles d'affectation de trafic, notée d que nous supposons fixe et qui représente le nombre de

vehicules qui veulent se rendre d'un point de départ (Origine) vers un point d'arrivée (Destination)

3.3 Modèle de base de Wardrop

Le modèle d'équilibre de base dans les réseaux du trafic routier tombe dans la catégorie des jeux de potentiels avec un nombre infini d'utilisateurs. En effet, la condition d'équilibre de Wardrop (le premier principe de Wardrop), peut être exprimé mathématiquement pour indiquer que le flux sur chaque itinéraire emprunté par une commodité (joueurs), où une paire Origine Destination w , est soit zéro, ou son coût est égal au coût minimum sur cette paire (OD).

Mathématiquement, on peut formuler les conditions d'équilibre des usagers [7], en considérant un ensemble de flux sur un réseau routier et on choisit arbitrairement une paire Origine-Destination(OD): $w \in W$. Soit c_{ws} le coût du déplacement sur la route s joignant une paire w . Notons que les routes joignant une paire OD sont ordonnées, de sorte que les l premières liaisons soient réellement utilisées. Le flux du réseau est un équilibre si et seulement si:

$$c_{w1} = c_{w2} = \dots = c_{wl}$$

et les routes inutilisées sur la paire OD (routes $l + 1, \dots$) ont un coût de déplacement au moins aussi élevé que celui sur les routes utilisées.

Soit S_w l'ensemble des routes joignant toute paire $w \in W$, h_{ws} le flux sur la route s , et π_w le coût minimum du déplacement sur une paire OD, étant donné un flux $h = (h_{ws})_{\substack{s \in S_w \\ w \in W}}$, les conditions d'équilibre de Wardrop peuvent être formulées comme suit:

$$h_{ws} > 0 \Rightarrow c_{ws} = \pi_w, \quad \forall s \in S_w, \forall w \in W \quad (3.3)$$

$$h_{ws} = 0 \Rightarrow c_{ws} \geq \pi_w, \quad \forall s \in S_w, \forall w \in W \quad (3.4)$$

En rajoutant la contrainte $h_{ws} \geq 0$ et $\pi_w \geq 0$, on obtient le système suivant:

$$h_{ws}(c_{ws} - \pi_w) = 0, \quad \forall s \in S_w, \forall w \in W, \quad (3.5)$$

$$c_{ws} - \pi_w \geq 0, \quad \forall s \in S_w, \forall w \in W, \quad (3.6)$$

$$\sum_{s \in S_w} h_{ws} = d_w, \quad \forall w \in W, \quad (3.7)$$

$$h_{ws} \geq 0, \quad \forall s \in S_w, \forall w \in W, \quad (3.8)$$

$$\pi_w \geq 0, \quad \forall w \in W, \quad (3.9)$$

Où (3.5)-(3.6) sont issues de (3.3)-(3.4), (3.7) exprime la condition de conservation du flux: la somme des flux h_{ws} sur toutes les routes s reliant la paire OD est égale à la demande totale de déplacement d_w entre O et D. (3.8)-(3.9) garantissent la non-négativité du flux sur la route et le coût du déplacement correspondant.

Hypothèses sur le comportement des usagers: L'hypothèse sur le comportement des usagers est que les usagers sont rationnels chacun cherchant à maximiser son propre intérêt, c'est à dire minimiser son coût du déplacement. Cependant, les usagers n'ont pas d'information parfaite sur l'état du trafic sur le réseau et dans ce cas, la décision de déplacement sera en terme de coût du déplacement qui est en fonction du choix de tous les usagers.

3.3.1 Les conditions de Wardrop

En 1952, Wardrop suppose que les usagers sont économiquement parfaits : ils maîtrisent et connaissent parfaitement le réseau et en perçoivent parfaitement les coûts des itinéraires, qu'ils sont rationnels, recherchent leur plus court chemin et le choisissent sans contrainte extérieure. Il émet l'hypothèse supplémentaire que tous les usagers sont identiques. Pour Wardrop, l'équilibre se définit par le fait que tous les usagers d'un même couple OD subissent tous le même coût, qui est le coût minimal possible. Ses deux principes s'énoncent comme suit:

Le premier principe de Wardrop[12] "Dans des conditions d'équilibre, le trafic s'organise dans des réseaux congestionnés de telle sorte qu'aucun voyageur individuel (joueur) ne puisse réduire ses coûts de trajet en changeant de route. À l'équilibre, les coûts de déplacement sur chaque itinéraire donné sont égaux et inférieures aux coûts sur les itinéraires non utilisés".

Autrement dit, si l'itinéraire s de la paire du noeud $w \in W$ est utilisée, alors son coût est minimale :

$$h_{ws} > 0 \Rightarrow c_{ws} = \pi_w, \quad \forall s, w$$

avec:

h_{ws} : le flux sur l'itinéraire s .

c_{ws} : coût de l'itinéraire s .

π_w : coût minimal sur l'ensemble des itinéraires de la paire w .

Dans ce cas, le réseau atteint un état d'équilibre, appelé **équilibre usager**.

Le deuxième principe de Wardrop[12] "Le coût moyen ressenti par tous les usagers (entre une origine et une destination) est minimum".

Définition 3.1. [12] Soit (3.1) un jeu de routage, le vecteur de flux h est un équilibre de Wardrop s'il satisfait la condition suivante:

$$\forall s, s' \in S^i, \forall i \in I, \quad h_s^i > 0 \Rightarrow c_i^s(h) \leq c_i^{s'}(h), \quad (3.10)$$

où:

- c_s^i est la fonction de coût d'une commodité i sur une paire (OD) en utilisant la stratégie s ;
- h_s^i est le flux d'une commodité i sur le chemin s .

Autrement dit, cette situation est bien un état d'équilibre car aucun usager ne subit un coût du déplacement qu'il peut diminuer. En vertu du choix individuel, les usagers n'ont donc pas intérêt à changer d'itinéraire.

