

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU

FACULTÉ DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET DE L' INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

THÈSE

Présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT

Spécialité : AUTOMATIQUE

Par :

Kahina TITOUCHE

THEME

CONTRIBUTION A LA SYNTHÈSE DE CONTRÔLEURS

FRACTIONNAIRES POUR LA COMMANDE

MULTI-OBJECTIVES DES SYSTÈMES LINÉAIRES

DEVANT LE JURY :

Président	Saïd DJENNOUNE	<i>Professeur, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou</i>
Rapporteur	Rachid MANSOURI	<i>Professeur, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou</i>
Co-Rapporteur	Maâmar BETTAYEB	<i>Professeur, Université de Sharjah (EAU)</i>
Examineurs	Mohamed TADJINE	<i>Professeur, Ecole Nationale Polytechnique, Alger</i>
	Samir LADACI	<i>Professeur, Ecole Nationale Polytechnique, Constantine</i>
	Saïd GUERMAH	<i>Maitre de conférences A, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou</i>

ANNÉE : 11 MAI 2017

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP), de l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Je tiens à remercier, en premier lieu, Monsieur Rachid Mansouri, professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Directeur de ma thèse, qui par son encadrement parfait a contribué à ce que ce travail de recherche se déroule dans les meilleures conditions. Je le remercie pour ses nombreux conseils, sa disponibilité et son soutien tout au long de ma thèse. Je lui exprime toute ma gratitude, ma reconnaissance et mon respect le plus profond

Je témoigne toute ma gratitude à Monsieur Maâmar Bettayeb, Professeur à l'université de Sharjah (Emirats Arabes Unies) co-encadrant de ma thèse, pour les nombreux conseils qu'il a su me prodiguer. Outre ses qualités professionnelles, j'ai pu apprécier aussi sa disponibilité et sa simplicité. Je lui suis très reconnaissant de la confiance qu'il a su me témoigner.

J'adresse mes sincères remerciements et ma grande reconnaissance à Monsieur Saïd Djennoune, professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être président du jury.

J'adresse toute ma reconnaissance aux membres du jury de soutenance de thèse, Messieurs Mohamed Tadjine, Professeur à l'école nationale polytechnique d'Alger, Samir Laddaci, Professeur à l'école nationale polytechnique de Constantine et Saïd Guermah, Maître de conférences classe A à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Je souhaite remercier l'ensemble de mes collègues du Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP), en particulier son directeur Monsieur Mohamed Aidene, Professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, pour leur sympathie et l'excellente ambiance de travail qu'ils ont créée.

Je remercie mes parents, ma famille, ma belle famille et mes amis(es) pour leurs encouragements et leur soutien.

$G(s)$:	la fonction de transfert ou matrice de fonction de transfert du système
τ :	la constante du temps du système
I^α :	l'intégration non entière d'ordre α
$L(s)$:	fonction de transfert en boucle ouverte
$f(s)$:	fonction de transfert désirée
$F(s)$:	filtre fractionnaire
s :	opérateur de Laplace
$N(s)$:	numérateur de la fonction de transfert
$D(s)$:	dénominateur de la fonction de transfert
q :	degré de polynôme $D(s)$
p :	degré de polynôme $N(s)$
θ :	le retard
$\delta(s, \theta)$:	quasi-polynôme
ω :	variable fréquentielle
S :	fonction de sensibilité
T :	fonction de sensibilité complémentaire
$u(t)$:	la commande
$G_m(s)$:	fonction de transfert du modèle
$G_m^+(s)$:	partie non inversible
$G_m^-(s)$:	partie inversible
G_{m0} :	fonction de transfert du modèle non retardé
$y(s)$:	la sortie du système
$y_{ref}(s)$:	la consigne
$C_s(s)$:	le contrôleur stabilisant
K :	gain du contrôleur stabilisant
b :	constante de dérivation du contrôleur stabilisant

Table des matières

Introduction générale	1
1 Stabilité et stabilisation des systèmes à retard	8
1.1 Introduction	8
1.2 Méthode de Walton-Marshall	9
1.3 Sur la stabilisation des systèmes à retard	15
1.4 Stabilisation d'un système du premier ordre instable à retard	16
1.4.1 Stabilisation avec un contrôleur Proportionnel (P)	17
1.4.2 Stabilisation avec un contrôleur Proportionnel Dérivé (PD)	20
1.5 Conclusion	23
2 Simulation des contrôleurs fractionnaires, commande par modèle interne	24
2.1 Introduction	24
2.2 Fonction idéale de Bode	25
2.3 Simulation et implémentation des régulateurs fractionnaires	28
2.3.1 Intégrateur borné en fréquences	29
2.3.2 Approximation d'Oustaloup	30
2.3.3 Approximation d'un régulateur $PI^\alpha D^\mu$	32
2.4 Méthode de commande par modèle interne	35
2.4.1 Synthèse du régulateur à modèle interne pour les systèmes stables .	38
2.4.2 Synthèse du régulateur par modèle interne pour les systèmes instables	39
2.5 Contrôleur IMC-FOF-PID	45

2.5.1	Analogie entre le modèle du second ordre et le modèle fractionnaire	47
2.5.2	Performances d'un modèle du second ordre	48
2.5.3	Performances du modèle fractionnaire $f(s)$	49
2.6	Détermination des paramètres des deux modèles à partir des caractéris-	
	tiques temporelles	49
2.6.1	Détermination de (ξ, ω_n) et (α, τ_c) en fonction de (M_p, t_r)	50
2.6.2	Exemple 1	51
2.6.3	Détermination de (ξ, ω_n) et de (α, τ_c) en fonction de (ϕ_m, ω_c)	52
2.6.4	Exemple 2	53
2.7	Conclusion	55
3	Commande à Plusieurs Degrés de Liberté (PDDL)	56
3.1	Introduction	56
3.2	Etat de l'art sur la commande à plusieurs degrés de liberté	58
3.2.1	Structure de commande à un degré de liberté (1DDL)	58
3.2.2	Structure de commande à deux degrés de liberté en utilisant un pré-filtre	59
3.2.3	Structure à 2DDL pour les systèmes à retard	60
3.2.4	Structure à 3DDL pour les systèmes instables à retard	62
3.2.5	Structure à 2DDL avec modèle de référence	63
3.2.6	Structure de commande IMC-2DDL	64
3.3	Commande à 2DDL d'un système du premier ordre à retard stable	65
3.3.1	Commande à 1DDL d'un système du premier ordre à retard stable	65
3.3.2	Commande à 2DDL d'un système du premier ordre à retard stable	68
3.4	Commande par modèle interne d'un système du premier ordre à retard instable	74
3.5	Conception du contrôleur de suivi de consigne $C(s)$	75
3.6	Condition de stabilité du filtre fractionnaire	76
3.7	Implémentation du contrôleur de suivi de consigne	80

3.7.1	Lorsque la boucle interne est stabilisée par un contrôleur Proportionnel	80
3.7.2	Lorsque la boucle interne est stabilisée avec un contrôleur PD	81
3.8	Exemples numériques	82
3.8.1	Exemple 1	83
3.8.2	Exemple 2	86
3.9	Conclusion	93
4	Application de commande à 2DDL pour le contrôle d'un pendule inversé monté sur un chariot	94
4.1	Introduction	94
4.2	Description et modélisation de l'ensemble chariot-pendule	96
4.3	Synthèse des contrôleurs linéaires pour la commande du pendule inversé	98
4.3.1	Approximation par un modèle du premier ordre à retard	102
4.3.2	Approximation par un modèle du deuxième ordre à retard	104
4.3.3	Approximation par un modèle fractionnaire à retard	106
4.3.4	Synthèse des contrôleurs pour l'asservissement de la position du chariot	107
4.4	Résultats de simulation et résultats expérimentaux	107
4.4.1	Résultats obtenus lorsque $G_{IL}(s)$ est approximée par un modèle du premier ordre à retard	108
4.4.2	Résultats obtenus lorsque $G_{IL}(s)$ est approximée par un modèle du second ordre à retard	110
4.4.3	Résultats obtenus lorsque $G_{IL}(s)$ est approximée par un modèle fractionnaire à retard	113
4.4.4	Comparaison entre les résultats obtenus par les trois contrôleurs	116
4.5	Conclusion	119
	Conclusion générale	120

Table des figures

1.1	Principe de la méthode de Walton-Marshall	9
1.2	Structure de commande stabilisante	16
1.3	K_M et K_m pour le système du 1 ^{er} ordre instable à retard cas $\theta/\tau < 1$. . .	19
1.4	K_M pour différentes valeurs du gain G_0 cas $\theta/\tau < 1$	19
1.5	K_M pour système du 1 ^{er} ordre instable à retard cas $\frac{\theta}{\tau} < 2$	22
1.6	Valeurs de $\hat{b}$ pour le système du 1 ^{er} ordre instable à retard ($\frac{\theta}{\tau} < 2$)	22
2.1	Diagramme de Bode de $L(s)$ pour $\alpha = (0, 0.5, 1)$	26
2.2	Diagramme de Bode de la fonction idéale de Bode pour $\alpha = 0.5$ et différentes valeurs de τ_c	27
2.3	Réponses indicielles de $f(s)$ pour différentes valeurs de τ_c	28
2.4	Diagramme de Bode de l'intégrateur généralisé (trait en pointillés) et de l'intégrateur borné en fréquences (trait fort)	30
2.5	Diagramme de Bode de l'intégrateur borné en fréquences en utilisant l'approximation d'Oustaloup (trait en pointillés) et Trigeassou (trait fort) . . .	31
2.6	Diagramme de Bode du contrôleur PID (trait fort) et de PID (action dérivée filtrée) (trait en pointillés)	33
2.7	Diagramme de Bode de contrôleur $PI^\alpha D^\mu$	34
2.8	Structure de commande par modèle interne	35
2.9	Structure de commande à retour unitaire	37
2.10	Réponse indicielle de l'exemple (2.32) avec pré-filtre (trait en pointillés) et sans pré-filtre (trait fort)	42

2.11 Schéma de commande avec pré-filtre	42
2.12 Modèle de référence	47
2.13 Variation de l'ordre non entier α en fonction du dépassement	50
2.14 Réponse indicielle du modèle du second ordre (trait fort) et du modèle fractionnaire (trait en pointillés)	51
2.15 Diagramme de Bode des boucles ouvertes du modèle du second ordre (trait fort) et du modèle fractionnaire (trait en pointillés)	52
2.16 Evolution de l'amortissement ξ en fonction de la marge de phase ϕ_m	53
2.17 La réponse indicielle du modèle du second ordre (trait fort) et du modèle fractionnaire (trait en pointillés)	54
2.18 Diagramme de Bode des boucles ouvertes du modèle du second ordre (trait fort) et du modèle fractionnaire (trait en pointillés)	54
3.1 Schéma de commande à 1DDL.	58
3.2 Schéma de commande à 2DDL avec pré-filtre.	60
3.3 Schéma de commande à 2DDL des systèmes à retard.	61
3.4 Schéma de commande à 3DDL pour les systèmes instables à retard	62
3.5 Schéma de commande à 2DDL proposé dans [74].	63
3.6 Schéma de commande IMC-2DDL.	64
3.7 Schéma de commande à 1ddl de l'exemple	65
3.8 Evolution de la sortie (1DDL).	66
3.9 Evolution de la commande (1DDL).	67
3.10 Influence du changement du paramètre K_p du contrôleur $C(s)$ (1DDL)	67
3.11 Influence du changement du paramètre τ_i du contrôleur $C(s)$ (1DDL)	68
3.12 Schéma de commande à 2DDL	68
3.13 Evolution de la sortie (2DDL)	71
3.14 Evolution de la commande (2DDL)	71
3.15 Influence du changement du paramètre K_p du contrôleur $C_2(s)$ (2DDL)	72
3.16 Influence du changement du paramètre τ_d du contrôleur $C_2(s)$ (2DDL)	72
3.17 Influence du changement du paramètre α	72

3.18	Influence du changement de paramètre K_p du contrôleur $C_1(s)$ (2DDL) . . .	73
3.19	Influence du changement de paramètre τ_i du contrôleur $C_1(s)$ (2DDL) . . .	73
3.20	Influence du changement de paramètre μ du contrôleur $C_1(s)$ (2DDL) . . .	74
3.21	Schéma de commande à 2DDL utilisé pour le cas d'un système instable . .	74
3.22	Structure du contrôleur fractionnaire des équations (3.59 et 3.66 avec $b = 0$)	81
3.23	Schéma de simulation	83
3.24	Réponses indicielles de la boucle fermée avec perturbations.	84
3.25	Réponses indicielles de la boucle fermée avec bruit.	84
3.26	Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation de 5% sur G_0	85
3.27	Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation de 5% sur τ	85
3.28	Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation de 5% sur θ	85
3.29	Réponses indicielles de la boucle fermée.	88
3.30	Réponses indicielles de la boucle fermée avec bruit	88
3.31	Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation sur G_0 : Méthode proposée	89
3.32	Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation sur G_0 : Méthode proposée dans [36].	89
3.33	Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation sur G_0 : Méthode proposée dans [60].	89
3.34	Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation sur τ : Méthode proposée.	90
3.35	Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation sur τ : Méthode proposée dans [36].	90
3.36	Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation sur τ : Méthode proposée dans [60].	90
3.37	Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation sur θ : Méthode proposée.	91
3.38	Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation sur θ : Méthode proposée dans [36].	91

3.39 Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation sur θ : Méthode proposée dans [60].	91
4.1 Schéma du principe de commande du pendule inversé	96
4.2 Vue d'ensemble de banc d'essai expérimental du pendule inversé monté sur un chariot	97
4.3 Schéma de modélisation de l'ensemble chariot-pendule	98
4.4 Schéma de commande à 2DDL pour la stabilisation et l'asservissement de la position du chariot du pendule inversé	101
4.5 Réponse indicielle en boucle ouverte de $G_{IL}(s)$	102
4.6 Réponses indicielles de $G_{IL}(s)$ et du modèle $G_1(s)$	104
4.7 Détermination des paramètres du modèle $G_2(s)$ à partir de la réponse indicielle de $G_{IL}(s)$	105
4.8 Réponse indicielle des modèles $G_{IL}(s)$ et $G_2(s)$	105
4.9 Réponse indicielle du système et du modèle d'ordre fractionnaire	106
4.10 Position du chariot en utilisant le contrôleur $C_1(s)$	109
4.11 Position du pendule inversé en utilisant le contrôleur $C_1(s)$	109
4.12 Zoom de l'évolution de θ en utilisant le contrôleur $C_1(s)$	110
4.13 Résultats expérimentaux obtenus en utilisant le contrôleur $C_1(s)$	111
4.14 Position du chariot en utilisant le contrôleur $C_2(s)$	112
4.15 Position du pendule inversé en utilisant le contrôleur $C_2(s)$	112
4.16 Zoom de la position du pendule inversé en utilisant le contrôleur $C_2(s)$	113
4.17 Résultats expérimentaux en utilisant le contrôleur $C_2(s)$	114
4.18 Position du chariot en utilisant le contrôleur $C_{frac}(s)$	115
4.19 Position du pendule inversé en utilisant le contrôleur $C_{frac}(s)$	115
4.20 Zoom sur la position du pendule inversé en utilisant le contrôleur $C_{frac}(s)$	116
4.21 Résultats expérimentaux en utilisant le contrôleur $C_{frac}(s)$	117
4.22 Position du chariot pour $t(30 : 55)$	118
4.23 Position du chariot pour $t(55 : 70)$	118

Liste des tableaux

3.1	Paramètres du contrôleur PID et du filtre fractionnaire constituant $C(s)$ pour l'exemple 1 : (AP : Approximation de Padé d'ordre 1)	84
3.2	Performances de la boucle fermée en fonction de variations de G_0	92
3.3	Performances de la boucle fermée en fonction de variations de τ	92
3.4	Performances de la boucle fermée en fonction de variations de θ	92
4.1	Paramètres du position du chariot	118

Introduction générale

Une hypothèse classique dans la modélisation des systèmes physiques est de supposer que leur comportement futur ne dépend que de l'état présent, ce qui conduit à des modèles décrits par des équations différentielles ordinaires. Négliger quelques phénomènes tels que le phénomène du retard mène, souvent, à des modèles qui ne décrivent pas parfaitement le système à étudier. C'est pourquoi il est nécessaire, pour une meilleure modélisation, de prendre en compte tous les phénomènes intervenant dans le fonctionnement du système. La présence du retard peut être causée par les propriétés physiques ou chimiques des matériaux constituant le système : dans une réaction chimique, par exemple, il existe un retard intrinsèque dû à la dynamique du mélange. Le retard est, également, associé au transport de matière : transport de l'eau dans une conduite ou transport d'une matière sur un tapis roulant...etc. Il est important de noter, également, qu'un retard peut apparaître dans le modèle associé au système sans que cela ne soit associé à une réalité physique quelconque. En effet, afin de limiter l'ordre du modèle permettant de synthétiser une loi de commande, on choisit d'inclure un retard. Dans ce cas, ce retard permet alors de décrire une partie de la dynamique du système d'une manière plus simple. Cependant, la présence du retard peut engendrer la perte des performances du système de commande et des fois même son instabilité.

L'analyse de la stabilité et la synthèse de contrôleurs pour la commande des systèmes à retard sont devenues des sujets actifs dans la théorie de la commande et ses applications. L'étude de la stabilité d'un système à retard, en boucle fermée, revient à étudier et analyser les racines de son équation caractéristique. Il ne s'agit plus de résoudre une

équation polynomiale de variable de Laplace " s ", mais de résoudre une équation dite "quasi-polynômiale" ayant comme variables " s " et " $e^{-\theta s}$ ", où θ désigne le retard. Cette équation possède une infinité de racines dû à la présence du terme $e^{-\theta s}$. La stabilité de ces systèmes dépend essentiellement de la localisation des racines de leurs équations caractéristiques dans le plan complexe. Plusieurs méthodes ont été développées pour déterminer la position des racines d'un quasi-polynôme dans le plan complexe. Dans cette thèse nous utilisons la méthode de Walton-Marshall dont le principe est de trouver les valeurs du retard θ pour lesquelles le système est stable ou instable.

Pour étudier la stabilité d'un système de commande, il suffit de vérifier, si le système est BIBO stable, en effet, un système est dit stable au sens BIBO (en anglais Bounded Input Bounded Output) ou encore au sens entrée/sortie, si et seulement si, pour toute entrée bornée, la sortie l'est aussi, l'on parle alors, de la stabilité externe. Cependant, lorsque le système à commander est instable, la stabilité externe n'est pas suffisante. En effet, dans ce cas, il est important de vérifier la stabilité du système de façon interne. Un système est dit stable de façon interne si toutes les fonctions de transfert reliant les grandeurs internes du système sont stables. La stabilité interne est un concept plus fort que celui de la BIBO stabilité.

En plus de la stabilité du système bouclé, les objectifs de commande sont souvent résumés par un bon suivi de consigne, un bon rejet de perturbations et des bruits de mesure, ainsi que la robustesse vis à vis des incertitudes du modèle. Le degré de liberté d'un système de commande définit le nombre de fonctions de transfert en boucle fermée qui peuvent être ajustées indépendamment. Dans une structure de commande à un degré de liberté (1DDL), où le contrôleur est responsable à la fois du suivi de consigne et du rejet de perturbations, si on change un de ses paramètres, le suivi de consigne et le rejet de perturbations sont affectés simultanément. C'est dans ce contexte, que l'utilisation d'une structure de commande dans laquelle on peut agir sur l'un des deux objectifs séparément est recommandée, il s'agit de la structure à deux degrés de libertés (2DDL). La commande à 2DDL a naturellement des avantages par rapport à la commande à 1DDL, ce fait a été

mentionné dans les travaux de Horowitz dans les années 60 [30], mais il n'a pas attiré l'attention des chercheurs pendant une longue période. C'est seulement en 1984, deux décennies après les travaux de Horowitz, que la recherche essaye d'exploiter les avantages de cette structure. Plusieurs travaux ont été publiés et plusieurs structures à 2DDL ont été proposées, les références [4, 29, 50, 26] en sont quelques exemples.

Le contrôleur PID est sans doute le moyen de commande des systèmes le plus utilisé depuis de nombreuses années. Sur la base d'une enquête auprès plus de 11000 contrôleurs dans les industries de procédés, Desborough et Miller [20] rapportent que plus de 97% des contrôleurs sont des régulateurs PID. Malgré les développements importants dans les domaines de la théorie du contrôle et de la technologie, les contrôleurs PID sont encore très largement utilisés dans les systèmes industriels. Ceci grâce à leur capacité à bien contrôler une large gamme de processus ainsi que des performances qu'ils permettent d'atteindre pour une large gamme de conditions de fonctionnement. En outre, de nombreuses méthodes, permettant de déterminer ses paramètres, sont proposées dans la littérature aussi bien dans le domaine temporel que dans le domaine fréquentiel, la littérature est très abondante dans ce domaine, voir par exemple [5], [59] et la liste présentée dans le chapitre 1 de [67], où plus de 700 références sont citées.

D'un autre côté, Depuis les années soixante l'apparition des contrôleurs fractionnaires a permis d'améliorer les performances des systèmes de commande notamment leur robustesse vis-à-vis des variations des paramètres du système à commander [42]. En effet, la commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) développée par Oustaloup et son équipe [53] et le contrôleur $PI^\alpha D^\mu$ proposé par Podlubny [55], ont montré la supériorité des contrôleurs fractionnaires par rapport aux contrôleurs entiers classiques. Un état de l'art sur le calcul fractionnaire et ses applications dans le domaine de commande se trouve dans [49]. Néanmoins, lors de la synthèse d'un contrôleur fractionnaire on retrouve les mêmes problèmes rencontrés lors de la synthèse des contrôleurs entiers en plus du fait qu'il faut trouver un moyen de synthétiser les valeurs des ordres non entiers contenus dans

le contrôleur fractionnaire. Le problème est plus complexe car ces ordres non entiers sont des puissances de l'opérateur de Laplace et non pas des coefficients multiplicatifs comme dans le cas des contrôleurs entiers. C'est dans ce cadre que sont menés la plupart des travaux de recherche développés dans ce domaine et plusieurs méthodes commencent à être proposées ces dernières années, voir, [7, 8, 65] et les références qui y sont cités.

Les travaux d'Oustaloup sur son fameux régulateur CRONE sont basés sur la fonction de transfert $1/\tau_c s^{\alpha+1}$, appelée la fonction idéale de Bode. En effet, lorsque cette fonction est imposée à la boucle ouverte, la marge de phase, de la boucle ouverte, ne dépend que de l'ordre non entier α , indépendamment du gain statique du système. C'est donc naturellement, que les travaux qui ont suivis tentent de calculer des régulateurs fractionnaires qui impose la même caractéristique à la boucle ouverte (phase constante sur une bande de fréquences assez large).

La fonction de transfert en boucle fermée correspondante à la fonction idéale de Bode est $f(s) = 1/(1 + \tau_c s^{\alpha+1})$ présente des caractéristiques temporelles semblables à celles d'un modèle du second ordre amorti mais dont le dépassement ne dépend que de α et le temps de réponse ne dépend que de la constante de temps τ_c . C'est cette fonction qui est utilisée par Bettayeb et Mansouri [7, 8] pour proposer une nouvelle structure de régulateurs fractionnaires FOF-PID constituée d'une partie entière, très souvent un régulateur PID, et une partie fractionnaire permettant d'imposer le caractère fractionnaire à la boucle fermée. Le transfert $f(s)$ est utilisé comme modèle de référence lors de la synthèse du régulateur FOF-PID en se basant sur la structure de commande par modèle interne et son équivalence avec la structure de commande par retour de sortie classique. C'est dans ce cadre que s'inscrivent les travaux de recherches que nous avons entrepris dans cette thèse. L'idée directrice étant de trouver une méthode de synthèse d'un contrôleur fractionnaire FOF-PID pour la commande d'un système à retard instable. Ce régulateur est associé à un contrôleur P ou PD permettant de stabiliser au préalable le système instable à retard.

Contribution et organisation de la thèse :

Le travail présenté dans cette thèse, porte sur "la synthèse des contrôleurs fractionnaires pour la commande multi-objectifs des systèmes linéaires". On s'intéresse, plus particulièrement, aux problématiques suivantes : la stabilité des systèmes à retards, l'analyse de la stabilité des quasi-polynômes, la stabilisation d'un système du premier ordre instable à retard, la synthèse des régulateurs fractionnaires et la commande à plusieurs degrés de liberté.

Tous les développements théoriques qui seront abordés, seront illustrés sur des exemples numériques afin de mieux expliquer les méthodes. Une application réelle sera également présentée à la fin de cette thèse afin d'implémenter la structure de commande à deux degrés de liberté. Il s'agit de la stabilisation d'un pendule inversé et l'asservissement du chariot sur lequel est monté le pendule.

Cette thèse est constituée de quatre chapitres et organisée comme suit :

Le chapitre 1 porte sur l'analyse de la stabilité et la stabilisation des systèmes à retard en utilisant la méthode de Walton-Marshall. Cette méthode est, par la suite, utilisée pour calculer les paramètres du contrôleur permettant de stabiliser un système du premier ordre instable à retard.

Dans la première partie du chapitre 2, nous abordons la simulation des régulateurs fractionnaires. La deuxième partie de ce chapitre présente la méthode de synthèse du régulateurs basée sur la commande par modèle interne. La procédure de synthèse de régulateur par modèle interne est présentée pour le cas des systèmes stables et instables. Dans la suite du chapitre, on présente l'aspect temporel et fréquentiel d'un modèle de second ordre dont le coefficient d'amortissement est inférieur à 1 et du modèle fractionnaire ($f(s)$) puisque ces deux modèles se comportent de la même façon. A la fin de ce chapitre, une analogie est faite entre les paramètres de ces modèles.

Dans le troisième chapitre, la synthèse d'un contrôleur fractionnaire est effectuée en utilisant la méthode de commande à modèle interne pour la commande d'un système du premier ordre à retard, le schéma de commande utilisé est basé sur la structure de commande à 2DDL qui permet de découpler les deux problèmes ; stabilisation et de suivi de consigne. Le contrôleur obtenu est mis sous la forme d'un contrôleur entier de type PID en cascade avec un filtre fractionnaire. La méthode de Walton-Marshall est appliquée pour établir les conditions de stabilité du filtre fractionnaire, le résultat est formulé sous forme d'un théorème. Ce théorème fixe les conditions sur le choix de la constante du temps de la boucle fermée désirée τ_c en fonction du retard θ et de l'ordre non entier du régulateur α .

Dans le quatrième chapitre, la structure de commande à 2DDL est utilisée afin de commander un pendule inversé monté sur un chariot qui se trouve au Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP). Le pendule inversé est un système instable, sous actionné et possède des non linéarités non négligeables. Il faut noter, la complexité de la commande d'un tel système car il ne dispose que d'une seule grandeur de commande pour contrôler l'angle de rotation du pendule et la position du chariot sur lequel le pendule est monté. L'objectif de cette commande est la stabilisation du pendule inversé et l'asservissement de la position du chariot. Pour ce faire, nous utilisons le modèle linéaire obtenu par linéarisation du modèle non linéaire du système chariot-pendule. Le modèle linéaire obtenu étant d'ordre 4, on se base sur le modèle d'état pour calculer une loi de commande stabilisante par retour d'état statique. Le contrôleur stabilisant permet de maintenir le pendule dans sa position d'équilibre instable (position haute). Afin de faire suivre au chariot une référence désirée, on synthétise un autre contrôleur pour le suivi de consigne. Pour y parvenir, le modèle du système stabilisé est approximé par un modèle du premier ordre à retard, un modèle du second ordre à retard et par un modèle fractionnaire, la méthode de synthèse utilisée est la commande par modèle interne. Les contrôleurs obtenus en utilisant ces modèles sont appliqués au modèle non linéaire et au banc d'essai expérimental.

Pour faciliter la lecture de cette thèse, les équations utilisant des fonctions de transfert en particulier, la variable de Laplace ' s ' sera utilisée lorsque la fonction de transfert est écrite dans le texte, par contre, elle sera omise lorsqu'il s'agit d'une équation.

Chapitre 1

Stabilité et stabilisation des systèmes à retard

1.1 Introduction

La stabilité des systèmes sans retard est relativement facile à étudier puisque le nombre des racines de leurs équations caractéristiques est fini. Dans le cas des systèmes à retard, par contre, le nombre de ces racines devient infini, ce qui rend difficile l'étude de leur stabilité. En effet, l'équation caractéristique d'un système à retard est le quasi-polynôme (c'est-à-dire un polynôme en s et en $e^{-\theta s}$), donnée par

$$\delta(s, \theta) = D(s) + N(s) e^{-\theta s} = 0 \quad (1.1)$$

où s est la variable de Laplace, θ désigne le retard, $D(s)$ et $N(s)$ sont des polynômes à coefficients constants dont les degrés sont respectivement notés q et p . De plus, les systèmes étant très souvent causals, on suppose que $q \geq p$.

Comme pour les systèmes sans retard, un système à retard est stable si et seulement si toutes les racines de son équation caractéristique sont à partie réelle négative. Le problème dans le cas des systèmes à retard est que, comme on l'a mentionné plus haut, son équation caractéristique possède une infinité de racines qui sont très difficile à déterminer à cause du terme $e^{-\theta s}$ qu'elle contient. Plusieurs méthodes ont été proposées pour étudier la stabilité de ce type de systèmes. Dans cette thèse nous avons opté pour la méthode de

Walton-Marshall [19, 59, 70], dont le principe est présenté dans ce qui suit. La méthode de Walton-Marshall est utilisée, dans la suite de ce chapitre, pour déterminer les paramètres du contrôleur stabilisant proportionnel (P) ou proportionnel dérivée (PD) pour un système du premier ordre à retard.

1.2 Méthode de Walton-Marshall

L'analyse de la stabilité des systèmes à retard par la méthode de Walton-Marshall consiste à rechercher les valeurs du retard θ pour lesquelles l'équation caractéristique admet des racines à partie réelle négative ou au moins une racine imaginaire pure. La figure (1.1) illustre le principe général de cette méthode. Cette figure montre que le retard peut influencer la stabilité du système de deux manières. Il peut avoir un effet déstabilisant ; le système est stable pour $\theta = 0$ et devient instable pour d'autres valeurs de θ (figure 1.1(a)). Il peut également avoir un effet stabilisant ; le système est instable pour $\theta = 0$ et devient stable pour d'autres valeurs de θ (figure 1.1(b)).

La mise en œuvre de la méthode de Walton-Marshall consiste à associer à l'équation

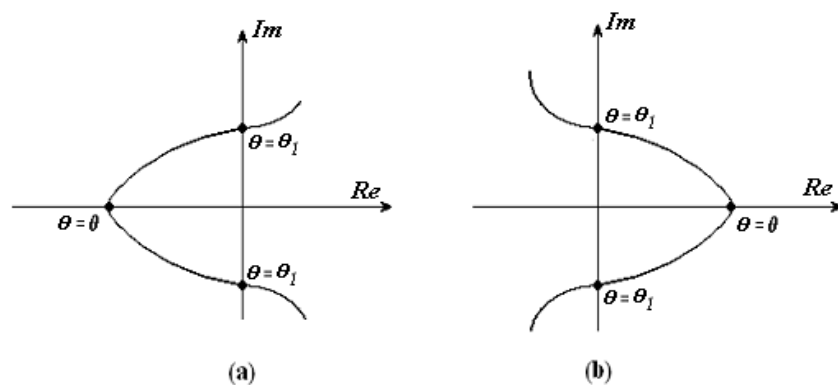


FIG. 1.1: Principe de la méthode de Walton-Marshall

caractéristique (1.1) un polynôme à une seule variable $W(\omega^2)$ obtenu en éliminant le terme $e^{-\theta s}$ et en remplaçant la variable de Laplace s par $j\omega$. De plus, on utilise le fait que, si s est une racine de l'équation caractéristique (1.1), alors son conjugué $\bar{s}$ l'est également, puisque pour les nombres imaginaires purs, on a $\bar{s} = -s$. S'il existe des racines de l'équation caractéristique situées sur l'axe imaginaire, alors elles vérifient le système

d'équations

$$\begin{cases} D(j\omega) + N(j\omega)e^{-j\theta\omega} = 0 \\ D(-j\omega) + N(-j\omega)e^{j\theta\omega} = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Elles sont également solutions de l'équation obtenue après avoir éliminé le terme $e^{-j\theta\omega}$.

$$D(j\omega)D(-j\omega) - N(j\omega)N(-j\omega) = 0 \quad (1.3)$$

On obtient ainsi, un polynôme en ω^2 , noté $W(\omega^2)$, défini par

$$W(\omega^2) = D(j\omega)D(-j\omega) - N(j\omega)N(-j\omega) \quad (1.4)$$

Le polynôme rationnel $W(\omega^2)$ joue un rôle central dans la méthode de Walton-Marshall et par conséquent, dans l'analyse de la stabilité des système ayant comme équations caractéristiques l'équation (1.1).

La méthode se déroule en trois étapes.

- Première étape : Étudier la stabilité de l'équation (1.1) pour $\theta = 0$ et déterminer le nombre de racines de $\delta(s, 0) = 0$. Cette première étape sera utilisée dans la troisième étape pour conclure sur la stabilité ou non du système à retard.
- Deuxième étape : Cette étape est à étudier seulement lorsque $p = q$. Dans ce cas, elle consiste à examiner le comportement des racines de l'équation caractéristique en augmentant la valeur de θ de 0 à une valeur infiniment petite. Dans ce cas, le nombre de racines devient infini. Les nouvelles racines apparaissent dans le demi-plan gauche, si et seulement si, $W(\omega^2) > 0$ pour des valeurs de ω grandes.
- Troisième étape : Lorsque $p < q$, on étudie le comportement du lieu des racines de $\delta(s, \theta)$ en $s = j\omega_c$ (ω_c étant la pulsation pour laquelle le système est à la limite de stabilité), ainsi que la direction de croisement de ces racines pour des valeurs de θ croissant. On étudiera, en particulier, les valeurs de θ pour lesquelles ces racines passent du demi-plan gauche au demi-plan droit du plan complexe (on dira alors que les racines sont déstabilisantes) et les valeurs de θ pour lesquelles ces racines passent du demi-plan droit au demi-plan gauche du plan complexe (on dira que les racines sont stabilisantes). Pour ce faire, on cherche d'abord les racines positives de $W(\omega^2) = 0$. Ainsi :

- Si $W(\omega^2)$ n'a pas de racines réelles positives, la stabilité du système à retard dépend de sa stabilité pour $\theta = 0$. Le système sera stable pour $\theta \geq 0$, s'il est stable pour $\theta = 0$ et il sera instable pour $\theta \geq 0$ s'il est instable pour $\theta = 0$.
- Si $W(\omega^2)$ admet des racines réelles positives, il faut analyser l'évolution du lieu des racines au voisinage de l'axe imaginaire. Pour ce faire, il suffit d'analyser le signe de la dérivée de $W(\omega^2)$ par rapport à ω^2 , notée $W'(\omega^2)$, évaluée pour chaque racine positive de $W(\omega^2)$. On conclura alors que :
 - Si $W'(\omega_c^2) > 0$, la racine est déstabilisante.
 - Si $W'(\omega_c^2) < 0$, la racine est stabilisante.
 - Si $W'(\omega_c^2) = 0$, il est nécessaire de considérer la dérivée à un ordre supérieur à 1.

Pour déterminer la valeur de θ pour laquelle la racine est située sur l'axe imaginaire, on doit résoudre l'équation

$$D(j\omega_c) + N(j\omega_c) e^{-j\theta\omega_c} = 0 \quad (1.5)$$

donc

$$e^{-j\theta\omega_c} = \cos(\theta\omega_c) - j\sin(\theta\omega_c) = -\frac{D(j\omega_c)}{N(j\omega_c)} \quad (1.6)$$

si θ_0 représente la solution la plus petite qui satisfait l'équation (1.6), la solution générale pour une racine ω_c donnée est

$$\theta = \theta_0 + \frac{2k\pi}{\omega_c}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.7)$$

La stabilité du système à retard se déduit de celle du polynôme $W(\omega^2)$. La procédure peut être résumée comme suit :

- 1) Déterminer le nombre de racines du polynôme non retardé (racines de $\delta(s, 0) = 0$),
- 2) Calculer le polynôme $W(\omega^2)$,
- 3) Rechercher ou étudier l'existence des racines réelles positives ω_c^2 de $W(\omega^2)$.
- 4) Étudier le comportement du lieu des racines de $\delta(s, \theta)$ en $s = j\omega_c$. On détermine si le lieu des racines traverse ou non l'axe imaginaire, ainsi que la direction du croisement pour les θ croissants. On peut ainsi déterminer les valeurs de θ pour lesquelles

il existe des racines de l'équation caractéristique situées dans le demi-plan complexe gauche, c'est-à-dire, les valeurs de θ pour lesquelles le système est stable.

Pour illustrer la méthode, on présente dans ce qui suit trois exemples numériques.

Exemple 1.1

Soit le système dont l'équation caractéristique est donnée par

$$\delta(s, \theta) = s^2 + 6s + 7 + e^{-\theta s} \quad (1.8)$$

1. Dans une première étape, on étudie la stabilité du système pour $\theta = 0$. Dans ce cas, l'équation caractéristique (1.8) devient

$$\delta(s, 0) = s^2 + 6s + 8 = (s + 2)(s + 4) \quad (1.9)$$

Le système est stable pour $\theta = 0$ puisque les deux racines sont à partie réelle négative.

2. Calculons maintenant le polynôme $W(\omega^2)$, on obtient :

$$\begin{aligned} W(\omega^2) &= ((j\omega)^2 + 6j\omega + 7)((-j\omega)^2 - 6j\omega + 7) - 1 \\ &= \omega^4 + 22\omega^2 + 48 \\ &= (\omega^2 + 19.554)(\omega^2 + 2.456) \end{aligned} \quad (1.10)$$

$W(\omega^2)$ ne possédant pas de racines positives et comme le système est déjà stable pour $\theta = 0$, on peut conclure qu'il est asymptotiquement stable pour toutes les valeurs du retard.

Exemple 1.2 [59]

Soit le système dont l'équation caractéristique est donnée par

$$\delta(s, \theta) = s + 2e^{-\theta s} \quad (1.11)$$

1. Le système est stable pour $\theta = 0$ puisque la racine de $\delta(s, 0)$ (-2) est négative.

2. Le polynôme $W(\omega^2)$ est donné par

$$W(\omega^2) = \omega^2 - 4 \quad (1.12)$$

$W(\omega^2)$ ayant une racine positive ($\omega_c^2 = 4$), le lieu des racines du polynôme caractéristique coupe l'axe imaginaire. Afin de déterminer si cette racine est stabilisante ou non, on doit calculer $W'(\omega^2) = \frac{d}{d\omega^2} W(\omega^2)$ en $\omega = \omega_c$, on trouve $W'(\omega_c^2) = 1$. Comme le signe de $W'(\omega_c^2)$ est positif, on conclut que la racine est déstabilisante. Cela signifie qu'il existe des valeurs du retard θ pour lesquelles le système devient instable.

