

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D' INFORMATIQUE  
DEPARTEMENT D' AUTOMATIQUE

## Mémoire de Fin d'Etudes de **MASTER PROFESSIONNEL**

Domaine : **Sciences et Technologies**

Filière : **Automatique**

Spécialité : **Contrôle des véhicules et propulsion  
électrique**

*Présenté par*

**Syphax ACHACHE**

**Imad BECHAR**

Thème

## **Synchronisation des systèmes chaotiques à base d'un observateur grand gain : Implémentation sur cartes Arduino**

*Mémoire soutenu publiquement le 25/06/ 2024 devant le jury composé de :*

**Mme Hakima HAMRI**  
MCB, UMMTO, Président

**Mme Sarah KASSIM**  
UMMTO, Encadrant

**M Saïd DJENNOUNE**  
PROFESSEUR, UMMTO, Examineur

**Mme Farida ALMANSBA**  
MAA, UMMTO, Examinatrice

# Dédicaces

À ma famille et à mes amis, et surtout l'équipe **LSPT**, pour leur amour, leur soutien inébranlable et leurs encouragements constants. Ce mémoire est dédié à vous tous, pour tout ce que vous avez fait pour moi.

# Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma promotrice, pour son soutien et ses conseils tout au long de ce mémoire. Son expertise, sa patience et ses encouragements ont été inestimables pour la réalisation de ce travail.

Je remercie également mes amis et ma famille pour leur soutien moral et émotionnel tout au long de cette aventure académique. Leur compréhension et leur aide ont été essentielles pour surmonter les moments difficiles.

Je souhaite aussi remercier Mr GP, dont l'assistance a été précieuse dans la rédaction et la clarification de mes idées.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, mais dont les noms ne figurent pas ici. Vous êtes les hommes de l'ombre qui ont contribué à l'aboutissement de ce projet. Votre aide et votre soutien sont grandement appréciés.

# Table des matières

|  |          |
|--|----------|
| <b>Introduction générale</b>   | <b>1</b> |
| <b>1 Généralités sur les systèmes chaotiques</b>                       | <b>4</b> |
| 1.1 Introduction . . . . .   | 4        |
| 1.2 Système dynamique : . . . . .                                      | 4        |
| 1.2.1 En temps continu : . . . . .                                     | 5        |
| 1.2.2 En temps discret : . . . . .                                     | 5        |
| 1.3 Le chaos . . . . .   | 6        |
| 1.3.1 Systèmes chaotiques . . . . .                                    | 6        |
| 1.3.2 Caractéristiques qualitatives des systèmes chaotiques . . . . .  | 6        |
| Non-linéarité . . . . .  | 6        |
| Déterminisme . . . . .   | 7        |
| Aspect aléatoire . . . . .   | 7        |
| Attracteur étrange . . . . .   | 7        |
| Sensibilité aux conditions initiales . . . . .                         | 7        |
| 1.3.3 Caractéristiques quantitatives des systèmes chaotiques . . . . . | 8        |
| Exposants de lyapunov . . . . .  | 8        |
| Bifurcations et routes vers le chaos . . . . .                         | 9        |
| 1.3.4 Exemples sur les systèmes chaotiques . . . . .                   | 10       |
| 1.4 Synchronisation des systèmes chaotiques . . . . .                  | 15       |
| 1.4.1 Principe de la synchronisation des systèmes chaotiques . . . . . | 15       |
| 1.4.2 Types de synchronisation . . . . .                               | 16       |
| Synchronisation complète . . . . .                                     | 16       |
| Synchronisation généralisée . . . . .                                  | 17       |
| Synchronisation projective . . . . .                                   | 17       |
| Synchronisation retardée . . . . .                                     | 17       |
| Synchronisation de phase . . . . .                                     | 17       |
| 1.4.3 Méthode de synchronisation . . . . .                             | 18       |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
|          | Méthode de synchronisation par répartition de système Pecora et Carroll                    | 18        |
|          | Méthode de synchronisation par commande proportionnelle . . . . .                          | 18        |
| 1.4.4    | Méthode de synchronisation à base d'observateur . . . . .                                  | 19        |
| 1.4.5    | Exemple de la synchronisation des systèmes chaotiques . . . . .                            | 19        |
| 1.5      | Conclusion . . . . .   | 21        |
| <b>2</b> | <b>Généralités sur les observateurs d'état</b>   | <b>23</b> |
| 2.1      | Introduction . . . . .   | 23        |
| 2.2      | Observabilité . . . . .  | 23        |
| 2.2.1    | Observabilité des systèmes dynamiques linéaires . . . . .                                  | 24        |
|          | Grammien d'observabilité : . . . . .   | 24        |
|          | condition nécessaire et suffisante d'observabilité : . . . . .                             | 25        |
| 2.2.2    | Observabilité des systèmes non linéaire . . . . .  | 25        |
| 2.3      | Observateur des systèmes dynamiques . . . . .  | 26        |
| 2.3.1    | Observateur des systèmes linéaires . . . . .   | 26        |
|          | Observateur de Luenberger . . . . .  | 26        |
|          | Filtre de Kalman . . . . .   | 28        |
| 2.3.2    | Observateur des systèmes non Linéaires . . . . .   | 30        |
|          | Observateur luenberger étendu . . . . .  | 30        |
|          | Observateur à mode glissant . . . . .  | 31        |
|          | Observateur à grand gain . . . . .   | 32        |
| 2.4      | Conclusion . . . . .   | 36        |
| <b>3</b> | <b>Implémentation de la synchronisation chaotique à base d'un observateur à grand gain</b> | <b>38</b> |
| 3.1      | Introduction . . . . .   | 38        |
| 3.2      | Représentation des systèmes chaotiques étudiés . . . . .                                   | 39        |
| 3.2.1    | Système de Genisio . . . . .   | 39        |
| 3.2.2    | Système de Rössler . . . . .   | 41        |
| 3.3      | Synthèse d'observateurs à grand gain . . . . .   | 44        |
| 3.3.1    | Étude d'observabilité . . . . .  | 44        |
|          | Observabilité du système de Genisio . . . . .  | 45        |
|          | Observabilité pour le système de Rössler . . . . .   | 45        |
| 3.3.2    | Synthèse d'observateur à grand gain . . . . .  | 47        |
|          | Observateur pour le système de Genisio . . . . .   | 47        |
|          | Observateur pour le système Rössler . . . . .  | 49        |
| 3.3.3    | Simulation sur MATLAB . . . . .  | 51        |

## TABLE DES MATIÈRES

---

|       |  |           |
|-------|--|-----------|
| 3.4   | Implémentation sur Arduino . . . . .                     | 56        |
| 3.4.1 | Généralité sur les microcontrôleurs . . . . .            | 56        |
|       | Différents types de microcontrôleurs . . . . .           | 56        |
|       | Versatilité et importance des microcontrôleurs . . . . . | 57        |
| 3.4.2 | Présentation du microcontrôleur utilisé . . . . .        | 58        |
| 3.4.3 | Résultats d'implémentation . . . . .                     | 59        |
| 3.5   | Conclusion . . . . .                                     | 65        |
|       | <b>Conclusion générale</b>                               | <b>67</b> |

# Table des figures

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | Aspects aléatoire du système de Lorenz . . . . .   | 11 |
| 1.2  | Sensibilité aux conditions initiales de l'état $x$ du système de Lorenz . . . . .  | 11 |
| 1.3  | Exposant de Lyapunov du système Lorenz . . . . .   | 12 |
| 1.4  | Diagramme de bifurcation du système Lorenz . . . . .   | 12 |
| 1.5  | Attracteur étrange du système Lorenz . . . . .   | 13 |
| 1.6  | Aspects aléatoire de la fonction Logistique . . . . .  | 14 |
| 1.7  | Sensibilité aux conditions initiales de l'état $x$ de la fonction logistique . . . . .                                     | 14 |
| 1.8  | Diagramme de bifurcation de la fonction logistique . . . . .   | 15 |
| 1.9  | Schéma de couplage bidirectionnel . . . . .  | 16 |
| 1.10 | Schéma de couplage unidirectionnel . . . . .   | 16 |
| 1.11 | Synchronisation de l'état $y$ du système de Lorenz avec son estimé $\hat{y}$ . . . . .                                     | 20 |
| 1.12 | Synchronisation de l'état $z$ du système de Lorenz avec son estimé $\hat{z}$ . . . . .                                     | 21 |
| 1.13 | Erreurs sur les états $y$ et $z$ du système de Lorenz avec leurs estimés $\hat{y}$ et $\hat{z}$ , respectivement . . . . . | 21 |
| 2.1  | Schéma de l'observateur Luenberger et le système . . . . .   | 27 |
| 3.1  | Aspects aléatoire du système Genisio . . . . .   | 39 |
| 3.2  | Sensibilité aux conditions initiales de l'état $x_1$ du système de Genisio . . . . .                                       | 40 |
| 3.3  | Exposant de lyapunov du système Genisio . . . . .  | 40 |
| 3.4  | Attracteur étrange du système Genisio . . . . .  | 41 |
| 3.5  | Aspects aléatoire du système de Rössler . . . . .  | 42 |
| 3.6  | Sensibilité aux conditions initiales de l'état $x_1$ du système de Rössler . . . . .                                       | 42 |
| 3.7  | Sensibilité aux conditions initiales de l'état $x_2$ du système de Rössler . . . . .                                       | 43 |
| 3.8  | Exposant de lyapunov du système Rössler . . . . .  | 43 |
| 3.9  | Diagramme de bifurcation du système Rössler . . . . .  | 44 |
| 3.10 | Attracteur étrange du système Rössler . . . . .  | 44 |
| 3.11 | Synchronisation à base d'observateur pour l'état $x_1$ et $\hat{x}_1$ . . . . .  | 51 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 3.12 | Synchronisation à base d'observateur pour l'état $x_2$ et $\hat{x}_2$ . . . . .               | 52 |
| 3.13 | Synchronisation à base d'observateur pour l'état $x_3$ et $\hat{x}_3$ . . . . .               | 52 |
| 3.14 | Erreur d'estimation $e_3 = x_3 - \hat{x}_3$ du système Genisio et de l'observateur . . .      | 52 |
| 3.15 | Synchronisation à base d'observateur pour l'état $x_1$ et $\hat{x}_1$ . . . . .               | 53 |
| 3.16 | Synchronisation à base d'observateur pour l'état $x_2$ et $\hat{x}_2$ . . . . .               | 53 |
| 3.17 | Synchronisation à base d'observateur pour l'état $x_3$ et $\hat{x}_3$ . . . . .               | 54 |
| 3.18 | Erreur d'estimation $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$ du système Rössler et de l'observateur . . .      | 54 |
| 3.19 | Synchronisation à base d'observateur pour l'état $x_1$ et $\hat{x}_1$ . . . . .               | 55 |
| 3.20 | Synchronisation à base d'observateur pour l'état $x_2$ et $\hat{x}_2$ . . . . .               | 55 |
| 3.21 | Synchronisation à base d'observateur pour l'état $x_3$ et $\hat{x}_3$ . . . . .               | 55 |
| 3.22 | Erreur d'estimation $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$ du système Rössler original et de son observateur | 56 |
| 3.23 | schéma d'implémentation des deux cartes Arduino . . . . .                                     | 59 |
| 3.24 | Synchronisation de l'état $x_1$ et son estimé $\hat{x}_1$ avec le retard . . . . .            | 60 |
| 3.25 | Synchronisation de l'état $x_2$ et son estimé $\hat{x}_2$ avec le retard . . . . .            | 60 |
| 3.26 | Synchronisation de l'état $x_3$ et son estimé $\hat{x}_3$ . . . . .                           | 61 |
| 3.27 | Synchronisation de l'état $x_1$ et son estimé $\hat{x}_1$ avec retard . . . . .               | 61 |
| 3.28 | Synchronisation de l'état $x_2$ et son estimé $x_2$ avec retard . . . . .                     | 62 |
| 3.29 | Synchronisation de l'état $x_3$ et son estimé $\hat{x}_3$ avec retard . . . . .               | 62 |
| 3.31 | Synchronisation de l'état $x_2$ et son estimé $\hat{x}_2$ sans retard . . . . .               | 63 |
| 3.30 | Synchronisation de l'état $x_1$ et son estimé $\hat{x}_1$ sans retard . . . . .               | 63 |
| 3.32 | Synchronisation de l'état $x_3$ et son estimé $\hat{x}_3$ sans retard . . . . .               | 64 |
| 3.33 | Synchronisation de l'état $x_1$ et son estimé $\hat{x}_1$ sans retard . . . . .               | 64 |
| 3.34 | Synchronisation de l'état $x_2$ et son estimé $\hat{x}_2$ sans retard . . . . .               | 65 |
| 3.35 | Synchronisation de l'état $x_3$ et son estimé $\hat{x}_3$ sans retard . . . . .               | 65 |

# Liste des tableaux

1.1 différentes régimes d'un système dynamique non linéaire . . . . . 9

# Introduction générale

La dynamique des systèmes représente un domaine fondamental en ingénierie et en sciences appliquées, englobant une variété de systèmes allant des simples oscillateurs harmoniques aux systèmes complexes et non linéaires. Les systèmes dynamiques sont des modèles mathématiques utilisés pour décrire l'évolution temporelle de phénomènes naturels ou technologiques, où l'état du système évolue selon des lois déterministes. La compréhension de ces systèmes est cruciale pour de nombreuses applications pratiques, telles que le contrôle automatique, la modélisation climatique, et les réseaux de communication.

Au sein des systèmes dynamiques, les systèmes chaotiques occupent une place particulièrement significative en raison de leur comportement complexe et imprévisible. Ces systèmes, découverts et formalisés au cours des années 1960 et 1970, notamment grâce aux travaux pionniers d'Edward Lorenz [1], se distinguent par plusieurs caractéristiques uniques. L'une des plus notables est leur sensibilité extrême aux conditions initiales, souvent illustrée par l'effet papillon, où de petites variations dans les conditions de départ peuvent conduire à des divergences exponentielles dans l'évolution du système. Cette sensibilité est accompagnée d'une structure fractale, où des motifs auto-similaires apparaissent à différentes échelles, reflétant la complexité inhérente du système.

En outre, les systèmes chaotiques [2] présentent un comportement apériodique, c'est-à-dire qu'ils ne se répètent jamais de manière périodique malgré leur nature déterministe. Bien que ce comportement puisse sembler aléatoire, il est en réalité gouverné par des lois déterministes précises. Ces caractéristiques rendent la prédiction à long terme des systèmes chaotiques pratiquement impossible, car toute erreur, aussi minime soit-elle, dans les conditions initiales peut croître de manière exponentielle.

Ainsi, les systèmes chaotiques, sont non seulement un sujet d'étude fascinant mais aussi un outil puissant pour les scientifiques et les ingénieurs cherchant à comprendre et à maîtriser la complexité de notre monde.

La synchronisation des systèmes chaotiques est une technique avancée visant à coordonner le comportement de deux ou plusieurs systèmes chaotiques afin qu'ils évoluent de manière cohérente malgré leurs différences initiales. Ce concept, qui a émergé et s'est développé dans les années 1980 et 1990 par Pecora et Carroll [3], repose sur plusieurs typologies de synchronisation, incluant la synchronisation complète, où les états des systèmes deviennent identiques, la synchronisation de phase, où les systèmes partagent une relation de phase synchronisée tout en ayant des amplitudes différentes, et la synchronisation généralisée, où une relation fonctionnelle plus complexe lie les états des systèmes. Les méthodes pour atteindre cette synchronisation comprennent diverses techniques de couplage ainsi que l'utilisation d'observateur d'état, des outils mathématiques essentiels pour estimer les états internes d'un système chaotique à partir de mesures externes limitées. Ces avancées ont ouvert de nouvelles perspectives pour le contrôle et l'analyse des systèmes chaotiques, montrant que même des systèmes intrinsèquement imprévisibles peuvent être alignés et gérés de manière cohérente.

Les observateurs d'état [4] sont des outils mathématiques essentiels pour estimer les états internes d'un système dynamique à partir de mesures externes partielles. Dans le contexte des systèmes chaotiques, les observateurs d'état, et plus particulièrement l'observateur à grand gain, joue un rôle crucial. Cette observateur permet de reconstruire les états internes des systèmes chaotiques avec une grande précision, facilitant ainsi leur synchronisation et leur contrôle. L'observateur à grand gain et particulièrement efficace dans les environnements hautement non linéaires et dynamiques, offrant une robustesse accrue face aux perturbations et aux incertitudes des mesures.

Ce mémoire se structure autour de ces concepts fondamentaux et se divise en trois chapitres principaux.

Le premier chapitre offre une vue d'ensemble des systèmes chaotiques, en décrivant leurs caractéristiques qualitatives et quantitatives, ainsi que des exemples illustratifs emblématiques. Ainsi, la synchronisation des systèmes chaotiques, en détaillant ses principes, ses typologies et les méthodes de synchronisation.

Dans le deuxième chapitre se concentre sur les généralité des observateurs d'états [4], on s'intéresse au concepts théoriques de base des observateurs d'état en introduisant les différents types d'observateurs [5, 6, 7, 8, 9].

Enfin, le troisième chapitre explore l'application pratique des observateurs à grand gain [9, 8] pour la synchronisation des systèmes chaotiques [2]. En prenant les systèmes de Geni-

sio et de Rössler comme cas d'étude, nous démontrons les techniques théoriques à travers des simulations réalisées avec Matlab et une implémentation sur des microcontrôleurs Arduino, validant ainsi leur robustesse et applicabilité dans des environnements réels.

Cette approche intégrative vise à combler le fossé entre la théorie et la pratique, fournissant des solutions concrètes et efficaces pour le contrôle et la synchronisation des systèmes chaotiques, ouvrant la voie à de nouvelles recherches et applications dans le domaine des systèmes dynamiques.

Le mémoire s'achève par une conclusion générale sur l'ensemble de l'étude présentée tout en indiquant quelques perspectives futures.

# Chapitre 1

## Généralités sur les systèmes chaotiques

### 1.1 Introduction

Le concept du chaos, introduit par le mathématicien Edward Lorenz dans les années 1960, a révolutionné la compréhension de la complexité des systèmes dynamiques. Autrefois associé au désordre et à l'imprévisibilité, le chaos est en réalité bien plus qu'une simple perturbation aléatoire. Il révèle un ordre caché au sein des systèmes dynamiques non linéaires.

Ce premier chapitre explore les systèmes chaotiques. Nous commençons par examiner les fondements des systèmes dynamiques et soulignons leur importance dans la modélisation des phénomènes. Ensuite, nous abordons les systèmes chaotiques, connus pour leur imprévisibilité et leur sensibilité extrême aux conditions initiales. À l'aide d'exemples concrets, nous analysons les propriétés spécifiques de ces systèmes et les bases théoriques de la synchronisation. Nous décrivons les différents modes de synchronisation et présentons diverses méthodes pour parvenir à cette coordination. De la synchronisation identique aux approches reposant sur les observateurs, nous examinons une gamme de stratégies permettant d'atteindre la synchronisation dans les systèmes chaotiques.

### 1.2 Système dynamique :

Dans cette section, nous étudions les systèmes dynamiques, qu'ils soient à temps continu ou discret, en examinant de près les équations et les principes qui les régissent.

Un système dynamique fait référence à un système physique dont les états évoluent progressivement en réponse à des interactions internes ou externes au fil du temps. Ces états, représentés par un ensemble de variables décrivant pleinement le système, sont régis par des

lois ou des équations qui déterminent leur évolution dans le temps. Ils sont généralement classés en deux catégories principales : les systèmes dynamiques en temps continus et les systèmes dynamiques en temps discrets [1].

### 1.2.1 En temps continu :

En temps continu [10], le système est caractérisé par des équations différentielles, où un ensemble de variables d'état  $\mathbf{x}(t)$  évoluent en fonction du temps  $t$  de manière continue. Ces systèmes peuvent être décrits comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{cases} \quad (1.1)$$

Où :

- $\mathbf{x}(t)$  est le vecteur d'état du système,  $\mathbf{x}(t) \in \mathfrak{R}^n$ , où  $n$  est la dimension de l'espace des états.
- $\mathbf{u}(t)$  est le vecteur d'entrée ou de commande du système,  $\mathbf{u}(t) \in \mathfrak{R}^m$ , où  $m$  est la dimension de l'espace d'entrée.
- $\mathbf{y}(t)$  est le vecteur de sortie du système,  $\mathbf{y}(t) \in \mathfrak{R}^p$ , où  $p$  est la dimension de l'espace de sortie.
- $\mathbf{f}$  est la fonction de transition d'état du système,
- $\mathbf{g}$  est la fonction de sortie du système.

### 1.2.2 En temps discret :

En temps discret [11], le système est caractérisé par des équations de récurrence ou des itérations non linéaires. Il est caractérisé par un ensemble de variables d'état  $\mathbf{x}(k)$ , où  $k$  représente le nombre d'itération. La dynamique du système est décrite par une équation de récurrence de la forme :

$$\begin{cases} x(k+1) = h(x(k), u(k), k) \\ y(k) = v(x(k), u(k), k) \end{cases} \quad (1.2)$$

Où :

- $\mathbf{x}(k) \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur d'état du système à l'itération  $k$ , où  $n$  est la dimension de l'espace des états.

