

*République Algérienne Démocratique et Populaire Ministère de l'enseignement Supérieur  
Et de la recherche scientifique  
Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou*



*Faculté de génie électrique et de l'informatique  
Département d'AUTOMATIQUE*

Mémoire de fin d'étude  
**de MASTER ACADEMIQUE**  
Spécialité : **AUTOMATIQUE**

Option : **Commande des systèmes**

Présenté par :  
Menouar **MEZIANI**  
Mourad **AKKOUL**

**Thème**

**Modélisation et simulation d'un pendule  
inversé**

Mémoire soutenu publiquement le 27/09/2016 devant le jury composé de :

**M Ahmed KASRI**

MAA, UMMTO, Président

**M Fatima CHEBALLAH**

MAA, UMMTO, Rapporteur

**M Khedoudja KHERRAZ**

MCB, UMMTO, Examineur

**M Safia YOUSFI**

MAA, UMMTO, Examineur

## Remerciements

---

Nous tenons à remercier profondément Dieu, le tout puissant de nous avoir donné le courage, la volonté, ainsi que la santé pour réaliser ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements et nos sincères reconnaissances à **M<sup>me</sup> CHEBALLAH Fatima**, pour sa disponibilité, ses conseils judicieux, ses directives et ses orientations concernant notre projet de fin d'étude, tout en nous accordant sa confiance et en nous faisant profiter de sa large expérience tout au long de la réalisation de ce projet de fin d'étude.

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à Mr le chef de département **Mr TOUAT Med OUACHOUR** pour ses conseils et ses orientations,

Nous remercions les membres de jury qui ont fait l'honneur de participer au jugement de ce travail.

Nous tenons à remercier toutes les personnes qui ont contribué au bon déroulement de ce projet de fin d'étude :

- ❖ A tous les professeurs de la faculté génie électrique pour leurs conseils et leurs orientations.
- ❖ Aux personnels du département.
- ❖ A nos parents et à toute la famille **MEZIANI** et **AKKOUL**
- ❖ A nos frères et sœurs.
- ❖ A tous nos amis.

Et enfin nos remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce projet de fin d'étude.

## Dédicaces

---

### **Je dédie ce modeste travail à :**

- Mes très chers parents qui ont fait de moi ce qui je suis aujourd'hui et qui ont veillé de guider mes pas durant toute ma vie par leurs aides, leur grands émotions, leur sacrifices, et leur soutien et encouragement pendant la réalisation du projet de fin d'étude.
- A mes frères et sœurs
- A mes amis
- Mes amis de la promotion 2016

**MOURAD**

## Dédicaces

---

### Je dédie ce modeste travail à :

- Mes très chers parents qui ont fait de moi ce qui je suis aujourd'hui et qui ont veillé de guider mes pas durant toute ma vie par leurs aides, leur grands émotions, leur sacrifices, et leur soutien et encouragement pendant la réalisation du projet de fin d'étude.
- A la mémoire de mon frère AMAR
- Mes très chères sœurs : Fatma , hassina et samiha
- Mes très chers frères : Mohamed, abdou et karim Omar ainsi leur épouses farida ,karima et razika
- Mon binôme : mourad
- Mes amis de la promotion
- Mes amis (e) :dihia, samir, salim, amine, youva, sid ali, mnouar, lylia
- Toute la promotion Automatique 2016

**MENOUAR DIT SAID**

Introduction générale.....	01
Chapitre I : Description et modélisation d'un pendule inversé	
I.1 Introduction.....	03
I.2 Intérêt de l'étude d'un pendule inversé .....	03
I.3 Présentation du pendule inversé .....	04
I.3.1 Description du banc d'essais .....	04
I.4 Coordonnées généralisées du système.....	05
I.5 Modélisation du système chariot-pendule à deux degrés de liberté.....	07
I.6 Energie cinétique du système en mouvement.....	08
I.7 Energie potentielle du système.....	09
I.8 L'équation de Lagrange.....	09
I.9 L'équation de Lagrange pour le degré de liberté $q(t) = x(t)$ .....	09
I.10 L'équation de Lagrange pour le degré de liberté $q(t) = \vartheta(t)$ .....	10
I.11 Modélisation du moteur électrique à courant continu à aimant permanent commandé par l'induit	11
I.12 Les équations électriques.....	12
I.12.2 : Equation de l'induit.....	12
I.12.3 Equation de la $f_{cem}$ .....	
I.12.4 Equation mécanique.....	12
I.12.5 Equation de couple.....	13

---

I.13 :Modèle d'état du moteur .....	13
I.14 Modélisation du système global : moteur-chariot-pendule.....	14
I.14.1 Expression de la force F en fonction de la tension d'alimentation du moteur $V_c$ .....	15
I.14.2 Modèle d'état de l'ensemble moteur-chariot-pendule.....	16
I.15 Conclusion.....	19
Chapitre II : commande par retour d'état	
II.1 Introduction.....	20
II.2 la commande par retour d'état pour les systèmes non linéaires. ....	20
II.2.1 Objectif .....	20
II.2.2 Outil mathématique.....	20
II.2.3 La dérivée de Lie.....	20
II.2.4 Crochet de Lie.....	21
II.2.5 Difféomorphisme.....	21
II.2.6. Distribution .....	21
II.2.7 Théorème de Frobenius .....	21
II.2.8 Linéarisation au sens entrées-état d'un système mono variable .....	22
II.2.9 Etapes à suivre .....	22
II.3 Linéarisation au sens entrées-sortie d'un système mono variable .....	23
II.3.2 Notion de degré relative.....	24
II.3.3 Dynamique interne.....	30
II.4 Commande Linéarisante.....	31

II.5 Conclusion.....	35
Chapitre III : Résultat et simulation	
III.1 Introduction .....	41
III.2 Commande du système.....	41
III.2.2 Commande basée sur la linéarisation numérique autour du point d'équilibre.....	41
III.2.3 Commande par placement de pôles.....	42
III.3 Modèle sous « matlab-simulink » et résultats de simulation.....	42
III.3.2 Résultats de simulation.....	44
III.4 Stabilisation du pendule par retour d'état.....	45
III.4.2 Résultat de simulation.....	47
III.5 Conclusion.....	48
Conclusion générale .....	49

Figure 1.1 :	synoptique de banc d'essais du pendule inversé .....	02
Figure 1.2 :	<i>Schéma</i> de l'ensemble chariot et pendule inversé.....	04
Figure 1.3:	Schéma électrique et mécanique de l'induit.....	09
Figure 1.4:	Relation entre la force mécanique $F$ et la tension $V_c$ .....	12
Figure 2.1:	Configuration mécanique du système moteur-charge.....	19
Figure 3.1:	schéma de simulation du modèle de l'ensemble pendule-chariot-moteur	32
Figure 3.2:	résultat du simulation du modèle non linéaire (chariot) .....	33
Figure 3.3:	résultat du simulation du modèle non linéaire (pendule).....	33
Figure 3.4:	Schéma de simulations de redressement et de stabilisation du pendule inversé par le retour d'état .....	34
Figure 3.5:	la position du chariot	35
Figure 3.6:	l'angle du pendule inversé	35

Dans la commande des systèmes non linéaires ou ayant des paramètres non constants, les lois de commande classique peuvent être insuffisantes car elles sont non robustes surtout lorsque les exigences sur la précision et autres caractéristiques dynamiques des systèmes sont strictes. On doit faire appel à des lois de commande insensibles aux variations des paramètres, aux perturbations et aux non linéarités.

La commande par retour d'état fait partie de la famille des contrôleurs à structure variable, c.à.d. des commandes commutant entre plusieurs lois de commande différentes.

L'importance des contrôleurs par retour d'état réside dans : la grande précision, la réponse dynamique rapide, la stabilité, la simplicité de la conception et l'implantation, et la robustesse

vis-à-vis la variation des paramètres internes ou externes.

Le principe de la commande par retour d'état est de contraindre les trajectoires du système. Toutefois, la commande par retour d'état induit en pratique des commutations haute fréquence. Ces commutations peuvent exciter des dynamiques non désirées qui risquent de déstabiliser, détériorer voire même de détruire le système étudié.

Le pendule inversé est un système non linéaire, instable, multi-variable et très couplé, ce qui rend sa commande plus difficile. Le système pendulaire inversé fournit une excellente plate-forme expérimentale pour examiner de spécifiques théories de contrôle ou solutions typiques et favorisant ainsi le développement de nouvelles théories. Il est largement appliqué dans le domaine de la technologie de commande des robots. Une base de la pensée sur les questions de la robotique est la question de l'équilibre, qui peut être représentée de manière appropriée par l'acte d'équilibrage d'un pendule inversé. Ceci explique le fait que de nombreuses investigations aient été menées sur le problème de contrôle du pendule inversé.

Pour tirer profit de l'intérêt du pendule inversé dans la vérification des techniques de commande conçues, de la robustesse de la commande par retour d'état, nous avons élaboré pour la commande d'un système pendulaire inversé.

Le présent mémoire est organisé en trois chapitres qui sont résumés comme suit :

### **Chapitre 1 :**

Le **premier chapitre** sera consacré à la description du pendule inversé ainsi qu'à sa modélisation dynamique qui est déduite à partir d'un formalisme d'Euler Lagrange.

### Chapitre 2 :

Dans le **deuxième chapitre**, nous allons introduire les idées fondamentales de la commande par retour d'état

### Chapitre 3:

Dans le **troisième chapitre** , nous allons présenter les résultats de simulation de la commande par retour d'état classique appliqué sur un pendule inversé. Nous effectuons d'abord une modélisation au système, ensuite nous développons par Matlab afin d'interpréter et de comparer les différents résultats obtenus après la simulation.

Nous terminerons par une conclusion générale sur l'ensemble de notre travail, ainsi que les perspectives qu'il peut s'ouvrir.

## I.1 Introduction :

Quel que soit l'objectif fixé : concevoir, simuler ou commander un système mécanique, il est nécessaire, entre autres, de disposer de modèles du mécanisme. Nous s'intéresse dans ce 1er chapitre à la description et la modélisation du pendule inversé que nous utiliserons pour illustrer les commandes que nous développerons dans ce mémoire.[Ce pendule est constitué d'un chariot mobile sur un rail et d'un pendule suspendu sur le chariot. Son principe de fonctionnement est très simple en théorie : Après avoir ramené le pendule de sa position d'équilibre basse à la position verticale haute, il faut le maintenir dans cette position.Pour cela, quand le pendule penche vers la droite, le chariot doit le rattraper en effectuant un mouvement vers la droite, et inversement].

Dans ce chapitre, nous allons d'abord aborder la présentation et la description du pendule inversé Puis,à partir du formalisme d'Euler-Lagrange nous développons son modèle dynamique non linéaire qui pose un problème d'instabilité au point d'équilibre instable  $\theta = 0$ . [1]

### I.2.1 Intérêt de l'étude d'un pendule inversé :

L'étude du pendule inversé a plusieurs intérêts :

-L'homme est en fait un pendule inversé double dont les deux axes de rotations sont les chevilles et les hanches. Afin de tenir debout, les articulations travaillent sans cesse ,et l'étude de ce modèle est importante pour la construction de prothèses.

-La robotique utilise le principe du pendule inversé, en particulier dans de nouveaux moyens de transports à 2 roues comme le segway qui permet d'avancer en se penchant en avant .

- On voit apparaître des moyens de locomotion dotés de deux roues montées sur un même axe sur lequel on est en position debout. On accélère en se penchant en avant et on ralenti en se penchant en arrière. Le système est le même que le pendule inversé.

## I.3.1 Présentation du pendule inversé :[1],[2],[3]

### 3.2 Description du banc d'essais :

Le but de la commande du pendule inversé est de maintenir en équilibre vertical une tige en aluminium à l'extrémité de laquelle est montée une masse de forme cylindrique. Cette tige est fixée par une articulation pivotante sur un chariot qui peut se déplacer en glissant le long d'un rail de guidage horizontale. Le mouvement de rotation d'un moteur électrique est transformé en mouvement de translation du chariot par l'intermédiaire d'une poulie et d'une courroie crantée. Le déplacement du chariot dans un sens ou dans l'autre assure par réaction l'équilibre vertical du bras du pendule. La figure 1.1 montre les éléments mécaniques principaux du dispositif.

Initialement le pendule est en position basse, le but étant de le redresser en position haute et surtout le maintenir dans cette position.