Exemple. *Considerons le réseau suivant:*

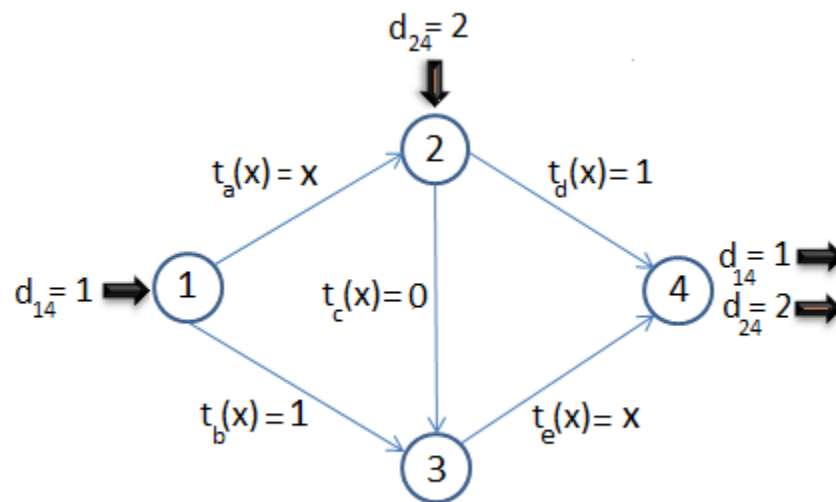


FIG. 3.1 – Exemple d'équilibre de Wardrop

Soit la répartition des flux suivante:

$$\begin{cases} h_{a,b} = 0,5; h_{b,e} = 0,2; h_{a,c,e} = 0,3 \rightarrow d_{14}; \dots\dots(*) \\ h_b = 1,5; h_{c,e} = 0,5 \rightarrow d_{24} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_{a,b} = 0,6; h_{b,e} = 0; h_{a,c,e} = 0,4 \rightarrow d_{14}; \dots\dots(**) \\ h_b = 1,4; h_{c,e} = 0,6 \rightarrow d_{24} \end{cases}$$

Vérifions que (*) n'est pas un équilibre de Wardrop mais que (**) en est un.

Les flux sur chaque arcs sont calculés par:

$$x_l = \sum_{l \in S} x_{il};$$

$$x_a = 0,5 + 0,3 = 0,8;$$

$$x_b = 0,2;$$

$$x_c = 0,5 + 0,3 = 0,8;$$

$$x_d = 0,5 + 1,5 = 2;$$

$$x_e = 0,2 + 0,3 + 0,5 = 1.$$

Les coûts des chemins sont calculés par:

$$c_s(h) = \sum_{l \in S} t_l(x_l)$$

Pour la paire d_1 :

$$c_{a,b}(0,5) = t_a(x_a) + t_b(x_b) = 0,8 + 1 = 1,8;$$

$$c_{b,e}(0,2) = t_b(x_b) + t_e(x_e) = 1 + 1 = 2;$$

$$c_{a,c,e}(0,3) = t_a(x_a) + t_c(x_c) + t_e(x_e) = 0,8 + 0 + 1 = 1,8$$

On remarque que: $h_{b,e} > 0$ mais que $c_{b,e} > c_{a,d} = c_{a,c,e} \Rightarrow$ cette répartition de flux n'est donc pas un équilibre.

Pour (**) calculons le flux sur chaque arc:

$$x_a = 0,6 + 0,4 = 1;$$

$$x_b = 0;$$

$$x_c = 0,4 + 0,6 = 1;$$

$$x_d = 1,4 + 0,6 = 2;$$

$$x_e = 0,6 + 0 + 0,4 = 1;$$

Le coût des chemins:

1. La paire d_1 :

$$c_{a,d}(0,6) = t_a(x_a) + t_d(x_d) = 1 + 1 = 2;$$

$$c_{b,e}(0) = t_b(x_b) + t_e(x_e) = 1 + 1 = 2;$$

$$c_{a,c,e}(0,4) = t_a(x_a) + t_c(x_c) + t_e(x_e) = 1 + 0 + 1 = 2$$

2. La paire d_2 :

$$c_d(1,4) = t_b(x_b) = 1;$$

$$c_{c,e}(0,6) = t_c(x_c) + t_e(x_e) = 0 + 1 = 1;$$

$c_{a,d} = c_{b,e} = c_{a,c,e}$ et $c_d = c_{c,e} \Rightarrow$ en effet cette répartition de flux est bien un équilibre de Wardrop.

3.3.2 L'équilibre de Wardrop: existence et unicité

L'équilibre de Wardrop peut être caractérisé comme solution d'un programme convexe. Il s'agit de la minimisation d'une fonction de potentiel.

Proposition 3.1. [10] *Un flux réalisable pour (3.1) est un équilibre de Wardrop si et seulement si c'est un minimum global pour la fonction de potentiel suivante:*

$$T(x) = \sum_{l \in A} \int_0^{x_l} t_l(z) dz \quad (3.11)$$

Théorème 3.1. [4] *Soit le jeu (3.1)*

- (a) (3.1) admet au moins un équilibre de Wardrop.
- (b) si h et \tilde{h} sont des équilibres de Wardrop pour (3.1), alors $c_i(h) = c_i(\tilde{h})$ pour toute commodité $i \in I$.

Preuve. *Comme les fonctions de coûts sont continues et que l'ensemble des flux réalisables est compact, la partie (a) se déduit immédiatement de la proposition et du théorème de Weierstrass. Comme les fonctions de coûts sont non décroissantes, la fonction de potentiel en (3.11) est convexe. De plus, l'ensemble des flux réalisables est convexe, ce qui implique la partie (b) du théorème.*

3.4 L'équilibre de Wardrop et problème d'optimisation

La première formulation d'optimisation d'un problème d'affectation du trafic, basée sur les principes de wardrop comme conditions d'optimalité, est due à Prager [9].

dans la section suivante nous allons introduire le problème mathématique à optimiser en présentant sa fonction objectif et ses contraintes.

