

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTÉ : DES SCIENCES

DÉPARTEMENT : MATHÉMATIQUES

## **MÉMOIRE DE MASTER**

SPÉCIALITÉ : Mathématique

OPTION : RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

### **Thème**

**Extension de la méthode du Simplexe à un  
Programme Linéaire Fractionnaire Flou**

**Présenté par :**

Nacera ATTAB & Soumia KACI épouse Badja

**Devant le jury d'examen composé de:**

|                               |      |            |              |
|-------------------------------|------|------------|--------------|
| Mr K. MERAKEB;                | MCA; | U.M.M.T.O; | President    |
| M <sup>me</sup> R .KHEFFACHE; | MCB; | U.M.M.T.O; | Examinatrice |
| M <sup>me</sup> O.BOUARAB;    | MCB; | U.M.M.T.O; | Promotrice   |

Soutenu : le 19/09/2018

# *Remerciements*

*Nous remercions dieu tout puissant d'avoir guidé  
nos pas vers  
les portes du savoir tout en illuminant notre chemin,  
et nous  
avoir donné suffisamment de courage et de  
persévérance pour  
mener notre travail à terme*

*Nous tenons à adresser nos plus vifs remerciements  
à notre  
promotrice Madame M<sup>me</sup> O. BOUARAB qui a su nous  
guider et nous  
orienter.*

*Enfin, nous remercions aussi les membres les membres  
du jury pour avoir accepté d'évaluer mon travail.*

*Nous témoignons une reconnaissance particulière à  
l'ensemble  
des enseignants qui nous ont suivis pendant notre  
cursus universitaire.*

# *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail :*

- *Mes très chers parents que nulle dédicace ne puisse exprimer ce que je leurs dois, pour leur bienveillance, leur amour et leur soutien ... " Que Dieu vous garde ".*
- *Ma chers sœur qui je remercie pour son encouragement, son aide et son soutien.*
- *Mes chers frères Ali et Madjed.*
- *À la petite famille de mon frère Madjed, sa femme Malika et ces trois magnifique enfants Sylia, Iyticia et Arezeki.*
- *À mon fiancé Massi et sa famille.*
- *Mes chers cousins et chères cousines qui n'ont jamais cessé de m'encourager et de m'aider.*
- *À mes chères amies et tous ceux qui me sont chers.*

*Nacera*

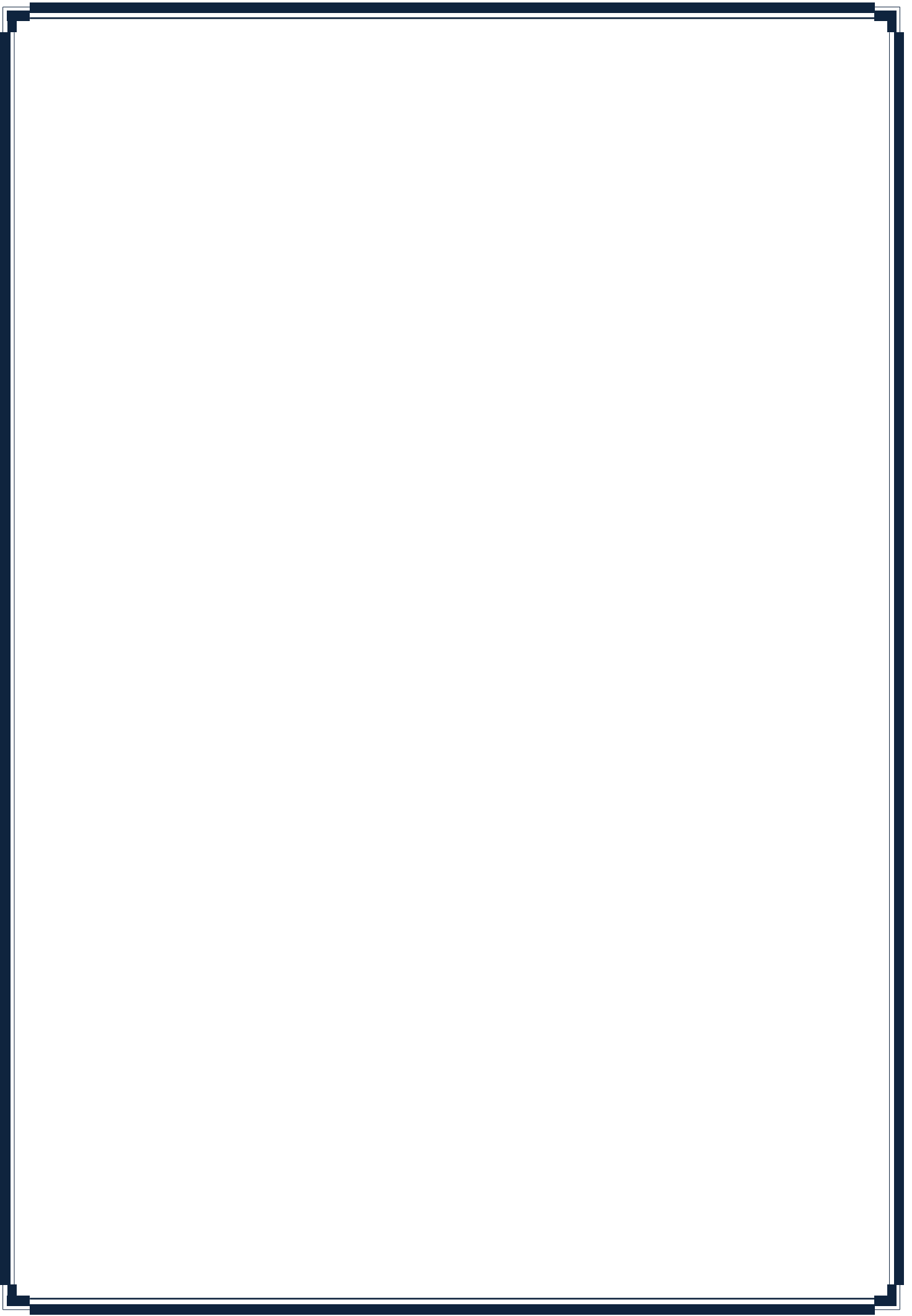
# *Dédicace*

*Je remercie le Bon Dieu tout puissant de m'avoir donné la force d'accomplir ce travail.*

*Je dédie ce mémoire :*

- *A mes parents grâce à leurs tendres encouragements et leurs grands sacrifices, ils ont pu créer le climat affectueux et propice à la poursuite de mes études. Aucune dédicace ne pourrait exprimer mon respect, ma considération et mes profonds sentiments envers eux. Je prie le bon Dieu de les bénir, de veiller sur eux, en espérant qu'ils seront toujours fiers de moi.*
- *A mes chers frères : KARIM, SAMIR et RABEH.*
- *A ma sœur LOUBNA et son mari et son fils Wassim.*
- *A mon très cher trésor, je cite mon mari KARIM et sa famille.*
- *A la mémoire de mes grands parents.*
- *A toute ma famille.*
- *A tous mes amis et ceux que j'ai partagé avec eux des beaux moments.*

Soumia



# Table des matières

|                                                                                  |           |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Notations</b>                                                                 | <b>3</b>  |
| <b>Introduction générale</b>                                                     | <b>4</b>  |
| <b>1 Programmation Linéaire</b>                                                  | <b>6</b>  |
| 1.1 Introduction . . . . .                                                       | 6         |
| 1.2 Définition d'un Programme Linéaire . . . . .                                 | 6         |
| 1.3 Modélisation d'un Programme Linéaire . . . . .                               | 6         |
| 1.4 Forme générale d'un Programme Linéaire . . . . .                             | 8         |
| 1.5 Différentes formes d'un Problème Linéaire . . . . .                          | 8         |
| 1.5.1 Forme canonique pur . . . . .                                              | 8         |
| 1.5.2 Forme standard . . . . .                                                   | 9         |
| 1.5.3 Variable d'écart et la transformation à la forme standard . . . . .        | 9         |
| 1.6 Quelques Propriétés géométriques des solutions de base réalisables . . . . . | 11        |
| 1.7 Méthode du simplexe . . . . .                                                | 12        |
| 1.7.1 Algorithme du simplexe . . . . .                                           | 13        |
| 1.7.2 Procédure de l'algorithme du simplexe . . . . .                            | 15        |
| 1.7.3 Tableau du simplexe . . . . .                                              | 16        |
| 1.7.4 Organigramme de l'algorithme du simplexe (maximisation) . . . . .          | 17        |
| 1.7.5 Complexité de l'algorithme du simplexe . . . . .                           | 18        |
| 1.8 Conclusion . . . . .                                                         | 22        |
| <b>2 Programmation Linéaire Fractionnaire</b>                                    | <b>23</b> |
| 2.1 Introduction . . . . .                                                       | 23        |
| 2.2 Formulation du Programme Fractionnaire . . . . .                             | 23        |
| 2.3 Rappel sur l'optimisation convexe . . . . .                                  | 24        |
| 2.4 Conditions d'optimalité . . . . .                                            | 27        |
| 2.5 Programmation Linéaire Fractionnaire . . . . .                               | 28        |
| 2.6 Stratégies de résolution d'un programme fractionnaire linéaire . . . . .     | 28        |
| 2.6.1 Résolution directe . . . . .                                               | 29        |
| 2.6.2 Résolution par paramétrisation . . . . .                                   | 31        |
| 2.6.3 Résolution d'un programme équivalent . . . . .                             | 32        |
| 2.7 Conclusion . . . . .                                                         | 34        |
| <b>3 Théorie sur les ensembles flous</b>                                         | <b>35</b> |
| 3.1 Introduction . . . . .                                                       | 35        |
| 3.2 Définitions et Concepts de base . . . . .                                    | 35        |
| 3.2.1 Ensemble flou . . . . .                                                    | 35        |
| 3.3 Définitions des caractéristiques d'un ensemble flou . . . . .                | 37        |
| 3.3.1 Support d'un ensemble flou . . . . .                                       | 37        |
| 3.3.2 Hauteur d'un ensemble flou $\tilde{\mathbf{A}}$ . . . . .                  | 37        |

|          |                                                                                                                               |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.3.3    | Noyau d'un ensemble flou $\tilde{\mathbf{A}}$ . . . . .                                                                       | 37        |
| 3.3.4    | Ensemble flou convexe . . . . .                                                                                               | 38        |
| 3.3.5    | Ensemble flou normalisé . . . . .                                                                                             | 38        |
| 3.3.6    | Coupe de niveau $\alpha$ . . . . .                                                                                            | 38        |
| 3.3.7    | Nombre flou . . . . .                                                                                                         | 38        |
| 3.4      | Opérations sur les ensembles flous . . . . .                                                                                  | 39        |
| 3.5      | Nombres flous de type L-R . . . . .                                                                                           | 42        |
| 3.5.1    | Définition d'une fonction de référence . . . . .                                                                              | 42        |
| 3.5.2    | Nombre flou de type L-R . . . . .                                                                                             | 42        |
| 3.6      | Nombre flou de type triangulaire . . . . .                                                                                    | 43        |
| 3.6.1    | Comparaison et arithmétique de nombres flous triangulaires . . . . .                                                          | 44        |
| 3.7      | Nombre flou de type trapézoïdal . . . . .                                                                                     | 45        |
| 3.7.1    | Comparaison et arithmétique de nombres flous trapézoïdaux . . . . .                                                           | 46        |
| 3.8      | Conclusion . . . . .                                                                                                          | 48        |
| <b>4</b> | <b>Programmation Linéaire Fractionnaire Floue</b> . . . . .                                                                   | <b>49</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .                                                                                                        | 49        |
| 4.2      | Programme Linéaire Fractionnaire Flou en Variables Réelles . . . . .                                                          | 49        |
| 4.3      | Transformation des contraintes du problème $(PF)_{(CF)}$ flous en contraintes déterministes . . . . .                         | 50        |
| 4.3.1    | Fonction Ranking $\mathfrak{R}$ . . . . .                                                                                     | 50        |
| 4.3.2    | Solution de base réalisable . . . . .                                                                                         | 52        |
| 4.3.3    | Méthode du Simplexe Flou pour la résolution d'un Problème Linéaire Fractionnaire Flou en Variables Réelles . . . . .          | 53        |
| 4.3.4    | Procédure de l'algorithme du simplexe flou . . . . .                                                                          | 57        |
| 4.3.5    | Tableau de la méthode du simplexe flou pour résoudre le problème $(PF)_{(CF)}$ . . . . .                                      | 58        |
| 4.3.6    | Organigramme de l'algorithme de la méthode du simplexe flou pour résoudre le problème $(PF)_{(CF)}$ (maximisation) . . . . .  | 59        |
| 4.4      | Programme Linéaire Fractionnaire en Variables Floues . . . . .                                                                | 65        |
| 4.4.1    | Méthode du Simplexe Flou de résolution d'un Problème Linéaire Fractionnaire Flou en Variables Réelles $(PF)_{(VF)}$ . . . . . | 66        |
| 4.4.2    | Procédure de l'algorithme du simplexe . . . . .                                                                               | 70        |
| 4.4.3    | Tableau de la méthode du simplexe flou pour résoudre le problème $(PF)_{(VF)}$ . . . . .                                      | 71        |
| 4.4.4    | Organigramme de l'algorithme de la méthode du simplexe flou pour résoudre le problème $(PF)_{(VF)}$ (maximisation) . . . . .  | 72        |
| 4.5      | Programmation sur LINGO . . . . .                                                                                             | 78        |
| 4.5.1    | Introduction . . . . .                                                                                                        | 78        |
| 4.5.2    | Installation du logiciel . . . . .                                                                                            | 78        |
| 4.5.3    | Quelques opérateurs et fonctions . . . . .                                                                                    | 78        |
| 4.5.4    | Conclusion . . . . .                                                                                                          | 79        |
|          | <b>Conclusion Générale</b> . . . . .                                                                                          | <b>79</b> |
|          | <b>Bibliographie</b> . . . . .                                                                                                | <b>80</b> |

# Notations

- . (RO) : Recherche Opérationnelle,
- . (PL) : Programme Linéaire,
- .  $D_R$  : Domaine des Solutions Réalisables,
- .  $(P_m)$  : Problème de minimisation,
- .  $(P_F)$  : Problème Fractionnaire,
- .  $(P_{LF})$  : Problème Linéaire Fractionnaire,
- .  $(Q_\lambda)$  : Programme paramétré,
- .  $(P_E)$  : Programme linéaire équivalent,
- .  $(PF)_{(CF)}$  : Problème Linéaire Fractionnaire à Contraintes Floues,
- .  $(PF)_{(CD)}$  : Problème Linéaire Fractionnaire à Contraintes Déterministes,
- .  $(PF)_{(VF)}$  : Problème Linéaire Fractionnaire à Variables Floues.

# Introduction Générale

La Recherche Opérationnelle (RO) peut être définie comme l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles orientées vers la recherche du meilleur choix dans la façon d'opérer en vue d'aboutir au résultat visé ou au meilleur résultat possible. Elle fait partie des « aides à la décision » dans la mesure où elle propose des modèles conceptuels en vue d'analyser et de maîtriser des situations complexes pour permettre aux décideurs de comprendre, d'évaluer les enjeux et d'arbitrer ou de faire les choix les plus efficaces.

La Programmation Linéaire est une branche essentielle de la Recherche Opérationnelle. C'est un outil générique qui peut résoudre un grand nombre de problèmes d'optimisation. La Programmation Linéaire relève des mathématiques de la Recherche Opérationnelle et à des applications en gestion ainsi qu'en économie, en statistique, en physique,...etc.

En mathématiques, les problèmes de Programmation Linéaire sont des problèmes d'optimisation qui étudient la maximisation ou la minimisation d'une fonction linéaire soumise à des contraintes linéaires. La Programmation Linéaire est une technique mathématique permettant de déterminer la meilleure solution d'un problème qui satisfait l'ensemble de ces contraintes et optimiser sa fonction objectif.

En effet, une fois qu'un problème est modélisé sous la forme d'équations linéaires, il existe plusieurs méthodes qui assurent la résolution du problème de manière exacte. L'une de ces méthodes, la plus connue et plus utilisée pour résoudre les problèmes de la programmation linéaire en nombres réels est la méthode du simplexe.

La Programmation Fractionnaire a attiré l'attention de nombreux chercheurs. La principale raison de l'intérêt dans la programmation fractionnaire provient du fait que des modèles de programmation pourraient mieux répondre aux problèmes réels si l'on considère l'optimisation entre les propriétés physiques et/ou les quantités économiques.

La théorie probabiliste a toujours été l'unique approche capable de représenter toutes les incertitudes présentes dans les problèmes de la vie courante. Par ailleurs durant les trois dernières décennies la recherche dans le domaine de l'intelligence artificielle, des mathématiques et des systèmes en ingénierie a démontré que la théorie probabiliste n'était efficace que pour un type spécifique d'incertitude, et que d'autres approches étaient possibles pour la compléter. Parmi ces nouvelles approches, la théorie des ensembles flous est particulièrement pertinente pour ce type de problèmes, elle offre une structure pour représenter l'information imprécise.

Dans notre mémoire, une méthode dite « simplexe flou », pour résoudre un Problème Linéaire Fractionnaire Flou en Variables Réelles, sera exposée.

Afin de présenter cette méthode, nous avons organisé ce travail de la manière suivante :

Le premier chapitre est intitulé Programmation Linéaire : nous avons donné un exemple de modélisation d'un problème réel sous forme d'un programme linéaire. Puis, nous avons exposé les différentes formes d'un problème de programmation linéaire déterministe et la méthode permettant sa résolution qui est la méthode du simplexe classique qui fut proposée en 1963 par G. B. Dantzig [5], et son algorithme avec un exemple numérique.

Le chapitre deux est consacré à la programmation linéaire fractionnaire uni-critère en présentant la géométrie d'un problème linéaire fractionnaire uni-critère et quelques stratégies de résolution telles que : la résolution directe où on utilise plusieurs approches par exemple celle de Cambini [3], la résolution par paramétrisation et la résolution d'un problème équivalent à objectif non fractionnaire Charnes et Cooper [4].

Dans le troisième chapitre, nous avons introduit la théorie des ensembles flous, nous avons donné les définitions et les différentes opérations arithmétiques des trois nombres flous tels que : nombre flou de type L-R, nombre flou triangulaire et nombre flou trapézoïdal.

Dans le quatrième chapitre, une méthode simplexe flou pour résoudre un Problème de Programmation Linéaire Fractionnaire Floue en variables réelles  $(PF)_{(CF)}$  et  $t$  en variables flous  $(PF)_{(VF)}$  est abordée. Les paramètres de la fonction objectif et les contraintes du problème  $(PF)_{(CF)}$  sont des nombres flous trapézoïdaux. Après la transformation des paramètres des contraintes du problème  $(PF)_{(CF)}$  en nombres réels se fait grâce à la fonction Ranking  $\mathfrak{R}$ . Puis, nous illustrons cette méthode par un exemple numérique détaillé pour chaque problème.

De plus, nous avons présenté une application sur le logiciel Lingo. Nous avons d'abord parlé du logiciel Lingo puis nous avons programmé un exemple numérique avec ce logiciel.

Enfin, nous terminons notre travail par une conclusion générale et la bibliographie utilisée dans le mémoire.

# Chapitre 1

## Programmation Linéaire

### 1.1 Introduction

La Programmation Linéaire a été introduite par le Russe Kantrovitch et la première résolution a été faite par l'américain Dantzig [5]. C'est une technique de base en Recherche Opérationnelle et c'est un outil très puissant qui permet de résoudre un grand nombre de problèmes d'optimisation, dans différents domaines en gestion, en physique, en statistique...etc.

En effet, une fois un problème est modélisé sous forme d'équations linéaires, la programmation linéaire assure la résolution du problème par plusieurs méthodes d'une manière exacte.

Nous nous sommes basé dans ce chapitre, sur la méthode la plus souple et la plus universelle de résolution de programme linéaire qui est la méthode du simplexe.

### 1.2 Définition d'un Programme Linéaire

La Programmation Linéaire est une technique mathématique d'optimisation (maximisation ou minimisation) d'une fonction objectif linéaire sous des contraintes ayant la forme d'inéquations linéaires.

### 1.3 Modélisation d'un Programme Linéaire

Un modèle mathématique est une traduction d'une observation dans le but de lui appliquer les outils, les techniques et les théories mathématiques, puis généralement, en sens inverse, la traduction des résultats mathématiques obtenus en prédiction ou opérations dans le monde réel.

En Recherche Opérationnelle (RO), modéliser un problème consiste à identifier :

- les variables intrinsèques (inconnues),
- les différentes contraintes auxquelles sont soumises ces variables,
- l'objectif visé (optimisation).

## Exemple de modélisation d'un problème de production

Une usine fabrique 2 produits  $P_1$  et  $P_2$  nécessitant des ressources d'équipement, de main d'œuvre et de matières premières disponibles en quantité limitée.

|                  | $P_1$ | $P_2$ | disponibilité |
|------------------|-------|-------|---------------|
| équipement       | 3     | 9     | 81            |
| main d'œuvre     | 4     | 5     | 55            |
| matière première | 2     | 1     | 20            |

$P_1$  et  $P_2$  rapportent à la vente 6 euros et 4 euros par unité.

Question : Quelles quantités (non entières) de produits  $P_1$  et  $P_2$  doit produire l'usine pour maximiser le bénéfice total venant de la vente des 2 produits.

— Variables :

$x_1$  et  $x_2$  sont les quantités des produits  $P_1$  et  $P_2$  fabriqués ( $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ).

— Fonction objectif à maximiser :

La fonction objectif  $F$  correspond au bénéfice total :  $F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$ .

On cherche donc :

$$\max F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$$

— Contraintes :

Disponibilité de chacune des ressources :

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \end{cases} \quad (1.1)$$

Positivité des variables :  $x_1, x_2 \geq 0$ .

**En résumé, le problème de production se modélise sous la forme d'un programme linéaire :**

$$(PL) \quad \begin{cases} \max F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2 \\ s.c \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

## 1.4 Forme générale d'un Programme Linéaire

Un Programme Linéaire (PL) peut être écrit sous la formulation mathématique suivante :

$$(PL) \quad \begin{cases} \text{Optimiser } Z(x) = c^t x \\ s.c \\ Ax (\leq ou \geq ou =) b \\ x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

où :

- Optimiser signifie minimiser ou maximiser selon le problème traité,
- A une matrice réelle de taille (m×n) du premier membre des contraintes,
- b vecteur réel de taille (m×1) du second membre des contraintes,
- x vecteur de taille (1×n) de décision,
- c vecteur de taille (1×n) de la fonction objectif à optimiser.

## 1.5 Différentes formes d'un Problème Linéaire

Un Programme Linéaire (PL) peut se représenter sous la forme des trois modèles suivants :

### 1.5.1 Forme canonique pur

La forme canonique pur d'un Programme Linéaire peut se représenter sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{Optimiser } Z(x) = c^t x = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \\ s.c \\ Ax (\leq ou \geq) b \\ x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

où :

$x = (x_1, \dots, x_n)^t$ ,  $c = (c_1, \dots, c_n)^t$ ,  $b = (b_1, \dots, b_m)^t$  et A est une matrice réelle de taille (m×n) avec  $n \geq m$  telle que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

### 1.5.2 Forme standard

La forme standard d'un Programme Linéaire peut être écrite sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Optimiser } Z(x) = c^t x \\ \text{s.c} \\ Ax = b \\ x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0 \end{array} \right. \quad (1.5)$$

où

$b \in \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $c \in \mathbb{R}^n$ .

#### Remarque 1.1.

On peut toujours mettre un Programme Linéaire canonique sous la forme standard en ajoutant des variables positives aux contraintes appelées « variables d'écart ».

### 1.5.3 Variable d'écart et la transformation à la forme standard

La méthode de résolution que nous employons nécessite que les contraintes fonctionnelles du modèle soient exprimées sous forme d'équations linéaires (forme standard) au lieu d'inéquations. Cette transformation s'effectue facilement en introduisant dans le modèle de nouvelles variables appelées variables d'écart.

#### Transformation d'une inéquation de signe plus petit ou égal ( $\leq$ ) [20]

Toute contrainte de la forme :

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \quad (1.6)$$

peut être remplacée par un système de contraintes suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_j x_j + s = b \\ x, s \in \mathbb{R}^n, s \geq 0, x \geq 0 \end{array} \right. \quad (1.7)$$

où  $s$  est appelée variable d'écart.

#### Transformation d'une inéquation de signe plus grand ou égal ( $\geq$ ) [20]

Toute contrainte de la forme

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \geq b \quad (1.8)$$

peut être remplacée par un système de contraintes suivant :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j x_j - s = b \\ x, s \in \mathbb{R}^n, s \geq 0, x \geq 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

où  $s$  est appelée variable d'écart.

**Définition 1.1. Solution réalisable [18]**

On dit qu'un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  est une solution réalisable du problème (PL) sous la forme standard si et seulement si  $x$  satisfait les contraintes du problème, c'est à dire :

$$A x = b \text{ et } x \geq 0.$$

**Hypothèse :**

On suppose que la matrice  $A$  est de taille  $(m \times n)$  avec  $\text{rang}(A) = m \leq n$ .

**Définition 1.2. Ensemble des indices de base [18]**

Soit  $R \subset \{1, \dots, n\}$  un ensemble d'indices avec  $\text{card}(R) = m$  tel que les colonnes  $a_j$  ( $j \in R$ ) de la matrice  $A$  soient linéairement indépendantes. Autrement dit, la matrice carrée  $B$  formée des colonnes  $a_j$  ( $j \in R$ ) est inversible. On dit alors que l'ensemble  $R$  des indices est une base.

- Les variables  $x_B = (x_j, j \in R)$  sont appelées variables de base.
- Les variables  $x_N = (x_j, j \notin R)$  sont appelées variables hors-base.

**Remarque 1.2.**

On peut toujours écrire les décompositions par blocs suivantes :  
 $A = (B, N)$  où  $B$  est appelée matrice de base,  $N$  matrice hors base et aussi  
 $x = (x_B, x_N)^t$  où  $x_B$  sont les variables de base et  $x_N$  les variables hors base.

**Définition 1.3. Solution de base réalisable [9]**

On dit que  $x = (x_B, x_N)^t$  est une solution de base associée à la base  $B$  si elle vérifie :

$$A x = b \text{ avec } x_B = B^{-1}b \text{ et } x_N = 0.$$

Si, en plus,  $x_B \geq 0$ , alors  $x$  est une solution de base réalisable.

**Définition 1.4. Solution dégénérée et non dégénérée [10]**

Une solution de base réalisable  $x$  est dite non dégénérée si  $x_B > 0$ .

Si, au moins, une composante  $x_B = 0$  alors  $x$  est appelée une solution de base réalisable dégénérée.

**1.6 Quelques Propriétés géométriques des solutions de base réalisables**

Notons :

$$D_R = \{ x \in \mathbb{R}^n, A x = b, x \geq 0 \} \quad (1.10)$$

l'ensemble des solutions réalisables du problème (PL) sous forme standard .