Pour trouver ces valeurs du retard on utilise la relation (1.6) en $\omega = 2$, on doit donc résoudre les équations :

$$\left. \begin{array}{l} \cos 2\theta = \operatorname{Re} \left[-\frac{j\omega}{2} \right] = 0 \\ \sin 2\theta = \operatorname{Im} \left[\frac{j\omega}{2} \right] = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2\theta = \pi/2 + 2k\pi, \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (1.13)$$

la valeur du retard θ correspondante est

$$\theta = (4k + 1)\frac{\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.14)$$

Pour $k = 0$, deux racines de $\delta(s, \theta) = 0$ passent de gauche à droite, ce qui provoque l'instabilité du système pour des valeurs de $\theta \geq \pi/4$. Pour $k = 1$, deux autres racines de $\delta(s, \theta) = 0$ passent de gauche à droite et ainsi de suite. Donc, la condition de stabilité est

$$0 \leq \theta < \pi/4 \quad (1.15)$$

Exemple 1.3 [59]

Soit le système dont l'équation caractéristique est donnée par

$$\delta(s, \theta) = s^3 + s^2 + 2s + 1 + e^{-\theta s} \quad (1.16)$$

$$1. \delta(s, 0) = s^3 + s^2 + 2s + 1 + 1 = (s + 1)(s^2 + 2).$$

Le polynôme possède une racine stable (-1) et deux racines imaginaires pures ($\pm j\sqrt{2}$).

Le système est donc à la limite de stabilité pour $\theta = 0$

$$2. \text{ Calcul de } W(\omega^2) = |-j\omega^3 - \omega^2 + 2j\omega + 1|^2 - 1 = \omega^2(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 2).$$

Ce polynôme possède trois racines : $\omega_{c1}^2 = 0$, à ignorer car $s = 0$ n'est pas racine de $\delta(s, \theta)$. $\omega_{c2}^2 = 1$ et $\omega_{c3}^2 = 2$, pour lesquelles il faut vérifier si les racines de $\delta(s, \theta)$ correspondantes sont stabilisantes ou déstabilisantes, puis déterminer les valeurs critiques du retard correspondantes. Pour ce faire, on doit calculer la dérivée $W'(\omega^2)$ et vérifier son signe pour chacune de ces racines.

$$W'(\omega^2) = (\omega^2 - 1)(\omega^2 - 2) + \omega^2(\omega^2 - 2) + \omega^2(\omega^2 - 1) \quad (1.17)$$

ainsi, pour $\omega_{c1}^2 = 1$, $W'(1) = -1$, cette valeur étant négative, les racines sont stabilisantes.

Pour $\omega_{c2}^2 = 2$, $W'(2) = 2$, cette valeur étant positive, les racines sont déstabilisantes.

Calculons maintenant les valeurs critiques du retard θ pour lesquelles les racines deviennent stabilisantes ou déstabilisantes.

Les racines déstabilisantes correspondent à $s = \pm j\sqrt{2}$, dans ce cas $\delta(\pm j\sqrt{2}, \theta) = 0$.

La valeur du polynôme (1.16) pour $s = j\sqrt{2}$ est $\delta(j\sqrt{2}, \theta) = -1 + e^{-j\sqrt{2}\theta}$, les valeurs de θ qui annulent cette expression sont

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta\sqrt{2} = +1 \\ \sin \theta\sqrt{2} = 0 \end{array} \right\} \implies \theta\sqrt{2} = 0 + 2k\pi, \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (1.18)$$

Par conséquent, la valeur critique du retard θ est

$$\theta = \sqrt{2}k\pi, \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (1.19)$$

Ainsi, pour $k = 0$, deux racines de $\delta(s, 0)$ sont situées sur l'axe imaginaire, elles correspondent à celles trouvées dans l'étape (1) pour $\theta = 0$. Deux autres racines apparaissent pour $\theta = \sqrt{2}\pi$ $k = 1$ et ainsi de suite.

Le système est stable pour des valeurs de

$$\theta < \pi\sqrt{2} \quad (1.20)$$

Les racines stabilisantes correspondent à $s = \pm j$. Pour $s = +j$, le polynôme $\delta(+j, \theta) = +j + e^{-j\theta}$, donc

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = 0 \\ \sin \theta = 1 \end{array} \right\} \implies \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (1.21)$$

Pour $k = 0$, les deux racines de $\delta(s, \frac{\pi}{2})$ sont situées sur l'axe imaginaire puisqu'elles sont stabilisantes, elles passent du demi-plan droit au demi-plan gauche. Le même phénomène se réalise pour $k = 1$ et ainsi de suite. Par conséquent, le système est stable à condition que

$$\theta > \frac{\pi}{2} \quad (1.22)$$

Finalement, la combinaison des conditions (1.20) et (1.22) permet de conclure sur la condition de stabilité du système donné par l'équation caractéristique (1.16), à savoir

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\sqrt{2} \quad (1.23)$$

1.3 Sur la stabilisation des systèmes à retard

La stabilisation des systèmes à retard reste actuellement, un domaine de recherche très actif [59]. En raison de leurs simplicité, les contrôleurs P/PI/PD/PID sont souvent les plus utilisés pour la stabilisation des systèmes à retard. Cependant, les conditions de stabilité pour de tels systèmes est un sujet très difficile. Huang et Chen [31], ont utilisé le lieu des racines pour étudier le problème de stabilisation des systèmes du premier ordre instables à retard ; dont la fonction de transfert de leurs modèle est donnée par $G(s) = \frac{G_0 e^{-\theta s}}{\tau s - 1}$; en utilisant des contrôleurs simples et ont montré que le rapport θ/τ doit être inférieur à 1 lorsqu'on utilise un contrôleur proportionnel ou proportionnel intégral, alors qu'il devrait être inférieur à 2 lorsqu'un contrôleur proportionnel dérivé ou proportionnel intégral dérivé est utilisé. Silva et al. [59] ont étudié la stabilisation des systèmes à retard avec des contrôleurs PID. Leur étude est basée sur le théorème de Hermite-Biehler pour les quasi-polynômes, qui consiste à trouver les racines de l'équation transcendante afin de déterminer l'intervalle de stabilisation des paramètres K_p , τ_i et τ_d du contrôleur PID. Hwang et al. [33] ont appliqué la méthode de D-partition pour caractériser les régions de stabilité du contrôleur pour un système linéaire à retard. Xiang et al. [72] ont utilisé le critère de stabilité de Nyquist pour étudier la stabilisation des systèmes du second ordre instables à retard par des régulateurs P/PI/PD/PID. Chek [16] a étudié la stabilisation des systèmes instables à retard d'ordre quelconque dont le numérateur est une constante

en utilisant de simples contrôleurs. Dans notre cas, la méthode de Walton-Marshall dont le principe est illustré précédemment est utilisée afin de déterminer les valeurs des paramètres du contrôleur stabilisant.

1.4 Stabilisation d'un système du premier ordre instable à retard

Bien qu'il existe plusieurs études qui traitent des méthodes de conception de contrôleur pour les systèmes instables avec retard, les performances du système sont limitées si la structure de commande considérée est la structure à retour unitaire standard [31, 32], ces limitations sont exprimées en terme de l'effet du retard sur la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte [24]. Afin d'améliorer les performances du système en boucle fermée, les chercheurs proposent de stabiliser ces systèmes avant d'appliquer la commande [31, 24].

La figure (1.2) donne la structure de commande dont le contrôleur stabilisant $C_s(s)$ est inséré dans la boucle interne. La fonction de transfert d'un modèle du premier ordre

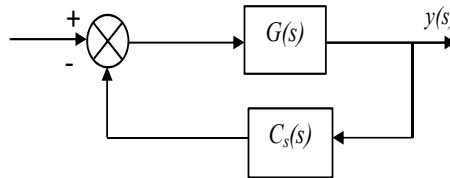


FIG. 1.2: Structure de commande stabilisante

instable à retard est donnée par l'équation (1.24).

$$G(s) = \frac{G_0 e^{-\theta s}}{\tau s - 1} \quad (1.24)$$

où G_0 désigne le gain statique, τ est la constante de temps du système et θ est le retard. Il est mentionné dans la littérature qu'un système du 1^{er} ordre instable à retard peut être stabilisé par un contrôleur proportionnel (P) ou par un contrôleur proportionnel intégral (PI) si et seulement si $\theta/\tau < 1$ [31]. Cependant, si le contrôleur PD ou PID est considéré,

le système est stabilisable pour $\theta/\tau < 2$ [31, 72]. Le contrôleur stabilisant peut être du type proportionnel (P), $C_s(s) = K$ ou proportionnel Dérivé (PD), $C_s(s) = K(bs + 1)$.

1.4.1 Stabilisation avec un contrôleur Proportionnel (P)

La fonction de transfert de la boucle interne, si le contrôleur stabilisant est un contrôleur proportionnel, est donnée par

$$G_{IL}(s) = \frac{G_0 e^{-\theta s}}{\tau s - 1 + KG_0 e^{-\theta s}} \quad (1.25)$$

Le retard étant connu, on cherche à déterminer les valeurs du gain du contrôleur proportionnel qui conduisent à la stabilité du système, et cela se fait en utilisant la méthode de Walton-Marshall.

L'analyse de la stabilité de la fonction de transfert donnée par l'équation (1.25) permet de trouver la valeur de la borne inférieure K_m et la valeur de la borne supérieure K_M du gain K [59, 70].

$$\delta(s, \theta) = \underbrace{\tau s - 1}_{D(s)} + \underbrace{KG_0}_{N(s)} e^{-\theta s} \quad (1.26)$$

- $\delta(s, 0) = \tau s - 1 + KG_0$, le système possède une seule racine ($\theta = 0$) égale à $\frac{1-KG_0}{\tau}$, donc le système est stable pour $\theta = 0$ si et seulement si $K > \frac{1}{G_0}$. Cette valeur représente la valeur de la borne inférieure notée K_m du gain du contrôleur proportionnel garantissant la stabilité du système.
- Comme $q = 1 > p = 0$, on ignore la deuxième étape de la méthode de Walton-Marshall.
- $W(\omega^2) = \tau^2 \omega^2 + 1 - K^2 G_0^2$. Cette équation possède une seule racine positive, $\omega_c^2 = \frac{K^2 G_0^2 - 1}{\tau^2}$. En outre, $W'(\omega_c^2) = \tau^2$, cette dérivée étant positive, cette racine est déstabilisante.

La valeur du retard θ correspondante vérifie

$$\cos(\theta \omega_c) = \operatorname{Re} \left[-\frac{j\tau \omega_c - 1}{KG_0} \right] = \frac{1}{KG_0}, \quad \sin(\theta \omega_c) = \operatorname{Im} \left[\frac{j\tau \omega_c - 1}{KG_0} \right] = \frac{\tau \omega_c}{KG_0} \quad (1.27)$$

d'où

$$\tan(\theta \omega_c) = \tau \omega_c \quad (1.28)$$

On pose $\tau\omega_c = y \Leftrightarrow \omega_c = \frac{y}{\tau}$, l'équation (1.28) peut être réécrite sous la forme

$$\frac{\arctg(y)}{y} = \frac{\theta}{\tau} \quad (1.29)$$

Comme la valeur de $\arctg(y)$ est plus petite que la valeur de y , l'équation (1.29) admet une solution uniquement pour des valeurs de $\frac{\theta}{\tau} < 1$. Cela signifie, que le régulateur proportionnel ne peut stabiliser le système instable du premier ordre à retard que si

$$\frac{\theta}{\tau} < 1 \quad (1.30)$$

Dans ce cas, déterminons alors les conditions sur le gain K du régulateur proportionnel pour que le système soit stable.

Lorsque $\frac{\theta}{\tau} \ll 1$, (correspondant à la valeur maximale du gain du régulateur), le terme $\frac{\arctg(y)}{y}$ indique que la valeur de y est très grande, par conséquent $\arctg(y) = \frac{\pi}{2}$.

De l'équation (1.29), on déduit que

$$\frac{\pi/2}{y} = \frac{\theta}{\tau} \implies y = \frac{\pi \tau}{2\theta} \quad (1.31)$$

et comme $y = \theta \omega_c$, on obtient

$$\omega_c = \frac{\pi}{2\theta} \quad (1.32)$$

Comme $\omega_c^2 = \frac{K^2 G_0^2 - 1}{\tau^2}$, la valeur maximale du gain de régulateur, notée K_M , est donnée par

$$K_M = \frac{\sqrt{1 + \tau^2 \omega_c^2}}{G_0^2} = \frac{\sqrt{4\theta^2 + \tau^2 \pi^2}}{2G_0\theta} \quad (1.33)$$

Nous retrouvons ainsi, à l'aide de la méthode de Walton-Marshall, les résultats obtenus dans [31, 66] en utilisant le critère de stabilité de Nyquist.

La figure(1.3) montre les valeurs numériques de la borne inférieure K_m et de la borne supérieure K_M du gain du régulateur pour différentes valeurs de θ/τ pour $G_0 = 1$. On constate que la borne inférieure K_m est indépendante de θ/τ et la borne supérieure K_M décroît rapidement lorsque θ/τ augmente.

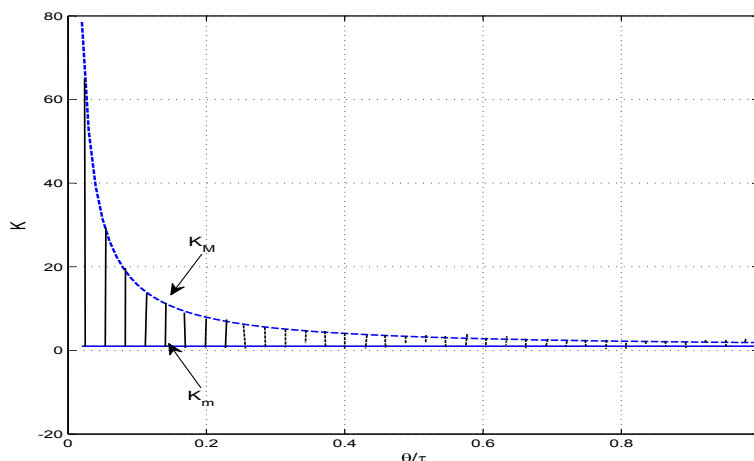


FIG. 1.3: K_M et K_m pour le système du 1^{er} ordre instable à retard cas $\theta/\tau < 1$

Pour illustrer l'influence du gain statique du système sur l'évolution de la borne supérieure K_M , la figure (1.4) montre l'évolution de K_M en fonction de θ/τ pour différentes valeurs de G_0 .

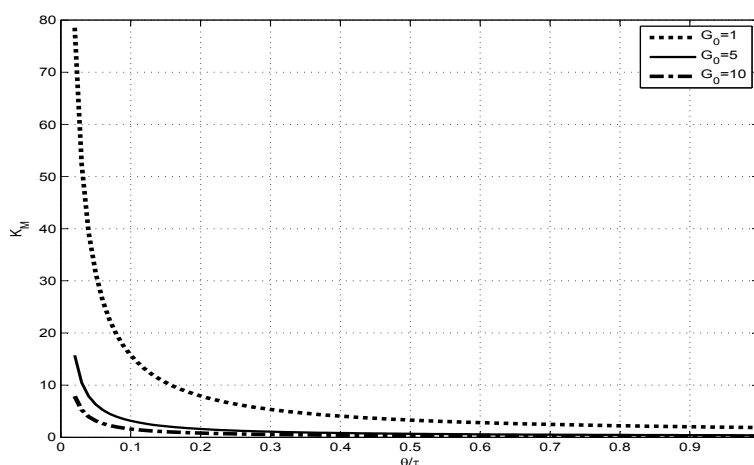


FIG. 1.4: K_M pour différentes valeurs du gain G_0 cas $\theta/\tau < 1$

On constate que lorsque le gain statique G_0 augmente, la valeur maximale du gain du régulateur diminue fortement et devient presque égale à $\frac{1}{G_0}$ pour toutes les valeurs de θ/τ .

Finalement, pour choisir la valeur du gain du régulateur, on doit tenir compte de la stabilité du système en boucle fermée et de la stabilité vis-à-vis des variations de θ/τ (marges de stabilité).

Par conséquent, la valeur du gain K du régulateur proportionnel stabilisant doit être comprise entre K_m et K_M . Dans [31], les auteurs proposent de choisir la valeur du gain K égale à la valeur moyenne de K_m et de K_M .

$$K = \frac{1}{2}(K_m + K_M) \quad (1.34)$$

1.4.2 Stabilisation avec un contrôleur Proportionnel Dérivé (PD)

Afin d'assurer la stabilité d'un système du premier ordre instable avec retard lorsque $\theta/\tau < 2$, le contrôleur stabilisant doit être du type PD. Dans ce cas, la fonction de transfert de la boucle interne est donnée par

$$G_{IL}(s) = \frac{G_0 e^{-\theta s}}{\tau s - 1 + K G_0 (b s + 1) e^{-\theta s}} \quad (1.35)$$

L'équation caractéristique du système est, donc, donnée par

$$\delta(s, \theta) = \underbrace{\tau s - 1}_{D(s)} + \underbrace{K G_0 (b s + 1)}_{N(s)} e^{-\theta s} \quad (1.36)$$

La méthode de Walton-Marshall est de nouveau utilisée pour étudier les conditions de stabilité de la boucle interne, ainsi que, pour déterminer les paramètres K et b du contrôleur PD.

- $\delta(s, 0) = \tau s - 1 + K G_0 (b s + 1) = (\tau + K G_0 b)s + K G_0 - 1$. Le système possède une seule racine pour $\theta = 0$, $s = \frac{1 - K G_0}{\tau + K G_0 b}$. Alors, le système est stable pour $\theta = 0$ si et seulement si

$$K > \frac{1}{G_0} \quad (1.37)$$

- Selon la méthode de Walton-Marshall, lorsque $q = p = 0$, nous devons considérer le comportement de $W(\omega^2)$ pour de grandes valeurs de ω^2 . Nous avons

$$W(\omega^2) = \tau^2 \omega^2 + 1 - K^2 G_0^2 (b^2 \omega^2 + 1) \quad (1.38)$$

Pour de grandes valeurs de ω^2 , $W(\omega^2)$ devient

$$W(\omega^2) \approx (\tau^2 - K^2 G_0^2 b^2) \omega^2 \quad (1.39)$$

qui est positive pour les valeurs de $\tau > K G_0 b$.

- Puis en cherchant les racines réelles positives de $W(\omega^2) = 0$, nous retrouvons alors la seule racine de valeur $\omega_c^2 = (K^2 G_0^2 - 1)/(\tau^2 - K^2 G_0^2 b^2)$, cette racine est positive pour des valeurs de $K > 1/G_0$ et $\tau > K G_0 b$, i.e. $K = \sqrt{1 + \tau^2 \omega_c^2}/G_0 \sqrt{1 + b^2 \omega_c^2}$. La dérivée $W'(\omega_c^2) = \tau^2 - K^2 G_0^2 b^2$ est positive parce que $(\tau > K G_0 b)$, par conséquent, la racine précédente est déstabilisante. La valeur de θ correspondante vérifie le système d'équations (1.40).

$$\cos(\theta \omega_c) = \frac{1 - \tau \omega_c^2}{K G_0 (1 + b^2 \omega_c^2)}, \quad \sin(\theta \omega_c) = \frac{(\tau + b) \omega_c}{K G_0 (1 + b^2 \omega_c^2)} \quad (1.40)$$

qui est égale

$$\tan(\theta \omega_c) = \frac{(\tau + b) \omega_c}{1 - \tau b \omega_c^2} \quad (1.41)$$

On pose de nouveau $y = \tau \omega_c$ et $\hat{b} = \frac{b}{\tau}$, l'équation (1.41) peut être réécrite sous la forme

$$\frac{\theta}{\tau} = \frac{1}{y} \arctg \left(\frac{y(1 + \hat{b})}{1 - \hat{b} y^2} \right) \quad (1.42)$$

et le gain K devient

$$K = \frac{\sqrt{1 + y^2}}{G_0 \sqrt{1 + \hat{b}^2 y^2}} = K_M \quad (1.43)$$

Les équations (1.42) et (1.43) sont non-linéaires, il est donc très difficile de trouver une relation directe entre les paramètres K_M et b du contrôleur PD et le retard θ comme dans le cas où le contrôleur stabilisant est de type proportionnel. Cependant, les interpolations de $K_M G_0$ et de $\hat{b}$ basées sur différentes valeurs de θ/τ pour $\theta/\tau < 2$ peuvent être trouvées, elles sont données par

$$K_M G_0 = 1.631 \left(\frac{\theta}{\tau} \right)^{-0.9549} \quad (1.44)$$

$$\frac{b}{\tau} = 0.0038 + 0.1524 \left(\frac{\theta}{\tau} \right) + 0.347 \left(\frac{\theta}{\tau} \right)^2 - 0.088 \left(\frac{\theta}{\tau} \right)^3 \quad (1.45)$$

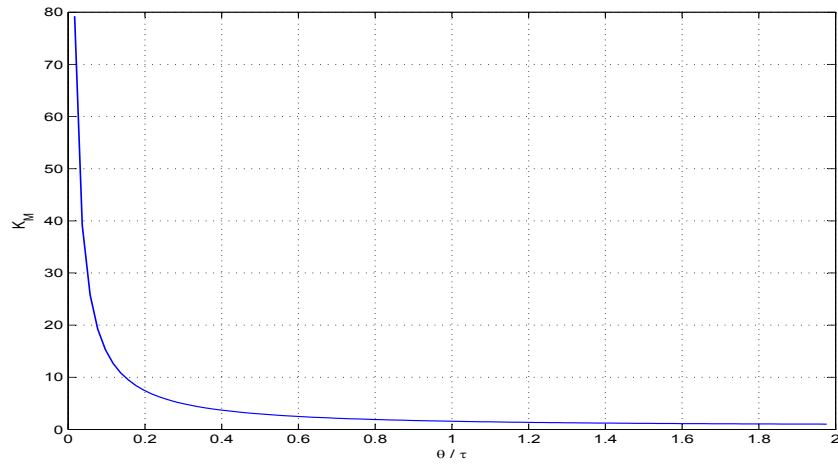


FIG. 1.5: K_M pour système du 1^{er} ordre instable à retard cas $\frac{\theta}{\tau} < 2$

Les valeurs de K_M et $\hat{b}$ pour différentes valeurs de θ/τ ($\theta/\tau < 2$) sont données respectivement, par les figures (1.5) et (1.6).

En tenant compte des incertitudes sur le paramètre θ , le système du premier ordre instable est stabilisable, si et seulement si, [31]

$$\frac{\theta}{\tau} < \frac{\arctg\left(\sqrt{\frac{(K^2-1)\tau^2}{-K^2b^2+\tau^2}}\right) + \arctg\left(\frac{b}{\tau}\sqrt{\frac{(K^2-1)\tau^2}{-K^2b^2+\tau^2}}\right)}{\sqrt{\frac{(K^2-1)\tau^2}{-K^2b^2+\tau^2}}} \quad (1.46)$$

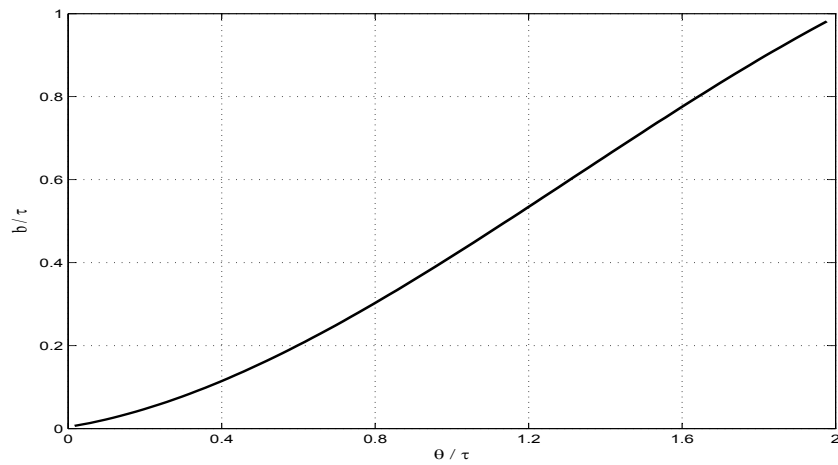


FIG. 1.6: Valeurs de $\hat{b}$ pour le système du 1^{er} ordre instable à retard ($\frac{\theta}{\tau} < 2$)

1.5 Conclusion

Le problème de la stabilisation des systèmes à retards a attiré beaucoup d'attention puisqu'ils sont couramment rencontrés en industrie. Dans ce chapitre, nous avons étudié la stabilisation des systèmes à retard, en particulier, les systèmes du premier ordre instables par des régulateurs P ou PD. Les paramètres de ces contrôleurs stabilisants sont déterminés en utilisant la méthode de Walton-Marshall pour les quasi-polynômes.

En premier lieu, nous avons rappelé la méthode de Walton-Marshall pour l'étude de la stabilité des quasi-polynômes. En effet, le principe de la méthode se base sur le fait qu'il y a une continuité des solutions de l'équation caractéristique par rapport au retard θ , la stabilité du système dépend essentiellement de ce dernier. En effet, un système peut être stable pour certaines valeurs de θ et peut devenir instable lors de l'évolution de θ et vice versa.

En second lieu, la méthode de Walton-Marshall est utilisée pour déterminer les paramètres du contrôleur qui conduisent à la stabilité d'un système du premier ordre instable pour une valeur de θ connue (fixe). Le type du contrôleur stabilisant dépend de la valeur du rapport θ/τ . En effet, le contrôleur stabilisant est de type P ou PI pour $\theta/\tau < 1$ et de type PD ou PID pour $\theta/\tau < 2$.

Dans le prochain chapitre, on s'intéresse à la synthèse de contrôleurs en utilisant la structure de commande par modèle interne en utilisant un modèle de référence fractionnaire. Le chapitre traitera aussi la simulation des contrôleurs fractionnaires.

Chapitre 2

Simulation des contrôleurs fractionnaires, commande par modèle interne

2.1 Introduction

La synthèse d'un asservissement consiste à concevoir et dimensionner un correcteur permettant de satisfaire les performances désirées contenues dans le cahier des charges. Ces performances peuvent être formulées de différentes manières, mais dans tous les cas, elles traduisent les performances relatives à la stabilité, à la précision et à la rapidité : Temps de réponse, dépassement, marges de stabilité (marge de gain ou marge de phase), .. etc. Les méthodes de synthèse des régulateurs sont très nombreuses et une classification rigoureuse n'est pas une tâche facile. Elles peuvent être classifiées en deux types selon la connaissance ou non du modèle du système à commander :

- Méthodes empiriques ne nécessitant pas la connaissance parfaite du modèle. La synthèse des régulateurs, en utilisant ces méthodes, est généralement basée sur des observations expérimentales de la réponse indicielle de la boucle ouverte ou de la boucle fermée. On peut citer la méthode de Ziegler-Nichols en boucle ouverte [46] et la méthode de Ziegler-Nichols en boucle fermée [28]. L'intérêt majeur de ces

méthodes réside de dans leurs simplicité.

- Méthodes analytiques qui reposent sur la connaissance d'un modèle précis du système à commander. Les performances réelles obtenues dépendent de la qualité du modèle et de son aptitude à représenter le mieux possible le procédé. Parmi ces méthodes, on peut citer la méthode de commande à modèle interne. Plus de détails sur cette méthode seront donnés dans la section suivante.

Dans ce chapitre, on présente quelques notions sur la simulation des contrôleurs fractionnaires en particulier la fonction idéale de Bode. En effet, lorsque cette fonction est imposée à la boucle ouverte, on obtient la caractéristique que la marge de phase de la boucle ouverte est constante sur une bande de fréquences limitée. De plus, la marge de phase dépend de l'ordre non entier α indépendamment du gain statique du système à commander, ce qui se traduit par un dépassement de la réponse indicielle de la boucle fermée indépendant du gain du système. Par la suite, on expose la méthode par modèle interne (Internal Model Control en anglais (IMC)) pour le cas des systèmes stables et instables. Cette méthode sera généralisée au cas fractionnaire en imposant la fonction de transfert en boucle fermée correspondante à la fonction idéale de Bode comme modèle de référence. Une analogie est faite entre le modèle de système du second ordre et le modèle de référence fractionnaire vu que leurs comportements sont semblables.

2.2 Fonction idéale de Bode

Dans ses travaux sur les amplificateurs en 1945 [9], Bode a proposé une forme idéale de la fonction de transfert de la boucle de commande, elle est donnée par

$$L = \left(\frac{\omega_c}{s} \right)^{\alpha+1} = \frac{1}{\tau_c s^{\alpha+1}} \quad (2.1)$$

Où $\omega_c = \frac{1}{\tau_c}$ est la fréquence de coupure et le paramètre $(\alpha + 1)$ représente la pente de la caractéristique idéale du gain.

Les caractéristiques fréquentielles de la fonction idéale de Bode sont obtenues en posant $s = j\omega$.

Le module et l'argument sont donnés par

$$\begin{cases} |L(j\omega)|_{dB} : & 20 \log \left| \frac{1}{\tau_c (j\omega)^{(\alpha+1)}} \right| = -20 (\alpha + 1) \log (\tau_c \omega) \\ \phi(rad) : & \arg \left(\frac{1}{(j\omega)^{(\alpha+1)}} \right) = -(\alpha + 1) \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (2.2)$$

La figure (2.1) représente le diagramme de Bode de $L(s)$ pour $\tau_c = 1$ et trois valeurs de α ($\alpha = 0, 0.5, 1$).

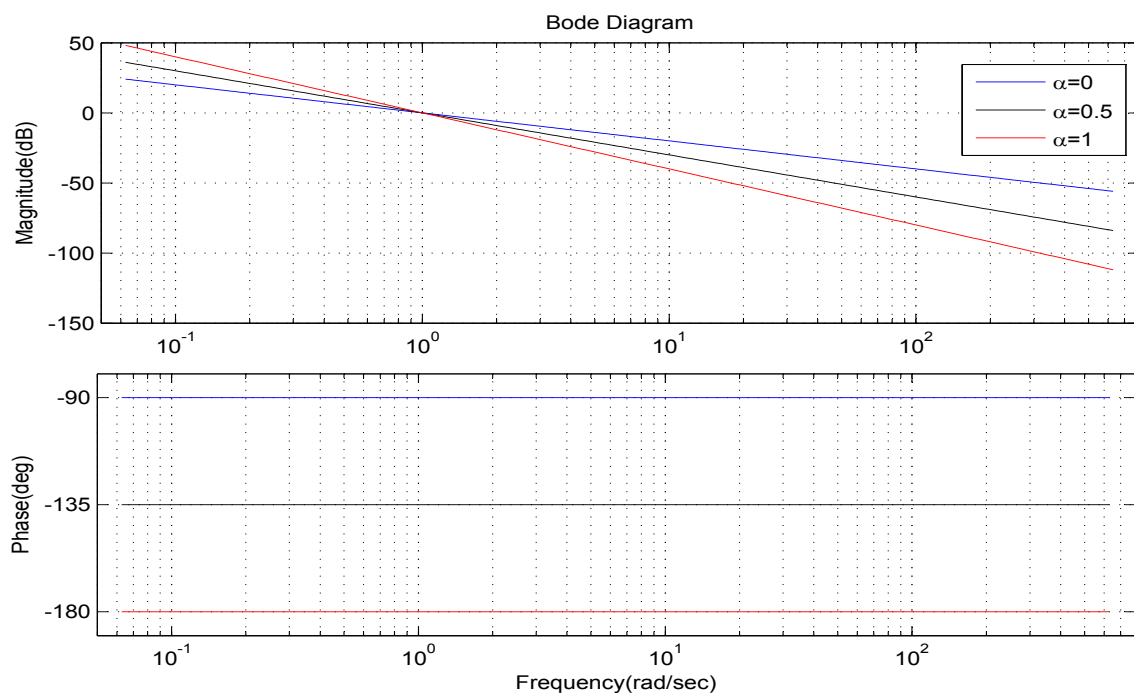


FIG. 2.1: Diagramme de Bode de $L(s)$ pour $\alpha = (0, 0.5, 1)$

Cette figure montre que la valeur de la phase est constante indépendamment de la valeur de ω_c , elle vaut $\phi = -90^\circ$ pour $\alpha = 0$, donc une marge de phase de 90° , ce qui donne un comportement équivalent à celui d'un système du premier ordre. Pour $\alpha = 1$, la marge de phase vaut $\phi_m = 0^\circ$, le système est à la limite de stabilité. Par contre, pour $\alpha = 0.5$, la phase vaut $\phi = -135^\circ$, ce qui correspond à une marge de phase $\phi_m = 45^\circ$.

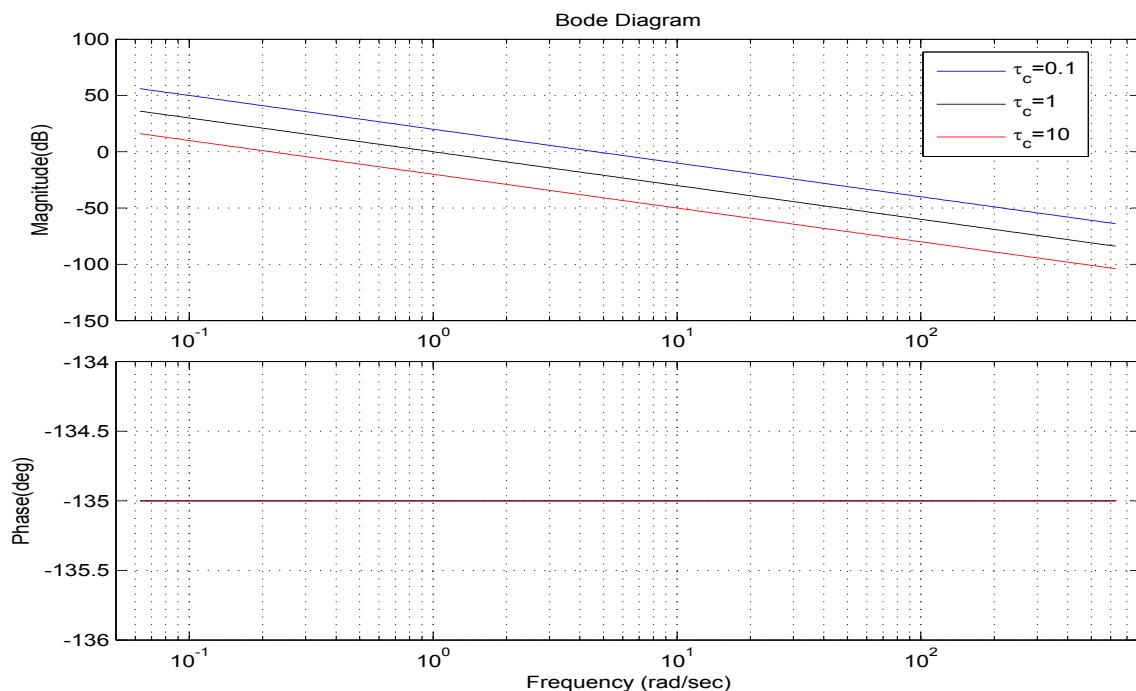


FIG. 2.2: Diagramme de Bode de la fonction idéale de Bode pour $\alpha = 0.5$ et différentes valeurs de τ_c

L'étude du comportement dynamique en boucle fermée d'un système bouclé dépend exclusivement de son comportement en boucle ouverte autour de la fréquence de coupure ω_c . La motivation d'utiliser un correcteur fractionnaire rentre dans ce contexte. L'idée est donc d'avoir une phase plate autour de la fréquence ω_c qui permet d'avoir un système en boucle fermée robuste aux variations du gain comme le montrent les figures (2.2) et (2.3). Cela se traduit par un dépassement de la réponse indicielle en boucle fermée constant pour n'importe quelle valeur du gain. Cette propriété est dite propriété d'iso-amortissement. Un tel comportement est assuré par la conception d'un contrôleur garantissant d'avoir la fonction idéale de Bode comme modèle de référence de la fonction de transfert du système en boucle ouverte. Pour obtenir une marge de phase comprise entre 30° et 60° (ce qui est souvent préconisé), il faut choisir la valeur de l'ordre non entier α compris entre 0.33 et 0.67.

Oustaloup a été le premier à avoir introduit un correcteur d'ordre fractionnaire garantissant une fonction de transfert, en boucle ouverte, d'un asservissement classique à retour unitaire égale à la fonction idéale de Bode [53]. Cette commande est connue sous le nom

Commande Robuste d'Ordre Non Entier (CRONE), plusieurs variantes de la commande CRONE ont par la suite été développées depuis son apparition [53].

La fonction de transfert du système bouclé est donnée par

$$f = \frac{1}{1 + \tau_c s^{\alpha+1}} \quad (2.3)$$

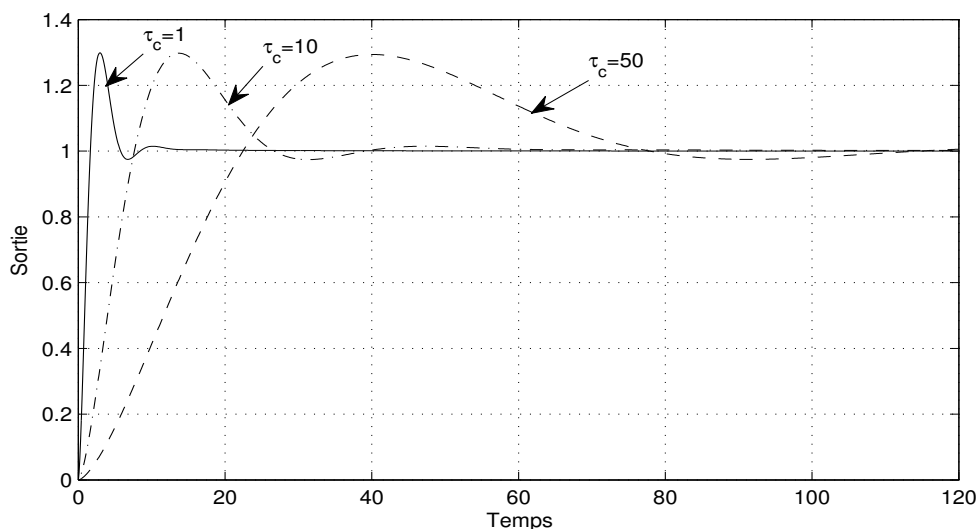


FIG. 2.3: Réponses indicielles de $f(s)$ pour différentes valeurs de τ_c

La réponse indicielle de $f(s)$ présente le même comportement qu'un système du second ordre sinusoïdal amorti. Elle sera utilisée tout au long de cette thèse pour dimensionner les contrôleurs fractionnaires.