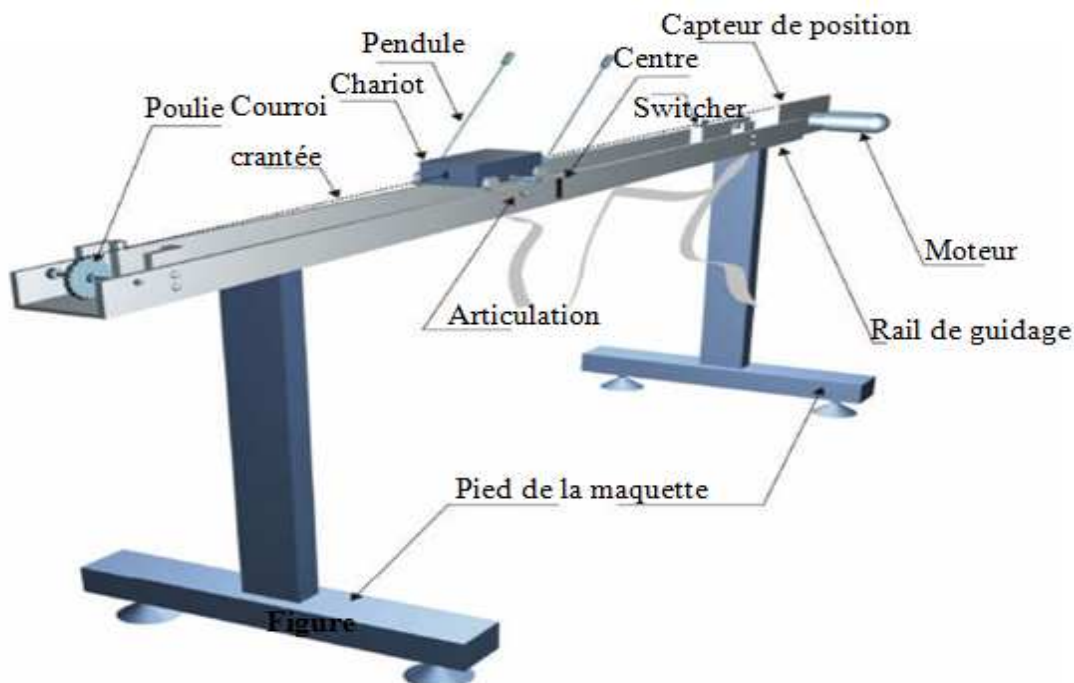


Figure (1.1) : synoptique de banc d'essais du pendule inversé .

## Description et modélisation d'un pendule inversé

---

Le principe de fonctionnement est très simple en théorie : quand le pendule penche vers la droite, le chariot doit le rattraper en effectuant un mouvement vers la droite. Et inversement. La difficulté c'est de régler l'intensité et la forme de la réaction du chariot en fonction de l'angle que le pendule fait avec la verticale. Pour contrôler le mouvement de chariot un ensemble de capteurs est installé sur la maquette. Deux capteurs sont disponibles:

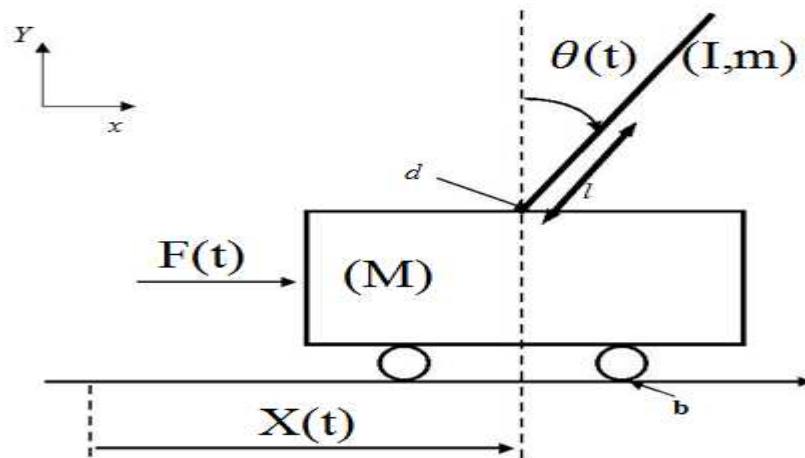
- Un capteur de position délivre une image de la position du chariot sur son rail de guidage par rapport au centre de ce dernier. Si le chariot est situé à droite du centre, une valeur positive est mesurée. Le capteur utilisé est un potentiomètre multi-tours solidaire sur l'axe du moteur.
- Un capteur de position angulaire fournit l'angle entre le bras du pendule et la verticale. Si le pendule penche vers la droite, un angle positif est mesuré. Le capteur est constitué d'un potentiomètre fixé sur le pivot du pendule [2].

De plus, la course du chariot est limitée respectivement à gauche et à droite par deux butées mécaniques. Deux interrupteurs de fin de course sont placés en avant des butées mécaniques par sécurité pour le moteur d'entraînement du chariot. Le passage du chariot entraîne la fermeture d'un interrupteur provoquant la coupure de l'alimentation du moteur électrique. L'actionneur est un moteur électrique à courant continu et à aimant permanent commandé par l'induit. La commande du moteur est effectuée par un signal variant entre 0 et +5V [2-3].

### I.4.1 Coordonnées généralisées du système : [3]

L'ensemble du chariot pendule a deux degrés de liberté qui sont représentées par deux coordonnées généralisées,  $x$  pour le déplacement horizontal du chariot,  $\theta$  pour la rotation du pendule. La direction positive de  $x$  est le sens à droite en mètre et celui de l'angle est le sens des aiguilles d'une montre en radian.

## Description et modélisation d'un pendule inversé



**Figure (1.2):** Schéma de l'ensemble chariot et pendule inversé.

Soit :

$m$ : masse du pendule

$M$  : masse du chariot

$l$  : demi longueur du pendule

$d$  : frottements du pendule

$F(t)$  : force exercée sur le chariot

$b$ : frottements de déplacement du chariot

$x(t)$ : position du chariot

$\theta(t)$ : l'angle du pendule

$g$  : intensité de pesanteur

Les valeurs numériques des différents paramètres qui sont utilisées dans les simulations sont données dans le tableau ci-dessous

Symbole	Quantité	Valeur	Unité
$m$	masse du pendule	0.2	Kg
$M$	masse du chariot	2.3	Kg

## Description et modélisation d'un pendule inversé

l	Demi-longueur du pendule	0.3	Metter
d	Coefficient de frottement de rotation du pendule	0.005	N ms/rad
g	Intensité de la pesanteur	9.81	m/ s <sup>2</sup>
F(t)	Force exercée sur le chariot	/	N
$\theta(t)$	Angle de rotation du pendule	/	Radian
X(t)	Position du chariot	/	Metter
b	Coefficient de frottement des roues du chariot	0.00005	Ns/m

**Tableau (1.1) :** Valeurs numériques du système pendule-chariot

### I.5.1 Modélisation du système chariot-pendule à deux degrés de liberté :[1];[2];[4].

Les équations du mouvement du pendule sont déterminées par le formalisme d'Euler-Lagrange qui est basé sur le principe de la conservation de l'énergie mécanique plutôt que sur le concept de force, comme dans le principe de Newton.

Le Lagrangien est défini comme étant la différence entre l'énergie cinétique  $E_c$  et l'énergie potentielle  $E_p$  du système, l'avantage de ce formalisme réside dans l'élimination des efforts d'interaction, Il s'exprime par :

$$L = E_c - E_p \quad (\text{I. 1})$$

Pour simplifier la modélisation, on suppose tout au long de notre étude que la masse du pendule est concentrée au bout de la tige. Afin de pouvoir écrire les équations dynamiques régissant le mouvement du pendule inversé, on considère les coordonnées  $q_1 = x$  et  $q_2 = \theta$  qui représente

## Description et modélisation d'un pendule inversé

---

les deux degrés de liberté du pendule. On prend comme direction positive de  $x$  le sens de gauche à droite et celui de l'angle est le sens des aiguilles d'une montre.

### I.6.1 Energie cinétique du système en mouvement :

Le système en mouvement comporte le chariot qui se déplace linéairement sur les rails et le pendule qui se balance sur son axe de rotation.

L'énergie cinétique du chariot en mouvement est donnée par l'équation :

$$E_M = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (I.2)$$

L'énergie cinétique du pendule est exprimée par l'équation :

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m \vec{v}_c^2 \quad (I.3)$$

$v_c$  : La vitesse de centre de gravité du pendule

La position du centre de gravité du pendule, notée  $r_c$  à partir de ces coordonnées est donnée par :

$$\vec{r}_c = (x + l \sin \theta) \vec{i} + l \cos \theta \vec{j} \quad (I.4)$$

D'où la vitesse du centre de gravité du pendule est :

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = (\dot{x} + l \cos(\theta) \dot{\theta}) \vec{i} - l \dot{\theta} \sin \theta \vec{j} \quad (I.5)$$

En substituant les équations (1.5) dans l'équation (1.3) on trouve :

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}l \cos(\theta) \dot{\theta} + l^2 \cos^2(\theta) \dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2(\theta) \dot{\theta}^2) \quad (I.6)$$

Avec simplification, l'équation (1.6) de l'énergie cinétique du pendule prend alors la forme :

$$E_{cm} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2l \cos(\theta)\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2) \quad (I.7)$$

L'énergie cinétique de l'ensemble chariot (1.2) et pendule (1.7) est exprimée par :

$$E_c = E_{cM} + E_{cm} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2l \cos(\theta)\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2) \quad (I.8)$$

### I.7.1 Energie potentielle du système :

Le chariot étant en mouvement sur un rail horizontal, seul le pendule en mouvement possède une énergie potentielle. L'énergie potentielle du centre de gravité du pendule est donnée par :

$$E_p = mgl \cos \theta \quad (I.9)$$

### I.8.1 L'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = F_i \quad (1.10)$$

Avec :

L : Le lagrangien

$\partial \dot{q}_i$  : La  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur de coordonnées généralisées.

$\partial q_i$  : La  $i^{\text{ème}}$  composante de la vitesse généralisée.

$F_i$  : La force généralisée associée à  $q_i$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right) = F \quad (I.11)$$

### I.9.1 L'équation de Lagrange pour le degré de liberté $q(t) = x(t)$ :

La dérivée partielle du lagrangien suivant  $\dot{x}$  et  $t$  s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (M\dot{x} + m\dot{x} + ml \cos(\theta)\dot{\theta}) = F \quad (\text{I.12})$$

D'où la première équation de Lagrange :

$$(M + m)\ddot{x} + ml \cos(\theta)\ddot{\theta} - ml \sin(\theta)\dot{\theta}^2 = F \quad (\text{I.13})$$

**I.10.1 L'équation de Lagrange pour le degré de liberté  $q(t) = \theta(t)$  :**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (\text{I.14})$$

La dérivée partielle du lagrangien suivant  $\dot{\theta}$  et  $t$  s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (ml\dot{x} \cos(\theta) + ml^2\dot{\theta}) - (-ml\dot{x} \sin(\theta)\dot{\theta} + mgl \sin(\theta)) \quad (\text{I.15})$$

donc la deuxième équation de Lagrange est :

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos(\theta) - ml\dot{x} \sin(\theta)\dot{\theta} + ml\dot{x} \sin(\theta)\dot{\theta} - mgl \sin(\theta) = 0 \quad (\text{I.16})$$

Après la simplification, on obtient :

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos(\theta) - mgl \sin(\theta) = 0 \quad (\text{I.17})$$

Finalement, le modèle de connaissance du système chariot-pendule est donné par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + ml \cos(\theta)\ddot{\theta} - ml \sin(\theta)\dot{\theta}^2 = f \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos(\theta) - mgl \sin(\theta) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

## Description et modélisation d'un pendule inversé

---

Ce modèle peut être écrit sous la forme de Gauchy (modèle d'état non linéaire). Pour cela, on définit les variables d'état comme suit :

$x_1 = x$  (Position rectiligne du chariot).

$x_2 = \dot{x}$  (vitesse du chariot).

$x_3 = \theta$  (Position angulaire de la tige).

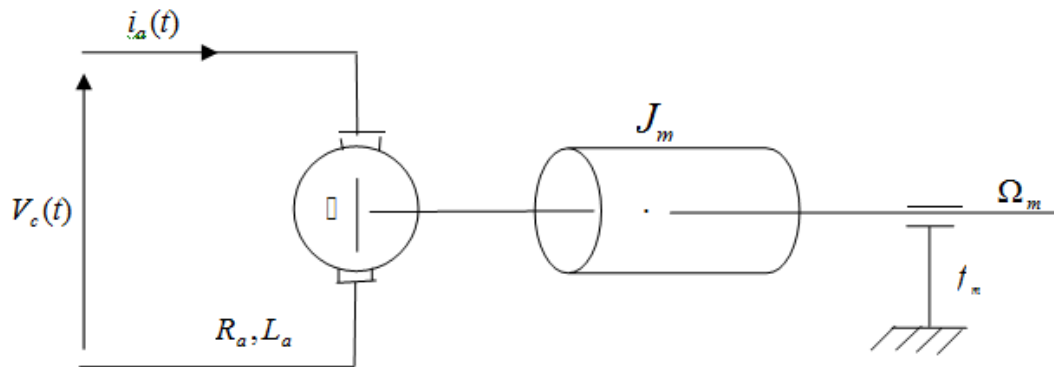
$x_4 = \dot{\theta}$  (vitesse angulaire de la tige).