3.4.1 Le programme mathématique

L'objectif

Notre objectif est de minimiser les coûts de déplacement effectué par les joueurs tout en choisissant les liaisons de moindre coût, sachant que Les coûts de celles-ci dépendent du nombre de joueurs les empruntant.

La fonction objectif

La fonction objectif de ce problème est construite à partir de la somme des coûts des liaisons utilisées. Le choix de celle-ci dépend du critère à optimiser (flux ou coût).

Donc la fonction objectif sera définie comme suit:

$$T(x) = \sum_{l \in A} \int_0^{x_l} t_l(z) dz \quad (3.12)$$

où

- t_l : est le coût du déplacement sur la liaison $l \in A$,
- x_l : est le flux sur cette liaison l .

Remarque 3.1. La fonction objectif (3.12) est la somme des intégrales de fonctions des coûts des liaisons supposée continue et de classe C^2 et qui correspond à la fonction de potentiel (3.11) dans le cas de l'infinité de joueurs.

Les contraintes

- Le premier ensemble des contraintes correspond aux contraintes (3.7) définies plus haut qui expriment la condition de conservation des flux. Ces contraintes signifient que la somme des flux sur tous les chemins utilisés entre une origine O et une destination D est égale à la demande du déplacement sur cette paire (OD):

$$\sum_{s \in S_w} h_{ws} = d_w, \quad \forall w \in W \quad (3.13)$$

- Le deuxième ensemble des contraintes correspond aux contraintes (3.8) qui assurent la non-négativité des flux ainsi les coûts de déplacement sur les chemins. Autrement dit, le nombre de voyageurs doit être positif ou nul:

$$h_{ws} \geq 0, \quad \forall s \in S_w, \forall w \in W \quad (3.14)$$

donc, on aura le programme mathématique suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad T(x) = \sum_{l \in A} \int_0^{x_l} t_l(z) dz \\ \sum_{s \in S} h_{ws} = d_w, \\ h_{ws} \geq 0, \quad \forall s \in S_w, \quad \forall w \in W, \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Donc ce problème consiste à Minimiser une fonction objectif non linéaire (somme des intégrales) sous des contraintes linéaires.

Beckmann et al [7] ont montré que le flux correspondant à un équilibre d'utilisateur peut être obtenu en résolvant le problème de programmation non linéaire défini ci-dessus :

En remplaçant les x_l par ses valeurs ($x_l = \sum_{s \in S} h_{ws} \delta_s^l$), le problème devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad T(x) = \sum_{l \in A} \int_0^{\sum_{s \in S} h_{ws} \delta_s^l} t_l(z) dz \\ \sum_{s \in S} h_{ws} = d_w \quad \forall w \in W \dots \dots \dots \text{(a)} \\ h_{ws} \geq 0, \quad \forall s \in S_w, \quad \forall w \in W, \dots \dots \dots \text{(b)} \\ \sum_{s \in S} \delta_s^l h_{ws} = x_l, \quad \forall l \in A \dots \dots \dots \text{(c)} \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Comme nous l'avons déjà défini, les contraintes (a) représentent les contraintes de la conservation des flux, les contraintes (b) assurent la non-négativité des flux.

Afin de caractériser une solution sur le modèle de Beckman on doit vérifier les conditions suivantes:

Non linéarité :

Le modèle de Beckmann se classe dans la famille des modèles mathématiques non linéaires, en effet, il s'agit d'une fonction objectif non linéaire (la somme des intégrales des fonctions des coûts des arcs) avec des contraintes linéaires.

Qualification des contraintes :

Dans ce modèle de Beckmann, la condition de la qualification des contraintes est vérifiée, car les contraintes sont linéaires.

Convexité

Nous rappelons qu'un programme mathématique est convexe si et seulement si :

1. L'objectif est convexe:

D'après le théorème de convexité en terme de matrice Hessienne [11] :

T est convexe $\Leftrightarrow \forall X$, la matrice Hessienne $\nabla^2 T_x$ est semi-définie positive. La matrice Hessienne s'écrit comme suit :

$$\nabla^2 T_x = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} (x) \right)_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, n} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} \right) (x) & \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} \right) (x) & \dots & \dots & \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_n} \right) (x) \\ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_2 \partial x_1} \right) (x) & \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right) (x) & \dots & \dots & \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_2 \partial x_n} \right) (x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_n \partial x_1} \right) (x) & \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_n \partial x_2} \right) (x) & \dots & \dots & \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_n^2} \right) (x) \end{pmatrix}$$

Les dérivées du premier ordre:

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x_l} = \frac{\partial \sum_{l'} \int_0^{x_{l'}} t(z) dz}{\partial x_l} = \sum_{l \in A} \frac{\partial \int_0^{x_{l'}} t(z) dz}{\partial x_l} = t_l \quad \forall l \in A$$

car :

$$\frac{\partial \int_0^{x_{l'}} t(z) dz}{x_l} = \begin{cases} t_l(x_l) & \text{si } l = l' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les dérivées du second ordre:

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_l \partial x_{l''}} = \frac{\partial t_l(x_l)}{\partial x_{l''}} = \begin{cases} t_l''(x_l) & \text{si } l = l'' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce qui donne une matrice Hessienne des dérivées partielles secondes diagonale suivant :

$$\nabla^2 T_l = \begin{pmatrix} t_1''(x_1) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & t_2''(x_2) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & t_n''(x_n) \end{pmatrix}$$

Cette matrice est définie positive car elle est diagonale et tous ses éléments diagonaux sont strictement positifs (les fonctions de coûts des arcs sont strictement croissantes), donc la fonction objectif est strictement convexe ce qui implique que T est convexe.