2.3 Simulation et implémentation des régulateurs fractionnaires

La simulation et l'implémentation des contrôleurs fractionnaires repose essentiellement sur l'approximation de l'opérateur de dérivation ou d'intégration non entier. Deux approches peuvent être considérées. La première, consiste à remplacer directement l'opérateur de dérivation ou d'intégration non entier par une approximation numérique. Les méthodes utilisant cette approche sont de type mémoire longue. L'inconvénient avec cette

approximation est qu'elle nécessite un temps de calcul très important, c'est pour cette raison qu'elle ne sont pas utilisées dans l'implémentation des régulateurs fractionnaires. La deuxième approche est indirecte, dans ce cas, l'opérateur de dérivation ou d'intégration non entier, de dimension infinie, est remplacé par un modèle rationnel de dimension finie dans une bande de fréquences donnée en utilisant un ensemble de cellules élémentaires du premier ordre [53, 15]. On présente, dans ce qui suit, l'approximation développée par Oustaloup [53]. Cette dernière sera utilisée tout au long de cette thèse.

2.3.1 Intégrateur borné en fréquences

La fonction de transfert de l'intégrateur fractionnaire est la fonction irrationnelle

$$I^\alpha = \frac{1}{s^\alpha} \quad (2.4)$$

L'approximation d'Oustaloup repose sur l'approximation en temps continu de l'opérateur d'ordre fractionnaire de l'équation (2.4) par une fonction rationnelle en utilisant une distribution récursive de zéros et pôles d'ordre entier, répartis dans une bande de fréquences limitée.

L'approximation de l'opérateur $\frac{1}{s^\alpha}$ dans une bande de fréquences $[\omega_b, \omega_h]$ est donnée par la fonction de transfert irrationnelle :

$$I^\alpha = I_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^{-\alpha} \quad (2.5)$$

ω_b et ω_h étant les limites inférieure et supérieure de la bande de fréquences et I_0 est un coefficient de normalisation.

La figure (2.4) illustre le comportement fréquentiel d'un intégrateur généralisé (trait en pointillé) et de l'intégrateur borné en fréquences (trait fort). La figure montre que le comportement fréquentiel d'un intégrateur généralisé et de l'intégrateur borné en fréquences sont très proches dans la bande de fréquences d'approximation $[\omega_b, \omega_h]$. Par contre, ils deviennent complètement différents en dehors de cette bande puisque l'intégrateur borné en fréquences devient constant. Trigeassou et al. [64], dans le but d'améliorer cette approche,

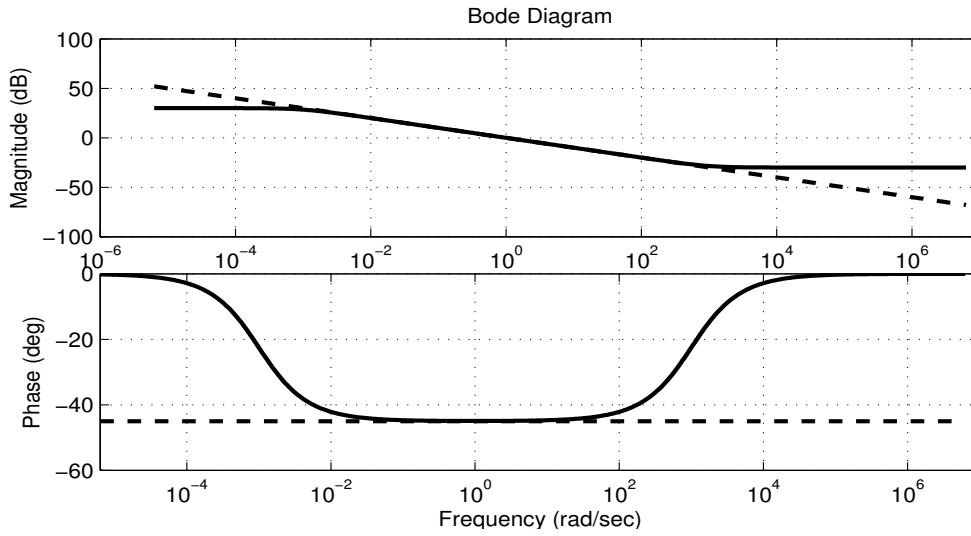


FIG. 2.4: Diagramme de Bode de l'intégrateur généralisé (trait en pointillés) et de l'intégrateur borné en fréquences (trait fort)

ont défini un intégrateur borné en fréquences donné par

$$I^\alpha = \frac{G_\alpha}{s} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^{1-\alpha} \quad (2.6)$$

Il correspond au diagramme de Bode de la figure (2.5). Le diagramme de Bode est composé de deux parties : la zone intermédiaire correspond à l'effet non entier caractérisé par l'ordre non entier α . Dans les autres zones, le comportement est celui de l'intégrateur d'ordre 1. C'est cette solution qui est utilisée lorsqu'il s'agit d'implémenter des régulateurs fractionnaires pour la commande des systèmes. En effet, l'aspect intégrateur entier en dehors des bornes d'approximation, en basses fréquences en particulier, garantit une erreur statique nulle.

2.3.2 Approximation d'Oustaloup

L'approximation d'Oustaloup d'un dérivateur généralisé (équation 2.7), dont l'action différentielle couvre tout l'espace des fréquences, repose sur une distribution récursive d'une infinité de zéros et de pôles réels négatifs [53, 44]. Dans le cadre d'une synthèse réaliste fondée sur un nombre fini de zéros et de pôles, il convient de réduire le comportement différentiel généralisé sur un intervalle fréquentiel borné, choisi selon les besoins de

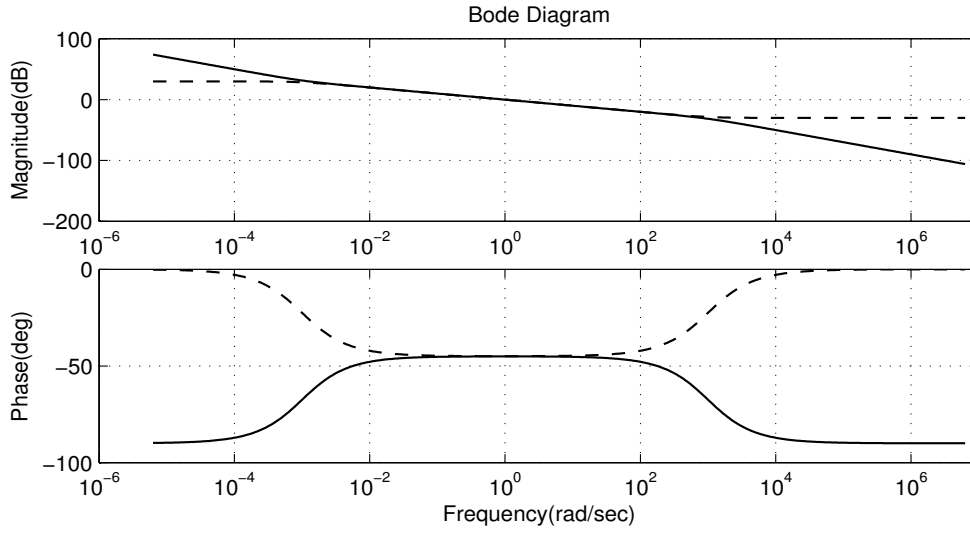


FIG. 2.5: Diagramme de Bode de l'intégrateur borné en fréquences en utilisant l'approximation d'Oustaloup (trait en pointillés) et Trigeassou (trait fort)

l'application. Le transfert résultant, dit, "*dérivateur généralisé borné en fréquences*", est ensuite approximé par une transmittance d'ordre entier.

$$D_\alpha = \left(\frac{s}{\omega_c} \right)^\alpha \quad (2.7)$$

ω_c est la pulsation de coupure et α est l'ordre de dérivation non entier .

Une troncature à la fois du coté des basses et des hautes fréquences consiste à limiter sur l'intervalle fréquentiel $[\omega_{min}, \omega_{max}]$, centré géométriquement sur ω_c , le comportement différentiel du transfert $\frac{s}{\omega_c}$. En fait, la troncature sera réellement effectuée, pour plus de précision, sur un intervalle de fréquences plus large $[\omega_b, \omega_h]$ tel que :

$$\omega_b \ll \omega_{min} \quad \text{et} \quad \omega_h \gg \omega_{max} \quad (2.8)$$

La fonction de transfert d'ordre non entier (2.7) du dérivateur borné en fréquences s'écrit alors :

$$D_{borné} = D_0 \prod_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_h}}{1 + \frac{s}{\omega_b}} \right) \quad (2.9)$$

avec

$$D_0 = \frac{\omega_c}{\omega_b} = \frac{\omega_h}{\omega_c} \quad (2.10)$$

pour assurer un gain unitaire à la fréquence ω_c .

Le dérivateur borné en fréquences ne peut pas être réalisé à cause de sa dimension infinie,

on l'approxime par un transfert de dimension finie en utilisant un nombre limité de cellules passe bandes. On obtient alors une approximation bornée en fréquences de dimension finie. L'approximation d'Oustaloup a la particularité que le gain D_0 ne dépend que de la bande de fréquences, dont les limites sont symétriques par rapport à $\omega = 1\text{rad/sec}$, et de l'ordre non entier α . On obtient finalement :

$$s^\alpha \approx D_{\text{borné}} \approx D_\alpha = D_0 \prod_{i=-N}^N \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_{z,i}}}{1 + \frac{s}{\omega_{p,i}}} \right) \quad (2.11)$$

N est le nombre de cellules nécessaires pour obtenir une bonne précision. Celle-ci est d'autant meilleure que N est grand. Les pôles $-\omega_{p,i}$ et zéros $-\omega_{z,i}$ du transfert entier sont déterminés par les relations récurrentes suivantes [44] :

$$\begin{cases} \omega_{z,-N} = \omega_{\min} \sqrt{\eta} \\ \omega_{p,i} = \delta \omega_{z,i} & i = -N, \dots, N \\ \omega_{z,i+1} = \eta \omega_{p,i} & i = -N, \dots, N-1 \end{cases} \quad (2.12)$$

Les paramètres de récurrence δ et η sont donnés par :

$$\delta = \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}} \right)^{\alpha/2N+1} \quad \text{et} \quad \eta = \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}} \right)^{(1-\alpha)/2N+1} \quad (2.13)$$

$\omega_{\min}$ et $\omega_{\max}$ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de la bande d'approximation.

Le coefficient d'ajustement du gain D_0 est donné par :

$$D_0 = \left(\frac{1}{\omega_{\min}} \right)^\alpha = (\omega_{\max})^\alpha \quad (2.14)$$

$D_\alpha(s)$, comme $D_{\text{borné}}(s)$, est juste propre et présente un gain constant en dehors de la bande de fréquences de validité de l'approximation.

2.3.3 Approximation d'un régulateur $PI^\alpha D^\mu$

La fonction de transfert d'un régulateur Proportionnel Intégral Dérivé (PID) sous la forme mixte est donnée par

$$C = K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right) \quad (2.15)$$

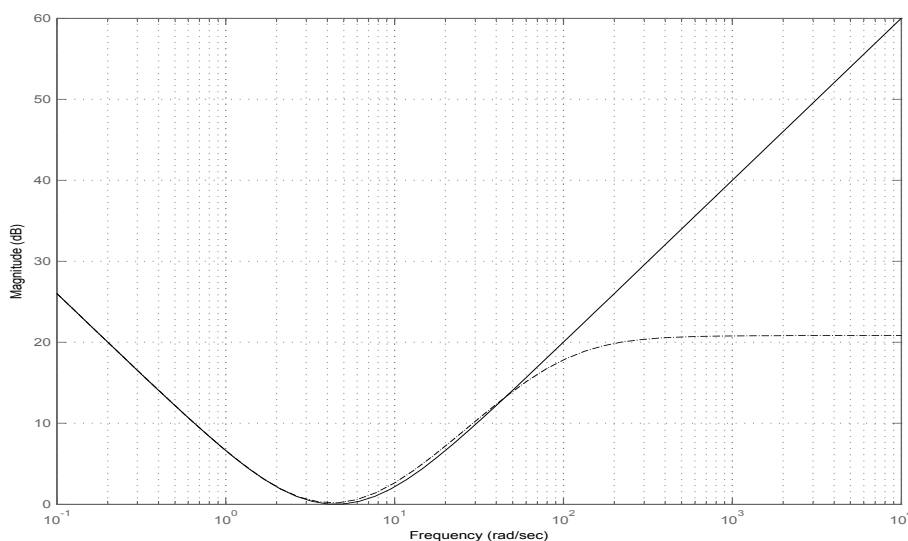


FIG. 2.6: Diagramme de Bode du contrôleur PID (trait fort) et de PID (action dérivée filtrée) (trait en pointillés)

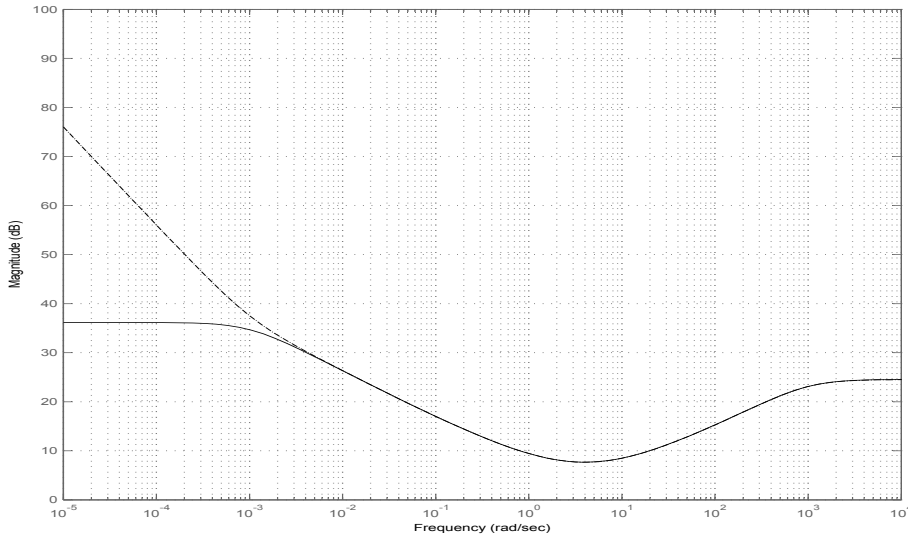
Ce correcteur présente, l'inconvénient de ne pas respecter le principe de causalité. Le terme $\tau_d s$ est souvent filtré afin de respecter la causalité et d'atténuer son effet aux hautes fréquences (à cause des bruits).

La figure (2.6) représente le diagramme de Bode de ce régulateur (trait fort). On voit sur le diagramme de Bode que le correcteur PID se comporte aux basses fréquences comme un intégrateur donc le système sera précis d'un point de vue statique (erreur statique nulle). Aux hautes fréquences, l'action dérivée augmente la sensibilité aux bruits, afin de limiter l'influence du bruit, il faut limiter le gain du régulateur en filtrant l'action dérivée. La fonction de transfert du régulateur PID devient alors :

$$C = K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \frac{\tau_d s}{1 + \frac{\tau_d s}{\beta}} \right) \quad (2.16)$$

Où β est un nombre entier dont la valeur est supérieure à 1. Dans [3],[69] et [41], les auteurs proposent de choisir β compris entre 8 et 16.

Le diagramme de Bode du contrôleur PID dont l'action dérivée est filtrée est donné dans la figure (2.6)(trait en pointillés). Podlubny [55] a proposé une généralisation du correcteur PID classique sous la forme $PI^\alpha D^\mu$, connu sous le nom de "PID-fractionnaire" comportant un intégrateur d'ordre α et un dérivateur d'ordre μ . L'expression analytique

FIG. 2.7: Diagramme de Bode de contrôleur $PI^\alpha D^\mu$

du PID-fractionnaire est donnée par

$$C = K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s^\alpha} + \tau_d s^\mu \right) \quad (2.17)$$

De l'équation (2.17), il faut noter que pour $\alpha = \mu = 1$, le correcteur PID-fractionnaire devient le correcteur PID classique. Ainsi, les correcteurs P, PI et PD sont tous des cas particuliers du correcteur PID-fractionnaire. La simulation ou l'implémentation du contrôleur $PI^\alpha D^\mu$ peut être effectuée en utilisant l'approximation d'Oustaloup. Néanmoins, si $I^\alpha(s)$ est approximé directement en utilisant cette approximation, on perd les performances de l'intégrateur, en particulier, en basses fréquences. Pour garder l'aspect d'un intégrateur, on utilise l'approximation proposée par Trigeassau et utilisée dans [8] ($I^\alpha(s) = \frac{1}{s} \mathcal{O}(s^{1-\alpha})$) dont le comportement à l'extérieur de l'intervalle fréquentiel est un comportement d'un intégrateur d'ordre 1 ($\mathcal{O}(s^{1-\alpha})$ est l'approximation d'Oustaloup du dérivateur non entier d'ordre $(1 - \alpha)$). Pour le dérivateur, il est plus judicieux d'utiliser l'approximation d'Oustaloup directement car celle-ci garde l'aspect d'un dérivateur filtré en hautes fréquences et par conséquent, on fait l'économie de ne pas utiliser un filtre passe bas.

Le diagramme de Bode (module) de cette fonction de transfert est donné par la figure (2.7).

2.4 Méthode de commande par modèle interne

La méthode de commande par modèle interne a acquis un intérêt croissant ces dernières années, en raison de la robustesse inhérente à sa structure mais surtout de la simplicité de synthèse qu'elle offre [47, 57]. La simplicité de cette méthode réside dans le fait qu'il n'existe qu'un seul paramètre à régler, directement, lié à la constante de temps en boucle fermée définie par l'utilisateur. La méthode par modèle interne regroupe les avantages de la boucle ouverte qui se présentent par la facilité de la synthèse du contrôleur et la possibilité de tenir compte de la robustesse et de pouvoir traiter les procédés avec retard, et les avantages de la boucle fermée qui sont la possibilité d'obtenir une erreur statique nulle en régime permanent à des échelons de consigne en présence de perturbations ainsi que des erreurs de modélisation du procédé à contrôler.

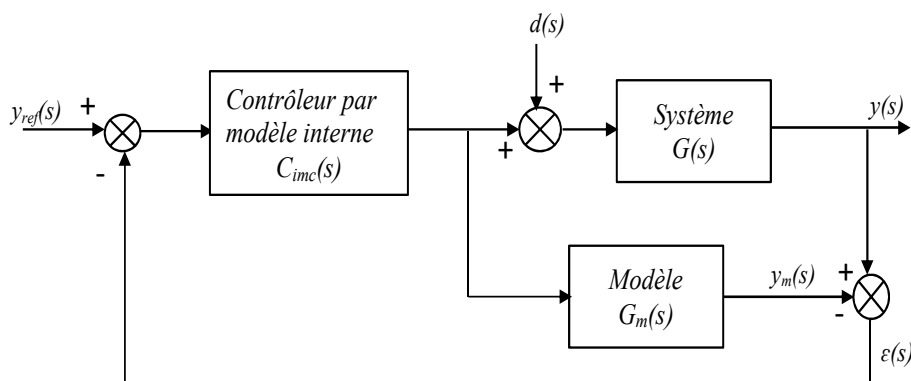


FIG. 2.8: Structure de commande par modèle interne

La structure de commande par modèle interne est celle de la figure (2.8). Dans ce schéma, le système à commander, représenté par la fonction de transfert $G(s)$, génère la grandeur à contrôler $y(s)$ en réponse à la grandeur de commande $u(s)$ calculée par le contrôleur de fonction de transfert $C_{imc}(s)$. Cette commande est également injectée au modèle du système, dont la fonction de transfert est $G_m(s)$, afin de générer la grandeur $y_m(s)$. La fonction de transfert $G_m(s)$ du modèle, correspondant à une image approchée de la fonction de transfert $G(s)$ du système, peut être obtenue par identification ou toute autre méthode d'approximation. De manière générale, $G(s)$ est très complexe pour être

utilisée lors de la synthèse du contrôleur ; on lui préfère donc son modèle $G_m(s)$.

Dans cette structure de commande, contrairement à la structure classique, ce n'est plus l'erreur entre la grandeur à commander $y(s)$ et l'entrée de référence $y_{ref}(s)$ qui est utilisée par le régulateur $C_{imc}(s)$ pour calculer la loi de commande mais plutôt la grandeur $\varepsilon(s) = y(s) - y_m(s)$ qui représente l'erreur d'approximation entre le système à commander et son modèle $G_m(s)$. Ainsi,

- Lorsque le système n'est pas affecté par les perturbations ($d(s) = 0$) et que la sortie du modèle $G_m(s)$ représente parfaitement le système ($\varepsilon(s) = 0$), le contrôleur fonctionne en boucle ouverte.
- Lorsque $y(s)$ est différent de $y_m(s)$, à cause du changement de la grandeur de référence $y_{ref}(s)$, ou à cause de la présence d'une perturbation externe $d(s)$ qui affecte le système, ou bien encore à cause des incertitudes de modélisation ($G_m(s) \neq G(s)$), dans ce cas, le contrôleur $C_{imc}(s)$ fonctionne en boucle fermée permettant ainsi de réajuster la valeur de la grandeur de commande $u(s)$ afin de ramener la grandeur $y(s)$ égale à la grandeur de référence $y_{ref}(s)$.

D'après le schéma de commande de la figure (2.8), la sortie $y(s)$ et la commande $u(s)$ s'expriment en fonction de la référence $y_{ref}(s)$ et de la perturbation $d(s)$ par

$$y = \frac{GC_{imc}}{1 + C_{imc}(G - G_m)} y_{ref} + \frac{G(1 - C_{imc}G)}{1 + C_{imc}(G - G_m)} d \quad (2.18)$$

$$u = \frac{C_{imc}}{1 + C_{imc}(G - G_m)} y_{ref} + \frac{-C_{imc}G}{1 + C_{imc}(G - G_m)} d \quad (2.19)$$

Dans le cas où le modèle représente parfaitement le système, i.e. $G_m(s) = G(s)$, les équations (2.18) et (2.19) deviennent

$$y = G_m C_{imc} y_{ref} + G_m (1 - C_{imc} G_m) d \quad (2.20)$$

$$u = C_{imc} y_{ref} - G_m C_{imc} d \quad (2.21)$$

L'équation (2.20) montre que le système peut être vu comme fonctionnant en boucle

ouverte. Par conséquent, la stabilité du système de commande dépend de la stabilité du système à commander et du contrôleur [23].

Théorème 1 *Si $G(s)$ est stable et si le modèle est parfait ($G_m(s) = G(s)$) alors le système contrôlé par la structure à modèle interne est stable si et seulement si le régulateur $C_{imc}(s)$ est stable.*

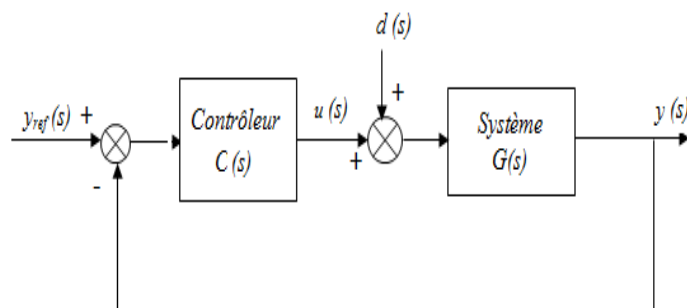


FIG. 2.9: Structure de commande à retour unitaire

Dans la structure de commande classique représentée par la figure (2.9), la sortie $y(s)$ et la grandeur de commande $u(s)$ s'expriment en fonction de $y_{ref}(s)$ et de $d(s)$ par

$$y = \frac{GC}{1 + GC}y_{ref} + \frac{G}{1 + GC}d \quad (2.22)$$

$$u = \frac{C}{1 + GC}y_{ref} + \frac{-CG}{1 + GC}d \quad (2.23)$$

$C(s)$ représente la fonction de transfert du contrôleur classique.

Ces équations permettent d'établir le lien entre la fonction de transfert du régulateur utilisé dans la structure de commande à modèle interne $C_{imc}(s)$ et celle du régulateur utilisé dans la structure de commande à retour unitaire $C(s)$, elles sont données par

$$C = \frac{C_{imc}}{1 - G_m C_{imc}} \quad (2.24)$$

$$C_{imc} = \frac{C}{1 + G_m C} \quad (2.25)$$

Par conséquent, les performances qui peuvent être obtenues en utilisant un contrôleur à modèle interne ne sont, a priori, ni moins bonnes, ni meilleures que celles obtenues

en utilisant un contrôleur classique, puisque ces deux structures sont équivalentes. C'est pourquoi, nous avons choisi d'utiliser la structure de commande classique pour contrôler le système en raison de sa simplicité de réalisation et d'utiliser la commande par modèle interne pour la synthèse du contrôleur en raison de la simplicité de la méthode de synthèse qu'elle permet.

2.4.1 Synthèse du régulateur à modèle interne pour les systèmes stables

Dans son principe, la commande par modèle interne repose sur une conception en boucle ouverte, pour ce faire, on suppose que $G_m(s) = G(s)$. Dans ce cas, le comportement désiré sera déterminé par la transmittance :

$$\frac{y}{y_{ref}} = C_{imc} G_m \quad (2.26)$$

Remarque 1 : *Il est clair, vu que la structure de commande à modèle interne se comporte comme fonctionnant en boucle ouverte, que le processus doit être naturellement stable. Dans le cas contraire, la commande par modèle interne n'est envisageable qu'en ayant préalablement stabilisé le système par une boucle de régulation classique.*

Pour les systèmes stables, la conception du contrôleur $C_{imc}(s)$ se fait en deux étapes :[23, 47]

Etape 1 : La fonction de transfert du modèle est factorisée en deux parties ; inversible et non inversible, selon :

$$G_m = G_m^+ G_m^- \quad (2.27)$$

La partie non inversible $G_m^+(s)$ contient tous les zéros à partie réelle positive et éventuellement le retard pur. De plus, le gain de ce transfert doit être égal à 1. La partie inversible $G_m^-(s)$ contient le reste de la fonction de transfert. C'est cette fonction de transfert qui est utilisée pour la synthèse du contrôleur.

Etape 2 : La fonction de transfert du contrôleur est donnée par

$$C_{imc} = \frac{1}{G_m} f \quad (2.28)$$

Où $f(s)$ représente la fonction de transfert à imposer au système en boucle fermée. Comme nous l'avons déjà mentionné, à cause des incertitudes de modélisation et pour la simplicité de la synthèse, le filtre $f(s)$ est généralement, choisi égal à

$$f = \frac{1}{(1 + \tau_c s)^r} \quad (2.29)$$

La nécessité d'avoir, à l'équilibre, une sortie qui rejoint la valeur de la consigne, impose à la fonction de transfert désirée $f(s)$ un gain statique unitaire. Ainsi, il n'y a qu'un seul paramètre de synthèse que le concepteur doit choisir, la constante de temps τ_c qui impose la durée du régime transitoire. r est un nombre entier à choisir de façon à ce que le contrôleur $C_{imc}(s)$ soit propre.

Remarque 2 *La structure de commande par modèle interne standard (figure 2.8) ne peut pas être utilisée directement pour la commande d'un système instable ou un système avec intégrateur. Pour de tels processus, il est nécessaire d'utiliser la structure de commande à retour unitaire standard, tout en tenant compte de la stabilité interne du système de commande.*

Rappelons que la stabilité interne d'un système en boucle fermée est théoriquement définie comme étant la stabilité de toutes les fonctions de transfert reliant les entrées du système à leurs sorties.

2.4.2 Synthèse du régulateur par modèle interne pour les systèmes instables

La méthode de synthèse utilisant la commande par modèle interne doit être modifiée pour les systèmes instables. L'idée est d'utiliser une fonction de transfert $f(s)$, à imposer à la boucle fermée, plus complexe afin de satisfaire les conditions de stabilité interne du

système de commande.

Des équations (2.20) et (2.21), on constate que pour satisfaire les conditions de stabilité interne il faut que :

- $C_{imc}(s)$ soit stable.
- $G_m(s)C_{imc}(s)$ soit stable.
- $G_m(s)(1 - G_m(s)C_{imc}(s))$ soit également stable.

Pour satisfaire ces conditions, si le modèle $G_m(s)$ possède n pôles instables, $p_{ins_1}, p_{ins_2}, \dots, p_{ins_n}$, alors, le contrôleur $C_{imc}(s)$ doit avoir des zéros aux points $p_{ins_1}, p_{ins_2}, \dots, p_{ins_n}$. De plus, $(1 - G_m(s)C_{imc}(s))$ doit avoir des zéros aux points $p_{ins_1}, p_{ins_2}, \dots, p_{ins_n}$ afin de compenser ces pôles instables.

Le contrôleur $C_{imc}(s)$ est calculé par l'équation (2.28), donc les pôles instables du modèle $G_m(s)$ deviennent les zéros du contrôleur $C_{imc}(s)$, la première condition est de fait satisfaite ainsi que la deuxième condition. La troisième condition peut être remplie en modifiant l'expression du modèle de référence $f(s)$. Morari [47] propose d'utiliser l'expression

$$f = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i s^i + 1}{(1 + \tau_c s)^r} \quad (2.30)$$

Les paramètres λ_i sont déterminés de sorte que les zéros de $1 - G_m(s)C_{imc}(s)$ compensent les pôles de $G_m(s)$. Ils sont calculés par :

$$1 - G C_{imc} \Big|_{s=p_{ins_1}, p_{ins_2}, \dots, p_{ins_n}} = 0 \quad (2.31)$$

Pour illustrer cette méthode de synthèse basée sur le principe de la commande par modèle interne pour les systèmes instables, soit à contrôler un système dont la fonction de transfert est donnée par

$$G(s) = \frac{G_0(1 + 0.02s)}{(1 + 0.05s)(\tau s - 1)} \quad (2.32)$$

dont le modèle est

$$G_m = \frac{G_0}{\tau s - 1} \quad (2.33)$$

En utilisant l'équation (2.28), le contrôleur $C_{imc}(s)$ est donné par

$$C_{imc} = \frac{(\tau s - 1)(1 + \lambda s)}{G_0(1 + \tau_c s)^2} \quad (2.34)$$

Notant que le filtre $f(s)$ est d'ordre 2 pour rendre le contrôleur $C_{imc}(s)$ propre. λ est un paramètre à calculer pour garantir que $(1 - G_m(s)C_{imc}(s))$ élimine le pôle à partie réelle positive de $G_m(s)$, à savoir

$$1 - G_m C_{imc} \Big|_{s=\frac{1}{\tau}} = \left(1 - \frac{1 + \lambda s}{(1 + \tau_c s)^2}\right) \Big|_{s=\frac{1}{\tau}} = 0 \quad (2.35)$$

la valeur de λ permettant de vérifier cette condition est

$$\lambda = \tau_c \left(\frac{\tau_c}{\tau} + 2 \right) \quad (2.36)$$

Le contrôleur $C(s)$ équivalent est donné par

$$C = \frac{(\tau s - 1)(\lambda s + 1)}{G_0 ((1 + \tau_c s)^2 - (\lambda s + 1))} \quad (2.37)$$

En substituant la valeur de λ dans le dénominateur de l'équation (2.37), $C(s)$ devient

$$C = \frac{(\tau s - 1)(\lambda s + 1)}{\frac{G_0 \tau_c^2}{\tau} s(\tau s - 1)} \quad (2.38)$$

Le pôle instable est ainsi compensé grâce à la valeur de λ donnée par l'équation (2.36).

Finalement, le contrôleur $C(s)$ est donné par

$$C = \frac{\lambda \tau}{G_0 \tau_c^2} \left[1 + \frac{1}{\lambda s} \right] \quad (2.39)$$

La figure (2.10) montre la réponse indicielle du système en boucle fermée pour $G_0 = 1$ et $\tau = 1$, la constante du système de référence $\tau_c = 1$. On constate qu'elle présente un dépassement important (puisque $\lambda > \tau_c$, ce qui est toujours le cas pour ce système quelque soit la valeur de τ_c choisie, voir équation (2.36)). Pour limiter les dépassements sur le changement de consigne, le schéma le plus général d'une boucle de régulation prévoit la présence d'un bloc $f_p(s)$ supplémentaire appelé pré-filtre et placé sur l'entrée de référence comme le montre la figure (2.11). Cela donne un degré de liberté supplémentaire pour le transfert $y(s)/y_{ref}(s)$. $f_p(s)$ est souvent un filtre passe-bas du premier ordre, pour cet exemple $f_p(s) = \frac{1}{\lambda s + 1}$.

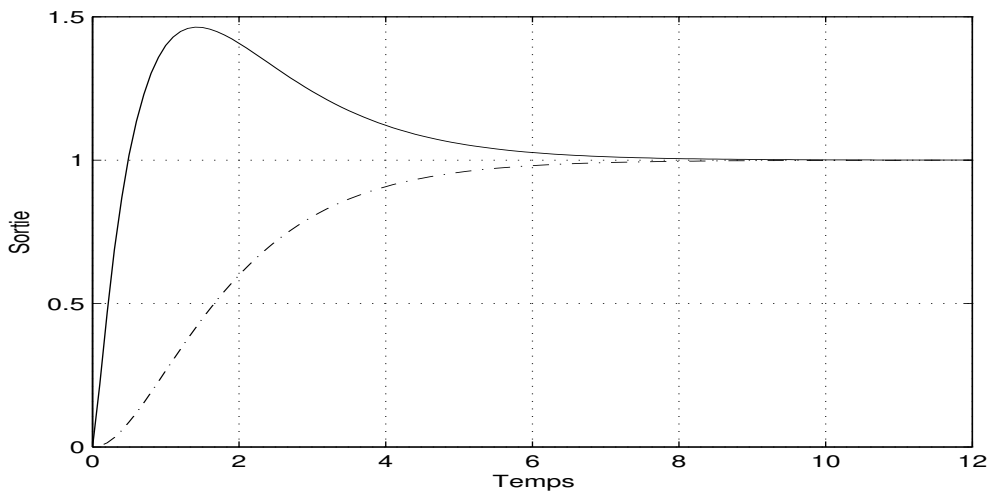


FIG. 2.10: Réponse indicielle de l'exemple (2.32) avec pré-filtre (trait en pointillés) et sans pré-filtre (trait fort)

La réponse indicielle en boucle fermée est également illustrée sur la figure (2.10) sans pré-filtre (trait fort) et avec pré-filtre (trait en pointillés).

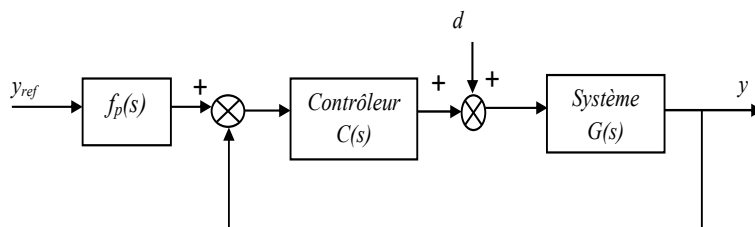


FIG. 2.11: Schéma de commande avec pré-filtre

Si cette procédure peut être utilisée pour commander des systèmes instables, elle ne fonctionne pas dans le cas où le système possède un retard pur. Pour expliquer pourquoi, considérons le système instable à retard donné par l'équation (2.40).

$$G_m = \frac{G_0}{\tau s - 1} e^{-\theta s} \quad (2.40)$$

En utilisant la procédure précédente, le contrôleur $C_{imc}(s)$ est donné par l'équation (2.34). Pour rendre $G_m(s)(1 - G_m(s)C_{imc}(s))$ stable, la condition suivante doit être satisfaite.

$$\left(1 - \frac{(1 + \lambda s)e^{-\theta s}}{(1 + \tau_c s)^2} \right) \Big|_{s=\frac{1}{\tau}} = 0 \quad (2.41)$$

La valeur de λ obtenue est donnée par

$$\lambda = \tau [(\tau_c/\tau + 1)^2 e^{\theta/\tau} - 1] \quad (2.42)$$

La fonction de transfert du contrôleur équivalent $C(s)$ est alors donnée par

$$C = \frac{(\tau s - 1)(\lambda s + 1)}{G_0 [(1 + \tau_c s)^2 - (\lambda s + 1)e^{-\theta s}]} \quad (2.43)$$

Cette équation montre que le pôle instable ne peut pas être simplifié directement comme dans l'équation (2.39). Ainsi, le contrôleur ne peut pas être implémenté en pratique. Lorsque le retard n'est pas très important, en utilisant quelques approximations du terme $e^{-\theta s}$, ce problème peut être contourné.

- ◆ Pour implémenter le contrôleur $C(s)$ Lee et al. [36] proposent d'utiliser le développement en séries de Maclaurin pour l'approximer par un régulateur PID standard. Pour ce faire, ils approximent d'abord le terme $e^{-\theta s}$ par le développement en séries de Taylor ou par l'approximation de Padé.