Le modèle d'état non linéaire s'écrit sous la forme suivante :

$$\dot{X}(t) = f(X(t)) + g(X(t))f(t) \quad (\text{I. 19})$$

### **I.11.1 Modélisation du moteur électrique à courant continu à aimant permanent commandé par l'induit [12]**

Comme le moteur utilisé pour entraîner le chariot est un moteur à courant continu à aimant permanent, le flux inducteur est constant. Le schéma électrique et mécanique équivalent de l'induit est donné par la figure (I. 3)



**Figure(1.3) :** Schéma électrique et mécanique de l'induit

Les paramètres de la machine sont :

$R_a = 2.5\Omega$  : Résistance de l'induit,  $L_a = 0.0025 H$  : Inductance de l'induit,  $-2.5 \leq V_c \leq 2.5$  : La tension d'alimentation de l'induit du moteur (V),  $i_a(t)$  : Intensité du courant (A),  $i_a(t)$  : Intensité du courant (A),  $K_b = 0.05 N/A$  : Constante électrique du moteur,  $K_a = 0.05 Nm$  : Constante mécanique,  $\ell(t)$  : f.cem,  $J_m = 1.4 \times 10^{-5} Kg \cdot m^2$  : Moment d'inertie,  $C_r(t)$  : Couple résistant,  $C_m(t)$  : Couple moteur,  $f_m = 10^{-6} Kg \cdot m^2/s$  : Coefficient de frottement visqueux,  $\Omega_m$  : vitesse angulaire de l'arbre du moteur [12].

- ❖ Les équations régissant le fonctionnement du moteur à courant continu à aimant permanent sont :

## I.12.1 : Les équations électriques :

### 12.2 : Equation de l'induit :

$$V_c(t) = R_a I_a + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + \ell(t) \quad (\text{I.20})$$

### 12.3 : Equation de la fcm

$$\ell(t) = K_b \Omega_m(t) \quad (\text{I.21})$$

### 12.4 : Equation mécanique :

$$C_m(t) = J_m \frac{d\Omega_m(t)}{dt} + C_r + f_m \Omega_m(t) \quad (\text{I.22})$$

### 12.5 : Equation de couple :

$$C_m(t) = K_m i_a(t) \quad (\text{I.23})$$

## I.13.1 :Modèle d'état du moteur

En l'absence du couple résistant ( $C_r(t) = 0$ ), et en considérant la vitesse angulaire de l'arbre de moteur comme sortie, puis remplaçant l'équation (1.2) dans l'équation (1.23) et l'équation (1.22) dans l'équation (1.21) on obtient

## Description et modélisation d'un pendule inversé

---

$$\frac{d\Omega_m}{dt} = \frac{-f_m}{J_m} \Omega_m + \frac{K_m}{J_m} i_a(t)$$

$$\frac{d\Omega_m(t)}{dt} = \frac{K_b}{L_a} \Omega_m(t) - \frac{R_a}{L_a} i_a(t) + \frac{1}{L_a} V_c(t) \quad (\text{I.24})$$

$$y_m = \Omega_m$$

Ces équations, écrites sous la forme matricielle, permettent d'obtenir le modèle d'état de la machine, il est donné par :

$$\begin{cases} \dot{z} = A z + B V_c \\ y = C z \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

Avec

$$z = [\Omega_m, i_a]^T$$

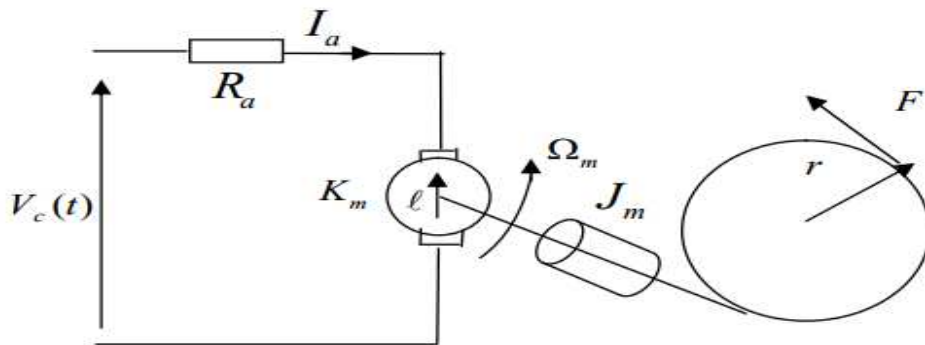
$$A = \begin{bmatrix} \frac{-f_m}{J_m} & \frac{K_m}{J_m} \\ \frac{-K_b}{L_a} & \frac{-R_a}{L_a} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0] \quad (\text{I.26})$$

Si on considère le courant de l'induit comme étant la sortie, l'équation dynamique du modèle reste la même, par contre la matrice de sortie devient :

$$C = [0 \quad 1] \quad (\text{I.27})$$

### I.14.1 : Modélisation du système global : moteur-chariot-pendule

Le modèle (1.20) décrit le régime transitoire de l'ensemble pendule-chariot lorsque l'entrée est une force extérieure  $F$ . Dans le banc d'essai que nous utilisons, la force  $F$  est développée par un moteur à courant continu. Le schéma de la figure 1.4 illustre la relation existante entre le moteur commandé par la tension  $V_c(t)$  et la force  $F$  permettant l'entraînement du chariot donc le balancement du pendule.



**Figure(1.4)** : Relation entre la force mécanique  $F$  et la tension  $V_c$

## Description et modélisation d'un pendule inversé

---

### I.14.1 : Expression de la force $F$ en fonction de la tension d'alimentation du moteur $V_c$

Pour déterminer cette expression et afin de ne pas rendre plus complexe le modèle globale de l'ensemble pendule-chariot-moteur, on néglige la dynamique du moteur, par conséquent, l'équation électrique (1.21) devient en tenant compte de l'équation (1.21) [6],[8] :

$$V_c = R_a I_a + K_b \Omega_m \quad (\text{I.28})$$

Et comme  $x = r\Phi$  .  $\Phi$  : étant la position angulaire d'un point quelconque située sur le périmètre de la poulie, et  $r=0.0027$  m : le rayon de la poulie, on obtient :

$$\frac{d}{dt} x(t) = r \frac{d}{dt} \Phi(t) = r \Omega_m(t) \quad (\text{I.29})$$

la vitesse angulaire du moteur  $\Omega_m$  S'exprime donc par rapport à la vitesse du chariot  $\dot{x}$  par la relation

$$\Omega_m = \dot{x}/r \quad (\text{I.30})$$

En substituant l'équation (1.30) dans l'équation (1.28), l'expression du courant de l'induit  $I_a$  s'écrit

$$I_a = \frac{V_c}{R_a} - \frac{K_b}{rR_a} \dot{x} \quad (\text{I.31})$$

Le couple produit à l'arbre du moteur (l'équation (1.23)) crée une force qui est donnée par

$$F = \frac{C_m}{r} = \frac{K_m I_a}{r} \quad (\text{I.32})$$

En remplaçant l'équation (1.31) dans l'équation (1.32), on obtient finalement :

$$F = \frac{K_m}{rR_a} V_c - \frac{K_m K_b}{r^2 R_a} \dot{x} \quad (\text{I.33})$$

### 14.2 : Modèle d'état de l'ensemble chariot-pendule

Afin d'obtenir le modèle d'état de l'ensemble chariot-pendule, on utilise une nouvelle fois le modèle (1.20). Ou  $X(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$  est le vecteur d'état,  $f(t)$  est l'entrée appliquée au pendule. L'expression du modèle sera sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{-mg \cos(x_3) \sin(x_3) + mlx_4^2 \sin(x_3)}{M + m \sin^2(x_3)} \\ x_4 \\ \frac{(M + m)g \sin(x_3) - mlx_4^2 \cos(x_3) \sin(x_3)}{(M + m \sin^2(x_3))l} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\cos(x_3)}{(M + m \sin^2(x_3))l} \end{pmatrix} f \quad (I.34)$$

On pose :

$$F = (M + m \sin^2(x_3))u - (ml \sin(x_3) x_4^2 - mg \sin(x_3) \cos(x_3)) \quad (I.35)$$

Avec  $u$  une commande auxiliaire.

On obtient les expressions des champs de vecteur  $f^*(X(t))$  et  $g^*(X(t))$  simplifiées suivantes :

$$f^*(X(t)) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ \frac{g \sin(x_3)}{l} \end{pmatrix}. \quad (I.36)$$

$$g^*(X(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\cos(x_3)}{l} \end{pmatrix}.$$

### 14.3 modèle d'état de l'ensemble moteur-chariot-pendule

Afin d'obtenir le modèle d'état de l'ensemble moteur-chariot-pendule, on utilise une autre fois le modèle (I.18), le vecteur d'état est :

$$z = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4]^T = [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T \quad (I.37)$$

Après quelques manipulations mathématiques, on obtient le modèle non linéaire (I.38) où la grandeur de commande est la force  $F$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = \frac{-bN}{hN - m^2 l^2 \cos^2 Z_3} z_2 - \frac{m^2 l^2 g}{hN - m^2 l^2 \cos^2 Z_3} \cos Z_3 \sin Z_3 \\ \quad + \frac{m l d \cos Z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 Z_3} z_4 + \frac{m l N \sin Z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 Z_3} z_4^2 + \frac{FN}{hN - m^2 l^2 \cos^2 Z_3} \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = \frac{mgl}{N} \sin Z_3 - \frac{d}{N} z_4 + \frac{m l b \cos Z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 Z_3} z_2 + \frac{m^3 l^3 g \cos^2 Z_3 \sin Z_3}{N(hN - m^2 l^2 \cos^2 Z_3)} \\ \quad - \frac{m^2 l^2 \cos^2 Z_3}{N(hN - m^2 l^2 \cos^2 Z_3)} z_4 - \frac{m^2 l^2 \cos Z_3 \sin Z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 Z_3} z_4^2 - \frac{m l F}{hN - m^2 l^2 \cos^2 Z_3} \cos Z_3 \\ y_1 = z_1 \\ y_2 = z_3 \end{array} \right. \quad (I.38)$$

### I.1.15 Conclusion :

Le pendule inversé est un système non linéaire et sous-actionné. Il est souvent utilisé pour tester l'efficacité de nouvelles commandes. C'est pour cette raison que nous l'avons choisi comme application, afin de mettre en évidence l'efficacité de notre stratégie de commande.

# Commande par retour d'état

---

## I.1 Introduction :

La commande par retour d'état est à la commande des systèmes modélisés par leur représentation d'état, ce que la boucle fermée est aux systèmes représentés par une fonction de transfert. L'idée consiste toujours à piloter le système par un signal de consigne et à générer automatiquement le signal de commande en confrontant en permanence la valeur de la consigne et le comportement réel du système. L'écart entre consigne et comportement réel sert de base au signal de commande du système. Dans la commande par retour d'état, nous n'allons pas mesurer le signal de sortie pour le boucler sur l'entrée, mais nous allons nous servir du vecteur d'état complet pour prendre connaissance du comportement du système.

## II.2. La commande par retour d'état pour les systèmes [13],[14],[16],[17],[11]

L'idée principale de la linéarisation par retour d'état et de la transformer les dynamiques d'un système non linéaire en dynamique linéaire a l'aide d'un changement de coordonnées sur l'état du système et d'une commande par retour d'état de sorte que les techniques de contrôle linéaires peuvent être appliquées.

### 2.1. Objectif

L'objectif de cette commande est d'obtenir un système linéaire en boucle fermée.

### 2.2. Outil mathématique

**Modèle :**

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

$U$  : Vecteur d'entrée du système

$h(x)$  : Fonction analytique de  $x$ .

$f, g$  : Champs de vecteurs supposés infiniment différentiables.

Pour faire la linéarisation d'un système non linéaire on utilise les notions de base de la géométrie différentielle telles que la dérivée de Lie, crochet de Lie, le difféomorphisme.