- $\mathbf{u}(k)$  est le vecteur d'entrée ou de commande du système à l'itération  $k$ ,  $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^m$ , où  $m$  est la dimension de l'espace d'entrée.
- $\mathbf{y}(k)$  est le vecteur de sortie du système à l'itération  $k$ ,  $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^p$ , où  $p$  est la dimension de l'espace de sortie.
- $\mathbf{h}$  est la fonction de transition d'état du système.
- $\mathbf{v}$  est la fonction de sortie du système.

## 1.3 Le chaos

La théorie du chaos est une branche des mathématiques qui étudie les systèmes dynamiques sensibles aux conditions initiales. Des petites variations peuvent entraîner des changements majeurs à long terme, rendant les prévisions presque impossible. Bien qu'il existe pas de définition standard, certain critères comme la non-linéarité et le déterminisme permettant d'identifier un système chaotique [2].

### 1.3.1 Systèmes chaotiques

En langage courant, les systèmes chaotiques [12] sont souvent associés à des situations désordonnées, confuses et imprévisibles. Un système chaotique est influencé par de nombreux paramètres et caractéristiques, où de petites variations initiales peuvent provoquer des résultats radicalement différents à long terme. Ces systèmes présentent également une certaine forme de régularité cachée au sein du chaos. Malgré leur imprévisibilité à long terme, ils peuvent souvent générer des motifs ou des structures qui se répètent de manière non linéaire. Les mathématiques et la physique modernes utilisent des outils sophistiqués pour modéliser et analyser les systèmes chaotiques, ouvrant la voie à une meilleure compréhension de ces phénomènes complexes.

### 1.3.2 Caractéristiques qualitatives des systèmes chaotiques

Afin d'identifier un système chaotique, il est important de connaître et de comprendre toutes les caractéristiques qui définissent l'évolution de son comportement dans un milieu borné [1].

#### Non-linéarité

La non linéarité est essentielle pour que le chaos puisse émerger dans un système. Cependant, le chaos ne découle pas exclusivement de la non linéarité, il est également conditionné

par d'autres facteurs. Ainsi, le chaos ne peut être attribué uniquement à la non linéarité, mais résulte d'une conjonction complexe de conditions nécessaires qui doivent être présentes simultanément pour se manifester.

### **Déterminisme**

Un système est défini comme déterministe lorsque son évolution peut être prédite de manière exacte à partir de conditions initiales connues. Cela signifie que si l'on connaît précisément l'état du système à un instant donné, on peut calculer avec certitude son état à tout autre moment ultérieur. Les systèmes déterministes suivent des règles précises et définies, habituellement exprimées par des équations mathématiques ou des lois physiques strictes. Ainsi, même si un système chaotique peut présenter un comportement complexe et apparemment imprévisible, il reste fondamentalement déterministe, car son évolution est déterminée par ses conditions initiales et ses équations sous-jacentes.

### **Aspect aléatoire**

Bien que les systèmes chaotiques soient déterministes, tous leurs états présentent des aspects aléatoires, aucune périodicité n'est apparente.

### **Attracteur étrange**

L'attracteur étrange est une entité complexe en dynamique des systèmes, caractérisée par une forme qui n'est ni une courbe ni une surface, mais plutôt reconstruite point par point de manière discontinue par la dynamique du système. Contrairement à des trajectoires périodiques, les trajectoires dans un attracteur étrange sont déterministes mais non périodiques, ce qui signifie qu'elles suivent des règles précises mais ne se répètent pas à intervalles réguliers. Ce type d'attracteur est souvent associé à un comportement chaotique, offrant un aperçu de la complexité des systèmes dynamiques non linéaires.

### **Sensibilité aux conditions initiales**

Les systèmes chaotiques se caractérisent par leur extrême sensibilité aux conditions initiales. Cela implique que de petites différences entre deux états initiaux très proches peuvent entraîner des trajectoires évolutives complètement divergentes, sans possibilité de trouver une relation entre ces deux trajectoires au fil du temps.

### 1.3.3 Caractéristiques quantitatives des systèmes chaotiques

#### Exposants de Lyapunov

Cette caractéristique permet de mesurer la divergence potentielle entre deux trajectoires issues de conditions initiales voisines, ce qui quantifie la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique. Pour évaluer cette sensibilité, il est crucial de mesurer ou d'estimer la vitesse de divergence ou de convergence des trajectoires. Cette vitesse est déterminée par les exposants de Lyapunov [10]. Le nombre d'exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases du système, et ils sont généralement classés du plus grand au plus petit  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$ .

Pour qu'un attracteur chaotique existe, la dynamique du système doit être globalement dissipative. Cela signifie que le système doit exhiber une stabilité globale, vérifiée par la condition suivante sur le spectre de Lyapunov : la somme des exposants de Lyapunov doit être négative, c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0 \quad (1.3)$$

Où  $n$  est la dimension du système.

Dans un système chaotique, il y a généralement au moins un exposant de Lyapunov positif ( $\lambda_i > 0$ ), indiquant la présence de directions dans lesquelles les trajectoires du système s'éloignent exponentiellement. Pour un système chaotique à temps discret de dimension un, un seul exposant de Lyapunov positif est suffisant pour vérifier la condition de stabilité globale  $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$ .

Le Tableau (1.1) illustre les exposants de Lyapunov de différents attracteurs :

| régime permanent  | Attracteur   | Exposant de Lyapunov   |
|-------------------|--------------|--|
| Point d'équilibre | Points       | $0 > \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  |
| Périodique        | cycle Limite | $\lambda_1 = 0, 0 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$                         |
| Quasi-périodique  | Tore         | $\lambda_1 = \dots = \lambda_i = 0, 0 > \lambda_{i+1} \geq \dots \geq \lambda_n$ |
| Chaotique         | Fractal      | $\lambda_1 > 0, 0 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$                         |
| Hyperchaotique    | Fractal      | $\lambda_1 > \lambda_2 > 0, 0 > \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$             |

TABLE 1.1 – différentes régimes d'un système dynamique non linéaire

### Bifurcations et routes vers le chaos

Dans les systèmes chaotiques, une bifurcation [2] se produit lorsqu'un léger ajustement des paramètres déclenche des modifications significatives dans le comportement global du système. Ces transitions peuvent surgir brusquement, convertissant des états stables en états instables, ou générant des comportements totalement différents, tels que des oscillations périodiques ou des dynamiques chaotiques imprévisibles. Trois routes typiques ont été mises en évidence pour les systèmes dissipatifs, chacune associée à un type de bifurcation : la route de doublement de période, l'intermittence, la quasi-périodicité.

#### a. Doublement de période

Le doublement de période décrit le processus par lequel un système chaotique passe d'un état d'équilibre, caractérisé par un point fixe stable, à un régime chaotique. Cette transition se produit par une série de bifurcations où l'augmentation d'un paramètre de bifurcation, entraîne l'apparition d'un doublement de période (4, 8, 16, etc.) après un certain seuil de valeur du paramètre. La suite croissante des valeurs du paramètre tend vers une limite, où un régime chaotique se manifeste.

#### b. L'intermittence

L'intermittence est un phénomène observé dans la route vers le chaos où des phases régulières et prévisibles coexistent avec des périodes de comportement chaotique. Il est caractérisé par un régime qui demeure pratiquement périodique durant de longs laps de temps, et qui se déstabilise soudainement pour laisser place à une courte bouffée chaotique, puis le régime

redevient périodique et ainsi de suite. La survenance des bouffées est elle-même irrégulière dans le temps, d'où une distribution des longueurs des phases périodiques.

### c. La quasi-périodicité

Dans cette partie, le système évolue vers un état où il développe une autre période dont le rapport avec la première n'est pas un nombre rationnel. Concrètement, cela se traduit par l'émergence de motifs qui semblent périodiques mais qui ne se répètent jamais exactement de la même manière. Cette évolution se produit généralement en augmentant un paramètre de contrôle. Dans cet état quasi-périodique, le spectre du système contient deux fréquences de base indépendantes, ce qui lui confère une certaine régularité tout en conservant une certaine diversité dans ses trajectoires. Toutefois, ce régime peut également perdre sa stabilité et devenir chaotique, soit directement, soit par l'apparition d'une troisième fréquence.

## 1.3.4 Exemples sur les systèmes chaotiques

Il existe une infinité de systèmes chaotiques, que ce soit en temps continu ou en temps discret. Illustrons ci-dessous deux exemples de systèmes chaotiques : Le système de Lorenz et celui de la fonction logistique.

**a. Système de Lorenz :** Le système de Lorenz est représenté par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les variables d'état du système, et les conditions initiale  $x(0) = y(0) =$

$z(0) = 0, 1$ . Les paramètres  $\sigma$ ,  $\rho$  et  $b$  prennent les valeurs suivantes :  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  et  $b = \frac{8}{3}$  qui déterminent le comportement du système (1.4) chaotique .

### Non-linéarité :

D'après l'équation (1.4), on trouve le terme de non-linéarité entre les variables de l'état  $\dot{y}$  et  $\dot{z}$ .

Aspect aléatoire :

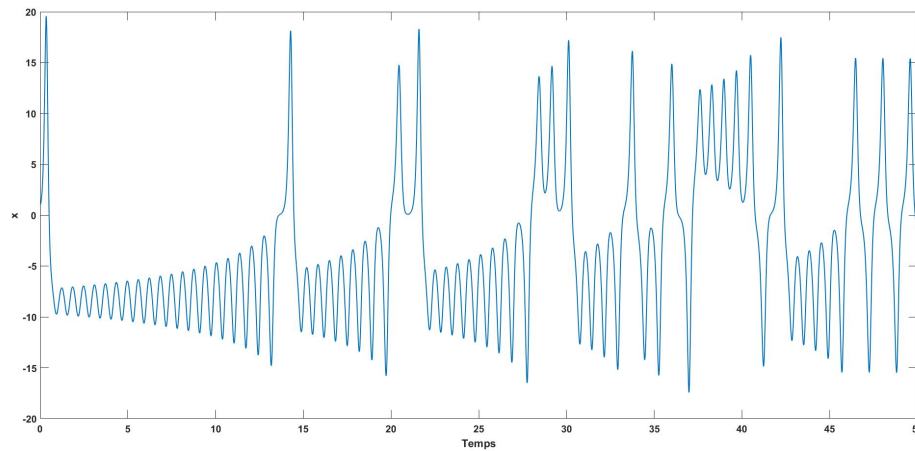


FIGURE 1.1 – Aspects aléatoire du système de Lorenz

Sensibilité aux conditions initiales :

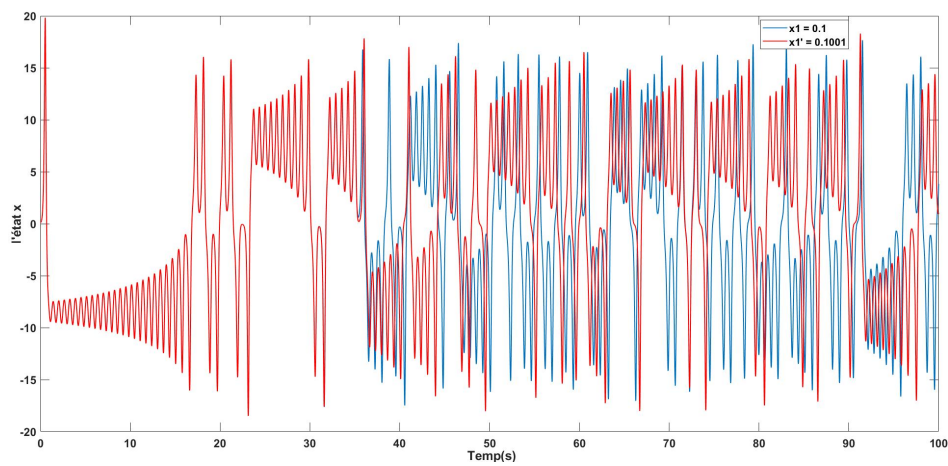


FIGURE 1.2 – Sensibilité aux conditions initiales de l'état  $x$  du système de Lorenz

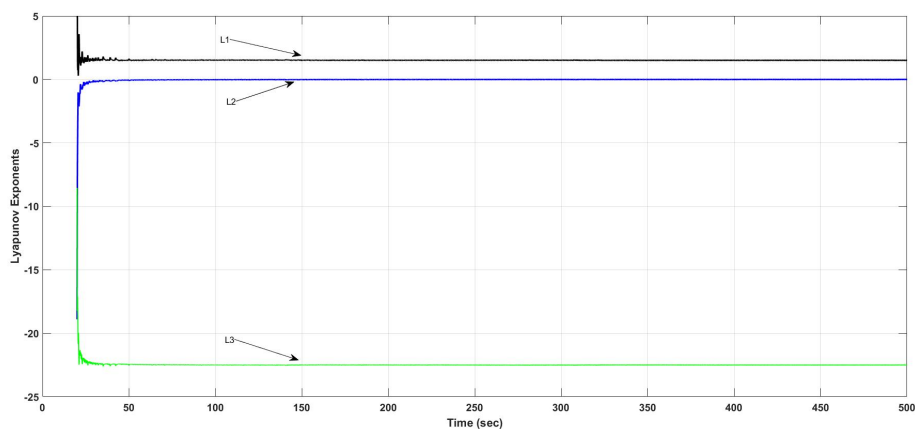
**Exposant de Lyapunov :**

FIGURE 1.3 – Exposant de Lyapunov du système Lorenz

La Figure 1.3 présente les exposants de Lyapunov du système de Lorenz pour  $a = 10$ ,  $b = 28$  et  $c = \frac{8}{3}$ , où  $\lambda_1 = 1,50327$ ,  $\lambda_2 = -0,003853$  et  $\lambda_3 = -22,4994$ .

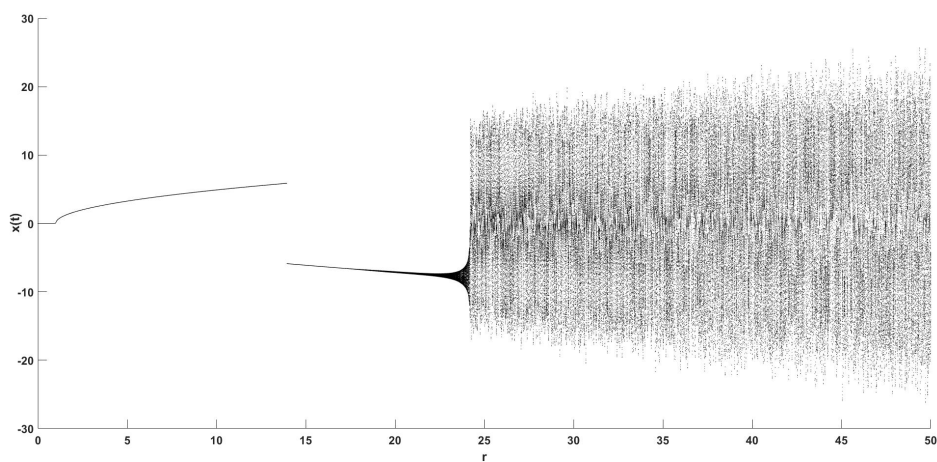
**Diagramme de bifurcation :**

FIGURE 1.4 – Diagramme de bifurcation du système Lorenz

**Attracteur étrange du système Lorenz :**

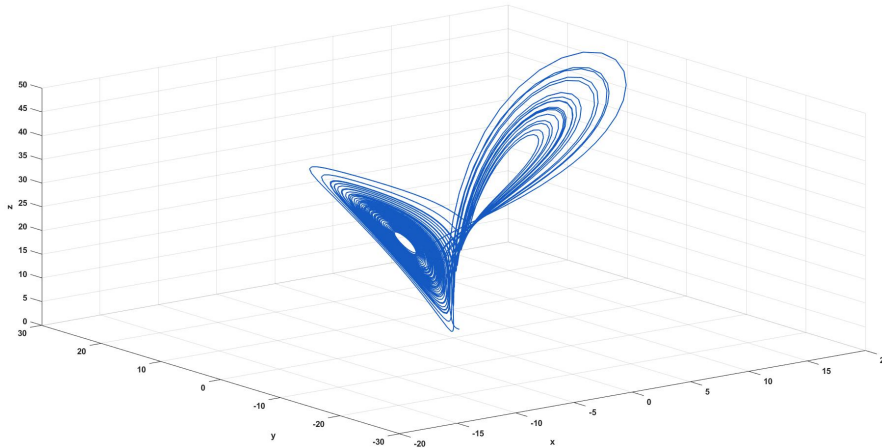


FIGURE 1.5 – Attracteur étrange du système Lorenz

**b. Fonction Logistique :** La fonction logistique est en effet l'un des systèmes chaotiques discret les plus étudiés, elle est définie par une équation de récurrence suivante :

$$x(k+1) = rx(k)(1-x(k)) \quad (1.5)$$

- pour  $0 < r < 3$ , le système possède un point fixe attractif.
- pour  $r = 3$ , le système subi une bifurcation et devient instable, à osciller entre deux valeurs.
- pour  $r > 3,6$ ; le système devient chaotique.

Où  $r$  représente le paramètre de bifurcation. Les valeurs exactes peuvent varier en fonction des conditions initiales et de la précision numérique utilisée dans les calculs.

Aspect aléatoire :

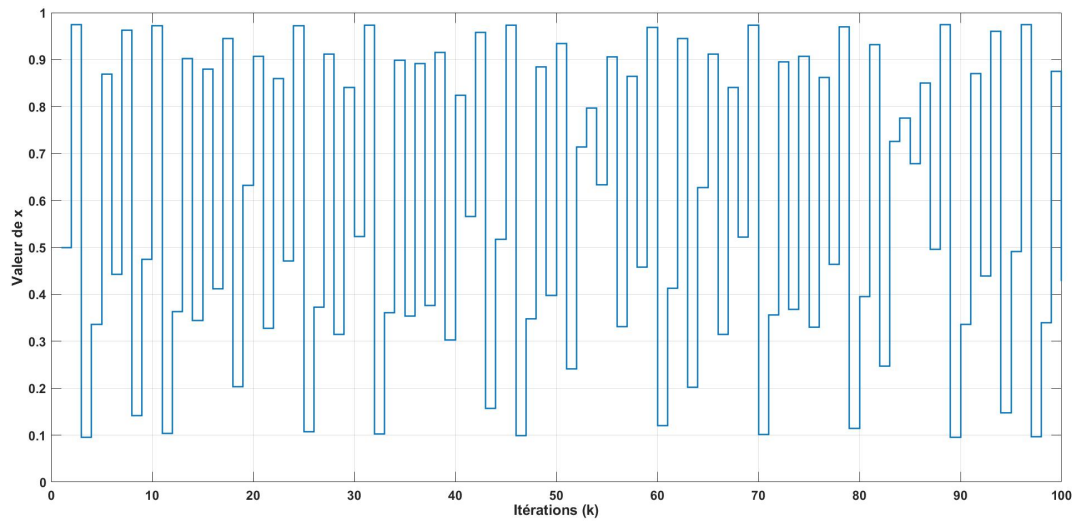


FIGURE 1.6 – Aspects aléatoire de la fonction Logistique

Condition initiale :

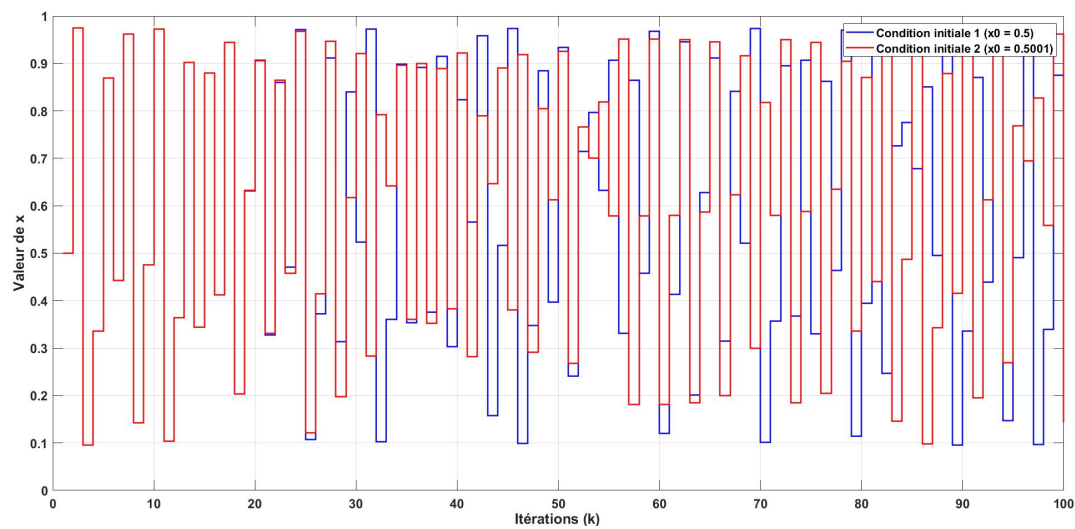


FIGURE 1.7 – Sensibilité aux conditions initiales de l'état  $x$  de la fonction logistique

**Diagramme de bifurcation :**

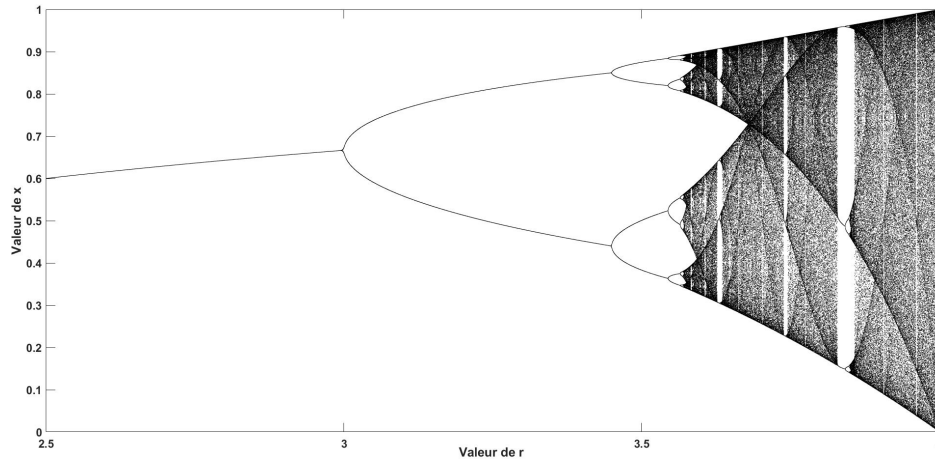


FIGURE 1.8 – Diagramme de bifurcation de la fonction logistique

## 1.4 Synchronisation des systèmes chaotiques

À première vue, il peut sembler surprenant de parler de synchronisation pour des systèmes chaotiques en raison de leur sensibilité aux conditions initiales, ce qui pourrait laisser penser que le chaos est incontrôlable. Cependant, les recherches de Pecora et Carroll [3] ont montré que les systèmes chaotiques peuvent être complètement synchronisés, ce qui a suscité un vif intérêt au sein de la communauté scientifique pour la synchronisation des systèmes chaotiques et hyper-chaotiques..