En remplaçant $e^{-\theta s}$ par son approximation dans l'équation (2.43), le contrôleur $C(s)$ devient

$$C = \frac{(\tau s - 1)(\lambda s + 1)}{G_0 [(\tau_c^2 + \lambda\theta)s^2 + (2\tau_c - \lambda + \theta)s]} \quad (2.44)$$

qui peut être mis sous la forme

$$C = \frac{1}{s} M \quad (2.45)$$

$M(s)$ est ensuite développé en séries de Maclaurin d'ordre 3, comme suit

$$C = \frac{1}{s} \left[M(0) + M'(0)s + \frac{M''(0)}{2}s^2 \right] \quad (2.46)$$

Les deux premiers termes du développement en séries de Maclaurin forment un contrôleur PI. Si les trois premiers termes sont considérés, on obtient un contrôleur qui peut être mis sous la forme standard d'un PID, comme suit

$$C = K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right) \quad (2.47)$$

Les paramètres K_p , τ_i et τ_d sont donnés par

$$K_p = M'(0), \quad \tau_i = \frac{M'(0)}{M(0)}, \quad \tau_d = \frac{M''(0)}{2 M'(0)} \quad (2.48)$$

- ◆ Une autre approche, permettant de mettre le contrôleur $C(s)$ de l'équation (2.43) sous la forme d'un PID, consiste à calculer les paramètres K_p , τ_i et τ_d en utilisant les relations (2.49 à 2.51) [31].

$$\lim_{s \rightarrow 0} (sC(s)) = \frac{K_p}{\tau_i} \quad (2.49)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{s} C(s) \right) = K_p \tau_d \quad (2.50)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{d}{ds} (sC(s)) \right) = K_p \quad (2.51)$$

- ◆ Une autre approche plus simple consiste à approximer le terme $e^{-\theta s}$ en utilisant soit le développement en séries de Taylor soit l'approximation de Padé, directement dans la fonction du transfert du modèle du système à commander. En effet, si le retard est approximé par l'approximation de Padé d'ordre 1, le modèle du système devient

$$G_m = \frac{G_0(1 - \frac{\theta}{2}s)}{(\tau s - 1)(1 + \frac{\theta}{2}s)} \quad (2.52)$$

Le contrôleur $C_{imc}(s)$ prend la forme

$$C_{imc} = \frac{(\tau s - 1)(1 + \frac{\theta}{2}s)(\lambda s + 1)}{G_0(1 + \tau_c s)^3} \quad (2.53)$$

λ est calculée par l'équation (2.31), on obtient

$$\lambda = \tau \left(\frac{(\frac{\tau_c}{\tau} + 1)^3}{1 - \frac{\theta}{2\tau}} - 1 \right) \quad (2.54)$$

Le contrôleur $C(s)$ est dans ce cas égal à

$$C = \frac{(1 + \frac{\theta}{2}s)(1 + \lambda s)}{G_0 s (\frac{\tau_c^3 s}{\tau} + (\lambda - 3\tau_c - \frac{\theta}{2}))} \quad (2.55)$$

qui peut être mis sous la forme d'un PID, les paramètres K_p , τ_i et τ_d peuvent être calculés en utilisant les relations (2.49) à (2.51); on trouve alors

$$K_p = \frac{\frac{\theta}{2} + \lambda}{G_0 (1 - 3\tau_c - \frac{\theta}{2})} - \frac{\frac{\tau_c^3}{\tau}}{G_0 (1 - 3\tau_c - \frac{\theta}{2})^2}, \tau_i = \frac{\theta}{2} + \lambda - \frac{\frac{\tau_c^3}{\tau}}{(1 - 3\tau_c - \frac{\theta}{2})}, \tau_d = 0 \quad (2.56)$$

Il est évident que cette procédure ne fonctionne que pour les systèmes avec un petit retard. Pour les procédés instables avec un grand retard, on doit utiliser une autre approche qui consiste à ajouter, dans la structure de commande, un contrôleur dont le rôle consiste à stabiliser d'abord le système avant de synthétiser le contrôleur permettant de faire suivre au système une consigne donnée. C'est la commande à plusieurs degrés de liberté que nous développerons dans le prochain chapitre.

2.5 Contrôleur IMC-FOF-PID

Les travaux d'Oustaloup avec son fameux régulateur CRONE, ont popularisé la commande non entière. Dans la commande CRONE, la fonction de transfert de la boucle fermée est $f(s) = 1/(1 + \tau_c s^{\alpha+1})$. Cette forme particulière a une propriété très importante car sa marge de phase reste constante indépendamment du gain. Ainsi, sa réponse indicielle présente la propriété d'iso-amortissement. Bettayeb et al. [7, 8] proposent d'utiliser la fonction de transfert $f(s)$ comme modèle de référence lors de la synthèse du contrôleur IMC fractionnaire.

Dans ce cas, le contrôleur de la commande par modèle interne calculé, en utilisant l'équation (2.28), est

$$C_{imc} = \frac{1}{G_m^-} \frac{1}{1 + \tau_c s^{\alpha+1}} \quad (2.57)$$

Le contrôleur $C(s)$ équivalent est donné par

$$C = \frac{1}{G_m^- [1 + \tau_c s^{\alpha+1} - G_m^+]} \quad (2.58)$$

Le contrôleur $C(s)$ peut être mis sous la forme d'un filtre fractionnaire $F(s)$ en série avec un régulateur PID standard.

$$C = F K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right) \quad (2.59)$$

Nous présentons dans ce qui suit la procédure pour obtenir la forme de $C(s)$ pour un modèle d'un système non retardé et retardé.

Le modèle du système entier non retardé est donné par

$$G_m = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2.60)$$

On suppose que $N(s)$ et $D(s)$ ne possèdent pas de racines à partie réelle positive. En plus, $G_m(s)$ est supposé strictement propre. Dans ce cas, en utilisant l'équation (2.57), on aura

$$C_{imc} = \frac{D(s)}{N(s)} \frac{1}{1 + \tau_c s^{\alpha+1}} \quad (2.61)$$

et le contrôleur standard $C(s)$ est

$$C = \frac{D(s)}{N(s) \tau_c s^{\alpha+1}} = \frac{1}{s^\alpha} \frac{D(s)}{\tau_c s N(s)} \quad (2.62)$$

Cette équation montre que $C(s)$ est composé de deux fonctions de transfert : L'intégrateur fractionnaire $\frac{1}{s^\alpha}$ (qui caractérise l'aspect fractionnaire du contrôleur) et la partie entière $\frac{D(s)}{\tau_c s N(s)}$ qui peut être factorisée et mise sous la forme d'un PID usuel.

Considérons maintenant le modèle d'un système à retard donné par l'équation

$$G_m = \frac{N(s)e^{-\theta s}}{D(s)} \quad (2.63)$$

Le contrôleur IMC est donné par

$$C_{imc} = \frac{D(s)}{N(s)} \frac{1}{1 + \tau_c s^{\alpha+1}} \quad (2.64)$$

Le contrôleur équivalent $C(s)$ est donné par

$$C = \frac{D(s)}{N(s) (1 + \tau_c s^{\alpha+1} - e^{-\theta s})} \quad (2.65)$$

Deux cas se présentent

1. $\theta/\tau_c > 1$, on utilise le prédictor de Smith pour l'implémentation du contrôleur $C(s)$.
 2. $\theta/\tau_c < 1$, on utilise les approches de la section précédente afin de mettre $C(s)$ sous la forme d'un filtre fractionnaire en série avec un régulateur PID standard.
- **Modèle d'un système de premier ordre à retard** : La fonction de transfert du modèle est donnée par

$$G_m = \frac{G_0 e^{-\theta s}}{1 + \tau s} \quad (2.66)$$

Si le terme $e^{-\theta s}$ est approximé en utilisant l'approximation de Taylor d'ordre 1, le contrôleur $C(s)$ obtenu peut être mis sous la forme

$$C = \frac{1}{1 + \frac{\tau_c}{\theta} s^\alpha} \frac{\tau}{G_0 \theta} \left(1 + \frac{1}{\tau s} \right) \quad (2.67)$$

- **Modèle d'un système du second ordre à retard [8]** : La fonction de transfert du modèle est donnée par

$$G_m = \frac{G_0 \omega_n^2 e^{-\theta s}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.68)$$

Si on approxime le terme $e^{-\theta s}$ en utilisant l'approximation de Taylor d'ordre 1, on obtient

$$C = \frac{1}{1 + \frac{\tau_c}{\theta} s^\alpha} \frac{2\xi}{G_0 \theta \omega_n} \left(1 + \frac{\omega_n}{2\xi s} + \frac{1}{2\xi\omega_n} s \right) \quad (2.69)$$

La méthode IMC est simple à utiliser car il y a un seul paramètre à choisir, la constante de temps τ_c . Dans le cas fractionnaire, il faut choisir deux paramètres la constante de temps τ_c et l'ordre non entier α .

D'un autre côté, on a vu au début de ce chapitre que la réponse indicielle du filtre $f(s)$ est similaire à celle d'un modèle du second ordre sinusoïdal amorti (figure 2.12). On présente, dans la section suivante, une étude comparative entre les caractéristiques d'un modèle du second ordre et celles du filtre $f(s)$.

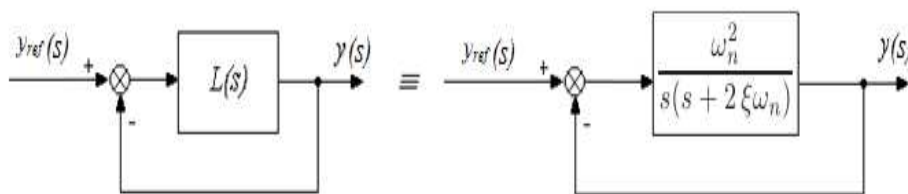


FIG. 2.12: Modèle de référence

2.5.1 Analogie entre le modèle du second ordre et le modèle fractionnaire

La synthèse d'un régulateur consiste à déterminer sa fonction de transfert de telle sorte que la fonction de transfert en boucle ouverte ou fermée du système corrigé soit égale à une fonction de transfert dite désirée. Celle-ci doit correspondre aux spécifications temporelles ou fréquentielles imposées par le cahier des charges.

Comme la réponse indicielle de cette fonction a un comportement semblable à celui d'un système du second ordre sinusoïdal amorti, on s'intéresse à l'étude temporelle et

fréquentielle des deux modèles afin de trouver des relations entre leurs paramètres et éventuellement de trouver des relations permettant de choisir les paramètres (τ_c et α) à partir des spécifications fréquentielles : ω_c et ϕ_m ou bien des spécifications temporelles : ξ et t_r .

2.5.2 Performances d'un modèle du second ordre

La fonction de transfert du modèle du second ordre est donnée par

$$G = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.70)$$

où ξ désigne le coefficient d'amortissement et ω_n la pulsation propre.

– Caractéristiques fréquentielles de la boucle ouverte :

La fonction de transfert en boucle ouverte de $G(s)$, notée $H(s)$, est donnée par

$$H = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)} \quad (2.71)$$

Les spécifications fréquentielles sont la pulsation de coupure et la marge de phase.

Elles sont données par

$$\omega_c = \frac{\omega_n}{\sqrt{2\xi^2 + \sqrt{1 + 4\xi^4}}} \quad (2.72)$$

$$\phi_m = \frac{\pi}{2} - \text{atan} \frac{1}{2\xi\sqrt{2\xi^2 + \sqrt{1 + 4\xi^4}}} \quad (2.73)$$

– Caractéristiques temporelles :

Ces spécifications sont généralement données par le dépassement noté M_p , le temps de réponse noté (t_r), le temps de montée (t_m) et le temps du premier dépassement (t_p). Le dépassement s'exprime par

$$M_p = \frac{y_{max} - y_{\infty}}{y_{\infty}} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (2.74)$$

le temps de réponse (t_r) est le temps nécessaire pour que la sortie du modèle atteigne sa valeur finale $y(\infty)$ à $\sigma = 2, 5, 10\%$ près, il est donné par [51]

$$t_r(\sigma\%) = -\frac{1}{\xi\omega_n} \log \left(\frac{\sigma\sqrt{1-\xi^2}}{100} \right) \quad (2.75)$$

2.5.3 Performances du modèle fractionnaire $f(s)$

Dans ce paragraphe, nous allons étudier les caractéristiques du modèle fractionnaire $f(s)$ représentant la fonction de transfert en boucle fermée correspondante à la fonction idéale de Bode.

– **Caractéristiques fréquentielles de la fonction idéale de Bode :**

La pulsation de coupure de la fonction idéale de Bode $L(s)$ s'exprime par :

$$\omega_c = \tau_c^{-\frac{1}{\alpha+1}} \quad (2.76)$$

la marge de phase est donnée par :

$$\phi_m = \pi - (\alpha + 1) \frac{\pi}{2} \quad (2.77)$$

Ces caractéristiques fréquentielles sont très simples à déterminer [7, 8], cependant, l'analyse temporelle des systèmes fractionnaires est très complexe.

– **Caractéristiques temporelles de $f(s)$:**

Dans [6], des expressions analytiques sont données pour exprimer le dépassement de la réponse indicielle de $f(s)$ pour différentes valeurs de l'ordre non entier α , ainsi que, le temps de réponse à 2% en fonction de α . Elles sont données par

$$M_p \simeq 0.8\alpha(\alpha + 0.25) \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.78)$$

$$t_r(2\%) \simeq \frac{4}{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{\alpha+1}\right) \omega_c} \quad 0.39 < \alpha < 1 \quad (2.79)$$

2.6 Détermination des paramètres des deux modèles à partir des caractéristiques temporelles

Les spécifications du cahier des charges peuvent être données sous forme de performances temporelles (t_r, M_p) ou sous forme de performances fréquentielles (ϕ_m, ω_c) . A partir de ces performances, l'objectif est de déterminer les paramètres (ξ, ω_n) du modèle du second ordre ou les paramètres (τ_c, α) du modèle fractionnaire $f(s)$.

2.6.1 Détermination de (ξ, ω_n) et (α, τ_c) en fonction de (M_p, t_r)

Pour le modèle du second ordre entier, en utilisant les équations (2.74) et (2.75), il est facile d'établir les relations permettant de calculer les paramètres ξ et ω_n à partir de M_p et t_r , elles sont données par

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\log(M_p)}\right)^2}} \quad (2.80)$$

$$\omega_n = -\frac{1}{\xi t_r} \log \left(\frac{\sigma \sqrt{1 - \xi^2}}{100} \right) \quad (2.81)$$

Pour le modèle fractionnaire il n'existe pas de telles relations analytiques. La relation entre l'ordre non entier α et le dépassement M_p est donnée par l'équation (2.78). Connaissant la valeur du dépassement M_p on peut tracer les valeurs numériques de α correspondant aux différentes valeurs de M_p (figure 2.13). L'interpolation de la courbe par une fonction polynômiale d'ordre 2 de l'ordre non entier α en fonction de dépassement M_p (pour faire l'interpolation on utilise la fonction "cftool" de Matlab), nous donne

$$\alpha = -2.226 M_p^2 + 2.142 M_p + 0.037 \quad (2.82)$$

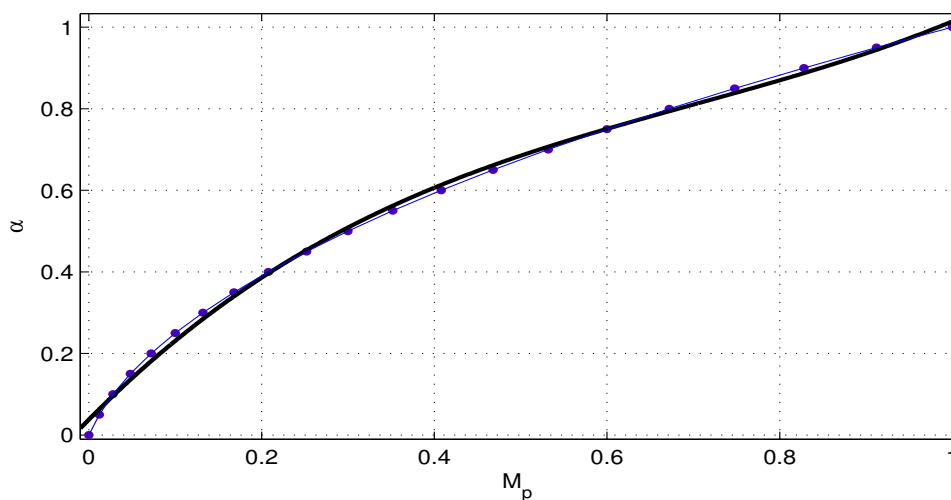


FIG. 2.13: Variation de l'ordre non entier α en fonction du dépassement

Connaissant la valeur de l'ordre non entier α et en utilisant l'équation (2.79), on peut déduire l'expression donnant la valeur de τ_c à partir de $t_r(2\%)$ ou de la valeur du temps

de montée (le temps pour lequel la sortie atteint 90% de sa valeur finale pour la première fois) [6], elle est donnée par

$$\tau_c \simeq \frac{1}{\left(\frac{4}{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{\alpha+1}\right)} t_r(2\%) \right)^{\alpha+1}} \quad 0.39 < \alpha < 1 \quad (2.83)$$

ou

$$\tau_c \simeq \left(\frac{(\alpha - 0.724) t_m}{0.131 (\alpha + 1.157)^2} \right)^{\alpha+1} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.84)$$

2.6.2 Exemple 1

Supposons que les paramètres donnés dans le cahier de charges sont dans le domaine temporel à savoir le temps de réponse $t_r(2\%) = 14.7$ et un dépassement $M_p = 23\%$.

Les valeurs des paramètres du modèle du deuxième ordre ξ et ω_n sont calculés en utilisant les équations (2.80) et (2.81), on trouve $\xi = 0.424$ et $\omega_n = 0.588$. De même, pour les paramètres de la fonction idéale de Bode en boucle fermée α et τ_c , ils sont calculés en utilisant les équations (2.82) et (2.83), on trouve $\alpha = 0.43$ et $\tau_c = 3.025$. La figure (2.14) représente la réponse indicielle de modèle du deuxième ordre (trait fort) et du modèle fractionnaire (trait en pointillés). La figure (2.15) représente le diagramme de Bode de

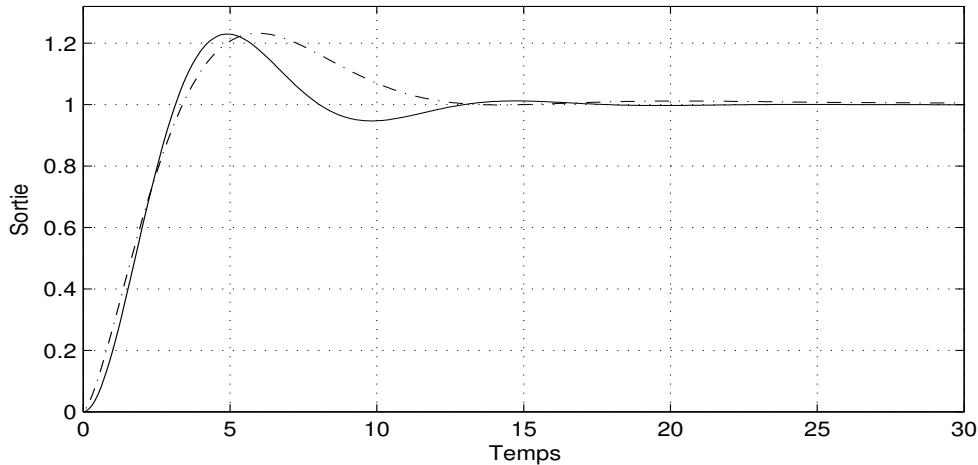


FIG. 2.14: Réponse indicielle du modèle du second ordre (trait fort) et du modèle fractionnaire (trait en pointillés)

leurs boucles ouvertes. Des figures, on peut voir que les spécifications obtenues par le

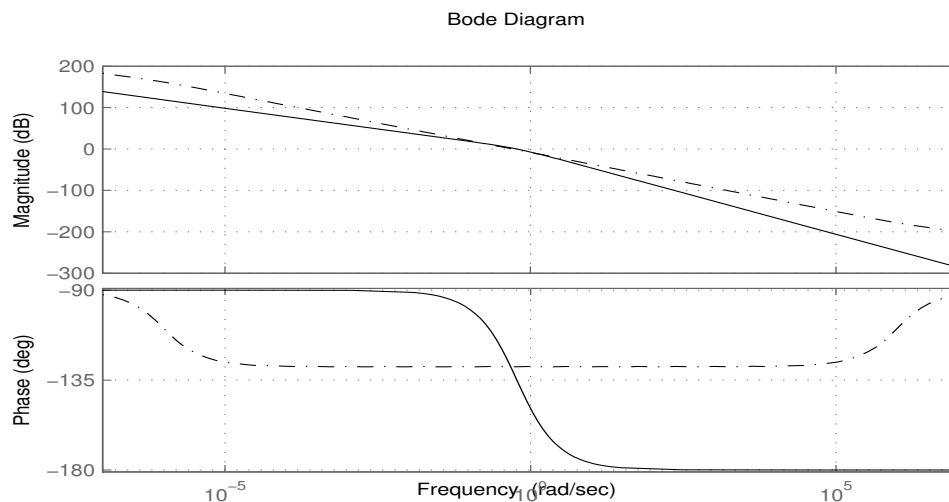


FIG. 2.15: Diagramme de Bode des boucles ouvertes du modèle du second ordre (trait fort) et du modèle fractionnaire (trait en pointillés)

modèle fractionnaire ($\phi_m = 51.6^\circ, \omega_c = 0.46$) sont très proches de celles obtenues par le modèle du second ordre ($\phi_m = 45.3^\circ, \omega_c = 0.493$). L'avantage d'utiliser un modèle fractionnaire réside dans le fait que sa phase est constante autour de la fréquence ω_c (phase plate).

2.6.3 Détermination de (ξ, ω_n) et de (α, τ_c) en fonction de (ϕ_m, ω_c)

La relation qui relie la marge de phase ϕ_m au coefficient d'amortissement ξ est non linéaire (équation 2.73), donc ce n'est pas facile de trouver une relation théorique donnant ξ en fonction de ϕ_m . Pour cela, on cherche ce lien graphiquement, on trace ξ pour différentes valeurs de ϕ_m (trait fort), une interpolation de la courbe (trait en pointillés) par un polynôme d'ordre 3, de ξ en fonction de ϕ_m (voir figure 2.16), nous donne

$$\xi = 0.45 \phi_m^3 - 0.6 \phi_m^2 + 0.75 \phi_m - 0.02 \quad (\phi_m \text{ (rad)}) \quad (2.85)$$

$$\omega_n = \omega_c \sqrt{2\xi^2 + \sqrt{1 + 4\xi^4}} \quad (2.86)$$

Pour le modèle fractionnaire, les paramètres à déterminer sont l'ordre non entier α et la constante de temps τ_c . L'ordre non entier α se calcule en utilisant l'équation (2.77), il est

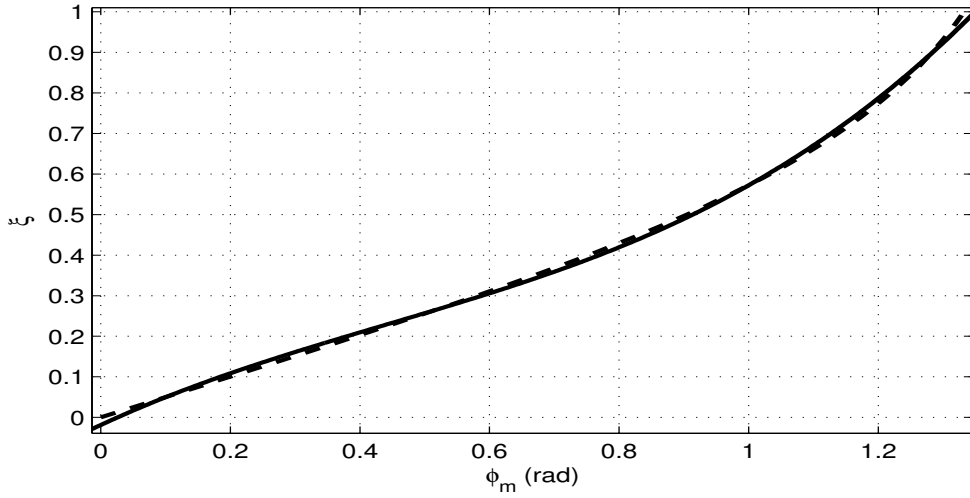


FIG. 2.16: Evolution de l'amortissement ξ en fonction de la marge de phase ϕ_m .

donné par

$$\alpha = \frac{\pi - \phi_m}{\pi/2} - 1 \quad (2.87)$$

Connaissant la valeur de α et de la pulsation de coupure ω_c et en utilisant l'équation (2.76), on peut tirer la relation existante entre τ_c et les paramètres α et ω_c . Elle est donnée par

$$\tau_c = \frac{1}{\omega_c^{\alpha+1}} \quad (2.88)$$

2.6.4 Exemple 2

Supposant que les paramètres donnés dans le cahier de charges sont dans le domaine fréquentiel à savoir la pulsation de coupure $\omega_c = 0.5$ et la marge de phase $\phi_m = \pi/4(rad)$. Les valeurs des paramètres du modèle de deuxième ordre ξ et ω_n sont calculés en utilisant les équations (2.85) et (2.86), on trouve $\xi = 0.42$ et $\omega_n = 0.59$. De même que pour les paramètres du modèle fractionnaire α et τ_c , ils sont calculés en utilisant les équations (2.87) et (2.88), on obtient, $\alpha = 0.5$ et $\tau_c = 2.83$.

La figure (2.17) représente la réponse indicielle du modèle de deuxième ordre (trait fort) et du modèle fractionnaire (trait en pointillés). la figure (2.18) représente le diagramme de Bode de leurs boucles ouvertes.

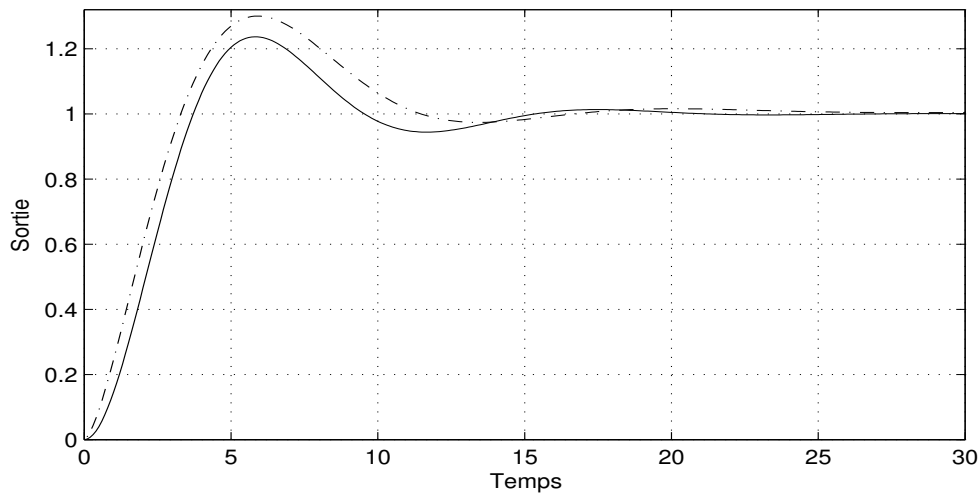


FIG. 2.17: La réponse indicielle du modèle du second ordre (trait fort) et du modèle fractionnaire (trait en pointillés)

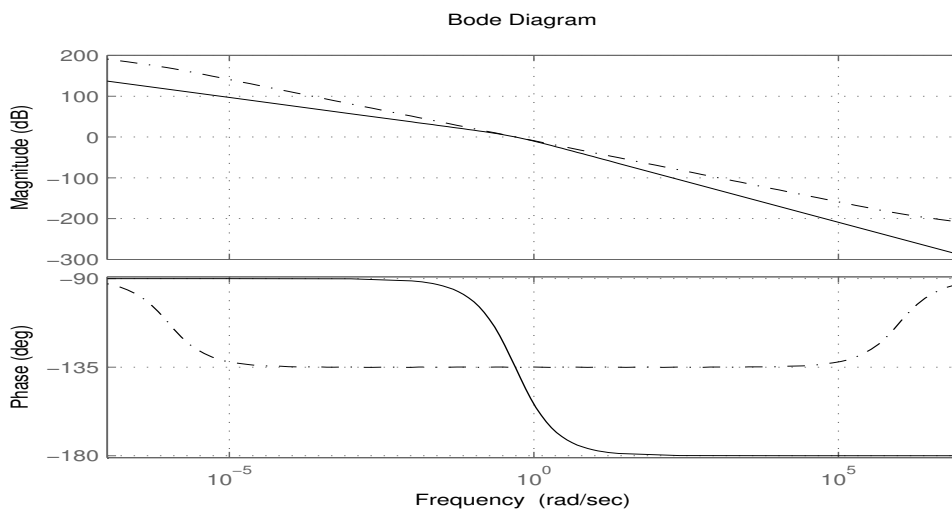


FIG. 2.18: Diagramme de Bode des boucles ouvertes du modèle du second ordre (trait fort) et du modèle fractionnaire (trait en pointillés)

Des figures, on peut voir que les spécifications obtenues par le modèle fractionnaire ($t_r(2\%) = 14.7$, $M_p = 30\%$) sont proches de celles obtenues par le modèle du second ordre ($t_r(2\%) = 14.2$, $M_p = 23.6\%$).

Donc le modèle fractionnaire $f(s)$ peut être donné sous la forme d'un système du second ordre et vice versa.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la simulation des régulateurs fractionnaires qui se base sur l'approximation de l'élément de dérivation fractionnaire s^α . En effet, dans la commande non entière, l'élément de base est la fonction de transfert idéale de Bode, dont nous avons présenté les caractéristiques qu'elle offre. Par la suite, nous avons présenté la méthode de commande par modèle interne et sa généralisation au cas fractionnaire, et cela en imposant la fonction de transfert en boucle fermée de la fonction idéale de Bode comme modèle de référence. Cette dernière se comporte comme un système du second ordre sinusoïdal amorti, une analogie entre ces deux fonctions est effectuée.

Dans le prochain chapitre, nous présentons un état de l'art sur la commande à plusieurs degrés de liberté en se basant sur les structures essentielles. Un système du premier ordre à retard instable, sera commandé avec un schéma de commande à deux degrés de liberté. Deux exemples de simulations seront donnés afin de valider la méthode.

Chapitre 3

Commande à Plusieurs Degrés de Liberté (PDDL)

3.1 Introduction

Dans la commande des systèmes, l'obtention d'un modèle mathématique décrivant le système est une étape très importante. En effet, l'ignorance des effets physiques secondaires et des non-linéarités éventuellement présentes dans le procédé lors de la modélisation conduit à un modèle qui ne décrit pas correctement le procédé dit modèle linéaire. Par conséquent, les exigences de fonctionnement ne peuvent pas être satisfaites, en se basant seulement sur ce modèle.

Les systèmes à commander sont souvent soumis à des perturbations et/ou à des variations des paramètres. L'action de rejeter les perturbations pour une consigne fixe s'appelle régulation, l'asservissement est défini par le suivi de consigne quelles que soient ses variations dans le temps.

Si le système de commande présente une précision insuffisante, une stabilité trop relative (instabilité), un temps de réponse trop élevé ou un dépassement important, il est nécessaire d'intégrer dans la boucle de commande un correcteur dont le rôle est d'amélio-

rer les performances du système. L'objectif de la commande des systèmes est d'atteindre des performances fixées au préalable par un cahier des charges.

Les objectifs de la commande sont souvent résumés par

- Suivi de consigne : La sortie du système doit suivre au mieux la consigne imposée.
- Rejet de perturbations et des bruits : Le système en boucle fermée doit suivre la consigne imposée malgré la présence de perturbations extérieures ou des bruits de mesure.
- Robustesse vis à vis des incertitudes du modèle : Le système en boucle fermée doit garantir un niveau de performances spécifié même en présence des incertitudes sur les paramètres du modèle.

En plus de ces trois objectifs principaux, lorsque le système à commander contient un retard, sa commande devient plus complexe. En effet, la présence du retard peut avoir une influence considérable sur le comportement du système bouclé. C'est ainsi que bien souvent l'existence de mouvements oscillatoires, voire l'instabilité, peut être expliquée en introduisant une modélisation des retards dans la chaîne d'action ou de rétroaction. On comprend alors qu'il est nécessaire de pouvoir disposer d'outils adaptés à l'analyse de tels systèmes. Le problème devient encore plus ardu lorsque le système à commander possède un ou plusieurs pôles instables dans sa fonction de transfert.

Dans ce chapitre, on présente un état de l'art sur la commande à plusieurs degrés de liberté. Une méthode analytique pour la synthèse des contrôleurs fractionnaires a été proposée pour la commande d'un système du premier ordre à retard instable. L'algorithme de conception est basé sur la méthode de commande à modèle interne (IMC). La structure de commande à deux degrés de liberté (2DDL) est utilisée. Cette structure permet de découpler les deux problèmes de stabilisation et suivi de consigne et ainsi d'améliorer les performances du système en boucle fermée. La méthode de Walton-Marshall est utilisée pour établir la condition de stabilité interne de la boucle fermée du système. Les performances de la loi de commande proposée sont illustrées par deux exemples de simulation.

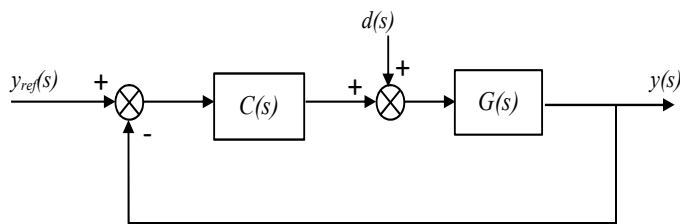


FIG. 3.1: Schéma de commande à 1DDL.

3.2 Etat de l'art sur la commande à plusieurs degrés de liberté

Dans la commande des processus, le degré de liberté d'un système de commande représente le nombre de fonctions de transfert qui peuvent être ajustées indépendamment. On note par PDDL, la commande à plusieurs degrés de liberté (si $P=1$ il s'agit de la commande à un degré de liberté (1DDL), si $P=2$, c'est la commande à deux degrés de liberté (2DDL)). Il existe plusieurs structures de commande à PDDL, on présente dans ce qui suit les principales structures utilisées dans la commande des systèmes linéaires.

3.2.1 Structure de commande à un degré de liberté (1DDL)

Le schéma de commande habituellement utilisé pour la commande des systèmes linéaires est celui de la figure (3.1), où $G(s)$ représente la fonction de transfert du système à commander et $C(s)$ celle du régulateur à ajouter afin d'imposer au système en boucle fermée un fonctionnement donné. $u(s)$ est le signal de commande, $y(s)$ le signal de sortie, $d(s)$ représente la perturbation sur la commande et $y_{ref}(s)$ est la consigne ou signal de référence. Le schéma ne contient aucune source de bruit, mais, on sait que du bruit sera toujours présent dans la boucle de régulation. L'influence du bruit sera discutée après la phase de synthèse. Il conviendra alors de rajouter ou de ne pas rajouter un terme de filtrage sur le signal mesuré en fonction des résultats obtenus. A partir du schéma de commande de la figure (3.1), il est facile de calculer les différentes fonctions de transfert entre les signaux d'entrée : la consigne $y_{ref}(s)$ et la perturbation $d(s)$ et le signal de sortie

$y(s)$, on obtient

$$y = \frac{GC}{1+GC} y_{ref} + \frac{G}{1+GC} d \quad (3.1)$$

Le contrôleur $C(s)$ intervient dans les deux fonctions de transfert, il serait donc difficile de faire sa synthèse afin d'atteindre tous les objectifs de commande, vu que la structure utilisée est à un degré de liberté (1DDL). En effet, en examinant l'équation (3.1), on constate que le contrôleur $C(s)$ intervient aussi bien dans la fonction de transfert entre la sortie $y(s)$ et la consigne $y_{ref}(s)$ (suivi de consigne) que dans la fonction de transfert entre la sortie $y(s)$ et la perturbation $d(s)$ (rejet de perturbations). Par conséquent, si un paramètre du régulateur change, le suivi de consigne et le rejet de perturbations seront affectés simultanément.

Lorsque l'objectif de la commande est de résoudre le problème de suivi de consigne et de rejet de perturbations indépendamment l'un de l'autre, il convient d'utiliser une structure de commande à deux degrés de liberté permettant de découpler ces deux problèmes. Il existe plusieurs structures de commande à plusieurs degrés de liberté. Ces structures dépendent essentiellement du système à commander selon qu'il contienne ou pas un retard, ou bien, selon qu'il soit stable ou instable...etc. On présente dans ce qui suit les principales structures à plusieurs degrés de liberté.

3.2.2 Structure de commande à deux degrés de liberté en utilisant un pré-filtre

La figure (3.2) montre une structure permettant de découpler le problème de suivi de consigne de celui du rejet de perturbations. Dans cette structure, on utilise deux contrôleurs : le contrôleur $C_1(s)$ est d'abord dimensionné de sorte à résoudre le problème de rejet de perturbations ; par la suite, le contrôleur $C_2(s)$ est dimensionné afin de résoudre le problème de suivi de consigne.

A noter que dans cette structure, le problème de rejet de perturbations étant pris en charge exclusivement par le contrôleur $C_1(s)$, le problème de suivi de consigne utilise la structure de commande en boucle ouverte.

Dans ce cas, le signal de sortie $y(s)$ s'exprime en fonction des entrées $y_{ref}(s)$ et $d(s)$ par

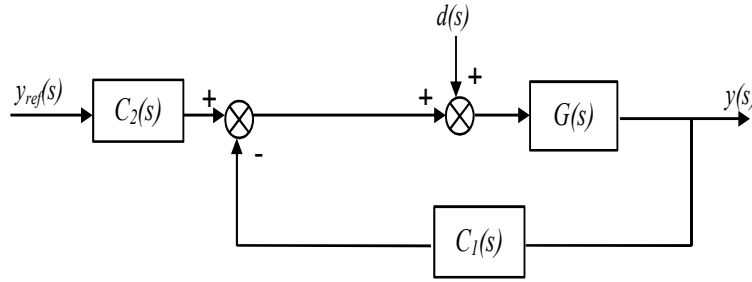


FIG. 3.2: Schéma de commande à 2DDL avec pré-filtre.

$$y = \frac{GC_2}{1 + GC_1} y_{ref} + \frac{G}{1 + GC_1} d \quad (3.2)$$

La fonction de transfert du contrôleur $C_2(s)$ n'intervient que dans la fonction de transfert reliant la sortie du système $y(s)$ à sa référence $y_{ref}(s)$, cela veut dire que le contrôleur $C_2(s)$ agit sur le suivi de consigne et pas sur le rejet de perturbations contrairement au contrôleur $C_1(s)$ qui agira sur les deux. Pour cela, on détermine d'abord les paramètres du contrôleur $C_1(s)$ de manière à satisfaire les spécifications sur le rejet de perturbations, puis on détermine le contrôleur $C_2(s)$ pour satisfaire les exigences sur le suivi de consigne. Le contrôleur $C_1(s)$ est placé dans la chaîne de contre réaction. Ce schéma est équivalent à celui de la figure (2.11) dans lequel le contrôleur de rejet de perturbations est dans la chaîne directe.