### 2.3. La dérivée de Lie [4]

Noter

---

## Commande par retour d'état

---

$$L_F h(x) = \frac{\sigma h}{\sigma x} \cdot F(x) = \nabla h(x) \cdot f(x) \quad (\text{II.2})$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sigma h(x)}{\sigma x_1} & \frac{\sigma h(x)}{\sigma x_2} & \dots & \frac{\sigma h(x)}{\sigma x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x) \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

### 2.4. Crochet de Lie

Soient  $f(x)$  et  $g(x)$  deux champs de vecteur

$$[F \ G] = \frac{\sigma g(x)}{\sigma x} f(x) - \frac{\sigma f(x)}{\sigma x} g(x) \quad (\text{II.4})$$

### 2.5. Difféomorphisme [4]

Le changement de coordonnées  $z = \phi(x)$  est un difféomorphisme

$\phi(x)$  est difféomorphisme au voisinage d'un point  $x_0$  si et seulement si la jacobéenne de  $\phi(x)$  évaluée en  $x_0$  est une matrice inversible.

### 2.6. Distribution [4]

Une distribution notée  $\Delta(x)$  est un espace vectoriel engendré par des champs de vecteurs

$$f_1(x), f_2(x) \dots \dots \dots f_d(x)$$

### 2.7. Théorème de Frobenius [4]

**Définition(1) :**

Soit  $F = [f_1 \dots \dots \dots f_m]$  un ensemble de champs de vecteurs linéairement indépendants défini dans  $R_n$ .  $F$  est complètement intégrable si et seulement s'il existe  $(m-n)$  fonctions scalaires  $h_1, h_2, \dots \dots \dots h_{n-m}$  qui satisfont les équations différentielles partielles définies par

$$\nabla_{h_i} f_j(x) = 0 \quad \forall x \text{ avec } 1 < i \leq n - m \text{ et } 1 \leq j \leq m \quad (\text{II.5})$$

# Commande par retour d'état

---

**Définition(2) :**

$$\Delta(x) = \text{span}[f_1(x) \dots \dots \dots f_m(x)] \quad (\text{II.6})$$

Est involutive si tout crochet de Lie  $[f_i(x), f_j(x)] \in \Delta(x)$  est linéairement dépendant des  $[f_1 \dots \dots \dots f_m]$ .

**Théorème [8]**

Soit F un ensemble de champs de vecteurs linéairement indépendants. F est complètement intégrable si et seulement s'il est involutif

## 2.8. Linéarisation au sens entrées-état d'un système mono variable

Soit le système non linéaire d'ordre  $n$  décrit par les équations suivantes :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (\text{II.7})$$

Il s'agit de vérifier si on peut trouver une transformation de coordonnées  $z = \phi(x)$

(Difféomorphisme) et une transformation non linéaire de la commande de la forme :

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (\text{II.8})$$

De façon à obtenir des relations linéaires entre le nouvel état  $z$  et les nouvelles entrées  $v$  calculée à partir de la dynamique désirée du système.

**Théorème : [13],[14],[16],[17],[11]**

Un système mono variable de la forme(2) est complètement linéarisable entrée-état si les deux conditions sont satisfaites :

- 1) Les vecteurs  $[g, \text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g, \dots \dots \dots \text{ad}_f^{n-2} g]$  sont linéairement indépendants.
- 2) La distribution  $\Delta = \text{span}[g, \text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g, \dots \dots \dots \text{ad}_f^{n-2} g]$  est involutive.

## 2.9. Etapes à suivre [5]

La linéarisation au sens entrée-état est réalisée en quatre étapes.

- 1) construire le champ de vecteur  $[g, \text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g, \dots \dots \dots \text{ad}_f^{n-2} g]$  vérifié les conditions de commandabilité et d'Involutivité.
- 2) choisir le premier élément du nouveau d'état  $z$  de façon à respecter les conditions :

$$\nabla_{z_1} \text{ad}_f g = 0 \quad (\text{II.9})$$

$$\nabla_{z_1} \text{ad}_f^{n-1} g \neq 0 \quad (\text{II.10})$$

## Commande par retour d'état

3) construire le nouveau vecteur d'état  $z(x) = [z_1 \ l_f z_1 \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ l_f^{n-1} z_1]$  ainsi la transformation de la commande définie par  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ .

Avec :

$$\alpha(x) = -\frac{l_f^n z_1}{l_g l_f^{n-1} z_1} \beta(x) = -\frac{1}{l_g l_f^{n-1} z_1}$$

Et  $v$  est la nouvelle entrée du système calculé à partir de la dynamique de l'erreur désirée.

On va démontrer cette procédure dans l'exemple suivant :

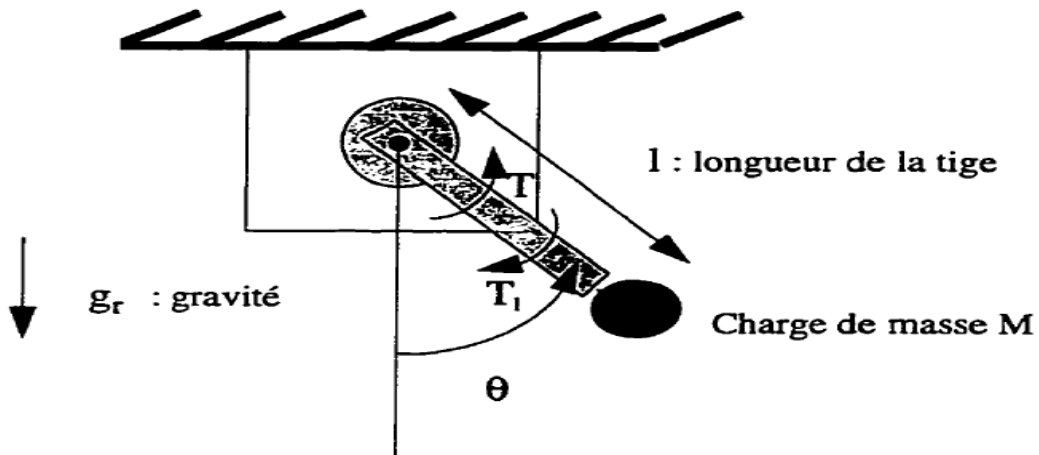
### ❖ Exemple : [5]

La figure (2.1) montre une configuration pendule d'un système moteur-charge.

Le moteur entraîne un pendule. Un tel système peut être représenté par un modèle non linéaire du deuxième ordre.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{II.11}$$

$$X = \begin{bmatrix} \theta \\ w \end{bmatrix} \quad f(x) = \begin{bmatrix} w \\ -\frac{b}{J} w - \frac{Mgl \sin \theta}{J} \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}$$



**Figure (2.1) :** Configuration mécanique du système moteur-charge.

## Commande par retour d'état

---

**Solution :**

- La première étape consiste à vérifier la linéarisabilité du système. Dans ce sens nous pouvons démontrer que les deux vecteurs

$$\nabla_{z_1} \text{ad}_f g(x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) \quad (\text{II.12})$$

$$\nabla_{z_1} \text{ad}_f g(x) = \begin{bmatrix} -\frac{L}{J} \\ B \\ \frac{1}{J^2} \end{bmatrix} g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ J \end{bmatrix}$$

Sont linéairement indépendants.

- on vérifie que l'ensemble (g) est involutif, Le système est donc linéarisable au sens entrée - état. Le premier élément  $z_1$ , du nouvel état  $z$  est choisi de sorte que

$$\nabla_{z_1} g = 0 \rightarrow \frac{\partial z_1}{\partial \theta} \times 0 + \frac{\partial z_1}{\partial w} \times \frac{1}{J} = 0 \quad (\text{II.13})$$

$$\nabla_{z_1} \text{ad}_f g \neq 0 \rightarrow \frac{\partial z_1}{\partial \theta} \times \frac{1}{J} + \frac{\partial z_1}{\partial w} \times \frac{B}{J^2} = 0 \quad (\text{II.14})$$

alors :  $z = [Z_1 L_F Z_1]^T = [\theta \ w]^T$  devient le nouvel état du système.

**En posant :**

$$\alpha(x) = -\frac{l_f^2 z_1}{l_g l_f^2 z_1} = Bw + Mg_r l \sin \theta \quad (\text{II.15})$$

$$\beta(x) = -\frac{1}{l_g l_f^2 z_1} = J \quad (\text{II.16})$$

La loi de commande linéarisante devient :

$$u = [Bw + Mg_r l \sin \theta] + Jv \quad (\text{II.17})$$

### II.3.1. Linéarisation au sens entrées-sortie d'un système mono variable

Lorsque la linéarisation au sens entrée-état n'est pas réalisable, il est possible de faire une linéarisation au sens entrée-sortie.

#### 3.2. Notion de degré relative [13],[14],[16],[17],[11]

Considérons le système non linéaire monovariante suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) + g(x)u \\ y(t) = h(x) \end{cases} \quad \begin{cases} u(t) \in \mathfrak{R} \\ y(t) \in \mathfrak{R} \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

## Commande par retour d'état

---

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

### Définition :

On appelle  $r$  le degré relatif du système donné par l'équation (II.18) au point  $x_0 \in D$  si seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$l_g l_f^k h(x) = 0 \quad 0 < k < r-1 \quad (\text{II.20})$$

$$l_g l_f^{r-1} h(x) \neq 0 \quad (\text{II.21})$$

### Remarque :

D'une manière générale, le degré relatif égal à l'ordre de dérivation qui doit être appliquée à la sortie afin d'avoir une dépendance explicite de l'entrée.

Pour les systèmes linéaire, le degré relatif représente la différence entre le degré du dénominateur et le degré de numérateur de la fonction de transfert.

Le degré relatif nombre de fois qu'on dérive la sortie pour apparaitre l'entrée, si nous dérivons la sortie du système d'équation :

$$\frac{dy_m(t)}{dt} = -a_m y_m(t) + b_m u_c(t)$$

on obtient:

$$\dot{y} = \frac{\sigma h}{\sigma x} \dot{x} \quad (\text{II.21})$$

$$\dot{y} = \frac{\sigma h}{\sigma x} (f(x) + g(x)u) \quad (\text{II.22})$$

$$\dot{y} = \frac{\sigma h}{\sigma x} f(x) + \frac{\sigma h}{\sigma x} g(x) \quad (\text{II.23})$$

$l_g h(x) = 0$  On fait  $n$  dériver jusque on trouve  $l_g h(x) \neq 0$  donc le système est commandable  $n \leq r$  on a deux cas :

#### • Cas1 : $r = n$

Lorsque on trouve que le degré relatif égale à la démontions de notre système, le système effectué une linéarisation qu'on se fait en deux étapes :

- a) La mise du système sous la forme normale
- b) Le retour d'état linéarisant.

## Commande par retour d'état

---

On peut donc trouver la forme normale du système en appliquant le changement de coordonnées (un difféomorphisme)  $\phi(x) = [\phi_1(x), \dots, \dots, \phi_n]$

$$\begin{cases} z_1 = h(x) = \phi_1(x) \\ z_2 = l_f h(x) = \phi_2(x) \\ \vdots \\ z_n = l_f^{n-1} h(x) = \phi_n(x) \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

Dans les nouvelles coordonnées  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , le système (1) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_n = a(x) + b(x) \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

Retour d'état linéarisant :

$$u(x) = \frac{1}{\beta(x)} (-\alpha(x) + v) \quad (\text{II.26})$$

La forme équation (II.6) correspond à un système linéaire et contrôlable; elle est appelée la forme canonique Brunovsky :

$$\dot{z}_n = Az + bv \quad (\text{II.27})$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### Remarque:

Les valeurs propres de la matrice d'état sont toutes nulles, d'où l'instabilité du système

## Commande par retour d'état

---

❖ Exemple :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (\text{II.28})$$

$$y = x_3 \quad (\text{II.29})$$

Le degré relatif :

$$l_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.30})$$

$$= [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.31})$$

$$l_g l_f h(x) = \frac{\partial l_f h(x)}{\partial x} g(x) = [1 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.32})$$

$$l_g l_f^2 h(x) = [-1 \ -2x_2 \ 0] \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} = -(1 + 2x_2)e^{x_2} \quad (\text{II.33})$$

$$l_g l_f^2 h(x) \neq 0 \rightarrow r = 3 = n \quad (\text{II.34})$$

Changement de coordonnées :

$$\begin{cases} z_1 = h(x) = x_3 = \phi_1(x) \\ z_2 = l_f h(x) = x_1 - x_2 = \phi_2(x) \\ z_3 = l_f^2 h(x) = -(x_1 - x_2^2) = \phi_3(x) \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

$$\phi(x) \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 - x_2 \\ -(x_1 - x_2^2) \end{bmatrix} \quad (\text{II.36})$$

Difféomorphisme si  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  est inversible ( $\det \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \neq 0$ ).