### 1.4.1 Principe de la synchronisation des systèmes chaotiques

Une des configurations les plus fréquentes pour synchroniser des systèmes chaotiques est le modèle Maître-Esclave [13]. Dans ce cadre, un système dynamique, appelé esclave, doit suivre et reproduire la trajectoire et l'évolution déterminées par un autre système dynamique, appelé maître. Soit un système esclave défini par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}_s(t) = f_s(x_s(t)), x_s \in \mathfrak{R}^n \quad (1.6)$$

Se synchronise avec un système maître :

$$\dot{x}_m(t) = f_m(x_m(t)), x_m \in \mathfrak{R}^n \quad (1.7)$$

Si, pour toute paire de conditions initiales  $(x_s(0), x_m(0)) \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_s(t) - x_m(t)\| = 0 \quad (1.8)$$

En général, les méthodes de synchronisation sont regroupées sous deux modes basés sur l'existence de la connexion entre le système maître (émetteur) et le système esclave (récepteur). Le premier mode est basé sur un couplage mutuel (bidirectionnel) entre deux systèmes chaotiques. Comme le montre la Figure 1.9 suivante :

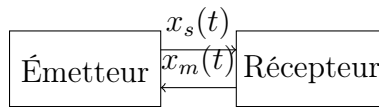


FIGURE 1.9 – Schéma de couplage bidirectionnel

Le second est connu sous le nom de couplage unidirectionnel. La boucle de retour est utilisée dans la synchronisation bidirectionnelle sur les deux systèmes en même temps. En revanche, dans le cas d'une synchronisation unidirectionnelle, la boucle de retour est appliquée uniquement à l'un des deux systèmes. Comme le montre la Figure 1.10 suivante :

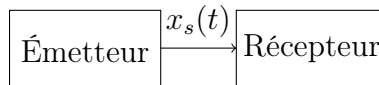


FIGURE 1.10 – Schéma de couplage unidirectionnel

## 1.4.2 Types de synchronisation

Différents types de synchronisation ont été introduits suite aux travaux de Pecora et Carroll en 1990 [3]. Dans cette section, nous définirons et donnerons le principe de chaque type de synchronisation.

### Synchronisation complète

Cette synchronisation, également connue sous le nom de synchronisation identique, est le type de synchronisation le plus ancien et le plus fondamental pour les systèmes chaotiques couplés. Elle consiste en une reconstruction parfaite des trajectoires de deux systèmes chaotiques après un régime transitoire, ce qui est accompli à l'aide d'un signal de couplage unidirectionnel, assurant qu'ils restent en phase au cours du temps [14].

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_s(t) - x_m(t)\| = 0 \quad (1.9)$$

### Synchronisation généralisée

Cette méthode de synchronisation a été introduite par Rulkov [15]. C'est la généralisation du concept de synchronisation identique. Dans ce cas, les systèmes se synchronisent au sens généralisé, s'il existe un difféomorphisme  $\Psi$  tel que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_s(t) - \Psi(x_m(t))\| = 0 \quad (1.10)$$

Remarque : Le difféomorphisme  $\Psi$  doit être inversible et indépendant des conditions initiales  $x_m(0)$  et  $x_s(0)$ . La synchronisation complète est un cas particulier de la synchronisation généralisée, où la fonction  $\Psi$  est égale à l'unité.

### Synchronisation projective

La synchronisation projective est une autre forme spéciale de la synchronisation généralisée, où la fonction  $\Psi$  est une fonction linéaire simple tel que  $\Psi(x) = ax$ . On dit qu'une synchronisation projective a lieu, si chaque état  $x_s(t)$  se synchronise avec un facteur multipliant l'état  $x_m(t)$ . Ainsi, cette synchronisation peut être formulée comme suit :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_s(t) - ax_m(t)\| = 0 \quad (1.11)$$

### Synchronisation retardée

La synchronisation retardée apparaît dans le cas des systèmes chaotiques non identiques faiblement couplés. En effet, il a été démontré qu'il existe un régime de synchronisation retardée, où l'état du système esclave converge vers l'état décalé du système maître, c'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_s(t) - x_m(t - \tau)\| = 0 \quad (1.12)$$

où  $\tau$  est un certain retard temporel.

### Synchronisation de phase

La synchronisation de phase a été introduite pour expliquer le comportement de certains systèmes oscillatoires dans le cas du chaos faible. Elle se produit lorsque les phases des oscillateurs se synchronisent, mais leurs amplitudes peuvent rester non synchronisées. Cela

signifie que la différence de phase entre deux systèmes tend vers une constante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi_s(t) - \phi_m(t)| = C \quad (1.13)$$

où  $\phi_s(t)$  et  $\phi_m(t)$  représentent les phases du système esclave et maître, respectivement, et  $C$  est une constante.

### 1.4.3 Méthode de synchronisation

#### Méthode de synchronisation par répartition de système Pecora et Carroll

La synchronisation chaotique par répartition est fondée sur le concept que des systèmes chaotiques peuvent être synchronisés en utilisant des variables couplées. Dans le cadre de la méthode Pecora-Carroll [3, 13], un système maître (ou émetteur) est divisé en plusieurs sous-systèmes qui sont ensuite couplés à des systèmes esclaves (ou récepteurs) correspondants. Le but est de faire en sorte que chaque sous-système esclave suive de près le comportement dynamique de son homologue maître.

La méthode Pecora-Carroll divise le système maître en sous-systèmes plus simples :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, y, z) \\ \dot{y} &= g(x, y, z) \\ \dot{z} &= h(x, y, z) \end{cases} \quad (1.14)$$

Ces sous-systèmes sont synchronisés avec des systèmes esclaves correspondants :

$$\begin{cases} \dot{u} &= f(u, v, w) + k_1(x - u) \\ \dot{v} &= g(u, v, w) + k_2(y - v) \\ \dot{w} &= h(u, v, w) + k_3(z - w) \end{cases} \quad (1.15)$$

où  $k_1$ ,  $k_2$ , et  $k_3$  sont des coefficients de couplage.

#### Méthode de synchronisation par commande proportionnelle

La méthode de synchronisation par commande proportionnelle [16] implique l'application d'une commande de rétroaction proportionnelle à la différence entre les états du système maître et du système esclave. En d'autres termes, les signaux de commande sont proportionnels à l'erreur de synchronisation entre les deux systèmes. Cette méthode permet de corriger les écarts et d'aligner les dynamiques des systèmes chaotiques.

Pour un système chaotique décrit par (1.14)

La méthode de synchronisation par commande proportionnelle implique de coupler chaque sous-système maître avec un sous-système esclave en utilisant une commande proportionnelle. Les systèmes esclaves sont définis comme suit :

$$\begin{cases} \dot{u} &= f(u, v, w) + k_1(x - u) \\ \dot{v} &= g(u, v, w) + k_2(y - v) \\ \dot{w} &= h(u, v, w) + k_3(z - w) \end{cases} \quad (1.16)$$

Où  $k_1$ ,  $k_2$ , et  $k_3$  sont des coefficients de couplage proportionnels. Ces coefficients doivent être ajustés pour assurer que les variables des systèmes esclaves suivent de près celles des systèmes maîtres, assurant ainsi la synchronisation.

#### 1.4.4 Méthode de synchronisation à base d'observateur

La méthode de synchronisation à base d'observateur [17, 18] repose sur l'utilisation d'un observateur pour estimer l'état d'un système chaotique maître en temps réel. Un observateur est une structure algorithmique qui fournit une estimation des variables d'état non mesurables du système maître en utilisant les mesures disponibles et un modèle du système. Cette méthode permet de synchroniser un système esclave avec le système maître en utilisant les estimations fournies par l'observateur.

Pour un système chaotique maître décrit par (1.14)

Pour concevoir l'observateur pour estimer l'état du système maître. Les équations de l'observateur sont formulées comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) + h_1(x - \hat{x}) \\ \dot{\hat{y}} &= g(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) + h_2(y - \hat{y}) \\ \dot{\hat{z}} &= h(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) + h_3(z - \hat{z}) \end{cases} \quad (1.17)$$

Où  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  sont les estimations des états  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , et  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  sont les gains de l'observateur.

#### 1.4.5 Exemple de la synchronisation des systèmes chaotiques

La synchronisation de Pecora et Carroll est un concept important en théorie du chaos qui décrit comment deux systèmes dynamiques non identiques peuvent synchroniser leurs états dynamiques. Pour illustrer cela entre deux systèmes de Lorenz, système maître contrôle le système esclave, représentés respectivement :

Pour le système maître :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sigma(y - x) \\ \dot{y}(t) = x(\rho - z) - y \\ \dot{z}(t) = xy - \beta z \end{cases} \quad (1.18)$$

Pour le système esclave :

$$\begin{cases} \dot{y}'(t) = x(\rho - z') - y' \\ \dot{z}'(t) = xy' - \beta z' \end{cases} \quad (1.19)$$

On suppose avec les conditions initiales suivantes pour les deux systèmes maître et esclave respectivement :  $0,01 ; 0,01 ; -50$  et  $20 ; 40$ . Et les paramètres  $\sigma, \rho, \beta$  avec leurs valeurs  $10, 28, \frac{8}{3}$

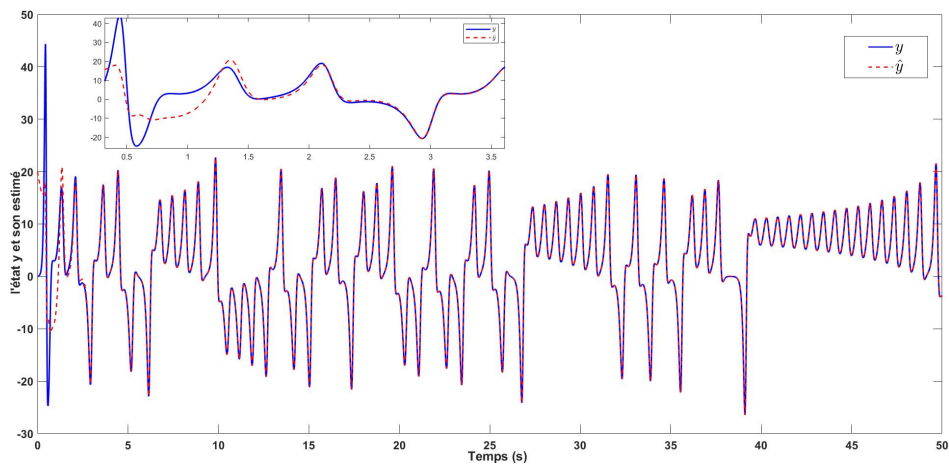
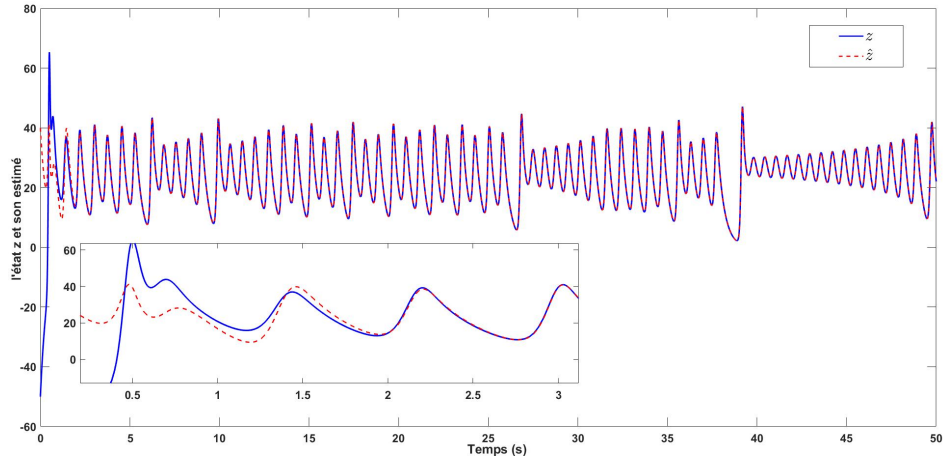
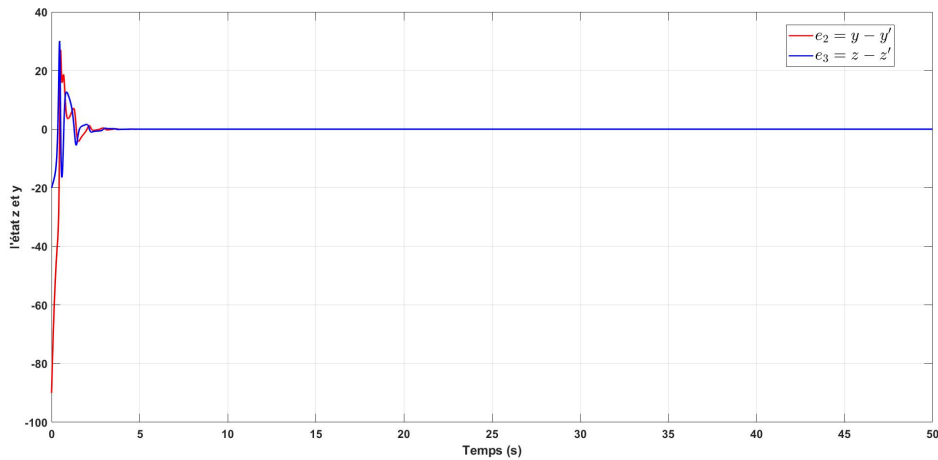


FIGURE 1.11 – Synchronisation de l'état  $y$  du système de Lorenz avec son estimé  $\hat{y}$

FIGURE 1.12 – Synchronisation de l'état  $z$  du système de Lorenz avec son estimé  $\hat{z}$ FIGURE 1.13 – Erreurs sur les états  $y$  et  $z$  du système de Lorenz avec leurs estimés  $\hat{y}$  et  $\hat{z}$ , respectivement

## 1.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons exploré la complexité des systèmes dynamiques en examinant à la fois leurs aspects continus et discrets, ainsi que les caractéristiques fascinantes des systèmes chaotiques. Nous avons observé comment de légères variations initiales peuvent entraîner des résultats considérablement différents à long terme, mettant en lumière la grande sensibilité de ces systèmes aux conditions initiales. Nous avons également souligné leur nature non linéaire et déterministe. L'exemple pratique a enrichi notre compréhension des trajectoires chaotiques et de leur sensibilité. En conclusion, nous avons abordé la synchronisation comme un moyen de contrôler et coordonner ces systèmes chaotiques, soulignant

son importance dans divers domaines scientifiques et technologiques. Ce chapitre a posé les bases pour approfondir les concepts de synchronisation basée sur des observateurs dans les prochains chapitres.

# Chapitre 2

## Généralités sur les observateurs d'état

### 2.1 Introduction

Les observateurs revêtent une importance capitale dans l'estimation des états des systèmes chaotiques. Ces derniers se distinguent par leur sensibilité extrême aux conditions initiales et leur comportement non linéaire imprévisible. Face à cette complexité, les observateurs offrent un moyen de reconstruire et de suivre l'évolution temporelle de ces systèmes. Dans ce chapitre, nous explorerons le rôle crucial des observateurs dans la synchronisation des systèmes chaotiques. Nous mettrons en lumière les différentes approches d'observabilité disponibles, ainsi que la synthèse de l'observateur à grand gain.

### 2.2 Observabilité

Comprendre la théorie des observateurs d'état et les appliquer dans des contextes linéaires et non linéaires nécessite une compréhension approfondie de l'observabilité. L'observabilité évalue la capacité à déduire l'état interne d'un système à partir des données d'entrées et de sorties observées, une compétence cruciale pour concevoir des systèmes de contrôle et d'estimation d'état efficaces. Cette capacité permet de surveiller et de répondre aux variations du système afin de maintenir sa stabilité et son efficacité. Un système est considéré comme observable lorsque son état interne peut être entièrement reconstruit à partir de ses sorties mesurées, offrant ainsi aux concepteurs la possibilité de surveiller et d'ajuster le fonctionnement du système pour garantir sa stabilité et son bon fonctionnement. Pour les systèmes linéaires, la vérification de l'observabilité utilise des matrices d'observabilité, tandis que pour les systèmes non linéaires, des méthodes plus complexes comme le dérive de Lie sont nécessaires. L'observabilité permet de concevoir des systèmes de surveillance et de contrôle efficaces [19].

### 2.2.1 Observabilité des systèmes dynamiques linéaires

L'observabilité des systèmes linéaires est la capacité à déterminer l'état interne d'un système dynamique à partir de ses sorties observables, en se basant sur des équations linéaires décrivant l'évolution du système. En d'autres termes, un système linéaire est observable s'il est possible de reconstruire complètement son état interne à partir de ses sorties mesurées, en utilisant des techniques d'estimation telles que les observateurs d'état [20].

Soit le système linéaire d'ordre  $n$  donné par sa représentation d'état telle que :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $y \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de sortie,  $t$  désigne la variable du temps. les matrices  $A, B, C$  et  $D$  sont des dimensions appropriées.

La matrice d'observabilité est donner par :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

où

- $\text{rang}(\mathcal{O}) = n \quad \rightarrow \quad$  observable
- $\text{rang}(\mathcal{O}) \leq n \quad \rightarrow \quad$  partiellement observable

#### Grammien d'observabilité :

On appelle grammien d'observabilité la matrice semi-définie positive de dimension  $n \times n$  donné par :

$$W(0, t) = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau \quad (2.3)$$

**condition nécessaire et suffisante d'observabilité :**

Le système décrit par l'équation (2.1) est complètement observable si une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

Si seulement : la matrice grammien d'observabilité est de rang plein  $\text{rang}(W(0, t)) = n$  pour tout  $t$  appartenant à  $[t_0, t_f]$ .

Si et seulement si : les colonnes de la matrice  $Ce^{At}$  sont linéairement indépendantes pour tout  $t$  appartenant à  $[t_0, t_f]$ .

Si et seulement si : la matrice d'observabilité est de rang plein,  $\text{rang}(\mathcal{O}) = n$ .

**2.2.2 Observabilité des systèmes non linéaire**

Avant de développer un observateur pour un système dynamique, il est crucial de vérifier son observabilité, c'est-à-dire de garantir que l'état peut être déduit à partir des données d'entrée et de sortie. Pour les systèmes non linéaires, cette caractéristique est associée aux entrées et aux conditions initiales. Dans cette section, nous aborderons quelques définitions et concepts concernant l'observabilité des systèmes non linéaires [8].

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) + g(x)u(t) \\ y(t) = v(x) \end{cases} \quad (2.4)$$

Les champs de vecteurs  $f(x) : R^n \rightarrow R^n$  et  $g(x) : R^n \rightarrow R^m$  ainsi que  $v(x) : R^n \rightarrow R^p$  sont des fonctions continues.