2. Le domaine de solutions réalisables est aussi convexe car les contraintes sont linéaires. Ce problème d'optimisation comporte cependant des hypothèses trop restrictives pour l'étude des flux de trafic. Donc il faut vérifier les propriétés suivantes dans le réseau et ses fonctions associées.

Hypothèse 3.1. :

1. Le réseau est fortement connexe, i.e., au moins une route joignant chaque paire (OD), $w \in W$ ($|S_w| \geq 1$).
2. La demande d_w est non-négative pour tout $w \in W$.
3. La fonction de coût du déplacement $t_l : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est positive et continue pour toute liaison $l \in A$.

Théorème 3.2. [4] Si l'hypothèse 3.1 est vérifiée, la condition d'optimalité du premier ordre du système (3.16) est équivalente aux conditions d'équilibre de Wardrop.

Preuve. On associe un ensemble de multiplicateurs $\pi = (\pi_w)$ aux contraintes d'égalité (a), on obtient la fonction lagrangienne suivante:

$$L(h, \pi) \stackrel{\text{def}}{=} T(x(h)) + \sum_{w \in W} \pi_w (d_w - \sum_{s \in S_w} h_{ws}), \quad (3.17)$$

où la contrainte (c) est utilisée pour définir T comme une fonction du flux sur la route et la contrainte (b) garantit la non-négativité de ces flux. D'où les conditions du point stationnaire de la fonction de Lagrange (3.17) vérifient:

$$h_{ws} \frac{\partial L(h, \pi)}{\partial h_{ws}} = 0, \quad \forall s \in S_w, \forall w \in W \dots \dots \dots \text{(d)}$$

$$\frac{\partial L(h, \pi)}{\partial h_{ws}} \geq 0, \quad \forall s \in S_w, \forall w \in W \dots \dots \dots \text{(e)}$$

$$\frac{\partial L(h, \pi)}{\partial \pi_w} = 0, \quad \forall w \in W \dots \dots \dots \text{(f)}$$

$$h_{ws} \geq 0, \quad \forall s \in S_w, \forall w \in W \dots \dots \dots \text{(g)}$$

Afin de développer ces conditions, on doit noter qu'à partir de la contrainte (c), on a:

$$\frac{\partial T(x(h))}{\partial h_{ws}} = \sum_{l \in A} \frac{\partial T}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial h_{ws}}(x(h)) = \sum_{l \in A} \delta_{ws}^l t_l(x_l) = c_{ws}(h) \quad (3.18)$$

i.e., la dérivée partielle de T par rapport à la variable h_{ws} en fonction du flux donné est égale au coût de déplacement sur la route s joignant une paire (OD).

En utilisant l'expression (3.18), on obtient des conditions du point stationnaire, citées ci-dessus, on aboutit à ce système:

$$h_{ws}(c_{ws}(h) - \pi_w) = 0, \quad \forall s \in S_w, \forall w \in W \dots \dots \dots \text{(A)}$$

$$c_{ws}(h) - \pi_w \geq 0, \quad \forall s \in S_w, \forall w \in W \dots \dots \dots \text{(B)}$$

$$\sum_{s \in S_w} h_{ws} = d_w, \quad \forall w \in W \dots \dots \dots \text{(C)}$$

$$h_{ws} \geq 0, \quad \forall s \in S_w, \forall w \in W \dots \dots \dots \text{(D)}$$

De (A)-(B), on peut interpréter le multiplicateur π_w comme étant le coût minimum de la route joignant une paire (OD); à partir de l'hypothèse de la positivité de la fonction de coût du déplacement,

$$\pi_w \geq 0, \quad \forall s \in S_w, \quad \text{(E)}$$

Au final, on peut dire que ces conditions sont identiques aux conditions d'équilibre de Wardrop et qui sont nécessaire pour l'optimalité de \mathbf{h} du problème (3.16). Les contraintes (a)-(c) sont linéaires, ce qui donne lieu à la qualification des contraintes.

3.4.2 Existence de solution

Théorème 3.3. [4] Le problème (3.15) admet au moins une solution optimale, s'il vérifie les conditions suivantes:

1. Le domaine des solutions réalisable H est fermé.
2. T est continue sur H .
3. T est coercive sur H ($\lim f(x) = \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$).

Preuve.

1. Nous avons le domaine de solutions réalisables H est un polyèdre fermé.
2. La fonction T est continue sur le domaine H , comme somme de fonctions continues.
3. T est coercive sur H . En effet: le coût du déplacement sur l'arc l ($t_l(x_l)$) est une fonction croissante, et nous avons l'intégrale d'une fonction croissante est une fonction croissante.

Donc lorsque x_l tend vers l'infini, $T(x_l)$ aussi tend vers l'infini $\Rightarrow \lim T(x_l) = \infty$ lorsque $\|x_l\| \rightarrow \infty \Rightarrow T$ est une fonction coercive.

les trois conditions (1), (2) et (3) sont vérifiées, donc le problème (3.15) admet au moins une solution optimale globale.

3.4.3 L'unicité de solution

D'après le théorème de l'unicité [5], pour montrer que la solution est unique il faut montrer que la fonction objectif T est strictement convexe et que le domaine de définition est convexe, ce que nous avons déjà montré ci-dessus. Donc le problème de Beckmann admet une solution unique.

Maintenant, nous allons donner quelques relations sur les flux et les coûts des chemins et arc ainsi la satisfaction de la demande qui nous seront utiles par la suite.