**Définition 1.5. Ensemble convexe [22]**

On dit que  $S$  est convexe si seulement si :

$$\forall x, y \in S \text{ et } \forall \lambda \in [0, 1] \text{ alors } \lambda x + (1 - \lambda) y \in S.$$

**Définition 1.6. Combinaison linéaire convexe [22]**

Soient  $\lambda_i \geq 0, i \in \{1 \dots n\}$  et  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  alors :  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$  est appelée une combinaison linéaire convexe des points  $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Remarque 1.3.**

$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \forall x_1, x_2 \in S \text{ et } \lambda \in [0, 1]$  est une combinaison convexe de deux points.

**Définition 1.7. Polyèdre et Polytope [22]**

Soient les ensembles suivants :

- L'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^n, a x = b\}$  représente un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$ .
- L'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^n, a x \geq b\}$  représente un demi-espace fermé de  $\mathbb{R}^n$  dont l'hyperplan correspondant constitue la frontière.

1. Un polyèdre  $S$  est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés et /ou d'hyperplans. Un polyèdre  $S$  est un ensemble convexe fermé.
2. Un polyèdre  $S$  est borné s'il existe une valeur  $\alpha$  finie et positive telle que :  
 $|x_i| \geq \alpha, \forall i \in \{1 \dots n\} \text{ et } \forall x \in S.$
3. Un polytope est un polyèdre borné et non vide.

**Définition 1.8. Point extrême [22]**

Soit  $S$  un convexe non vide de  $\mathbb{R}^n$  :  $x$  est dit point extrême ou sommet de  $S$ , si  $x$  ne peut pas s'écrire comme combinaison convexe de deux points de  $S$ .

**Proposition 1.1. [18]**

L'ensemble  $D_R$  des solutions réalisables de (PL) est un polyèdre convexe et fermé.

**Théorème 1.1. [18]**

$x$  est une solution de base réalisable si et seulement si  $x$  est un sommet de  $D_R$ .

**Théorème 1.2. [18]**

L'optimum de la fonction objectif  $Z$  sur  $D_R$ , s'il existe, est atteint en au moins un sommet de  $D_R$ .

## 1.7 Méthode du simplexe

La méthode du simplexe est une méthode efficace et la plus utilisée pour résoudre les problèmes linéaires. Elle peut s'appliquer peu importe le nombre de variables dans le modèle et elle converge vers un nombre fini d'itérations. La solution optimale est approchée par étapes ou itérations successives.

Le principe de résolution nécessite un certain nombre d'étapes dont la démarche est la suivante [2] :

1. Déterminer une première solution de base réalisable, cette solution initiale sert de départ au changement vers la solution optimale (si elle existe).
2. Si la solution obtenue en (1) n'est pas optimale, déterminer une autre solution de base réalisable qui permettrait d'améliorer la fonction objectif (augmentation pour une maximisation ou diminution pour une minimisation).
3. On répète cette procédure itérative jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible d'améliorer la fonction objectif. La dernière solution de base réalisable obtenue constitue la solution optimale du programme linéaire (PL).

**Forme standard d'un modèle de programmation linéaire**

La résolution d'un programme linéaire par la méthode du simplexe est basée sur la représentation du problème en forme standard.

Considérons le modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Optimiser } z(x) \\ \text{s.c} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \in \mathbb{R}, x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Sa forme standard sera :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Optimiser } z(x) \\ s.c \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + s = b, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, s \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (1.12)$$

### 1.7.1 Algorithme du simplexe

La méthode du simplexe est la plus utilisée des méthodes de la Recherche Opérationnelle. C'est G. B. Dantzig qui dans un article paru en 1949 [8], a décrit cet algorithme du simplexe. Il constitue la branche dorsale de la Recherche Opérationnelle, cet algorithme a servi à la résolution de nombreux modèles linéaires relatifs à des problèmes de gestion, de transport, d'affectation...etc.

On dispose d'une solution de base réalisable  $x$  d'un Problème Linéaire sous forme standard, la matrice A peut s'écrire :

$$A = (B, N)$$

avec B une matrice carrée de taille  $(m \times m)$ , inversible, correspondant aux variables de base et N une matrice de taille  $m \times (n - m)$ , correspondant aux variables hors-base.

On décompose également le vecteur de décision :

$$x = (x_B, x_N)^t$$

avec  $x_B$  les variables de base et  $x_N$  les variables hors base.

Le but est de trouver une autre base  $B^*$  et une solution de base  $x^*$  associée telles que :

$$Z(x^*) > Z(x) \quad (x^* \text{ est meilleur que } x)$$

Dans le cas d'une fonction objectif à maximiser.

La méthode du simplexe consiste à faire rentrer une variable hors-base dans la nouvelle base (variable entrante) et faire sortir à la place une variable de base (variable sortante).

### Détermination d'une première solution

Considérons le problème de programmation linéaire sous forme standard suivant :

$$(PL) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Optimiser } Z(x) = c^t x \\ s.c \\ Ax = b \\ x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0 \end{array} \right. \quad (1.13)$$

On peut construire à partir de la matrice A, deux sous matrices,  $A = (B, N)$ .

De même le vecteur  $x$  (vecteur de décision) est décomposé comme suit :

$x = [x_B, x_N]^t$  où  $x_B = [x_{B_1}, x_{B_2}, \dots, x_{B_m}]^t$  et  $x_N$  pour les  $(n - m)$  variables restantes.

L'expression  $A \cdot x = b$  peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} A \cdot x &= (B, N) \times [x_B, x_N]^t = b \\ \Rightarrow A \cdot x &= Bx_B + Nx_N = b \end{aligned} \quad (1.14)$$

Multiplions cette expression par  $B^{-1}$ , ( l'inverse de)  $B$ . On obtient :

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

avec  $B^{-1}B = I$  (identité d'ordre  $m$ ) d'où  $x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1}b$

En annulant  $x_N$ , la solution de base est alors :

$$x_B = B^{-1}b \quad (1.15)$$

On obtient une solution de base réalisable de départ si  $x_B > 0$  (la matrice  $B$  est toujours constituée à partir des colonnes de la matrice  $A$ ).

### Amélioration d'une solution de base

A partir d'une solution de base réalisable, on obtient une nouvelle solution de base réalisable adjacente (meilleure ou aussi bonne) en transformant une variable (hors-base) en variable de base (dite variable entrante) et en même temps, rendre une variable de base actuelle en variable hors-base (dite variable sortante). Cette opération algébrique permet d'obtenir une nouvelle solution réalisable.

1. Calcul les vecteurs :

$$y_j = B^{-1} a_j \quad (1.16)$$

$$z_j = c_B y_j \quad (1.17)$$

où :

- $a_j$  : la  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $A$ ,
- $B^{-1}$  : la matrice inversible de la matrice base  $B$ ,
- $c_B$  : les coefficients correspondant à la base  $B$ .

2. Calcule du vecteur des coûts réduits :

$$E_j = z_j - c_j, j \in J_N \text{ et } E_j = 0, j \in J_B \quad (1.18)$$

Où :  $J_N$  indice de la matrice  $N$ ,  $J_B$  indice de la matrice  $B$ .

## Critère d'optimalité

### Théorème 1.3.

Si pour la base B tous les  $E_j \geq 0$  ( $E_j \leq 0$ ) ,  $\forall j$ , alors la solution de base correspondante réalise le maximum (minimum) de la fonction objectif.

## Critère d'optimalité pour le cas où la solution est infinie

### Théorème 1.4.

Si pour un problème à maximum (minimum) ,  $\exists l \in J_B$  tel que  $E_j < 0$  ( $E_j > 0$ ) et  $y_{il} \leq 0$  ,  $\forall i$  , alors la solution du problème est infinie.

## Détermination de la variable entrante

— Problème à minimum :

$$E_l = \max_{E_j \geq 0} E_j, j \in j_N \quad (1.19)$$

— Problème à maximum :

$$E_l = \min_{E_j \leq 0} E_j, j \in j_N \quad (1.20)$$

La variable correspondante à l'indice l est la variable  $x_l$  entrante dans la nouvelle base  $B^*$ .

## Détermination de la variable sortante

Pour que la nouvelle base soit admissible, il faut que  $x_j \geq 0 \forall j \in J_B$  , si  $y_{il} > 0$  :

$$\theta r = \frac{x_{B_r}}{y_{rl}} = \min_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{x_{B_l}}{y_{il}}, y_{il} > 0 \right\} \quad (1.21)$$

la variable correspondante à l'indice r est la variable  $x_r$  sortante de la base .

## 1.7.2 Procédure de l'algorithme du simplexe

Dans le cas d'une fonction objectif à maximiser.

### Étape initiale

Poser  $x_N = 0$  et déterminer la solution de base réalisable initiale  $x_B = B^{-1}b$  et l'objectif  $z = c_B B^{-1}b$  .

## Étape principale

1. Calculer :  $E_j = z_j - c_j$  avec  $z_j = c_B y_j = c_B B^{-1} a_j$ , pour toutes les variables hors base. Si tous les  $E_j = z_j - c_j \geq 0$ , alors Stop; la solution actuelle est la solution optimale.

Sinon, choisir la variable entrante :

$$E_l = \min_{E_j \leq 0} E_j, j \in J_N. (\text{variable entrante } x_l).$$

2. Calculer  $y_{ij} = B^{-1} a_j$ .

Si  $y_{il} < 0$  alors Stop; le problème a une solution infinie.

Sinon, choisir la variable qui doit quitter la base :

$$\theta_r = \frac{x_{B_r}}{y_{rl}} = \min_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{x_{B_i}}{y_{il}}, y_{il} > 0 \right\} (\text{variable sortante } x_r).$$

3. A partir de la nouvelle base, déterminer  $B^{-1}$ ,  $x_B = B^{-1}b$  et  $Z = c_B B^{-1}b$  et on passe à l'étape (1).

### 1.7.3 Tableau du simplexe

Comme nous l'avons vu précédemment, nous devons, à chaque itération, déterminer les quantités suivantes :

$$x_B = B^{-1} \cdot b, Z = c_B \cdot x_B = c_B \cdot B^{-1} \cdot b$$

$$y_j = A_B^{-1} \cdot a_j, z_j = c_B y_j \text{ et } E_j = z_j - c_j, j \in J_N, E_j = 0, j \in J_B$$

Les différentes procédures ont été élaborées pour effectuer une mise à jour de ces quantités. On peut structurer toute cette information dans un tableau, dit tableau du simplexe.

On réécrit les expressions matricielles, ci-dessus, sous forme d'un tableau, comme suit :

|       |                   |       |   |   |   |       |            |
|-------|-------------------|-------|---|---|---|-------|------------|
|       | c                 | $c_1$ | . | . | . | $c_n$ |            |
| base  | b                 | $a_1$ | . | . | . | $a_n$ | $\theta_j$ |
| $x_1$ | $b_1$             | 1     | . | . | . | .     | $\theta_1$ |
| .     | .                 | 0     | . | . | . | .     | .          |
| $x_m$ | $b_m$             | 0     | . | . | . | .     | $\theta_m$ |
|       | $E_j = z_j - c_j$ | $E_1$ | . | . | . | .     | Z          |

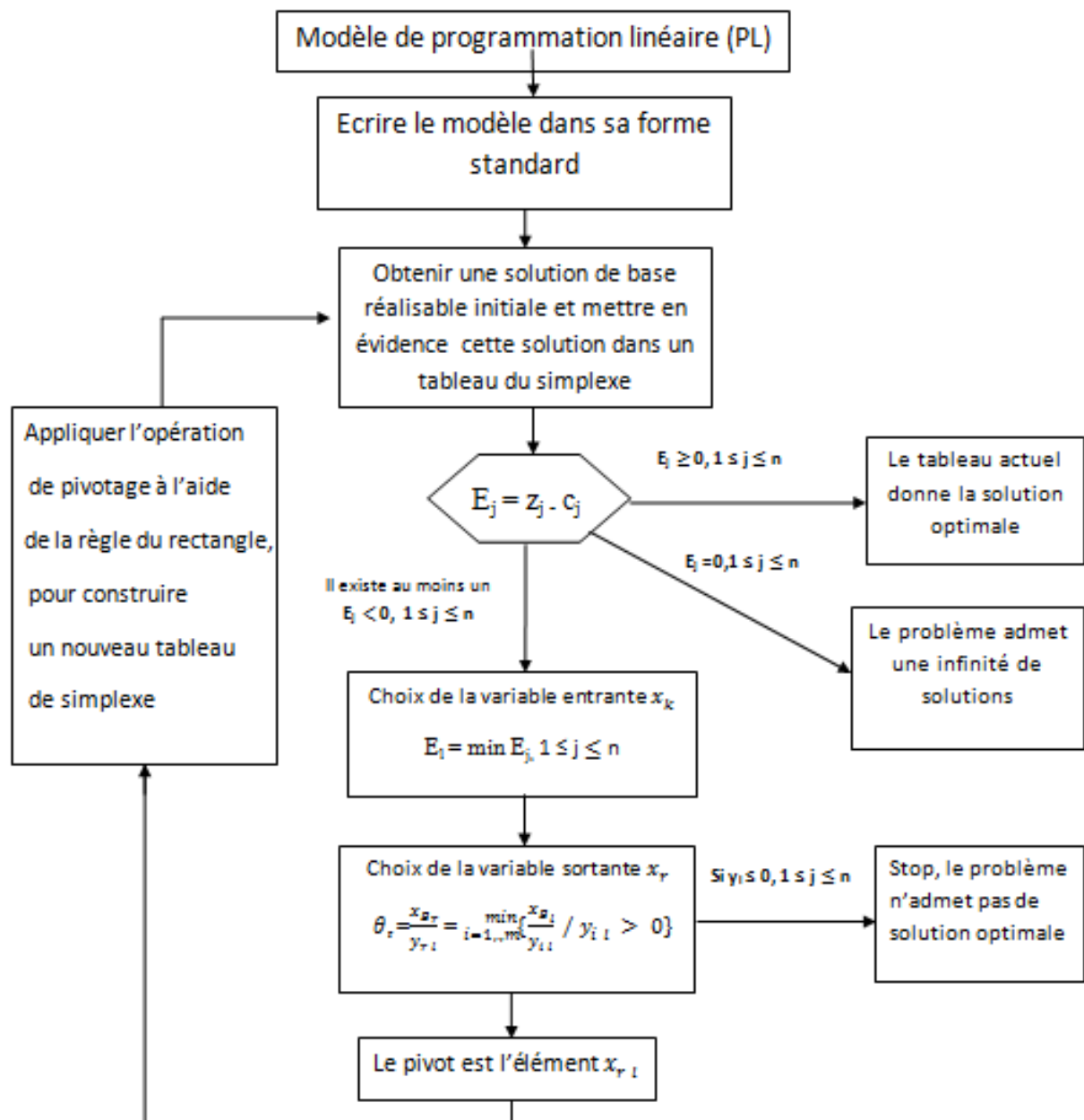
Tableau du simplexe

### Règle de rectangle

Pour pivoter le tableau du simplexe, on utilise la règle de rectangle suivante :

$$\text{Nouvelle valeur} = \text{Ancienne valeur} - \frac{\text{Produits des éléments dans les coins opposés}}{\text{Le pivot}}.$$

### 1.7.4 Organigramme de l'algorithme du simplexe (maximisation)



Organigramme de la méthode du simplexe

### 1.7.5 Complexité de l'algorithme du simplexe

La complexité d'un algorithme est le nombre d'opérations élémentaires qu'il doit effectuer pour mener à bien un calcul en fonction de la taille des données d'entrée. L'efficacité d'un algorithme est mesurée par l'augmentation du temps de calcul en fonction du nombre des données. Nous avons donc deux éléments à prendre en compte : la taille des données et le temps de calcul.

L'évaluation de la complexité d'un algorithme est l'étude du nombre maximal d'opérations élémentaires qu'il nécessite dans le pire des cas. Kelle et Miny (1972) ont construit des problèmes nécessitant l'examen d'un nombre de sommets croissants exponentiellement en fonction de la taille du problème (contraintes et variables). Et puisqu'il a été montré pour les principales règles de pivotage employées que l'algorithme du simplexe pouvait prendre un temps de calcul exponentiel. En particulier, on ne sait pas s'il existe une règle de pivotage qui assurerait que l'algorithme se termine après un nombre polynomial d'étapes. Alors la complexité de la méthode du simplexe est donc exponentielle [7].

### Exemple numérique

Un ébéniste fabrique des bureaux sous forme standard ou luxe. Des études de marché ont montré que pour l'année à venir, les possibilités de vente s'élèvent à 200 unités pour le modèle luxe et à 300 unités pour le modèle standard. L'approvisionnement en bois est suffisant pour fabriquer annuellement 600 bureaux quel que soit le type. Par ailleurs, le temps de fabrication d'un modèle luxe est le double de celui d'un bureau de modèle standard. La capacité annuelle de fabrication est telle que, si tous les bureaux fabriqués étaient de type standard, on pourrait en fabriquer 800 au maximum. La vente d'un bureau sous le modèle luxe conduit à une marge unitaire sur un coût variable égale à 8, celle d'un bureau de type standard égale à 4. On se propose de rechercher le programme annuel de fabrication conduisant au profit global maximum.

Soit  $x_1$  le nombre de bureaux de type luxe,  $x_2$  le nombre de bureaux de type standard. Le programme linéaire est :

$$(PL) \quad \left\{ \begin{array}{l} Max Z = 8x_1 + 4x_2 \\ s.c \\ x_1 \leq 200 \\ x_2 \leq 300 \\ x_1 + x_2 \leq 600 \\ 2x_1 + x_2 \leq 800 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Écrivons le modèle dans sa forme standard en ajoutant les variables d'écart :  $x_3, x_4, x_5, x_6$ .

$$(PL) \quad \begin{cases} \text{Max } Z = 8x_1 + 4x_2 \\ s.c \\ x_1 + x_3 = 200 \\ x_2 + x_4 = 300 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 600 \\ 2x_1 + x_2 + x_6 = 800 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1 \dots 6} \end{cases}$$

On obtient alors un système d'équations comportant  $n = 6$  inconnues et  $m = 4$  contraintes.

On obtient une solution de base en annulant  $(6 - 4) = 2$  variables.

On s'assure d'une solution de base réalisable en annulant les variables  $x_1, x_2$  c'est à dire  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 200, x_4 = 300, x_5 = 600$  et  $x_6 = 800$ .

d'où : la solution de base réalisable de départ qui est mise en évidence dans le premier tableau du simplexe,  $x = (0, 0, 200, 300, 600, 800)^t$ .

## Tableau 1 du simplexe

### Itération 1

|                   | c     | 8     | 4     | 0     | 0     | 0     | 0     |            |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------------|
| base              | $x_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $\theta_j$ |
| $x_3$             | 200   | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 200        |
| $x_4$             | 300   | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | /          |
| $x_5$             | 600   | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 0     | 600        |
| $x_6$             | 800   | 2     | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 400        |
| $E_j = z_j - c_j$ |       | -8    | -4    | 0     | 0     | 0     | 0     | $Z=0$      |

On a :  $j_B = \{3, 4, 5, 6\}$  et  $j_N = \{1, 2\}$ ,  $c_B = (c_3, c_4, c_5, c_6)^t = (0, 0, 0, 0)^t$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$y_j = B^{-1} a_j, z_j = c'_B y_j = c'_B B^{-1} a_j$$

$E_j = z_j - c_j, j \in j_N$  donc :

$$\text{--- } E_1 = z_1 - c_1 = c'_B y_1 - c_1 = c'_B B^{-1} a_1 - c_1 = (0, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - c_1 = -8$$

$$\text{--- } E_2 = z_2 - c_2 = c'_B y_2 - c_2 = c'_B B^{-1} a_2 - c_2 = (0, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - c_2 = -4$$

et  $E_j = 0, j \in J_B$  donc  $E_3 = 0, E_4 = 0, E_5 = 0$  et  $E_6 = 0$

$\Rightarrow E_1 < 0$  et  $E_2 < 0$ ,  $\min(E_1, E_2) = \min(-8, -4) = -8$  donc  $j_k = 1$ , Alors la variable  $x_1$  entre dans la nouvelle base.

et  $\theta_r = \frac{x_{B_r}}{y_{rl}} = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{x_{B_i}}{y_{il}}, y_{il} > 0 \right\} = \min(0, 3, 2) = 0$  donc  $j_r = 3$ , Alors la variable  $x_3$  sort de la base.

La variable  $x_1$  ( $k = 1$ ) entre dans la base et sa valeur sera 200, la variable sortante est  $x_3$  ( $r = 3$ ) et le pivot  $a_{11} = 1$ .

On passe à l'itération 2.

## Tableau 2 du simplexe

### Itération2

|                   | c     | 8     | 4     | 0     | 0     | 0     | 0     |            |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------------|
| base              | $x_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $\theta_j$ |
| $x_1$             | 200   | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | /          |
| $x_4$             | 300   | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 300        |
| $x_5$             | 400   | 0     | 1     | -1    | 0     | 1     | 0     | 400        |
| $x_6$             | 400   | 0     | 1     | -2    | 0     | 0     | 1     | 400        |
| $E_j = z_j - c_j$ |       | 0     | -4    | 8     | 0     | 0     | 0     | $Z = 1600$ |

La nouvelle solution de base est :  $x^* = (200, 0, 0, 100, 400, 400)^t$ .

On a :  $c_B = (c_1, c_4, c_5, c_6)^t = (8, 0, 0, 0)^t$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$j_B = \{1, 4, 5, 6\}$  et  $j_N = \{2, 3\}$ .

$y_j = B^{-1} a_j, z_j = c'_B y_j = c'_B B^{-1} a_j$

$E_j = z_j - c_j, j \in j_N$  donc :

$$- E_2 = z_2 - c_2 = c'_B y_2 - c_2 = c'_B B^{-1} a_2 - c_2 = (8, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 = -4$$

$$- E_3 = z_3 - c_3 = c'_B y_3 - c_3 = c'_B B^{-1} a_3 - c_3 = (8, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - 0 = 8$$

et  $E_j = 0, j \in J_B$  donc  $E_1 = 0, E_4 = 0, E_5 = 0$  et  $E_6 = 0$ .

Le tableau 2 n'est pas optimal puisque  $E_2 < 0$ , Alors la variable  $x_2$  entre dans la nouvelle base.

et  $\theta_r = \frac{x_{B_r}}{y_{rl}} = \min_{i=1,2,3} \left\{ \frac{x_{B_i}}{y_{il}}, y_{il} > 0 \right\} = \min(300, 400, 400) = 400$  donc  $j_r = 4$ , Alors la variable  $x_4$  sort de la base.

La variable  $x_3$  ( $k = 3$ ) entre dans la base et sa valeur sera 200, la variable sortante est  $x_4$  ( $r = 4$ ) et le pivot  $a_{22} = 1$ .

On passe à l'itération 3.

### Tableau 3 du simplexe

#### l'itération 3

|                   | c     | 8     | 4     | 0     | 0     | 0     | 0     |            |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------------|
| base              | $x_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $\theta_j$ |
| $x_1$             | 200   | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | /          |
| $x_2$             | 300   | 0     | 1     | 0     | 1     | 2     | 0     | /          |
| $x_5$             | 100   | 0     | 0     | -1    | -1    | 1     | 0     | /          |
| $x_6$             | 100   | 0     | 0     | -2    | -1    | 0     | 1     | /          |
| $E_j = c_j - z_j$ |       | 0     | 0     | 4     | 8     | 0     | 0     | $Z=2800$   |

La nouvelle solution de base est :  $x^* = (200, 300, 0, 0, 100, 100)^t$ .

$$\text{On a : } c_B = (c_1, c_2, c_5, c_6)^t = (8, 4, 0, 0)^t \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$j_B = \{1, 2, 5, 6\}, j_N = \{3, 4\}.$$

$$y_j = B^{-1} a_j, z_j = c'_B y_j = c'_B B^{-1} a_j$$

$$E_j = z_j - c_j, j \in j_N \text{ donc :}$$

$$\text{--- } E_3 = z_3 - c_3 = c'_B y_3 - c_3 = c'_B B^{-1} a_3 - c_3 = (8, 4, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} - 0 = 8$$

$$\text{--- } E_4 = z_4 - c_4 = c'_B y_4 - c_4 = c'_B B^{-1} a_4 - c_4 = (8, 4, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 4$$

$\Rightarrow$  Les  $E_j \geq 0$  donc  $x = (200, 300)^t$  est une solution réalisable optimale du problème (PL) et  $Z=2800$ .

La solution optimale est :

$$x_1 = 200$$

$$x_2 = 300$$

$$x_5 = 100$$

$$x_6 = 100$$

et  $Z$  est maximum pour  $x^* = (x_1^* = 200, x_2^* = 300)$  et vaut 2800.

## 1.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une méthode de résolution des problèmes de Programmation Linéaire qui est la méthode du simplexe. Nous avons parlé d'abord sur la Programmation Linéaire puis, nous avons montré l'application de cette méthode sur la résolution des problèmes de la Programmation linéaire.

# Chapitre 2

## Programmation Linéaire Fractionnaire

### 2.1 Introduction

Les programmes fractionnaires consiste à optimiser un objectif mis sous la forme d'un rapport de deux fonctions linéaires ou non linéaires soumis à un ensemble de contraintes. Différentes versions de ce modèle linéaire ou non linéaire, en nombres entiers ou continues, en variables mixtes ou en variables 0-1, apparaissent dans plusieurs domaines de la recherche opérationnelle tels que les bases de données, l'ingénierie, l'optimisation combinatoire, l'informatique et l'économie ([rendement/risque], [coût/temps], [dette/capitaux propres]), la santé comme la planification dans un hôpital ([coût/patient] ,[infirmière/patient]) et la programmation stochastique.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons uniquement aux problèmes linéaires fractionnaires dits aussi problèmes hyperboliques [13]. Nous allons présenter les trois grandes stratégies de résolution de ces problèmes : la résolution directe, la résolution par paramétrisation et la résolution d'un problème équivalent à objectifs simplifiés .

### 2.2 Formulation du Programme Fractionnaire

Les programmes fractionnaires consistent à optimiser un objectif mis sous la forme d'un rapport de deux fonctions linéaires ou non linéaires, soumis à un ensemble de contraintes.

Étant donné  $f$ ,  $h$  et  $g_i$  pour  $i \in \{1, \dots, m\}$  des fonctions réelles définies de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , avec  $h$  ne s'annulant pas sur un sous-ensemble  $X$  de  $\mathbb{R}$ .