Forme normal :

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_3 = x_1 - x_2 = z_2$$


---

## Commande par retour d'état

---

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 &= -\dot{x}_1 - 2x_2\dot{x}_2 \\ \dot{z}_3 &= -e^{x_2}u - 2x_2(x_1 + x_2^2 + e^{x_2})u \\ \dot{z}_3 &= -2x_2(x_1 + x_2^2) - (1 + 2x_2)e^{x_2}u \end{aligned} \tag{II.37}$$

Le feedback linéarisant :

$$u(x) = \frac{1}{b(x)} (-a(x) + v) \tag{II.38}$$

$$u(x) = \frac{1}{(1+2x_2)e^{x_2}} (2x_2(x_1 + x_2^2) + v) \tag{II.39}$$

Le système en boucle fermée :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = u \end{cases} \tag{II.40}$$

- **Cas 2 :  $r < n$**

La linéarisation partielle correspond à un degré relatif  $r$  inférieur à l'ordre du système  $r < n$  la forme normale est représentée par les fonctions  $h(x), l_f h(x), \dots, l_f^{r-1} h(x)$ , donnent les  $r$  premiers composants du difféomorphisme  $\phi(x)$ . Les  $(n-r)$  composantes restantes sont choisies de sorte que :

$$l_g \phi_j(x) = 0 \quad \text{avec } r+1 \leq j \leq n \tag{II.41}$$

Ce choix est justifié pour la raison suivante :

Le système d'équation (II.38) donne le nouveau système de coordonnées, s'écrit :

## Commande par retour d'état

---

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{z}_{r-1} = z_r \\ \dot{z}_r = a(x) + b(x) \\ \dot{z}_{r+1} = \frac{d\phi_{r+1}}{dt} = \frac{\partial \phi_{r+1}}{\partial x} \cdot \dot{x} \\ \quad = \frac{\partial \phi_{r+1}}{\partial x} f(x) + \frac{\partial \phi_{r+1}}{\partial x} g(x)u \\ \dot{z}_{r+1} = l_f \phi_{r+1}(x) + l_g \phi_{r+1}(x)u \\ \dot{z}_{r+2} = l_f \phi_{r+2}(x) + l_g \phi_{r+2}(x)u \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{z}_n = l_f \phi_n(x) \end{array} \right. \quad (\text{II.42})$$

Le retour d'état linéarisant :

$$u(x) = \frac{1}{\beta(x)} (-\alpha(x) + v) \quad (\text{II.43})$$

Système en boucle fermée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{z}_r = v \end{array} \right\} \quad (\text{II.44})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_{r+1} = l_f \phi_{r+1}(x) \\ \dot{z}_{r+2} = l_f \phi_{r+2}(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{z}_n = l_f \phi_n(x) \end{array} \right\} \quad (\text{II.45})$$

La linéarisation entrée-sortie partielle, décompose le système d'équation (II.41) en deux parties:

a) Une part linéaire sous forme canonique (partie externe), qui donnent une relation différentielle entre l'entre et la sortie.

---

## Commande par retour d'état

---

b) Une partie interne non observable représentée par le système d'équation  $\dot{n} = q(n, \delta)$ , cette partie est appelée la dynamique interne.

### 3.3. Dynamique interne [5]

La dynamique de la partie non observable équation (II-44) est appelée la dynamique interne. La stabilité de cette dynamique est exigée pour la création de la commande. Pour un système linéaire, la dynamique interne est stable si les zéros de la fonction de transfert se situent dans le demi-plan gauche du domaine complexe. Par analogie, on introduit la notion de la dynamique des zéros pour étudier la stabilité de la dynamique interne d'un système non linéaire.

❖ **Exemple :**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (\text{II.46})$$

$$y = x_3$$

**Solution :**

❖ Degré relatif :

$$l_g h(x) = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.47})$$

$$l_g l_f h(x) = [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad (\text{II.48})$$

Donc  $r=2 < n$

Présence de la dynamique de zéros

❖ Changement de coordonnée :

$$\begin{cases} z_1 = h(x) = x_3 \\ z_2 = l_f h(x) = x_2 \\ \text{rest } z_3 = \phi_3(x) \end{cases} \quad (\text{II.49})$$

$$\left[ \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \ \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} \ \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} \right] \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.50})$$

Une solution :

$$\phi_3(x) = 1 + x_1 + e^{x_2} \quad (\text{II.51})$$


---

## Commande par retour d'état

---

$$\begin{aligned} z_1 &= x_3 \\ z_2 &= x_2 \\ z_3 &= 1 + x_1 + e^{x_2} \end{aligned}$$

$\phi(x)$  Difféomorphisme

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 - e^{x_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.52})$$

$$\det \frac{\partial \phi}{\partial x} = -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \phi \text{ est un difféomorphisme}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{x}_3 = x_2 = z_2 \\ \dot{z}_2 = \dot{x}_2 = x_1 x_2 + u \\ \dot{z}_3 = -\dot{x}_1 - e^{x_2}(x_1 x_2 + u) \\ \dot{z}_3 = -x_1 - x_1 x_2 e^{x_2} \\ y = z_1 \end{cases} \quad (\text{II.53})$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = x_1 x_2 + u \end{cases} \quad (\text{II.54})$$

Partie cachée  $\{\dot{z}_3 = -x_1 - x_1 x_2 e^{x_2}\} \quad (\text{II.55})$

Retour d'état linéarisant :

$$u(x) = \frac{1}{\beta(x)} (-\alpha(x) + v) = \frac{1}{1} (-x_1 x_2 + v) \quad (\text{II.56})$$

$$u(x) = -x_1 x_2 + v \quad (\text{II.57})$$

Système en boucle fermée :

$$\text{Partie linéaire } \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = v \end{cases} \quad (\text{II.58})$$

Partie cachée  $\{\dot{z}_3 = -(z_3 + 1 + e^{z_2}) - (z_3 + 1 + e^{z_2})z_2 e^{z_2}\} \iff$  la dynamique de zéros

### II.4. Commande Linéarisante:

Dans sa forme la plus simple, Feedback linéarisation concerne à simplifier les non linéarités dans un système non linéaire de telle façon la dynamique en boucle fermée soit linéaire.

---

## Commande par retour d'état

---

Nous allons essayer de montrer cette idée sur l'exemple suivant:

Soit un système non linéaire décrit par la dynamique suivante:

$$a\dot{x} = u - b\sqrt{2gx} \quad (\text{II.59})$$

Où  $a$ ,  $b$  et  $g$  sont des constantes.

$U$  la commande du système.

$x$  l'état de sortie du système et soit  $x_d$  la sortie désirée du système.

Si  $u(t)$  est choisie comme:

$$u(t) = b\sqrt{2gx} + av \quad (\text{II.60})$$

Avec  $v$  est une nouvelle entrée appelée dans la littérature "entrée équivalente" que nous devons définir, alors la nouvelle dynamique sera linéaire de la forme

$$\dot{x} = v \quad (\text{II.61})$$

Choisissant  $v$  tel que :

$$v = x_d - k_p[x - x_d] \quad (\text{II.62})$$

Choisissant  $v$  tel que:

$$v = x_d - k_p[x - x_d] \quad (\text{II.63})$$

Donc l'équation (II.61) devient:

$$\dot{x} - x_d - k_p[x - x_d] \quad (\text{II.64})$$

Posant  $x_d - x = e$  qui est l'erreur, donc la dynamique résultante en boucle fermée sera:

$$\dot{e} + k_p e = 0 \quad (\text{II.65})$$

$k_p$  Doit être une constante strictement positive pour que l'erreur  $e(t)$  converge vers zéro, donc  $e(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$

En basant sur cette analyse, la loi de commande non linéaire est donnée par

$$u(t) = b\sqrt{2gx} + a[x_d - k_p e] \quad (\text{II.66})$$

Notons que dans la loi de commande  $e = y_m - y$  le premier terme est utilisé pour compenser la non linéarité  $b\sqrt{2gx}$ , tandis que le deuxième terme est utilisé pour assurer la poursuite de la trajectoire désirée [8].

L'idée de la commande linéarisante est d'éliminer les non linéarités et d'imposer une dynamique linéaire désirée. Elle peut être appliquée simplement à une classe de systèmes non linéaires décrits par ce qu'on appelle la forme compagne si sa dynamique est représentée par:

$$x^{(n)} = f(x) + g(x).u \quad (\text{II.67})$$

## Commande par retour d'état

---

Où  $u$  est l'entrée de commande  $u \in R$  ET  $x \in R^n$  est la sortie considérée,  $x = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T$  est le vecteur d'état, et  $f(x)$  et  $g(x)$  sont des fonction non linéaires dans l'espace d'état, l'équation considérée  $e = y_m - y$  peut être réécrite par:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ f(x) + g(x) \cdot u \end{bmatrix} \quad (\text{II.68})$$

Pour ce type de système, on suppose que  $g(x)$  est différente de zéro.

Si nous choisissons la commande suivante :

$$u = \frac{1}{g(x)} [v - f(x)] \quad (\text{II.69})$$

Alors, la dynamique du système sera comme suit

$$x^{(n)} = v \quad (\text{II.70})$$

Et pour que la dynamique soit linéaire et stable, l'entrée équivalente  $v$  doit être

$$v = x_d^{(n)} - K_0 \cdot e - K_1 \cdot \dot{e} - K_{n-1} \cdot e^{(n-1)} \quad (\text{II.71})$$

Avec les  $K_i$  sont choisis tel que le polynôme  $e^n + K_{n-1}e^{(n-1)} + \dots + K_0e = 0$  soit stable  $x_d(t)$

La trajectoire désirée et  $e(t) = x(t) - x_d(t)$  est l'erreur de poursuite [8]

### Remarque:

Des résultats similaires peuvent être obtenus si le scalaire  $x$  est remplacé par un vecteur et le scalaire  $b$  par une matrice carrée inversible.

D'une manière générale, si le système est d'ordre  $n$  sa dynamique est donnée par:

$$u = \frac{1}{g(x)} [-f(x) + x_d^{(n)} + K^T \underline{e}] \quad (\text{II.72})$$

Avec  $K = [K_n K_{n-1} \dots K_1]$  et  $\underline{e} = [e \dot{e} \dots e^{n-1}]$

Cela nous permet d'obtenir la dynamique stable de l'erreur suivante :

$$e^n + K_1 e^{(n-1)} + \dots + K_n e = 0 \quad (\text{II.73})$$


---

## Commande par retour d'état

---

Exemple

Soit un système non linéaire mono variable affine par rapport à l'entrée défini par :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (\text{II.74})$$
$$y = x_3$$

Calcul du degré relatif :

$$l_g h(x) = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.75})$$

$$l_f h(x) = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.76})$$

$$l_g l_f h(x) = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.77})$$

$$l_g h(x) = [1 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} = -(x_1 + x_2^2) \quad (\text{II.78})$$

$$l_g l_f^2 h(x) = [-1 \ -2x_2 \ 0] \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} = -e^{x_2}(1 + 2x_2) \neq 0 \text{ si } x_2 \neq \frac{-1}{2} \quad (\text{II.79})$$

$r-1=2 \Rightarrow r = 3$  ; le degré relatif du système est égal à  $n$  (dimension du système).

Effectuant, maintenant le changement de variable :

$$\begin{cases} z_1 = h(x) = x_3 \\ z_2 = l_f h(x) = x_1 - x_2 \\ z_3 = l_f^2 h(x) = x_1 - x_2^2 \end{cases} \quad (\text{II.80})$$

Afin de vérifier si la matrice de la transformation de coordonnées est un difféomorphisme, nous calculons sa matrice jacobienne

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 - 2x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est difféomorphisme si et seulement si  $x_2 \neq \frac{-1}{2}$

Le système dans les nouvelles coordonnées s'écrit :

## Commande par retour d'état

---

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = l_f h(x) + l_g h(x)u = z_2 \\ \dot{z}_2 = l_f^2 h(x) + l_g l_f h(x)u = z_3 \\ \dot{z}_3 = l_f^3 h(x) + l_g l_f^2 h(x)u = -2(x_1 + x_2^2) - e^{x_2}(1 + 2x_2)u \end{cases} \quad (\text{II.81})$$

Bouclage linearisant :

$$u(x) = \frac{1}{\beta(x)} (-\alpha(x) + v) \quad (\text{II.82})$$

avec :

$$\alpha(x) = -2(x_1 + x_2^2)$$

$$\beta(x) = -e^{x_2}(1 + 2x_2)$$

en boucle fermée le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

$$y = z_1$$

Qui représente un système linéaire et commandable.