**Définition (Observabilité)**

Dans les systèmes non linéaires, la définition de l'observabilité peut varier en fonction des approches locales ou globales utilisées, ce qui peut influencer la manière dont elle est évaluée. Par conséquent on se concentre souvent sur des définitions d'observabilité conditionnelle, qui prennent en compte des propriétés spécifiques du système, telles que la condition de rang, afin de déterminer dans quelles conditions le système peut être considéré comme observable.

**Définition (Condition de Rang)**

La condition du rang est une méthode pratique pour vérifier l'observabilité des systèmes non linéaires en utilisant les dérivées de Lie [21, 4].

$$\mathcal{O}(x) = \begin{bmatrix} L_f^0 h(x) \\ L_f^1 h(x) \\ L_f^2 h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

où  $L_f h$  est la dérivée de Lie de  $h$  par rapport à  $f$ . Le système est localement observable si  $\text{rang}(\mathcal{O}(x)) = n$ .

## 2.3 Observateur des systèmes dynamiques

Une solution simple et optimale pour estimer l'état des systèmes linéaires a été proposée par Luenberger dans un contexte déterministe, et par Kalman dans un contexte stochastique [22]. Grâce à ces observateurs, il est possible de surveiller, d'ajuster et de corriger le comportement de systèmes complexes, contribuant ainsi à leur stabilité et à leur performance optimale. Dans les deux cas, on considère le modèle dynamique du système linéaire défini par l'équation (2.1).

### 2.3.1 Observateur des systèmes linéaires

#### Observateur de Luenberger

L'observateur de Luenberger proposé par David Luenberger en 1971 [21]. Est l'un des types d'observateurs les plus utilisés. Cette théorie est essentiellement fondée sur des techniques de placement de pôles, fournissant ainsi une solution simple et directe à la problématique de l'estimation d'état pour les systèmes linéaires déterministes. De plus, sa conception simple est associée à une flexibilité remarquable dans le choix de la dynamique de l'observateur. Cette flexibilité permet de régler la vitesse de convergence et la précision de l'estimation de l'état, offrant ainsi un contrôle précis sur la performance de l'observateur et sa capacité à suivre efficacement les variations du système observé.

L'observateur et le système sont présents par la Figure 2.1 suivante :

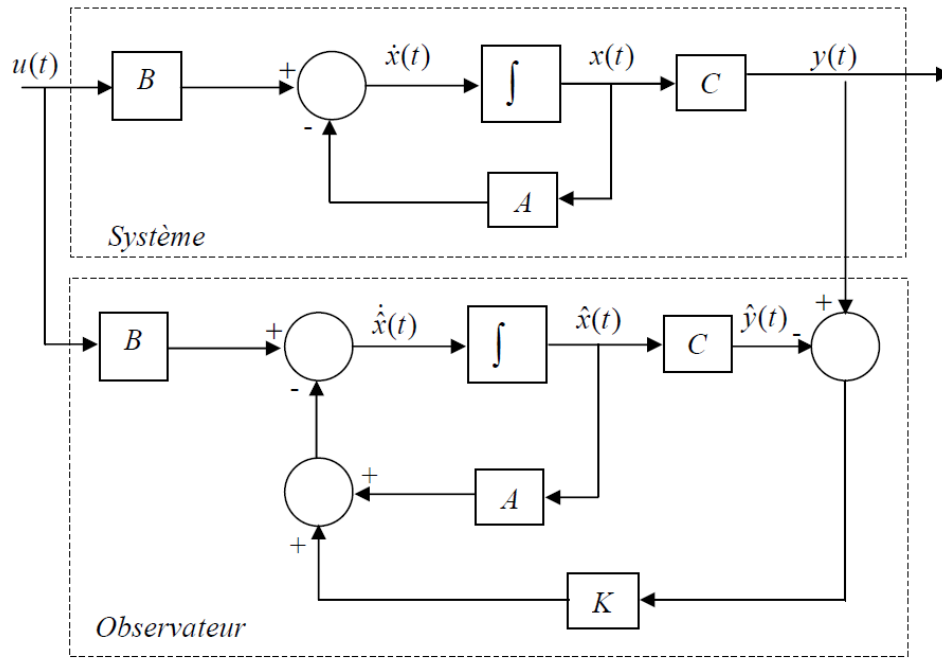


FIGURE 2.1 – Schéma de l'observateur Luenberger et le système

Considérons le système linéaire donné par l'équation (2.1). L'observateur de Luenberger est de la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \underbrace{A\hat{x}(t) + Bu(t)}_1 + \underbrace{L(y(t) - C\hat{x}(t))}_2 \quad (2.6)$$

Où :

- $\hat{x}(t)$  est l'estimation de l'état du système.
- $L$  est la matrice de gain de l'observateur, ajustée pour contrôler la convergence de l'estimation vers l'état réel.

La partie (1) est celle correspondant à la dynamique du système et la partie (2) est le correctif. Par définition d'un observateur, la matrice  $L \in M_{n,p}$  (dite matrice de gain) est telle que :

$$\forall x(0), \hat{x}(0) \in \mathfrak{R}^n, \|x(t) - \hat{x}(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } t \rightarrow \infty$$

L'observateur de Luenberger assure une convergence asymptotique de l'erreur d'observation  $e = x - \hat{x}$  vers 0, ce qui signifie que  $e(t)$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini, pour toute valeur initiale  $e(0)$ , si et seulement si la matrice  $A - LC$  est de Hurwitz, c'est-à-dire si la partie

réelle de toutes les valeurs propres de  $A - LC$  est négative. Ainsi, construire un observateur de Luenberger revient à trouver une matrice de gain  $L$  telle que la matrice  $A - LC$  soit de Hurwitz [20].

### Définition de Hurwitz :

Un polynôme de Hurwitz est un polynôme dont toutes les racines ont une partie réelle strictement négative. De même, une matrice de Hurwitz est une matrice dont toutes les valeurs propres ont une partie réelle strictement négative [23].

### Dimensionnement du gain $L$ de l'observateur

La détermination de la matrice  $L$  permet de fixer arbitrairement les pôles de l'observateur, c'est-à-dire choisir les valeurs propres de la matrice  $A - LC$  de façon à ce que celle-ci soit de Hurwitz. On notera par la suite :

$$a(\lambda) = \det(\lambda I - (A - LC)) \quad (2.7)$$

où  $a(\lambda)$  est le polynôme représentant les dynamiques désirées de l'observateur et les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres désirées pour  $A - LC$ .

Bien que l'observateur de Luenberger soit une méthode couramment utilisée et appréciée pour l'estimation de l'état dans de nombreux systèmes, l'observateur de Luenberger est largement utilisé pour sa flexibilité permettant d'ajuster la vitesse de convergence et la précision de l'estimation de l'état.

### Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman a été introduit par Rudolf E. Kalman en 1960 [24] et développé davantage par Kalman et Bucy en 1961. Sa conception optimisée en fait une méthode largement adoptée pour les systèmes stochastiques, où il modélise ces incertitudes et perturbations. Cela permet de déduire l'état d'un système dynamique à partir de mesures qui peuvent être altérées par du bruit.

### Définition du système stochastique

Un système stochastique est un système dynamique dont l'évolution est influencée par des variables aléatoires, souvent appelées bruits. Ces bruits peuvent provenir de diverses sources

telles que des variations aléatoires dans les entrées, des erreurs de mesure, des perturbations environnementales, etc. Considérons le modèle stochastique dit modèle de Kalman suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + M\omega(t) \\ y(t) &= Cx(t) + v(t)\end{aligned}\tag{2.8}$$

Où  $\omega(t)$  et  $v(t)$  sont respectivement les bruits internes et les bruits de mesures. Pour que le filtre de Kalman fonctionne de manière optimale et efficace, ces trois hypothèses doivent être satisfaites [25].

**Hypothèse 1 :** La paire  $(A, C)$  est détectable ce qui garantit que les parties non observables du système sont asymptotiquement stables, permettant ainsi au filtre de converger correctement.

**Hypothèse 2 :** bruits blancs gaussiens stationnaires centrés (moyennes nulles) et indépendants

$$\begin{aligned}E[\omega(t)\omega(t+\tau)^T] &= W\delta(\tau) \\ E[v(t)v(t+\tau)^T] &= V\delta(\tau) \\ E[\omega(t)v(t+\tau)^T] &= 0\end{aligned}\tag{2.9}$$

**Hypothèse 3 :**  $V$  est une matrice symétrique définie positive inversible. Si le bruit  $w(t)$  n'est pas centré, c'est-à-dire qu'il a une moyenne non nulle  $m_\omega(t) \neq 0$  cela introduit un biais dans les estimations du filtre de Kalman. Pour traiter ce biais, il est nécessaire de réécrire le système de manière à centrer le bruit. Voici comment procéder :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \begin{bmatrix} B & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ m_\omega(t) \end{bmatrix} + M\tilde{\omega}(t)y(t) = Cx(t) + v(t)\tag{2.10}$$

### Structure du filtre de Kalman Bucy

La structure générale du filtre de Kalman-Bucy est décrit par le modèle d'état ci-dessous

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= A_f\hat{x}(t) + Bu_f(t) + Ky(t) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t)\end{aligned}\tag{2.11}$$

$K$  est le gain du filtre.

### Les Étapes de calcul du gain de Kalman

Le gain de Kalman  $K$  est calcul comme suit :

$$K = P(t)C^T V^{-1} \quad (2.12)$$

Où  $P$  est la matrice de covariance de l'erreur de prédiction  $P(t)$  est obtenu à partir de l'équation de Riccati :

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)C^T V^{-1} CP(t) + MWM^T \quad (2.13)$$

## 2.3.2 Observateur des systèmes non Linéaires

### Observateur luenberger étendu

L'observateur de luenberger étendu est une extension de l'observateur de luenberger classique adaptée aux systèmes non linéaires. Il peut être implémenté de deux manières distinctes : en utilisant un gain constant avec un modèle linéarisé du système, ou en effectuant un changement de coordonnées avec un gain dépendant de l'état.

Dans le premier cas, le calcul du gain de l'observateur se fait par le placement de pôles [5]. Cependant, cette approche exige un modèle linéarisé du système, et il est crucial que l'état reste proche de l'équilibre pour éviter les instabilités.

Dans le deuxième cas, l'observateur de luenberger étendu est mis en œuvre en utilisant un changement de coordonnées avec un gain dépendant de l'état. Même si cela nécessite parfois l'intégration d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles non linéaires, contrairement à la méthode du gain constant avec modèle linéarisé, cette approche permet de travailler directement avec le modèle non linéaire du système, ce qui peut être complexe à réaliser [26].

Considérons Le système non linéaire représenté par l'équation (2.4). L'observateur de Luenberger étendu qui correspond au système (2.4) est de la structure suivante

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + L[y - \hat{y}] \\ \hat{y} = v(\hat{x}, u) \end{cases} \quad (2.14)$$

Le calcul du gain de l'observateur implique d'abord la linéarisation du système (2.4)

autour d'un point d'équilibre choisi, de manière à ce que la matrice  $A - LC$  soit Hurwitzienne. Ensuite, nous calculons les matrices Jacobienne par rapport à l'état et à l'entrée à ce point, comme exprimé par [5].

### Observateur à mode glissant

Au fil des années, les observateurs à mode glissant ont fait l'objet d'une étude approfondie. Les premières recherches sur les observateurs à mode glissant ont été menées dans les années 1960 et 1970, principalement par des chercheurs soviétiques. L'idée fondamentale derrière les observateurs à mode glissant est de faire converger la dynamique des erreurs d'observation vers zéro en introduisant une fonction discontinue dans la structure de l'observateur.

Les observateurs à mode glissant sont conçus pour contraindre les dynamiques d'un système d'ordre  $n$  à converger vers une variété de dimension  $n - p$  appelée surface de glissement [27].

Les dynamiques concernées sont celles des erreurs d'observation  $\tilde{x} = x - \hat{x}$ , à partir de leurs valeurs initiales  $\tilde{x}(0)$ . Ces erreurs convergent vers les valeurs d'équilibre en deux phases.

**première phase** Les trajectoires des erreurs d'observation sont forcées vers la surface de glissement. Cette surface est définie par  $\tilde{y} = 0$ , où  $\tilde{y} = y - \hat{y}$  représente l'erreur entre la sortie de l'observateur et la sortie réelle du système.

**deuxième phase** Appelée mode de glissement, intervient une fois que les trajectoires des erreurs d'observation ont atteint la surface de glissement. Dans cette phase, les erreurs d'observation glissent le long de la surface de glissement tout en maintenant  $\tilde{y} = 0$ . La dynamique imposée pendant cette phase vise à annuler le reste de l'erreur et à maintenir l'estimation de la sortie aussi proche que possible de la sortie réelle du système.

Considérons un système d'état non linéaire d'ordre  $n$  représenté par l'équation (2.4). L'observateur à modes glissants est défini avec la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - K\Gamma_s \\ \hat{y} = h(\hat{x}) \end{cases} \quad (2.15)$$

Où

$K$  est la matrice de gain de dimension  $(n \times p)$ .

$\Gamma_s$  vecteur de dimension  $p \times 1$  défini tel que  $\Gamma_s = [\text{sign}(\hat{y}_1 - y_1) \dots \text{sign}(\hat{y}_p - y_p)]^T$

Nous définissons également les vecteurs relatifs aux erreurs d'observation tel que :

$e = x - \hat{x}$  est le vecteur d'état des erreur d'observation.

$S = e_y = y - \hat{y}$  est la surface de glissement.

Pour que l'état estimé converge vers l'état réel, l'observateur à mode glissant doit respecter deux conditions : La première concerne le mode d'atteinte et garantie l'attractivité de la surface de glissement  $S = 0$  de dimension  $p$ , laquelle est attractive si la fonction de Lyapunov  $V(x) = ST \times S$  vérifie la condition :  $V(x) < 0$  si  $S \neq 0$ .

La deuxième concerne le mode glissant, durant cette étape, la matrice des gains correctifs agit de manière à satisfaire la condition d'invariance suivante

$$\begin{cases} \dot{S} = 0 \\ S = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Ce dernier est appelé mode de glissement où les dynamiques du système sont réduites et le système d'ordre  $n$  devient un système équivalent d'ordre  $n \times p$ .

### Observateur à grand gain

Les systèmes non linéaires présentent des défis supplémentaires, nécessitant des approches plus robustes et rapides. C'est dans ce contexte que des chercheurs en contrôle non linéaire, notamment Jean-Jacques Slotine dans les années 1980, ont souligné l'importance des gains élevés pour améliorer la performance des observateurs. L'utilisation de ces gains permet d'accélérer la convergence des estimations des états du systèmes vers leurs valeurs réelles. Notre étude se focalisera spécifiquement sur les systèmes qui peuvent s'écrire sous la forme canonique observable.

Considérant le système non linéaire affiné en entrée [28], décrit par le modèle d'état de l'équation (2.4).

Où  $x \in R^n$ ,  $u \in R^m$  et  $y \in R^p$  représente respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortir du système,  $x(t_0)$  est la condition initiale à l'instant initial  $t_0$ .

Pour concevoir l'observateur à grand gain pour le système (2.4), il est nécessaire de le représenter sous la forme canonique observable donne comme suite

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + F(z(t)) + G(z(t))u(t) \\ y(t) = z_1(t) = Cz(t) \end{cases} \quad (2.17)$$

Avec

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix}; G(z(t)) = \begin{bmatrix} g_1(z_1(t)) \\ g_2(z_1(t), z_2(t)) \\ \vdots \\ g_{n-1}(z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)) \\ g_n(z_1(t), \dots, z_n(t)) \end{bmatrix}; F(z(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \varphi(z(t)) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Pour transformer le système (2.4) sous la forme (2.17). On utilise un difféomorphisme défini par une série de transformations mathématiques. Ce processus permet de remodeler les équations du système d'origine afin de les exprimer dans une forme qui rend les états du système observables à partir de ses sorties [28].

$$\varphi(x) = z = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Ainsi l'observateur à grand gain possède la structure suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + f(\hat{x}(t), u(t)) + H(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (2.21)$$

Où  $H$  représente les gains de l'observateur.

**a. Étape de dimensionnement de l'observateur à grand gain**

Les gains de l'observateur  $H$  est calculé selon l'équation suivante

$$H = \theta \Delta_{\theta}^{-1} S^{-1} C^T \quad \rightarrow \quad H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

D'où on résout l'équation **(2.22)** on calculant tout ces paramètres **[9]**.

- Où  $\theta$  est un paramètre de synthèse propre de l'observateur à grand gain. On lui affecté toujours  $\theta > 1$ .
- $\Delta_{\theta}$  Un facteur d'adaptation ou de gain ajustable. Ce terme est utilisé pour ajuster l'observateur selon les besoins, souvent pour compenser des erreurs ou des différences entre les états réels et estimés. C'est la matrice diagonale décrite par l'expression suivante

$$\Delta_{\theta} = \begin{bmatrix} \theta^0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \theta^n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{inverse}} \Delta_{\theta}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\theta^n} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

- $S$  est la solution de l'équation de lyapunov qui est donné par la suite

$$A^T S + S A + S = C^T C \quad (2.24)$$

Pour résoudre l'équation **(2.22)** on utilise la fonction " Lyap " de Matlab **[9, 18]**, où l'équation doit avoir une forme spécifique donné par :

$$A X + X A^T + \varphi = 0 \quad (2.25)$$

En simplifiant l'équation **(2.22)** de la manière suivante :

$$A^T S + S A + S - C^T C = 0$$

En simplifiant d'avantage, nous obtenons

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}I_3 + A\right)^T}_{\hat{A}^T} S + \underbrace{\left(\frac{1}{2}I_3 + A\right)}_{\hat{A}} S + \varphi = 0$$

Identification :

$$\begin{cases} AX = \hat{A}S & \text{:Relation entre la matrice de l'observateur et la matrice estimée.} \\ A^T X = \hat{A}^T S & \text{:Relation transposée de la précédente.} \\ \varphi = -C^T C & \text{: Perturbation de l'équation.} \end{cases}$$

— Ainsi  $S^{-1}$  est l'inverse de la matrice donnée par l'instruction suivante :

$$S = \text{Lyap}(\hat{A}, \varphi) \quad (2.26)$$

### Erreur d'estimation

L'erreur d'estimation  $e_x$  est définie par la différence entre l'état réel  $x$  du système et l'estimation  $\hat{x}$  de l'observateur :

$$e_x = x - \hat{x} \quad (2.27)$$

En suivant les équations du système et de l'observateur, nous pouvons estimé les erreurs pour chaque état :

$$\begin{cases} e_{x1} = x_1 - \hat{x}_1 \\ \vdots \\ e_{xn} = x_n - \hat{x}_n \end{cases} \quad (2.28)$$

Les dérivées temporelles de ces erreurs peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}_{x1} = \dot{x}_1 - \dot{\hat{x}}_1 \\ \vdots \\ \dot{e}_{xn} = \dot{x}_n - \dot{\hat{x}}_n \end{cases} \quad (2.29)$$

En utilisant les équations du système (2.5) et de son observateur (2.17), les dérivées temporelles des erreurs d'estimation peuvent être exprimées en fonction des sorties mesurées  $y$ ,

des estimations des sorties  $\hat{y}$ , des entrées  $u$  et des gains  $h_1, h_2, \dots, h_n$  :

$$\begin{cases} \dot{e}_{x1} = x_2 - \hat{x}_2 - h_1(y - \hat{y}) \\ \vdots \\ \dot{e}_{xn} = \underbrace{\varphi(x, u) - \varphi(\hat{x}, u)}_{\delta} - h_n(y - \hat{y}) \end{cases} \quad (2.30)$$

Où  $\delta$  représente le terme non linéaire.

En regroupant les termes, les équations des dérivées temporelles des erreurs d'estimation peuvent être représentées sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{x1} \\ \vdots \\ \dot{e}_{xn} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_1 & 1 & \dots & 0 \\ h_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ h_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{A_0} \begin{bmatrix} e_{x1} \\ \vdots \\ e_{xn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \delta(t) \quad (2.31)$$

L'objectif est déterminer les gains  $h_n$  de l'observateur de telle sorte que l'erreur converge exponentiellement vers zéro. pour analyser la convergence de l'erreur, nous devons examiner les valeurs propres  $\hat{\lambda}_i$  de la matrice  $A_0$ .

L'équation caractéristique de  $A_0$  :

$$\lambda^n + h_1\lambda^{n-1} + h_2\lambda^{n-2} + \dots + h_n = 0 \quad (2.32)$$

$\hat{\lambda}_i$  sont les racines de l'équation(2.32).

En choisissant les gains  $h_n$  de manière approprié, les racines  $\hat{\lambda}_i$  seront placées dans le demi plans gauche, ce qui garantie que l'erreur d'estimation décroît exponentiellement, assurant la stabilité de l'observateur.