Le problème de programmation fractionnaire ( $P_F$ ) consiste à déterminer un élément  $x \in X$  optimisant la fonction  $\frac{f(x)}{h(x)}$  (avec  $h(x) \neq 0$ ) sur un domaine réalisable  $S$  défini par le système de contraintes  $g_i(x) \leq 0$  ( $i \in \{1, \dots, m\}$ ) avec  $x \in X$ . Il a donc la forme suivante :

$$(P_F) \begin{cases} \text{maximiser } \frac{f(x)}{h(x)} \\ s.c \\ S = \{x \in X \subset \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0 \text{ pour } i \in \{1, \dots, m\}\} \end{cases} \quad (2.1)$$

vérifiant les hypothèses classiques suivantes :

- Les fonctions  $f$ ,  $h$  et  $g_i$  pour  $i \in \{1, \dots, m\}$  sont continues sur  $\mathbb{R}^n$  .
- $S$  est un domaine non vide et borné de  $\mathbb{R}^n$  .
- $h(x) > 0$  ,  $\forall x \in X$ .

$(P_{LF})$  est dit programme linéaire fractionnaire, lorsque  $f, h$  et  $g$  sont des fonctions linéaires et affines de la variable  $x$ .

## 2.3 Rappel sur l'optimisation convexe

### Définition 2.1. Ensemble convexe [21]

On dit que l'ensemble  $S$  est convexe si et seulement si :

$$\forall x, y \in S \text{ et } \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in S \quad (2.2)$$

Géométriquement un convexe est un ensemble qui lorsqu'il contient deux points contient nécessairement le segment les reliant.

### Exemple

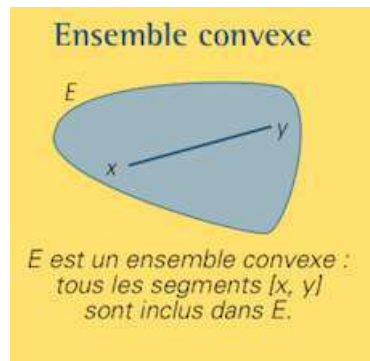


Figure 2.1 : Exemple d'un ensemble convexe

### Définition 2.2. Combinaison linéaire convexe [21]

Un vecteur  $y \in S$  est une combinaison linéaire convexe des points  $\{x_1, \dots, x_p\}$  s'il existe des coefficients réels  $\lambda_i, i \in \{1, \dots, p\}$ , tels que :

$$y = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \text{ avec } \lambda_i \geq 0, i \in \{1, \dots, p\} \text{ et } \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \quad (2.3)$$

### Définition 2.3. Enveloppe convexe [21]

L'enveloppe convexe d'un ensemble  $S \subset \mathbb{R}^n$  est l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^n$  qui s'écrivent comme combinaisons convexes des points de  $S$ . Elle est notée par :

$$\text{Conv}(S) = \{x \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i, x_i \in S, \lambda_i \geq 0, i \in \{1, \dots, p\} \text{ et } \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1\} \quad (2.4)$$

C'est le plus petit ensemble convexe contenant  $S$ .

### Définition 2.4. Fonction convexe [21]

La fonction  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  est dite convexe sur l'ensemble  $S$  convexe non vide de  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si :

$$\forall x, y \in S \text{ et } \forall \lambda \in [0, 1] \text{ on a : } f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (2.5)$$

**Définition 2.5. Fonction concave [21]**

La fonction  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  est dite concave sur l'ensemble  $S$  convexe non vide de  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si :

$$\forall x, y \in S \text{ et } \forall \lambda \in [0, 1] \text{ on a : } f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (2.6)$$

— La fonction  $f$  est concave (resp. strictement concave)  $\Leftrightarrow$   $(-f)$  est convexe (resp. strictement convexe).

**Définition 2.6. Épigraphe [21]**

On appelle épigraphe de  $f$  noté **épi**( $f$ ) le sous ensemble de  $\mathbb{R}^{n+1}$  défini par :

$$\mathbf{épi}(f) = \{(x, y) \in S \times \mathbb{R} / y \geq f(x)\} \quad (2.7)$$

**Définition 2.7. Hypographe [21]**

On appelle hypographe de  $f$  noté **hyp**( $f$ ) le sous ensemble de  $\mathbb{R}^{n+1}$  défini par :

$$\mathbf{hyp}(f) = \{(x, y) \in S \times \mathbb{R} / y \leq f(x)\} \quad (2.8)$$

**Définition 2.8. [21]**

1. Le problème ( $P_F$ ) de maximisation est appelé problème fractionnaire concave-convexe si  $f$  est concave et les fonction  $h$  et  $g_i$  pour  $i \in \{1, \dots, m\}$  sont convexes.
2. Le problème ( $P_F$ ) de minimisation est appelé problème fractionnaire convexe-concave si  $f$  et les fonctions  $g_i$  pour  $i \in \{1, \dots, m\}$  sont convexes et  $h$  concave.

**Théorème 2.1. [21]**

- 1)  $f$  est convexe si et seulement si **épi**( $f$ ) est convexe.
- 2)  $f$  est concave si et seulement si **hyp**( $f$ ) est convexe.

**Définition 2.9. Fonction quasi-convexe [21]**

La fonction  $f$  est quasi-convexe sur  $S$  si :

$$\forall x, y \in S \text{ et } \forall \lambda \in [0, 1] \text{ on a : } f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \quad (2.9)$$

$f$  est quasi-convexe sur  $S$  est ainsi équivalente à :

$$\forall x, y \in S \text{ et } \forall \lambda \in [0, 1] \text{ on a : } f(x) \leq f(y) \Rightarrow f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(y) \quad (2.10)$$

**Définition 2.10. Fonction quasi-concave [21]**

La fonction  $f$  est quasi-concave sur  $S$  si :

$$\forall x, y \in S \text{ et } \forall \lambda \in [0, 1] \text{ on a : } f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\} \quad (2.11)$$

La fonction  $f$  est quasi-concave  $\Leftrightarrow (-f)$  est quasi-convexe.

Une fonction qui est à la fois quasi-convexe et quasi-concave est dite quasi-monotone ou quasi-linéaire.

Les fonctions quasi-convexes, quasi-concaves et quasi-linéaires sont caractérisées par la convexité de leurs ensembles niveaux.

**Théorème 2.2. [21]**

1.  $f$  est quasi-convexe si et seulement si l'ensemble  $L(f, \alpha) = \{x \in S ; f(x) \leq \alpha\}$  (Lower-level set) est convexe pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
2.  $f$  est quasi-concave si et seulement si l'ensemble  $U(f, \alpha) = \{x \in S ; f(x) \geq \alpha\}$  (Upper-level set) est convexe pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
3.  $f$  est quasi-linéaire si l'ensemble  $Y(f, \alpha) = \{x \in S ; f(x) = \alpha\}$  (level surface) est convexe pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La réciproque est vraie si la fonction  $f$  est continue sur  $S$ .

**Preuve**

$\Rightarrow$ ) Supposons que  $f$  est quasi-convexe et soient  $x_1, x_2 \in L(f, \alpha)$  donc  $x_1, x_2 \in S$  car  $L(f, \alpha) \subset S$  et  $\max\{f(x_1), f(x_2)\} \leq \alpha$ .

Soit  $\lambda \in [0 ; 1]$  et  $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ , comme  $S$  est convexe donc  $x \in S$  et par la quasi-convexité de  $f$  on a  $f(x) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\} \leq \alpha$  d'où  $x \in L(f, \alpha)$ , ainsi  $L(f, \alpha)$  est convexe.

$\Leftarrow$ ) Supposons que  $L(f, \alpha)$  est convexe pour tout réel  $\alpha$ . Soient  $x_1, x_2$  dans  $S$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  et  $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ .

Notons que  $x_1$  et  $x_2 \in L(f, \alpha)$  pour  $\alpha = \max\{f(x_1), f(x_2)\}$

$L(f, \alpha)$  étant convexe par hypothèse donc  $x \in L(f, \alpha)$  et  $f(x) \leq \alpha = \max\{f(x_1), f(x_2)\}$  c'est à dire  $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$  par conséquent  $f$  est quasi-convexe.

**Remarque 2.1.**

Il est clair qu'une fonction convexe sur  $S$  convexe est quasi-convexe.

**Définition 2.11. Fonction différentiable [21]**

Soit  $S$  un ensemble non vide de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  est dite différentiable en  $\bar{x} \in \text{int}(S)$  s'il existe un vecteur gradient noté  $\nabla f(\bar{x})$  et une fonction  $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tels que :

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\| \alpha(\bar{x}; x - \bar{x}), \forall x \in S \quad (2.12)$$

où :

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \alpha(x; x - \bar{x}) = 0 \text{ et } \nabla f(x) = \left( \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} \right)^t.$$

**Proposition 2.1.**

1. Si  $f$  est convexe alors  $f$  est quasi-convexe. Si de plus  $f$  est différentiable alors elle est pseudo-convexe.
2. Si  $f$  est concave alors  $f$  est quasi-concave. Si de plus  $f$  est différentiable alors elle est pseudo-concave.

## 2.4 Conditions d'optimalité

Considérons le problème de minimisation  $(P_m)$  suivant :

$$(P_m) \begin{cases} \text{minimise } f(x) \\ \text{s.c} \\ x \in S \end{cases}$$

**Définition 2.12. Minimum global [21]**

Une solution admissible  $\bar{x}$  est dit minimum global si et seulement si  $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in S$ .

**Définition 2.13. Minimum local [21]**

Une solution admissible  $\bar{x}$  est dit minimum local si et seulement si il existe un voisinage  $V_\epsilon(\bar{x})$  de  $\bar{x}$  tel que  $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in S \cap V_\epsilon(\bar{x})$ .

Tout minimum global est évidemment un minimum local. En général, on est beaucoup plus intéressé par la recherche de minima globaux (car ils sont les seuls à garantir que la valeur de leur fonction objectif ne peut être améliorée), mais ceux-ci sont malheureusement également beaucoup plus difficiles à calculer (intuitivement, la raison en est qu'il suffit pour prouver qu'un minimum est local de vérifier qu'il n'existe pas de meilleure solution dans un voisinage restreint autour de ce minimum, tandis que prouver qu'un minimum est global requiert l'analyse de la fonction objectif sur l'entièreté du domaine admissible). Cependant, à l'aide de la notion de convexité, de quasi-convexité et de pseudo-convexité, nous allons décrire une classe de problèmes pour laquelle la situation est bien plus favorable.

**Théorème 2.3. Conditions nécessaires d'optimalité [21]**

Si  $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction convexe sur  $S$  un ensemble convexe non vide. Si  $\bar{x}$  est un minimum local alors il est un minimum global pour le problème  $(P_m)$ .

## Preuve

Si  $\bar{x}$  est un minimum local donc il existe un voisinage  $V(\bar{x})$  de  $\bar{x}$  tel que  $f(\bar{x}) \leq f(x)$  pour tout  $x \in S \cap V(\bar{x})$ .

Par contradiction, supposons que  $\bar{x}$  n'est pas un minimum global ainsi il existe  $\hat{x} \in S$  tel que  $f(\hat{x}) < f(\bar{x})$ . Par la convexité de  $f$  la relation suivante est vérifiée pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,

$$f(\lambda\hat{x} + (1-\lambda)\bar{x}) \leq \lambda f(\hat{x}) + (1-\lambda)f(\bar{x}) < \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda)f(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

ce qui contredit le fait que  $\bar{x}$  soit un minimum local car pour  $\lambda > 0$  et suffisamment petit, on a  $\lambda\hat{x} + (1-\lambda)\bar{x} \in S \cap V(\bar{x})$ .

## 2.5 Programmation Linéaire Fractionnaire

Lorsque dans le programme fractionnaire ( $P_F$ ) les fonctions  $f$ ,  $h$  et  $g_i$  pour  $i \in \{1, \dots, m\}$  sont des fonctions linéaires ou affines de la variable  $x$  alors le programme ( $P_F$ ) est appelé programme linéaire fractionnaire [21].

Mathématiquement, un Programme Linéaire Fractionnaire se présente comme suit :

$$(P_{LF}) \begin{cases} \text{maximiser } Z(x) = \frac{p'x + \alpha}{q'x + \beta} \\ \text{s.c} \\ S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases} \quad (2.13)$$

où :

$\alpha$  et  $\beta$  sont des réels,  $p$  et  $q$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$  une matrice réelle d'ordre  $(m \times n)$  et  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^m$ .

L'ensemble  $S$  est supposé borné non vide et  $q'x + \beta > 0$  sur  $S$ .

## 2.6 Stratégies de résolution d'un programme fractionnaire linéaire

Dans la littérature émergent trois grandes stratégies de résolution d'un programme fractionnaire [15] :

**1. La résolution directe** : Le programme reste sous sa forme originale c'est-à-dire sans modifier ni l'objectif ni l'ensemble des contraintes.

**2. La résolution par paramétrisation** : Dans cette stratégie, on modifie la fonction objectif sans toucher l'ensemble des contraintes.

**3. La résolution d'un programme équivalent** : On change la fonction objectif et l'ensemble des contraintes.

### 2.6.1 Résolution directe

Dans cette stratégie de résolution, le programme fractionnaire est traité sous sa forme originale c'est à dire sans modifier ni la fonction objectif ni l'ensemble des contraintes, elle est utilisée pour résoudre les problèmes linéaires fractionnaires continus, entiers, bivalentes(0,1), mixtes. cette méthode fournit une solution optimale d'un programme hyperbolique en variables continues sans faire aucun changement au programme initial. Elle est utilisée pour les problèmes hyperboliques en variables continues et entières.

Il existe plusieurs algorithmes et parmi les plus récents, celui de (A.Cambini et al.)[3] qui permet aussi d'optimiser le problème hyperbolique sur un domaine de solutions réalisables  $S$  non borné.

#### 2.5.1.1 Programme hyperbolique continu [13]

Plusieurs approches furent élaborées pour la recherche d'une solution optimale d'un programme hyperbolique en variables continues [3]. On cite, en particulier celle de (Cambini et Martien)[3] qui permet d'optimiser le problème hyperbolique sur un domaine de solution réalisables  $S$  non borné.

#### Théorème 2.4. [13]

Le point  $x^0$  de  $S$  est une solution optimale du problème  $(P_{LF})$  si et seulement si le vecteur gradient réduit  $\bar{\gamma}_j = \bar{\beta} \bar{p}_j - \bar{\alpha} \bar{q}_j$  est tel que  $\bar{\gamma}_j \leq 0$  pour tout indice hors base  $j \in N_k$ .

#### Corolaire [13]

La solution optimale  $x^0$  du problème  $(P_{LF})$  est unique si et seulement si le vecteur gradient réduit  $\bar{\gamma}$  est tel que  $\bar{\gamma}_j < 0$  pour tout indice  $j \in N_k$ .

#### Algorithme de (Cambini et Martein)[3]

##### Étape (1)

Trouver la solution niveau optimale  $x_1$ .

- Si une telle solution n'existe pas, alors  $\sup_{x \in S} Z(x) = +\infty$ , terminer.
- Sinon, poser  $k = 1$  et aller a l'étape (2).

##### Étape (2)

- (a) Si  $J = \{ j / \bar{q}_j > 0 \} = \emptyset$ ; termine  $x^k$  est une solution optimale de  $(P_{LF})$ ,
- (b) Sinon, soit  $s$  tel que  $\frac{\bar{p}_s}{\bar{q}_s} = \max_{j \in J} (\frac{\bar{p}_j}{\bar{q}_j})$ .
  - Si  $\bar{\gamma}_s > 0$ , aller à l'étape (3),
  - Sinon, terminer,  $x^k$  est une solution optimale de  $(P_{LF})$ .

### Étape (3)

La variable hors base  $x_s$  entre dans la base en moyennant une opération pivot, poser  $k = k + 1$  et aller à l'étape (2),

Si une telle opération n'est pas possible, terminer,  $\sup_{x \in S} Z(x) = \frac{\bar{p}_s}{\bar{q}_s}$ .

### Exemple 1

Soit le problème linéaire fractionnaire mono-objectif suivant :

$$(P_{LF}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } z = \frac{x_1 + 2x_2 - 2}{-2x_1 - x_2 - 1} \\ \text{s.c} \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

### Étape 1

Résolvons par la méthode du simplexe le problème  $(P_L)$  suivant :

$$(P_L) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } (-2x_1 - x_2 - 1) \\ \text{s.c} \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Et transformons le problème  $(P_L)$  sous forme standard :

$$(P_L) \begin{cases} \text{Max } (2x_1 + x_2 + 1) \\ \text{s.c} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_5 = 4 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5} \end{cases} \quad \text{puis à résoudre par la méthode de simplexe.}$$

La solution de niveau optimale est :  $x^0 = (4, 1)^t$  avec  $Z(x^0) = \frac{-2}{5}$ .

## Étape 2

Le tableau du simplexe associé à la solution  $x^0$  est :

|       |   |    |    |   |   |   |
|-------|---|----|----|---|---|---|
| p'    | 2 | 1  | 2  | 0 | 0 | 0 |
| q'    | 1 | -2 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 5 | 1  | 1  | 1 | 0 | 0 |
| $x_4$ | 4 | -2 | 1  | 0 | 1 | 0 |
| $x_5$ | 4 | 2  | -4 | 0 | 0 | 1 |

La première et la deuxième ligne représentent les coûts du numérateur et dénominateur respectivement :

$$p' = (1, 2)^t, q' = (-2, -1)^t, B = \{3, 4, 5\} \text{ et } N = \{1, 2\}.$$

Calculons les valeurs du vecteur gradient réduit de la fonction objectif tel que :

$$\bar{\gamma}_j = \bar{\beta} \bar{p}_j - \bar{\alpha} \bar{q}_j, \quad \forall j \in N$$

Nous obtenons :

$$(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2) = -1(1, 2) + 2(-2, -1) = (-5, -4).$$

Nous avons  $\bar{\gamma}_j \leq 0$ ,  $j \in N = \{1, 2\}$ , ceci entraîne la fin du déroulement de l'algorithme d'où, la solution optimale du problème est  $x^* (0, 0)^t$  et  $Z_{opt} = 2$ .

### 2.6.2 Résolution par paramétrisation

A l'inverse de la résolution directe, on construit un problème à objectif simplifié, combinaison linéaire du numérateur et du dénominateur par l'intermédiaire d'un paramètre, tout en gardant inchangé l'ensemble des contraintes [6].

Une séquence de résolutions de ce type de problème fournit une solution du programme fractionnaire. Cette méthode a été utilisée pour les différents programmes linéaires fractionnaires linéaires et non linéaires, en variables continues comme en variables discrètes, sur des domaines bornés.

Afin de simplifier l'objectif du programme mathématique fractionnaire, un paramètre est introduit permettant par exemple de ramener un programme hyperbolique en un programme paramétré linéaire, ou bien un programme fractionnaire quadratique en un programme paramétré quadratique, tout en gardant l'ensemble des contraintes inchangé.

Ainsi le programme obtenu peut être résolu « paramétriquement », une séquence de résolutions de tels programmes à objectif simplifié engendre une suite de solutions convergeant vers une solution optimale du programme fractionnaire initial. Proposée initialement en 1956 par (Isbell et al.) [12] pour des programmes hyperboliques et ce n'est qu'à partir de 1967 que cette approche a connu un grand élan avec Dinkelbach [6] qui l'a généralisée aux programmes fractionnaires non linéaires. Afin d'assurer la convergence de la procédure, l'hypothèse de compacité du domaine défini par les contraintes est adoptée à cette approche.

Appliquons l'algorithme de Dinkelbach [6] directement sur le programme hyperbolique .

Le programme paramétré  $(Q_\lambda)$  associé consiste à simplifier l'objectif en combinant linéairement le numérateur et le dénominateur par l'intermédiaire d'un paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}$  .

Dans le cas d'un programme hyperbolique,  $(Q_\lambda)$  est un programme linéaire dont l'objectif est fonction du paramètre  $\lambda$ , et il est défini comme suit :

$$(Q_\lambda) \begin{cases} \text{maximiser } v(\lambda) = (p - \lambda q)'x + (\alpha - \lambda\beta) \\ \text{s.c} \\ S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases} \quad (2.14)$$

En notant par  $\lambda^*$  la valeur optimale de  $(P_{LF})$ , le résultat fondamental liant le programme fractionnaire au programme paramétré associé est donné par :

**Proposition 2.1. [6]**

Toute solution optimale de  $(Q_{\lambda^*})$  est une solution optimale de  $(P_{LF})$  .

### 2.6.3 Résolution d'un programme équivalent

La transformation du programme fractionnaire en un programme équivalent à objectif non fractionnaire est obtenue par un changement de variables. A l'inverse de l'approche paramétrée, ce changement de variables induit l'ajout d'une contrainte et d'une variable. Plus précisément, cette transformation est proposée par (Charnes et Cooper)[4].

Pour le programme hyperbolique en variables continues, cette transformation en un programme linéaire équivalent à pour but d'appliquer les algorithmes standards tels que la méthode du Simplexe.

Rappelons le problème  $(P_{LF})$  que nous voulons résoudre :

$$(P_{LF}) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } Z(x) = \frac{p'x + \alpha}{q'x + \beta} \\ s.c \\ S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\} \end{array} \right. \quad (2.15)$$

En fait le changement de variable suivant :

$$y = \left(\frac{1}{qx+\beta}\right)x \quad \text{et} \quad t = \left(\frac{1}{qx+\beta}\right) \quad (2.16)$$

Pour obtenir un programme linéaire  $(P_E)$  équivalent :

$$(P_E) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } p'y + \alpha t \\ s.c \\ Ay - bt \leq 0 \\ q'y + \beta t = 1 \\ y, t \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Cette notion d'équivalence est précisée par :

**Proposition 2.3. [4]**

Si  $(y^*, t^*)$  est une solution optimale de  $(P_E)$ , alors  $x^* = \frac{y^*}{t^*}$  avec  $t^* > 0$  est une solution optimale de  $(P_{LF})$ .

**Exemple 2**

Considérons le programme linéaire fractionnaire suivant :

$$(P_{LF}) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } z(x) = \frac{x_1 - 4}{-x_2 + 3} \\ s.c \\ -x_1 + 3x_2 \geq 0 \\ x_1 \leq 6 \\ \text{Avec } x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

En effectuant, le changement de variable suivant :

$$y = \left(\frac{1}{-x_2+3}\right)x \quad \text{et} \quad t = \left(\frac{1}{-x_2+3}\right)$$

On aboutit à la formulation suivante :

$$(P_E) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } (y_1 - 4t) \\ s.c \\ -y_1 + 3y_2 \geq 0 \\ y_1 - 6t \leq 0 \\ -y_2 + 3t = 1 \\ \text{Avec } y_1, y_2, t \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.19)$$

En ajoutant les variables d'écart et artificielles nous obtenons :

$$(P_E) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } (y_1 - 4t) \\ s.c \\ -y_1 + 3y_2 - \lambda_1 = 0 \\ y_1 - 6t + \lambda_2 = 0 \\ -y_2 + 3t + w = 1 \\ \text{Avec } y_1, y_2, t, \lambda_i, w \geq 0, i = 1, 2 \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Où :

$\lambda_i$  sont les variables d'écart ( $i = 1, 2$ ) ,  $w$  est la variable artificielle.

On utilise la méthode du simplexe pour résoudre le problème  $(P_E)$  ou bien une autre méthode de résolution et on trouve :

$y_1 = 0,33, y_2 = 0$  et  $t = 0,33$  ,  $\lambda = 0.67$ .

Donc la solution optimale de  $(P_{LF})$  est :  $x^* (x_1 = 1, x_2 = 0)^t$  et  $Z(x^*) = -\frac{4}{3}$ .

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons fait un rappel sur quelques notions mathématiques, telle que les définitions, les notions de convexité. Nous avons donné un aperçu sur la programmation linéaire fractionnaire telles que le modèle général, les domaines d'application, et les trois grandes méthodes de résolution : directe, par paramétrisation et la résolution avec un programme équivalent.

# Chapitre 3

## Théorie sur les ensembles flous

### 3.1 Introduction

Il est beaucoup plus facile de dire si une personne est un homme ou une femme, si une personne est en classe terminale ou pas, mais il est difficile de dire si quelqu'un est beau ( la notion de beauté est sujette à plusieurs discussions) donc c'est là où intervient la théorie des ensembles flous.

En effet, la théorie des ensembles flous est une théorie mathématique du domaine de l'algèbre abstraite ( branche mathématique qui consiste à étudier les structures algébriques et leurs relations) développée par Lotfi Zadeh en 1965 [21] à partir de l'idée d'appartenance afin d'étudier et de représenter l'incertitude due à l'imprécision dans l'information ne pouvant être modélisée par la théorie probabiliste . Aujourd'hui , les domaines d'application dans lesquels il existe des utilisations de la logique floue sont très variés : médecine, biologie, écologie, économie, recherche scientifique ...etc.

Dans la théorie des ensembles classiques, il n'y a que deux situations acceptables pour un élément, appartenir ou ne pas appartenir à un sous-ensemble.

### 3.2 Définitions et Concepts de base

Un ensemble flou est complètement défini par la donnée de sa fonction d'appartenance. A partir d'une telle fonction, un certain nombre de caractéristiques de l'ensemble flou peuvent être étudiées [7,8].

#### 3.2.1 Ensemble flou

Soit  $E$  un ensemble référentiel appelé univers (qui peut être fini ou infini, discret ou continu, ordonné ou non) dont les éléments sont notés par  $x$ . On définit un ensemble flou  $\tilde{A}$  dans  $E$  par la donnée d'une application  $\mu_{\tilde{A}}$  de  $E$  dans l'intervalle  $[0,1]$  telle que :

$$\mu_{\tilde{A}} : E \longrightarrow [0,1] \quad (3.1)$$

$$x \longmapsto \mu_{\tilde{A}}(x)$$

qui à tout élément  $x \in E$  associe une valeur réelle. Cette fonction est appelée « fonction d'appartenance » de l'ensemble flou, généralisant ainsi le concept d'appartenance et donc la notion de fonction caractéristique . L'ensemble flou est noté par  $\tilde{A}$  et est défini par :

$$\tilde{A} = \{ (x, \mu_{\tilde{A}}(x)), x \in E \} \quad (3.2)$$

On observe les trois cas possibles suivants :

$$\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x) = \begin{cases} \mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x) = 0 & \text{si } x \text{ n'appartient pas à } \tilde{\mathbf{A}} \\ 0 < \mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x) < 1 & \text{si } x \text{ appartient partiellement à } \tilde{\mathbf{A}} \\ \mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x) = 1 & \text{si } x \text{ appartient entièrement à } \tilde{\mathbf{A}} \end{cases} \quad (3.3)$$

### Par exemple

Si  $E = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5\}$  alors on peut définir un ensemble flou par :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \{ (x_1, 0.3); (x_2, 1); (x_3, 0.9); (x_4, 0); (x_5, 0.5) \}$$

A tout élément  $x$  de  $E$ , la valeur associée  $\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x)$  n'est pas nécessairement égale à 0 ou à 1, elle est à priori quelconque et désigne le degré d'appartenance de  $x$  à l'ensemble  $E$ .

### Remarque 3.1.

On peut faire remarquer que si  $\tilde{\mathbf{A}}$  est un sous-ensemble classique, la fonction d'appartenance qui lui est associée ne peut prendre que les valeurs extrêmes 0 et 1.