3.2.3 Structure à 2DDL pour les systèmes à retard

Dans le cas d'un système possédant un retard, la présence de ce retard est souvent la source de détérioration des performances ou d'instabilité du système. En effet, le bouclage d'un système qui comporte un temps mort aboutit à une structure de dimension infinie, c'est-à-dire avec un nombre infini de pôles. Ainsi, dans le cas où le système présente un retard important devant sa constante de temps, la commande de ce système conduit nécessairement à avoir un niveau de performance faible. Parmi les solutions proposées, le prédictor de Smith. En effet, le régulateur de Smith est conçu pour les systèmes ayant des retards purs importants. Son principe est que le système soit modélisé par $G_{m0} e^{-\theta_m s}$, où $G_{m0}(s)$ est le modèle non retardé du système et $e^{-\theta_m s}$ représente le terme retard. Les

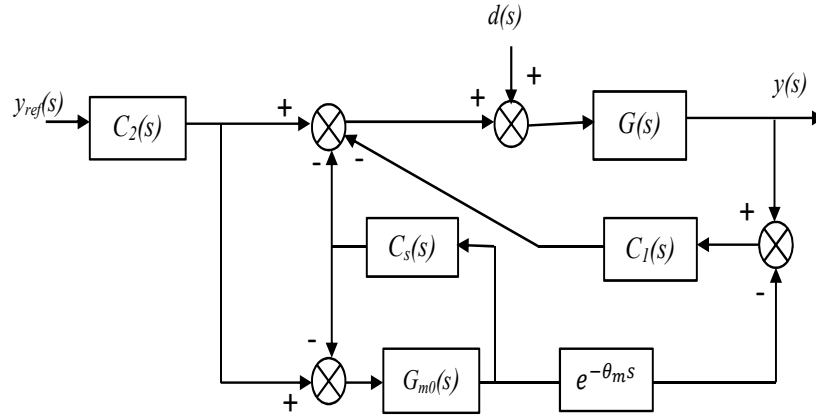


FIG. 3.4: Schéma de commande à 3DDL pour les systèmes instables à retard

3.2.4 Structure à 3DDL pour les systèmes instables à retard

Dans l'équation (3.3), le contrôleur $C_2(s)$ intervient dans le numérateur et dans le dénominateur de $y(s)/y_{ref}(s)$, donc il est le responsable du suivi de consigne ainsi que de la stabilisation de la partie non retardée du système instable. Récemment, Liu et al. [38, 61] ont proposé un schéma de commande à 3DDL comme le montre la figure (3.4), où le modèle du système $G_m(s)$ est décomposé en deux parties : $G_{m0}(s)$ qui représente la partie non retardée du modèle et le retard $e^{-\theta_m s}$, i.e., $G_m(s) = G_{m0}(s)e^{-\theta_m s}$. Les contrôleurs $C_1(s)$ et $C_2(s)$ sont, respectivement, responsables du rejet de perturbations et du suivi de consigne et le contrôleur $C_s(s)$, quant à lui, permet de stabiliser la partie instable non retardée $G_{m0}(s)$. De la figure (3.4), la sortie $y(s)$ s'exprime en fonction des entrées $y_{ref}(s)$ et $d(s)$ par la relation

$$y = \frac{C_2 G}{1 + C_s G_{m0}} \frac{1 + C_1 G_{m0} e^{-\theta_m}}{1 + C_1 G} y_{ref} + \frac{G}{1 + C_1 G} d \quad (3.5)$$

Dans le cas idéal où le modèle représente parfaitement le système, l'équation (3.5) peut être simplifiée comme suit

$$y = \frac{C_2 G}{1 + C_s G_{m0}} y_{ref} + \frac{G}{1 + C_1 G} d \quad (3.6)$$

Noter que le contrôleur $C_s(s)$ stabilise le modèle non retardé $G_{m0}(s)$ du système et non pas le système lui même, il sera donc très sensible aux incertitudes de modélisation. Ainsi ce contrôleur stabilisant n'intervient pas dans la relation entre la perturbation $d(s)$ et la

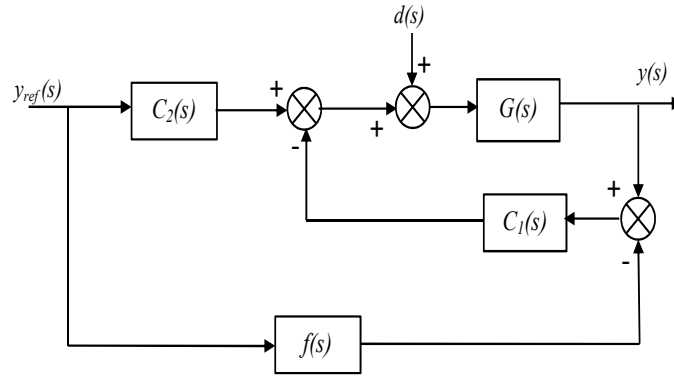


FIG. 3.5: Schéma de commande à 2DDL proposé dans [74].

sortie $y(s)$, donc ce contrôleur n'a aucune influence sur le rejet de perturbations. Les deux problèmes de suivi de consigne et de rejet de perturbations seront réglés indépendamment, vu que le contrôleur $C_1(s)$ permettant le rejet de perturbations n'intervient pas dans la relation entre la consigne $y_{ref}(s)$ et la sortie $y(s)$. De même, le contrôleur $C_2(s)$ responsable du suivi de consigne n'intervient pas dans la relation entre la perturbation $d(s)$ et la sortie $y(s)$.

Remarque 3 La relation (3.5) montre que cette structure est une combinaison entre la structure de la figure (3.2) et de la figure (3.3).

3.2.5 Structure à 2DDL avec modèle de référence

Il existe aussi d'autres structures de commande utilisant le modèle à imposer à la boucle fermée entre la consigne et la sortie du système. Le schéma de commande de la figure (3.5) est proposé dans [74, 39, 40], $f(s)$ représente la fonction de transfert désirée pour le suivi de consigne. La sortie $y(s)$ s'exprime en fonction des entrées $y_{ref}(s)$ et $d(s)$ par

$$y = \frac{(C_2 + C_1 f) G}{1 + C_1 G} y_{ref} + \frac{G}{1 + C_1 G} d \quad (3.7)$$

Ce schéma de commande peut être utilisé pour les systèmes stables et les systèmes instables. En effet, cette structure correspond à la structure de la figure (3.2) à laquelle un filtre $f(s)$ est ajouté et sert comme modèle de référence pour le système à commander. Ce schéma de commande sera utilisé, dans la section suivante, pour commander un système du premier ordre stable à retard.

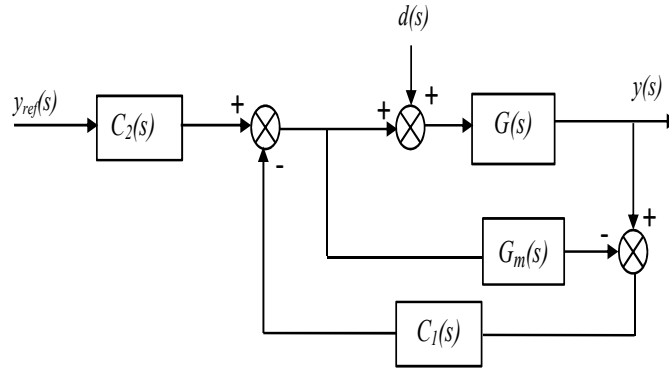


FIG. 3.6: Schéma de commande IMC-2DDL.

3.2.6 Structure de commande IMC-2DDL

Le schéma de commande donné par la figure (3.6), représente une amélioration de la méthode par modèle interne qui utilise le schéma de commande de la figure (2.8). En effet, en utilisant le schéma de commande de la figure (2.8), le problème du rejet de perturbations se règle lentement par rapport à celui du suivi de consigne. Par contre, dans ce schéma de commande, les deux problèmes de suivi de consigne et de rejet de perturbations sont réglés indépendamment l'un de l'autre. La sortie $y(s)$ s'exprime en fonction de la référence $y_{ref}(s)$ et de la perturbation $d(s)$ par

$$y = \frac{G C_2}{1 + C_1 (G - G_m)} y_{ref} + \frac{G (1 - C_1 G_m)}{1 + C_1 (G - G_m)} d \quad (3.8)$$

si le modèle représente parfaitement le système ($G_m(s) = G(s)$), l'équation (3.8) devient

$$y = G_m C_2 y_{ref} + G_m (1 - C_1 G_m) d \quad (3.9)$$

L'équation (3.9) montre que le contrôleur $C_2(s)$ agit seulement sur le suivi de consigne, alors que le contrôleur $C_1(s)$ n'agit que sur le rejet de perturbations. Cette équation montre également que la synthèse des deux contrôleurs se fait indépendamment l'un de l'autre. Il faut noter aussi que cette structure peut être utilisée pour les systèmes stables sans ou avec retard [62].

Il existe d'autres structures à PDDL dans la littérature, on cite celles proposées dans [4, 26, 29, 50]... Dans le paragraphe suivant, un schéma de commande à 1DDL et un autre à 2DDL seront utilisés pour commander un système du premier ordre à retard.

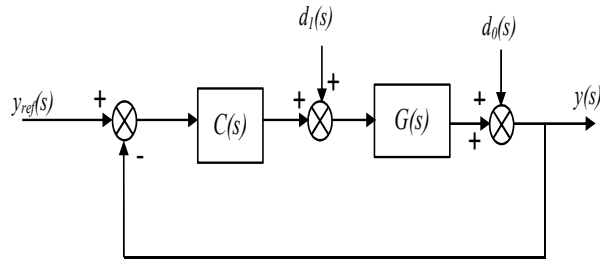


FIG. 3.7: Schéma de commande à 1ddl de l'exemple

3.3 Commande à 2DDL d'un système du premier ordre à retard stable

Afin d'illustrer l'apport des structures à PDDL, on propose dans ce qui suit de commander un système stable du premier ordre à retard. Dans un premier temps, on applique la commande à 1DDL, la structure de commande utilisée est celle de la figure (3.7) puis on applique la commande à 2DDL en utilisant le schéma de commande de la figure (3.12). La fonction de transfert du modèle est donnée par

$$G_m = \frac{G_0 e^{-\theta s}}{1 + \tau s} \quad (3.10)$$

avec $G_0 = 2$, $\tau = 3$ et $\theta = 1$. Deux perturbations sont appliquées, $d_1(s)$ est appliquée sur la commande et $d_0(s)$ est appliquée sur la sortie du système. Les perturbations $d_1(s)$ et $d_0(s)$ sont de type échelon d'amplitudes 0.2 et 0.1 appliquées, respectivement, aux instants 40 s et 70 s. Les deux contrôleurs seront calculés de sorte à imposer deux modèles fractionnaires distincts, l'un pour résoudre le problème de suivi de consigne et l'autre pour résoudre le problème de rejet de perturbations.

3.3.1 Commande à 1DDL d'un système du premier ordre à retard stable

Le contrôleur $C(s)$ est synthétisé en utilisant la méthode de commande par modèle interne, le modèle de référence fractionnaire est donné par

$$f = \frac{1}{\tau_c s^{\alpha+1} + 1} \quad (3.11)$$

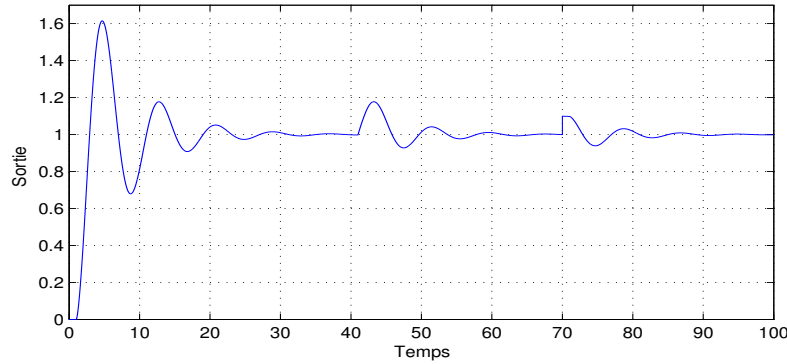


FIG. 3.8: Evolution de la sortie (1DDL).

L'expression du contrôleur IMC est

$$C_{imc} = \frac{1 + \tau s}{G_0(1 + \tau_c s^{\alpha+1})} \quad (3.12)$$

Pour déterminer l'expression du contrôleur $C(s)$ de la structure standard, on utilise la relation (2.24), dans laquelle la fonction exponentielle est approximée en utilisant la série de Taylor d'ordre 1 ($e^{-\theta s} = 1 - \theta s$). Le correcteur $C(s)$ est alors donné par

$$\begin{aligned} C &= \frac{\frac{1+\tau s}{G_0(1+\tau_c s^{\alpha+1})}}{1 - \frac{1+\tau s}{G_0(1+\tau_c s^{\alpha+1})} \frac{G_0(1-\theta s)}{1+\tau s}} \\ &= \frac{1+\tau s}{G_0(1+\tau_c s^{\alpha+1} + 1 - \theta s)} \\ &= \frac{1+\tau s}{G_0\theta\left(\frac{\tau_c}{\theta} s^{\alpha+1} + 1\right) s} \end{aligned} \quad (3.13)$$

qui peut être décomposé selon

$$C = \frac{1}{1 + \frac{\tau_c}{\theta} s^{\alpha}} \quad \frac{\tau}{G_0\theta} \left(1 + \frac{1}{\tau s}\right) \quad (3.14)$$

Le contrôleur ainsi obtenu est un contrôleur proportionnel intégral (PI), dont les paramètres sont $K_p = \frac{\tau}{G_0\theta}$ et $\tau_i = \tau$, en série avec un filtre fractionnaire.

Les figures (3.8) et (3.9) représentent les résultats de simulation de la sortie du système ainsi que la commande appliquée. La fonction de transfert du modèle de référence utilisée est $\frac{1}{1+s^{1.75}}$, le dérivateur $s^{1.75}$ est approximé en utilisant l'approximation d'Oustaloup dans la bande de fréquences $[10^{-4}, 10^4]$ avec 10 cellules.

Le contrôleur standard, ainsi, obtenu est

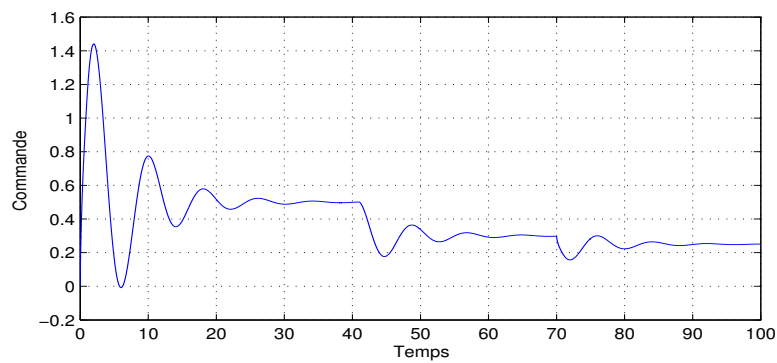
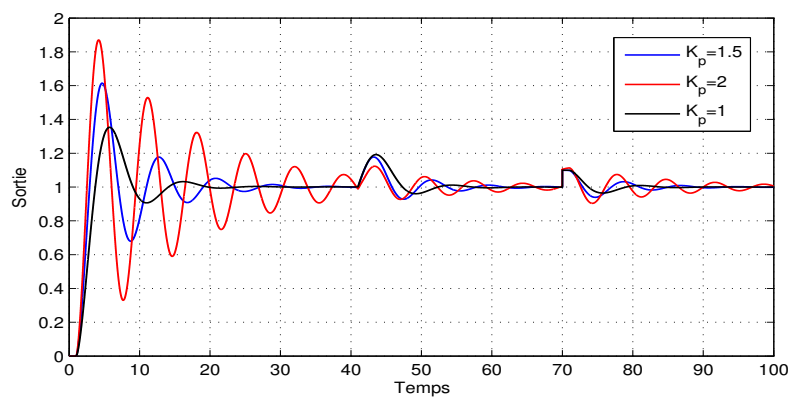


FIG. 3.9: Evolution de la commande (1DDL).

FIG. 3.10: Influence du changement du paramètre K_p du contrôleur $C(s)$ (1DDL)

$$C = \frac{1}{1 + s^{0.75}} \left[1.5 \left(1 + \frac{1}{3s} \right) \right] \quad (3.15)$$

Ces figures montrent que les perturbations appliquées sont rejetées par le contrôleur. Néanmoins, si on change l'un des paramètres du contrôleur $C(s)$ soit le gain $K_p = 1, 1.5$ et 2 ou bien et la constante d'intégration $\tau_i = 2, 3$ et 5, le rejet de perturbations et le suivi de consigne sont affectés simultanément, ce fait est montré par les figures (3.10) et (3.11).

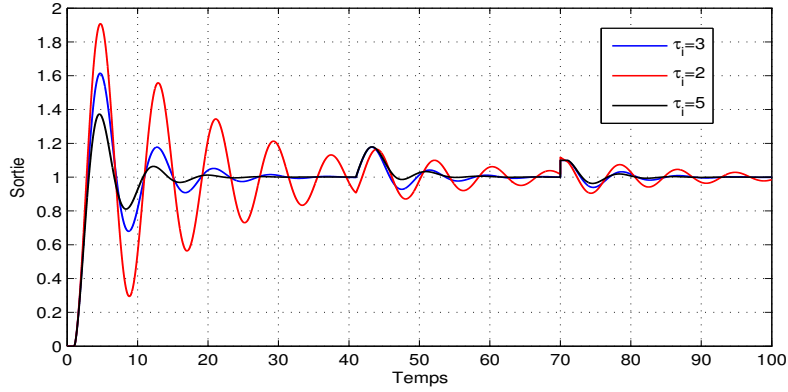


FIG. 3.11: Influence du changement du paramètre τ_i du contrôleur $C(s)$ (1DDL)

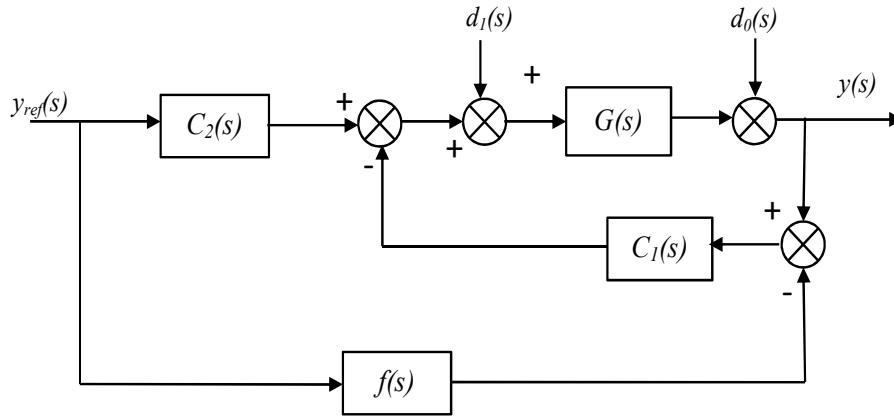


FIG. 3.12: Schéma de commande à 2DDL

3.3.2 Commande à 2DDL d'un système du premier ordre à retard stable

Afin d'améliorer les performances du système en boucle fermée, on propose de découpler le problème du suivi de consigne de celui du rejet de perturbations en utilisant le schéma de commande à 2DDL de la figure (3.12).

1. Synthèse du contrôleur de suivi de consigne $C_2(s)$:

La synthèse du contrôleur $C_2(s)$ s'effectue en utilisant, à nouveau, la méthode de commande par modèle interne, le modèle de référence utilisé est celui de l'équation (3.11), on obtient

$$C_2 = \frac{1 + \tau s}{G_0 (1 + \tau_c s^{\alpha+1})} \quad (3.16)$$

qui peut être décomposé selon

$$C_2 = \frac{1}{1 + \tau_c s^{\alpha+1}} \frac{1}{G_0} (1 + \tau s) \quad (3.17)$$

Dans ce cas, le contrôleur obtenu est un correcteur proportionnel dérivé (PD) entier en cascade avec un filtre fractionnaire, les paramètres du contrôleur PD sont $K_p = \frac{1}{G_0}$ et $\tau_d = \tau$.

2. Synthèse du contrôleur de rejet de perturbations $C_1(s)$:

Les fonctions de transfert reliant les perturbations $d_0(s)$ et $d_1(s)$ à la sortie $y(s)$ sont données par

$$\frac{y}{d_0} = \frac{1}{1 + C_1 G} \quad (3.18)$$

$$\frac{y}{d_1} = \frac{G}{1 + C_1 G} \quad (3.19)$$

La fonction de sensibilité de la boucle située entre l'entrée du système et sa sortie (la boucle interne) est donnée par

$$S = \frac{1}{1 + G C_1} \quad (3.20)$$

Ainsi, la fonction de sensibilité complémentaire est

$$T = 1 - S = \frac{G C_1}{1 + G C_1} \quad (3.21)$$

A partir de cette relation, on peut calculer la fonction de transfert du contrôleur $C_1(s)$, elle est donnée par

$$C_1 = \frac{1}{G} \frac{T}{1 - T} \quad (3.22)$$

En tenant compte de la relation (3.21), les équations (3.18) et (3.19) peuvent être réécrites sous la forme

$$\frac{y}{d_0} = (1 - T) \quad (3.23)$$

$$\frac{y}{d_1} = G (1 - T) \quad (3.24)$$

Les relations $\frac{y}{d_0}$ et $\frac{y}{d_1}$ s'expriment toutes les deux en fonction de la fonction de sensibilité complémentaire $T(s)$. Ainsi, dans le cas idéal, afin d'assurer le rejet de perturbations, la fonction de sensibilité complémentaire désirée doit être égale à 1. Comme le système possède un retard, cette dernière doit contenir un retard pour rendre le contrôleur $C_1(s)$ causal. Cela revient à dire que lorsque les perturbations affectent le processus, le contrôleur $C_1(s)$ détecte l'erreur correspondante après un retard pour calculer la commande qui permet d'annuler ou au moins d'atténuer l'effet de ces perturbations [40].

La condition pour que les perturbations s'annulent devient donc

$$\lim_{s \rightarrow 0} (1 - T) = 0 \quad (3.25)$$

On propose une fonction de sensibilité complémentaire ayant la forme

$$T = \frac{1}{\tau_f s^{\mu+1} + 1} e^{-\theta_c s} \quad (3.26)$$

τ_f est un paramètre ajustable, μ est un nombre non entier $0 < \mu < 1$ et θ_c est l'estimation du retard du système. Le choix de cette fonction est motivée par le fait que cette fonction vérifie la relation (3.25). Pour synthétiser le contrôleur $C_1(s)$, on utilise l'équation (3.22), la fonction de sensibilité complémentaire utilisée est celle de l'équation (3.26), on trouve

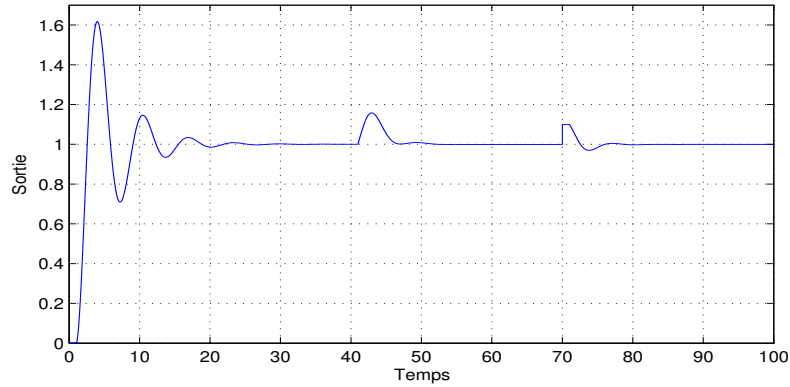
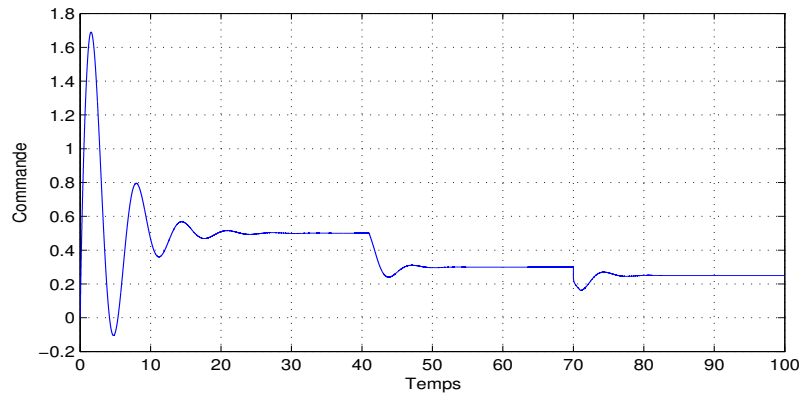
$$C_1 = \frac{1 + \tau s}{G_0} \frac{1}{(\tau_f s^{\mu+1} + 1) - e^{-\theta s}} \quad (3.27)$$

le contrôleur $C_1(s)$ peut être aussi décomposé selon

$$C_1 = \frac{1}{\frac{\tau_f}{\theta} s^\mu + 1} \frac{\tau}{\theta G_0} \left(1 + \frac{1}{\tau s} \right) \quad (3.28)$$

Dans ce cas aussi, le contrôleur obtenu est un correcteur PI en cascade avec un filtre fractionnaire. Les paramètres du contrôleur sont $K_p = \frac{\tau}{\theta G_0}$ et $\tau_i = \tau$.

Le modèle de référence utilisé lors de la synthèse du contrôleur $C_2(s)$ de suivi de consigne est celui utilisé dans le cas de la structure de commande à 1DDL. La fonction de sensibilité complémentaire utilisée pour la synthèse du contrôleur $C_1(s)$ est $\frac{e^{-s}}{1+0.5s^{1.25}}$. Les contrôleurs obtenus sont $C_1(s) = \frac{1}{1+0.5s^{0.25}} [1.5 (1 + \frac{1}{3s})]$ et $C_2(s) = \frac{1}{1+s^{1.75}} [0.5 (1 + 3s)]$.

FIG. 3.13: *Evolution de la sortie (2DDL)*FIG. 3.14: *Evolution de la commande (2DDL)*

Les figures (3.13) et (3.14) présentent les mêmes performances (dépassement, temps de réponse..) que celles obtenues en utilisant la structure de commande à 1DDL (figures (3.8) et (3.9)). En effet, le problème de suivi de consigne est réglé de la même façon puisque le modèle de référence imposé est le même. Par contre, il y a une grande différence par rapport au rejet de perturbations. Ceci est dû au fait que ces deux problèmes sont résolus indépendamment l'un de l'autre en utilisant la structure de commande à 2DDL.

Les figures (3.15), (3.16) et (3.17) montrent l'influence du changement des paramètres K_p ($K_p = 0.1, 0.5$ et 1), τ_d ($\tau_d = 1, 3$ et 5) et α ($\alpha = 0.25, 0.5$ et 0.75) du contrôleur de suivi de consigne $C_2(s)$ sur l'évolution de la sortie du système. les figures (3.18), (3.19) et (3.20) représentent l'influence du changement des paramètres K_p ($K_p = 1, 1.5$ et 2), τ_i ($\tau_i = 2, 3$ et 4) et μ ($\mu = 0.25, 0.5$ et 0.75) du contrôleur de rejet de perturbations $C_1(s)$ sur la sortie

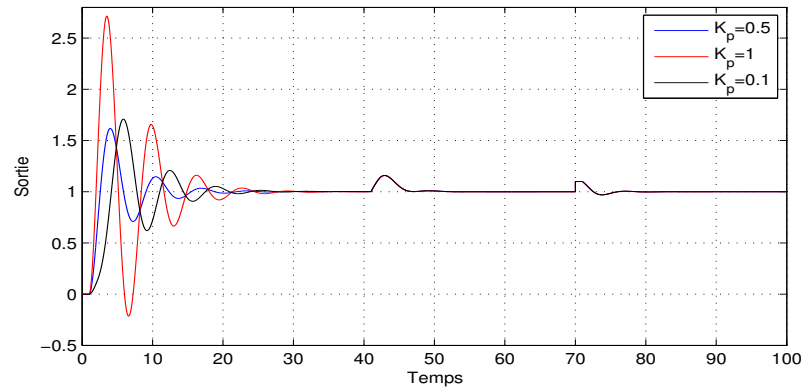


FIG. 3.15: Influence du changement du paramètre K_p du contrôleur $C_2(s)$ (2DDL)

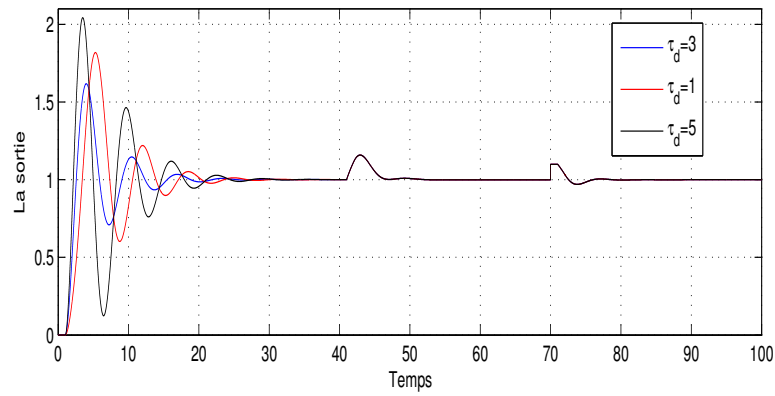


FIG. 3.16: Influence du changement du paramètre τ_d du contrôleur $C_2(s)$ (2DDL)

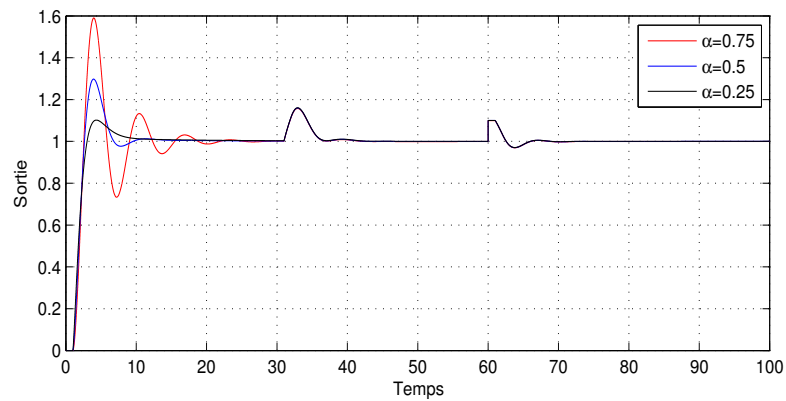
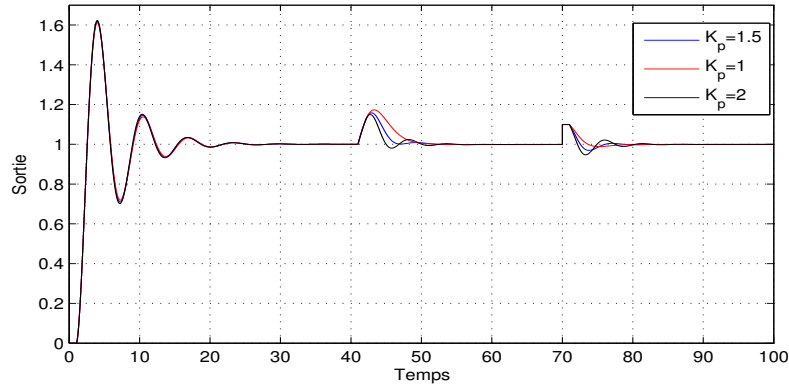
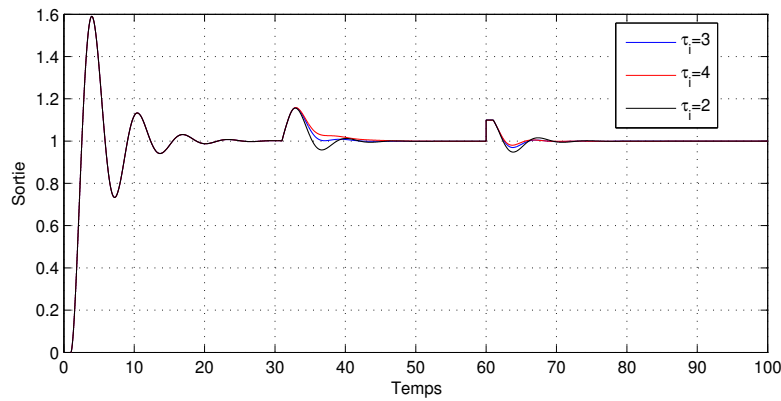


FIG. 3.17: Influence du changement du paramètre α

FIG. 3.18: Influence du changement de paramètre K_p du contrôleur $C_1(s)$ (2DDL)FIG. 3.19: Influence du changement de paramètre τ_i du contrôleur $C_1(s)$ (2DDL)

du système. Ces figures montrent qu'un changement des paramètres de $C_2(s)$ n'influence pas sur le rejet de perturbations. De même, le changement d'un paramètre de $C_1(s)$ affecte le rejet de perturbations mais n'a aucune influence sur le suivi de consigne. Ce fait peut être montré analytiquement. En effet, lorsqu'on remplace les contrôleurs $C_1(s)$ et $C_2(s)$ par leurs expressions respectives dans l'équation de la sortie du système en boucle fermée (équation 3.7), on obtient

$$y = \frac{e^{-\theta s}}{\tau_c s^{\alpha+1} + 1} y_{ref} + \frac{(\tau_f s^{\mu+1} + 1 - e^{-\theta s})}{(\tau_f s^{\mu+1} + 1)} d_0 + \frac{G (\tau_f s^{\mu+1} + 1 - e^{-\theta s})}{(\tau_f s^{\mu+1} + 1)} d_1 \quad (3.29)$$

Cette équation montre que l'ordre non entier α n'intervient que dans la relation entre la grandeur de référence et de sortie. Ainsi, les variations de ce paramètre n'affectent que le suivi de consigne, ces variations n'ont aucune influence sur le problème du rejet de perturbations (figure 3.17). Il en est de même pour l'ordre non entier μ de la fonction de

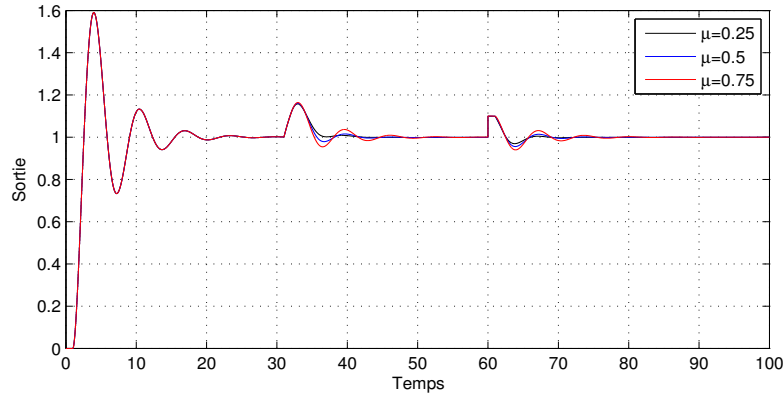


FIG. 3.20: Influence du changement de paramètre μ du contrôleur $C_1(s)$ (2DDL)

sensibilité complémentaire utilisée pour le rejet de perturbations, ses variations n'affectent pas le suivi de consigne (figure 3.20).

3.4 Commande par modèle interne d'un système du premier ordre à retard instable

La figure (3.21) illustre la structure de commande utilisée. Le contrôleur $C_s(s)$, inséré dans la boucle interne, permet de stabiliser le système et le contrôleur $C(s)$, inséré dans la chaîne directe, permet d'atteindre l'objectif de suivi de consigne.

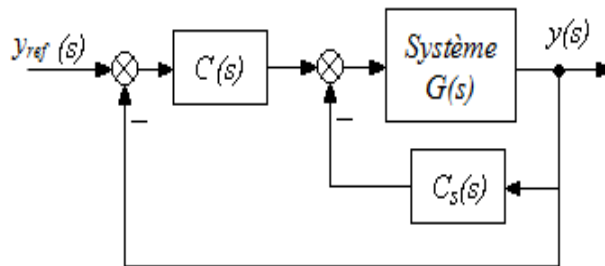


FIG. 3.21: Schéma de commande à 2DDL utilisé pour le cas d'un système instable

La synthèse de ces contrôleurs se déroule en deux étapes :

- Dans une première étape, nous déterminons d'abord le contrôleur $C_s(s)$ qui permet de stabiliser le modèle, la synthèse de ce contrôleur se fait en utilisant la commande de Walton-Marshall que nous avons présenté dans le premier chapitre.

- Dans une seconde étape : Une fois le système est stabilisé, nous déterminons le contrôleur $C(s)$ pour imposer les performances désirées. Pour synthétiser ce contrôleur, nous utilisons le principe de la commande par modèle interne et son équivalence avec la structure de commande classique.

Noter que la structure utilisée est une structure à 2DDL, elle résout les deux problèmes de stabilisation du système et le problème de suivi de consigne. Si on souhaite résoudre indépendamment le problème de rejet de perturbations, on doit ajouter un troisième contrôleur.

3.5 Conception du contrôleur de suivi de consigne $C(s)$

Dans cette section, on présente le détail de la méthode de synthèse du contrôleur $C(s)$ de suivi de consigne. L'objectif de cette conception est de synthétiser le contrôleur $C(s)$ pour la boucle interne qui contient le système instable avec retard stabilisé par le contrôleur $C_s(s)$. L'idée est de mettre le contrôleur sous forme d'un contrôleur entier en série avec un filtre fractionnaire afin d'atteindre les spécifications désirées en boucle fermée. La structure générale de $C(s)$ est : $C(s) = F(s)C_{IO}(s)$, où $F(s)$ et $C_{IO}(s)$ désignent respectivement la partie fractionnaire et entière du contrôleur $C(s)$.

On a vu, dans le chapitre 1, que le type du contrôleur stabilisant dépend essentiellement de la valeur du rapport θ/T . En effet, si $\theta/T < 1$, $C_s(s)$ peut être un simple régulateur proportionnel. Par contre, si $1 < \theta/T < 2$, $C_s(s)$ doit être un contrôleur PD ou PID.