## 2.4 Conclusion

En conclusion, ce chapitre a mis en évidence l'importance des observateurs dans le domaine des systèmes dynamiques chaotiques. Nous avons exploré différentes approches d'observation, en mettant un accent particulier sur l'observateur à grand gain. Ces outils se sont révélés efficaces pour la reconstruction des états et la synchronisation des systèmes chaotiques,

---

contribuant ainsi à une meilleure compréhension et maîtrise de ces systèmes complexes. Les méthodes présentées offrent des perspectives prometteuses pour des applications pratiques variées, nécessitant une observation précise et une régulation rigoureuse des dynamiques chaotiques.

# Chapitre 3

## Implémentation de la synchronisation chaotique à base d'un observateur à grand gain

### 3.1 Introduction

Ce chapitre se concentrera sur la synchronisation des systèmes chaotiques en employant l'observateur à grand gain, les systèmes chaotiques de Genisio et de Rössler seront pris comme principaux exemples pour appliquer nos approches.

Nous commencerons par exposer les bases théoriques des systèmes chaotiques et de leurs caractéristiques, suivi d'une explication la synthèse de l'observateur à grand gain. Ces derniers sont cruciaux pour estimer les états internes des systèmes chaotiques à partir des mesures de sortie, facilitant ainsi la synchronisation de deux systèmes chaotiques distincts. Et de vérifier les résultats théorique sur la plateforme Matlab.

Ensuite, nous aborderons l'implémentation de ces observateurs sur une plateforme Arduino. Cette démarche pratique vise à démontrer la fiabilité de notre approche dans des contextes concrets, en recourant à un équipement accessible et économique. Nous discuterons des défis techniques rencontrés lors de cette mise en œuvre et des solutions adoptées pour garantir une synchronisation efficace.

## 3.2 Représentation des systèmes chaotiques étudiés

### 3.2.1 Système de Genisio

Le système de Genisio [29] est un système dynamique non linéaire souvent utilisé pour illustrer les phénomènes chaotiques. Il est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -cx_1 - bx_2 - ax_3 + x_1^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

Où la sortie  $y = x_1$ . Cette représentation met en évidence la nature chaotique du système, caractérisée par des interactions non linéaires et des dépendances temporelles complexes.

#### Non-linéarité :

D'après l'équation (3.1), on trouve le terme de non-Linéarité entre les variables de l'état  $\dot{x}_3$ .

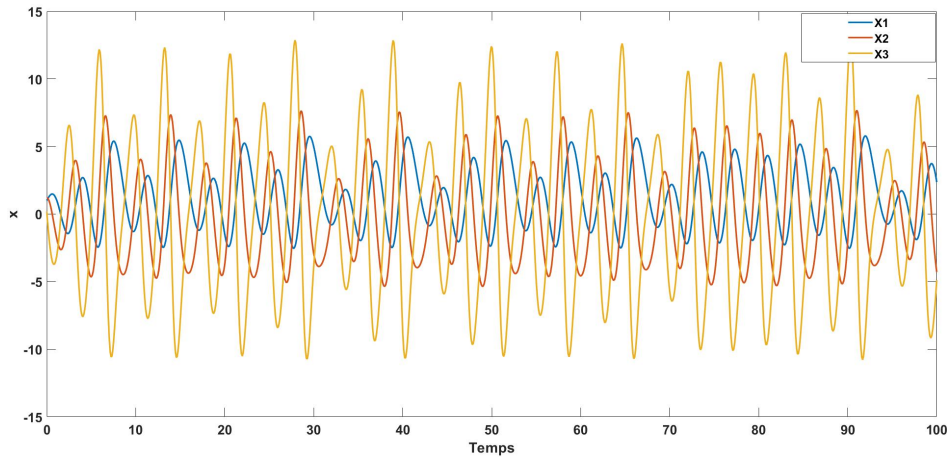


FIGURE 3.1 – Aspects aléatoire du système Genisio

La Figure 3.1 représente l'aspect aléatoire des trois états du système Genisio avec les paramètres  $a = 0,2$ ;  $b = 3,03$  et  $c = 5,55$  et ces conditions initiales  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 1,2$  et  $x_3(0) = 0,2$ .

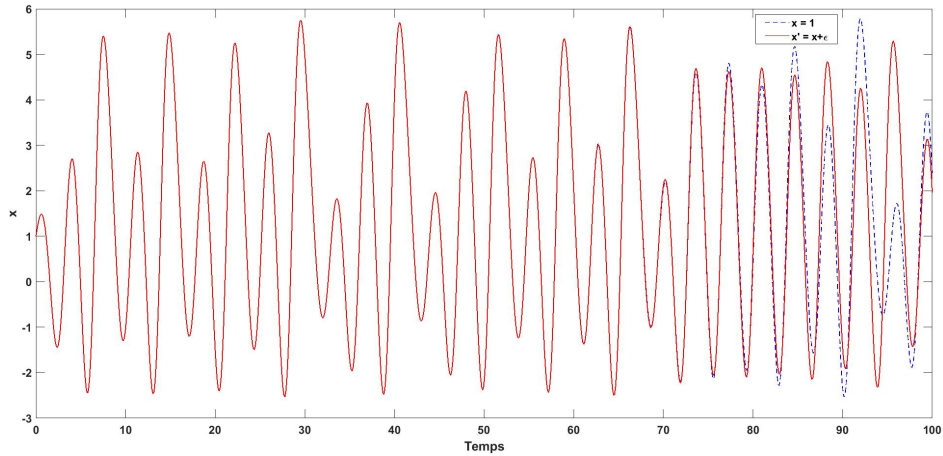


FIGURE 3.2 – Sensibilité aux conditions initiales de l'état  $x_1$  du système de Genisio

La Figure **3.2** représente la sensibilité aux conditions initiales de l'état  $x_1$  du système **(3.1)**, la trajectoire (représentée en rouge) est obtenue pour une condition initiale ( $x_1(0) = 1$ ). Nous remarquons que, pour une petite variation  $\epsilon = 10^{-7}$  de cette condition initiale, la trajectoire de  $x'_1$  (représentée en bleu) diverge de la première courbe. Ce qui démontre la très grande sensibilité aux conditions initiales.

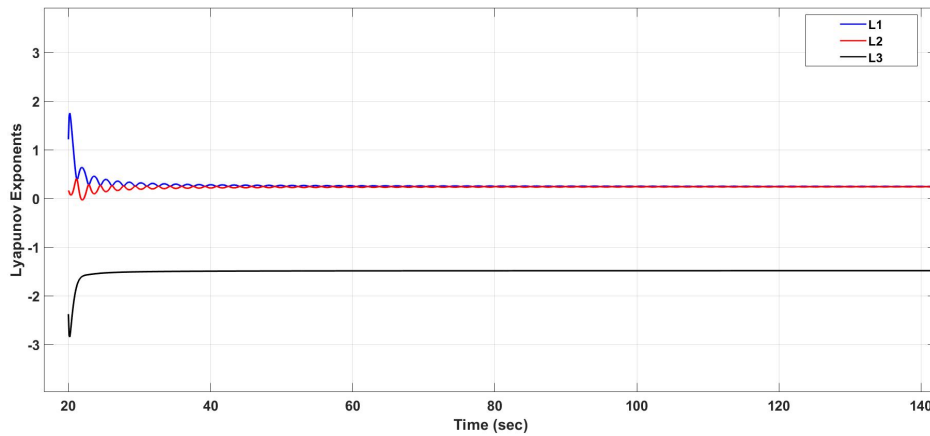


FIGURE 3.3 – Exposant de lyapunov du système Genisio

La Figure **3.3** présente les exposants de Lyapunov du système de Genisio pour  $a = 1$ ,  $b = 3,03$  et  $c = 5,55$ , où  $\lambda_1 = 0,24163$ ,  $\lambda_2 = 0,24082$ , et  $\lambda_3 = -1,4824$ .

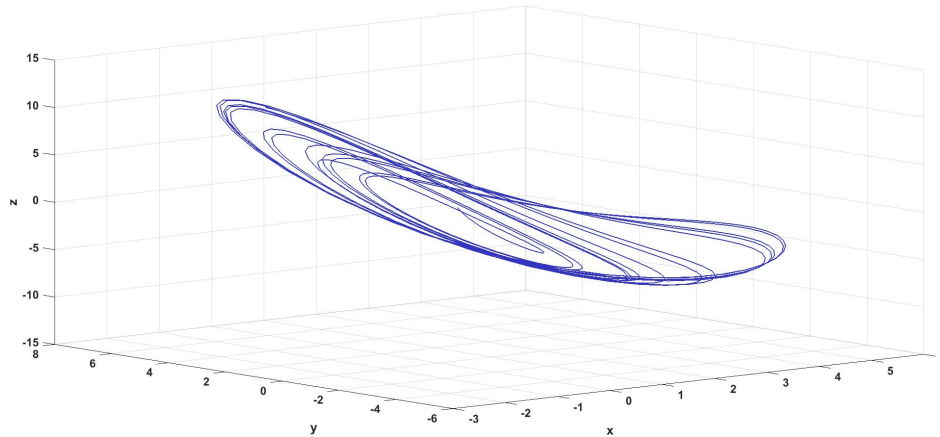


FIGURE 3.4 – Attracteur étrange du système Genisio

La Figure 3.4 représente l'attracteur du système de Genisio, dans trois dimension  $xyz$ .

### 3.2.2 Système de Rössler

Le système de Rössler est un autre exemple classique de système chaotique, décrit par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $a$ ,  $b$ , et  $c$  sont des paramètres du système. Le système de Rössler présente un comportement chaotique pour certaines valeurs de ces paramètres, rendant l'analyse et la conception d'observateurs particulièrement intéressantes.

#### Non-linéarité :

D'après l'équation (3.2), on trouve le terme de non-Linéarité entre les variables de l'état  $\dot{z}$ .

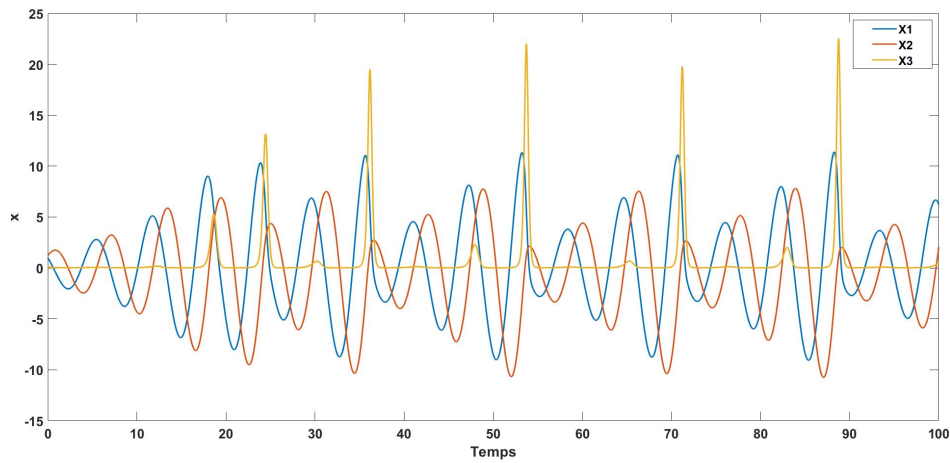


FIGURE 3.5 – Aspects aléatoire du système de Rössler

La Figure **3.5** représente l'aspect aléatoire des trois états du système Rössler avec les paramètres  $a = 0,15$ ;  $b = 0,20$  et  $c = 10,0$  et ces conditions initiales  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 1$  et  $x_3(0) = 1$ .

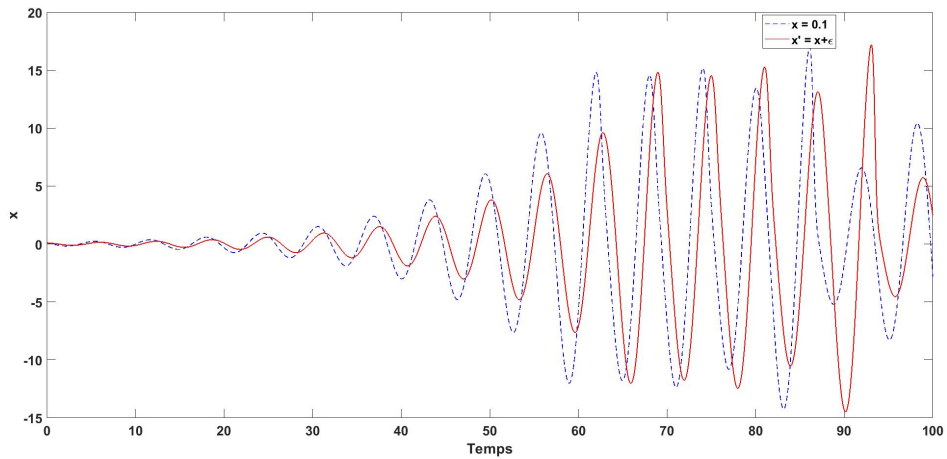


FIGURE 3.6 – Sensibilité aux conditions initiales de l'état  $x_1$  du système de Rössler

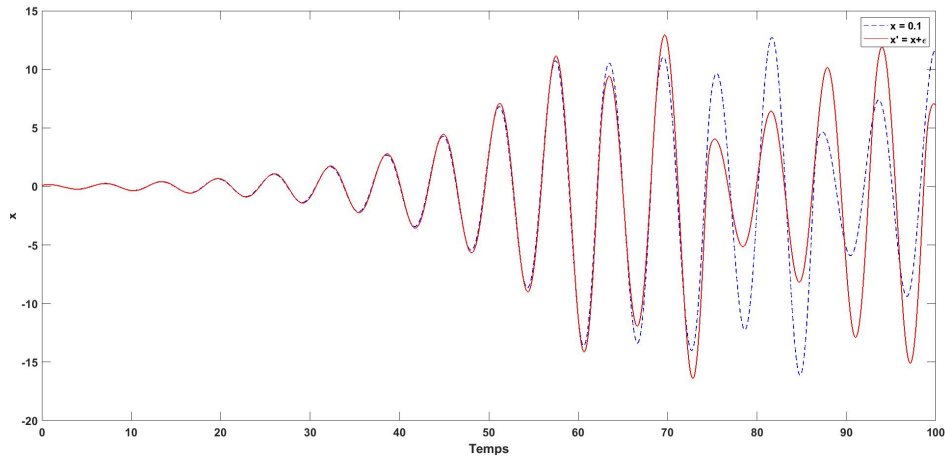


FIGURE 3.7 – Sensibilité aux conditions initiales de l'état  $x_2$  du système de Rössler

Les Figures **3.6** et **3.7** représente la sensibilité aux conditions initiales de l'état  $x_1$  et  $x_2$  du système **(3.2)**, la trajectoire (représentée en rouge) est obtenue pour une condition initiale ( $x_1(0) = 1$ ). Nous remarquons que, pour une petite variation  $\epsilon = 10^{-7}$  de cette condition initiale, la trajectoire de  $x'_1$  (représentée en bleu) diverge de la première courbe. Ce qui démontre la très grande sensibilité aux conditions initiales.

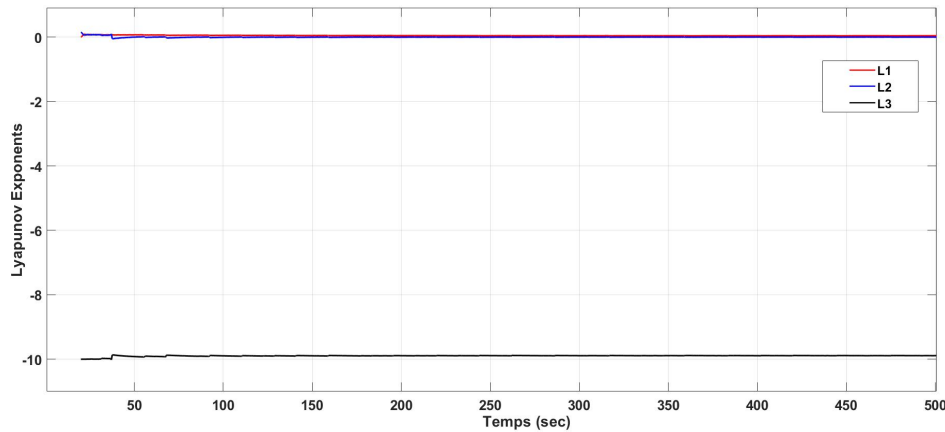


FIGURE 3.8 – Exposant de lyapunov du système Rössler

La Figure **3.8** présente les exposants de lyapunov du système de Rössler pour  $a = 0.15$ ,  $b = 0.20$  et  $c = 10.0$ , où  $\lambda_1 = 0.042267$ ,  $\lambda_2 = 0.0041598$  et  $\lambda_3 = -9.8962$ .

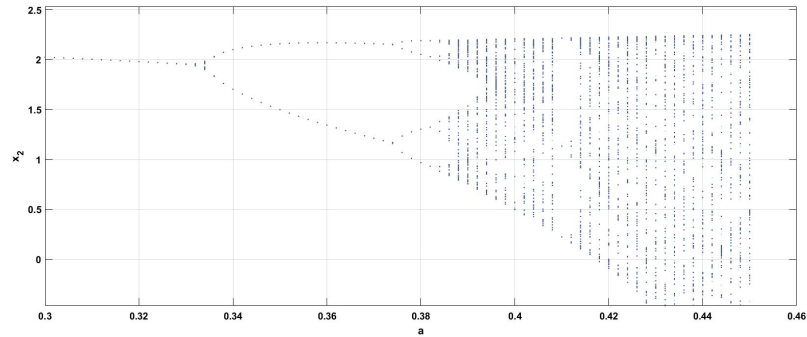


FIGURE 3.9 – Diagramme de bifurcation du système Rössler

La Figure 3.9 représente le diagramme de bifurcation du système Rössler qui illustre le comportement des orbites du système en variant le paramètre  $a$ .

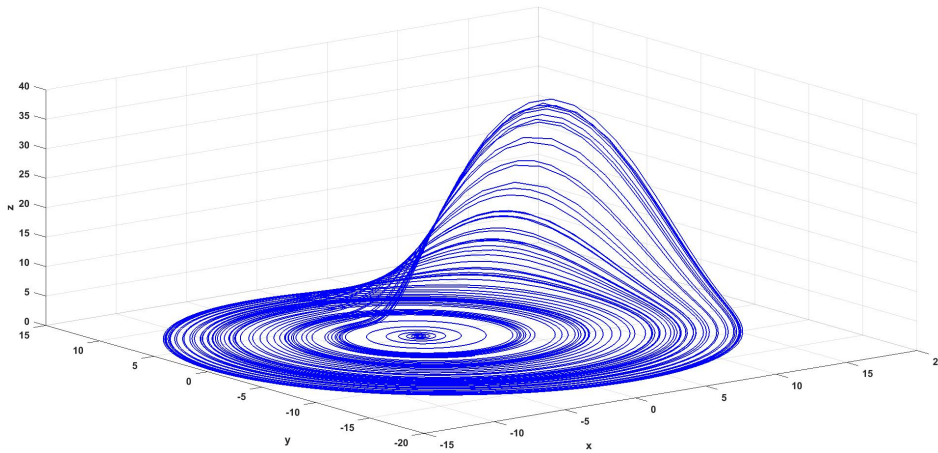


FIGURE 3.10 – Attracteur étrange du système Rössler

La Figure 3.10 représente l'attracteur du système de Rössler, dans trois dimension  $xyz$

### 3.3 Synthèse d'observateurs à grand gain

#### 3.3.1 Étude d'observabilité

L'examen de l'observabilité constitue une phase essentielle lors de la création d'observateurs. Un système est considéré comme observable lorsque son état interne peut être déduit à partir de ses sorties sur une période de temps définie. Dans le cas des systèmes de Genisio et de Rössler, nous évaluerons l'observabilité en procédant au calcul des matrices d'observabilité associées.

### Observabilité du système de Genisio

Le système de Genisio peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Forme de Brunowsky}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -cx_1 - bx_2 - ax_3 + x_1^2 \end{bmatrix}}_{\phi(x)}, \quad (3.3)$$

et la sortie du système est :

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, le système de Genisio est sous une forme canonique observable. La matrice d'observabilité pour le système de Genisio est donnée par :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}(\mathcal{O}) = 3 = n \quad \rightarrow \quad \text{le système est observable}$$

Où  $C$  et  $A$  sont les matrices du système. Une matrice d'observabilité de rang plein indique que le système est observable.

### Observabilité pour le système de Rössler

#### a. Transformation directe (Difféomorphisme)

Pour transformer le système de Rössler en une forme appropriée pour la synthèse de l'observateur, nous utilisons une transformation directe :

$$z = \phi(x)$$

### b. Forme canonique observable

Nous présentons ici la transformation du système Rössler en une forme canonique observable. Cette forme facilite l'analyse et la synthèse de l'observateur en rendant les états internes accessibles à partir des sorties mesurées.

Pour transformer ce système dynamique non linéaire en une forme canonique observable, nous suivons une série d'étapes structurées.

**Étape 1 : Identification du système dynamique original** Le système dynamique non linéaire initial est donné par l'équation (3.2)

**Étape 2 : Choix des nouvelles variables d'état** Pour passer à la forme canonique observable, il faut définir de nouvelles variables  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  en termes des variables  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ .

Définissons :

$$z = \phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow z_1 \\ \rightarrow z_2 \\ \rightarrow z_3 \end{array} \quad (3.4)$$

**Étape 3 : Calcul des transformations directes** En utilisant les définitions ci-dessus, en calculons les nouvelles variables en termes des anciennes :

Pour  $z_1$  :

$$z_1 = L_f^0 h(x) = x_2$$

Pour  $z_2$  :

$$z_2 = L_f^1 h(x) = \nabla h(x) f(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) = x_1 + ax_2$$

Pour  $z_3$  :

$$z_3 = L_f^2 h(x) = \nabla h(x) f(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) = (a^2 - 1)x_2 + ax_1 - x_3$$

**Étape 4 : Écriture de la forme canonique observable** En utilisant les transformations ci-dessus, on obtient la forme canonique observable du système :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{z}_1 = \dot{x}_2 = x_1 + ax_2 = z_2 \\
 \dot{z}_2 = \dot{x}_1 + a\dot{x}_2 \\
 = -x_2 - x_3 + a(x_1 + ax_2) = z_3 \\
 \dot{z}_3 = (a^2 - 1)\dot{x}_2 + a\dot{x}_1 - \dot{x}_3 \\
 = (a^2 - 1)(x_1 + ax_2) + a(-x_2 - x_3) - (b + x_3(x_1 - c)) \\
 = a \underbrace{(a^2x_1 + a^2x_2 - x_2 - x_3)}_{z_3} - \underbrace{(x_1 + ax_2)}_{z_2} - b + cx_3 - x_1x_3 \\
 = az_3 - z_2 - b - (az_2 - z_1 - z_3)(z_2 - az_2 - c)
 \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Ainsi, le système de Rössler est sous une forme canonique observable. La matrice d'observabilité pour la nouvelle base pour le système est donnée par :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} dh \\ dL_f h \\ dL_f^2 h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ a & a^2 - 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

où  $L_f h$  est la dérivée de Lie de  $h$  le long de  $f$ . La matrice d'observabilité de la nouvelle base du système a un rang plein qui fait que la condition d'observabilité de ce système non linéaire est satisfaite. c'est-à-dire que son rang est égal au nombre d'états  $n$  du système. Donc le système est observable.

### 3.3.2 Synthèse d'observateur à grand gain

L'observateur à grand gain [9, 30] est utiliser pour estimer les états d'un système chaotique avec une grande précision. Nous allons détailler la conception de tels observateurs pour les systèmes de Genisio et de Rössler.

#### Observateur pour le système de Genisio

Pour le système de Genisio sous forme canonique observable, l'observateur donne est :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + h_1(\hat{y} - y) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 + h_2(\hat{y} - y) \\ \dot{\hat{x}}_3 = -c\hat{x}_1 - b\hat{x}_2 - a\hat{x}_3 + \hat{x}_1^2 + h_3(\hat{y} - y) \end{cases} \quad (3.7)$$

**a. Calcul des gains de l'observateur** Pour déterminer les gains  $h_i$  de l'observateur, nous utilisons la méthode suivante :

$$H = \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T, \quad (3.8)$$

On choisi  $\theta = 1$ . La matrice  $S_\theta$  est la solution de l'équation de Lyapunov suivante :

$$A^T S_\theta + S_\theta A + S_\theta = C^T C. \quad (3.9)$$

Après avoir suivie les étapes de calcul qui sont détaillées dans le chapitre II pour l'équation (3.8), nous obtenons :

$$\hat{A}S + \hat{A}^T S - C^T C = 0. \quad (3.10)$$

En utilisant la fonction `lyap` sous Matlab, nous trouvons que :

$$S = \text{lyap}(\hat{A}, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

En remplaçant dans l'équation , nous obtenons :

$$H = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow H = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Les gains de l'observateur sont donc  $h_1 = 6$ ,  $h_2 = 12$  et  $h_3 = 8$ . Les gains de l'observateur  $h_1$ ,  $h_2$ , et  $h_3$  sont déterminés en utilisant des méthodes numériques et la théorie des systèmes linéaires.

### Observateur pour le système Rössler

Pour le système de Rössler pour la transformation direct, l'observateur est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 = \hat{z}_2 + h_1(\hat{z}_1 - z_1) \\ \dot{\hat{z}}_2 = \hat{z}_3 + h_2(\hat{z}_1 - z_1) \\ \dot{\hat{z}}_3 = a\hat{z}_3 - \hat{z}_2 - (a\hat{z}_2 - \hat{z}_1 - \hat{z}_3)(\hat{z}_2 - a\hat{z}_1 - c) - b + h_3(\hat{z}_1 - z_1) \end{cases} \quad (3.13)$$

#### a. Calcul des gains de l'observateur

Pour déterminer les gains  $h_i$  de l'observateur, on applique les mêmes étapes que l'exemple précédent, on aura les résultats suivants :

$$s = \text{Lyap}(\hat{A}, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

En remplaçant dans l'équation (3.5, nous obtenons :

$$H = \underbrace{1}_{\theta} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Delta^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{c^T} \rightarrow H = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Les gains de l'observateur sont donc  $h_1 = 3$ ,  $h_2 = 3$  et  $h_3 = 1$ . Les détails de la transformation et les résultats obtenus à partir des simulations MATLAB seront présentés.

**c. Transformation inverse (Difféomorphisme)** Pour vérifier la validité de la transformation, nous devons également considérer la transformation inverse :

$$x = \phi^{-1}(z)$$

Les relations entre les variables de l'observateur et les variables d'état originales sont

données par :

$$\begin{cases} \hat{z}_1 = \hat{x}_2 \\ \hat{z}_2 = \hat{x}_1 + a\hat{x}_2 \\ \hat{z}_3 = (a^2 - 1)\hat{x}_2 - \hat{x}_3 + a\hat{x}_1 \end{cases} \quad (3.16)$$

**Calcul de  $\hat{x}_1$**  D'après les équations ci-dessus, nous pouvons exprimer  $\hat{x}_1$  en termes de  $\hat{z}_1$  et  $\hat{z}_2$  :

$$\hat{x}_1 = \hat{z}_2 - a\hat{z}_1 \quad (3.17)$$

**Dérivée de  $\hat{x}_1$**  En dérivant l'équation (3.17) par rapport au temps, nous obtenons :

$$\dot{\hat{x}}_1 = \dot{\hat{z}}_2 - a\dot{\hat{z}}_1 \quad (3.18)$$

**Simplification de la dérivée** Pour simplifier l'équation (3.18), nous substituons les expressions des dérivées de  $\hat{z}_1$  et  $\hat{z}_2$  à partir des équations de l'observateur :

$$\dot{\hat{x}}_1 = -\dot{\hat{x}}_2 - \dot{\hat{x}}_3 - h_2(\dot{\hat{x}}_2 - \dot{x}_2) + ah_1(\dot{\hat{x}}_2 - \dot{x}_2) \quad (3.19)$$

Pour  $\hat{x}_2$  et  $\hat{x}_3$  :

$$\hat{x}_2 = \hat{z}_1 \quad (3.20)$$

**Dérivée de  $\hat{x}_2$**  En dérivant l'équation (3.19) par rapport au temps, nous obtenons :

$$\dot{\hat{x}}_2 = \dot{\hat{z}}_1 = \dot{\hat{z}}_2 + h_1(\dot{\hat{z}}_1 - \dot{z}_1) \quad (3.21)$$

En résolvant l'équation, nous obtenons :

$$\dot{\hat{x}}_2 = \dot{\hat{x}}_1 + a\dot{\hat{x}}_2 + h_1(\dot{\hat{x}}_2 - \dot{x}_2) \quad (3.22)$$

Pour  $\hat{x}_3$  :

$$\hat{x}_3 = a\hat{z}_2 - \hat{z}_1 - \hat{z}_3 \quad (3.23)$$

**Dérivée de  $\hat{x}_3$**  En dérivant l'équation (3.23) par rapport au temps, nous obtenons :

$$\dot{\hat{x}}_3 = a\dot{\hat{z}}_2 - \dot{\hat{z}}_1 - \dot{\hat{z}}_3 \quad (3.24)$$

En résolvant l'équation, nous obtenons :

$$\hat{x}_3 = \hat{x}_3(x_1 - c) - ah_2(\hat{x}_2 - x_2) + h_1(\hat{x}_2 - x_2) + b \quad (3.25)$$

La forme finale de l'observateur dans la base d'origine :

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = -\hat{x}_2 - \hat{x}_3 - h_2(\hat{x}_2 - x_2) + ah_1(\hat{x}_2 - x_2) \\ \hat{x}_2 = \hat{x}_1 + a\hat{x}_2 + h_1(\hat{x}_2 - x_2) \\ \hat{x}_3 = \hat{x}_3(x_1 - c) - ah_2(\hat{x}_2 - x_2) + h_1(\hat{x}_2 - x_2) + b \end{cases} \quad (3.26)$$

Les résultats des simulations MATLAB pour la transformation inverse seront analysés.

### 3.3.3 Simulation sur MATLAB

Cette section présente les résultats des simulations MATLAB, qui démontrent la performance des observateurs en termes de convergence et de précision dans l'estimation des états des différents systèmes étudiés. Les simulations sont divisées en trois parties : le système Genisio, le système Rössler dans la nouvelle base, et la base originale.

#### 1. Système Genisio

Les résultats des simulations MATLAB montrent la performance de l'observateur pour le système de Genisio.

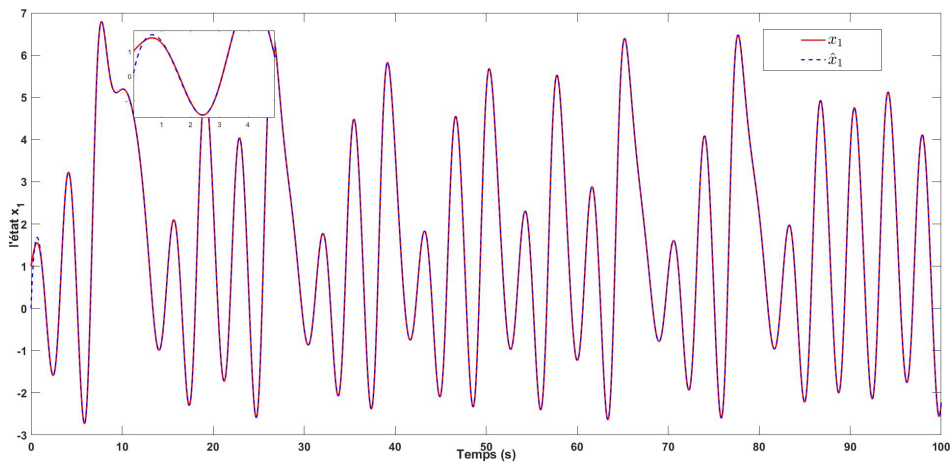


FIGURE 3.11 – Synchronisation à base d'observateur pour l'état  $x_1$  et  $\hat{x}_1$

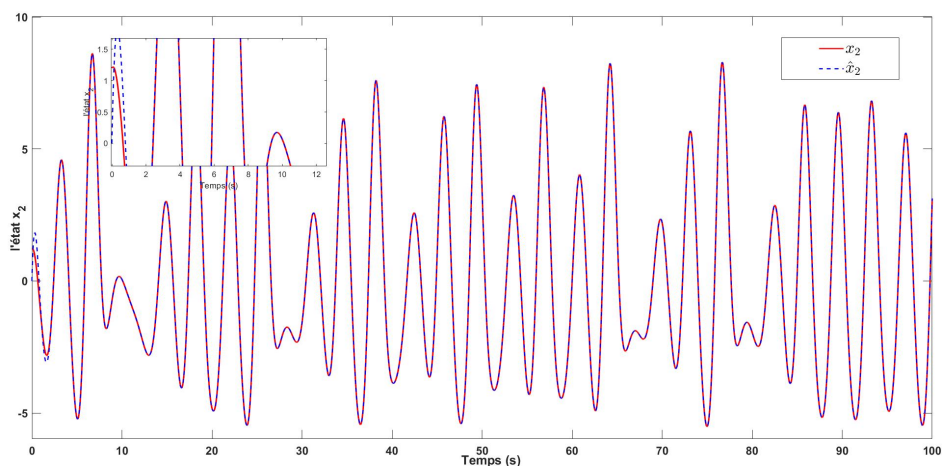


FIGURE 3.12 – Synchronisation à base d'observateur pour l'état  $x_2$  et  $\hat{x}_2$

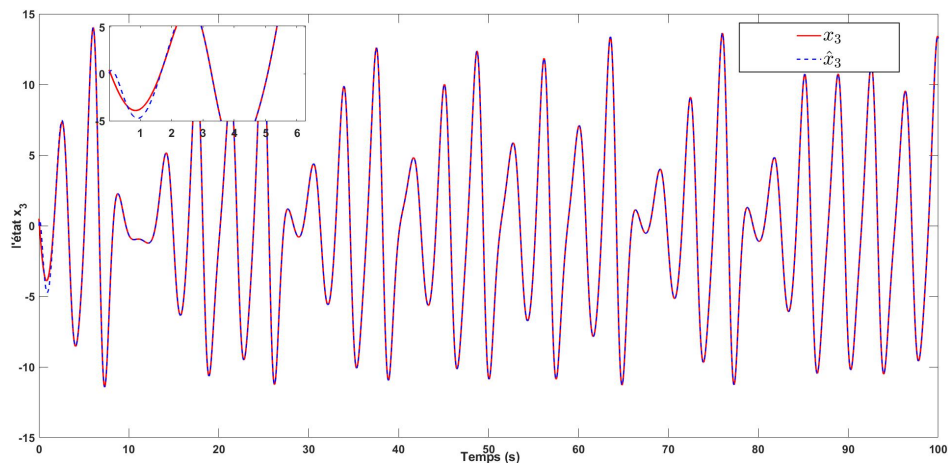


FIGURE 3.13 – Synchronisation à base d'observateur pour l'état  $x_3$  et  $\hat{x}_3$

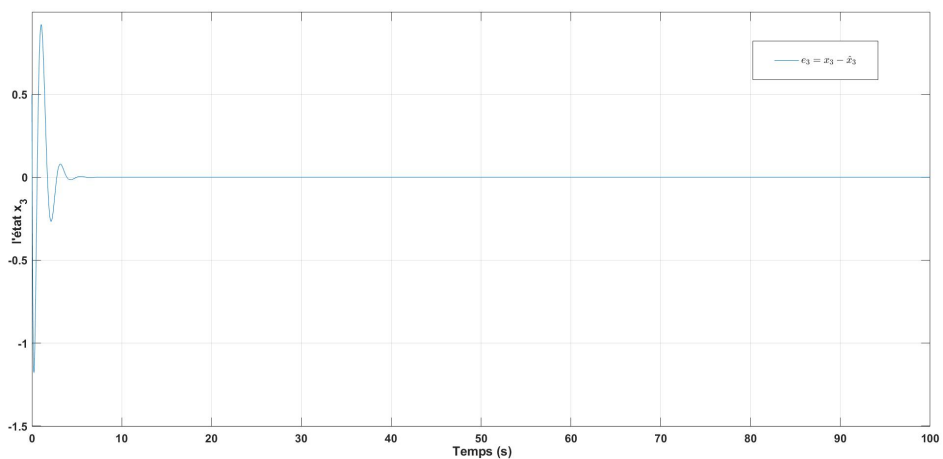


FIGURE 3.14 – Erreur d'estimation  $e_3 = x_3 - \hat{x}_3$  du système Genisio et de l'observateur

## 2. Système Rössler sous la forme canonique observable

Les résultats des simulations MATLAB montrent la performance de l'observateur pour le système de Rössler dans la nouvelle base.

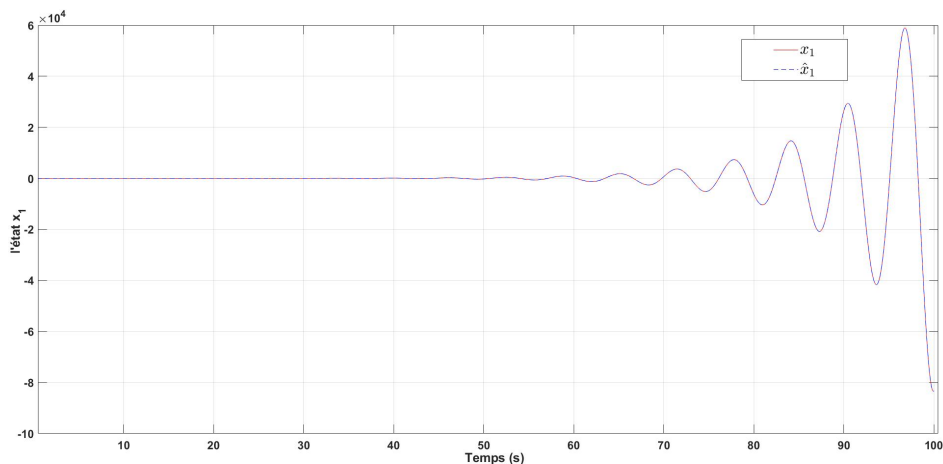


FIGURE 3.15 – Synchronisation à base d'observateur pour l'état  $x_1$  et  $\hat{x}_1$

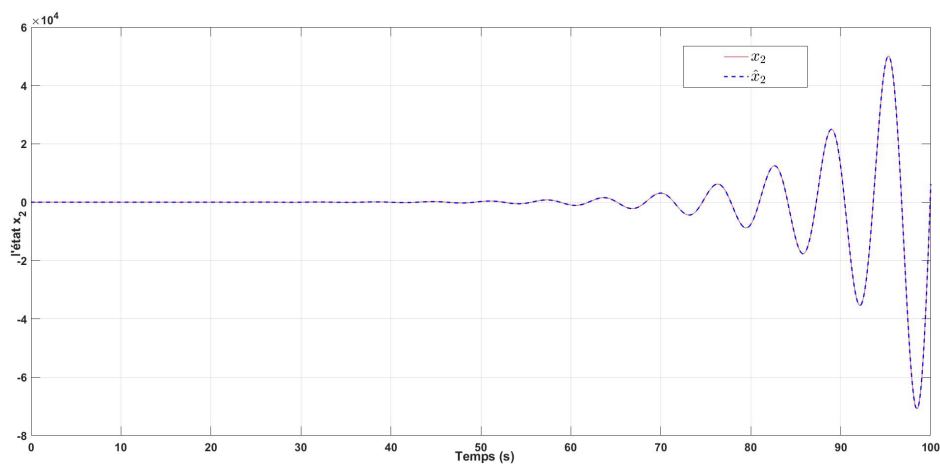


FIGURE 3.16 – Synchronisation à base d'observateur pour l'état  $x_2$  et  $\hat{x}_2$

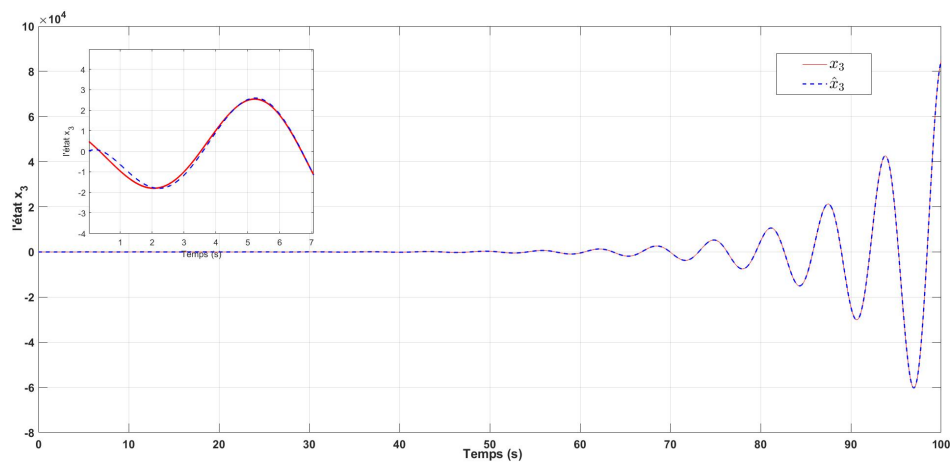


FIGURE 3.17 – Synchronisation à base d'observateur pour l'état  $x_3$  et  $\hat{x}_3$

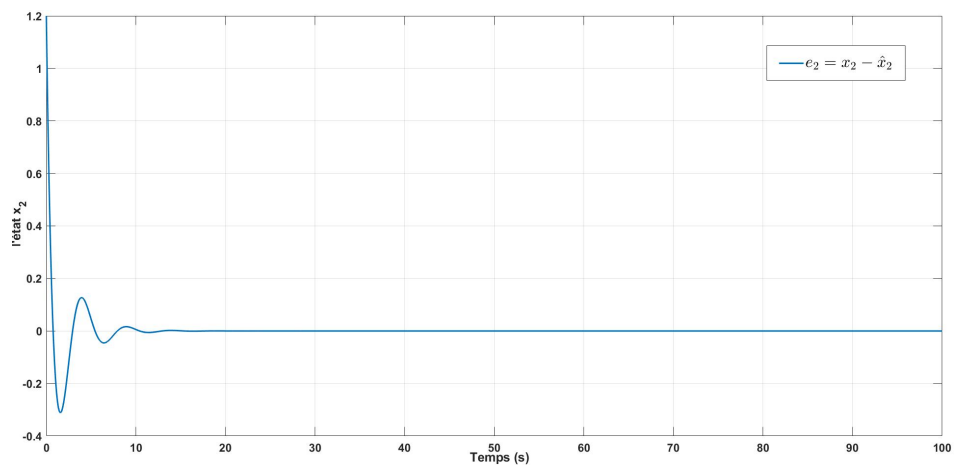


FIGURE 3.18 – Erreur d'estimation  $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$  du système Rössler et de l'observateur

### 3. Système Rössler dans la base originale

Les résultats des simulations MATLAB montrent la performance de l'observateur pour le système de Rössler dans l'ancienne base.