On a dans ce cas :

$$\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \tilde{\mathbf{A}} \\ 1 & \text{si } x \in \tilde{\mathbf{A}} \end{cases} \quad (3.4)$$

— Un ensemble classique constitue donc un cas particulier d'ensemble flou.

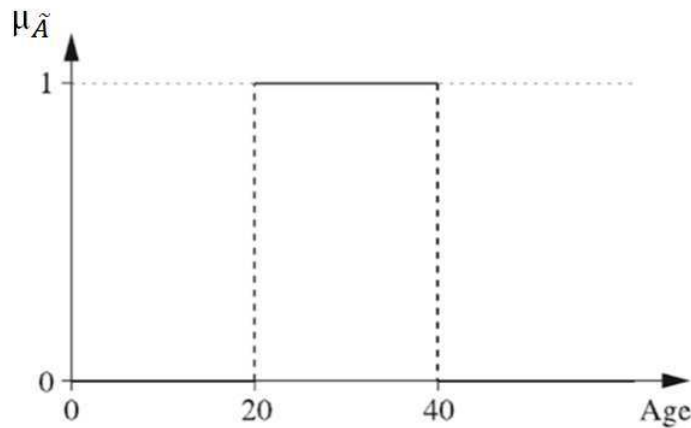
— L'ensemble vide est caractérisé par  $\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x) = 0, \forall x \in E$ .

### Par exemple

Le sous - ensemble  $\tilde{\mathbf{A}}$  des âge compris entre 20 et 40 ans a pour fonction caractéristique :

$$\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 20 \leq x \leq 40 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.5)$$

Le graphe de cette fonction est donné dans la figure suivante :



**Figure 3.1.** Présentation de la fonction d'appartenance  $\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}$ .

### 3.3 Définitions des caractéristiques d'un ensemble flou

Un ensemble flou est complètement défini par la donnée de sa fonction d'appartenance. A partir d'une telle fonction, un certain nombre de caractéristiques de sous-ensemble peuvent être étudiées.

#### 3.3.1 Support d'un ensemble flou

Le support de  $\tilde{A}$  noté  $\text{supp}(\tilde{A})$  est l'ensemble ordinaire défini par :

$$\text{Supp}(\tilde{A}) = \{x \in E / \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \quad (3.6)$$

#### 3.3.2 Hauteur d'un ensemble flou $\tilde{A}$

La hauteur d'un ensemble flou  $\tilde{A}$  noté  $\text{Haut}(\tilde{A})$  est le plus fort degré avec lequel un élément de  $E$  appartient à  $\tilde{A}$ .

Formellement

$$\text{Haut}(\tilde{A}) = \sup_{x \in \tilde{A}} \mu_{\tilde{A}}(x) \quad (3.7)$$

#### 3.3.3 Noyau d'un ensemble flou $\tilde{A}$

Le noyau de  $\tilde{A}$  noté  $\text{Noy}(\tilde{A})$  est l'ensemble classique de tous les éléments qui lui appartiennent totalement (avec un degré 1)

$$\text{Noy}(\tilde{A}) = \{x \in E / \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\} \quad (3.8)$$

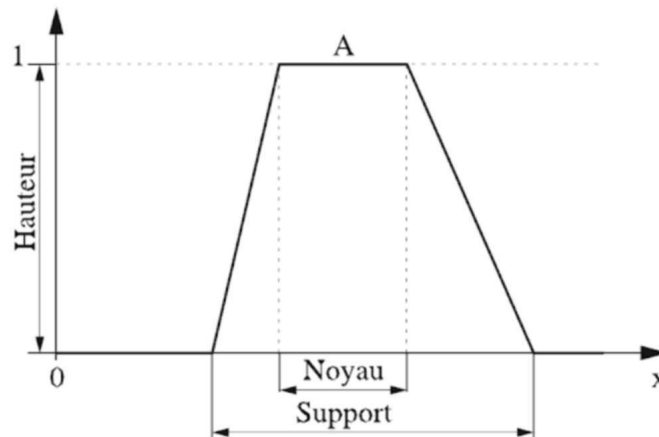


Figure 3.2. Support, hauteur et noyau d'un ensemble flou  $\tilde{A}$

### 3.3.4 Ensemble flou convexe

L'ensemble flou  $\tilde{\mathbf{A}}$  est convexe si sa fonction d'appartenance vérifie :

$$\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq (\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x_1), \mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x_2)); \forall x_1, x_2 \in E \text{ et } \lambda \in [0, 1] \quad (3.9)$$

### 3.3.5 Ensemble flou normalisé

L'ensemble flou  $\tilde{\mathbf{A}}$  est normalisé s'il existe au moins  $x_0 \in E$  tel que  $\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x_0) = 1$ .

### 3.3.6 Coupe de niveau $\alpha$

Une coupe de niveau  $\alpha$  d'un ensemble flou  $\tilde{\mathbf{A}}$  notée  $\tilde{\mathbf{A}}^\alpha$  où  $\alpha \in ]0, 1]$  est l'ensemble classique des éléments qui appartiennent à  $\tilde{\mathbf{A}}$  avec un degré d'appartenance au moins égal à  $\alpha$ .

**Formellement**

$$\tilde{\mathbf{A}}^\alpha = \{x \in E / \mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x) \geq \alpha\} \subset \mathbb{R} \quad (3.10)$$

### 3.3.7 Nombre flou

Un nombre flou  $\tilde{\mathbf{A}}$  est un sous ensemble flou respectant les propriétés suivantes :

1- Il est normalisé  $\Rightarrow \text{Haut}(\tilde{\mathbf{A}}) = 1$ .

2- Son noyau est unique. C'est-à-dire il existe un seul élément  $x$  de  $\mathbb{R}$  pour lequel le degré d'appartenance est égal à 1.

•  $\tilde{\mathbf{A}}$  est convexe si  $\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x)$  est quasi concave.

Un nombre flou  $\tilde{\mathbf{A}}$  est dit non-négatif si  $\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x) = 0, \forall x < 0$ .

**Remarque 3.2.**

Si le  $\text{Noy}(\tilde{\mathbf{A}})$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on parle alors d'intervalle flou.

**Exemple 1**

Soit ( $\tilde{4}$  = à peu près égal à 4 ).

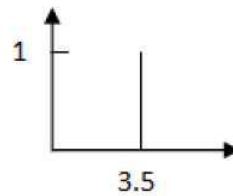
$\tilde{4}$  est le nombre flou caractérisé par la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x < 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \\ -x + 5 & \text{si } 4 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{si } x \geq 5 \end{cases} \quad (3.11)$$

### Exemple 2

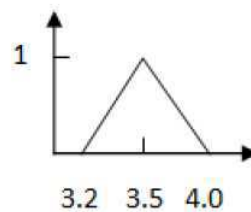
- Nombre réel :

Exemple : 3.5



- Nombre flou :

Exemple : 3.5



**Figure 3.3.** Comparaison entre un nombre réel et un nombre flou

## 3.4 Opérations sur les ensembles flous

Soient  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  deux sous-ensembles flous d'un même référentiel  $E$ .

1-Inclusion :

$$\tilde{A} \subset \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in E \quad (3.12)$$

2-Egalite :

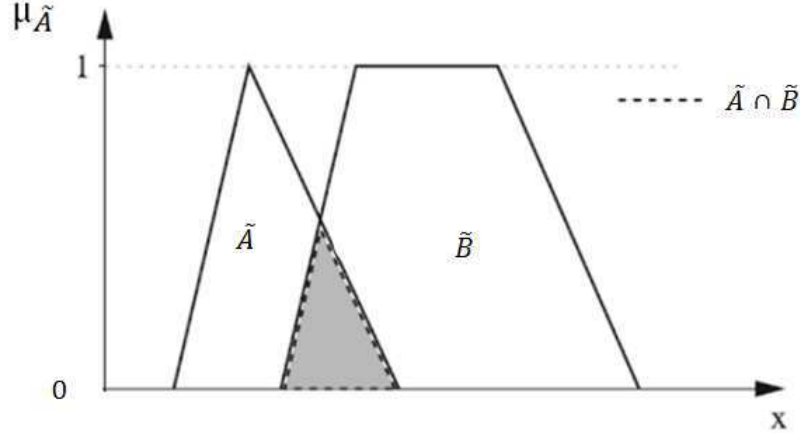
Deux ensembles flous  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sont égaux si :

$$\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in E \quad (3.13)$$

### 3-Intersection :

$\tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{B}}$  est le sous-ensemble flou de E dont la fonction d'appartenance est définie par :

$$\mu_{\tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{B}}}(x) = \min(\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x), \mu_{\tilde{\mathbf{B}}}(x)), \forall x \in E \quad (3.14)$$



**Figure 3.4.** Intersection de deux ensembles flous  $\tilde{\mathbf{A}}$  et  $\tilde{\mathbf{B}}$

### 4-Complémentaire ou négation $\tilde{\tilde{\mathbf{A}}}$

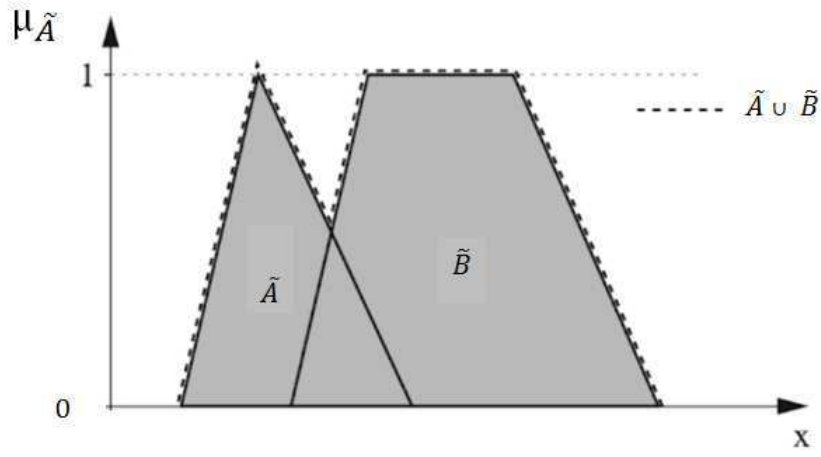
$\tilde{\tilde{\mathbf{A}}}$  est le sous-ensemble flou complémentaire de  $\tilde{\mathbf{A}}$  dont la fonction d'appartenance est donnée par :

$$\mu_{\tilde{\tilde{\mathbf{A}}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x), \forall x \in E \quad (3.15)$$

### 5-Reunion

$\tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}}$  le sous-ensemble flou de E dont la fonction d'appartenance est définie par :

$$\mu_{\tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}}}(x) = \max(\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x), \mu_{\tilde{\mathbf{B}}}(x)), \forall x \in E \quad (3.16)$$



**Figure 3.5.** Union de deux ensembles flous  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$

## 6–Arithmétique floue

Étant donné une opération  $*$  ( $\times, \div, +, -$ ) définie sur les nombre réels  $\mathbb{R}$ , On peut étendre  $(*)$  aux nombres flous  $\tilde{M}$  et  $\tilde{N}$  de fonction d'appartenance respectives

$\mu_{\tilde{M}}$  et  $\mu_{\tilde{N}}$ . On obtient alors le nombre flou suivant  $\tilde{M}(*)\tilde{N}$  dont la fonction d'appartenance est définie par :

$$\mu_{\tilde{M}(*)\tilde{N}}(z) = \sup\{(\min(\mu_{\tilde{M}}(x), \mu_{\tilde{N}}(y)) / z = x * y\} \quad (3.17)$$

### Exemple

Soit  $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$$\tilde{A} = (x_1; 0.3), (x_2; 0.5), (x_3; 1), (x_4; 0.2), (x_5; 0)$$

$$\tilde{B} = (x_1; 0.7), (x_2; 0.2), (x_3; 0.5), (x_4; 0.6), (x_5; 0.3)$$

$$\bar{\tilde{A}} = (x_1; 0.7), (x_2; 0.5), (x_3; 0), (x_4; 0.8), (x_5; 1)$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = (x_1; 0.7), (x_2; 0.5), (x_3; 1), (x_4; 0.6), (x_5; 0.3)$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = (x_1; 0.3), (x_2; 0.2), (x_3; 0.5), (x_4; 0.2), (x_5; 0)$$

## 3.5 Nombres flous de type L-R

### 3.5.1 Définition d'une fonction de référence

Une fonction  $\mathbf{L} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite fonction de référence [7], si elle vérifie les conditions suivantes :

1.  $\mathbf{L}(x) = \mathbf{L}(-x)$  ;  $\mathbf{R}(x) = \mathbf{R}(-x)$  ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
2.  $\mathbf{L}(0) = \mathbf{R}(0) = 1$ .
3.  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{R}$  ne sont pas croissantes sur  $[0, +\infty[$  .

### 3.5.2 Nombre flou de type L-R

Un nombre flou  $\tilde{\mathbf{A}}$  est de type **L-R** [8], si sa fonction d'appartenance  $\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}$  est définie par :

$$\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x) = \begin{cases} \mathbf{L}(\frac{m-x}{\alpha}) & \text{pour } x \leq m; \text{ avec } \alpha > 0 \\ \mathbf{R}(\frac{x-m}{\beta}) & \text{pour } x \geq m; \text{ avec } \beta > 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

où :

$\mathbf{L}$  (Left) et  $\mathbf{R}$  (Right) sont deux fonctions dites de référence à gauche et à droite respectivement du nombre flou  $\tilde{\mathbf{A}}$ .

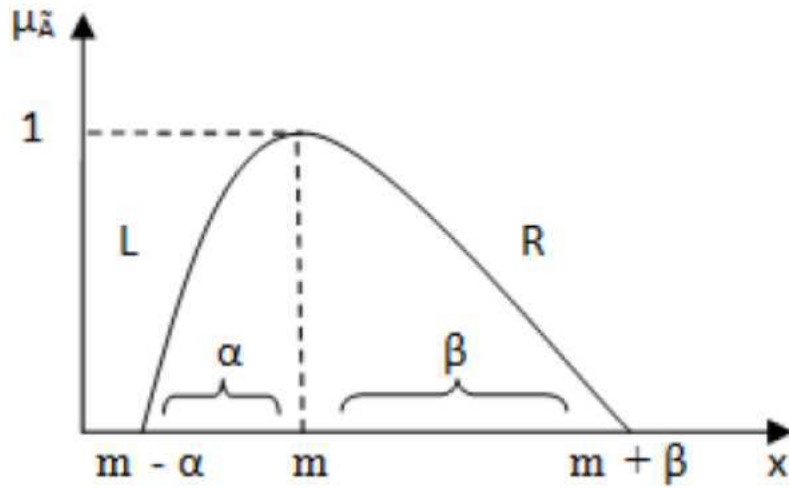
$\alpha$  et  $\beta$  sont les écarts à gauche et à droite de  $\tilde{\mathbf{A}}$  respectivement .

Un nombre flou de type **L-R** est noté par :

$$\tilde{\mathbf{A}} = (m, \alpha, \beta)_{\mathbf{L-R}}$$

où  $\alpha > 0$  est l'écart à gauche de  $\tilde{\mathbf{A}}$ .

et  $\beta > 0$  est l'écart à droite de  $\tilde{\mathbf{A}}$ .



**Figure 3.6.** Représentation d'un nombre flou de type **L – R**

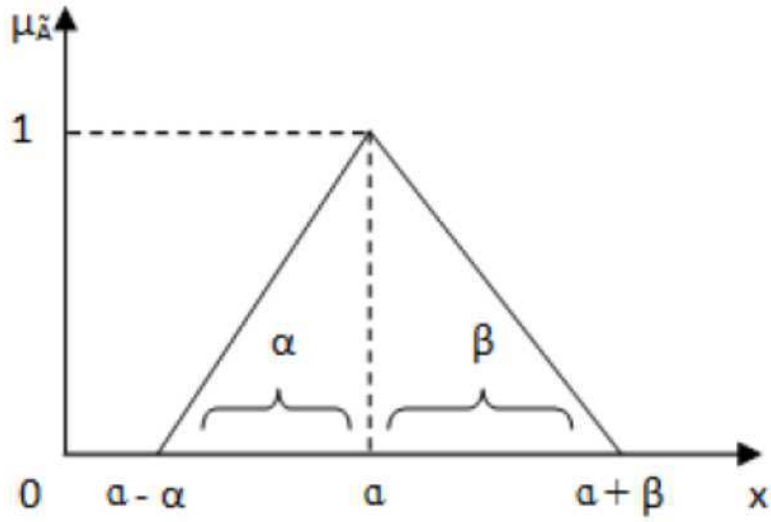
**Remarque 3.2.**

Il existe plusieurs types de nombres flous de type **L-R** lorsque les fonctions de référence **L** et **R** sont linéaires, on parle alors de nombre flou de type triangulaire ou de type trapézoïdal.

### 3.6 Nombre flou de type triangulaire

Un nombre flou  $\tilde{\mathbf{A}}$  est dit de type triangulaire [7] noté  $(a, \alpha, \beta)$  si sa fonction d'appartenance  $\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}$  est donnée par :

$$\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a+\alpha}{\alpha} & si \quad a - \alpha \leq x \leq a \\ 1 & si \quad x = a \\ \frac{a+\beta-x}{\beta} & si \quad a \leq x \leq a + \beta \\ 0 & sinon \end{cases} \quad (3.19)$$



**Figure 3.7.** Représentation d'un nombre flou triangulaire  $(a, \alpha, \beta)$

### 3.6.1 Comparaison et arithmétique de nombres flous triangulaires

Soient deux nombres flous triangulaires  $\tilde{\mathbf{A}} = (a, \alpha_1, \beta_1)$  et  $\tilde{\mathbf{B}} = (b, \alpha_2, \beta_2)$ .

#### Comparaison de deux nombres flous triangulaires [7,8]

1. Un nombre flou triangulaire est non-négatif si et seulement si  $a - \alpha \geq 0$ .
2.  $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{B}} \Leftrightarrow a = b, \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$ .
3.  $\tilde{\mathbf{A}} \leq \tilde{\mathbf{B}} \Leftrightarrow a \leq b, a - \alpha_1 \leq b - \alpha_2, a + \beta_1 \leq b + \beta_2$ .

#### Opérations arithmétiques sur les nombres flous triangulaires [7,8]

##### 1. Addition

Soient deux nombres flous triangulaires  $\tilde{\mathbf{A}} = (a, \alpha_1, \beta_1)$  et  $\tilde{\mathbf{B}} = (b, \alpha_2, \beta_2)$ .

Il vient :

$$\tilde{\mathbf{A}} \oplus \tilde{\mathbf{B}} = (a+b, \alpha_1+\alpha_2, \beta_1 + \beta_2) \quad (3.20)$$

##### 2. Soustraction

Étant donné deux nombres flous triangulaires  $\tilde{\mathbf{A}} = (a, \alpha_1, \beta_1)$  et  $\tilde{\mathbf{B}} = (b, \alpha_2, \beta_2)$ .

Il vient :

$$-\tilde{\mathbf{A}} = -(a, \alpha_1, \beta_1) = (-a, \beta_1, \alpha_1) \quad (3.21)$$

et

$$\tilde{\mathbf{A}} \ominus \tilde{\mathbf{B}} = (a-b, \alpha_1+\beta_2, \beta_1 + \alpha_2) \quad (3.22)$$

### 3. Multiplication scalaire

$$\lambda \odot \tilde{\mathbf{A}} = \begin{cases} (\lambda a, \lambda \alpha_1, \lambda \beta_1) & \text{si } \lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}; \\ (\lambda a, -\lambda \beta_1, -\lambda \alpha_1) & \text{si } \lambda < 0, \lambda \in \mathbb{R}; \end{cases} \quad (3.23)$$

#### Exemple

Soient  $\tilde{\mathbf{A}}=(2,1,3)$  ,  $\tilde{\mathbf{B}}=(-3,2,4)$  deux nombres flous et  $\lambda$  un scalaire tel que :  $\lambda = \begin{cases} 5 & \lambda > 0 \\ -2 & \lambda < 0 \end{cases}$

$$\tilde{\mathbf{A}} \oplus \tilde{\mathbf{B}} = (2, 1, 3) + (-3, 2, 4) = (-1, 3, 7)$$

$$-\tilde{\mathbf{A}} = -(2, 1, 3) = (-2, 3, 1)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} \ominus \tilde{\mathbf{B}} = (2, 1, 3) - (-3, 2, 4) = (5, 5, 5)$$

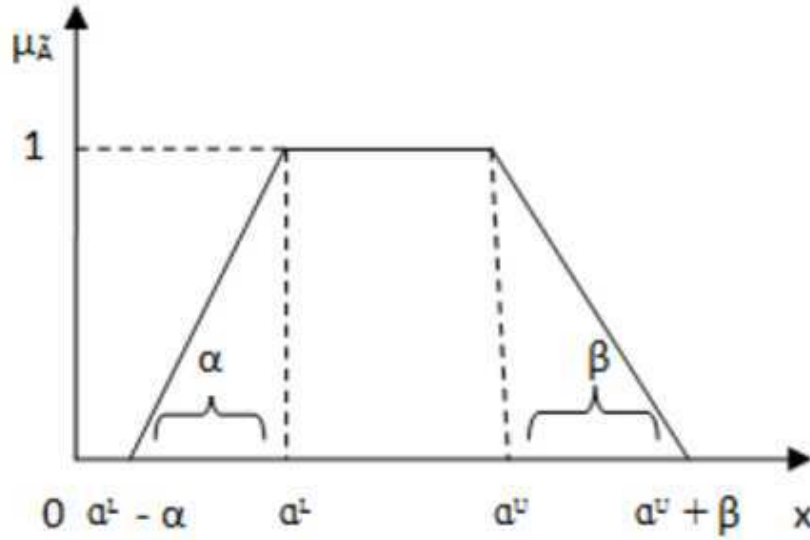
$$\lambda \odot \tilde{\mathbf{A}} = \begin{cases} 5 \otimes (2, 1, 3) = (10, 5, 15) & \lambda > 0 \\ -2 \otimes (2, 1, 3) = (-4, 6, 2) & \lambda < 0 \end{cases}$$

### 3.7 Nombre flou de type trapézoïdal

Un nombre flou  $\tilde{\mathbf{A}}$  est dit de type trapézoïdal [7], si sa fonction d'appartenance est donnée par :

$$\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a^L+\alpha}{\alpha} & \text{si } a^L - \alpha \leq x < a^L \\ 1 & \text{si } a^L \leq x \leq a^U \\ \frac{a^U+\beta-x}{\beta} & \text{si } a^U \leq x \leq a^U + \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.24)$$

Un nombre trapézoïdal est noté par  $(a^L, a^U, \alpha, \beta)$  avec  $a^U > a^L$  et  $\alpha, \beta > 0$ .



**Figure 3.8.** Représentation d'un nombre flou de type trapézoïdal  $(a^L, a^U, \alpha, \beta)$

**Remarque 3.3.**

Si  $a^U = a^L$ , on obtient alors un nombre flou de type triangulaire.

### 3.7.1 Comparaison et arithmétique de nombres flous trapézoïdaux

Soient  $\tilde{\mathbf{A}} = (a^L, a^U, \alpha_1, \beta_1)$  et  $\tilde{\mathbf{B}} = (b^L, b^U, \alpha_2, \beta_2)$  deux nombres flous de type trapézoïdal

#### Comparaison de deux nombres flous trapézoïdaux [7]

1.  $\tilde{\mathbf{A}}$  un nombre flou trapézoïdal est non-négatif si et seulement si  $a^L - \alpha \geq 0$ .
2.  $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{B}} \Leftrightarrow a^L = b^L, a^U = b^U, \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$ .
3.  $\tilde{\mathbf{A}} \leq \tilde{\mathbf{B}} \Leftrightarrow a^L \leq b^L, a^U \leq b^U, a^L - \alpha_1 \leq b^L - \alpha_2, a^U + \beta_1 \leq b^U + \beta_2$ .

#### Opérations arithmétiques sur les nombres flous trapézoïdaux [7]

$\tilde{0} = (0, 0, 0, 0)$  est le nombre flou trapézoïdal nul.

$$\tilde{\mathbf{A}} \oplus \tilde{\mathbf{B}} = (a^L + b^L, a^U + b^U, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2) \quad (3.25)$$

$$-\tilde{\mathbf{A}} = -(a^L, a^U, \alpha_1, \beta_1) = (-a^U, -a^L, \beta_1, \alpha_1) \quad (3.26)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} \ominus \tilde{\mathbf{B}} = (a^L - b^U, a^U + b^L, \alpha_1 + \beta_2, \alpha_2 + \beta_1) \quad (3.27)$$

$$\lambda \odot \tilde{\mathbf{A}} = \begin{cases} (\lambda a^L, \lambda a^U, \lambda \alpha_1, \lambda \beta_1) & \text{si } \lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}; \\ (\lambda a^U, \lambda a^L, -\lambda \beta_1, -\lambda \alpha_1) & \text{si } \lambda < 0, \lambda \in \mathbb{R}; \end{cases} \quad (3.28)$$

### Exemple

Soient  $\tilde{\mathbf{A}} = (-2, 1, 1, 2)$  et  $\tilde{\mathbf{B}} = (2, 4, 1, 1)$  deux nombres flous de type trapézoïdal .