Les flux des chemins et les flux d'arcs:

Les flux sur les arcs x_l sont liés aux flux sur les chemins h_{ws} tel que ce lien peut être exprimé comme suit:

$$x_l = \sum_{s \in S} h_{ws} \delta_s^l \quad (3.19)$$

avec :

- h_{ws} : est le flux sur le chemin s reliant une paire $w \in W$.
- δ_s^l : est la matrice d'incidence (*arc/chemin*).

$$\delta_s^l = \begin{cases} 1 & \text{si l'arc } l \text{ appartient au chemin } s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La relation (3.19) peut s'écrire comme:

$$x = \Delta H$$

où :

- $x = \begin{pmatrix} x_{l_1} \\ x_{l_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{l_m} \end{pmatrix}$ est le vecteur colonne dont les éléments sont des flux des arcs l_j ,
 $j = \overline{1, m}$ avec, m est la taille du réseau G .

- $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_r \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne dont les éléments sont des flux des chemins s ,
 $k = \overline{1, r}$, avec r est le nombre des chemins dans le réseau G .

- $\Delta^T = \delta_s^l$: est la matrice d'incidence (*arc/chemin*).

Les coûts des chemins et les coûts d'arcs:

Le coût du déplacement sur les chemins peut être exprimé en fonction des coûts de déplacement sur les arcs par :

$$c_s = \sum_{l \in A} t_l \delta_s^l \quad (3.20)$$

donc Le coût du chemin s est la somme des coûts de déplacement sur les arcs successifs qui constituent ce chemin entre O et D , où:

δ_s^l représente la matrice d'incidence (*arc/chemin*) indiquant les liaisons (arcs) qui appartiennent au chemin s . Elle est définie comme suit:

$$\delta_s^l = \begin{cases} 1 & \text{si l'arc } l \text{ appartient au chemin } s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si on écrit (3.20) en fonction des flux

$$c_s(h) = \sum_{l \in A} \delta_s^l t_l(x_l) \quad (3.21)$$

Où:

- t_l : est le coût du déplacement sur la liaison l .

- x_l : est le flux sur la liaison l .

La relation (3.20) peut s'écrire sous forme matricielle comme :

$$C = T\Delta$$

Où :

- $C = (c_1, c_2, \dots, c_r)$ est un vecteur ligne qui représente les coûts des chemins s_i , $i = \overline{1, r}$, avec r est le nombre de chemins reliant O et D.
- $T = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ est un vecteur ligne qui représente les coûts de déplacement sur les arcs l_j , $j = \overline{1, m}$, avec m est la taille de réseau.
- $\Delta = \delta_s^l$ est la matrice d'incidence *arc/chemin*.

les flux et la satisfaction de la demande :

Étant donné une paire ($w \in W$), la somme des flux h_{ws} sur tous les chemins s joignant OD est égale à La demande totale sur cette même paire OD. Donc le total des flux ne doit pas dépasser cette demande (capacité du réseau), c'est ce qu'on appelle par la condition de conservation des flux:

$$\sum_{s \in S} h_{ws} \delta_s^{rw} = d_w, \quad \forall w. \quad (3.22)$$

où

- δ_s^{rw} est une matrice d'incidence *chemin/paire* indiquant la paire w auquel un chemin s appartient, elle est définie comme suit :

$$\delta_s^{rw} = \begin{cases} 1 & \text{si } s \in S_w, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec : S_w est l'ensemble des chemins reliant w .

La relation (3.22) peut s'écrire comme :

$$H^T \Delta' = d$$

où :

- $H^T = (h_1, h_2, \dots, h_r)$ est un vecteur ligne dont les éléments sont les flux des chemins s_k , $k = \overline{1, r}$ avec r est le nombre des chemins reliant O et D dans le réseau G
- $\Delta' = \delta_s^{rw}$ est la matrice d'incidence (*chemin/paire*).
- $d = (d_w, d_w, \dots, d_w)$ est un vecteur ligne dont les éléments sont le nombre de voyageurs entre O et D.

3.5 Le prix de l'anarchie

De nombreux travaux récents ont cherché à quantifier l'inefficacité des comportements égoïstes (chaque joueur choisit son propre chemin comme bon lui semble), et les équilibres qu'ils engendrent. Koutsoupias et Papadimitriou ont introduit ce problème en définissant le prix de l'anarchie [3] comme le rapport entre la valeur de la fonction objectif dans un état d'équilibre et celle de la situation optimale.

Si le prix de l'anarchie vaut 1 alors les équilibres du jeu sont pleinement efficaces.

Soit la fonction $T(x)$ définie dans la section 3.1.3 comme la somme de tous les coûts payés sur tous les chemins utilisés et qui correspond au coût à l'optimum:

$$T(x) = \sum_{l \in A} t_l(x_l)x_l \quad (3.23)$$

Définition 3.2. [3] Le prix de l'anarchie d'une instance (3.1) est noté ρ avec:

$$\rho(\mathcal{J}) = \frac{T(x^*)}{T(x)} \quad (3.24)$$

Où x^* est un équilibre de wardrop et x est un flux optimal.

Afin de mieux comprendre l'inefficacité des équilibres, considérons l'exemple suivant:

Exemple. [8]: *Effet de Pigou*

Considérons la situation où il y a un très grand nombre d'utilisateurs devant choisir entre deux ressources. Chaque utilisateur a un poids négligeable et il vaut 1.

Le coût de la première ressource est fixé et est égal à 1 et celui de la deuxième est égal au nombre d'utilisateurs qui vont la choisir.

Ce jeu peut être modélisé comme un jeu de congestion non atomique, sur le graphe de la figure (3.2) chaque joueur veut y aller de O à D et il doit choisir entre l'arc a et l'arc b , chaque arc modélise une ressource. Le flux total vaut 1, le coût de l'arc a est égal à 1, celui de l'arc b est égal à x .