### II.5 Le retour d'état k

La commande par retour d'état est à la commande des systèmes modélisés par leur représentation d'état, ce que la boucle fermée est aux systèmes représentés par une fonction de transfert. L'idée consiste toujours à piloter le système par un signal de consigne et à générer automatiquement le signal de commande en confrontant en permanence la valeur de la consigne et le comportement réel du système. L'écart entre consigne et comportement réel sert de base au signal de commande du système.

Dans la commande par retour d'état, nous n'allons pas mesurer le signal de sortie pour le boucler sur l'entrée, mais nous allons nous servir du vecteur d'état complet pour prendre connaissance du comportement du système.

#### II.5.2 PRINCIPE DE LA COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT

Le principe est de déterminer une commande telle que les pôles du système de la fonction de transfert du système bouclé soient convenablement placés dans le plan complexe et satisfasse des spécifications d'amortissement, de rapidité...

## Commande par retour d'état

---

Les pôles de la fonction de transfert étant les valeurs propres de la matrice d'état, le but est donc de réaliser un asservissement modifiant convenablement la matrice d'état du système.



**Figure (2-2) : Système en boucle ouverte**

Soit un système décrit par l'équation d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (\text{II.83})$$

$$u(t) = r(t) - Kx(t) \quad (\text{en boucle ouverte})$$

Le signal de commande du système (autrement dit l'écart 2 doit être construit en soustrayant au signal de consigne un signal qui dépend du vecteur d'état. Ce vecteur d'état étant composé de  $n$  signaux  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , on le multiplie par un vecteur ligne ( $K$ ) appelé vecteur de gain pour pouvoir effectuer cette soustraction. On a alors :

$$K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n] \quad (\text{II.84})$$

$$u(t) = r(t) - Kx(t) = r(t) - [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (\text{II.85})$$

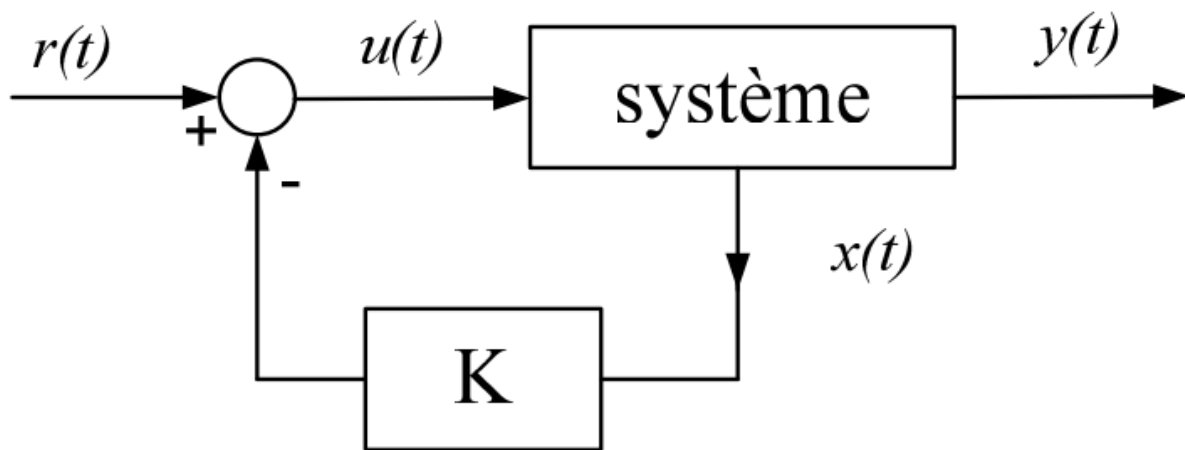


Figure (2-3) : Bouclage du système par un vecteur de gain.

Les équations du système en boucle fermée sont :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ u(t) = r(t) - Kx(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (\text{II.86})$$

L'équation d'état du système en boucle fermée s'écrit :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[r(t) - Kx(t)] = [A - BK]x(t) + Br(t)$$

Par conséquent, la matrice d'état du système en boucle fermée vaut :  $(A - BK)$

La dynamique du système bouclé est donc fixée par les valeurs propres de la matrice  $(A - BK)$  ; ces valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristique :

$$\det(pI - (A - BK)) = Q(p)_{A-BK} = 0 \quad (\text{II.87})$$

### II.5.3 RESOLUTION DU PROBLEME PAR PLACEMENT DE POLES

On considère le système supposé commandable  $\dot{x} = Ax + Bu$  et on cherche un régulateur pour ce système de la forme  $u = r - Kx$ , où  $r$  est la nouvelle entrée. Il est légitime de vouloir choisir la matrice de régulation de façon à imposer les pôles du système bouclé. Ce problème est équivalent à imposer le polynôme caractéristique du système. Soit  $\varphi(p)$  le polynôme désiré, que l'on supposera bien sûr de degré  $n$ . Il nous faut résoudre l'équation polynomiale :

$$\det(pI - (A - BK)) = \varphi(p) \quad (\text{II.88})$$

---

## Commande par retour d'état

---

Dite de placement de pôles. Cette équation peut se traduire en  $j$  équation scalaires. Rappelons en effet que deux polynômes de degré  $n$  et unitaire  $p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0$  et  $p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_0$  sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont tous égaux, c'est-à-dire si  $a_{n-1} = b_{n-1}, \dots, a_0 = b_0$ . Noter système des  $j$  équations possède  $m \cdot n$  inconnues qui sont les coefficients  $k_{ij}, i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$ . en fait, une seule matrice solution  $K$  nous suffit. On peut donc fixer  $(m-1)$  éléments de  $K$  afin qu'il ne nous reste plus que  $n$  inconnues. Mais le système obtenu n'est pas toujours linéaire.

Tout est simple lorsque le système possède une seule entrée. En effet, l'équation polynômiale (II.88) se traduit forcément par un système de  $n$  équations linéaires à  $n$  inconnues qui admet une et une seule solution (car le système est commandable).

Dans le cas où le système possède  $u$  entrées, on peut choisir  $K$  de la forme :

$$K = \tilde{B}K_1 \quad (\text{II.89})$$

Où la matrice  $\tilde{B} (m \times 1)$  est choisie arbitrairement de façon à conserver la commandabilité et à solliciter les entrées les moins coûteuses. La quantité  $K_1 = [k_1, \dots, k_n]$  est la matrice  $1 \times n$  à déterminer. Le système polynômiale (II.88) se traduit alors par un système linéaire en  $k_1, \dots, k_n$ .

### II.5.4 APPLICATION DE LA METHODE PLACEMENT DE POLES

Nous allons ici illustrer la résolution de l'équation polynômiale (II.88) lorsque le système n'admet qu'une seule entrée. Les méthodes proposées ici nécessitent des calculs assez fastidieux.

Considérons par exemple le système :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} u \quad (\text{II.90})$$

Que l'on cherche à stabiliser par un retour d'état de la forme :

$$u = r - Kx \quad (\text{II.91})$$

Avec

$$K = (k_1 \ k_2 \ k_3)$$

Cherchons  $K$  de façon à ce que ce polynôme caractéristique  $\varphi(p)$  du système en boucle fermée ait pour racines  $-1, -1-2j, -1+2j$ , c'est-à-dire :

## Commande par retour d'état

---

$$\varphi(p) = (p + 1)(p + 1 + 2j)(p + 1 - 2j)$$

$$\varphi(p) = p^3 + 3p^2 + 7p + p$$

$$\det(pI - (A - BK)) = \varphi(p)$$

$$\det \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} (k_1 \quad k_2 \quad k_3) = p^3 + 3p^2 + 7p + 5$$

On obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 25 & 21 & 10 \\ 41 & 72 & 71 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -29 \\ -129 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (\text{II.92})$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 25 & 21 & 10 \\ 41 & 72 & 71 \end{pmatrix}^{-1} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -29 \\ -129 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1.4227 \\ -0.94158 \\ 2.0206 \end{pmatrix} \quad (\text{II.93})$$

Soit :

$$K = [1.4227 \quad -0.94158 \quad 2.0206]$$

### II.6 Conclusion:

Nous avons montrés dans ce chapitre les différentes approches de la commande par retour d'état , qui peut être utilisée de deux manières, soit en boucle fermée ou ouverte, là où on a constaté que c'est la commande par retour d'état en boucle fermée qui est la plus utilisée du fait qu'elle permet le maintien d'un fonctionnement correcte du procédé même en présence de fortes perturbations, ou lors du changement de consigne .

On a vu que la commande par retour d'état à été utilisées dans différents domaines pour amélioré les performances du système.

On a illustré aussi les concepts théoriques de la géométrie différentielle telle que la dérivée de Lie, les crochets de Lie, le difféomorphisme, le degré relatif. Sont les bases de la linéarisation par retour d'état pour les systèmes mono-entrée mono-sortie (SISO).

## Commande par retour d'état

---

On a vu les deux type de cette commande : linéarisation au sens entrées-sortie, linéarisation au sens entrées-états on des propriétés différent mais leur but d'obtenir un système linéaire en boucle fermé.

### III.1 Introduction :

Le pendule inversé est un système sous-actionné ayant moins d'entrées de commande que les variables de configuration. Il a été largement étudié dans divers domaines tels que la robotique, l'ingénierie marine, le génie aérospatiale, etc. En particulier, il ya eu beaucoup de recherches sur la la stabilité, la contrôlabilité et le contrôle non linéaire des systèmes sous-actionnés.

Dans ce chapitre nous présentons la mise en œuvre d'une loi de commande d'un pendule inversé. Cette loi de commande est basée sur le retour d'état .

Pour valider la loi de commande conçue, une série de résultats de simulations sera présentée à la fin de ce chapitre.

#### III.2.1 Commande du système :

Le pendule inverse libre (aucune force appliquée) possède deux points d'équilibres . le premier point ( $\theta = 0$ ) qui correspond a la position verticale de la tige est un point d'équilibre instable et le second point ( $\theta = \pi$ ) point d'équilibre stable .l'objectif de commande est de stabiliser la tige du pendule sur la position verticale ( $\theta = 0$ ).

#### 2.2 Commande basée sur la linéarisation numérique autour du point d'équilibre :

Une des approches de commande des systèmes non linéaires consiste a élaborer les lois de commandes sur la base du modèle linéaire obtenu par linéarisation numérique autour du point d'équilibre considère . cette approche reste valable uniquement au voisinage du point d'équilibre (commande locale ). La linéarisation numérique est basée sur le développement de Taylor des champs de vecteur  $f(X(t))$  et  $g(X(t))$  autour du point d'équilibre . les termes d'ordre supérieur a deux de ce développement sont négligés .la linéarisation numérique du système non linéaire (1.37) autour du point d'équilibre  $X_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  donne lieu au modèle d'état linéaire :

$$\dot{X}=AX(t) + Bu(t) \quad (3.1)$$

Ou  $X(t)$  représente les petites variations de  $X(t)$  autour de 0. La matrice d'état (dévolution) est la jacobéenne de  $f(X(t))$  par rapport a  $X$  evaluer au point dequilibre et le vecteur de commande  $B$  et le vecteur prise par  $g(X(t))$  au point d'équilibre . les expression de A et B sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} \quad : \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-1}{l} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Si on choisit comme sorties la position du chariot et la position angulaire de la tige, alors l'équation de sortie du modèle d'état s'écrit :

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X(t) \quad (3.3)$$

En remplaçons les paramètres par leur valeur numériques, nous aurons :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5339 & 0.0045 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 22.2449 & -0.1890 \end{bmatrix} \quad : \quad B = [0 \ 0.4218 \ 0 \ -0.9070]^T \quad (3.4)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