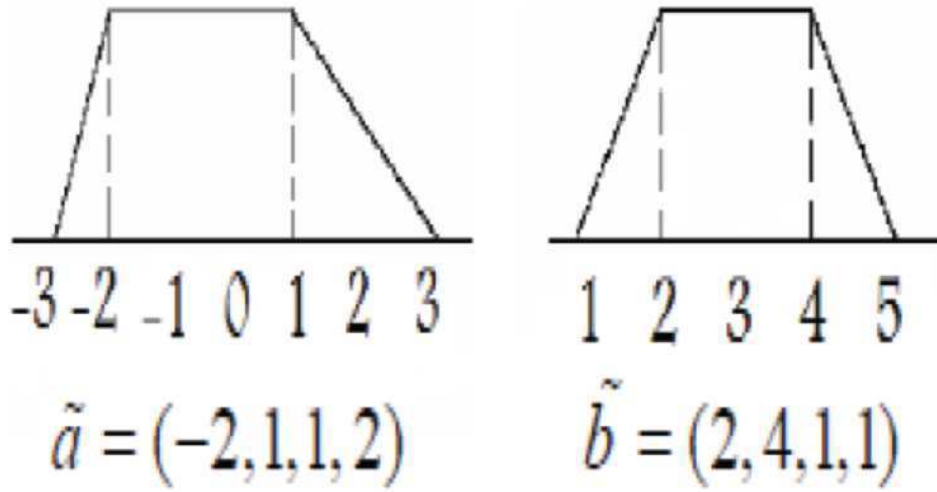
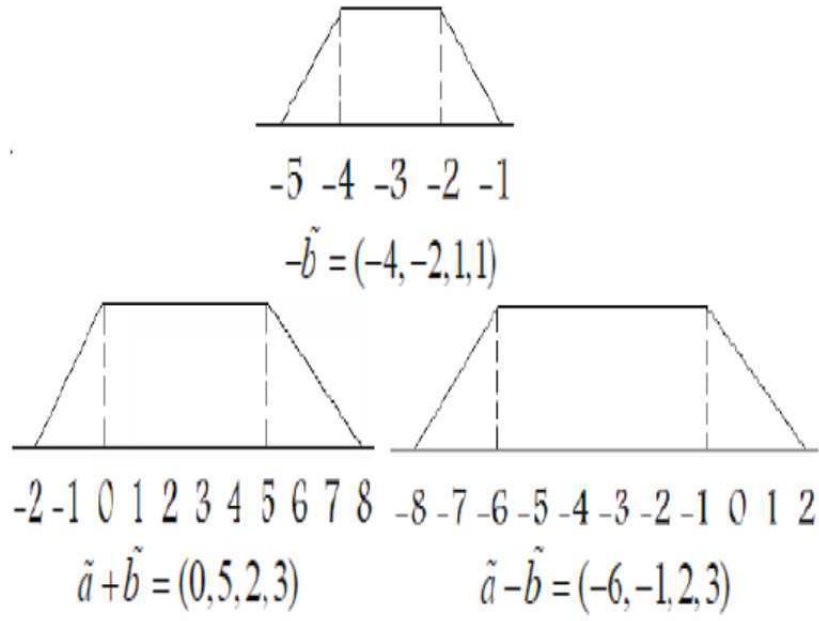


Figure 3.9. Deux nombres flous trapézoïdaux  $\tilde{\mathbf{A}}$  et  $\tilde{\mathbf{B}}$

1.  $-\tilde{\mathbf{B}} = -(2, 4, 1, 1) = (-4, -2, 1, 1)$  .
2.  $\tilde{\mathbf{A}} \oplus \tilde{\mathbf{B}} = (-2, 1, 1, 2) \oplus (2, 4, 1, 1) = (0, 5, 2, 3)$  .
3.  $\tilde{\mathbf{A}} \ominus \tilde{\mathbf{B}} = (-2, 1, 1, 2) \ominus (2, 4, 1, 1) = (-6, -1, 2, 3)$  .
4.  $3 \odot \tilde{\mathbf{A}} = 3 \odot (-2, 1, 1, 2) = (-6, 3, 3, 6)$  .
5.  $-3 \odot \tilde{\mathbf{A}} = -3 \odot (-2, 1, 1, 2) = (-3, 6, 6, 3)$  .

Les résultats de négation, addition et soustraction sont montrés dans la figure suivante :



**Figure 3.10.** Résultats de négation, addition et soustraction de nombres flous trapézoïdaux

### 3.8 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif d'introduire dans un premier temps, les concepts fondamentaux de la théorie des nombres flous puis nous avons introduit l'arithmétique des nombres flous de type **L-R**, en particulier de type trapézoïdal et triangulaire. Dans notre travail, nous nous limiterons exclusivement aux nombres flous trapézoïdaux.

# Chapitre 4

## Programmation Linéaire Fractionnaire Floue

### 4.1 Introduction

En Programmation Linéaire Fractionnaire, les données sont supposées être connues avec précision. Dans le cas où ces dernières sont mal connues ou imprécises de nature floue, nous avons alors un Programme Linéaire Fractionnaire Flou (PF)<sub>(CF)</sub>. Dans ce chapitre, nous allons résoudre un problème de Programmation Linéaire Fractionnaire Floue par la méthode du simplexe flou que nous présenterons en détail dans ce chapitre.

### 4.2 Programme Linéaire Fractionnaire Flou en Variables Réelles

Mathématiquement, un Programme Linéaire Fractionnaire Flou en Variables Réelles et Contraintes Floues [14] se présente comme suit :

$$(PF)_{(CF)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Optimiser } \tilde{Z}(x) = \frac{\tilde{c}^t x + \tilde{c}_0}{\tilde{d}^t x + \tilde{d}_0} \\ s.c \\ \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \leq_{\mathbb{R}} \tilde{b}_i \quad , \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \in \mathbb{R}, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Où : Optimiser : signifie maximiser ou minimiser .

On note :  $S_1 = \{ x \in \mathbb{R}^n ; x \geq 0 ; \tilde{A}x \leq_{\mathbb{R}} \tilde{b} \}$  l'ensemble des solutions réalisables du problème (PF)<sub>(CF)</sub>.

- $\tilde{d}^t x + \tilde{d}_0 \geq_{\mathbb{R}} \tilde{0}, \forall x \in S_1.$
- $\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n)^t, \tilde{d}_1 = (\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_n)^t, \tilde{b} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m)^t$  et  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^t.$
- $\tilde{c}_0$  et  $\tilde{d}_0$  deux nombres flous.

- $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}^L, a_{ij}^U, \alpha_{ij}, \beta_{ij}) \in F(\mathbb{R})$ ,  $\tilde{b}_j = (b_j^L, b_j^U, \gamma_j, \delta_j) \in F(\mathbb{R})$ ,  $\tilde{c}_j = (c_j^L, c_j^U, a_j, b_j) \in F(\mathbb{R})$
  - $\tilde{d}_j = (d_j^L, d_j^U, \eta_j, \theta_j) \in F(\mathbb{R})$ ,  $\tilde{c}_0 = (c_0^L, c_0^U, \nu_j, \omega_j) \in F(\mathbb{R})$  et  $\tilde{d}_0 = (d_0^L, d_0^U, \lambda_j, \mu_j) \in F(\mathbb{R})$
- pour tout  $i = \overline{1, m}$  et  $j = \overline{1, n}$ .

—  $F(\mathbb{R})$  représente l'ensemble des nombres flous trapézoïdaux.

### 4.3 Transformation des contraintes du problème $(PF)_{(CF)}$ flous en contraintes déterministes

Afin de résoudre le problème linéaire fractionnaire flou, il faut transformer les contraintes du problème  $(PF)_{(CF)}$  en contraintes déterministes, à l'aide de la Fonction Ranking  $\mathfrak{R}$ .

#### 4.3.1 Fonction Ranking $\mathfrak{R}$

Une approche efficace pour comparer les nombres flous est l'utilisation des fonctions Ranking ou fonctions de classement. Une fonction Ranking  $\mathfrak{R}$  est définie de l'ensemble des nombres flous trapézoïdaux  $F(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$  ( $\mathfrak{R} : F(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ) [19]. Différents types de fonctions Ranking  $\mathfrak{R}$  ont été introduits et certains ont été utilisés pour résoudre des problèmes de programmation linéaire avec des paramètres flous.

#### Proposition 4.1. [19]

Soient  $\tilde{a}$  et  $\tilde{b}$  deux nombres flous trapézoïdaux, on définit un ordre sur  $F(\mathbb{R})$  comme suit :

1. On dit que  $\tilde{a} \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{b}$  si et seulement si  $\mathfrak{R}(\tilde{a}) \geq \mathfrak{R}(\tilde{b})$ ,
2. On dit que  $\tilde{a} \underset{\mathfrak{R}}{>} \tilde{b}$  si et seulement si  $\mathfrak{R}(\tilde{a}) > \mathfrak{R}(\tilde{b})$ ,
3. On dit que  $\tilde{a} \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{b}$  si et seulement si  $\mathfrak{R}(\tilde{a}) = \mathfrak{R}(\tilde{b})$ .

#### Lemme 4.1. [19]

Soient  $\tilde{a}$  et  $\tilde{b}$  deux nombres flous trapézoïdaux dans  $F(\mathbb{R})$  et soit  $\mathfrak{R}$  une fonction Ranking. Alors :

1.  $\tilde{a} \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{b} \iff \tilde{b} \underset{\mathfrak{R}}{\leq} \tilde{a}$ ,
2.  $\tilde{a} \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{b} \iff \tilde{a} - \tilde{b} \underset{\mathfrak{R}}{\geq} 0 \iff -\tilde{b} \underset{\mathfrak{R}}{\geq} -\tilde{a}$ ,
3. Si  $\tilde{a} \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{b}$  et  $\tilde{c} \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{d}$  Alors  $\tilde{a} + \tilde{c} \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{b} + \tilde{d}$ ,
4.  $\mathfrak{R}(k \tilde{a} + \tilde{c}) = k \mathfrak{R}(\tilde{a}) + \mathfrak{R}(\tilde{c})$  pour tout  $\tilde{a}, \tilde{c} \in F(\mathbb{R})$  et tout  $k \in \mathbb{R}$  ( $\mathfrak{R}$  est linéaire).

**Remarque 4.1.**

Comme suggestion d'une fonction linéaire Ranking  $\Re$  d'un nombre flou trapézoïdal  $\tilde{a} = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$  où  $\tilde{a} \in F(\mathbb{R})$  est :

$$\Re(\tilde{a}) = a^L + a^U + \frac{1}{2} (\beta - \alpha) \quad (4.2)$$

Ainsi, en utilisant (4.1) pour des nombres flous trapézoïdaux  $\tilde{a} = (a^L, a^U, \alpha_1, \beta_1)$  et  $\tilde{b} = (b^L, b^U, \alpha_2, \beta_2)$ , on a donc :

$$\tilde{a} \underset{\Re}{\geq} \tilde{b} \iff a^L + a^U + \frac{1}{2} (\beta_1 - \alpha_1) \geq b^L + b^U + \frac{1}{2} (\beta_2 - \alpha_2) \quad (4.3)$$

**Théorème 4.1.**

Le problème Linéaire Fractionnaire à Contraintes Floues  $(PF)_{(CF)}$  et le problème suivant sont équivalents :

$$(PF)_{(CD)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Optimiser } \tilde{Z}(x) = \frac{\tilde{c}^t x + \tilde{c}_0}{\tilde{d}^t x + \tilde{d}_0} \\ s.c \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad , \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \in \mathbb{R}, \quad x_j \geq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (4.4)$$

où :  $(PF)_{(CD)}$  représente un problème linéaire Fractionnaire à Contraintes Déterministes.

**Preuve [1]**

$S_2$  l'ensemble des solutions réalisables du problème  $(PF)_{(CD)}$  :

$$S_2 = \{ x \in \mathbb{R}^n ; x \geq 0 ; Ax \leq b \}.$$

Montrons que :  $S_1 = S_2$

$$\text{Soit } x \in S_1 \iff \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \cdot x_j \underset{\Re}{\leq} \tilde{b}_i \quad , \quad i = \overline{1, m}$$

$$\iff \sum_{j=1}^n (a_{ij}^L, a_{ij}^U, \alpha_{ij}, \beta_{ij}) \cdot x_j \underset{\Re}{\leq} (b_i^L, b_i^U, \alpha_i, \beta_i) \quad , \quad i = \overline{1, m}$$

$$\iff \left\{ \sum_{j=1}^n x_j \cdot a_{ij}^L, \sum_{j=1}^n x_j \cdot a_{ij}^U, \sum_{j=1}^n x_j \cdot \beta_{ij}, \sum_{j=1}^n x_j \cdot \alpha_{ij} \right\} \underset{\Re}{\leq} (b_i^L, b_i^U, \alpha_i, \beta_i) \quad , \quad i = \overline{1, m}$$

$$\iff \Re \left\{ \sum_{j=1}^n x_j \cdot a_{ij}^L, \sum_{j=1}^n x_j \cdot a_{ij}^U, \sum_{j=1}^n x_j \cdot \beta_{ij}, \sum_{j=1}^n x_j \cdot \alpha_{ij} \right\} \leq \Re(b_i^L, b_i^U, \alpha_i, \beta_i) \quad , \quad i = \overline{1, m}$$

$$\iff \sum_{j=1}^n \{ a_{ij}^L + a_{ij}^U + \frac{1}{2}(\beta_{ij} - \alpha_{ij}) \} x_j \underset{\Re}{\leq} b_i^L + b_i^U + \frac{1}{2}(\beta_i - \alpha_i) \quad , \quad i = \overline{1, m}$$

$$\iff \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \underset{\Re}{\leq} \tilde{b}_i \quad , \quad i = \overline{1, m}$$

$$\iff x \in S_2, \text{ donc : } S_1 = S_2.$$

Comme  $S_1 = S_2$  et que toute solution réalisable optimale de  $(PF)_{(CF)}$  est solution réalisable optimale de  $(PF)_{(CD)}$  donc on conclut que les deux problèmes sont équivalents.

#### Définition 4.1 Solution réalisable [16]

Tout vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  qui satisfait les contraintes c'est à dire  $\{\tilde{A} x \stackrel{\mathfrak{R}}{=} b \text{ et } x \geq 0\}$ , est une solution réalisable du problème  $(PF)_{(CF)}$ .

#### Définition 4.2 Solution réalisable optimale [16]

Soit :  $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n ; x \geq 0 / \tilde{A} x \stackrel{\mathfrak{R}}{=} \tilde{b}\}$  l'ensemble des solutions réalisables du problème  $(PF)_{(CF)}$ .

On dit que  $x^* \in S$  est une solution réalisable optimale pour le problème  $(PF)_{(CF)}$  si :

$$\frac{\tilde{c}^t x^* + \tilde{c}_0}{\tilde{d}^t x^* + \tilde{d}_0} \stackrel{\mathfrak{R}}{>} \frac{\tilde{c}^t x + \tilde{c}_0}{\tilde{d}^t x + \tilde{d}_0}, \text{ pour tout } x \in S \quad (4.5)$$

Dans le cas d'une fonction objectif à maximiser.

#### Définition 4.3.

On dit que le nombre réel  $a$  correspond au nombre flou  $\tilde{a}$  par rapport à une fonction Ranking linéaire  $\mathfrak{R}$  donnée, si :

$$a = \mathfrak{R}(\tilde{a}) \quad (4.6)$$

### 4.3.2 Solution de base réalisable

Considérons le système de contraintes d'un problème  $(PF)_{(CF)}$  sous la forme standard suivante :

$$(PF)_{(CF)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Optimiser } \tilde{Z}(x) \stackrel{\mathfrak{R}}{=} \frac{\tilde{c}^t x + \tilde{c}_0}{\tilde{d}^t x + \tilde{d}_0} \\ \text{s.c} \\ \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \stackrel{\mathfrak{R}}{\leq} \tilde{b}_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \in \mathbb{R}, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (4.7)$$

On note :  $A = [a_{ij}] = [\mathfrak{R}(\tilde{a}_{ij})] = \mathfrak{R}(\tilde{A})$ ,  $\forall i = \overline{1, m}$  et  $\forall j = \overline{1, n}$ .

Supposons que :  $\text{rang}(A) = m$ , la matrice  $A$  peut s'écrire :  $A = [B, N]$ .

où :

B est une matrice carrée inversible de taille m donc  $\text{rang}(B) = m$ , appelée matrice de base, correspondante aux variables de base  $x_B$ .

Et N est une matrice de taille  $(m \times (n-m))$ , appelée matrice hors base, correspondante aux variables hors base  $x_N$ .

On peut décomposer également le vecteur de décision  $x$  tel que :  $x = (x_B, x_N)^t$ .

#### Définition 4.4 Ensemble des indices de base [16,18]

Soit  $R \subset \{1...n\}$  un ensemble d'indices avec  $\text{card}(R) = m$  tel que les colonnes  $a_j$ , ( $j \in R$ ), de A sont linéairement indépendantes.

Autrement dit, la matrice carrée B formée des colonnes  $a_j$ , ( $j \in R$ ), est inversible. On dit alors que l'ensemble R des indices est une base,

- Les variables  $x_B = (x_j, j \in R)$  sont appelées variables de base,
- Les variables  $x_N = (x_j, j \notin R)$  sont appelées variables hors-base,

#### Définition 4.5 Solution de base réalisable

On dit que  $x = (x_B, x_N)^t$  est une solution de base associée à la base B si elle vérifie :

$\tilde{A}x =_{\mathbb{R}} \tilde{b}$  avec  $x_B = B^{-1}b$  et  $x_N = 0$ , tels que :  $b = \mathfrak{R}(\tilde{b})$  et  $B^{-1}$  la matrice inverse de la matrice B.

Si, en plus,  $x_B \geq 0$ , alors  $x_B$  est une solution de base réalisable .

#### Définition 4.6 Solution dégénérée et non dégénérée [10]

Si  $x_B > 0$ , Alors  $x = (x_B, x_N)^t$  est appelée solution de base réalisable non-dégénérée.

Si au moins une composante de  $x_B$  est nulle, Alors  $x = (x_B, x_N)^t$  est appelée solution de base réalisable dégénérée.

### 4.3.3 Méthode du Simplexe Flou pour la résolution d'un Problème Linéaire Fractionnaire Flou en Variables Réelles

Le Problème Linéaire Fractionnaire Flou en Variable Floues  $(PF)_{(CF)}$  mis sous la forme standard s'écrit par :

$$(PF)_{(CF)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Optimiser } \tilde{Z}(x) =_{\mathbb{R}} \frac{\tilde{c}^t x + \tilde{c}_0}{\tilde{d}^t x + \tilde{d}_0} =_{\mathbb{R}} \frac{(\tilde{c}_B^t x_B + \tilde{c}_N^t x_N) + \tilde{c}_0}{(\tilde{d}_B^t x_B + \tilde{d}_N^t x_N) + \tilde{d}_0} \\ s.c \\ \sum_{j=1}^n \tilde{A}x =_{\mathbb{R}} \tilde{b} \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad x \geq 0 \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Avec  $\tilde{d}^t x + \tilde{d}_0 \underset{\mathbb{R}}{>} 0$ ,  $\forall x \in S_1$ .

La méthode du simplexe flou [14] consiste à trouver une nouvelle base  $B^*$  et une meilleure solution de base  $x^*$  associée telle que :

$$\frac{\tilde{c}^t x^* + \tilde{c}_0}{\tilde{d}^t x^* + \tilde{d}_0} \underset{\mathbb{R}}{>} \frac{\tilde{c}^t x + \tilde{c}_0}{\tilde{d}^t x + \tilde{d}_0}, \text{ pour toute les solutions réalisables.} \quad (4.9)$$

Dans le cas d'une fonction objectif à maximiser.

Cette méthode converge vers un nombre finie d'itérations, telle que chaque itération consiste à faire rentrer une variable hors-base dans la nouvelle base appelée variable entrante et faire sortir à la place une variable de base appelée variable sortante, jusqu'à trouver une solution optimale ou pas de solutions ou infinité de solutions.

### Détermination d'une solution initiale [14]

La décomposition de A et x donne :

$$A = [B, N] \text{ et } x = (x_B, x_N)^t$$

L'expression  $A.x = b$  peut alors s'écrire :

$$A.x = [B, N] \cdot (x_B, x_N) = b$$

$$\Rightarrow A.x = B.x_B + N.x_N = b \quad (4.10)$$

On multiplie l'expression (4.13) par  $B^{-1}$ , l'inverse de la matrice B.

On obtient :

$$B^{-1}.B.x_B + B^{-1}.N.x_N = B^{-1}.b$$

Avec  $B^{-1}.B = I$  (identité d'ordre m)

$$D'où : x_B + B^{-1}.N.x_N = B^{-1}.b \quad (4.11)$$

— En annulant  $x_N$ , la solution de base réalisable est alors

$$x_B = B^{-1}.b$$

— On obtient une solution de base réalisable de départ si :

$$x = (x_B, x_N)^t, \text{ Avec } x_B > 0 \text{ et } x_N = 0.$$

(la matrice B est toujours constituée à partir des colonnes de la matrice A).

### Amélioration du solution réalisable [14]

Soit :  $x = (x_B, x_N)^t$  solution initiale réalisable, supposons que le rang (B) = m

**Calcul des nombres flous suivants :**

$$\widetilde{Z}^1 = \widetilde{c}_B^t x_B + \widetilde{c}_0 \quad \text{et} \quad \widetilde{Z}^2 = \widetilde{d}_B^t x_B + \widetilde{d}_0$$

où :

$\widetilde{c}_B^t$  et  $\widetilde{d}_B^t$  sont deux vecteurs flous associés aux variables de base dans le numérateur et le dénominateur de la fonction objectif respectivement.

**Calcul du vecteur potentiel**

$$y_j = B^{-1} \cdot a_j \quad (B^{-1} \text{ la matrice inversible de la matrice } B)$$

$$\widetilde{Z}_j^1 = \widetilde{c}_B^t y_j \quad \text{et} \quad \widetilde{Z}_j^2 = \widetilde{d}_B^t y_j \quad \text{sont connus pour chaque colonne } a_j \text{ de la matrice } A.$$

Examiner la possibilité de trouver une autre solution de base réalisable  $x^*$  meilleure que  $x$  et une valeur améliorée de  $\widetilde{Z} = \frac{\widetilde{Z}^1}{\widetilde{Z}^2}$ .

Soit  $x = (x_B, x_N)^t$  la solution initiale réalisable du problème, tel que :  $x_B = B^{-1} \cdot b$  et  $x_N = 0$ .

Si la solution initiale de base réalisable n'est pas optimale  $x = (x_B, x_N)^t$ , on cherche une nouvelle matrice de base  $B^*$  associée à une nouvelle solution de base réalisable  $x^* = (x_B^*, x_N^*)^t$  et une valeur améliorée de la fonction objectif  $\widetilde{Z} = \frac{\widetilde{Z}^1}{\widetilde{Z}^2}$ .

On a :  $x^* = (x_B^*, x_N^*)^t$  la nouvelle solution de base réalisable tel que :  $B^* x_B^* = b$  et  $x_N^* = 0$ .

On note :  $B^* = (B_1^*, \dots, B_m^*)$  la nouvelle matrice de base obtenue de la matrice de base  $B$ , enlèvent un de sa colonne posons  $B_r$  et en remplaçant par  $a_j$  correspond à la variable  $x_l$ , les colonnes de la nouvelle matrice de base  $B^*$  sont donnés par :

$$B_i^* = B_i^* \quad (i \neq r) \quad \text{et} \quad B_r^* = a_j$$

On obtient la nouvelle valeur des nouvelles variables de base de terme original

$$x_{B_i}^* = x_{B_i} - x_{B_r} (y_{ij} / y_{rj}), \quad (i \neq r)$$

$$x_{B_r}^* = x_{B_r} / y_{rj} = \theta$$

$$\text{où : } a_j = \sum_{i=1}^m y_{ij} B_i$$

La valeur de la fonction objectif améliorée est :  $\tilde{\tilde{Z}} = \frac{\tilde{\tilde{Z}}^1}{\tilde{\tilde{Z}}^2}$ .

On pose :  $\tilde{\tilde{Z}}^1 = \tilde{Z}^1 + \theta (\tilde{c}_j - \tilde{Z}_j^1)$  et  $\tilde{\tilde{Z}}^2 = \tilde{Z}^2 + \theta (\tilde{c}_j - \tilde{Z}_j^2)$   
où :

$\tilde{Z}_j^1$  et  $\tilde{Z}_j^2$  correspond à la solution initiale de base réalisable .

Dans le cas d'une fonction objectif à maximiser.

La valeur de la fonction objectif est améliorée si :  $\tilde{\tilde{Z}} > \tilde{Z}$

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{Z}} > \tilde{Z} &\Rightarrow \frac{\tilde{\tilde{Z}}^1}{\tilde{\tilde{Z}}^2} > \tilde{Z} \\ &\Rightarrow \frac{\tilde{Z}^1 + \theta (\tilde{c}_j - \tilde{Z}_j^1)}{\tilde{Z}^2 + \theta (\tilde{c}_j - \tilde{Z}_j^2)} > \frac{\tilde{Z}^1}{\tilde{Z}^2} \\ &\Rightarrow \frac{\tilde{Z}^1 + \theta (\tilde{c}_j - \tilde{Z}_j^1)}{\tilde{Z}^2 + \theta (\tilde{c}_j - \tilde{Z}_j^2)} - \frac{\tilde{Z}^1}{\tilde{Z}^2} > 0 \\ &\Rightarrow \tilde{Z}^2 (\tilde{Z}^1 + \theta (\tilde{c}_j - \tilde{Z}_j^1)) - \tilde{Z}^1 (\tilde{Z}^2 + \theta (\tilde{c}_j - \tilde{Z}_j^2)) > 0 \end{aligned}$$

$\tilde{\tilde{Z}}^2 > 0$  et  $\tilde{\tilde{Z}}^2 > 0$ , car le dénominateur de la fonction objectif est positif pour toutes les solutions réalisables .

$\theta > 0$  pour le cas non-dégénéré. Si  $\theta = 0$ , Alors  $\tilde{\tilde{Z}} = \tilde{Z}$ .

d'où :

$$\begin{aligned} \tilde{Z}^2 (\tilde{c}_j - \tilde{Z}_j^1) - \tilde{Z}^1 (\tilde{c}_j - \tilde{Z}_j^2) &> 0 \\ \text{donc : } \tilde{Z}^2 (\tilde{Z}_j^1 - \tilde{c}_j) - \tilde{Z}^1 (\tilde{Z}_j^2 - \tilde{d}_j) &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

— Soit :  $\tilde{E}_j = \tilde{Z}^2 (\tilde{Z}_j^1 - \tilde{c}_j) - \tilde{Z}^1 (\tilde{Z}_j^2 - \tilde{d}_j) \leq 0$ .

Nous avons  $\tilde{E}_j \leq 0$  si :

Cas 1 :  $\tilde{Z}_j^2 - \tilde{d}_j > 0$  et  $(\tilde{Z}_j^1 - \tilde{c}_j) / (\tilde{Z}_j^2 - \tilde{d}_j) \leq \tilde{Z}^1 / \tilde{Z}^2$ .

Cas 2 :  $\tilde{Z}_j^2 - \tilde{d}_j \leq 0$  et  $(\tilde{Z}_j^1 - \tilde{c}_j) / (\tilde{Z}_j^2 - \tilde{d}_j) > \tilde{Z}^1 / \tilde{Z}^2$ .

— Nous concluons que, si  $\tilde{E}_j \leq 0$  et si  $y_{ij} > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), alors il est possible d'obtenir une nouvelle matrice de base  $B^*$  et une nouvelle solution de base réalisable  $x^*$  associée, en remplaçant l'une des colonnes de la matrice  $B$  par  $a_j$ , donc la valeur de la fonction objectif  $\tilde{\tilde{Z}}$  est vérifiée :  $\tilde{\tilde{Z}} > \tilde{Z}$ . Mais, on a :  $y_{ij} < 0$  ( $\tilde{E}_j = 0$ ), alors le problème  $(PF)_{(CF)}$  admet une infinité de solutions optimales.

**Théorème 4.2.**

Si dans un tableau du simplexe, s'il existe un :  $\tilde{E}_l = \tilde{Z}^2 (Z_l^1 - c_l) - \tilde{Z}^1 (Z_l^2 - d_l) \underset{\Re}{<} \tilde{0}$ , et il existe un indice de base i tel que  $y_{il} > 0$ , alors une variable  $\tilde{x}_l$  entre dans la nouvelle base  $B^*$ .