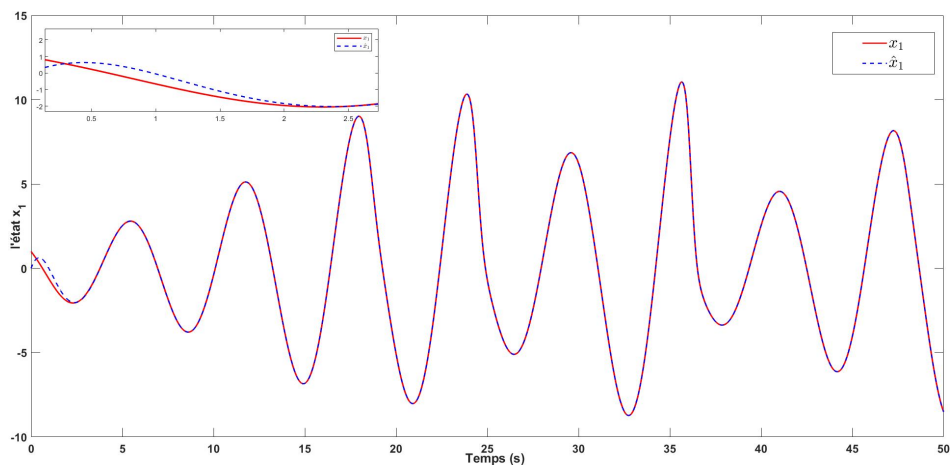


FIGURE 3.19 – Synchronisation à base d'observateur pour l'état  $x_1$  et  $\hat{x}_1$

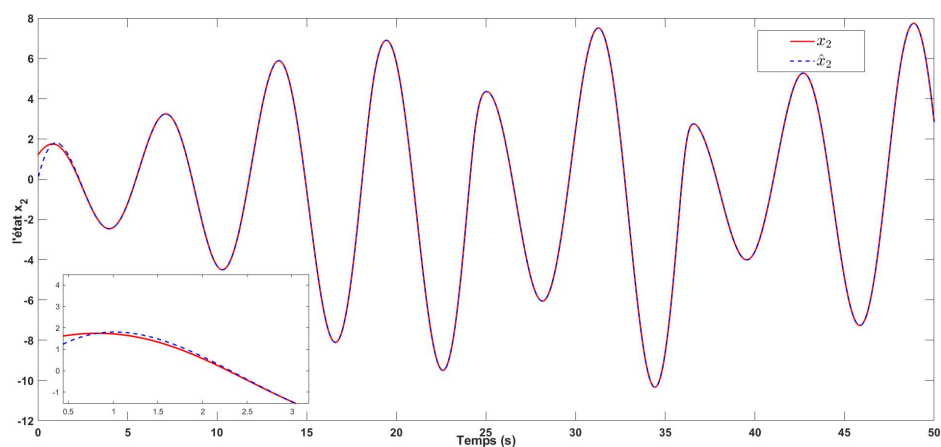


FIGURE 3.20 – Synchronisation à base d'observateur pour l'état  $x_2$  et  $\hat{x}_2$

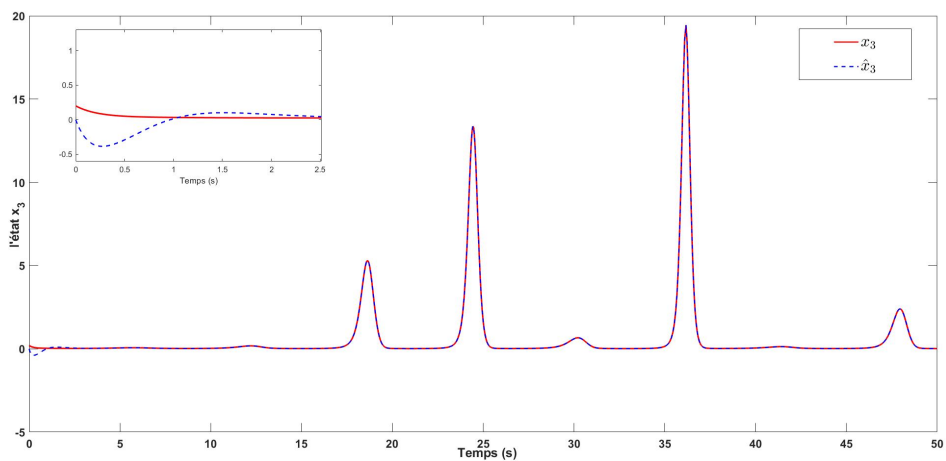


FIGURE 3.21 – Synchronisation à base d'observateur pour l'état  $x_3$  et  $\hat{x}_3$

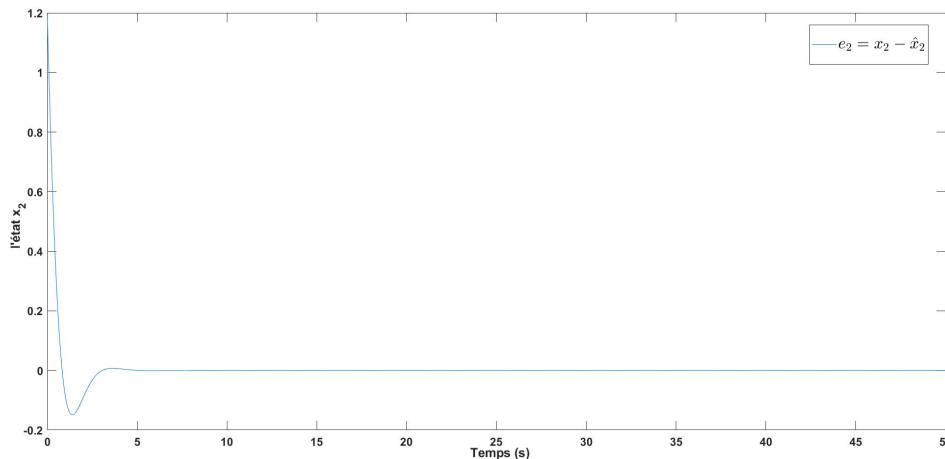


FIGURE 3.22 – Erreur d'estimation  $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$  du système Rössler original et de son observateur

## 3.4 Implémentation sur Arduino

L'implémentation de l'observateur sur une plateforme Arduino démontre la faisabilité de son utilisation dans des applications pratiques. Les détails de l'implémentation, les défis rencontrés et les résultats obtenus seront discutés.

### 3.4.1 Généralité sur les microcontrôleurs

Un microcontrôleur est un dispositif électronique compact et programmable qui intègre un processeur, de la mémoire et des périphériques d'entrée/sortie sur un seul circuit intégré. Il sert de cœur logique dans une multitude de systèmes électroniques, allant des simples appareils domestiques aux applications industrielles complexes. Contrairement aux microprocesseurs utilisés dans les ordinateurs de bureau qui nécessitent des composants externes pour fonctionner, les microcontrôleurs sont conçus pour être autonomes et répondre à des tâches spécifiques en temps réel. Ils jouent un rôle crucial dans l'automatisation, la gestion des processus et l'interaction avec l'environnement grâce à leur capacité à recevoir, traiter et transmettre des données de manière efficace.

#### Différents types de microcontrôleurs

**a. Microcontrôleurs 8 bits** **Description** : Ces microcontrôleurs traitent des données sur 8 bits à la fois.

**Exemples** : PIC12, PIC16 (Microchip), Uno (Arduino), AVR (Atmel).

**Applications** : Appareils électroménagers, télécommandes, jouets.

**b. Microcontrôleurs 16 bits** **Description** : Ces microcontrôleurs offrent un compromis entre performance et complexité, traitant des données sur 16 bits.

**Exemples** : MSP430 (Texas Instruments), dsPIC (Microchip).

**Applications** : Systèmes embarqués automobiles, équipements médicaux, systèmes de mesure et de contrôle.

**c. Microcontrôleurs 32 bits** **Description** : Conçus pour des applications nécessitant une puissance de calcul élevée, ils traitent des données sur 32 bits.

**Exemples** : ARM Cortex-M (ARM), STM32 (STMicroelectronics), PIC32 (Microchip).

**Applications** : Applications industrielles, smartphones, systèmes de communication avancés.

### Versatilité et importance des microcontrôleurs

Les microcontrôleurs sont des dispositifs incroyablement polyvalents, jouant un rôle central dans une large gamme d'applications professionnelles. Leur intégration dans des systèmes électroniques modernes en fait des composants essentiels pour l'innovation et la modernisation technologique.

#### a. Automatisation et contrôle

**Industrie** : Dans les usines, les microcontrôleurs pilotent les systèmes d'automatisation industrielle, contrôlant les chaînes de montage et les robots de production. Ils assurent la précision, la répétabilité et l'efficacité des processus de fabrication.

**Domotique** : Les microcontrôleurs permettent l'automatisation des systèmes domestiques, tels que l'éclairage, la climatisation, et la sécurité, offrant confort et économies d'énergie aux utilisateurs.

#### b. Communication et connectivité

**Internet des Objets (IoT)** : Les microcontrôleurs sont au cœur des dispositifs IoT, assurant la collecte de données et la communication entre les appareils connectés. Ils permettent l'intégration de capteurs intelligents dans les infrastructures urbaines, les habitations, et les environnements industriels.

**Télécommunications** : Ils gèrent la synchronisation des signaux et la transmission de données dans les réseaux de communication sans fil, garantissant une connectivité fiable et efficace.

#### c. Santé et bien-être

**Dispositifs médicaux** : Les microcontrôleurs sont intégrés dans les équipements médi-

caux pour surveiller et traiter les patients de manière précise et fiable. Ils permettent le développement de dispositifs portables comme les moniteurs cardiaques et les pompes à insuline.

**Technologie portable** : Dans les montres intelligentes et les bracelets de fitness, les microcontrôleurs traitent les données des capteurs pour suivre l'activité physique, les signes vitaux et fournir des informations en temps réel aux utilisateurs.

#### d. Transport et mobilité

**Véhicules à moteur** : Dans les voitures, les microcontrôleurs gèrent les systèmes de contrôle du moteur, l'infodivertissement, et les systèmes de sécurité comme l'ABS et l'ESP, et la gestion des batteries, le contrôle des moteurs électriques et l'optimisation des systèmes de recharge, contribuant à l'efficacité et à la durabilité des véhicules électriques.

### 3.4.2 Présentation du microcontrôleur utilisé

L'Arduino Uno, un microcontrôleur de type 8 bits basé sur le ATmega328P, intègre des composants essentiels tels qu'un oscillateur à quartz, des broches numériques et analogiques, ainsi qu'un convertisseur analogique-numérique. Son fonctionnement repose sur une architecture RISC optimisée pour l'efficacité énergétique et la rapidité d'exécution des instructions. Dans notre étude, nous avons synchronisé un système chaotique avec un observateur à grand gain, implémentés dans deux cartes Uno. Les résultats obtenus étaient conformes aux attentes, ce qui démontre ainsi l'efficacité de ce microcontrôleur dans ce type d'application.

#### Remarque :

Lors de la transmission des données entre deux cartes Arduino Uno, un problème est survenu en raison de l'utilisation des ports RX et TX, qui sont également utilisés par l'UART. Comme ces ports sont déjà occupés par la communication série avec le port USB, cela rendait la transmission des données entre les cartes impossible. Pour résoudre cette situation, la solution choisie a été d'utiliser la bibliothèque SoftwareSerial. Grâce à cette bibliothèque, les broches alternatives pour la communication série ont été configurées, avec la broche 11 attribuée comme émetteur (TX) et la broche 10 comme récepteur (RX). Cela a permis d'assurer une transmission efficace des données entre les deux cartes Arduino Uno.

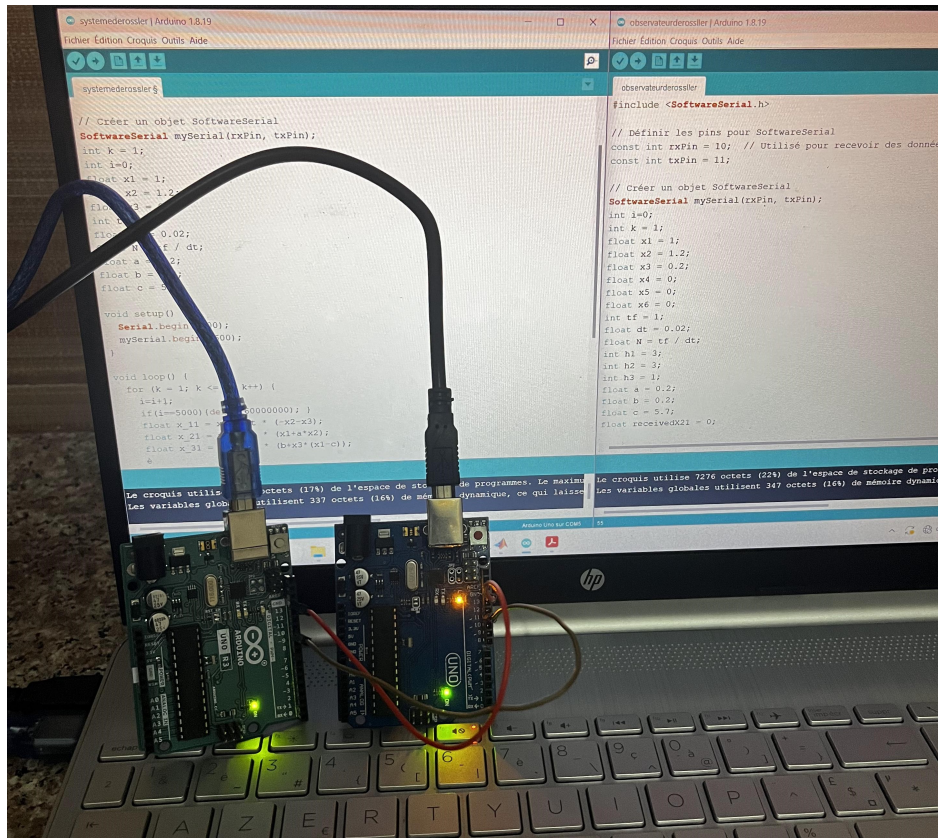


FIGURE 3.23 – schéma d'implémentation des deux cartes Arduino

### 3.4.3 Résultats d'implémentation

Dans ce qui suit, nous allons examiner la synchronisation entre chaque état du système et son état observé à l'aide des données obtenues à partir du moniteur série des deux cartes Arduino. Par la suite, nous représenterons ces données dans MATLAB, où nous constaterons un délai entre l'état réel du système et celui observé par l'observateur. Ce délai peut être imputé à divers facteurs pratiques.

Dans ce qui suit, nous allons examiner la synchronisation entre chaque état du système et son état observé à l'aide des données obtenues à partir du moniteur série des deux cartes Arduino. Par la suite, nous représenterons ces données dans MATLAB, où nous constaterons un délai entre l'état réel du système et celui observé par l'observateur. Ce délai peut être imputé à divers facteurs pratiques. Les paramètres de simulation ont été définis avec un temps final ( $t_f$ ) de 1 seconde, utilisant un pas de temps ( $dt$ ) de 0.02. La limitation à 5000 itérations a été imposée pour observer les résultats à des intervalles définis, facilitant ainsi l'analyse des écarts entre l'état réel et observé du système. Ces paramètres ont été sélectionnés pour optimiser la précision de la synchronisation et pour évaluer les performances du système dans

des conditions pratiques.

**a. synchronisation avec retard pour le système Genisio**

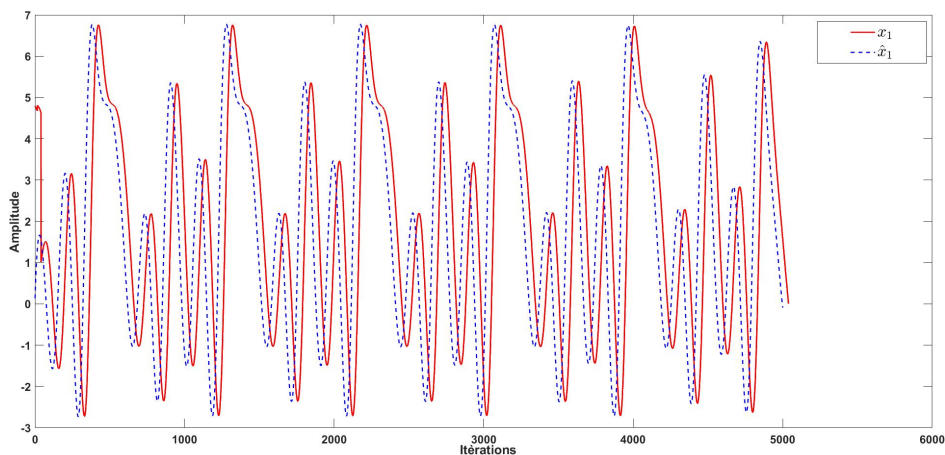


FIGURE 3.24 – Synchronisation de l'état  $x_1$  et son estimé  $\hat{x}_1$  avec le retard

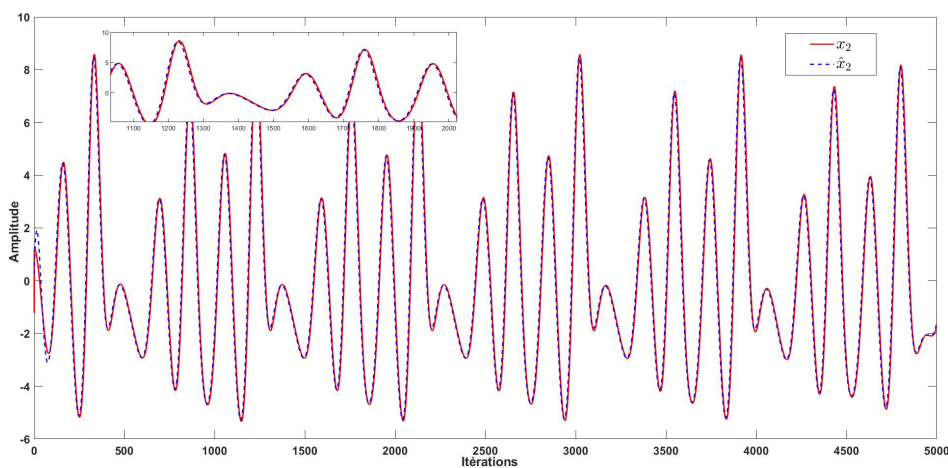


FIGURE 3.25 – Synchronisation de l'état  $x_2$  et son estimé  $\hat{x}_2$  avec le retard