L'équilibre de Nash de ce jeu est atteint lorsque aucun joueur n'a intérêt de changer son choix. Dans cet exemple à l'équilibre de Nash tous les joueurs choisissent l'arc b , et le coût à l'équilibre est $T(x^) = 1$. Cependant, le coût optimal est atteint quand la moitié du*

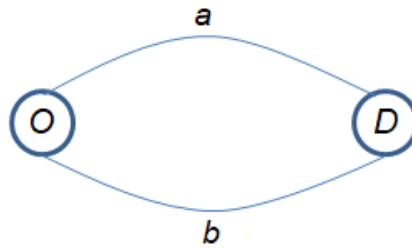


FIG. 3.2 – Exemple de Pigou

nombre de joueur choisit l'arc a et l'autre moitié choisit l'arc b . Le coût optimal est:

$$T(x) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \quad (3.25)$$

Cet exemple montre que l'équilibre peut être inefficace, en effet: $T(x^*) > T(x)$.

Le prix de l'anarchie est donc: $\rho = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$.

Nous croyons tous que la fermeture d'une route dans un réseau routier ne manquera pas de ralentir la circulation et de provoquer des embouteillages supplémentaires, un universitaire Allemand a mis ce phénomène en évidence de manière théorique en 1968, dit paradoxe de Braess que nous allons illustrer par l'exemple suivant:

Exemple. Le paradoxe de Braess

Considérons le graphe représenté dans la figure (3.3). Des joueurs non atomique veulent se déplacer de l'origine O vers la destination D et ils peuvent choisir entre trois routes: la route du nord (124) la route du milieu (1234) et celle du sud (134). Le total des flux vaut 1 et les coûts sur les chemins sont donnés par:

$$t_a(x) = x; t_b(x) = 1; t_d(x) = 1; t_e(x) = x.$$

Supposons premièrement que l'arc c n'existe pas ou le coût sur cet arc est trop élevé. À l'équilibre la moitié des joueurs empruntera la route du nord et l'autre moitié empruntera celle du sud. Le coût à l'équilibre est donc $\frac{3}{2}$ ($T(x) = 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$).

Supposons maintenant que le coût sur l'arc c est négligeable, disons il est égale à 0. À l'équilibre, tous les joueurs emprunterons la route du milieu et donc le coût va augmenter, en effet, il vaut 2 ($T(x) = 1 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 2$).

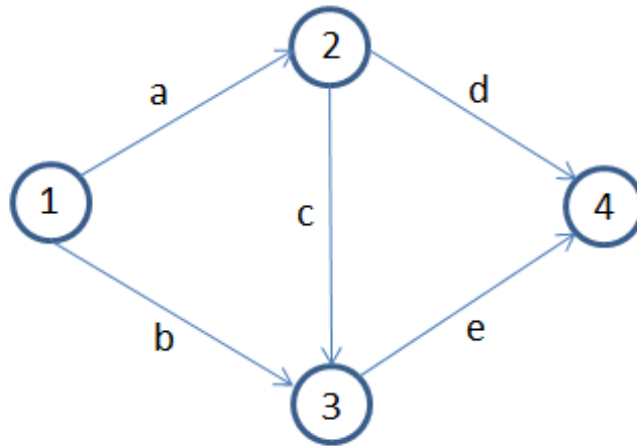


FIG. 3.3 – Exemple de Braess

Cet exemple montre que la fermeture d'une route peut augmenter son coût, en d'autres termes abaisser le coût sur une route peut empirer la congestion. Cette situation est appelée "Paradoxe de Braess".

Exemple 3.1. Soit $G = (X, U)$ le réseau du trafic routier représenté par la figure 3.4:

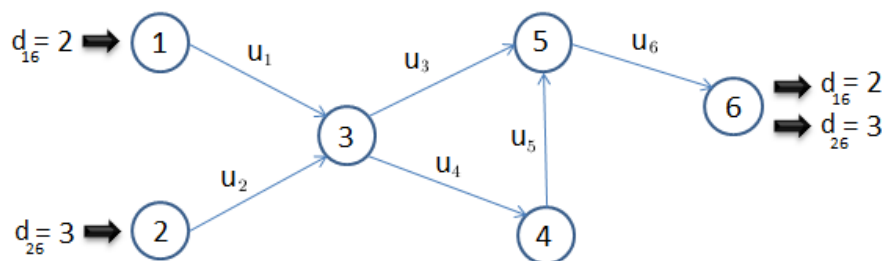


FIG. 3.4 – Réseau routier

Dans cet exemple:

1. Nous allons formuler le problème d'affectation du trafic routier sous forme d'un modèle mathématique non linéaire (modèle de Beckmann).
2. Nous allons chercher l'équilibre de Wardrop par l'utilisation des Conditions de Kuhn et Tucker.

Les données:

- $X = \{1,2,3,4,5,6\}$, $n = 6$
- $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$, $m = 6$
- $OD = \{(16), (26)\}$ c'est-à-dire on a deux paires Origine-Destination.
- Les fonctions des coûts des arcs sont données par:

$$t_1 = 1; t_2 = 2; t_3 = 1 + 2x_3; t_4 = 2 + x_4; t_5 = 3; t_6 = 2$$

Avec x_j : est le flux de l'arc $u_j, j = 1, \dots, m$.

La demande:

La demande Origine-Destination est donnée par la matrice:

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire: $O = \{1,2\}$; et $D = \{6\}$; $d_{16} = 2$ et $d_{26} = 3$

a. Formulation mathématique du problème de Beckmann:

Pour déterminer le modèle mathématique, Nous allons formuler les trois relations que nous avons étudié précédemment:

On a quatre chemins:

$$s_1 = \{l_1 - l_4 - l_6\}$$

$$s_2 = \{l_1 - l_3 - l_5 - l_6\}$$

$$s_3 = \{l_2 - l_4 - l_6\}$$

$$s_4 = \{l_2 - l_3 - l_5 - l_6\}$$

1. Les coûts de ces chemins sont donnés par:

D'après la relation (3.20) (voir la forme matricielle) les coûts des chemins sont calculés par:

$$c = (1, 2, 1 + 2x_3, 2 + x_4, 3, 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (5 + x_4; 7 + 2x_3; 6 + x_4; 8 + 2x_3)$$