**Détermination de la variable entrante**

— Problème à minimum :

$$E_l = \max_{E_j \geq 0} E_j, j \in j_N \quad (4.13)$$

— Problème à maximum :

$$E_l = \min_{E_j \leq 0} E_j, j \in j_N \quad (4.14)$$

La variable correspondante à l'indice l est la variable  $x_l$  entrante dans la nouvelle base  $B^*$ .

**Détermination de la variable sortante**

Pour que la nouvelle base soit admissible, il faut que  $x_j \geq 0 \forall j \in J_B$ , si  $y_{il} > 0$  :

$$\theta_r = \frac{x_{B_r}}{y_{rl}} = \min_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{x_{B_i}}{y_{il}}, y_{il} > 0 \right\} \quad (4.15)$$

la variable correspondante à l'indice r est la variable  $x_r$  sortante de la base .

**Critère d'optimalité****Théorème 4.3.**

Si pour la base B tous les  $E_j \geq 0$  ( $E_j \leq 0$ ) ,  $\forall j$ , alors la solution de base correspondante réalise le maximum (minimum) de la fonction objectif.

**Critère d'optimalité pour le cas où la solution est infinie****Théorème 4.4.**

Si pour un problème à maximum (minimum),  $\exists l \in J_B$  tel que  $E_l > 0$  ( $E_l < 0$ ) et  $y_{il} \leq 0$ ,  $\forall i$ , alors la solution du problème est infinie.

**4.3.4 Procédure de l'algorithme du simplexe flou**

Dans le cas d'une fonction objectif à maximiser.

**Étape initiale**

Poser  $x_N = 0$  et déterminer la solution de base réalisable initiale  $x$  donnée par  $x = (x_B, x_N)^t$ , avec  $x_B = B^{-1}b$  et la valeur de la fonction objectif est :  $\tilde{Z} = \frac{\tilde{Z}^1}{\tilde{Z}^2}$ .

## Étape principale

1. Calculer les  $\tilde{E}_j = \tilde{Z}^2(\tilde{Z}_j^1 - \tilde{c}_j) - \tilde{Z}^1(\tilde{Z}_j^2 - \tilde{d}_j)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , pour toutes les variables hors base.

— Si tous les  $\tilde{E}_j \geq 0$ ,  $1 \leq j \leq n$ , alors Stop. La solution actuelle  $x = (x_B, x_N)^t$  est la solution réalisable optimale.

— Sinon, choisir la variable entrante :

$$E_l = \min_{E_j \leq 0} E_j, j \in j_N. (\text{variable entrante } x_k).$$

2. Calculer  $y_{ij} = B^{-1}a_j$ .

Si  $y_{il} < 0$  alors Stop ; le problème a une solution infinie.

Sinon, choisir la variable qui doit quitter la base :

$$\theta r = \frac{x_{B_r}}{y_{rl}} = \min_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{x_{B_i}}{y_{il}}, y_{il} > 0 \right\}.$$

3. Pivoter sur  $y_{il}$  et mettre à jour le tableau du simplexe flu. Passez à l'étape (2).

### 4.3.5 Tableau de la méthode du simplexe flu pour résoudre le problème (PF)<sub>(CF)</sub>

Comme nous l'avons vu précédemment, nous devons, à chaque itération, déterminer les quantités suivantes :

$$\tilde{Z}^1 = \tilde{c}_B^t x_B + \tilde{c}_0, \tilde{Z}^2 = \tilde{d}_B^t x_B + \tilde{d}_0, \tilde{Z} = \frac{\tilde{Z}^1}{\tilde{Z}^2} \text{ et } \tilde{E}_j = \tilde{Z}^2(\tilde{Z}_j^1 - \tilde{c}_j) - \tilde{Z}^1(\tilde{Z}_j^2 - \tilde{d}_j)$$

Les différentes procédures ont été élaborées pour effectuer une mise à jour de ces quantités.

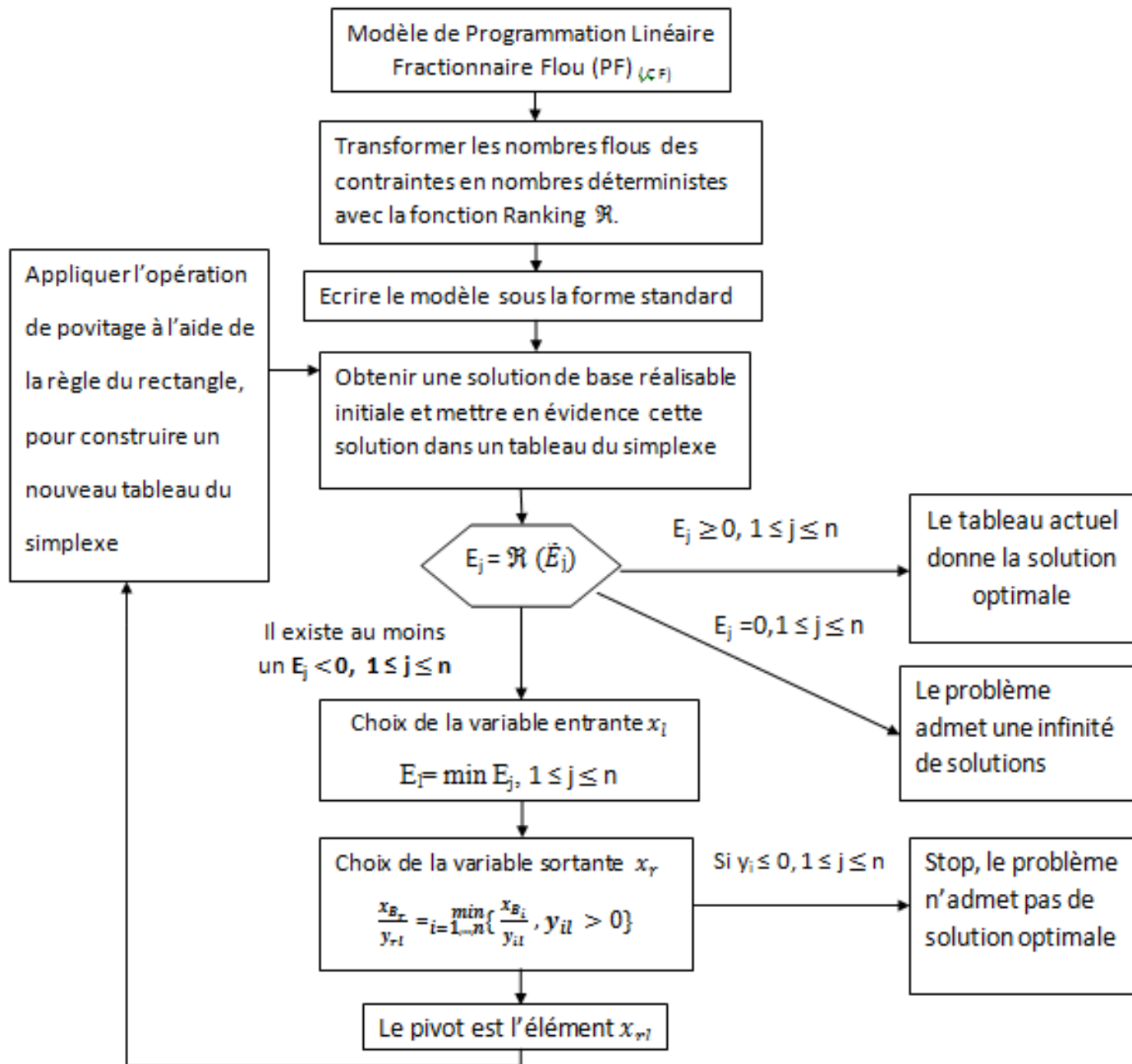
On peut structurer toute cette information dans un tableau, dit tableau du simplexe flu.

On réécrit les expressions matricielles, ci-dessus, sous forme d'un tableau, comme suit :

|                               |                          |                      |               |       |     |               |
|-------------------------------|--------------------------|----------------------|---------------|-------|-----|---------------|
| $\tilde{c}_j \rightarrow$     |                          |                      | $\tilde{c}_1$ | .     | ... | $\tilde{c}_n$ |
| $\tilde{d}_j \rightarrow$     |                          |                      | $\tilde{d}_1$ | .     | ... | $\tilde{d}_n$ |
| $\tilde{d}_B$                 | $\tilde{c}_B$            | $x_B$                | $x_1$         | $x_2$ | ... | $x_n$         |
| $\tilde{0}$                   | $\tilde{0}$              | $x_{B_1}$            | 1             | .     | ... | 0             |
| $\tilde{0}$                   | $\tilde{0}$              | $x_{B_2}$            | .             | .     | ... | .             |
| .                             | .                        | .                    | .             | .     | ... | .             |
| $\tilde{0}$                   | $\tilde{0}$              | $x_{B_m}$            | 0             | .     | ... | 1             |
| $Z^2 = \Re(\tilde{Z}^2)$      | $Z^1 = \Re(\tilde{Z}^1)$ | $Z = \Re(\tilde{Z})$ | .             | .     | ... | .             |
| $\tilde{Z}_j^1 - \tilde{c}_j$ |                          |                      | .             | .     | ... | .             |
| $\tilde{Z}_j^2 - \tilde{d}_j$ |                          |                      | .             | .     | ... | .             |
| $\tilde{E}_j$                 |                          |                      | .             | .     | ... | .             |
| $E_j = \Re(\tilde{E}_j)$      |                          |                      | .             | .     | ... | .             |

Tableau de la méthode du simplexe flu

#### 4.3.6 Organigramme de l'algorithme de la méthode du simplexe flou pour résoudre le problème $(PF)_{(CF)}$ (maximisation)



Organigramme de la méthode du simplexe flou

## Exemple Numérique

Soit à résoudre le problème linéaire fractionnaire flou suivant  $(PF)_{(CF)}$  en utilisant la méthode du simplexe flou :

$$(PF)_{(CF)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } \tilde{Z}(x) = \frac{(5, 8, 2, 5) x_1 + (3, 5, 1, 2) x_2}{\Re (5, 8, 2, 5) x_1 + (2, 4, 1, 2) x_2 + (1, 2, 1, 1)} \\ s.c \\ (1, 2, 1, 1) x_1 + (2, 3, 1, 1) x_2 \leq_{\Re} (5, 8, 2, 6) \\ (2, 3, 1, 1) x_1 + (1, 1, 1, 1) x_2 \leq_{\Re} (4, 5, 1, 3) \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}; x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

On remarque que chaque nombre flou utilisé dans le problème ci-dessus est un nombre flou trapézoïdal.

En appliquant la fonction Rankinng linéaire  $\Re$  aux coefficients flous des contraintes du problème  $(PF)_{(CF)}$  d'après le Lemme (4.1), ce dernier problème s'écrit :

$$(PF)_{(CD)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } \tilde{Z}(x) = \frac{(5, 8, 2, 5) x_1 + (3, 5, 1, 2) x_2}{\Re (5, 8, 2, 5) x_1 + (2, 4, 1, 2) x_2 + (1, 2, 1, 1)} \\ s.c \\ \Re(1, 2, 1, 1) x_1 + \Re(2, 3, 1, 1) x_2 \leq \Re(5, 8, 2, 6) \\ \Re(2, 3, 1, 1) x_1 + \Re(1, 1, 1, 1) x_2 \leq \Re(4, 5, 1, 3) \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}; x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Avec  $\Re(\tilde{a}) = a^L + a^U + \frac{1}{2}(\beta_1 - \alpha_1)$  où  $\tilde{a} = (a^L, a^U, \alpha_1, \beta_1)$ .

$$(PF)_{(CD)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } \tilde{Z}(x) \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2 \end{array} \right.$$

Le problème  $(PF)_{(CD)}$  sous la forme standard devient :

$$(PF)_{(CD)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } \tilde{Z}(x) \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right.$$

où :

$x_3$  et  $x_4$  sont des variables d'écart.

# Tableau 1 du simplexe flou

## Itération 1

|                                   |                                   |                               |                |              |             |             |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|----------------|--------------|-------------|-------------|
| $\tilde{c}_j \rightarrow$         |                                   |                               | (5,8,2,5)      | (3,5,1,2)    | $\tilde{0}$ | $\tilde{0}$ |
| $\tilde{d}_j \rightarrow$         |                                   |                               | (5,8,2,5)      | (2,4,1,2)    | $\tilde{0}$ | $\tilde{0}$ |
| $\tilde{d}_B$                     | $\tilde{c}_B$                     | $x_B$                         | $x_1$          | $x_2$        | $x_3$       | $x_4$       |
| $\tilde{0}$                       | $\tilde{0}$                       | $x_3 = 15$                    | 3              | 5            | 1           | 0           |
| $\tilde{0}$                       | $\tilde{0}$                       | $x_4 = 10$                    | 5              | 2            | 0           | 1           |
| $Z^2 = \Re(\tilde{Z}^2)$<br>$= 3$ | $Z^1 = \Re(\tilde{Z}^1)$<br>$= 0$ | $Z = \Re(\tilde{Z})$<br>$= 0$ |                |              |             |             |
| $\tilde{Z}_j^1 - \tilde{c}_j$     |                                   |                               | (-8,-5,5,2)    | (-5,-3,2,1)  | $\tilde{0}$ | $\tilde{0}$ |
| $\tilde{Z}_j^2 - \tilde{d}_j$     |                                   |                               | (-8,-5,5,2)    | (-4,2,2,1)   | $\tilde{0}$ | $\tilde{0}$ |
| $\tilde{E}_j$                     |                                   |                               | (-24,-15,15,6) | (-15,-9,6,3) | $\tilde{0}$ | $\tilde{0}$ |
| $E_j = \Re(\tilde{E}_j)$          |                                   |                               | -43.5          | -25.5        | 0           | 0           |

En appliquant la formule :

$$\tilde{E}_j = \tilde{Z}^2 (\tilde{Z}_j^1 - \tilde{c}_j) - \tilde{Z}^1 (\tilde{Z}_j^2 - \tilde{d}_j)$$

et  $J_N = \{1, 2\}$  après calcul, nous obtenons :

$$\tilde{E}_1 = (-24, -15, 15, 6)$$

$$\text{et } \tilde{E}_2 = (-15, -9, 6, 3)$$

comme  $J_B = \{3, 4\}$  donc  $\tilde{E}_3 = \tilde{0}$  et  $\tilde{E}_4 = \tilde{0}$ .

Puisque  $(E_1, E_2) = (\Re(\tilde{E}_1), \Re(\tilde{E}_2)) = (-43.5, -25.5)$ ,

Donc :  $E_1 = \min_{j=1,2} \tilde{E}_j$ , alors la variable  $x_1$  entre dans la base .

Et  $\frac{x_{B_4}}{y_{4l}} = \min_{i=3,4} \{ \frac{x_{B_l}}{y_{il}}, y_{il} > 0 \} = \frac{1}{2}$ , alors la variable  $x_4$  sort de la base .

## Tableau 2 du simplexe flou

### Itération 2

|                                    |                                    |                                           |             |                                                                 |             |                                                                |
|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------------|-------------|-----------------------------------------------------------------|-------------|----------------------------------------------------------------|
| $\tilde{c}_j \rightarrow$          |                                    |                                           | (5,8,2,5)   | (3,5,1,2)                                                       | $\tilde{0}$ | $\tilde{0}$                                                    |
| $\tilde{d}_j \rightarrow$          |                                    |                                           | (5,8,2,5)   | (2,4,1,2)                                                       | $\tilde{0}$ | $\tilde{0}$                                                    |
| $\tilde{d}_B$                      | $\tilde{c}_B$                      | $x_B$                                     | $x_1$       | $x_2$                                                           | $x_3$       | $x_4$                                                          |
| $\tilde{0}$                        | $\tilde{0}$                        | $x_3 = 9$                                 | 0           | $\frac{19}{5}$                                                  | 1           | $-\frac{3}{5}$                                                 |
| (5,8,2,5)                          | (5,8,2,5)                          | $x_1 = 2$                                 | 1           | $\frac{2}{5}$                                                   | 0           | $\frac{1}{5}$                                                  |
| $Z^2 = \Re(\tilde{Z}^2)$<br>$= 32$ | $Z^1 = \Re(\tilde{Z}^1)$<br>$= 29$ | $Z = \Re(\tilde{Z})$<br>$= \frac{29}{32}$ |             |                                                                 |             |                                                                |
| $\tilde{Z}_j^1 - \tilde{c}_j$      |                                    |                                           | (-3,3,7,7)  | $(-3, \frac{1}{5}, \frac{14}{5}, 3)$                            | $\tilde{0}$ | $(1, \frac{8}{5}, \frac{2}{5}, 1)$                             |
| $\tilde{Z}_j^2 - \tilde{d}_j$      |                                    |                                           | (-3,3,7,7)  | $(-2, \frac{6}{5}, \frac{14}{5}, 3)$                            | $\tilde{0}$ | $(1, \frac{8}{5}, \frac{2}{5}, 1)$                             |
| $\tilde{E}_j$                      |                                    |                                           | $\tilde{0}$ | $(-\frac{654}{5}, \frac{322}{5}, \frac{883}{5}, \frac{886}{5})$ | $\tilde{0}$ | $(-\frac{72}{5}, \frac{111}{5}, \frac{209}{5}, \frac{218}{5})$ |
| $E_j = \Re(\tilde{E}_j)$           |                                    |                                           | 0           | $-\frac{661}{10}$                                               | 0           | $\frac{87}{10}$                                                |

En appliquant la formule :

$$\tilde{E}_j = \tilde{Z}^2 (\tilde{Z}_j^1 - \tilde{c}_j) - \tilde{Z}^1 (\tilde{Z}_j^2 - \tilde{d}_j)$$

et  $J_N = \{2,4\}$ , nous obtenons :

$$\tilde{E}_2 = (-\frac{654}{5}, \frac{322}{5}, \frac{883}{5}, \frac{886}{5})$$

$$\text{et } \tilde{E}_4 = (-\frac{72}{5}, \frac{111}{5}, \frac{209}{5}, \frac{218}{5})$$

et comme  $J_B = \{3,1\}$  alors  $\tilde{E}_3 = \tilde{0}$  et  $\tilde{E}_1 = \tilde{0}$ .

Puisque  $(E_2, E_4) = (\Re(\tilde{E}_2), \Re(\tilde{E}_4)) = (-\frac{661}{10}, \frac{87}{10})$

Donc :  $E_2 = \min_{j=2,3} \tilde{E}_j$ , alors la variable  $x_2$  entre dans la base.

Et  $\frac{x_{B_2}}{y_{2l}} = \min_{i=3,4} \left\{ \frac{x_{B_l}}{y_{il}}, y_{il} > 0 \right\} = \frac{45}{19}$ , alors la variable  $x_3$  sort de la base.

### Tableau 3 du simplexe flou

#### Itération 3

|                                                 |                                                 |                                               |             |             |                                                                                 |                                                                                 |
|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------|-------------|-------------|---------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| $\tilde{c}_j \rightarrow$                       |                                                 |                                               | (5,8,2,5)   | (3,5,1,2)   | $\tilde{0}$                                                                     | $\tilde{0}$                                                                     |
| $\tilde{d}_j \rightarrow$                       |                                                 |                                               | (5,8,2,5)   | (2,4,1,2)   | $\tilde{0}$                                                                     | $\tilde{0}$                                                                     |
| $\tilde{d}_B$                                   | $\tilde{c}_B$                                   | $x_B$                                         | $x_1$       | $x_2$       | $x_3$                                                                           | $x_4$                                                                           |
| (2,4,1,2)                                       | (3,5,1,2)                                       | $x_2 = \frac{45}{19}$                         | 0           | 1           | $\frac{5}{19}$                                                                  | $-\frac{3}{19}$                                                                 |
| (5,8,2,5)                                       | (5,8,2,5)                                       | $x_1 = \frac{20}{19}$                         | 1           | 0           | $-\frac{2}{19}$                                                                 | $\frac{5}{19}$                                                                  |
| $Z^2 = \Re(\tilde{Z}^2)$<br>$= \frac{1279}{38}$ | $Z^1 = \Re(\tilde{Z}^1)$<br>$= \frac{1345}{38}$ | $Z = \Re(\tilde{Z})$<br>$= \frac{1345}{1279}$ |             |             |                                                                                 |                                                                                 |
| $\tilde{z}_j^1 - \tilde{c}_j$                   |                                                 |                                               | (-3,3,7,7)  | (-2,2,3,3)  | $(-\frac{1}{19}, \frac{15}{19}, \frac{15}{19}, \frac{14}{19})$                  | $(\frac{10}{19}, \frac{31}{19}, \frac{16}{19}, \frac{28}{19})$                  |
| $\tilde{z}_j^2 - \tilde{d}_j$                   |                                                 |                                               | (-3,3,7,7)  | (-2,2,3,3)  | $(-\frac{6}{19}, \frac{10}{19}, \frac{15}{19}, \frac{14}{19})$                  | $(\frac{13}{19}, \frac{34}{19}, \frac{16}{19}, \frac{28}{19})$                  |
| $\tilde{E}_j$                                   |                                                 |                                               | $\tilde{0}$ | $\tilde{0}$ | $(-\frac{14729}{722}, \frac{27255}{722}, \frac{38015}{722}, \frac{38081}{722})$ | $(-\frac{32940}{722}, \frac{22164}{722}, \frac{58124}{722}, \frac{57332}{722})$ |
| $E_j = \Re(\tilde{E}_j)$                        |                                                 |                                               | 0           | 0           | $\frac{25118}{1442}$                                                            | $-\frac{23344}{1442}$                                                           |

En appliquant la formule :

$$\tilde{E}_j = \tilde{Z}^2 (\tilde{Z}^1 - \tilde{c}_j) - \tilde{Z}^1 (\tilde{Z}^2 - \tilde{d}_j)$$

et  $J_N = \{3,4\}$ , nous avons :

$$\tilde{E}_3 = (-\frac{14729}{722}, \frac{27255}{722}, \frac{38015}{722}, \frac{38081}{722})$$

$$\text{et } \tilde{E}_4 = (-\frac{32940}{722}, \frac{22164}{722}, \frac{58124}{722}, \frac{57332}{722})$$

et  $J_B = \{2,1\}$  donc  $\tilde{E}_2 = \tilde{0}$  et  $\tilde{E}_1 = \tilde{0}$

Puisque  $(E_2, E_1) = (\Re(\tilde{E}_2), \Re(\tilde{E}_1)) = (\frac{25118}{1442}, -\frac{23344}{1442})$ ,  $E_4 = \min_{j=3,4} \tilde{E}_j$ , alors la variable  $x_4$  entre dans la base

et  $\frac{x_{B_1}}{y_{1l}} = \min_{i=3,4} \left\{ \frac{x_{B_l}}{y_{il}}, y_{il} > 0 \right\} = \frac{4}{5}$ , alors la variable  $x_1$  sort de la base.

# Tableau 4 du simplexe flou

## Itération 4

|                                              |                                              |                                           |                                                                        |             |                                                                    |             |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|-------------|--------------------------------------------------------------------|-------------|
| $\tilde{c}_j \rightarrow$                    |                                              |                                           | (5,8,2,5)                                                              | (3,5,1,2)   | $\tilde{0}$                                                        | $\tilde{0}$ |
| $\tilde{d}_j \rightarrow$                    |                                              |                                           | (5,8,2,5)                                                              | (2,4,1,2)   | $\tilde{0}$                                                        | $\tilde{0}$ |
| $\tilde{d}_B$                                | $\tilde{c}_B$                                | $x_B$                                     | $x_1$                                                                  | $x_2$       | $x_3$                                                              | $x_4$       |
| (2,4,1,2)                                    | (3,5,1,2)                                    | $x_2 = 3$                                 | $\frac{3}{5}$                                                          | 1           | $\frac{1}{5}$                                                      | 0           |
| $\tilde{0}$                                  | $\tilde{0}$                                  | $x_4 = 4$                                 | $\frac{19}{5}$                                                         | 0           | $-\frac{2}{5}$                                                     | 1           |
| $Z^2 = \Re(\tilde{Z}^2)$<br>$= \frac{45}{2}$ | $Z^1 = \Re(\tilde{Z}^1)$<br>$= \frac{52}{2}$ | $Z = \Re(\tilde{Z})$<br>$= \frac{51}{45}$ |                                                                        |             |                                                                    |             |
|                                              | $\tilde{Z}_j^1 - \tilde{c}_j$                |                                           | $(-\frac{31}{5}, -2, \frac{28}{5}, \frac{16}{5})$                      | (-2,2,3,3)  | $(\frac{3}{5}, 1, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$                       | $\tilde{0}$ |
|                                              | $\tilde{Z}_j^2 - \tilde{d}_j$                |                                           | $(-\frac{34}{5}, -\frac{13}{5}, \frac{28}{5}, \frac{16}{5})$           | (-2,2,3,3)  | $(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$             | $\tilde{0}$ |
| $\tilde{E}_j$                                |                                              |                                           | $(-\frac{732}{10}, \frac{1284}{10}, \frac{2076}{10}, \frac{2148}{10})$ | $\tilde{0}$ | $(-\frac{69}{10}, \frac{123}{10}, \frac{147}{10}, \frac{141}{10})$ | $\tilde{0}$ |
| $E_j = \Re(\tilde{E}_j)$                     |                                              |                                           | $\frac{588}{10}$                                                       | 0           | $\frac{51}{10}$                                                    | 0           |

En appliquant la formule :

$$\tilde{E}_j = \tilde{Z}^2 (\tilde{Z}_j^1 - \tilde{c}_j) - \tilde{Z}^1 (\tilde{Z}_j^2 - \tilde{d}_j)$$

et  $J_N = \{1,3\}$ , nous avons :

$$\tilde{E}_1 = (-\frac{732}{10}, \frac{1284}{10}, \frac{2076}{10}, \frac{2148}{10})$$

$$\text{et } \tilde{E}_3 = (-\frac{69}{10}, \frac{123}{10}, \frac{147}{10}, \frac{141}{10})$$

et comme  $J_B = \{3,4\}$  donc  $\tilde{E}_2 = \tilde{0}$  et  $\tilde{E}_4 = \tilde{0}$ .

Puisque,  $(E_1, E_3) = (\Re(\tilde{E}_1), \Re(\tilde{E}_3)) = (\frac{588}{10}, \frac{51}{10}) > 0$  et  $\tilde{E}_2 = \tilde{E}_4 = 0$ , la condition d'optimalité du théorème 2 est satisfaite, alors la solution optimale du problème est :

$$x^* = (0,3)^t$$

et la valeur optimale de la fonction objectif est :

$$Z^* = \Re(\tilde{Z}(x^*)) = \frac{\Re(3, 5, 1, 3).3}{\Re((2, 4, 1, 2).3 + (1, 2, 1, 1))} = \frac{\Re(9, 15, 3, 6)}{\Re(7, 14, 4, 7)} = \frac{25.5}{22.5}.$$

## 4.4 Programme Linéaire Fractionnaire en Variables Floues

Un problème de "Programmation Linéaire Fractionnaire en Variables Floues" (PF)<sub>(VF)</sub>, dans le cas où le vecteur des contraintes  $b$  et le vecteur de décision  $x$  sont des nombres flous trapézoïdaux, est défini comme suit :

$$(PF)_{(VF)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Optimiser } \tilde{Z}(x) = \frac{c^t \tilde{x} + c_0}{d^t \tilde{x} + d_0} \\ s.c \\ \sum_{j=1}^n A \tilde{x} \leq_{\mathbb{R}} \tilde{b}, \\ \tilde{x} \in (F(\mathbb{R}))^n, \quad \tilde{x} \geq_{\mathbb{R}} \tilde{0} \end{array} \right. \quad (4.16)$$

où :

- Optimiser signifie maximiser ou minimiser.
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in (F(\mathbb{R}))^m$ ,  $c^t, d^t \in \mathbb{R}^n$ ,  $c_0$  et  $d_0$  scalaires et  $x \in (F(\mathbb{R}))^n$ .
- $\leq_{\mathbb{R}}$  est une fonction Ranking linéaire.
- $F(\mathbb{R})$  représente l'ensemble des nombres flous trapézoïdaux.