Si le contrôleur stabilisant est un contrôleur proportionnel, la fonction de transfert de la boucle interne est donnée par

$$G_{IL} = \frac{G_0 e^{-\theta s}}{\underbrace{\tau s - 1}_{D(s)} + \underbrace{KG_0}_{N(s)} e^{-\theta s}} \quad (3.30)$$

Dans le cas où le contrôleur stabilisant est du type PD, $G_{IL}(s)$ devient

$$G_{IL} = \frac{G_0 e^{-\theta s}}{\underbrace{\tau s - 1}_{D(s)} + \underbrace{KG_0(bs + 1)}_{N(s)} e^{-\theta s}} \quad (3.31)$$

Les deux expressions de $G_{IL}(s)$ (équations (3.30) et (3.31)) peuvent être mises sous la forme générale

$$G_{IL} = \frac{G_0 e^{-\theta s}}{D(s) + N(s) e^{-\theta s}} \quad (3.32)$$

en utilisant la méthode de commande à modèle interne, le contrôleur C_{imc} , lorsque le modèle de référence est celui de l'équation (2.3), est donné par

$$C_{imc} = \frac{D(s) + N(s) e^{-\theta s}}{G_0 (1 + \tau_c s^{\alpha+1})} \quad (3.33)$$

et le contrôleur classique $C(s)$ est déduit par

$$C = \frac{D(s) + N(s) e^{-\theta s}}{G_0 (1 + \tau_c s^{\alpha+1} - e^{-\theta s})} \quad (3.34)$$

qui peut être écrit sous la forme

$$C = \underbrace{\frac{1}{\tau_c s^\alpha + \frac{1-e^{-\theta s}}{s}}}_{\text{filtre fractionnaire}} \underbrace{\frac{D(s) + N(s) e^{-\theta s}}{G_0 s}}_{\text{contrôleur entier}} \quad (3.35)$$

$C(s)$ est composé de deux fonctions de transfert : le filtre d'ordre fractionnaire $F(s) = \frac{1}{\tau_c s^\alpha + \frac{1-e^{-\theta s}}{s}}$ (qui caractérise l'aspect fractionnaire du contrôleur) et un contrôleur d'ordre entier $C_{IO}(s) = \frac{D(s)+N(s)e^{-\theta s}}{G_0 s}$ qui peut être éventuellement factorisé de sorte à obtenir la forme d'un régulateur PID usuel.

- Lorsque le contrôleur $C_s(s)$ est proportionnel ($C_s(s) = K$), le contrôleur $C(s)$ est donné par

$$C = \frac{1}{\tau_c s^\alpha + \frac{1-e^{-\theta s}}{s}} \frac{\tau s - 1 + K G_0 e^{-\theta s}}{G_0 s} \quad (3.36)$$

- Si la boucle interne est stabilisée par un contrôleur PD, i.e. $C_s(s) = K(bs + 1)$, le contrôleur $C(s)$ devient

$$C = \frac{1}{\tau_c s^\alpha + \frac{1-e^{-\theta s}}{s}} \frac{\tau s - 1 + K G_0 (bs + 1) e^{-\theta s}}{G_0 s} \quad (3.37)$$

3.6 Condition de stabilité du filtre fractionnaire

La stabilité de $C(s)$ est caractérisée par la stabilité du filtre fractionnaire. La présence du terme intégral garantit l'annulation de l'erreur statique. La condition de stabilité du filtre fractionnaire est donnée par le théorème suivant [65].

Théorème 2 *Le filtre fractionnaire*

$$F(s) = \frac{1}{\tau_c s^{\alpha+1} + 1 - e^{-\theta s}} \quad \text{où} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.38)$$

est stable si et seulement si, la constante de temps τ_c du modèle de référence fractionnaire imposé à la boucle fermée, satisfait la condition

$$\tau_c > \frac{2 \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \theta^{\alpha+1}}{[(2-\alpha)\pi]^{\alpha+1}} \quad (3.39)$$

Démonstration.

Pour établir la démonstration, la méthode de Walton-Marshall décrite dans la chapitre (1) est utilisée. Habituellement, l'analyse de la stabilité en utilisant cette méthode consiste à rechercher les valeurs du retard θ pour lesquelles le système est stable. Cependant, l'objectif n'est pas de trouver la valeur limite du retard θ mais de trouver la valeur de la constante de temps τ_c pour laquelle le filtre fractionnaire sera stable. Soit donc le pseudo-polynôme

$$\delta(s, \theta) = 1 + \tau_c s^{\alpha+1} - e^{-\theta s} \quad (3.40)$$

lorsque $\theta = 0$, l'équation (3.40) devient

$$\delta(s, 0) = \tau_c s^{\alpha+1} = 0 \quad (3.41)$$

La solution est $s = 0$, toutefois, cette solution n'affecte pas la stabilité du filtre vu qu'elle est utilisée pour factoriser le contrôleur entier en un contrôleur PID usuel.

Par la suite, on cherche les points d'intersection avec l'axe imaginaire. Substituons $s = \pm j\omega$ dans l'équation (3.40)

$$\delta(j\omega, \theta) = 1 + \tau_c (j\omega)^{\alpha+1} - e^{-j\theta\omega} \quad (3.42)$$

on sait que $(j\omega)^{\alpha+1} = \omega^{\alpha+1} [\cos((\alpha+1)\frac{\pi}{2}) + j\sin((\alpha+1)\frac{\pi}{2})]$, ce qui donne

$$\delta(\omega, \theta) = 1 + \tau_c \omega^{\alpha+1} \left[\cos\left((\alpha+1)\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left((\alpha+1)\frac{\pi}{2}\right) \right] - e^{-j\theta\omega} \quad (3.43)$$

les polynômes $D(j\omega)$ et $N(j\omega)$ sont donnés par

$$D(j\omega) = 1 + \tau_c \omega^{\alpha+1} \left[\cos\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right) \right], \quad N(j\omega) = 1 \quad (3.44)$$

Pour éliminer le terme exponentiel, on calcule $W(\omega^{\alpha+1}) = D(j\omega)D(-j\omega) - N(j\omega)N(-j\omega)$, on obtient

$$W(\omega^{\alpha+1}) = \left(1 + \tau_c \omega^{\alpha+1} \cos\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right)\right)^2 + \left(\tau_c \omega^{\alpha+1} \sin\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right)\right)^2 - 1 \quad (3.45)$$

qui est égale à

$$W(\omega^{\alpha+1}) = 1 + 2\tau_c \omega^{\alpha+1} \cos\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right) + \tau_c^2 \omega^{2(\alpha+1)} \cos^2\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right) + \tau_c^2 \omega^{2(\alpha+1)} \sin^2\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right) - 1 \quad (3.46)$$

qui après quelques calculs, est égale à

$$W(\omega^{\alpha+1}) = \tau_c \omega^{\alpha+1} \left(2 \cos\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right) + \tau_c \omega^{\alpha+1}\right) \quad (3.47)$$

$W(\omega^{\alpha+1})$ est égale à 0 lorsque $\omega^{\alpha+1} = 0$ (cette solution est ignorée). L'autre solution est donnée par

$$\omega^{\alpha+1} = -\frac{2}{\tau_c} \cos\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right) = \frac{2}{\tau_c} \sin(\alpha\pi/2) \quad (3.48)$$

Comme $0 < \alpha < 1$ cette solution est positive, ce qui implique qu'il existe une valeur de τ_c pour laquelle $\delta(\omega, \theta) = 0$ possède des racines sur l'axe imaginaire. Nous devons tester ces racines pour voir si elles sont stabilisantes ou déstabilisantes. Pour ce faire, on analyse le signe de la dérivée de $W(\omega_c^{\alpha+1})$ par rapport à $\omega_c^{\alpha+1}$, donnée par

$$W'(\omega_c^{\alpha+1}) = 2\tau_c \cos\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right) + 2\tau_c^2 \omega_c^{\alpha+1} \quad (3.49)$$

en substituant $\omega_c^{\alpha+1}$ par la solution $\frac{2}{\tau_c} \sin(\alpha\pi/2)$ dans l'équation (3.49), il vient

$$W'(\omega_c^{\alpha+1}) = 2\tau_c \cos\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right) + 2\tau_c^2 \left(-\frac{2}{\tau_c} \cos\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right)\right) \quad (3.50)$$

qui est égale à

$$W'(\omega_c^{\alpha+1}) = -2\tau_c \cos\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right) = 2\tau_c \sin(\alpha\pi/2) > 0 \quad (3.51)$$

Comme le signe de $(W'(\omega_c^{\alpha+1}))$ est positif, la racine $\omega_c^{\alpha+1} = \frac{2}{\tau_c} \sin(\alpha\pi/2)$ est déstabilisante. Par conséquent, il existe une valeur de τ_c limite dont le système est stable pour des valeurs de τ_c inférieures à cette valeur. Pour trouver cette valeur limite, nous devons résoudre

l'équation (3.40) pour $\omega_c^{\alpha+1} = \frac{2}{\tau_c} \sin(\alpha\pi/2)$. En séparant la partie réelle de la partie imaginaire de cette équation il vient

$$\begin{aligned} 1 + \tau_c \omega_c^{\alpha+1} \cos\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right) &= \cos(\omega\theta) \\ \tau_c \omega_c^{\alpha+1} \sin\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right) &= -\sin(\omega_c\theta) \end{aligned} \quad (3.52)$$

alors

$$\tan(\omega_c\theta) = \frac{-\tau_c \omega_c^{\alpha+1} \sin\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right)}{1 + \tau_c \omega_c^{\alpha+1} \cos\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right)} \quad (3.53)$$

comme $\omega_c^{\alpha+1} = \frac{2}{\tau_c} \cos(\alpha\pi/2)$, on a

$$\tan(\omega_c\theta) = \frac{2 \cos\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right)}{1 - 2 \cos\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right)} \quad (3.54)$$

en utilisant les transformations trigonométriques $2 \sin(a) \cos(a) = \sin(2a)$, et $1 + \cos(a) = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$, on obtient

$$\tan(\omega_c\theta) = \frac{-\sin((\alpha+1)\pi)}{\cos((\alpha+1)\pi)} = \quad (3.55)$$

en utilisant les transformations $\sin(\pi \pm a) = -\mp \sin(a)$ et $\cos(\pi \pm a) = -\cos(a)$, on obtient

$$\tan(\omega_c\theta) = -\frac{\sin(\alpha\pi)}{\cos(\alpha\pi)} \quad (3.56)$$

les angles $\omega_c\theta$ et $\alpha\pi$ doivent être de signe opposé, puisque ω_c est positif, finalement, on obtient $\omega_c\theta = -\alpha\pi = 2\pi - \alpha\pi$ donc $\omega_c = \frac{(2-\alpha)\pi}{\theta}$.

Les racines de $\delta(\omega, \theta)$ se situent dans le demi plan gauche si et seulement si

$$\omega < \frac{(2-\alpha)\pi}{\theta} \quad \text{or} \quad \omega^{\alpha+1} < \left[\frac{(2-\alpha)\pi}{\theta} \right]^{\alpha+1} \quad (3.57)$$

en remplaçant $\omega_c^{\alpha+1}$ par $\frac{2}{\tau_c} \sin(\alpha\pi/2)$ dans l'équation (3.57) il vient $\frac{2}{\tau_c} \sin(\alpha\pi/2) < \left[\frac{(2-\alpha)\pi}{\theta} \right]^{\alpha+1}$. au lieu de chercher la valeur de θ limite qui maintient la stabilité, on détermine la valeur de la constante de temps de la boucle fermée τ_c . Par conséquent, le filtre est stable si et seulement si

$$\tau_c > \frac{2 \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \theta^{\alpha+1}}{[(2-\alpha)\pi]^{\alpha+1}} \quad (3.58)$$

Ceci complète la démonstration ■

3.7 Implémentation du contrôleur de suivi de consigne

Le contrôleur de suivi de consigne $C(s)$ est synthétisé de sorte à imposer à la boucle ouverte constituée par le système à commander muni du contrôleur stabilisant la fonction idéale de Bode, comme le montre l'équation (3.35). Il est composé d'une partie entière en série avec un filtre fractionnaire. De plus, chacune de ces parties contient l'élément de retard, cela pose des difficultés pour son implémentation. Dans ce qui suit, on propose deux approches pour la mise en œuvre de ce contrôleur, la première est basée sur le prédictor de Smith et la deuxième est basée sur l'approximation du terme $e^{-\theta s}$ en utilisant respectivement l'approximation de Taylor et/ou l'approximation de Padé d'ordre 1.

3.7.1 Lorsque la boucle interne est stabilisée par un contrôleur Proportionnel

1. Implémentation basée sur le prédictor de Smith :

Dans ce premier cas, le terme $e^{-\theta s}$ n'est pas approximé, le prédictor de Smith est utilisé pour implémenter le filtre fractionnaire (voir figure 3.22). Le contrôleur $C(s)$ est factorisé selon

$$C = \frac{1}{\tau_c s^\alpha + \frac{1-e^{-\theta s}}{s}} \left(\frac{\tau s - 1}{G_0 s} + \frac{K e^{-\theta s}}{s} \right) \quad (3.59)$$

2. Implémentation basée sur l'approximation de Taylor ($e^{-\theta s} \approx 1 - \theta s$) :

Lorsque l'approximation de Taylor d'ordre 1 est utilisée pour approximer le terme $e^{-\theta s}$, le contrôleur $C(s)$ s'écrit sous la forme

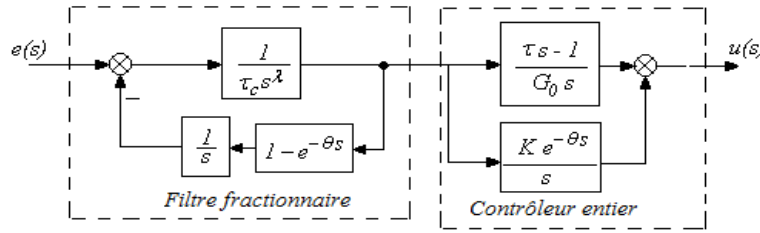
$$C = \frac{1}{\tau_c s^\alpha + \frac{1-1+\theta s}{s}} \frac{\tau s - 1 + K G_0 - K G_0 \theta s}{G_0 s} \quad (3.60)$$

qui peut être mis sous la forme d'un contrôleur Proportionnel-Intégral en cascade avec un filtre fractionnaire

$$C = \frac{1}{1 + \frac{\tau_c}{\theta} s^\alpha} K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \quad (3.61)$$

où

$$K_p = \frac{\tau - K G_0 \theta}{G_0 \theta} \quad \text{et} \quad \tau_i = \frac{\tau - K G_0 \theta}{K G_0 - 1} \quad (3.62)$$

FIG. 3.22: Structure du contrôleur fractionnaire des équations (3.59 et 3.66 avec $b = 0$)

3. Implémentation basée sur l'approximation de Padé $\left(e^{-\theta s} \approx \frac{1 - \frac{\theta}{2}s}{1 + \frac{\theta}{2}s}\right)$:

Si le terme $e^{-\theta s}$ est approximé en utilisant l'approximation de Padé d'ordre 1, on obtient

$$C = \frac{1}{(1 + \frac{\theta}{2}s)\tau_c s^\alpha + \theta} \frac{(\tau s - 1)(1 + \frac{\theta}{2}s) + KG_0(1 - \frac{\theta}{2}s)}{G_0 s} \quad (3.63)$$

qui peut être factorisé comme suit

$$C = \frac{1}{\frac{\tau_c}{2}s^{\alpha+1} + \frac{\tau_c}{\theta}s^\alpha + 1} K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right) \quad (3.64)$$

Dans ce cas, le contrôleur obtenu est un PID en cascade avec un filtre fractionnaire, les paramètres de PID sont donnés par

$$K_p = \frac{\tau - \frac{\theta}{2} - \frac{KG_0\theta}{2}}{\theta G_0}, \quad \tau_i = \frac{\tau - \frac{\theta}{2} - \frac{KG_0\theta}{2}}{G_0 K - 1}, \quad \tau_d = \frac{\frac{\theta\tau}{2}}{\tau - \frac{\theta}{2} - \frac{KG_0\theta}{2}} \quad (3.65)$$

3.7.2 Lorsque la boucle interne est stabilisée avec un contrôleur PD

1. Implémentation basée sur le prédicteur de Smith :

On suit la même procédure comme dans le cas précédent, le contrôleur stabilisant est de type PD, le contrôleur $C(s)$ prend la forme

$$C = \frac{1}{\tau_c s^\alpha + \frac{1-e^{-\theta s}}{s}} \left(\frac{\tau s - 1}{G_0 s} + \frac{K(bs + 1)e^{-\theta s}}{s} \right) \quad (3.66)$$

La figure (3.22) représente la structure du contrôleur fractionnaire donné par les équations (3.59) et (3.66) avec $b = 0$.

2. Approximation de Padé d'ordre 1 :

On approximant le retard de $C(s)$ par l'approximation de Padé d'ordre 1, il vient

$$C = \frac{1}{\frac{\tau_c}{2}s^{\alpha+1} + \frac{\tau_c}{\theta}s^{\alpha+1}} \frac{\frac{\theta}{2}(\tau - KG_0b)s^2 + ((\tau - \theta/2) + KG_0(b - \theta/2))s + KG_0 - 1}{G_0\theta s} \quad (3.67)$$

Le contrôleur $C(s)$ peut être mis sous la forme d'un PID entier en série avec un filtre fractionnaire, les paramètres de PID obtenus sont

$$K_p = \frac{(\tau - \frac{\theta}{2}) + KG_0(b - \frac{\theta}{2})}{G_0\theta}, \quad \tau_i = \frac{(\tau - \frac{\theta}{2}) + KG_0(b - \frac{\theta}{2})}{KG_0 - 1}, \quad \tau_d = \frac{\frac{\theta}{2}(\tau - KG_0b)}{(\tau - \frac{\theta}{2}) + KG_0(b - \frac{\theta}{2})} \quad (3.68)$$

Remarque 4 *Lorsqu'on utilise les séries de Taylor d'ordre 1 pour approximer le terme $e^{-\theta s}$, on obtient une sortie divergente vu que la valeur du rapport θ/τ est comprise entre 1 et 2.*

3.8 Exemples numériques

Afin de valider et montrer l'efficacité de la méthode proposée, des exemples de simulations ont été effectués. Deux systèmes différents issus de la littérature sont considérés. Le premier est un système du premier ordre instable à retard dont le rapport $\frac{\theta}{\tau}$ est supérieur à l'unité et le deuxième est toujours un système du premier ordre instable à retard avec $\frac{\theta}{\tau}$ est inférieur à 1. Le schéma de simulation est celui de la figure (3.23), où $G(s)$ désigne la fonction de transfert du système à commander, $C(s)$ est le contrôleur de suivi de consigne, $C_s(s)$ est le contrôleur stabilisant, $G_D(s)$ est la fonction de transfert de perturbation, $y_{ref}(s)$ désigne l'entrée de référence qui est un échelon unitaire appliqué à l'instant $t = 0$, $d(s)$ est la perturbation et $w(s)$ désigne un bruit ajouté au signal de sortie. L'opérateur fractionnaire est approximé en utilisant la méthode CRONE dans la bande de fréquences $[10^{-6}, -10^3]$ avec 15 cellules.

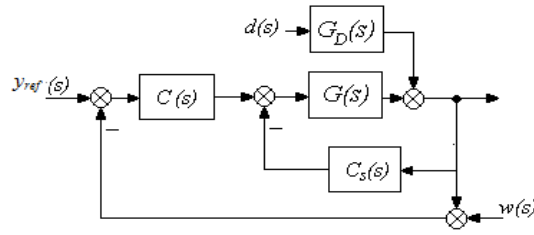


FIG. 3.23: Schéma de simulation

3.8.1 Exemple 1

Dans cet exemple, on considère un système du premier ordre instable à retard dont la valeur du rapport $\frac{\theta}{\tau}$ est comprise entre 1 et 2 [60, 36]. Les paramètres du modèle sont : $G_0 = 1$, $\tau = 1$ et $\theta = 1.2$.

Le rapport $\frac{\theta}{\tau}$ étant supérieur à 1, le contrôleur stabilisant est du type PD. A partir de la figure (1.5), la valeur optimale de $\frac{b}{\tau}$ est 0.48, les valeurs de K_m et K_M sont obtenus à partir de la figure (1.6), on trouve $[K_m, K_M] = [1, 1.35]$. Le contrôleur stabilisant est donné par $C_s(s) = 1.09(0.48s + 1)$. La fonction de transfert du modèle de référence est $f(s) = \frac{1}{1+3s^{1.2}}$. Les paramètres du contrôleur PID et du filtre fractionnaire de $C(s)$ sont résumés dans le tableau (3.1).

La consigne $y_{ref}(s)$ est un échelon unitaire appliqué à l'instant $t = 0$ et la perturbation $d(s)$ est un échelon négatif d'amplitude 0.01 appliqué à l'instant $t = 35$, la fonction de transfert de perturbation $G_D(s)$ choisie est $G_D(s) = \frac{e^{-1.2s}}{s-1}$

La figure (3.24) montre l'évolution de la sortie du système et la figure (3.25) illustre l'influence d'un bruit gaussien d'amplitude 0.12 en utilisant deux méthodes, la première est la méthode basée sur le prédicteur de Smith et la deuxième est celle basée sur l'approximation de Padé d'ordre 1 pour l'implémentation du contrôleur $C(s)$. On constate que les deux méthodes donnent de bons résultats, mais on remarque que la méthode basée sur l'approximation de Padé est très sensible aux incertitudes des paramètres du modèle. Cela est constaté lorsqu'on a appliqué une variation de $\pm 5\%$ sur les paramètres G_0 , τ et θ du modèle, comme le montre les figures (3.26), (3.27) et (3.28) respectivement.

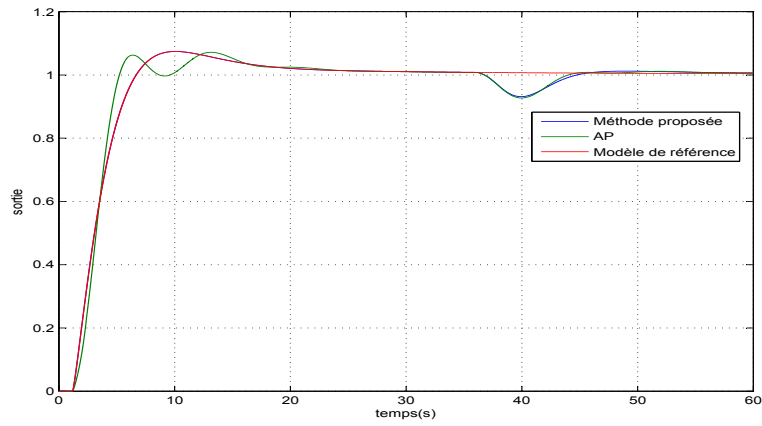


FIG. 3.24: Réponses indicielles de la boucle fermée avec perturbations.

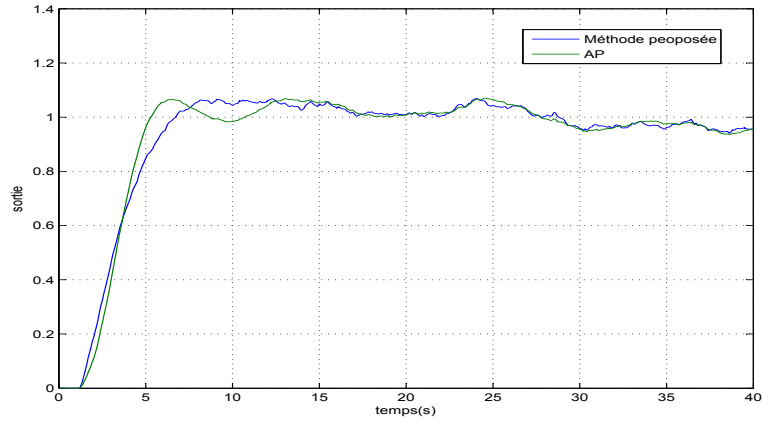


FIG. 3.25: Réponses indicielles de la boucle fermée avec bruit.

TAB. 3.1: Paramètres du contrôleur PID et du filtre fractionnaire constituant $C(s)$ pour l'exemple 1 : (AP : Approximation de Padé d'ordre 1)

Méthode	filtre fractionnaire	K_p	τ_i	τ_d
AP	$\frac{1}{1+2.5s^{0.2}+1.5s^{1.2}}$	0.2243	2.9911	1.0627

Cet exemple montre que les résultats obtenus en utilisant la méthode basée sur le prédicteur de Smith sont meilleurs en les comparant avec ceux obtenus lorsque le terme $e^{-\theta s}$ est approximé en utilisant l'approximation de Padé d'ordre 1.

Dans l'exemple suivant, la méthode proposée sera comparée avec deux autres méthodes proposées dans [60, 36].

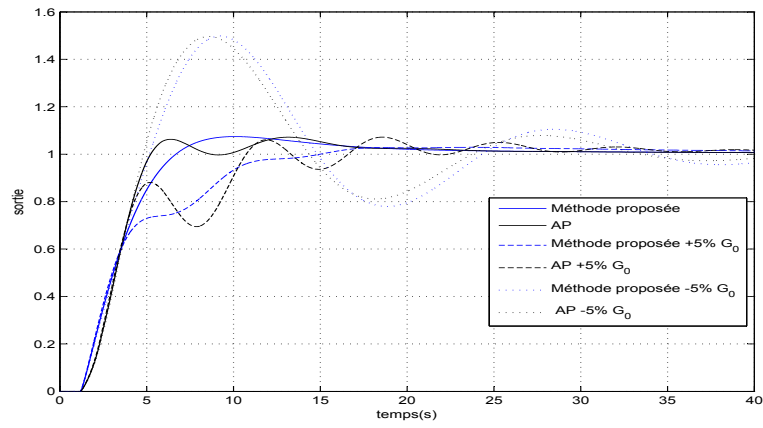


FIG. 3.26: Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation de 5% sur G_0 .

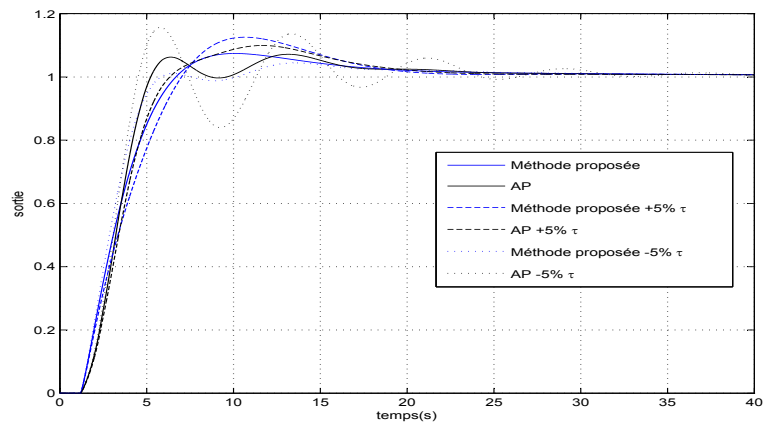


FIG. 3.27: Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation de 5% sur τ .

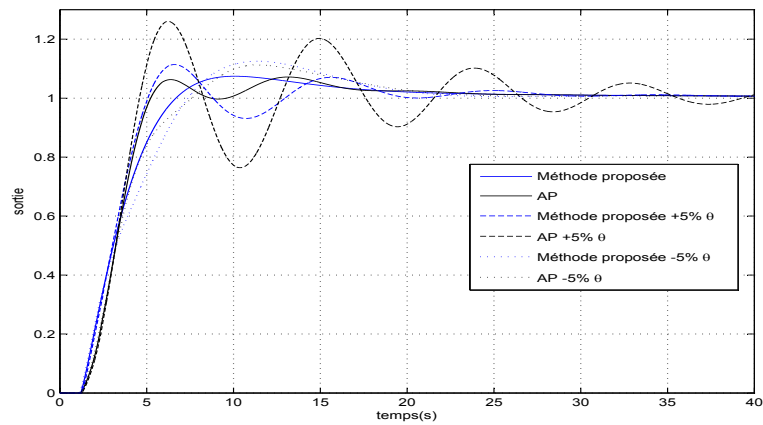


FIG. 3.28: Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation de 5% sur θ .

3.8.2 Exemple 2

Nous considérons le modèle d'un système instable du premier ordre à retard très souvent rencontré dans la littérature [60, 36] où $G_0 = 1$, $\tau = 1$ et $\theta = 0.4$.

Le contrôleur fractionnaire est synthétisé par la méthode proposée basée sur le prédicteur de Smith. Ce contrôleur est comparé à deux autres contrôleurs entiers issues des méthodes proposées dans [60] et [36].

Le contrôleur obtenu, en utilisant la méthode proposée dans [36] est mis sous forme d'un PID entier en utilisant la procédure donnée par Lee et al. [35]. Le contrôleur de PID est

$$C = 2.634 \left(1 + \frac{1}{2.52 s} + 0.154 s \right) \quad (3.69)$$

Pour réduire l'amplitude du dépassement de la réponse indicielle en boucle fermée, le pré-filtre $f_p(s) = \frac{1}{2.1452 s + 1}$ est inséré dans la chaîne directe avant le comparateur.

Dans la méthode proposée dans [60], une autre approche est employée pour réduire la complexité du contrôleur obtenu. le contrôleur obtenu est approximé par un contrôleur PID suivi d'un filtre du premier ordre.

$$C = \frac{1.5779 s + 1}{0.1053 s + 1} \quad 0.4615 \left(1 + \frac{1}{0.2667 s} + 0.1 s \right) \quad (3.70)$$

Pour réduire l'amplitude du dépassement de la réponse indicielle en boucle fermée, un pré-filtre dont la fonction de transfert est $f_p(s) = \frac{1}{1.5779 s + 1}$ est également inséré dans la chaîne directe de la boucle de commande.

Pour évaluer les performances des contrôleurs obtenus en utilisant notre méthode et celles des contrôleurs proposés dans [36] et [60], respectivement, les trois contrôleurs sont calculés de sorte à avoir le même dépassement de la réponse indicielle en boucle fermée. Par conséquent, le modèle de référence choisi pour la synthèse du contrôleur fractionnaire est $f(s) = \frac{1}{1+s^{1.1}}$.

Le contrôleur stabilisant est un contrôleur Proportionnel vu que le rapport $\theta/\tau = 0.4$; à partir de la figure (1.3), on trouve $C_s(s) = 2.02$. La fonction de transfert de contrôleur de suivi de consigne est donnée par

$$C(s) = \frac{1}{s^{0.1} + \frac{1-e^{-0.4s}}{s}} \left(\frac{s-1}{s} + \frac{2.02e^{-0.4s}}{s} \right) \quad (3.71)$$

On introduit une consigne et des perturbations de type échelon aux instants $t = 0$ et $t = 10$, respectivement. Les résultats de simulation obtenus sont montrés dans la figure (3.29). On remarque que le suivi de consigne et le rejet de perturbations s'effectuent plus rapidement en utilisant le contrôleur proposé dans [60]. Cependant, les résultats obtenus en utilisant notre méthode peuvent être améliorés en réduisant la valeur de la constante de temps du modèle de référence.

Pour assurer une bonne comparaison, un bruit blanc de variance unité est ajouté à la sortie du système. Les résultats de simulation obtenus avec les trois contrôleurs sont montrés dans la figure (3.30). Cette figure montre que les performances de la boucle fermée sont nettement meilleures en utilisant la méthode proposée.

Pour évaluer la robustesse du système de commande vis à vis des variations des paramètres du système, des changements de $\pm 20\%$ sont introduits dans les valeurs du gain statique G_0 , de la constante de temps τ et du retard θ . Les figures (3.31), (3.32) et (3.33) montrent les résultats de simulation obtenus avec la méthode proposée et les méthodes proposées dans [36] et [60], respectivement, pour une variation de $\pm 20\%$ du gain statique G_0 . Les figures (3.34) à (3.36), montrent les résultats de simulation obtenus pour une variation $\pm 20\%$ de la constante du temps τ , les figures (3.37) à (3.39) donnent les résultats de simulation obtenus pour une variation $\pm 20\%$ du paramètre θ .

La robustesse du système de commande est évaluée en utilisant deux critères qui sont.

- La différence de dépassement et de temps de réponse du système en boucle fermée entre la valeur nominale (sans variations) et la valeur obtenue pour $\pm 20\%$ des paramètres G_0 , τ et θ .

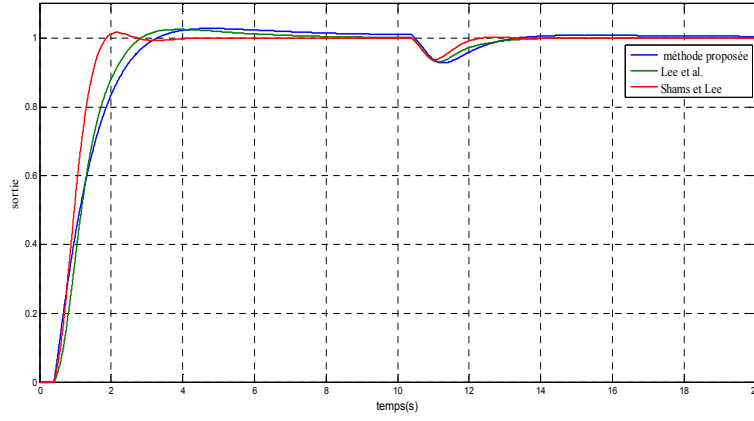


FIG. 3.29: Réponses indicielles de la boucle fermée.

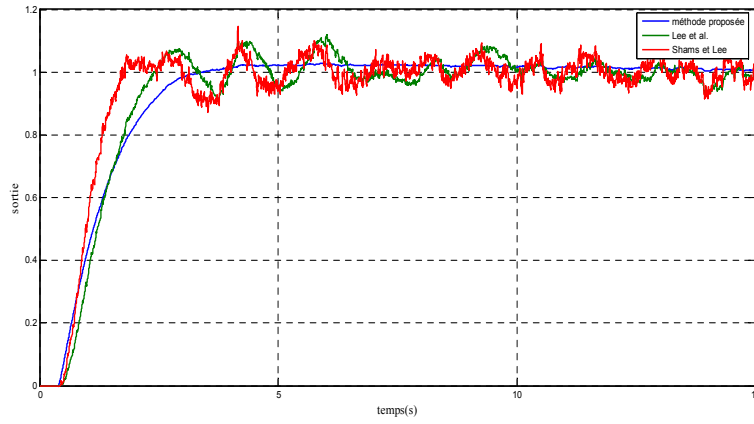


FIG. 3.30: Réponses indicielles de la boucle fermée avec bruit

- L'intégrale de la valeur absolue de l'erreur (IAE) définie par

$$IAE = \int_0^{\infty} |y_{NV}(t) - y_{20\%}(t)| dt \quad (3.72)$$

avec : $y_{NV}(t)$ est la sortie du système pour la valeur nominale des paramètres et $y_{20\%}(t)$ est la sortie obtenue en faisant varier les paramètres de 20%.

Les tableaux (3.2), (3.3) et (3.4) résument les résultats obtenus en faisant varier la valeur du gain statique G_0 , la valeur de la constante du temps τ et la valeur du retard θ , respectivement. On note par, M1 la méthode proposée, M2 la méthode de Yongho et al. [36] et M3 la méthode de Shamsuzzoha [60]. On constate que la variation des paramètres affecte les performances du système, approximativement, de la même façon.

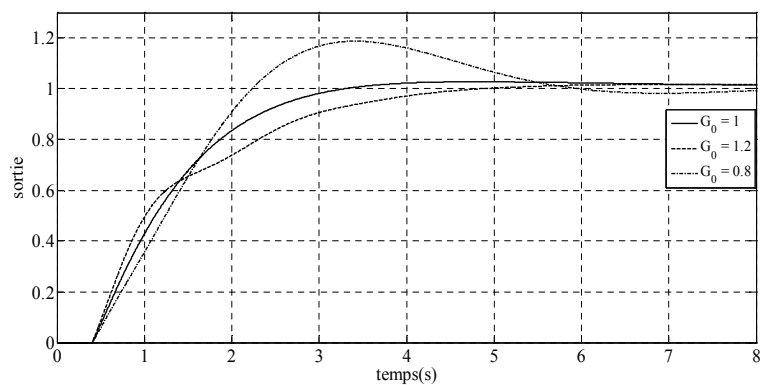


FIG. 3.31: Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation sur G_0 : Méthode proposée

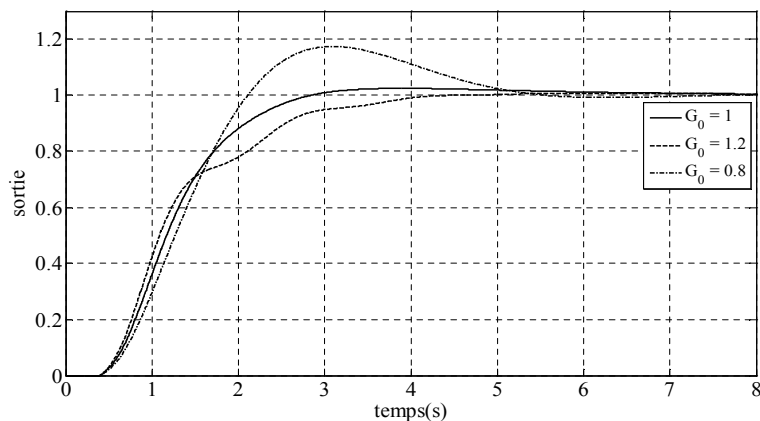


FIG. 3.32: Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation sur G_0 : Méthode proposée dans [36].

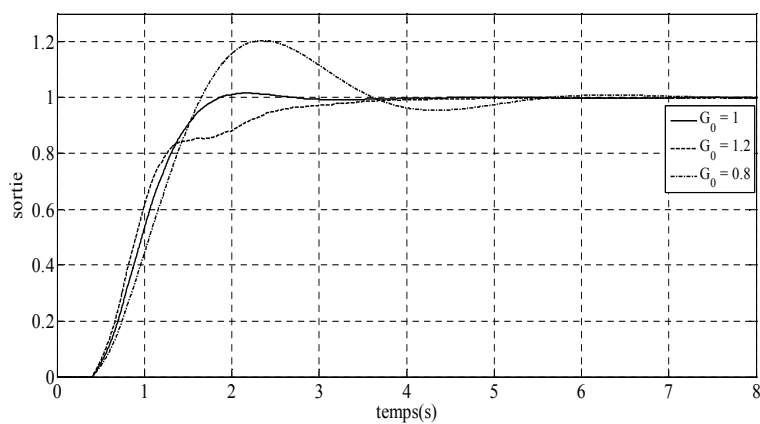


FIG. 3.33: Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation sur G_0 : Méthode proposée dans [60].

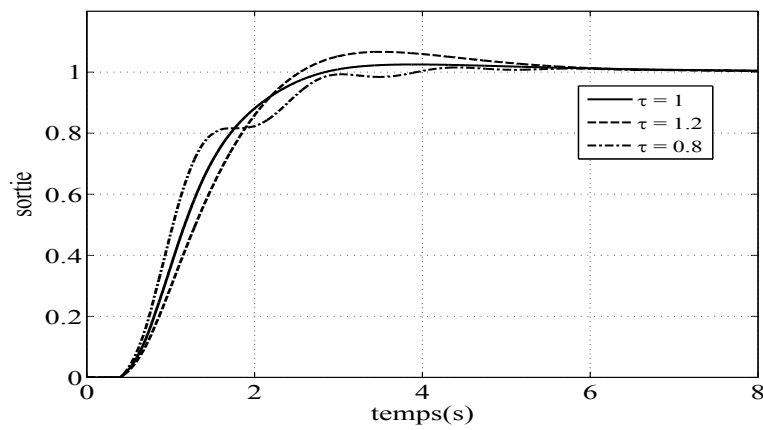


FIG. 3.34: Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation sur τ : Méthode proposée.