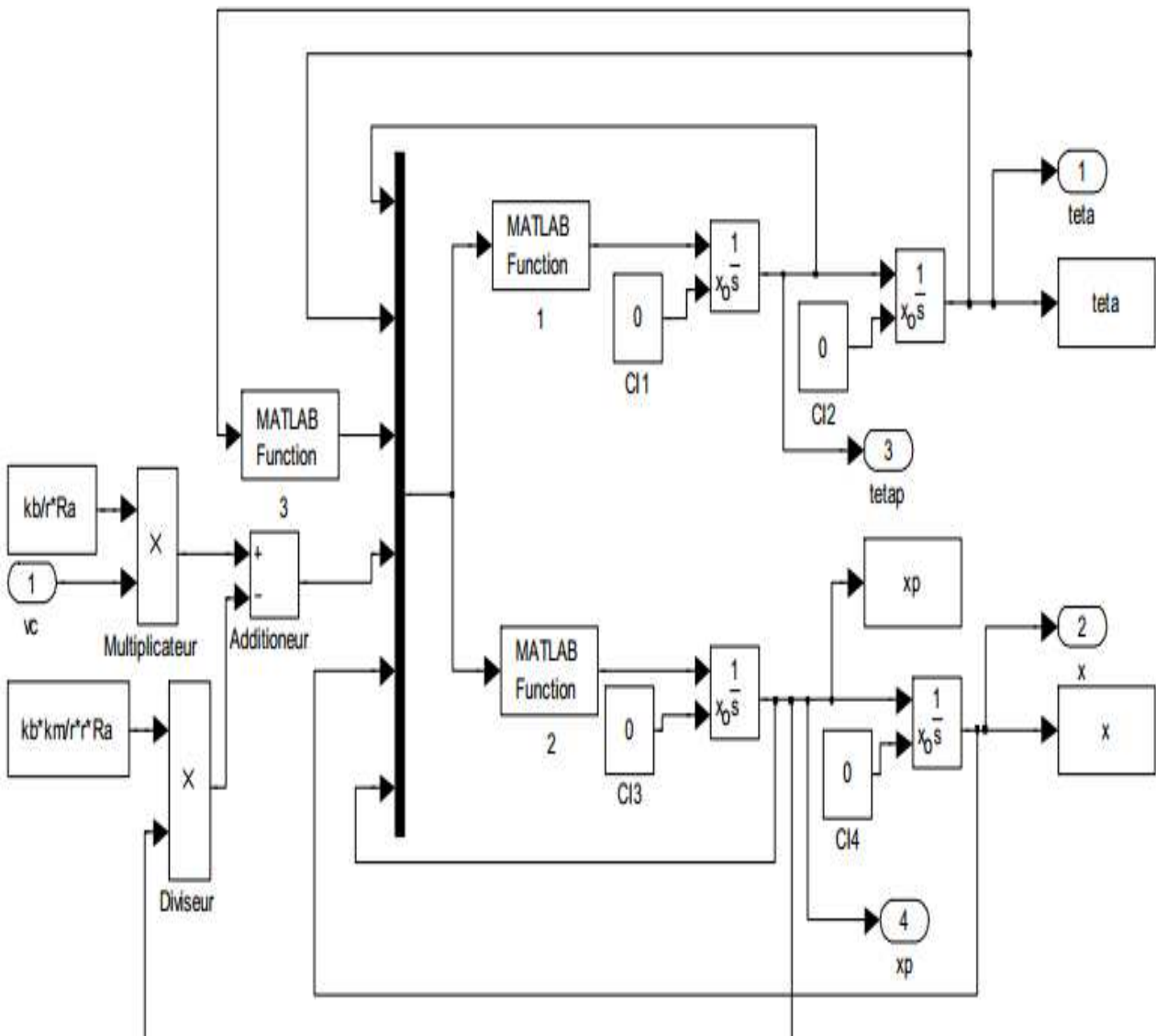
### 2.3 Commande par placement de pôles :

La première commande est une commande par placement de pôles par retour d'état. Cette commande est quasi linéaire. Soient les pôles désires en boucle fermée (-2, -1, -3, -0.5).

Alors la commande par placement de pôles est  $u(t) = -KX(t)$  avec  $K = [-0.3372 \ -1.2953 \ -40.2247 \ -7.5602]$

### III.3.1 Modèle sous « matlab-simulink » et résultats de simulation :

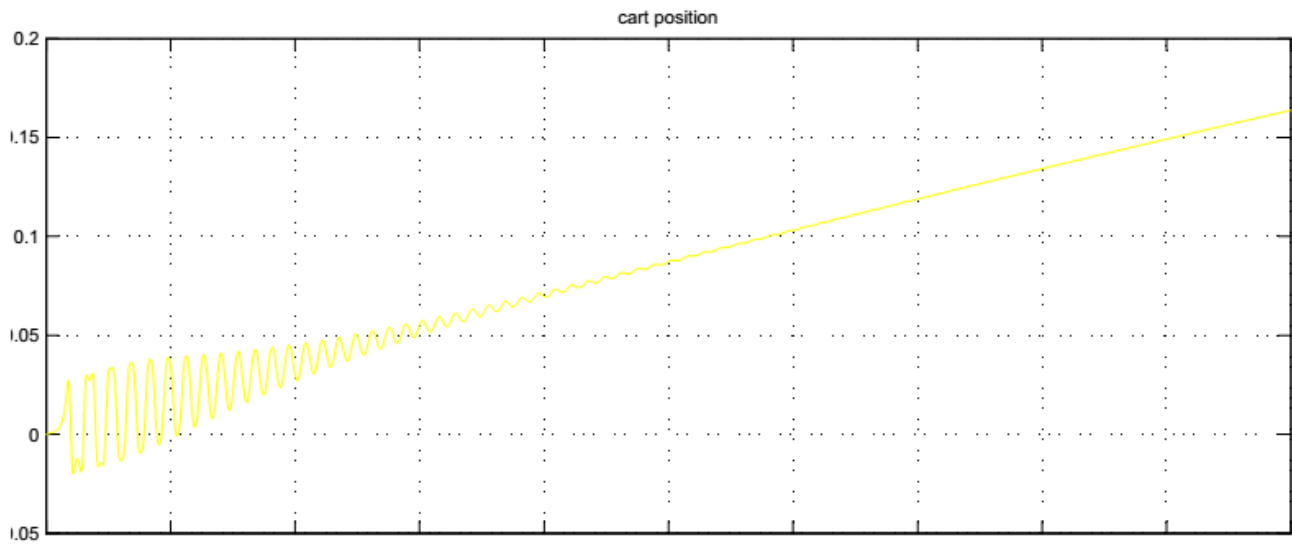
moteur-chariot-pendule , il est A partir de l'équation (I.38) on a construit le schéma de simulation sous « matlab-simulink » de l'ensemble présente par la figure (3.1).



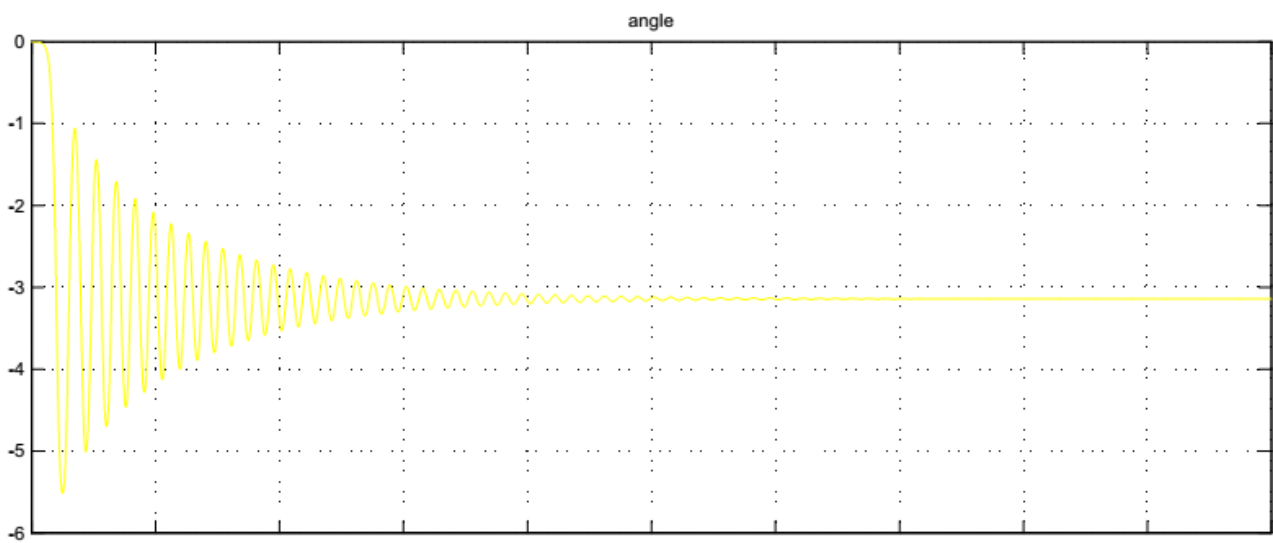
**Figure 3.1 :** schéma de simulation du modèle de l'ensemble pendule-chariot-moteur

Les figures (3.2) et (3.3) montrent les résultats de simulation obtenus en appliquant à l'entrée une tension sous forme d'une impulsion  $0.01v$ , de durée  $0.1s$ , pour deux condition initiales différentes, la première correspond à la position instable du pendule, la seconde à sa position stable.

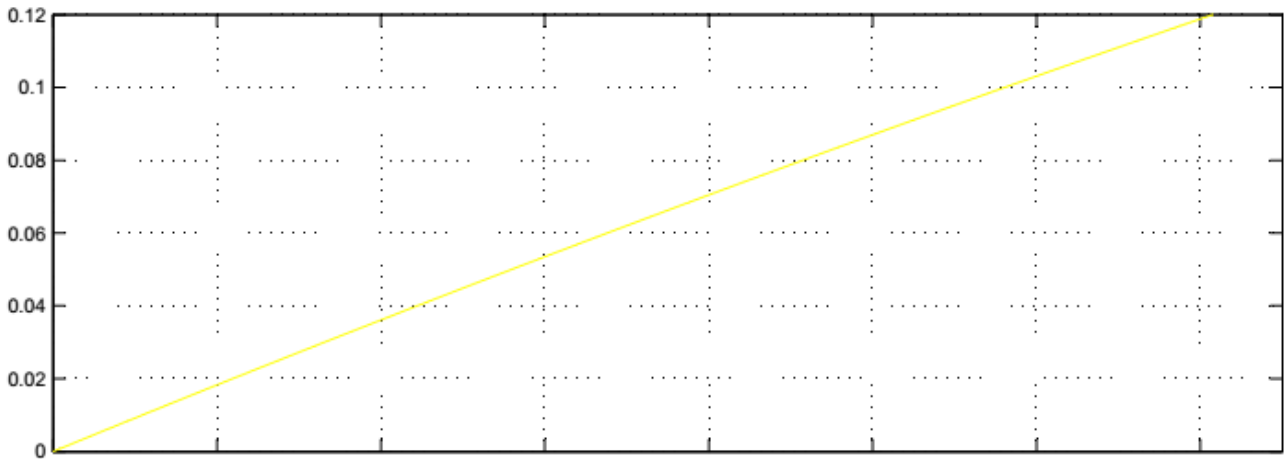
## 3.2 Résultats de simulation :



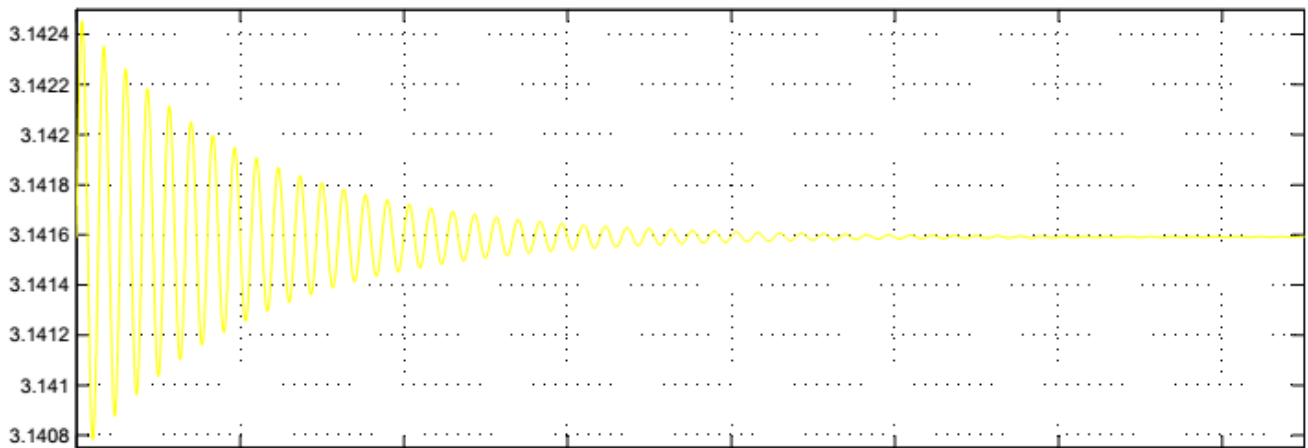
**Figure (3.2) :** résultat du simulation du modèle non linéaire  $CI= [ 0 0 0 0 ]$  (chariot)