### Définition 4.7. Solution réalisable floue [16]

On dit qu'un vecteur  $\tilde{x} \in (F(\mathbb{R}))^n$  est une solution réalisable floue pour le problème (PF)<sub>(VF)</sub> si et seulement si  $\tilde{x}$  satisfait les contraintes du problème (PF)<sub>(VF)</sub> c'est à dire :

$$A \tilde{x} \leq_{\mathbb{R}} \tilde{b} \text{ et } \tilde{x} \geq_{\mathbb{R}} \tilde{0}.$$

### Définition 4.8. Solution optimale floue [16]

Soit :  $S = \{ \tilde{x} \in (F(\mathbb{R}))^n; \tilde{x} \geq_{\mathbb{R}} \tilde{0}; A \tilde{x} \leq_{\mathbb{R}} \tilde{b} \}$  l'ensemble des solutions réalisables pour le problème .

On dit que  $\tilde{x}^* \in S$  est une solution réalisable optimale floue pour le problème (PF)<sub>(VF)</sub> si pour toute solution réalisables floue  $\tilde{x}$ , on a :

$$\frac{c^t \tilde{x}^* + c_0}{d^t \tilde{x}^* + d_0} \geq_{\mathbb{R}} \frac{c^t \tilde{x} + c_0}{d^t \tilde{x} + d_0}, \text{ pour un maximum}$$

### Définition 4.9. Ensemble des indices de base

Soit un ensemble d'indices avec  $\text{card}(R) = m$  tel que les colonnes  $a_j$  ( $j \in R$ ) de  $A$  sont linéairement indépendantes.

Autrement dit, la matrice carrée  $B$ , formée des colonnes  $a_j$  ( $j \in R$ ), est inversible. On dit alors que l'ensemble  $R$  des indices est une base. Les variables  $\tilde{x}_B = (\tilde{x}_j, j \in R)$  sont appelées variables de base floues. Les variables  $\tilde{x}_{\bar{B}} = (\tilde{x}_j, j \in \bar{R})$  sont appelées variables hors-base floues.

### Remarque 4.2.

On peut toujours écrire les décompositions par blocs suivantes :  $A = (B, N)$  où  $B$  est appelée une matrice de base et  $N$  une matrice hors base  $\tilde{x} = (\tilde{x}_B, \tilde{x}_N)^t$  où  $\tilde{x}_B$  représente les variables de base floues et représente  $\tilde{x}_N$  les variables hors base floues.

**Définition 4.10. Solution de base réalisable floue [16]**

On dit que  $\tilde{x} = (\tilde{x}_B, \tilde{x}_N)^t$  est une solution de base floue si elle vérifiée  $A\tilde{x} = b$  avec  $\tilde{x} = B^{-1}b$  et  $\tilde{x}_N = 0$ . Si, en plus,  $\tilde{x}_B \leq \tilde{0}$  alors  $\tilde{x}$  est une solution de base réalisable floue.

**Définition 4.11. Solution floue dégénérée et floue non dégénérée [20]**

Une solution de base réalisable floue  $\tilde{x}$  est dite non dégénérée si  $\tilde{x}_B > \tilde{0}$ . Si au moins une composante  $\tilde{x}_B = \tilde{0}$  alors le vecteur  $\tilde{x}$  est appelé une solution de base réalisable floue dégénérée.

**4.4.1 Méthode du Simplexe Flou de résolution d'un Problème Linéaire Fractionnaire Flou en Variables Réelles (PF)<sub>(VF)</sub>**

Le Problème Linéaire Fractionnaire Flou en Variable Réelles (PF)<sub>(VF)</sub> sous la forme standard peut s'écrire :

$$(PF)_{(VF)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Optimiser } \tilde{Z}(x) = \frac{c^t \tilde{x} + c_0}{d^t \tilde{x} + d_0} = \frac{(c_B^t \tilde{x}_B + c_N^t \tilde{x}_N) + c_0}{(d_B^t \tilde{x}_B + d_N^t \tilde{x}_N) + d_0} \\ \sum_{j=1}^n A\tilde{x} = \tilde{b} \\ \tilde{x} \in (F(\mathbb{R}))^n, \quad \tilde{x} \geq \mathbb{R}^n \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Avec  $d^t \tilde{x} + d_0 > \tilde{0}$ , pour toute les solutions réalisables floues,  $\forall \tilde{x} \in S$ .

La méthode du simplexe flou consiste à trouver une nouvelle base  $B^*$  et une meilleure solution de base  $x^*$  associée tel que :

$$\frac{c^t \tilde{x}^* + c_0}{d^t \tilde{x}^* + d_0} > \frac{c^t \tilde{x} + c_0}{d^t \tilde{x} + d_0}, \forall \tilde{x} \in S.$$

Dans le cas d'une fonction objectif à maximiser.

Cette méthode converge vers un nombre finie d'itérations, telle que chaque itération consiste à faire rentrer une variable hors-base dans la nouvelle base appelée variable entrante et faire sortir à la place une variable de base appelée variable sortante, jusqu'à trouver une solution optimale ou pas de solutions ou infinité de solutions.

**Détermination d'une solution initiale**

Nous avons :

$\mathfrak{R}(\tilde{x}) = x$  une solution réalisable floue et  $\mathfrak{R}(\tilde{b}) = b$  un vecteur réel colonne à m lignes .

Soit :  $A = [B, N]$  et  $\tilde{x} = (\tilde{x}_B, \tilde{x}_N)^t$

L'expression  $A\tilde{x} = \tilde{b}$  peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned}
A.\tilde{x} &= [B, N] \cdot (\tilde{x}_B, \tilde{x}_N)^t = \tilde{b} \\
\Rightarrow A.\tilde{x} &= B.\tilde{x}_B + N.\tilde{x}_N = \tilde{b}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

— On multiplie l'expression (4.) par  $B^{-1}$ , l'inverse de la matrice B.

On obtient :

$$B^{-1}.B.\tilde{x}_B + B^{-1}.N.\tilde{x}_N = B^{-1} \tilde{b}$$

Avec  $B^{-1}.B = I$  (identité d'ordre m)

D'où :

$$\tilde{x}_B + B^{-1}.N.\tilde{x}_N = B^{-1} \tilde{b} \tag{4.19}$$

— En annulant  $\tilde{x}_N$ , la solution de base réalisable est alors

$$\tilde{x}_B = B^{-1} \tilde{b}$$

— On obtient une solution de base réalisable de départ si :

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_B, \tilde{x}_N)^t, \text{ Avec } \tilde{x}_B \geq \tilde{0} \text{ et } \tilde{x}_N = \tilde{0}.$$

(la matrice B est toujours constituée à partir des colonnes de la matrice A).

### Amélioration du solution réalisable

Soit :  $\tilde{x} = (\tilde{x}_B, \tilde{x}_N)^t$  solution initiale réalisable, supposons que le rang (B) = m.

### Calcul des nombres flous suivants :

$$\tilde{Z}^1 = c_B^t \tilde{x}_B + c_0 \quad \text{et} \quad \tilde{Z}^2 = d_B^t \tilde{x}_B + d_0$$

où :

$c_B^t$  et  $d_B^t$  deux vecteurs réels associés aux variables de base dans le numérateur et le dénominateur de la fonction objectif respectivement.

### Calcul du vecteur potentiel

$$y_j = B^{-1}.a_j \quad (B^{-1} \text{ la matrice inversible de la matrice B})$$

—  $Z_j^1 = c_B^t y_j$  et  $Z_j^2 = d_B^t y_j$  sont connues pour chaque colonne  $a_j$  de la matrice A .

— Examiner la possibilité de trouver une autre solution de base réalisable  $x^*$  meilleure que  $x$  et une valeur améliorée de  $\tilde{Z} = \frac{\tilde{Z}^1}{\tilde{Z}^2}$ .

Soit  $\tilde{x} = (\tilde{x}_B, \tilde{x}_N)^t$  la solution initiale réalisable du problème, tel que  $\tilde{x}_B = B^{-1} \cdot \tilde{b}$  et  $\tilde{x}_N = \tilde{0}$ .

Si la solution initiale de base réalisable n'est pas optimale  $\tilde{x} = (\tilde{x}_B, \tilde{x}_N)^t$ , on cherche une nouvelle matrice de base  $B^*$  associée à une nouvelle solution de base réalisable.

$\tilde{x}^* = (\tilde{x}_B^*, \tilde{x}_N^*)^t$  et une valeur améliorée de la fonction objectif  $\tilde{Z} = \frac{\tilde{Z}^1}{\tilde{Z}^2}$ .

On a :  $x^* = (x_B^*, x_N^*)^t$  la nouvelle solution de base réalisable tel que :  $B^* \tilde{x}_B^* = \tilde{b}$  et  $\tilde{x}_N^* = \tilde{0}$ .

On note :  $B^* = (B_1^*, \dots, B_m^*)$  la nouvelle matrice de base obtenue de la matrice de base  $B$ , enlèvent un de sa colonne posons  $B_r$  et en remplaçant par  $a_j$  correspond à la variable  $x_l$ , les colonnes de la nouvelle matrice de base  $B^*$  sont donnés par :

$$B_i^* = B_i^* \quad (i \neq r) \quad \text{et} \quad B_r^* = a_j$$

On obtient la nouvelle valeur des nouvelles variables de base de terme original

$$\tilde{x}_{B_i}^* = \tilde{x}_{B_i} - \tilde{x}_{B_r} (y_{ij} / y_{rj}), \quad (i \neq r)$$

$$\tilde{x}_{B_r}^* = \tilde{x}_{B_r} / y_{rj} = \theta$$

$$\text{où : } a_j = \sum_{i=1}^m y_{ij} B_i$$

La valeur de la fonction objectif améliorée est :  $\tilde{Z} = \frac{\tilde{Z}^1}{\tilde{Z}^2}$ .

On pose :  $\tilde{Z}^1 = \tilde{Z}^1 + \theta (c_j - Z_j^1)$  et  $\tilde{Z}^2 = \tilde{Z}^2 + \theta (c_j - Z_j^2)$

où :

$Z_j^1$  et  $Z_j^2$  correspond à la solution initiale de base réalisable.

La valeur de la fonction objectif est améliorée si :  $\tilde{Z} > \tilde{Z}$

Dans le cas d'une fonction objectif à maximiser.

$$\tilde{Z} > \tilde{Z} \Rightarrow \frac{\tilde{Z}^1}{\tilde{Z}^2} > \tilde{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{Z}^1 + \theta (\tilde{c}_j - Z_j^1)}{\tilde{Z}^2 + \theta (\tilde{d}_j - Z_j^2)} > \frac{\tilde{Z}^1}{\tilde{Z}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{Z}^1 + \theta (\tilde{c}_j - Z_j^1)}{\tilde{Z}^2 + \theta (\tilde{d}_j - Z_j^2)} - \frac{\tilde{Z}^1}{\tilde{Z}^2} > 0$$

$$\Rightarrow \tilde{Z}^2 (\tilde{Z}^1 + \theta (\tilde{c}_j - Z_j^1)) - \tilde{Z}^1 (\tilde{Z}^2 + \theta (\tilde{d}_j - Z_j^2)) > 0$$

$\tilde{Z}^2 \underset{\mathbb{R}}{>} \tilde{0}$  et  $\tilde{Z}^2 \underset{\mathbb{R}}{>} \tilde{0}$ , car le dénominateur de la fonction objectif est positif pour toutes les solutions réalisables .

$\theta > 0$  pour le cas non-dégénéré. Si  $\theta = 0$ , Alors  $\tilde{Z} \underset{\mathbb{R}}{=} \tilde{Z}$ .

d'où :

$$\begin{aligned} \tilde{Z}^2(c_j - Z_j^1) - \tilde{Z}^1(d_j - Z_j^2) &\underset{\mathbb{R}}{>} \tilde{0} \\ \text{donc : } \tilde{Z}^2(Z_j^1 - c_j) - \tilde{Z}^1(Z_j^2 - d_j) &\underset{\mathbb{R}}{<} 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

— Soit :  $\tilde{E}_j \underset{\mathbb{R}}{=} \tilde{Z}^2(Z_j^1 - c_j) - \tilde{Z}^1(Z_j^2 - d_j) \underset{\mathbb{R}}{<} 0$ .

Nous avons  $\tilde{E}_j \underset{\mathbb{R}}{<} \tilde{0}$  si :

Cas 1 :  $Z_j^2 - d_j \underset{\mathbb{R}}{>} \tilde{0}$  et  $(Z_j^1 - c_j) / (Z_j^2 - d_j) \underset{\mathbb{R}}{<} \tilde{Z}^1 / \tilde{Z}^2$ .

Cas 2 :  $Z_j^2 - d_j \underset{\mathbb{R}}{<} \tilde{0}$  et  $(Z_j^1 - c_j) / (Z_j^2 - d_j) \underset{\mathbb{R}}{>} \tilde{Z}^1 / \tilde{Z}^2$ .

Nous concluons que, si  $\tilde{E}_j \underset{\mathbb{R}}{<} \tilde{0}$  et si  $y_{ij} > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), alors il est possible d'obtenir une nouvelle matrice de base  $B^*$  et une nouvelle solution de base réalisable  $\tilde{x}^*$  associée, en remplaçant l'une des colonnes de la matrice  $B$  par  $a_j$ , donc la valeur de la fonction objectif  $\tilde{Z}$  est vérifiée :  $\tilde{Z} \underset{\mathbb{R}}{>} \tilde{Z}$ . Mais, on a :  $y_{ij} < 0$  ( $\tilde{E}_j \underset{\mathbb{R}}{=} \tilde{0}$ ), alors le problème  $(PF)_{(VF)}$  admet une infinité de solutions optimales.

#### **Théorème 4.5.**

Si dans un tableau du simplexe, s'il existe un :  $\tilde{E}_l \underset{\mathbb{R}}{=} \tilde{Z}^2(Z_l^1 - c_l) - \tilde{Z}^1(Z_l^2 - d_l) \underset{\mathbb{R}}{<} \tilde{0}$ , et il existe un indice de base  $i$  tel que  $y_{il} > 0$ , alors une variable  $\tilde{x}_l$  entre dans la nouvelle base  $B^*$ .

#### **Détermination de la variable entrante**

— Problème à minimum :

$$E_l = \max_{E_j \geq 0} E_j, j \in j_N \quad (4.21)$$

— Problème à maximum :

$$E_l = \min_{E_j \leq 0} E_j, j \in j_N \quad (4.22)$$

La variable correspondante à l'indice  $l$  est la variable  $x_l$  entrante dans la nouvelle base  $B^*$ .

## Détermination de la variable sortante

Pour que la nouvelle base soit admissible, il faut que  $x_j \geq 0 \forall j \in J_B$ , si  $y_{il} > 0$  :

$$\theta_r = \frac{x_{B_r}}{y_{rl}} = \min_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{x_{B_l}}{y_{il}}, y_{il} > 0 \right\} \quad (4.23)$$

la variable correspondante à l'indice r est la variable  $x_r$  sortante de la base .

## Critère d'optimalité

### Théorème 4.6.

Si pour la base B tous les  $E_j \geq 0$  ( $E_j \leq 0$ ) ,  $\forall j$ , alors la solution de base correspondante réalise le maximum (minimum) de la fonction objectif.

## Critère d'optimalité pour le cas où la solution est infinie

### Théorème 4.7.

Si pour un problème à maximum (minimum) ,  $\exists l \in J_B$  tel que  $E_j < 0$  ( $E_j > 0$ ) et  $y_{il} \leq 0$  ,  $\forall i$  , alors la solution du problème est infinie.

## 4.4.2 Procédure de l'algorithme du simplexe

Dans le cas d'une fonction objectif à maximiser.

### Étape initiale

Poser  $\tilde{x}_N = \tilde{0}$  et déterminer la solution de base réalisable initiale  $\tilde{x}$  donnée par

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_B, \tilde{x}_N)^t, \text{ avec } \tilde{x}_B = B^{-1}\tilde{b} \text{ et la valeur de la fonction objectif est : } \tilde{Z} = \frac{\tilde{Z}^1}{\tilde{Z}^2}.$$

### Étape principale

1. Calculer les  $\tilde{E}_j = \tilde{Z}^2(Z_j^1 - c_j) - \tilde{Z}^1(Z_j^2 - d_j)$  ,  $1 \leq j \leq n$  , pour toutes les variables hors base.

- Si tous les  $\tilde{E}_j \geq \tilde{0}$  ,  $1 \leq j \leq n$  , alors Stop. La solution actuelle  $\tilde{x} = (\tilde{x}_B, \tilde{x}_N)^t$  est la solution réalisable optimale.
- Sinon, choisir la variable entrante :

$$E_l = \min_{E_j \leq 0} E_j, j \in J_N. (\text{variable entrante } x_k).$$

2. Calculer  $y_{ij} = B^{-1}a_j$  .

Si  $y_{ij} < 0$  alors Stop ; le problème a une solution infinie.

Sinon, choisir la variable qui doit quitter la base :

$$\theta_r = \frac{x_{B_r}}{y_{rl}} = \min_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{x_{B_l}}{y_{il}}, y_{il} > 0 \right\}.$$

3. Pivoter sur  $y_{il}$  et mettre à jour le tableau du simplexe flou. Passer à l'étape (2).

#### 4.4.3 Tableau de la méthode du simplexe flou pour résoudre le problème (PF)<sub>(VF)</sub>

Les quantités suivantes doivent être calculées à chaque étape de l'algorithme :

$$\tilde{Z}^1 = c_B^t \tilde{x}_B + c_0 \text{ et } \tilde{Z}^2 = d_B^t \tilde{x}_B + d_0, \tilde{Z} = \frac{\tilde{Z}^1}{\tilde{Z}^2}, \text{ et } \tilde{E}_j = \tilde{Z}^2(Z_j^1 - c_j) - \tilde{Z}^1(Z_j^2 - d_j).$$

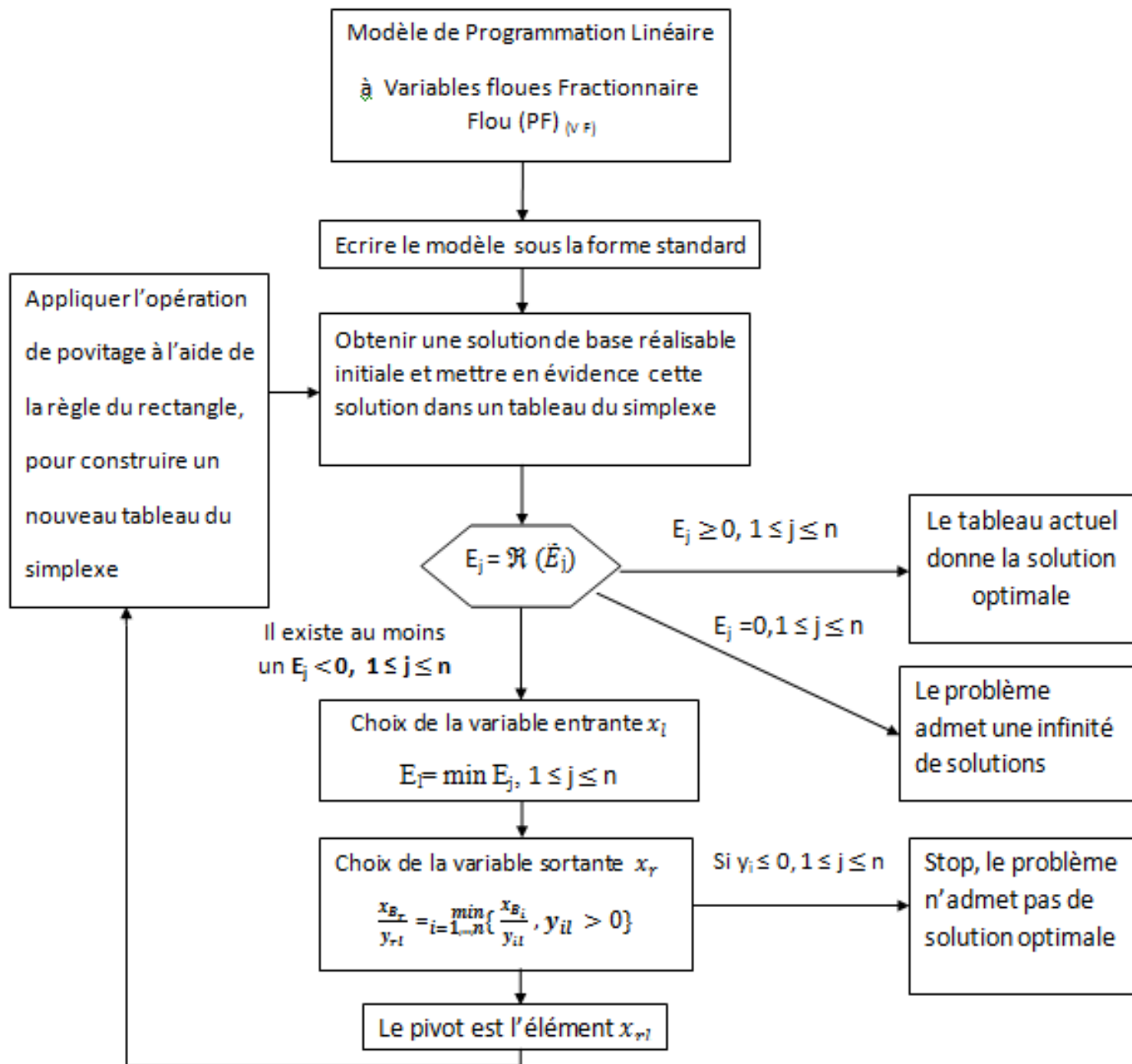
Les différentes procédures ont été élaborées pour effectuer une mise à jour de ces quantités. On peut structurer toute cette information dans un tableau, dit tableau du simplexe flou.

On réécrit les expressions matricielles, ci-dessus, sous forme d'un tableau, comme suit :

|                              |                            |                        |                            |                   |                   |         |                   |
|------------------------------|----------------------------|------------------------|----------------------------|-------------------|-------------------|---------|-------------------|
| $c_j \rightarrow$            |                            |                        |                            | $c_1$             | $\cdot$           | $\dots$ | $c_n$             |
| $d_j \rightarrow$            |                            |                        |                            | $d_1$             | $\cdot$           | $\dots$ | $d_n$             |
| $d_B$                        | $c_B$                      | $\widetilde{x}_B$      | $x_B=\Re(\widetilde{x}_B)$ | $\widetilde{x}_1$ | $\widetilde{x}_2$ | $\dots$ | $\widetilde{x}_n$ |
| $\widetilde{0}$              | $\widetilde{0}$            | $\widetilde{x}_{B_1}$  | $x_{B_1}$                  | 1                 | $\cdot$           | $\dots$ | 0                 |
| $\widetilde{0}$              | $\widetilde{0}$            | $\widetilde{x}_{B_2}$  | $x_{B_2}$                  | $\cdot$           | $\cdot$           | $\dots$ | $\cdot$           |
| $\cdot$                      | $\cdot$                    | $\cdot$                | $\cdot$                    | $\cdot$           | $\cdot$           | $\dots$ | $\cdot$           |
| $\widetilde{0}$              | $\widetilde{0}$            | $\widetilde{x}_{B_m}$  | $x_{B_m}$                  | 0                 | $\cdot$           | $\dots$ | 1                 |
| $Z^2=\Re(\widetilde{Z}^2)$   | $Z^1=\Re(\widetilde{Z}^1)$ | $Z=\Re(\widetilde{Z})$ |                            |                   |                   |         |                   |
| $Z_j^1-\,c_j$                |                            |                        |                            | $\cdot$           | $\cdot$           | $\dots$ | $\cdot$           |
| $Z_j^2-\,d_j$                |                            |                        |                            | $\cdot$           | $\cdot$           | $\dots$ | $\cdot$           |
| $\widetilde{E}_j$            |                            |                        |                            | $\cdot$           | $\cdot$           | $\dots$ | $\cdot$           |
| $E_j=\,\Re(\widetilde{E}_j)$ |                            |                        |                            | $\cdot$           | $\cdot$           | $\dots$ | $\cdot$           |

Tableau du méthode du simplexe flou

#### 4.4.4 Organigramme de l'algorithme de la méthode du simplexe fluu pour résoudre le problème $(PF)_{(VF)}$ (maximisation)



Organigramme de la méthode du simplexe fluu

## Exemple Numérique

Soit à résoudre le Problème Linéaire Fractionnaire Flou à Variables Floues  $(PF)_{(VF)}$  suivant en utilisant la méthode du simplexe flou :

$$(PF)_{(VF)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } \tilde{Z}(\tilde{x}) \underset{\mathbb{R}}{=} \frac{14.5 \tilde{x}_1 + 8.5 \tilde{x}_2}{14.5 \tilde{x}_1 + 6.5 \tilde{x}_2 + 3} \\ \text{s.c} \\ 3 \tilde{x}_1 + 5 \tilde{x}_2 \underset{\mathbb{R}}{\leq} (5, 8, 2, 6) \\ 5 \tilde{x}_1 + 2 \tilde{x}_2 \underset{\mathbb{R}}{\leq} (4, 1, 5, 3) \\ \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in (F(\mathbb{R}))^2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \underset{\mathbb{R}}{\geq} \tilde{0} \end{array} \right.$$

Les nombre flou utilisé dans le problème  $(PF)_{(VF)}$  sont des nombres flous trapézoïdaux.

Le problème  $(PF)_{(VF)}$  sous la forme standard s'écrit :

$$(PF)_{(VF)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } \tilde{Z}(\tilde{x}) \underset{\mathbb{R}}{=} \frac{14.5 \tilde{x}_1 + 8.5 \tilde{x}_2}{14.5 \tilde{x}_1 + 6.5 \tilde{x}_2 + 3} \\ \text{s.c} \\ 3 \tilde{x}_1 + 5 \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \underset{\mathbb{R}}{=} (5, 8, 2, 6) \\ 5 \tilde{x}_1 + 2 \tilde{x}_2 + \tilde{x}_4 \underset{\mathbb{R}}{=} (4, 1, 5, 3) \\ \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4 \in (F(\mathbb{R}))^4, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4 \underset{\mathbb{R}}{\geq} \tilde{0} \end{array} \right.$$

où :

$\tilde{x}_3$  et  $\tilde{x}_4$  sont des variables d'écart floues.