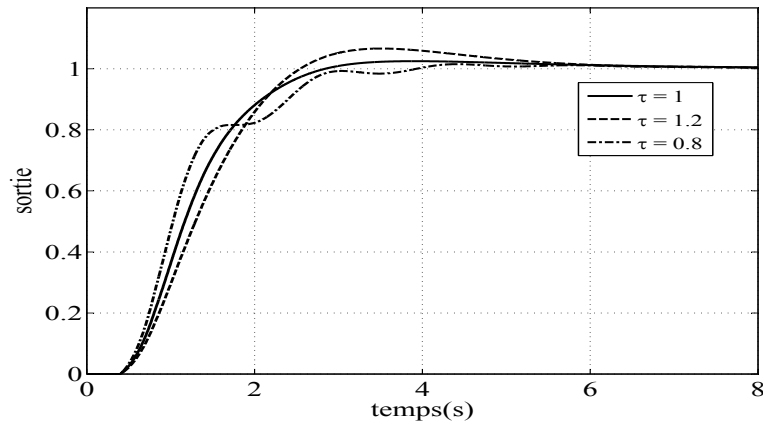


FIG. 3.35: Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation sur τ : Méthode proposée dans [36].

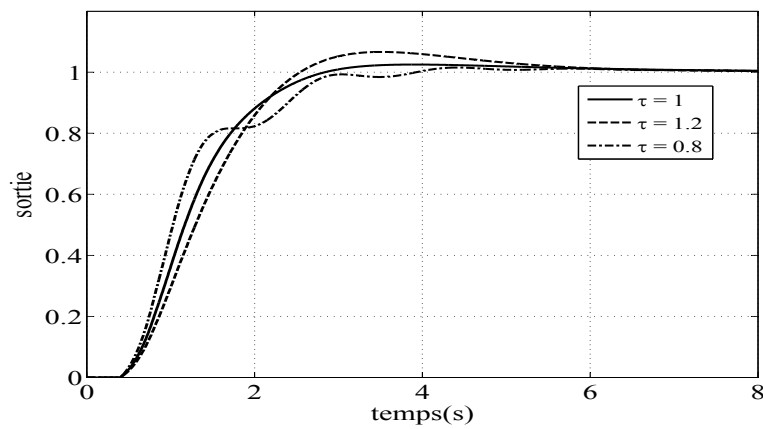


FIG. 3.36: Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation sur τ : Méthode proposée dans [60].

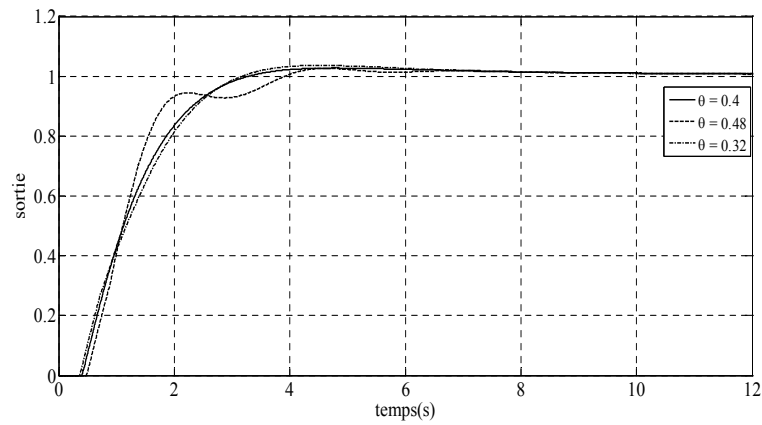


FIG. 3.37: Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation sur θ : Méthode proposée.

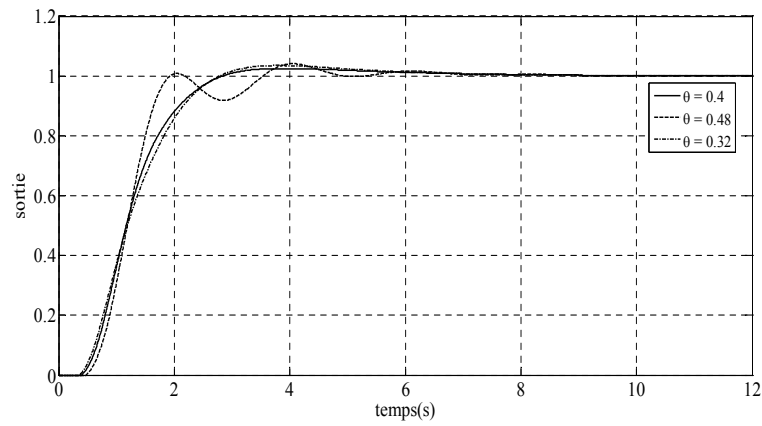


FIG. 3.38: Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation sur θ : Méthode proposée dans [36].

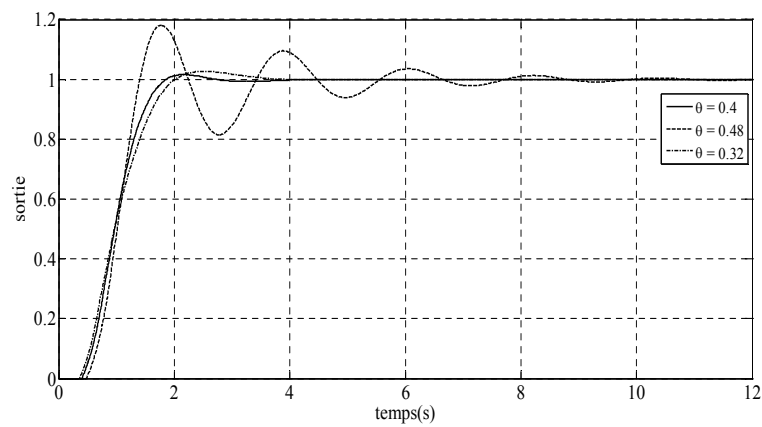


FIG. 3.39: Réponses indicielles de la boucle fermée avec variation sur θ : Méthode proposée dans [60].

TAB. 3.2: Performances de la boucle fermée en fonction de variations de G_0 .

	Dépassement %			Temps de réponse			IAE	
Méthode	N.V	+20%	-20%	N.V	+20%	-20%	+20%	-20%
M1	1.79	1.47	22.48	3.10	4.92	7.49	0.03	0.06
	-	(-0.32)	(+20.69)	-	(+1.82)	(+4.39)		
M2	2.23	0.50	16.93	4.55	3.85	5.04	0.02	0.04
	-	(-1.73)	(+14.7)	-	(-0.7)	(+0.49)		
M3	1.99	0	20.31	1.79	3.26	5.16	0.02	0.04
	-	(-1.99)	(+18.32)	-	(+1.47)	(+3.37)		

TAB. 3.3: Performances de la boucle fermée en fonction de variations de τ .

	Dépassement %			Temps de réponse			IAE	
Méthode	N.V	+20%	-20%	N.V	+20%	-20%	+20%	-20%
M1	1.79	7.28	6.75	3.10	5.62	8.82	0.02	0.04
	-	(+5.49)	(+4.96)	-	(+2.52)	(+5.72)		
M2	2.23	6.31	1.30	4.55	5.42	2.83	0.02	0.02
	-	(+4.08)	(-0.93)	-	(+0.87)	(-1.72)		
M3	1.99	8.83	0.00	1.79	3.46	3.21	0.02	0.03
	-	(+6.84)	(-1.99)	-	(+1.67)	(+1.42)		

TAB. 3.4: Performances de la boucle fermée en fonction de variations de θ .

	Dépassement %			Temps de réponse			IAE	
Méthode	N.V	+20%	-20%	N.V	+20%	-20%	+20%	-20%
M1	1.79	11.33	3.97	3.10	9.00	5.86	0.05	0.01
	-	(+9.54)	(+2.18)	-	(+5.6)	(+2.76)		
M2	2.23	7.80	4.21	4.55	9.18	5.59	0.03	0.01
	-	(+5.57)	(+1.98)	-	(+4.63)	(+1.04)		
M3	1.99	17.02	3.93	1.79	5.34	3.49	0.05	0.02
	-	(+15.03)	(+1.94)	-	(+3.55)	(+1.7)		

3.9 Conclusion

Une structure à 2DDL a été proposée dans ce chapitre, afin de commander un système du premier ordre instable à retard, deux contrôleurs ont été utilisés, un pour stabiliser le système instable et le deuxième contrôleur sert à commander le modèle stabilisé.

Le contrôleur $C(s)$ est un contrôleur fractionnaire ayant une forme simple à implémenter. C'est pourquoi, nous faisons toujours en sorte que ce dernier soit un filtre fractionnaire en série avec un contrôleur PI ou PID. De plus le contrôleur $C(s)$ doit être stable afin de maintenir la stabilité interne du système en boucle fermée.

Néanmoins, le système à commander étant un système à retard, le terme $e^{-\theta s}$ pose alors un problème, deux solutions sont alors adoptées :

La première consiste à approximer le terme $e^{-\theta s}$ en utilisant l'approximation de Padé ou de Taylor, mais il est connu que ces approximations sont valables que lorsque le rapport θ/τ est petit, de plus, les régulateurs obtenus sont très sensibles aux variations des paramètres (comme nous l'avons montré à travers les exemples que nous avons présentés).

Pour éviter ce problème, nous avons proposé une autre manière de réaliser le contrôleur $C(s)$, c'est la structure de la figure (3.22). Dans ce cas, on évite les approximations et cette structure est bien plus robuste que les structures utilisant des régulateurs PI ou PID.

Dans le prochain chapitre, la structure de commande à deux degrés de liberté sera appliqué sur un banc d'essai expérimental (le pendule inversé monté sur un chariot) afin de le maintenir dans sa position d'équilibre instable (position haute) et d'asservir la position du chariot.

Chapitre 4

Application de commande à 2DDL pour le contrôle d'un pendule inversé monté sur un chariot

4.1 Introduction

Le pendule inversé constitue un benchmark de choix pour la commande des systèmes non linéaires. En effet, les problèmes de commande posés dans un pendule inversé sont, sensiblement, les mêmes que ceux rencontrés à une échelle plus grande dans les grues, les systèmes de transportation industriels (segway, B2) et en robotique [48]. Le pendule inversé est parmi les systèmes les plus difficiles à commander dans le domaine de l'automatique, Il est très utilisé afin de tester l'efficacité des méthodes de commande développées théoriquement.

Les systèmes réels sont dans la plupart du temps non linéaires, ont des paramètres variables et sont soumis à des perturbations externes. La modélisation de ces systèmes mène très souvent à des modèles non linéaires, c'est pourquoi, déterminer une loi de commande pour ce type de système reste une tâche très difficile. La linéarisation de ces systèmes est nécessaire. Or, c'est à partir de cette représentation approximative des systèmes que

l'on souhaite construire une loi de commande pour le système réel. Cette commande doit, alors, être robuste dans le sens où elle devra assurer une faible sensibilité aux incertitudes sur les paramètres et aux perturbations externes. La linéarisation d'un système non linéaire complexe peut être de même complexité, comme exemple, on cite le cas où le modèle linéarisé qui décrit le système non linéaire est d'ordre élevée, dans cas, afin de limiter l'ordre de la fonction de transfert, on choisit d'inclure un retard, lors de la phase d'approximation. Ce retard permet alors de décrire une partie de la dynamique du système d'une manière plus simple qu'en utilisant un ordre plus élevé.

La commande d'un pendule simple consiste à le redresser en utilisant une commande non linéaire et le maintenir stable dans sa position d'équilibre instable (position haute). Cependant, lorsqu'il s'agit d'un pendule inversé monté sur un chariot mobile, sa commande consiste à :

- d'abord, redresser le pendule inversé depuis sa position stable (position basse) vers sa position instable (position haute). On utilise pour cela une loi de commande non linéaire (cette partie n'est pas abordée dans cette thèse).
- maintenir stable le pendule dans sa position d'équilibre instable (position haute).
- asservir la position du chariot toute en maintenant le pendule stable.

Ce sont ces deux derniers points qui feront l'objet de ce dernier chapitre, dans lequel nous utiliserons le schéma de commande à 2DDL. Les détails sur la commande de redressement est bien présentés dans [10].

Il faut noter, la complexité de la commande d'un tel système car il ne dispose que d'une seule grandeur de commande (la force exercée par le chariot) pour contrôler l'angle de rotation du pendule et le déplacement du chariot (système sous actionné). Cette complexité est due au fait que l'action sur la force, permettant de déplacer le chariot vers une position donnée, déstabilise le pendule, et afin de le stabiliser, il faut déplacer le chariot dans le sens contraire afin de rattraper la chute du pendule.

La stratégie générale de la commande du pendule inversé monté sur un chariot est illustrée par le schéma fonctionnel de la figure (4.1).

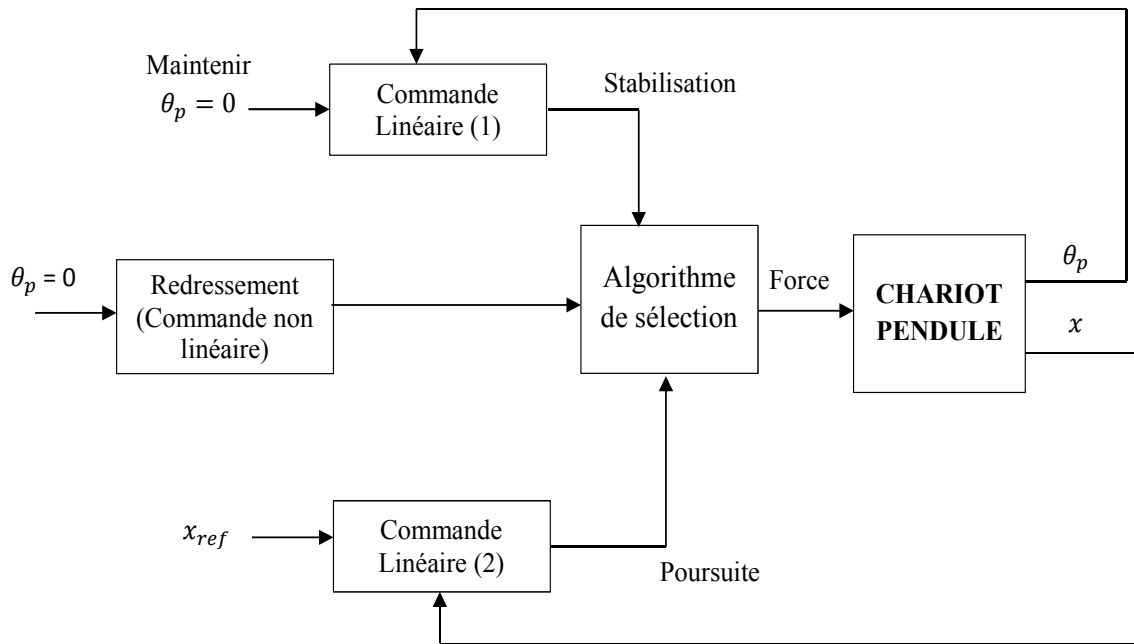


FIG. 4.1: Schéma du principe de commande du pendule inversé

Afin de maintenir la stabilité du pendule inversé, la commande de redressement est associée à la commande de stabilisation et la commande de poursuite, une loi de commutation appropriée entre les trois commandes (redressement, stabilisation et poursuite) est alors, nécessaire. Dans notre cas, on applique la commutation quand la valeur absolue de l'angle est au voisinage de $\pm 20^\circ$. Lorsque le pendule est situé dans la zone $\pm 0.2 \text{ rad}$ ($\pm 11^\circ$) autour de la position d'équilibre instable $\theta_p = 0$, la commande bascule du redressement vers la commande de stabilisation qui permet de le maintenir dans cette position, La troisième commande consiste à ramener l'ensemble chariot-pendule à une position désirée.

4.2 Description et modélisation de l'ensemble chariot-pendule

Le pendule inversé monté sur chariot (également appelé système chariot-pendule ; en anglais cart-pendulum system) se compose d'une tige en aluminium dont une masse de forme cylindrique est montée à son extrémité. Cette tige est montée sur un chariot mobile par une articulation pivotante permettant la rotation du pendule. Le mouvement de ro-

tation d'un moteur électrique est transformé, par l'intermédiaire d'un ensemble constitué de deux poulies et d'une courroie crantée, en mouvement de translation du chariot. Le déplacement du chariot dans un sens ou dans l'autre assure la rotation du pendule. Si le pendule est dans sa position instable haute, par exemple, quand le pendule penche vers la droite, le chariot agit pour le rattraper en effectuant un mouvement vers la droite et vice versa. La photo de la figure (4.2) représente une vue d'ensemble du pendule inversé monté sur un chariot.

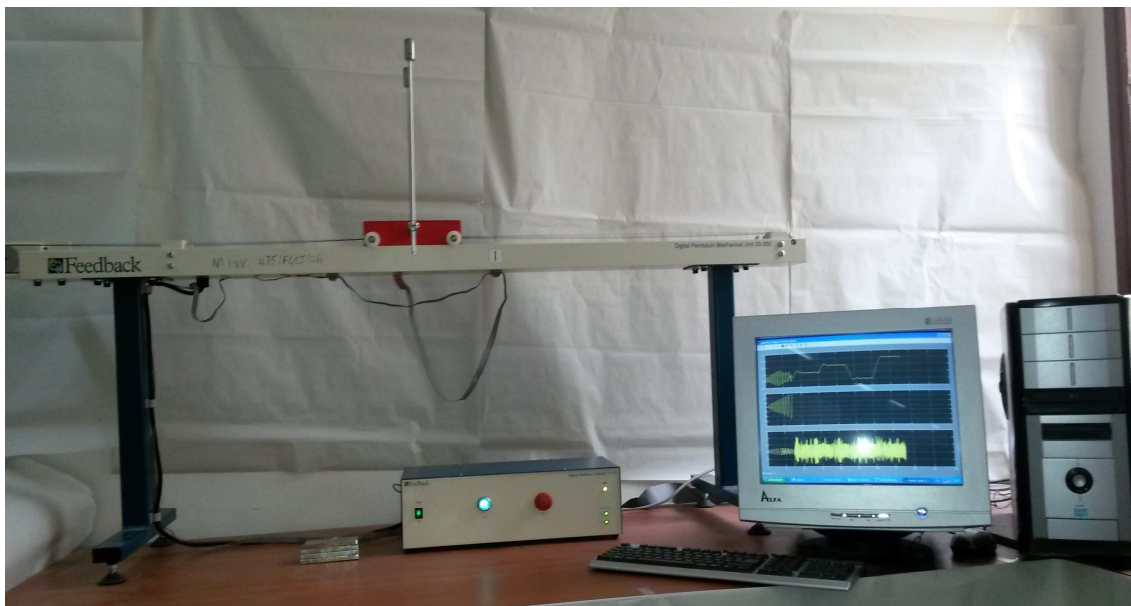


FIG. 4.2: Vue d'ensemble de banc d'essai expérimental du pendule inversé monté sur un chariot

La modélisation de l'ensemble chariot-pendule utilise le formalisme d'Euler-Lagrange [11]. Pour ce faire, les coordonnées généralisées sont : le déplacement horizontal du chariot (noté x) et l'angle de rotation du pendule (noté θ_p). On prend comme direction positive du déplacement du chariot x , le sens de gauche à droite et celui de l'angle θ_p est le sens des aiguilles d'une montre, comme le montre la figure (4.3).

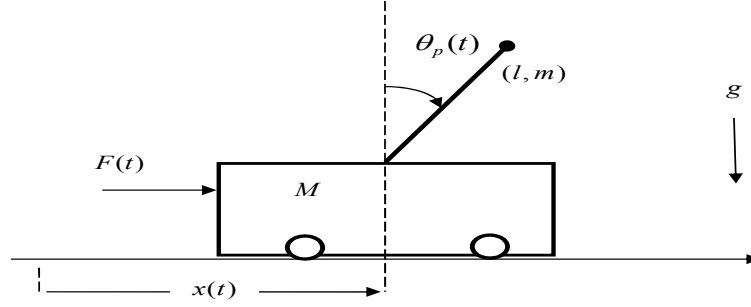


FIG. 4.3: Schéma de modélisation de l'ensemble chariot-pendule

Le modèle complet décrivant le comportement dynamique du système pendule-chariot est donné par l'équation (4.1), le lecteur désirant connaître les détails de cette modélisation peut consulter les références [10] et [34].

$$\begin{cases} h\ddot{x} + b\dot{x} + ml\dot{\theta}_p \cos(\theta_p) - ml\dot{\theta}_p^2 \sin(\theta_p) = F \\ ml\ddot{x} \cos(\theta_p) + N\ddot{\theta}_p + d\dot{\theta}_p - mgl \sin(\theta_p) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

avec $h = (M + m)$ and $N = (ml^2 + J)$, et où

M : Masse du chariot ($2.3(Kg)$), m : Masse du pendule ($0.2(Kg)$), l : Demi longueur de pendule ($0.36(m)$), g : Intensité de la pesanteur ($9.81(m/s^2)$), $F(t)$: Force exercée sur le chariot, b : Frottement de déplacement du chariot ($0.05(Ns/m)$), d : Frottement du pendule ($0.005(Nms/rad)$), J : Moment d'inertie du pendule $0.099(kg.m^2)$.

Le système d'équation (4.1) montre que l'accélération du chariot $\ddot{x}$ dépend de l'accélération du pendule $\ddot{\theta}_p$. Ainsi, lorsque le système n'est soumis à aucune force ($F(t) = 0$), donc le pendule est soumis qu'à sa propre inertie, si on déplace le pendule de sa position d'équilibre, ce dernier, se met à osciller en entraînant avec lui le chariot.

4.3 Synthèse des contrôleurs linéaires pour la commande du pendule inversé

Rappelons que la commande du pendule inversé se déroule en trois phases : redressement, stabilisation et poursuite. La première phase qui est le redressement permet de

ramener le pendule de sa position basse vers sa position haute, la stratégie de redressement utilisée est basée sur le théorème de stabilité de Lyapunov qui permet de faire converger l'énergie du système vers la valeur de l'énergie en position haute [10, 34]. La deuxième phase consiste à maintenir la tige du pendule dans sa position instable haute quelque soit le déplacement du chariot et quelque soit les perturbations éventuelles.

L'objectif de commande que nous développons étant la stabilisation du pendule et l'asservissement de la position du chariot, nous utilisons le modèle linéaire obtenu par linéarisation du modèle non linéaire (4.1) autour de point d'équilibre $\theta_p = 0$ [10].

Le modèle linéaire obtenu est : $\dot{X} = AX + Bu$, $y = CX$ où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-bN}{hN-m^2l^2} & \frac{-gm^2l^2}{hN-m^2l^2} & \frac{mld}{hN-m^2l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mlb}{hN-m^2l^2} & \frac{-mgl}{N} + \frac{m^3l^3g}{N(hN-m^2l^2)} & \frac{-d}{N} + \frac{m^2l^2d}{N(hN-m^2l^2)} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{N}{hN-m^2l^2} \\ 0 \\ \frac{-ml}{hN-m^2l^2} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

le vecteur d'état est

$$X = \begin{bmatrix} x & \dot{x} & \theta_p & \dot{\theta}_p \end{bmatrix}^T \quad (4.3)$$

Dans le schéma de commande de la figure (4.1), pour synthétiser les contrôleurs linéaires de stabilisation du pendule et d'asservissement de la position du chariot, nous avons besoins de calculer d'abord les fonctions de transfert entre l'angle θ_p et la force appliquée $F(t)$ d'un côté, et entre x et $F(t)$ de l'autre côté.

Ces deux fonctions de transfert étant instables citeBoussalem2012,Lahouazi2011, nous devons donc utiliser trois contrôleurs : un pour stabiliser le pendule d'un côté, d'un autre côté, nous utilisant une structure de commande à deux degrés de liberté afin d'asservir la position du chariot. Dans cette structure, un contrôleur est utilisé pour stabiliser le transfert entre x et $F(t)$ et un autre contrôleur pour faire suivre au chariot une position

de référence donnée.

D'un autre côté, les fonctions de transfert entre θ_p et $F(t)$ et entre x et $F(t)$ ayant le même polynôme caractéristique [10, 34], nous utilisons un seul contrôleur $C_s(s)$ permettant de stabiliser ces deux fonctions de transfert. Il reste donc qu'un seul contrôleur $C(s)$ permettant d'asservir la position du chariot à synthétiser. Nous utilisons donc la structure de commande à 2DDL de la figure (4.4).

Le modèle linéaire étant d'ordre 4, la synthèse du contrôleur $C_s(s)$ dans le domaine de Laplace est très complexe. D'un autre coté, afin de n'utiliser que des contrôleurs proportionnels, on se base sur le modèle d'état pour calculer une loi de commande stabilisante par retour d'état statique; $C_s(s)$ est donc un vecteur statique de dimension 4.

Le principe de commande par retour d'état linéaire est de déterminer une commande telle que les pôles de la fonction de transfert du système bouclé soient convenablement, placés dans le demi plan gauche du plan complexe. En remplaçant les paramètres du système par leurs valeurs numériques données dans l'équation (4.1), on obtient les valeurs numériques des matrices A , B et C du modèle linéaire (4.2), suivantes.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5786 & -0.5339 & 0.0045 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1.2443 & 22.2449 & -0.189 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3124 \\ 0 \\ -0.6719 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Les pôles de ce modèle étant les valeurs propres de la matrice d'état A , ils sont donnés par 0, -5.483 , 4.6099 et -4.8291 , le modèle linéaire est donc instable. Une commande qui stabilisera le modèle linéaire, stabilisera aussi localement le système non linéaire au voisinage du point d'équilibre. Le but sera donc, de réaliser un asservissement modifiant la matrice d'état du système en lui imposant de nouveaux pôles. Pour stabiliser le système linéaire une commande par retour d'état $C_s(s)$ est utilisée afin de placer les pôles en -7.55 , -3.24 et $-1.04 \pm 0.8j$. On obtient

$$C_s = [-6.3246 \quad -12.4177 \quad -109.2723 \quad -23.7867] \quad (4.5)$$

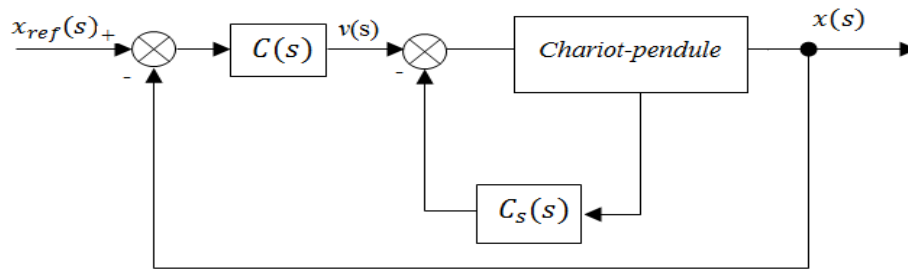


FIG. 4.4: Schéma de commande à 2DDL pour la stabilisation et l'asservissement de la position du chariot du pendule inversé

La stabilité de la boucle interne implique que $\theta_p(\infty) = 0$, cela garantit la stabilité du pendule inversé.

Afin de calculer le contrôleur permettant d'asservir la position du chariot nous utilisons la fonction de transfert, notée $G_{IL}(s)$, entre la nouvelle entrée $v(s)$ délivrée par le contrôleur $C(s)$ et la sortie à contrôler $x(s)$. Elle est donnée par :

$$G_{IL} = \frac{x(s)}{v(s)} = \frac{0.31242(s + 4.684)(s - 4.504)}{(s + 7.551)(s + 3.236)(s^2 + 2.082s + 1.706)} \quad (4.6)$$

qui peut être réécrite sous la forme

$$G_{IL} = \frac{-1.4071(s + 4.684)(1 - 0.22s)}{(s + 7.551)(s + 3.236)(s^2 + 2.082s + 1.706)} \quad (4.7)$$

La fonction $G_{IL}(s)$, étant d'ordre 4, cela complique la synthèse du contrôleur $C(s)$. Dans le but de réduire la complexité de synthèse du contrôleur fractionnaire $C(s)$, $G_{IL}(s)$ sera approximée par des modèles simples, tels que, le modèle du premier ordre à retard ou le modèle du deuxième ordre à retard.

La réponse indicielle de $G_{IL}(s)$ obtenue pour un échelon d'amplitude -1 est représentée sur la figure (4.5). L'allure de la sortie montre qu'au voisinage de $t = 0$, la sortie est négative (le modèle est donc à phase non minimale), cela est justifié par la présence du zéro instable. Nous utilisons alors un retard pour approximer ce zéro. On constate, également, que la sortie présente un dépassement, cela nécessite d'utiliser un modèle du second ordre afin de modéliser ce régime transitoire. D'un autre côté, ce dépassement n'étant pas très important, nous utiliserons également un modèle du premier ordre.

De plus comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, nous pouvons également utiliser un modèle fractionnaire équivalent au modèle de second ordre. Par conséquent, et dans l'objectif de comparaison entre plusieurs contrôleurs, le modèle $G_{IL}(s)$ sera approximé par trois modèles différents : un modèle du premier ordre à retard, un modèle du second ordre à retard et un modèle fractionnaire à retard.

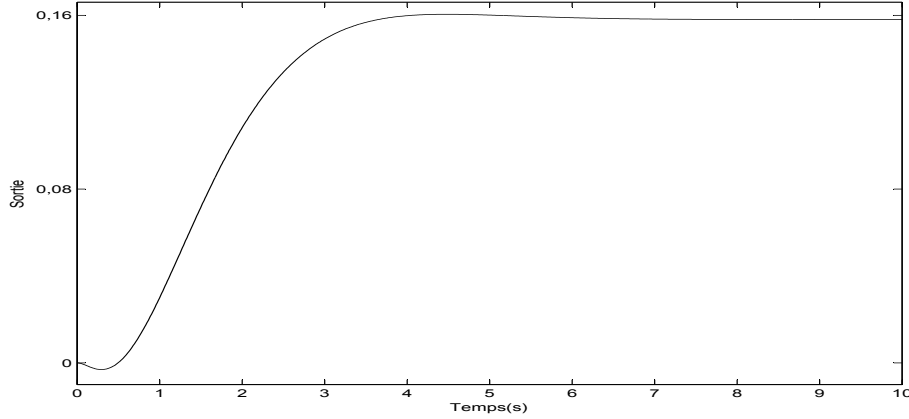


FIG. 4.5: Réponse indicielle en boucle ouverte de $G_{IL}(s)$

Afin de mesurer la qualité de ces approximations, on calcule la valeur de l'erreur moyenne absolue notée (EAM) entre la sortie de $G_{IL}(s)$ et celle du modèle d'approximation donnée par

$$EAM = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y - y_i| \quad (4.8)$$

ainsi que la valeur de l'écart maximum entre leurs deux sorties donnée par

$$e_{max} = \max |y - y_i| \quad (4.9)$$

y étant la sortie de $G_{IL}(s)$ et y_i la sortie du modèle approximant $G_{IL}(s)$.

4.3.1 Approximation par un modèle du premier ordre à retard

La méthode utilisée pour l'identification des paramètres de ce modèle est la méthode de Broïda [63]. L'avantage de cette méthode par rapport aux méthodes graphiques existantes telles que la méthode de Strejc et la Ziegler-Nichols est qu'elle n'a pas recours au point d'inflexion souvent difficile à déterminer. Le modèle proposé pour approximer le

comportement de $G_{IL}(s)$ est un premier ordre avec retard dont la fonction de transfert est

$$G_1 = \frac{G_0 e^{-\theta s}}{1 + \tau s} \quad (4.10)$$

Le principe de cette méthode est de trouver deux points qui correspondent respectivement à 28% et 40% de la valeur finale. A partir de leur projection sur l'axe des abscisses, on détermine respectivement deux valeurs de temps t_1 et t_2 . Les valeurs de la constante de temps et du retard peuvent alors être déterminées à partir des deux équations

$$\tau = 5.5(t_2 - t_1) \quad (4.11)$$

$$\theta = 2.8t_1 - 1.8t_2 \quad (4.12)$$

Le gain statique est déterminé à partir de la valeur finale de la sortie. En appliquant cette méthode au modèle (4.6), on obtient les valeurs numériques suivantes des paramètres du modèle (4.10) :

$$\tau = 5.5(1.38 - 1.16) = 1.21 \quad (4.13)$$

$$\theta = 2.8 \times 1.16 - 1.8 \times 1.38 = 0.76 \quad (4.14)$$

La valeur de gain statique est $G_0 = -0.158$.

La figure (4.6) montre les réponses indicielles du modèle $G_{IL}(s)$ (trait fort) et de $G_1(s)$ (trait en pointillées).

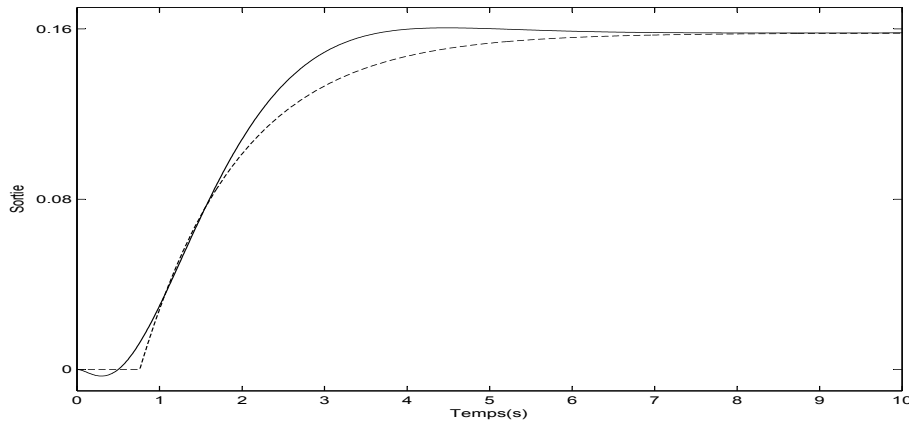


FIG. 4.6: Réponses indicielles de $G_{IL}(s)$ et du modèle $G_1(s)$

Comme, il est prévisible, nous constatons que le régime permanent est identique dans les deux cas, par contre il y a une différence lors du régime transitoire et au voisinage de $t = 0$. Les valeurs des critères (4.8) et (4.9), pour ce modèle du premier ordre sont $EAM_1 = 0.0033$ et $e_{max_1} = 0.0158$. Les valeurs de ces deux critères montrent que l'approximation de $G_{IL}(s)$ par $G_1(s)$ est acceptable.

4.3.2 Approximation par un modèle du deuxième ordre à retard

La fonction de transfert du modèle de second ordre utilisée pour approximer $G_{IL}(s)$ est donné par

$$G_2 = \frac{G_0 \omega_n^2 e^{-\theta s}}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.15)$$

Pour trouver les paramètres de $G_2(s)$, il suffit de connaître les valeurs du premier dépassement, noté M_p , et du temps de réponse, noté $t_r(5\%)$, comme l'indique la figure (4.7). Ces valeurs sont substitués dans les équations (2.80) et (2.81) afin de trouver les valeurs des paramètres ω_n et ξ . La valeur du gain statique G_0 est déterminé à partir de la valeur finale de la sortie. La valeur du retard θ est donnée par la valeur de l'intersection entre la tangente au point d'inflexion de la réponse indicielle de $G_{IL}(s)$ et l'axe des abscisses comme le montre la figure (4.7).

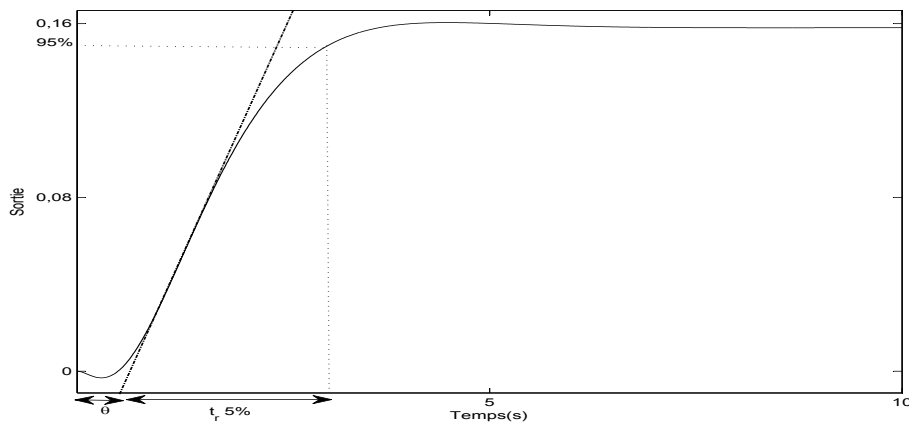


FIG. 4.7: Détermination des paramètres du modèle $G_2(s)$ à partir de la réponse indicielle de $G_{IL}(s)$

Les valeurs numériques des paramètres du modèle $G_2(s)$ obtenus sont : $\omega_n = 1.35$, $\xi = 0.8$, $G_0 = -0.158$ et $\theta = 0.5$.

La figure (4.8) présente la réponse indicielle de $G_{IL}(s)$ (trait fort) et celle du modèle du second ordre $G_2(s)$ (trait en pointillés). La figure montre une parfaite adéquation entre les deux modèles, ce qui valide le modèle trouvé. Ceci est confirmé par les valeurs des critères (4.8) et (4.9), $EAM_2 = 5.2829 \cdot 10^{-4}$ et $e_{max_2} = 0.0052$.

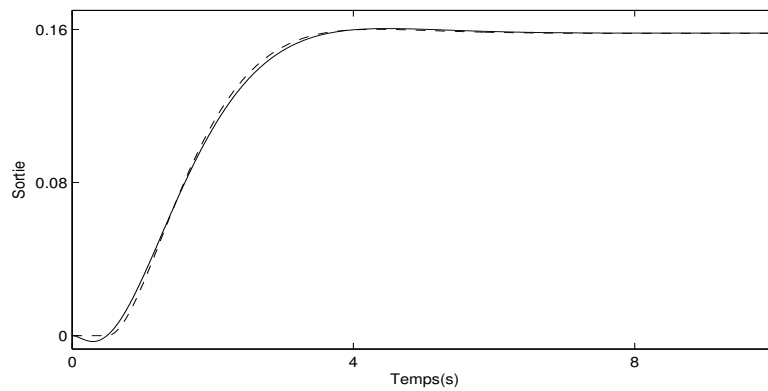


FIG. 4.8: Réponse indicielle des modèles $G_{IL}(s)$ et $G_2(s)$.