**Figure (3.3) :** résultat du simulation du modèle non linéaire  $CI= [ 0 0 0 0 ]$  (pendule)



**Figure (3.4) :** résultat du simulation du modèle non linéaire  $CI= [ 0 0 \pi 0 ]$  (chariot)



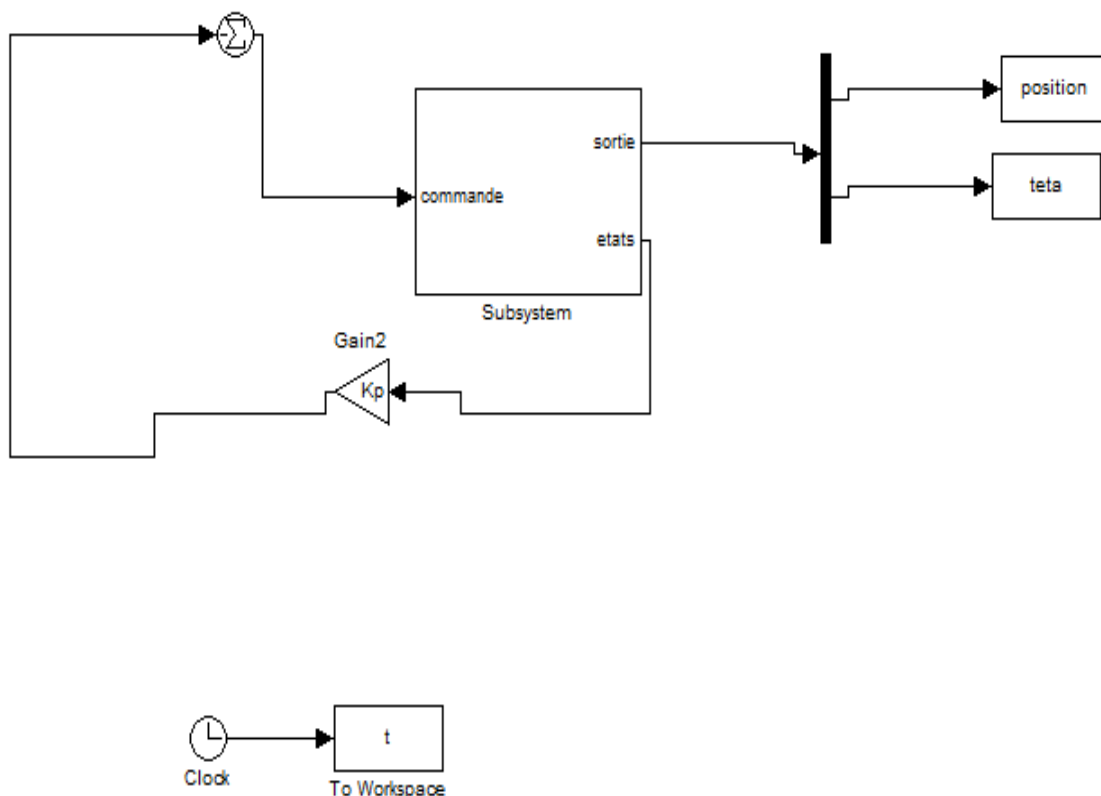
**Figure (3.5) :** résultat du simulation du modèle non linéaire  $CI= [ 0 0 \pi 0 ]$  (pendule)

Ces résultats illustrent la complexité du modèle. Les figures (3.2) et (3.3) montrent que lorsque le pendule est initialement en position instable haute ( $\theta = 0$ ), il se stabilise après un régime transitoire dans sa position d'équilibre stable ( $\theta = \pi$ ). Les figures (3.4) et (3.5) montrent que, lorsque le pendule est initialement dans sa position d'équilibre stable ( $\theta = \pi$ ), il faut noter également qu'une fois la barre en position ( $\theta = \pi$ ), le chariot continue à évoluer dans les deux cas, quelque soit la position initiale du pendule, à cause de l'effet de balancement du pendule.

### III.4.1 Stabilisation du pendule par retour d'état :

Puisque la commande de redressement n'est utilisée que pour redresser le pendule à une position verticale, elle ne permet pas de maintenir sa stabilité dans sa position d'équilibre instable. Le problème de stabilisation est le deuxième problème qu'il faut résoudre lorsqu'on commande le pendule inversé. Dans ce travail on utilise les techniques de commande par retour d'état.

De nombreuses méthodes de commande des processus utilisent le principe du retour d'état (commande optimale, placement de pôles.....). Le principe de cette commande est de déterminer une commande telle que les pôles du système bouclé soient convenablement placés dans le plan complexe et satisfasse des performances de précision, de la rapidité, de stabilité. Les pôles du système étant les valeurs propres de la matrice d'état, le but est donc de réaliser un asservissement modifiant convenablement la matrice d'état du système.



**Figure 3.6 :** Schéma de simulations de redressement et de stabilisation du pendule inversé par le retour d'état

### 4.2 Résultat de simulation :

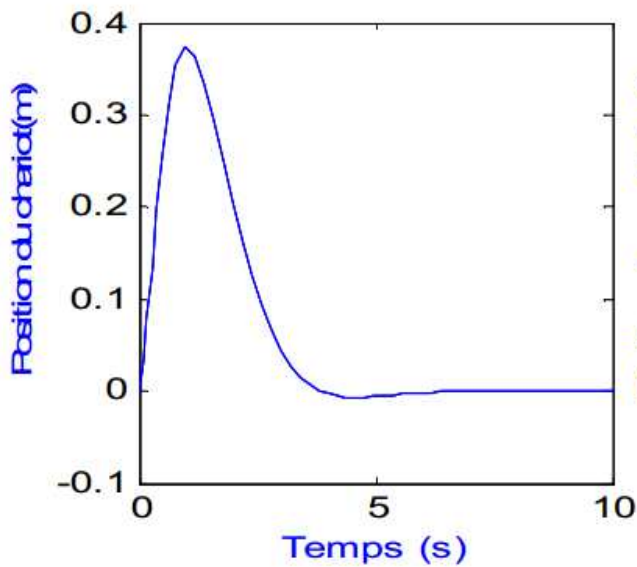


Figure (3.7) :la position du chariot

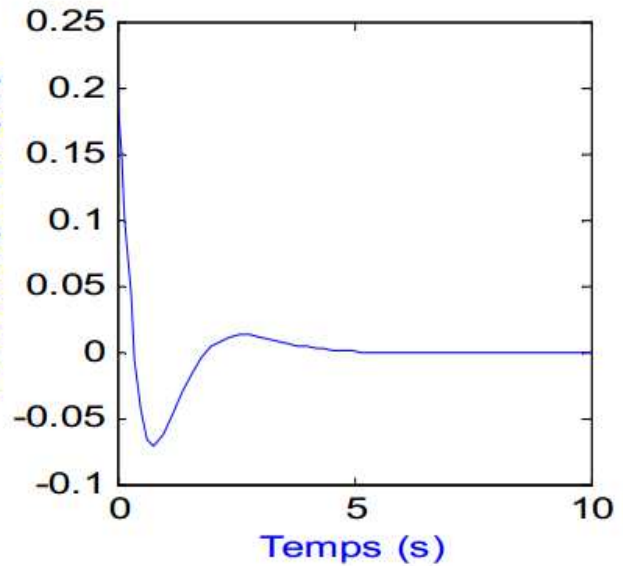


Figure (3.8) :l'angle du pendule inversé

Les figures (3.7) et (3.8) montrent que le système pendule inversé linéaire se stabilise au bout de 5 s tout en respectant les contraintes imposées. En effet le déplacement du chariot ne dépasse pas les limites physiques du rail.

La figure (3.6) représente le schéma de simulation du modèle non linéaire avec une combinaison de la commande de redressement et la commande de stabilisation . Dans cette figure, le bloc commande contient un signal d'horloge qui donne l'information sur zone atteinte par l'angle  $\theta$  .

### **Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons présente le procède sur lequel nous avons travaille, il s'agit du pendule inverse. En effet, l'objectif de notre travail, est de commander le pendule inverse a l'aide de la commande par retour d'état.

Nous avons d'abord modélise le système, puis le linéariser par la commande par retour d'état. Par la suite, nous avons expose les devers résultats de simulation ainsi leurs interprétations.

On constate par cette étude, que la méthode par retour d'état est une technique puissante pour la commande de ce type de système.

Le travail aborde au cours de ce projet porte essentiellement sur la commande d'un système non linéaire .

La procédure la plus élémentaire pour synthétiser une commande pour un système non linéaire est d'obtenir un modèle linéaire de ce système autour d'un point d'équilibre en utilisant les jacobiniennes des fonctions non linéaire intervenant dans les équations décrivant le système, cependant, en dépit de sa simplicité, cette procédure contraint le contrôleur à agir dans un domaine très restreint au voisinage du point d'équilibre. Ceci conduit à des performances en boucle fermée souvent médiocres.

Nous nous sommes intéressés particulièrement aux commandes linearisantes par retour d'état. l'intérêt de ces stratégies réside dans le fait qu'une fois le système linearise, on peut lui imposer un comportement d'un système linéaire par injection de nouvelles commandes additionnelles. D'autre part, le bouclage linearisant est déterminé à partir du modèle non linéaire exacte et ne nécessite pas une approximation numérique autour du point de fonctionnement.

Cependant, il n'est pas toujours aisé de concevoir des bouclages linearisants. En effet, l'existence même de ces bouclages est assujettie à des conditions souvent non satisfaites par le système. Dans ce cas, on a recour à des bouclages linearisants de manière approximative.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la commande d'un pendule inversé qui est un système non linéaire et sous-actionné.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté le pendule inversé, à savoir, sa description, l'intérêt de son utilisation, quelques travaux de recherche effectués sur sa commande, ainsi que sa modélisation dynamique qui est a été déduite à partir du formalisme d'Euler-Lagrange.

Dans le second chapitre, nous avons donné le principe de base de la commande par retour d'état.

Dans le chapitre 3, nous avons calculé la commande par retour d'état, qui a été implémenté sous MATLAB afin de faire une étude comparative et de vérifier l'efficacité de cette technique à la commande d'un pendule inversé.

Le choix de cette commande est guidé pour une raison, le modèle non linéaire du pendule inversé répond bien à notre étude puisque les conditions de commandabilité s'imposent donc.

D'après les résultats de simulation effectués sur un pendule inversé, nous avons pu illustrer les performances de la loi de commande proposée.

- [1] **S.Riachy** : « contribution a l'estimation et a commande de système mecanique sous-actionnes » docteur de l'école centrale de Lille discipline automatique et informatique industrielle , 2008
- [2] **D.Bensoussan** : « commande moderne ; approche par modèles continus et discrets » presses internationales polytechniques, 2008
- [3] **C.Aguilar** : « approximate feedback linearization and sliding mode contról for the single inverted pendulum » queen's university mathematics and engineering, august 2002
- [4] **Ferhat Lahouazi** « Mise en œuvre d'une stratégie de commande neuro floue Application à un pendule inversé » Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou 2011
- [5] **F.E.THOU** « observing the state of non-linear dynamic systems » International journal of control, American Control Conferences, SANFRANCISCO, USA 1993
- [7] **DOUDOU Sofiane** “contribution a la commande modern des Systèmes non linéaires multi variables non affines” thèse doctorat, université SETIF1 ,automatique
- [8] **BENALI dihia** « commande adaptative floue d'un système non-lineaire (application : pendule inversé) » » Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou 2015
- [9] **M. I. H. Nour, J. Ooi, , and K. Y. Chan ,**”Fuzzy Logic Control vs.Conventional PID Control of an Inverted Pendulum Robot”,International Conference on Intelligent and Advanced Systems 2007
- [10] **C.-M. Lin and Y.-J. Mon,** “Decoupling control by hierarchical fuzzy sliding-mode controller,” *IEEE Trans. Control. Syst. Technol.*, vol. 13, no. 4, pp. 593–598, Jul. 2005.
- [11] **S.Djounoune:** “cours systèmes non linéaires” master 2 en automatique, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou 2015/2016

- [12] **Melle Bousselem Chahira** « Implémentation de régulateurs fractionnaires pour la stabilisation d'un pendule inversé » Université Mouloud Mammeri de Tizi ouzou 2012
  
- [13] **J.J.E.SLOTINE** et **Li. Weiping** « applied nonlinear control », Massachusetts institute of technology,prentice-hall, USA, 1991
  
- [14] **P.Mullhaupt**: « Introduction a l'analyse et a la commande des systems non lineaires » lausanne, juin 2007
  
- [16] **A.Isidori** : « nonlinear control systems » Springer-verlag, third edition, 1989
  
- [17] **H.K.Khalil** :”non linear system” Third Edition, Prentice Hall, 2002