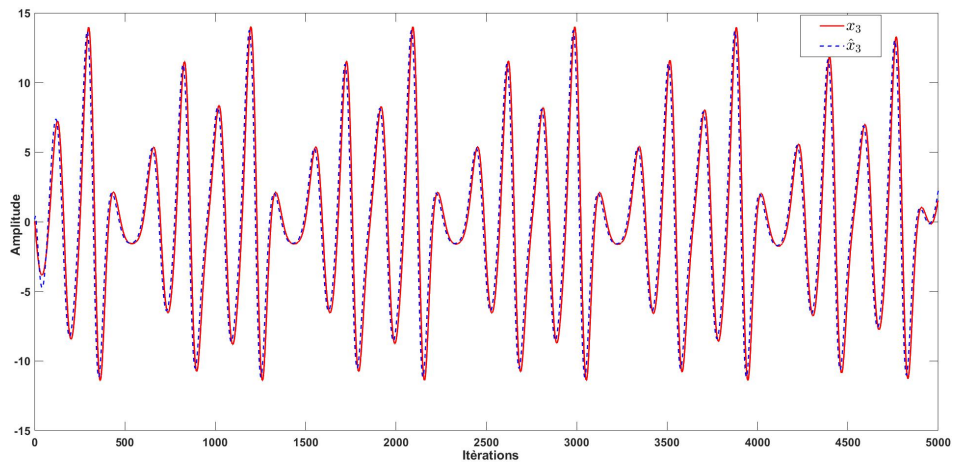


FIGURE 3.26 – Synchronisation de l'état  $x_3$  et son estimé  $\hat{x}_3$

**b. Synchronisation avec retard pour le système Rössler**

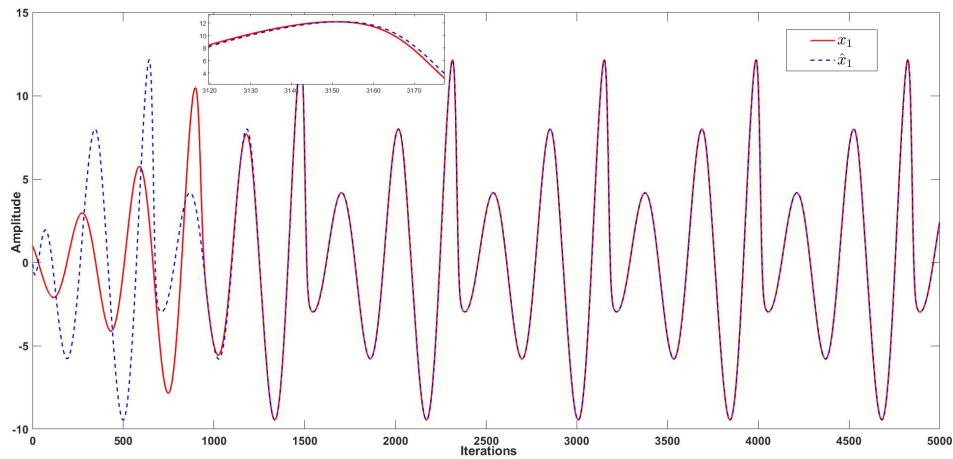


FIGURE 3.27 – Synchronisation de l'état  $x_1$  et son estimé  $\hat{x}_1$  avec retard

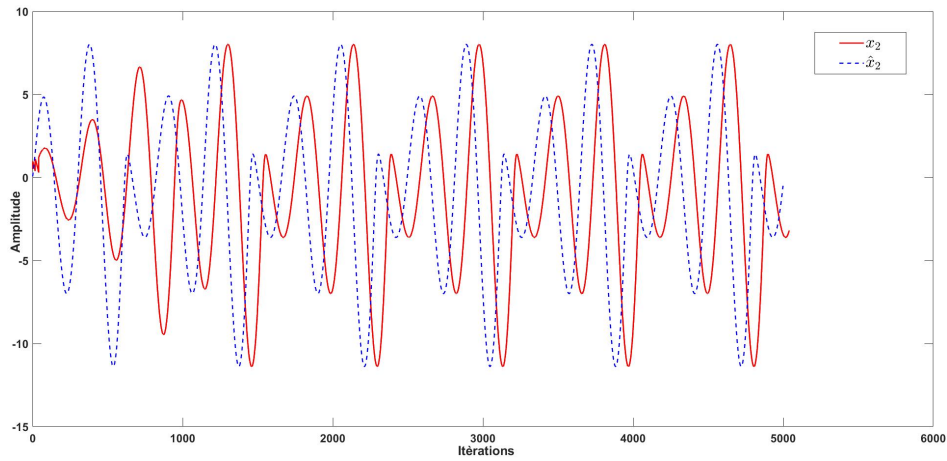


FIGURE 3.28 – Synchronisation de l'état  $x_2$  et son estimé  $\hat{x}_2$  avec retard

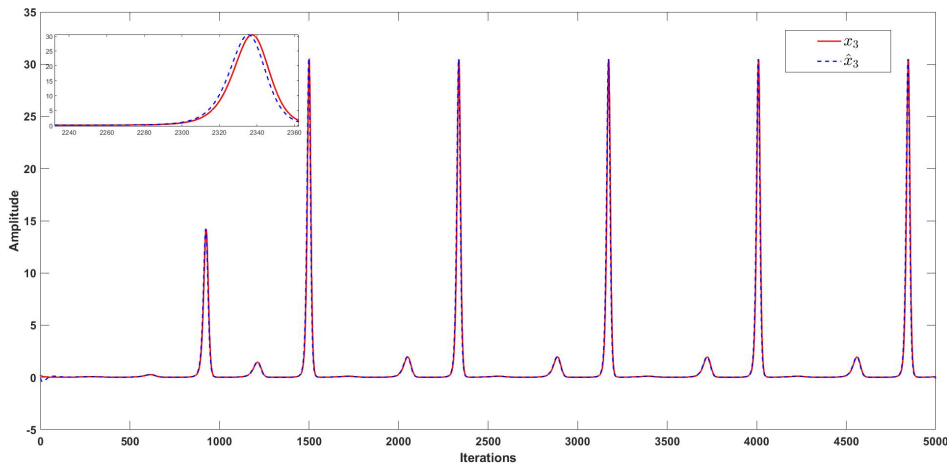


FIGURE 3.29 – Synchronisation de l'état  $x_3$  et son estimé  $\hat{x}_3$  avec retard

Pour pallier ce problème, nous avons été contraints d'ajuster manuellement ce retard à l'aide de MATLAB. Cette procédure nous a permis de calibrer notre système, garantissant ainsi une synchronisation optimale entre les états observés et réels. De cette manière, nous avons pu valider l'efficacité de notre approche et assurer la précision de notre système de synchronisation.

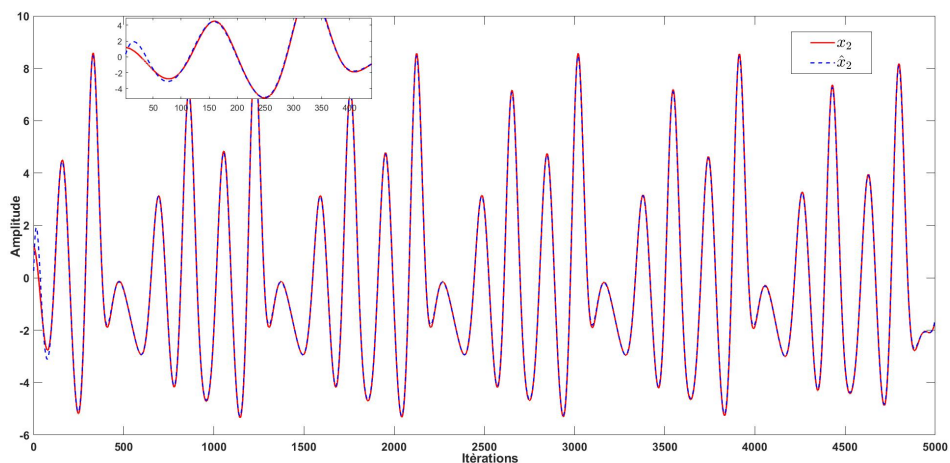


FIGURE 3.31 – Synchronisation de l'état  $x_2$  et son estimé  $\hat{x}_2$  sans retard

**c. Synchronisation sans retard pour le système Genisio**

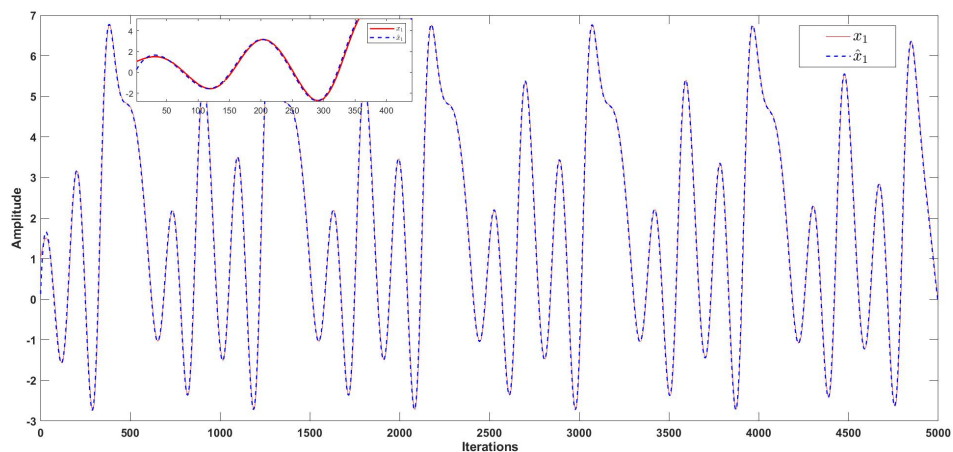


FIGURE 3.30 – Synchronisation de l'état  $x_1$  et son estimé  $\hat{x}_1$  sans retard

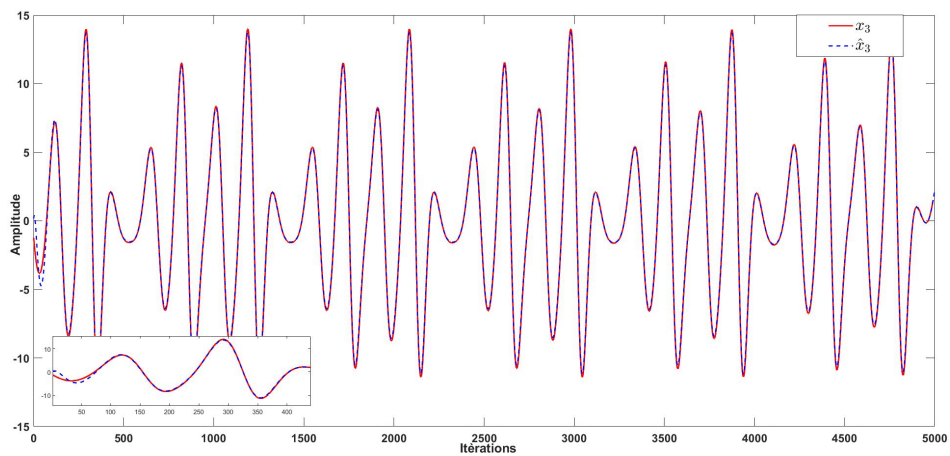


FIGURE 3.32 – Synchronisation de l'état  $x_3$  et son estimé  $\hat{x}_3$  sans retard

**c. Synchronisation sans retard pour le système Rössler**

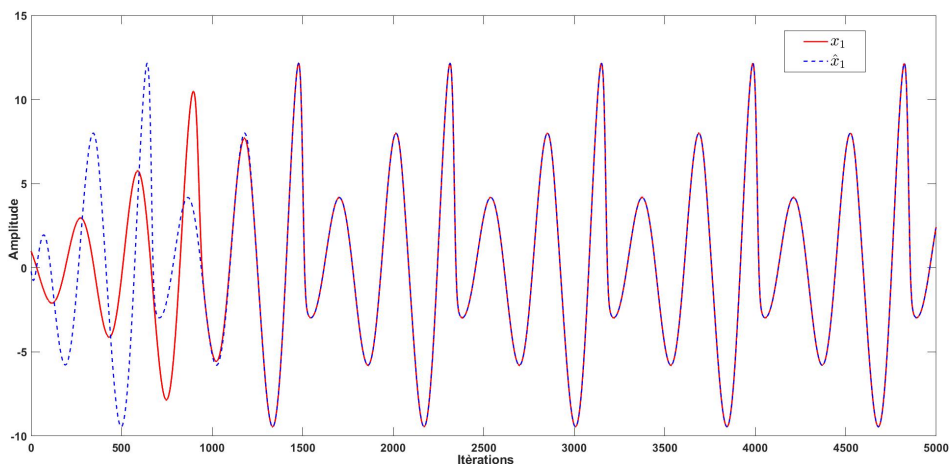


FIGURE 3.33 – Synchronisation de l'état  $x_1$  et son estimé  $\hat{x}_1$  sans retard

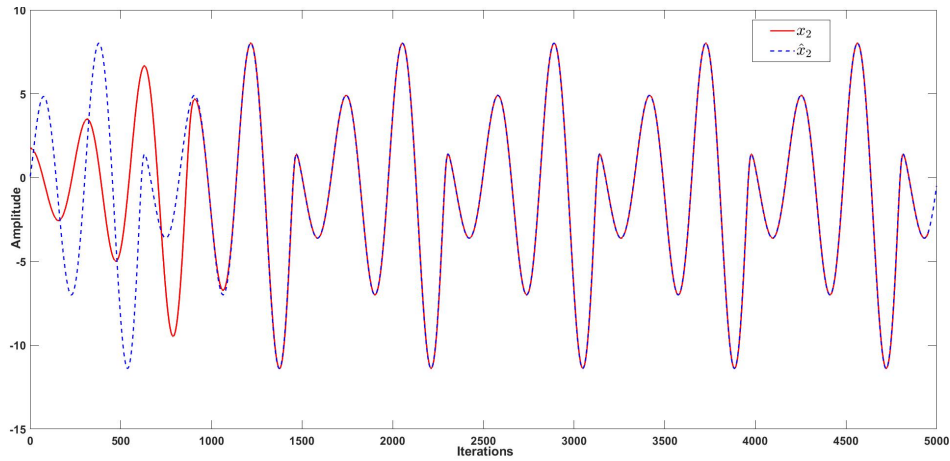


FIGURE 3.34 – Synchronisation de l'état  $x_2$  et son estimé  $\hat{x}_2$  sans retard

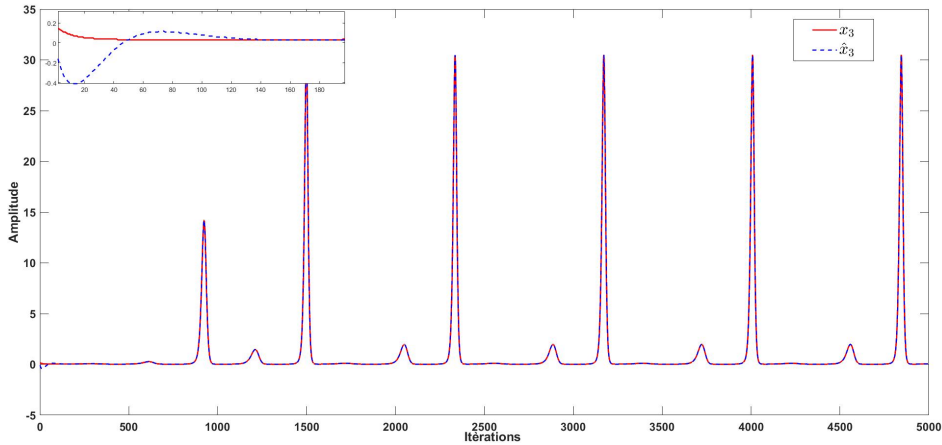


FIGURE 3.35 – Synchronisation de l'état  $x_3$  et son estimé  $\hat{x}_3$  sans retard

### 3.5 Conclusion

En conclusion de ce chapitre, nous avons démontré la capacité de l'observateur à grand gain à synchroniser des systèmes chaotiques de Genisio et de Rössler. Notre étude a réuni la théorie et la pratique, en réalisant avec succès une implémentation sur une plateforme Arduino, mettant en lumière l'efficacité de notre méthode dans des conditions réelles.

L'utilisation de l'observateur à grand gain a permis une estimation précise des états internes des systèmes chaotiques, facilitant ainsi leur synchronisation. Les expériences pratiques ont validé cette synchronisation, prouvant la solidité de notre approche même avec des ressources limitées telles que l'Arduino.

Par ailleurs, ce chapitre a souligné l'importance des microcontrôleurs comme éléments clés dans la modernisation et l'innovation technologique. En démontrant leur versatilité et leur intégration dans de nombreux domaines tels que l'automobile, la domotique, la robotique, et les véhicules électriques. Nous avons mis en lumière leur rôle crucial dans le développement des systèmes électroniques avancés. Les microcontrôleurs, par leur capacité à synchroniser et gérer des processus complexes en temps réel, sont indispensables pour la création de solutions technologiques efficaces et fiables.

# Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons exploré la commande des systèmes décrits par des équations intégrales-différentielles en utilisant l'approche de post-approximation. Notre objectif principal était d'appliquer la commande géométrique pour la synthèse d'un retour d'état stabilisant et de vérifier ses performances par le biais de simulations sur des exemples d'applications.

Le contenu de ce mémoire s'est articulé autour de plusieurs parties distinctes. Tout d'abord, nous avons posé les bases en présentant des généralités sur les systèmes décrits par des équations intégrales-différentielles partielles. Ensuite, nous avons abordé les méthodes d'approximation numérique des dérivées et des intégrales, indispensables pour la discrétisation des équations. Nous avons également exposé en détail la méthode des lignes, une approche essentielle pour la simulation de systèmes à paramètres distribués basée sur les approximation numérique des dérivées et des intégrales. A la fin, nous avons abordé la commande géométrique d'une équation intégrale-différentielle, en démontrant son application à travers deux exemples d'applications.

En conclusion, l'utilisation de la linéarisation entrée-sortie s'est révélée être une approche puissante pour la conception d'un retour d'état stabilisant. La synthèse de la commande se limite au calcul des dérivées temporelles successives de la sortie à commander. Les exemples d'application que nous avons présentés ont clairement démontré les performances de ce retour d'état synthétisé, garantissant ainsi la poursuite de consigne avec succès.

En ce qui concerne les perspectives futures, nous envisageons d'explorer davantage la stratégie de commande linéarisante globale, afin d'améliorer la capacité de retour d'état à rejeter les perturbations. Cette approche pourrait ouvrir de nouvelles possibilités pour la commande de systèmes décrits par des équations intégrales-différentielles et renforcer leur robustesse face aux perturbations extérieures.

# Bibliographie

- [1] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(1) :130–141, 1963.
- [2] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1993.
- [3] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Physical review letters*, 64(8) :821, 1990.
- [4] A. Zemouche. *Sur l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires*. PhD thesis, Université Louis Pasteur- Strasbourg, 2009.
- [5] M. Zeitz. The extended luenberger observer for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 9(2) :149–156, 1987.
- [6] T. Boukhobza, M. Djemai, and J. P. Barbot. Implicit triangular observer from dedicated to a sliding mode observer for systeme with unkown input. *Asian Journal of control*, 2003.
- [7] J. Daafouz, M. Fliess, and G. Millérioux. Une approche intrinsèque des observateurs linéaires à entrées inconnues. In *CIFA '2006*, 2006.
- [8] D. Aubry. *Contribution à la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires*. PhD thesis, Université Henri Poincaré - Nancy 1, 1999.
- [9] H. K. Khalil. High-gain observers in nonlinear feedback control. In *International Conference on Control, Automation and Systems*, pages 21–23, 2008.
- [10] K. Kaneko. Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 41(2) :137–172, 1990.
- [11] C. Werndl. What are the new implications of chaos for unpredictability? *The British Journal for the Philosophy of Science*, 60(1) :195–220, 2009.
- [12] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [13] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. Valladares, and C. Zhou. The synchronization of chaotic systems. *Physics reports*, 366(1-2) :1–101, 2002.

- [14] G. Kolumbán, M. P. Kennedy, and L. O. Chua. The role of synchronization in digital communications using chaos. ii. chaotic modulation and chaotic synchronization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 45(11) :1129—1140, 1998.
- [15] F. Rulkov, M. Sushchik, S. Tsimring, and D. Abarbanel. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Physical Review*, 51(2) :980, 1995.
- [16] G. Chen and X. Dong. chaos to order : methodologies, perspectives and applications. *World Scientific*, 1998.
- [17] G. Besançon. Nonlinear observers and applications,. *Springer Berlin Heidelberg*, 2007.
- [18] J. P. Gauthier and G. Bornard. Observability for any  $u(t)$  of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2) :922–926, 1981.
- [19] B. Nait Slimani. *Synthèse d’observateurs nonlinéaires :Application au diagnostic de défauts*. Département Automatique, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2016.
- [20] Z. Kader. *Synthèse d’observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires soumis aux retards sur la mesure*. Université Mouloud MAMMERI, Tizi-Ouzou., 2013.
- [21] B. Rahmouna. *Observabilité des systèmes non linéaires*. PhD thesis, 2016.
- [22] H. Quintard. *Symétries d’équations aux dérivées partielles, calcul stochastique, applications à la physique mathématique et à la finance*. PhD thesis, École doctorale sciences physiques mathématiques et de l’information pour l’ingénieur, 2015.
- [23] A. C. Bartlett. Vertex results for the steady state analysis of uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(11) :1758–1762, 1992.
- [24] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering*, 82(1) :35–45, 1960.
- [25] S. Djennoune. Observateurs et diagnostic des véhicules électriques. Technical report, université Mouloud MAMMERI, Tizi-Ouzou, 2023.
- [26] A. J. Krener and A. Isidori. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters*, 3(1) :47–52, 1983.
- [27] W. Perruquetti and J. P. Barbot. Sliding mode control in engineering. *Edition Marcel Dekker, New York*, 2002.
- [28] A. Hamoudi. *Contribution à la conception d’observateurs non linéaires pour la synchronisation des systèmes chaotiques sous contraintes de communication*. Département Automatique, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2022.
- [29] M. Maheri, N. M. Arifin, and I. Fudziah. Feedback control for anti-synchronization chaotic dynamical systems. *Life Science Journal*, 11(2) :431–434, 2014.

- 
- [30] P.Schreie. High gain observer. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(1) :142–145.