D'où

$$\begin{cases} c_1 = 5 + x_4 \\ c_2 = 7 + 2x_3 \quad \dots\dots\dots(1) \\ c_3 = 6 + x_4 \\ c_4 = 8 + 2x_3 \end{cases} \quad (3.26)$$

2. La relation entre les flux des arcs et les flux des chemins s_i tel que $i = \{1, \dots, 4\}$ est donnée par :

D'après la relation (3.19) (voir la forme matricielle) les coûts des chemins sont calculés par :

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 + h_2 \\ h_3 + h_4 \\ h_2 + h_4 \\ h_1 + h_3 \\ h_2 + h_4 \\ h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \end{pmatrix}$$

D'où:

$$\begin{cases} x_1 = h_1 + h_2 \\ x_2 = h_3 + h_4 \\ x_3 = h_2 + h_4 \\ x_4 = h_1 + h_3 \quad \dots\dots\dots(2) \\ x_5 = h_2 + h_4 \rightarrow x_5 = x_3 \\ x_6 = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \rightarrow x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \end{cases} \quad (3.27)$$

3. La condition de Conservation du flux est donnée par :

D'après la relation (3.22) (voir la forme matricielle) les coûts de déplacement entre

O et D sont calculés par:

$$(h_1, h_2, h_3, h_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (2, 3)$$

$$D'ou: \begin{cases} h_1 + h_2 = 2 & \dots\dots\dots(3) \\ h_3 + h_4 = 3 \end{cases}$$

Le programme associé à la formulation de Beckmann est :

$$(P) = \begin{cases} \min & T(x) = \sum_{l \in A} \int_0^{x_l} t_l(z) dz \\ \sum_{s \in S} h_{ws} = d_w, & \forall w \in W, \\ h_{ws} \geq 0, & \forall s \in S_w, \forall w \in W \end{cases}$$

$$(P) = \begin{cases} \min & T(x) = \int_0^{x_1} 1.dz + \int_0^{x_2} 2.dz + \int_0^{x_3} (1 + 2z_3).dz + \int_0^{x_4} (2 + z_4).dz + \int_0^{x_5} 3.dz + \int_0^{x_6} 2.dz \\ & = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_3^2 + 2x_4 + \frac{1}{2}x_4^2 + 3x_5 + 2x_6 \\ S.c & \\ h_1 + h_2 = 2 & \\ h_3 + h_4 = 3 & \\ h_1 \geq 0 & \\ h_2 \geq 0 & \\ h_3 \geq 0 & \\ h_4 \geq 0 & \end{cases}$$

D'après la relation (2), on remplace les flux d'arcs $x_i (i = \overline{1,6})$ par les valeurs des flux des chemins correspondants, on aura le programme équivalent "flux -chemin" :

$$(P) = \begin{cases} \min & T(x) = (h_1 + h_2) + 2(h_3 + h_4) + (h_2 + h_4)^2 + (h_2 + h_4) + \frac{1}{2}(h_1 + h_3)^2 + 2(h_1 + h_3) \\ & + 3(h_2 + h_4) + 2(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) \\ S.c & \\ & h_1 + h_2 = 2 \\ & h_3 + h_4 = 3 \\ & h_1 \geq 0 \\ & h_2 \geq 0 \\ & h_3 \geq 0 \\ & h_4 \geq 0 \end{cases}$$

b. L'équilibre de Wardrop par l'utilisation des conditions de Kuhn et Tucker :

Pour écrire les conditions de Kuhn et Tucker, écrivons le Lagrangien correspondant :

$$L(H, \pi) = T(x(h)) + \sum_{w \in W} \pi_w (d_w - \sum_{s \in S_w}) = (h_1 + h_2) + 2(h_3 + h_4) + (h_2 + h_4)^2 + (h_2 + h_4) + \frac{1}{2}(h_1 + h_3)^2 + 2(h_1 + h_3) + 3(h_2 + h_4) + 2(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) + \pi_{16}(2 - h_1 - h_2) + \pi_{26}(3 - h_3 - h_4)$$

Où:

- $\pi_{16}, \pi_{26} (i = \overline{1,4})$ sont les multiplicateurs de lagrange.
- $h_k (k = \overline{1,4})$ est le flux sur le chemin s .

Les conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker de premier ordre sont écrites comme suit :

$$(KKT) = \begin{cases} \frac{\partial L(h, \pi)}{\partial h_s} = 0 \Leftrightarrow (4) \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial h_1} = 5 + (h_1 + h_3) - \pi_{16} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial h_2} = 7 + (h_2 + h_4) - \pi_{16} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial h_3} = 6 + (h_1 + h_3) - \pi_{26} = 0 \\ 3 \frac{\partial L}{\partial h_4} = 8 + 2(h_2 + h_4) - \pi_{26} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_{16} = 5 + (h_1 + h_3) \\ \pi_{16} = 7 + (h_2 + h_4) \\ \pi_{26} = 6 + (h_1 + h_3) \\ \pi_{26} = 8 + 2(h_2 + h_4) \end{cases}$$

Ainsi à partir des relations (1) et (2) :

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \pi_{16} \\ c_2 = \pi_{16} \quad \dots\dots\dots(4') \\ c_3 = \pi_{26} \\ c_4 = \pi_{26} \end{cases}$$

On remplace les coûts des chemins $c_i (i = \overline{1,4})$ par leurs valeurs d'après la relation

$$(1):$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 + x_4 = \pi_{16} \\ 7 + 2x_3 = \pi_{16} \quad \dots\dots(*) \\ 6 + x_4 = \pi_{26} \\ 8 + 2x_3 = \pi_{26} \end{cases}$$

Par remplacement de (3) dans (2) on obtient :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_6 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

D'après la condition de conservation des flux au niveau du sommet (3), on aura :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \Rightarrow x_4 = 5 - x_3 \quad \dots\dots(**)$$