# Tableau 1 du simplexe flou

## Itération 1

|                                              |       |                                                                                           |            |                   |                   |                   |                   |
|----------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------|------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $c_j \rightarrow$                            |       |                                                                                           |            | 14.5              | 8.5               | 0                 | 0                 |
| $d_j \rightarrow$                            |       |                                                                                           |            | 14.5              | 6.5               | 0                 | 0                 |
| $d_B$                                        | $c_B$ | $\widetilde{x}_B$                                                                         | $x_B$      | $\widetilde{x}_1$ | $\widetilde{x}_2$ | $\widetilde{x}_3$ | $\widetilde{x}_4$ |
| 0                                            | 0     | $\widetilde{x}_3 \underset{\Re}{=} (5,8,2,6)$                                             | $x_3 = 15$ | 3                 | 5                 | 1                 | 0                 |
| 0                                            | 0     | $\widetilde{x}_4 \underset{\Re}{=} (4,1,5,3)$                                             | $x_4 = 10$ | 5                 | 2                 | 0                 | 1                 |
| $Z^2 \! = \! \Re(\widetilde{Z}^1) \! = \! 3$ |       | $Z^1 \! = \! \Re(\widetilde{Z}^1) \! = \! 0 \quad Z \! = \! \Re(\widetilde{Z}) \! = \! 0$ |            |                   |                   |                   |                   |
| $Z_j^1 \! - \! c_j$                          |       |                                                                                           |            | -14.5             | -8.5              | 0                 | 0                 |
| $Z_j^2 \! - \! d_j$                          |       |                                                                                           |            | -14.5             | -2.5              | 0                 | 0                 |
| $\widetilde{E}_j$                            |       |                                                                                           |            | (-24,-15,15,6)    | (-15,-9,6,3)      | $\widetilde{0}$   | $\widetilde{0}$   |
| $E_j \, = \, \Re(\widetilde{E}_j)$           |       |                                                                                           |            | -43.5             | -25.5             | 0                 | 0                 |

En appliquant les formules :

$$x_B = \Re(\tilde{x}_B) \text{ et } \tilde{E}_j = \tilde{Z}^2(Z_j^1 - c_j) - \tilde{Z}^1(Z_j^2 - d_j)$$

et  $J_N = \{1, 2\}$  nous avons :

$$\tilde{E}_1 = (-24, -15, 15, 6)$$

$$\text{et } \tilde{E}_2 = (-15, -9, 6, 3)$$

$$\text{et } J_B = \{3, 4\} \text{ donc } \tilde{E}_3 = \tilde{0} \text{ et } \tilde{E}_4 = \tilde{0}.$$

$$\text{Puisque } (E_1, E_2) = (\Re(\tilde{E}_1), \Re(\tilde{E}_2)) = (-43.5, -25.5),$$

Donc :  $E_1 = \min_{j=1,2} \tilde{E}_j$ , alors la variable  $x_1$  entre dans la base .

$$\text{Et } \frac{x_{B_4}}{y_{4l}} = \min_{i=3,4} \left\{ \frac{x_{B_l}}{y_{il}}, y_{il} > 0 \right\} = \frac{1}{2}, \text{ alors la variable } x_4 \text{ sort de la base.}$$

## Tableau 2 du simplexe flou

### Itération 2

|                                              |                                              |                                                     |           |               |                                                                 |               |                                                                |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------|-----------|---------------|-----------------------------------------------------------------|---------------|----------------------------------------------------------------|
| $c_j \rightarrow$                            |                                              |                                                     |           | 14.5          | 8.5                                                             | 0             | 0                                                              |
| $d_j \rightarrow$                            |                                              |                                                     |           | 14.5          | 6.5                                                             | 0             | 0                                                              |
| $d_B$                                        | $c_B$                                        | $\tilde{x}_B$                                       | $x_B$     | $\tilde{x}_1$ | $\tilde{x}_2$                                                   | $\tilde{x}_3$ | $\tilde{x}_4$                                                  |
| 0                                            | 0                                            | $\tilde{x}_3 =_{\Re} (4,5,1,1)$                     | $x_3 = 9$ | 0             | $\frac{19}{5}$                                                  | 1             | $-\frac{3}{5}$                                                 |
| 14.5                                         | 14.5                                         | $\tilde{x}_1 =_{\Re} (1,1,1,1)$                     | $x_1 = 2$ | 1             | $\frac{2}{5}$                                                   | 0             | $\frac{1}{5}$                                                  |
| $Z^2 =_{\Re} \mathfrak{R}(\tilde{Z}^2) = 32$ | $Z^1 =_{\Re} \mathfrak{R}(\tilde{Z}^1) = 29$ | $Z =_{\Re} \mathfrak{R}(\tilde{Z}) = \frac{29}{32}$ |           |               |                                                                 |               |                                                                |
| $Z_j^1 - c_j$                                |                                              |                                                     |           | 0             | 2.6                                                             | 0             | 3.2                                                            |
| $Z_j^2 - d_j$                                |                                              |                                                     |           | 0             | -0.6                                                            | 0             | 3.2                                                            |
| $\tilde{E}_j$                                |                                              |                                                     |           | $\tilde{0}$   | $(-\frac{654}{5}, \frac{322}{5}, \frac{883}{5}, \frac{886}{5})$ | $\tilde{0}$   | $(-\frac{72}{5}, \frac{111}{5}, \frac{209}{5}, \frac{218}{5})$ |
| $E_j =_{\Re} \mathfrak{R}(\tilde{E}_j)$      |                                              |                                                     |           | 0             | $-\frac{661}{10}$                                               | 0             | $\frac{87}{10}$                                                |

En appliquant les formules :

$$x_B = \Re(\tilde{x}_B) \text{ et } \tilde{E}_j = \tilde{Z}^2 (Z_j^1 - c_j) - \tilde{Z}^1 (Z_j^2 - d_j)$$

et  $J_N = \{2, 4\}$ , nous avons :

$$\tilde{E}_2 = (-\frac{654}{5}, \frac{322}{5}, \frac{883}{5}, \frac{886}{5}),$$

$$\text{et } \tilde{E}_4 = (-\frac{72}{5}, \frac{111}{5}, \frac{209}{5}, \frac{218}{5})$$

et  $J_B = \{3, 1\}$  donc  $\tilde{E}_3 = \tilde{0}$  et  $\tilde{E}_1 = \tilde{0}$ .

$$\text{Puisque } (E_2, E_4) = (\Re(\tilde{E}_2), \Re(\tilde{E}_4)) = (-\frac{661}{10}, \frac{87}{10})$$

Donc :  $E_2 = \min_{j=2,3} \tilde{E}_j$ , alors la variable  $x_2$  entre dans la base.

Et  $\frac{x_{B_3}}{y_{3l}} = \min_{i=3,4} \{ \frac{x_{B_l}}{y_{il}}, y_{il} > 0 \} = \frac{45}{19}$ , alors la variable  $x_3$  sort de la base.

### Tableau 3 du simplexe flou

#### Itération 3

|                                                          |       |                                                                                       |                                                        |               |               |                                                                                 |                                                                                 |
|----------------------------------------------------------|-------|---------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|---------------|---------------|---------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| $c_j \rightarrow$                                        |       |                                                                                       |                                                        | 14.5          | 8.5           | 0                                                                               | 0                                                                               |
| $d_j \rightarrow$                                        |       |                                                                                       |                                                        | 14.5          | 6.5           | 0                                                                               | 0                                                                               |
| $d_B$                                                    | $c_B$ | $\tilde{x}_B$                                                                         | $x_B$                                                  | $\tilde{x}_1$ | $\tilde{x}_2$ | $\tilde{x}_3$                                                                   | $\tilde{x}_4$                                                                   |
| 6.5                                                      | 8.5   | $\tilde{x}_2 = \mathfrak{R}(\frac{40}{19}, \frac{3}{19}, \frac{2}{19}, \frac{8}{19})$ | $x_2 = \frac{45}{19}$                                  | 0             | 1             | $\frac{5}{19}$                                                                  | $-\frac{3}{19}$                                                                 |
| 14.5                                                     | 14.5  | $\tilde{x}_1 = \mathfrak{R}(\frac{10}{19}, \frac{7}{19}, \frac{2}{19}, \frac{8}{19})$ | $x_1 = \frac{20}{19}$                                  | 1             | 0             | $-\frac{2}{19}$                                                                 | $\frac{5}{19}$                                                                  |
| $Z^2 = \mathfrak{R}(\tilde{Z}^2)$<br>$= \frac{1279}{38}$ |       | $Z^1 = \mathfrak{R}(\tilde{Z}^1) = \frac{1345}{38}$                                   | $Z = \mathfrak{R}(\tilde{Z})$<br>$= \frac{1345}{1279}$ |               |               |                                                                                 |                                                                                 |
| $Z_j^1 - c_j$                                            |       |                                                                                       |                                                        | 0             | 0             | $(-\frac{1}{19}, \frac{15}{19}, \frac{15}{19}, \frac{14}{19})$                  | $(\frac{10}{19}, \frac{31}{19}, \frac{16}{19}, \frac{28}{19})$                  |
| $Z_j^2 - d_j$                                            |       |                                                                                       |                                                        | 0             | 0             | $(-\frac{6}{19}, \frac{10}{19}, \frac{15}{19}, \frac{14}{19})$                  | $(\frac{13}{19}, \frac{34}{19}, \frac{16}{19}, \frac{28}{19})$                  |
| $\tilde{E}_j$                                            |       |                                                                                       |                                                        | $\tilde{0}$   | $\tilde{0}$   | $(-\frac{14729}{722}, \frac{27255}{722}, \frac{38015}{722}, \frac{38081}{722})$ | $(-\frac{32940}{722}, \frac{22164}{722}, \frac{58124}{722}, \frac{57332}{722})$ |
| $E_j = \mathfrak{R}(\tilde{E}_j)$                        |       |                                                                                       |                                                        | 0             | 0             | $\frac{25118}{1442}$                                                            | $-\frac{23344}{1442}$                                                           |

En appliquant les formules :

$$x_B = \mathfrak{R}(\tilde{x}_B) \text{ et } \tilde{E}_j = \tilde{Z}^2(Z_j^1 - c_j) - \tilde{Z}^1(Z_j^2 - d_j)$$

et  $J_N = \{3, 4\}$  , nous avons :

$$\tilde{E}_3 = (-\frac{14729}{722}, \frac{27255}{722}, \frac{38015}{722}, \frac{38081}{722})$$

$$\text{et } \tilde{E}_4 = (-\frac{32940}{722}, \frac{22164}{722}, \frac{58124}{722}, \frac{57332}{722})$$

et  $J_B = \{2, 1\}$  donc  $\tilde{E}_2 = \tilde{0}$  et  $\tilde{E}_1 = \tilde{0}$

Puisque  $(E_2, E_1) = (\mathfrak{R}(\tilde{E}_2), \mathfrak{R}(\tilde{E}_1)) = (\frac{25118}{1442}, -\frac{23344}{1442})$ ,  $E_4 = \min_{j=3,4} \tilde{E}_j$ , alors la variable  $x_4$  entre dans la base

et  $\frac{x_{B_1}}{y_{1l}} = \min_{i=3,4} \{ \frac{x_{B_l}}{y_{il}}, y_{il} > 0 \} = \frac{4}{5}$  , alors la variable  $x_1$  sort de la base.

# Tableau 4 du simplexe flou

## Itération 4

|                                                              |       |                                                              |                                                           |                                                                        |               |                                                                    |               |
|--------------------------------------------------------------|-------|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|---------------|--------------------------------------------------------------------|---------------|
| $c_j \rightarrow$                                            |       |                                                              |                                                           | 14.5                                                                   | 8.5           | 0                                                                  | 0             |
| $d_j \rightarrow$                                            |       |                                                              |                                                           | 14.5                                                                   | 6.5           | 0                                                                  | 0             |
| $d_B$                                                        | $c_B$ | $\tilde{x}_B$                                                | $x_B$                                                     | $\tilde{x}_1$                                                          | $\tilde{x}_2$ | $\tilde{x}_3$                                                      | $\tilde{x}_4$ |
| 6.5                                                          | 8.5   | $\tilde{x}_2 = \underset{\Re}{(1,2,1,1)}$                    | $x_2 = 3$                                                 | $\frac{3}{5}$                                                          | 1             | $\frac{1}{5}$                                                      | 0             |
| 0                                                            | 0     | $\tilde{x}_4 = \underset{\Re}{(2,2,1,1)}$                    | $x_4 = 4$                                                 | $\frac{19}{5}$                                                         | 0             | $-\frac{2}{5}$                                                     | 1             |
| $Z^2 = \underset{\Re}{\Re}(\tilde{Z}^2)$<br>$= \frac{45}{2}$ |       | $Z^1 = \underset{\Re}{\Re}(\tilde{Z}^1)$<br>$= \frac{52}{2}$ | $Z = \underset{\Re}{\Re}(\tilde{Z})$<br>$= \frac{51}{45}$ |                                                                        |               |                                                                    |               |
| $Z_j^1 - c_j$                                                |       |                                                              |                                                           | $(-\frac{31}{5}, -2, \frac{28}{5}, \frac{16}{5})$                      | 0             | $(\frac{3}{5}, 1, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$                       | 0             |
| $Z_j^2 - d_j$                                                |       |                                                              |                                                           | $(-\frac{34}{5}, -\frac{13}{5}, \frac{28}{5}, \frac{16}{5})$           | 0             | $(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$             | 0             |
| $\tilde{E}_j$                                                |       |                                                              |                                                           | $(-\frac{732}{10}, \frac{1284}{10}, \frac{2076}{10}, \frac{2148}{10})$ | $\tilde{0}$   | $(-\frac{69}{10}, \frac{123}{10}, \frac{147}{10}, \frac{141}{10})$ | $\tilde{0}$   |
| $E_j = \underset{\Re}{\Re}(\tilde{E}_j)$                     |       |                                                              |                                                           | $\frac{588}{10}$                                                       | 0             | $\frac{51}{10}$                                                    | 0             |

Avec les formules :

$$x_B = \underset{\Re}{\Re}(\tilde{x}_B) \text{ et } \tilde{E}_j = \tilde{Z}^2(Z_j^1 - c_j) - \tilde{Z}^1(Z_j^2 - d_j)$$

et  $J_N = \{1,3\}$ , nous avons :

$$\tilde{E}_1 = (-\frac{732}{10}, \frac{1284}{10}, \frac{2076}{10}, \frac{2148}{10})$$

$$\text{et } \tilde{E}_3 = (-\frac{69}{10}, \frac{123}{10}, \frac{147}{10}, \frac{141}{10})$$

et  $J_B = \{3,4\}$  donc  $\tilde{E}_2 = \tilde{0}$  et  $\tilde{E}_4 = \tilde{0}$

Puisque,  $(E_1, E_3) = (\underset{\Re}{\Re}(\tilde{E}_1), \underset{\Re}{\Re}(\tilde{E}_3)) = (\frac{588}{10}, \frac{51}{10}) > 0$  et  $\tilde{E}_2 = \tilde{E}_4 = 0$ , la condition d'optimalité du théorème 5 est satisfaite, alors la solution optimale est :

$$x^* = (x_1^*, x_2^*)^t, \text{ avec } x_1^* = \underset{\Re}{\Re}(0,0,0,0) \text{ et } x_2^* = \underset{\Re}{\Re}(1,2,1,1)$$

D'où :

$$x^* = (x_1^*, x_2^*)^t = (0,3)^t$$

et la valeur optimale de la fonction objectif est :

$$Z^* = \Re(\tilde{Z}(x^*)) = \frac{\Re(3, 5, 1, 3).3}{\Re((2, 4, 1, 2).3 + (1, 2, 1, 1))} = \frac{\Re(9, 15, 3, 6)}{\Re(7, 14, 4, 7)} = \frac{25.5}{22.5}.$$

## 4.5 Programmation sur LINGO

### 4.5.1 Introduction

LINGO est un logiciel développé par John H. Thompson utilisé pour résoudre les modèles d'optimisation linéaire, entier et quadratique ...etc , il est aussi utilisé pour résoudre les modèles d'optimisation globale non linéaire. Une des caractéristique de LINGO c'est qu'il offre des outils qui peuvent aider à l'analyse des modèles en utilisant la méthode du simplexe.

Le mot LINGO signifie en anglais argot, au sens de langage vernaculaire ,langue spécialisée appartenant à un groupe précis (ex. l'argot des typographes) .

Contrairement aux langages de niveau 4 les plus répandus (basic, javascript....), le script LINGO ne reproduit pas les concepts de la programmation à l'identique mais les remanie à sa façon en vue d'une application efficace et simple. Afin de remarquer la distinction il utilise des termes différents , par exemple le « tableau » est renommé « liste », une classe est appelée « parent script » .

### 4.5.2 Installation du logiciel

Pour utiliser cette version de LINGO, il est conseillé d'avoir au moins un processeur 486 et 8Mo de mémoire RAM. Il faut aussi prévoir un espace disque dur de 2 Mo pour pouvoir l'installer. Les étapes de l'installation sont :

- 1 . Démarrer windows,
- 2 . Insérer CD-ROM,
- 3 . Cliquer sur l'icône setup (Install) dans votre explorateur de Windows,
- 4 . Suivre les instructions de l'écran. Pour plus d'information sur ce logiciel visiter l'adresse web [www.LINGO.com](http://www.LINGO.com).

### 4.5.3 Quelques opérateurs et fonctions

L'affectation se fait avec le signe =

La comparaison se fait ainsi :

- = ( égalité )
- < ( inférieur )
- > ( supérieur )
- <= ( inférieur ou égal )
- >= ( supérieur ou égale )

Les fonctions **bitAnd()**, **bitOr()** , **bitXor()** et **bitNot()** permettent d'effectuer des opérations binaires sur des entiers traités comme des tableaux de 32 bits.

**Application 1 :**

Programmation sur LINGO d'exemple numérique du chapitre 4 :

```

model:

! la solution optimale de la fonction objectif;

max=(14.5*x1+8.5*x2+0)/(14.5*x1+6.5*x2+3);
3*x1+5*x2-15<=0;
5*x1+2*x2-10<=0;

! les valeurs optimale du problème;

x1>=0;
x2>=0;

@gin (x1);
@gin (x2);
  
```

**Solution Report - LINGO1**

Local optimal solution found at iteration: 28  
Objective value: 1.133333

| Variable | Value    | Reduced Cost |
|----------|----------|--------------|
| X1       | 0.000000 | 0.000000     |
| X2       | 3.000000 | 0.000000     |

| Row | Slack or Surplus | Dual Price    |
|-----|------------------|---------------|
| 1   | 1.133333         | 1.000000      |
| 2   | 0.000000         | 0.1007408E-01 |
| 3   | 4.000000         | 0.000000      |
| 4   | 0.000000         | -0.1161482    |
| 5   | 3.000000         | 0.000000      |

**LINGO Solver Status [LINGO1]**

Solver Status:  
Model Class: PINLP  
State: Local Optimum  
Objective: 0  
Infeasibility: 0  
Iterations: 28

Variables:  
Total: 2  
Nonlinear: 2  
Integers: 2

Constraints:  
Total: 5  
Nonlinear: 1

Nonzeros:  
Total: 8  
Nonlinear: 2

Extended Solver Status:  
Solver Type: B-and-B  
Best Obj: 1.13333  
Obj Bound: 1.13333  
Steps: 0  
Active: 0

Generator Memory Used (K): 4

Elapsed Runtime (hh:mm:ss): 00:00:00

Update Interval: 2

Buttons: Interrupt Solver, Close

## 4.5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité et résolu par la méthode du simplexe flou qui est une extension du simplexe classique de Dantzig. Deux types de problème à savoir :

1. Un problème de Programmation Linéaire Factionnaire Flou à variables Réelles.
2. Un problème de Programmation Linéaire Factionnaire Flou à variables Floues.

En plus, nous avons décrit le logiciel LINGO, puis nous avons programmé notre problème qui est l'exemple numérique.

# Conclusion Générale

Depuis plusieurs années, on considère que les deux sources d'incertitude principales sont le manque d'information et la variabilité des phénomènes. On modélise, alors, les informations soit par des distributions de probabilité (informations aléatoires) soit par des ensembles flous (informations incomplètes). La théorie des ensembles flous apparaît comme un outil bien adapté pour modéliser un concept vague.

Dans notre travail nous avons abordé, en premier lieu, des programmes linéaires dont les données sont supposées être connues avec précision qui sont appelés des problèmes linéaires d'optimisation déterministes dont la résolution s'est faite par la méthode du simplexe classique de Dantzig [5].

Ensuite nous avons traité un Programme Linéaire Fractionnaire Flou dont les données sont approximatives et vagues qui est appelé un problème linéaire fractionnaire d'optimisation floue. Dans notre cas, le flou est caractérisé par des nombres flous trapézoïdaux. En utilisant les fonctions Ranking  $\mathfrak{R}$  et l'arithmétique des nombres flous de type trapézoïdal, nous avons résolu le Problème Linéaire Fractionnaire Flous avec Variables de décision puis avec Variables de décision Floues par la méthode du simplexe flou .

# Bibliographie

- [1] Amiri N. M., Nasser S. H. , Yazdani A. Fuzzy Primal Simplex Algorithms for Solving Fuzzy Linear Programming Problems. Iranian Journal of Operations Research , 1(2) 68-84, 2009.
- [2] Baillargeon G. Programmation linéaire appliquée. Les éditions SMG , Québec, 1996
- [3] Cambini A. and Martein L. A modified version of Martos's algorithm for the linear fractional problem, Methods of Oper.Res. 53, 33-44, 1986.
- [4] Charnes A. and Cooper W.W. Programming with linear fractional functionals, Naval Res. Logist. Quart. 9, 181-186, 1962.
- [5] Dantzig G.B. Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, 1963.
- [6] Dinkelbach W. On nonlinear fractional programming, Management Science 13, 492-498, 1967.
- [7] DROUCHE Hakima. Application du Simplexe Classique de Dantzig à un problème Linéaire Flou. Thèse de Master, UMMTO, 2016.
- [8] Dubois D., Prade H., Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications. Academic Press, New York, 1980.
- [9] El Barnoussi S. Programmation linéaire Méthode du simplexe, Programmation linéaire.Méthode du simplexe. Publier en ligne : « [www.fsr.ac.ma/cours/maths/bernoussi/RO-ELBERNOUSSI-2010-P1](http://www.fsr.ac.ma/cours/maths/bernoussi/RO-ELBERNOUSSI-2010-P1) », octobre 2010 »
- [10] Hamam Y., Talbot H. Introduction à la programmation mathématique (Programmation Linéaire et Optimisation Combinatoire), Introduction à la programmation mathématique ESIEE Paris, publier en ligne : [perso.esiee.fr/~talboth/ESIEE/IF4-ALG2/pdf/poly\\_optim\\_2009](http://perso.esiee.fr/~talboth/ESIEE/IF4-ALG2/pdf/poly_optim_2009). , 7 avril 2009.
- [11] Internet, [www.google.fr](http://www.google.fr)
- [12] Isbell J.R. and Marlow M.H. Attribution games, Naval Res. Logist. Quart. 3, 71-94, 1956.
- [13] Martos B. Hyperbolic programming, Naval Research Logistic Quarterly, 11, 135- 155, 1964.
- [14] Mukesh Kumar Mehlawat, and Santosh Kumar : A Solution Procedure for a Linear Fractional Programming Problem with Fuzzy Numbers. Department of Operational Research, University of Delhi, Delhi, Springer India 2012.
- [15] Nagih A. and Plateau G. Problèmes fractionnaires : Tour d'horizon sur les applications et méthodes de résolution, RAIRO Oper. Res. 33, 383-419, 1999.
- [16] Nasser S. H. , Ardil E., Yazdani A. , and Zaefarian R. Simplex Method for Solving Linear Programming Problems With Fuzzy Numbers. International Scholarly and Scientific Research & Innovation, 1(10) 500-504, 2007.
- [17] Noora A. A., Karami P. Ranking Function and its Application to fuzzy DEA , Ranking Functions and its Application to Fuzzy DEA - Hikari. Publier en ligne : [www.m-hikari.com/imf.../29-32.../nooraIMF29-32-2008](http://www.m-hikari.com/imf.../29-32.../nooraIMF29-32-2008). , 2008.

- [18] Scheid J-F. Graphe et recherche opérationnelle, Graphe et Recherche Opérationnelle. ESIAL. publier en ligne : « [www.isig.ac.cd/isiggoma/data/chier/5568820f13cf6.PDF](http://www.isig.ac.cd/isiggoma/data/chier/5568820f13cf6.PDF) 2010-2011 »
- [19] Teaching C. Chapitre 1 programmation linéaire , Chapitre 1 programmation linéaire1. Généralités. publier en ligne : « [www.rogp.hec.ulg.ac.be / Crama /Teaching / RO1lic /Docs/Chap1\\_PL.PDF](http://www.rogp.hec.ulg.ac.be/Crama/Teaching/RO1lic/Docs/Chap1_PL.PDF)
- [20] Zadeh L. A., Fuzzy sets, Information and Control. 8(3), 338-358, 1965.
- [21] Zerdani O. L'optimisation non Linéaire Multiobjectif. Thèse de doctorat , UMMTO, 2013.

# Résumé:

La Programmation Linéaire s'inscrit dans le domaine de la Recherche Opérationnelle qui consiste à la résolution de problèmes complexes visant à obtenir le meilleur résultat possible en tenant compte de certaines contraintes linéaires.

La Programmation Fractionnaire a attiré l'attention de nombreux chercheurs. La principale raison de l'intérêt dans la programmation fractionnaire provient du fait que des modèles de programmation pourraient mieux répondre aux problèmes réels.

Généralement, les données d'un programme linéaire ou non linéaire sont supposées être connues avec précision, nous parlons alors d'un problème déterministe. Dans le cas où ces dernières sont mal connues ou imprécises de nature floue, nous avons alors un Programme Flou.

Dans notre cas, le flou est caractérisé par des nombres flous trapézoïdaux. En utilisant les fonctions Ranking  $\mathfrak{R}$  et l'arithmétique des nombres flous de type trapézoïdal, nous avons résolu grâce à la méthode du simplexe flou deux types de programmes flous, à savoir :

- 1) Un Problème Linéaire Fractionnaire Flou mono-objectif avec Variables de Décision Réelles.
- 2) Un Problème Linéaire Fractionnaire Flou mono-objectif avec Variables de Décision Floues.

**Dans notre mémoire, nous nous intéressons à la résolution d'un problème Linéaire Fractionnaire Flou Mono-Objectif avec la méthode du simplexe flou.**

# Mots clé:

Nombres flous, Programme linéaire fractionnaire, Fonction Ranking  $\mathfrak{R}$ , méthode du simplexe.