Et

$$(*) \Rightarrow 2x_3 + 2 = x_4 \quad \dots\dots(***)$$

Par remplacement (***) dans (**), on aura :

$$x_3 = x_5 = 1$$

$$x_4 = 5 - x_3 = 4$$

Donc les flux des arcs qui donnent l'équilibre sont :

$$x^* = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 4 \\ x_5 = 1 \\ x_6 = 5 \end{cases}$$

La fonction objectif :

$$\min T(x) = \sum_{l \in A} \int_0^{x_l} t_l(z) dz = x_1 + 2x_2 + x_3^2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4^2 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 2 + 2 \times 3 + 1 + 1 + \frac{1}{2} \times 4^2 + 2 \times 4 + 3 + 2 \times 5 = 39.$$

$$\Rightarrow T(x^*) = 39$$

D'où le coût à l'équilibre est de 39. Les coûts de déplacement sur les chemins sont donnés par:

$$C = (c_1, c_2, c_3, c_4) = (9, 9, 10, 10)$$

D'après (4'), on a: $\pi_{16} = 9$ et $\pi_{26} = 10$.

Donc ces résultats vérifient la condition de conservation et de la positivité des flux ainsi ils montrent que le coût minimal de déplacement entre le sommet origine 1 et le sommet destination 6 est de 9, et que celui entre l'origine 2 et la destination 6 est de 10.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons abordé le concept de jeux de congestion et leurs application sur des réseaux de trafic routier, après avoir donné les différentes notions de bases de la théorie des jeux, ainsi que le concept d'équilibre, en particulier l'équilibre de Nash.

Du deuxième chapitre, en résulte que dans les jeux de congestion il existe toujours un équilibre de Nash en stratégies pures, et que les jeux de congestion sont un cas particulier de jeux de potentiel.

L'application des jeux de congestion aux réseaux routiers, nous a permis de mieux comprendre la situation d'équilibre des usagers, connue sous le nom d'équilibre de Wardrop, et ses deux principes qui peuvent être formulés mathématiquement afin d'aboutir à une situation d'équilibre optimal dans le réseau. Vu l'inefficacité des équilibres, le prix de l'anarchie mesure la différence entre un état d'équilibre et celle de la situation optimale.

Annexe

1. Les conditions nécessaires de Karush-Kuhn-Tucker [5]

Considérons le problème de programmation avec une fonction objectif à minimiser et des contraintes d'égalité et d'inégalité suivantes:

$$\begin{cases} \min_x f(x) \\ g_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (m < n). \end{cases} \quad (3.28)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est appelée **variables de décision**,

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est la **fonction objectif**, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est la fonction vectorielle appelée **fonction contrainte**, avec :

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))$$

Lagrange transforma ce problème avec contraintes en un problème sans contraintes en introduisant ce qu'on appelle les **multiplicateurs de Lagrange** $\lambda_j = 1, \dots, m$ dans la formulation de la **fonction de Lagrange** (ou le **Lagrangien**) suivant:

$$L(\lambda, x) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x) \quad (3.29)$$

Supposons que les fonctions f et $g_j (j = 1, \dots, m)$ sont continûment différentiables et faisons l'hypothèse que la matrice Jacobienne

$$\frac{\partial g(x^*)}{\partial x} = [\partial g_1(x^*), \dots, \partial g_m(x^*)]$$

est de rang m (par rapport à la qualification des contraintes $g_j(x)$). Alors une condition d'optimalité du premier ordre (condition nécessaire) pour que x^* soit solution optimale de (3.14) est qu'il existe un vecteur λ^* tel que:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*, \lambda^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x^*, \lambda^*) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Ces conditions sont connues sous le nom de *conditions de KKT*, et s'expriment en utilisant le Lagrangien $L(x, \lambda)$.

Donc, si le couple (x^*, λ^*) satisfait ces conditions, alors (x^*, λ^*) est un point stationnaire du Lagrangien (3.29)

2. Théorème de Weierstrass [5]

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ une partie compacte de \mathbb{R}^n et soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle continue, alors le problème d'optimisation

$$\min_{x \in X} f(x)$$

admet une solution optimale $x^* \in X$.

Bibliographie

- [1] E. Altman H. Cameda and O. Pourtallier. *Analytic study of mixed optima symmetric distributed computer systems*. In proceeding of the 9th international symposium on Dynamic Games and Applications, Adelaid, Australia, Dec.18-21 2000.
- [2] A. Haurie and P. Marcotte. *On the relationship between Nash-Cournot and Wardrop equilibria*. Networks,15:295-308, 1985.
- [3] E. Koutsoupias and C. Papadimitriou. *Worst-case Equilibria*. Trier, Germany, 4-6 March 1999.
- [4] C. B. McGuire M. Beckmann and C. B. Winsten. *Studies in the Economics of Transportation*. Yale University Press, 1956.
- [5] M. Minoux. *Programmation mathématique, Théorie et algorithmes*. 2ème Edition, 2008.
- [6] D. Monderer and L. S. Shapley. *Potential games*. Games and Economics Behavior, 1996.
- [7] M. Patriksson. *The traffic assignment problem: Models and methods*. VSP,Utrecht, 1994.
- [8] A. C. Pigou. *The Economics of Welfare*. Macmillan, 1920.
- [9] W. Prager. *Problems of traffic and transportation*. In proceeding of the symposium on Operations Research in Business and Industry, Mydwest Research Institute, Kansas City, KS, 1954.
- [10] Robert W. Rosenthal. *A class of games possessing pure-strategy nash equilibria*. International journal of Game Theory 2, 1973.
- [11] S.Mottelet. *Optimisation non-linéaire*. Université de Technologie de Compiègne, 2003.
- [12] J. G. Wardrop. *Some theoretical aspects of road traffic research communication networks*. Proc. Inst. Civ. Eng, 1952.