4.3.3 Approximation par un modèle fractionnaire à retard

La fonction de transfert du modèle non entier utilisé pour approximer $G_{IL}(s)$ est donnée par

$$G_{frac} = \frac{G_0 e^{-\theta s}}{1 + \tau s^{\mu+1}} \quad (4.16)$$

La valeur l'ordre non entier μ est calculé en utilisant l'équation (2.82). Connaissons la valeur du temps de montée t_m et en utilisant l'équation (2.84), on trouve la valeur de la constante de temps du modèle fractionnaire. Les valeurs numériques du gain statique et du retard sont identiques à ceux du modèle de second ordre. Finalement, les valeurs numériques des paramètres du modèle (4.16) sont : $G_0 = -0.158$, $\tau = 1.21$ et $\theta = 0.5$. La figure (4.9) présente la réponse indicielle de $G_{IL}(s)$ (trait fort) et celle du modèle fractionnaire $G_{frac}(s)$ (trait en pointillés).

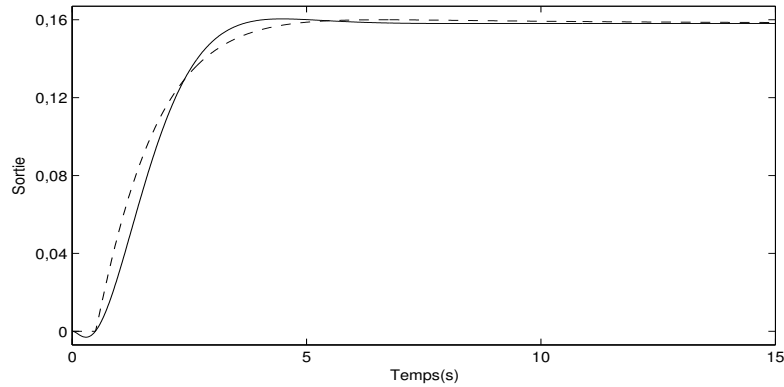


FIG. 4.9: Réponse indicielle du système et du modèle d'ordre fractionnaire

Cette figure montre que la dynamique de $G_{IL}(s)$ peut-être représentée par un modèle fractionnaire à retard. Les valeurs des critères (4.8) et (4.9) sont $EAM_3 = 0.0031$ et $e_{max_{frac}} = 0.0214$. Il faut noter, néanmoins, que dans ce cas, l'établissement de la réponse indicielle met plus de temps que celles des modèles entiers.

4.3.4 Synthèse des contrôleurs pour l'asservissement de la position du chariot

La méthode utilisée pour la synthèse du contrôleur permettant d'asservir la position du chariot est la méthode de commande par modèle interne, le modèle de référence utilisé pour la synthèse de ce contrôleur est donné par $f(s) = \frac{1}{1+\tau_c s^{\alpha+1}}$, la constante de temps du modèle est $\tau_c = 1$.

- Lorsque le modèle $G_{IL}(s)$ est approximé par un modèle du premier ordre à retard, le contrôleur de suivi de consigne $C(s)$, calculé en utilisant la méthode de commande par modèle interne, est donné par l'équation (2.67). En remplaçant les paramètres par leurs valeurs numériques, on obtient

$$C_1 = \frac{1}{1 + 1.3158 s^{\alpha}} \left[-10,0766 \left(1 + \frac{1}{1.21 s} \right) \right] \quad (4.17)$$

- Lorsque le modèle $G_{IL}(s)$ est approximé par un modèle du second ordre à retard, le contrôleur $C(s)$ prend la forme de l'équation (2.69), on obtient

$$C_2 = \frac{1}{1 + 2 s^{\alpha}} \left[-15.0023 \left(1 + \frac{1}{1.1852 s} + 0.4630 s \right) \right] \quad (4.18)$$

- Lorsque le modèle $G_{IL}(s)$ est approximé par un modèle d'ordre non entier à retard, le contrôleur de suivi de consigne est calculé en utilisant la commande IMC présentée dans [7] pour les modèles d'ordre non entier. Le terme $e^{-\theta s}$ est approximé en utilisant l'approximation de Taylor d'ordre 1, on obtient

$$C_{frac} = \frac{s^{\mu-1}}{1 + \frac{\tau_c}{\theta} s^{\alpha}} \frac{\tau}{G_0 \theta} \left(1 + \frac{1}{\tau s^{\mu}} \right) \quad (4.19)$$

En substituant les valeurs numériques du modèle non entier, le contrôleur $C_{frac}(s)$ devient

$$C_{frac} = \frac{s^{0.07}}{1 + 2 s^{\alpha}} \left[-15.3165 \left(1 + \frac{1}{1.21 s^{1.07}} \right) \right] \quad (4.20)$$

4.4 Résultats de simulation et résultats expérimentaux

Afin de tester l'efficacité de la méthode proposée et avant d'implémenter les régulateurs que nous venons de synthétiser sur le banc d'essai expérimental, nous avons, d'abord, testé

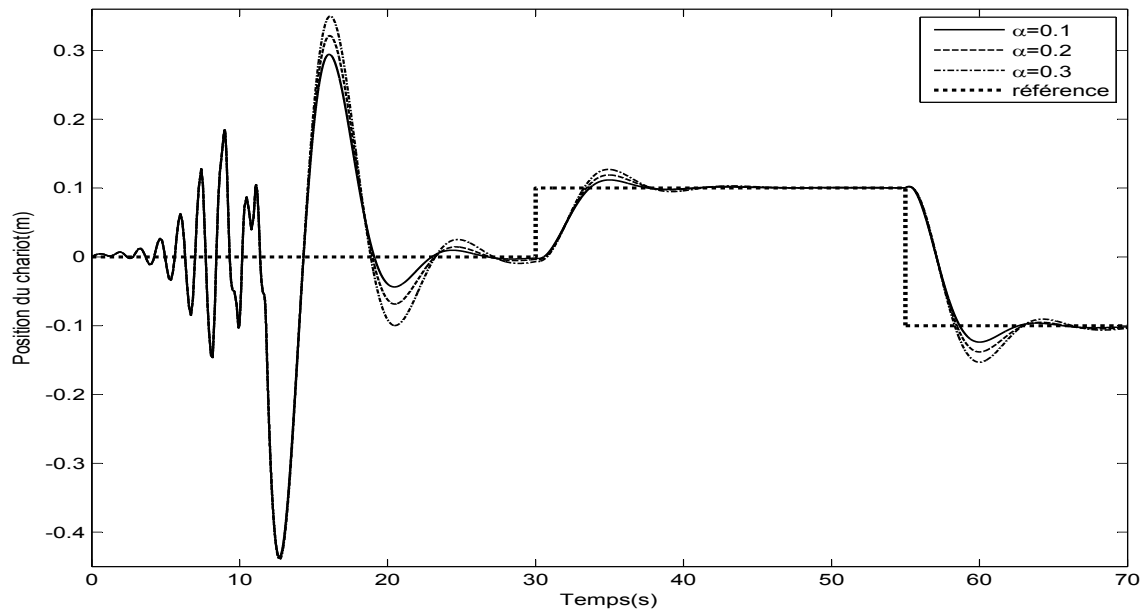
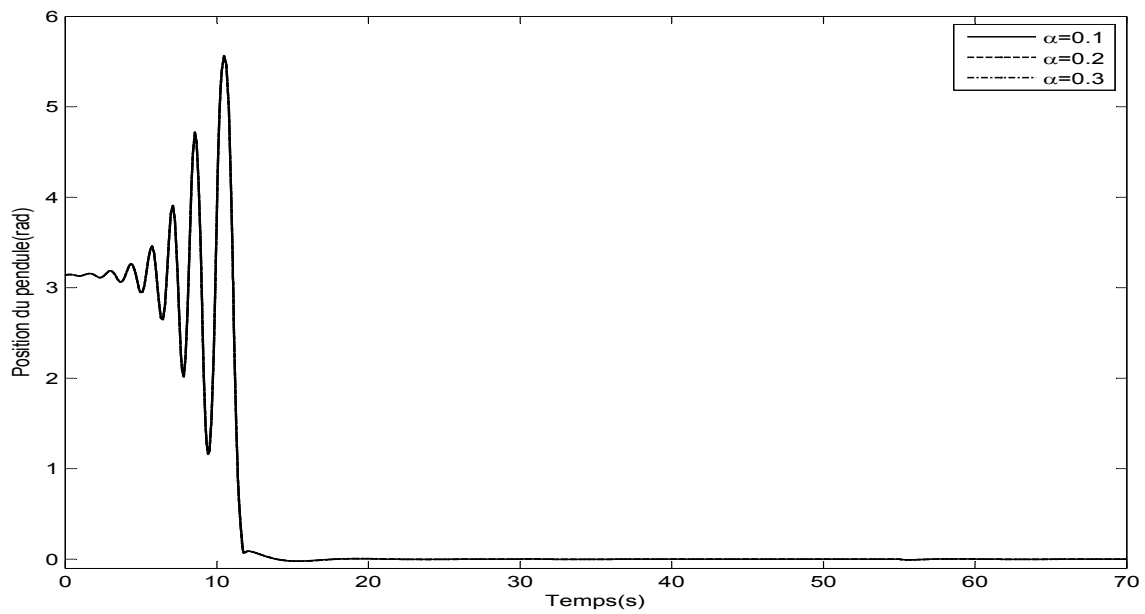
ces contrôleurs sur le modèle non linéaire du système complet pendule inversé chariot-moteur. l'ordre non entier α du modèle de référence prend les valeurs 0.1, 0.2 et 0.3, le dérivateur d'ordre non entier est approximé en utilisant l'approximation CRONE dans la bande de fréquences $[10^{-3} \quad 10^3]$ avec 20 cellules. Ces contrôleurs seront par la suite implémentés sur le banc d'essai du pendule inversé pour la valeur $\alpha = 0.1$.

A $t = 0$, on applique la commande de redressement permettant de redresser le pendule depuis sa position stable ($\theta_p = \pi$) vers sa position instable ($\theta_p = 0$ ou $\theta_p = 2\pi$). La commande de stabilisation et d'asservissement de la position du chariot est testée à partir de $t = 30$. Pour ce faire, des consignes de valeurs $x_{ref} = 0.1 \text{ m}$ et $x_{ref} = -0.1 \text{ m}$ sont appliqués respectivement à $t = 30$ et à $t = 55$ pour le système non linéaire (simulation) et pour le banc d'essai expérimental.

4.4.1 Résultats obtenus lorsque $G_{IL}(s)$ est approximée par un modèle du premier ordre à retard

La figure (4.10) montre les résultats de simulation du modèle non linéaire du système pour les valeurs de $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.2$ et $\alpha = 0.3$. Les figures (4.11) et (4.12) représentent respectivement, la position du pendule inversé et son zoom. Les résultats de simulation montrent l'efficacité du contrôleur calculé à base du modèle du premier ordre à retard. En effet, le contrôleur permet au chariot de suivre la référence tout en maintenant la stabilité du pendule dans sa position d'équilibre instable. Lorsque on change la valeur de l'ordre non entier, α , du modèle de référence, la valeur du dépassement change aussi.

Après avoir testé la loi de commande sur le modèle non linéaire du système, on l'implémente sur le banc d'essai expérimental. Les résultats expérimentaux de la position du chariot, position du pendule et la commande appliquée sont donnés dans la figure (4.13). Cette figure montre que le contrôleur $C_1(s)$ permet de maintenir la stabilité du pendule dans sa position haute et de faire suivre au chariot la position désirée.

FIG. 4.10: Position du chariot en utilisant le contrôleur $C_1(s)$ FIG. 4.11: Position du pendule inversé en utilisant le contrôleur $C_1(s)$

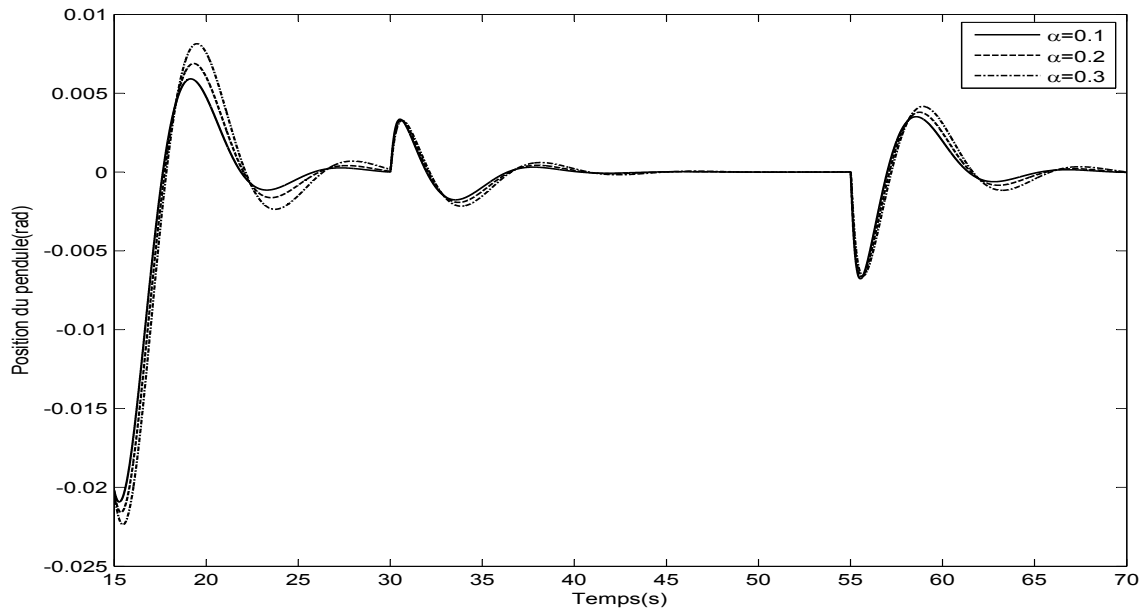


FIG. 4.12: Zoom de l'évolution de θ en utilisant le contrôleur $C_1(s)$

4.4.2 Résultats obtenus lorsque $G_{IL}(s)$ est approximée par un modèle du second ordre à retard

La figure (4.14) montre l'évolution de la position du chariot et les figures (4.15) et (4.16) représentent, respectivement, la position du pendule inversé et son zoom. Au vu de ces résultats de simulation, on constate que la commande délivrée par le régulateur $C_2(s)$ répond à l'objectif fixé. En effet, après avoir ramené le pendule inversé de sa position d'équilibre stable (position basse) à la position d'équilibre instable (position haute), la commande appliquée permet de le maintenir à cette position tout en faisant suivre au chariot la trajectoire imposée.

Cette loi de commande est appliquée sur le banc d'essai expérimental du pendule inversé. Les résultats expérimentaux sont donnés par la figure (4.17). Les résultats expérimentaux montrent que le contrôleur $C_2(s)$ a pu maintenir le pendule dans sa position d'équilibre instable (position haute) en faisant suivre au chariot la trajectoire imposée.

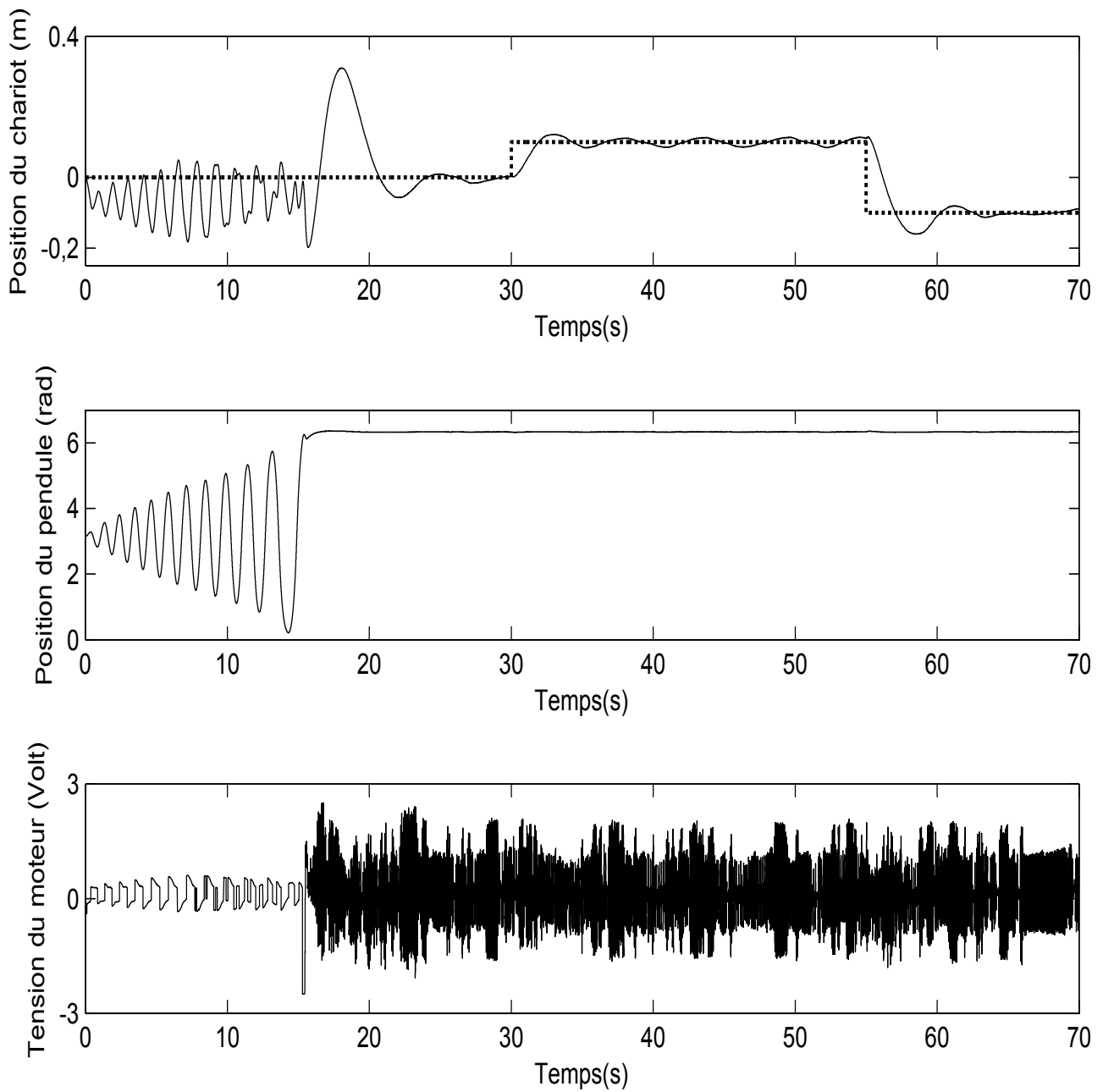


FIG. 4.13: Résultats expérimentaux obtenus en utilisant le contrôleur $C_1(s)$

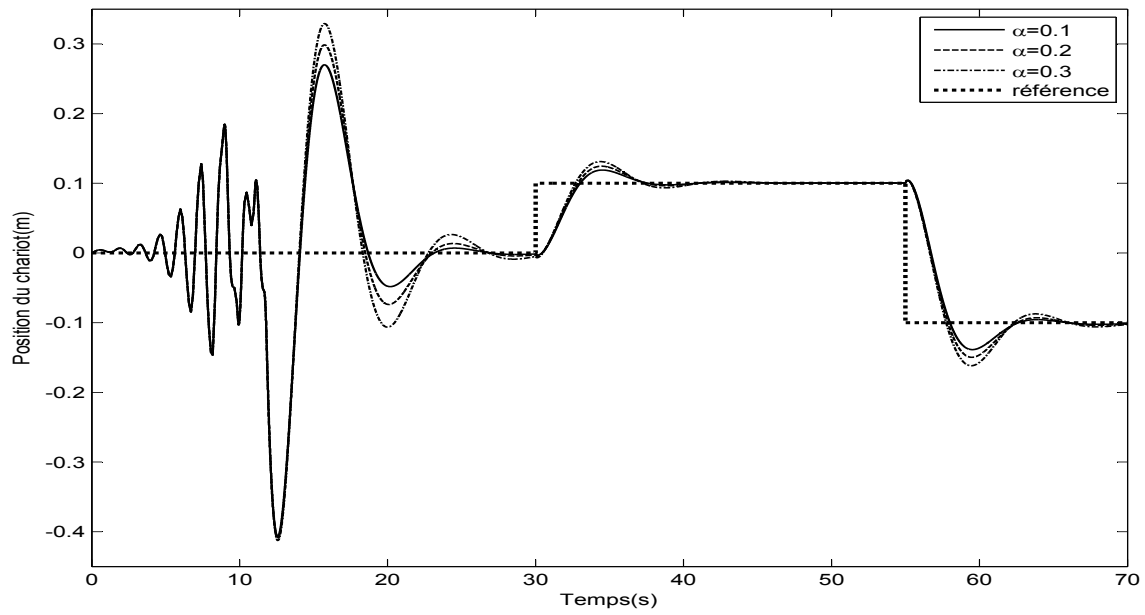


FIG. 4.14: Position du chariot en utilisant le contrôleur $C_2(s)$

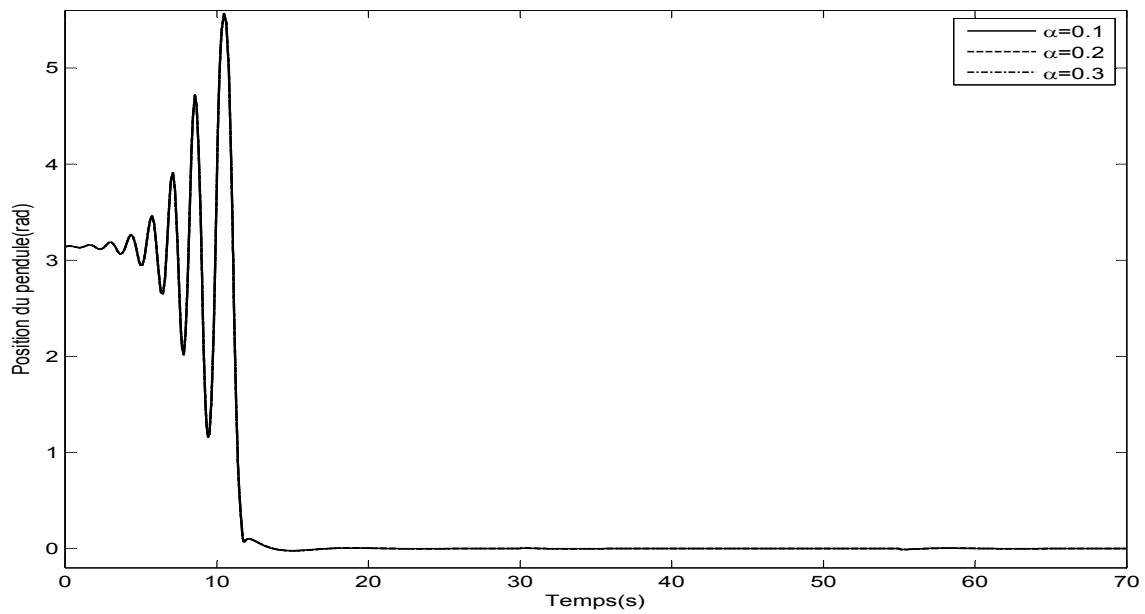


FIG. 4.15: Position du pendule inversé en utilisant le contrôleur $C_2(s)$

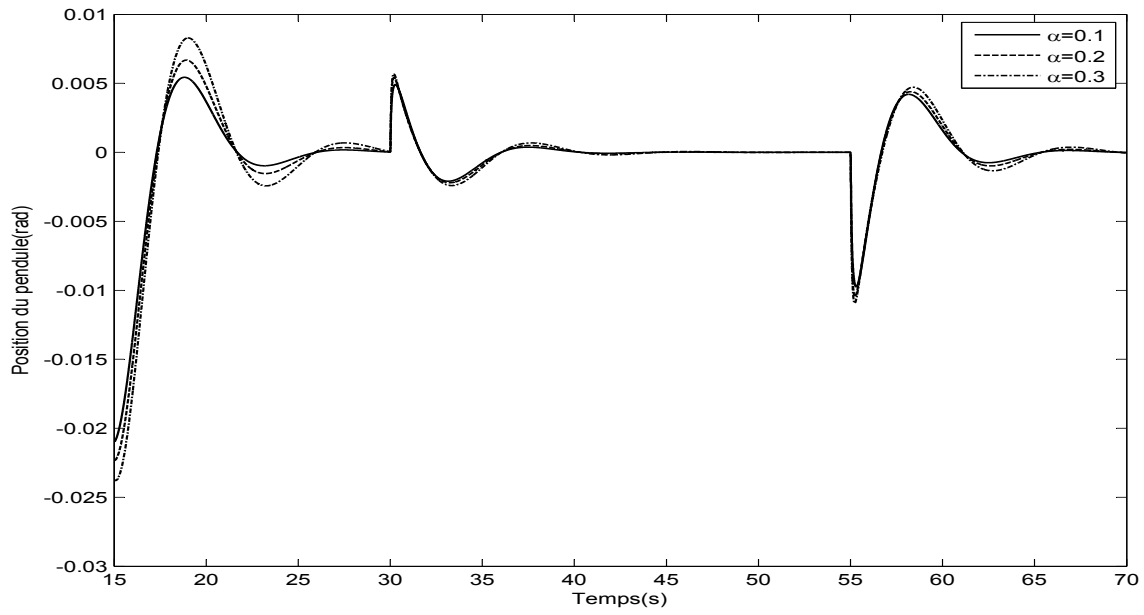


FIG. 4.16: Zoom de la position du pendule inversé en utilisant le contrôleur $C_2(s)$

4.4.3 Résultats obtenus lorsque $G_{IL}(s)$ est approximée par un modèle fractionnaire à retard

Les résultats de simulations en utilisant le contrôleur $C_{frac}(s)$ sont présentés dans les figures (4.18), (4.19) et (4.20). Comme il était prévu théoriquement, le chariot ainsi que le pendule sont stabilisés. En effet, à l'instant où le pendule atteint sa position d'équilibre instable (position haute) grâce à la commande de redressement, la commande de stabilisation permet de le maintenir dans cette position, ainsi, le contrôleur $C_{frac}(s)$ permet au chariot de suivre la trajectoire imposée en maintenant le pendule dans sa position haute. Il faut noter que l'étape de redressement prend plus de temps avec le contrôleur $C_{frac}(s)$ qu'avec les deux contrôleurs $C_1(s)$ et $C_2(s)$. De plus, le pendule inversé se stabilise plus lentement.

Les résultats expérimentaux obtenus en utilisant le contrôleur $C_{frac}(s)$ sont donnés par la figure (4.21).

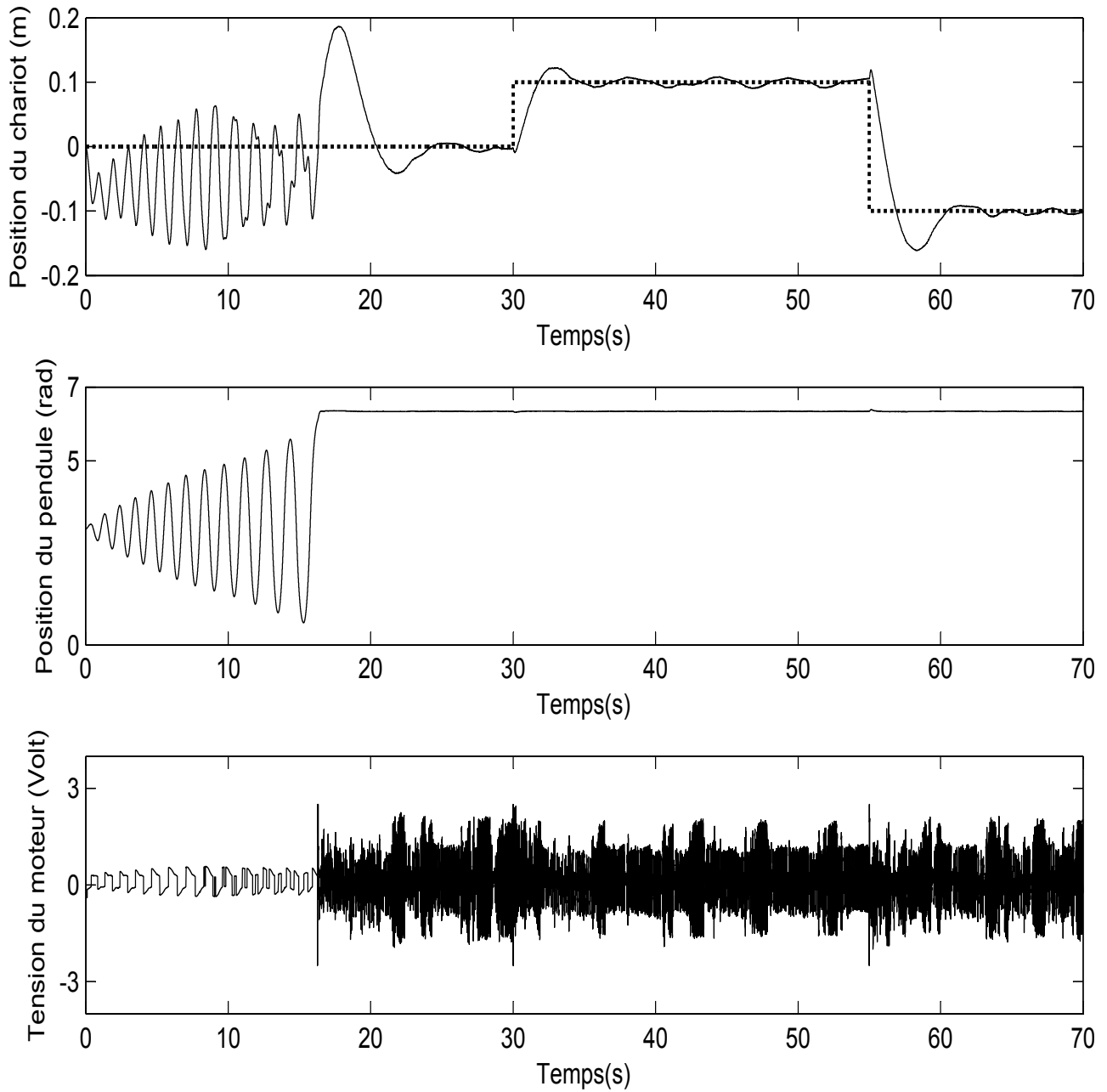


FIG. 4.17: Résultats expérimentaux en utilisant le contrôleur $C_2(s)$

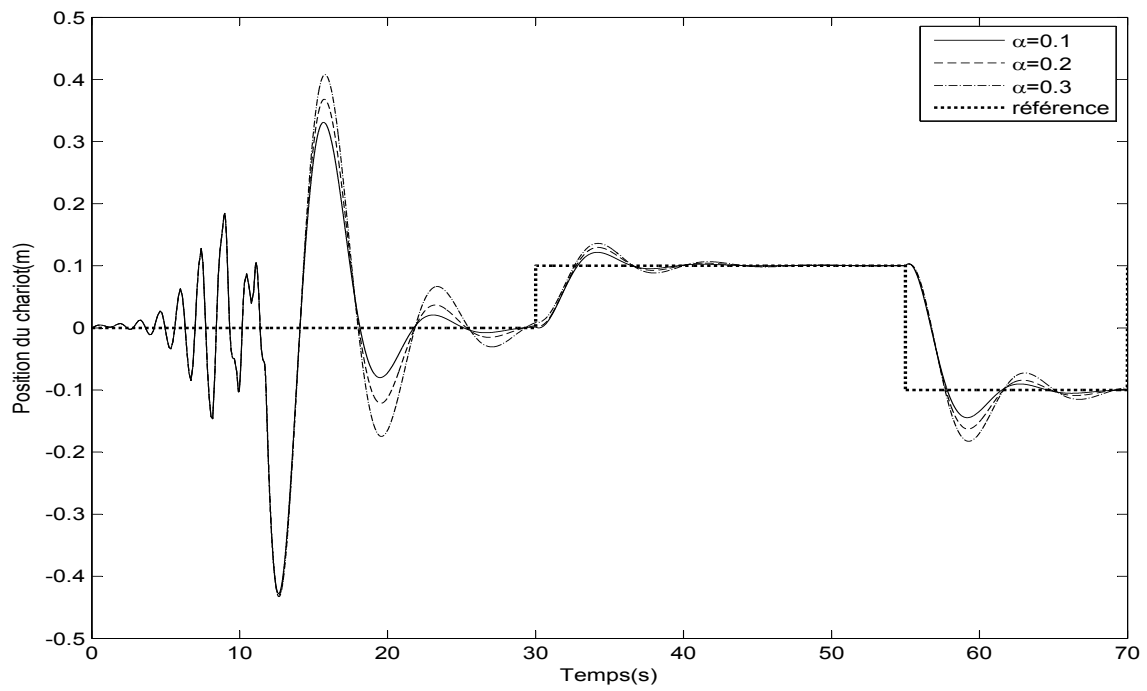


FIG. 4.18: Position du chariot en utilisant le contrôleur $C_{frac}(s)$

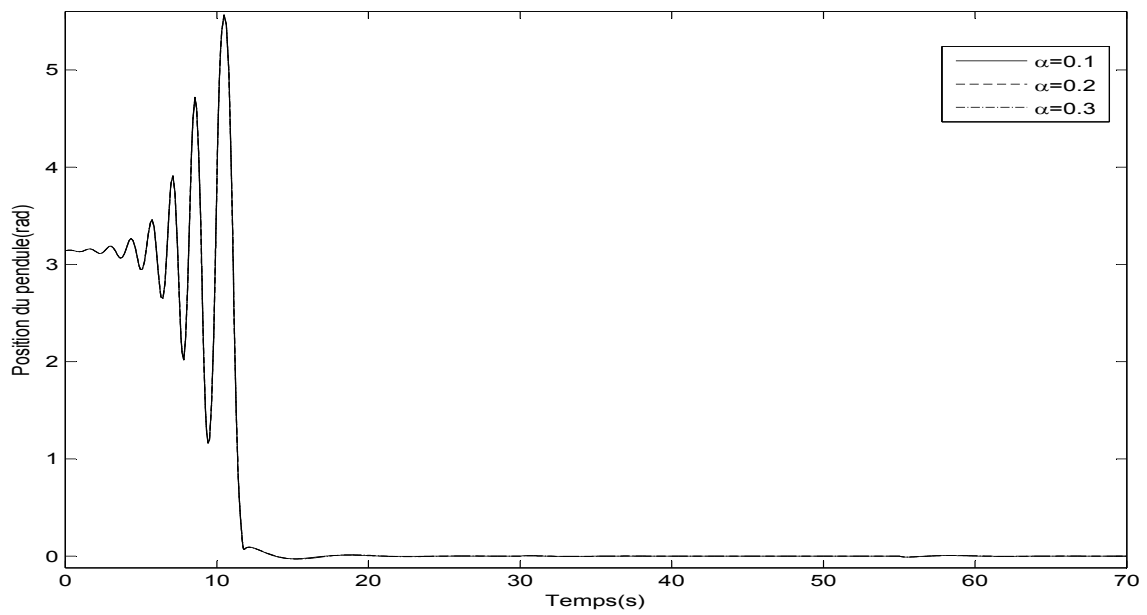


FIG. 4.19: Position du pendule inversé en utilisant le contrôleur $C_{frac}(s)$

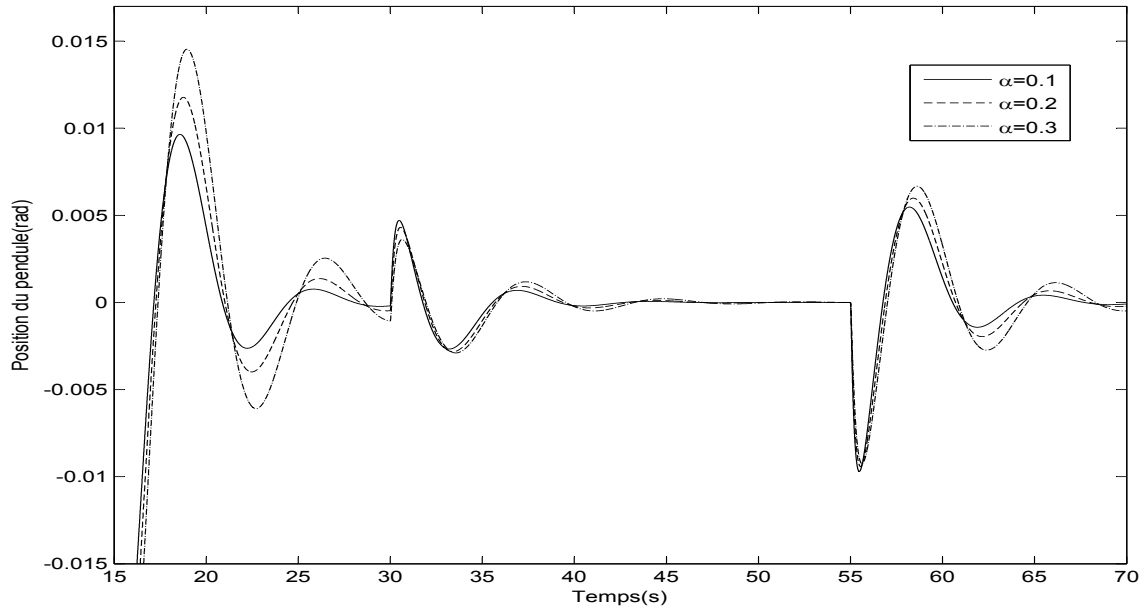


FIG. 4.20: Zoom sur la position du pendule inversé en utilisant le contrôleur $C_{frac}(s)$

La loi de commande obtenue en utilisant le modèle fractionnaire est appliquée au banc d'essai expérimental (pendule inversé), cette commande permet de maintenir la stabilité du pendule inversé à la position d'équilibre instable et d'asservir la position de chariot.

4.4.4 Comparaison entre les résultats obtenus par les trois contrôleurs

Afin de comparer les résultats expérimentaux obtenus par les trois contrôleurs de suivi de consigne $C_1(s)$, $C_2(s)$ et $C_{frac}(s)$ synthétisés en utilisant les modèles du premier ordre, du second ordre et fractionnaire, respectivement, nous présentons dans les figures (4.22) et (4.23) l'évolution de la position du chariot obtenue entre $t = 30$ et $t = 55$ (consigne positive) et entre $t = 55$ et $t = 70$ (consigne négative) (bleu : modèle de premier ordre, rouge : modèle du second ordre et noir : modèle fractionnaire).

Rappelons que nous avons utilisés le même modèle de référence $f(s) = \frac{1}{1+s^{1.1}}$ pour la synthèse des trois contrôleurs. Pour mesurer les performances de chacun des contrôleurs, nous mesurons la valeur du dépassement ; les résultats obtenus sont résumés dans le tableau (4.1).

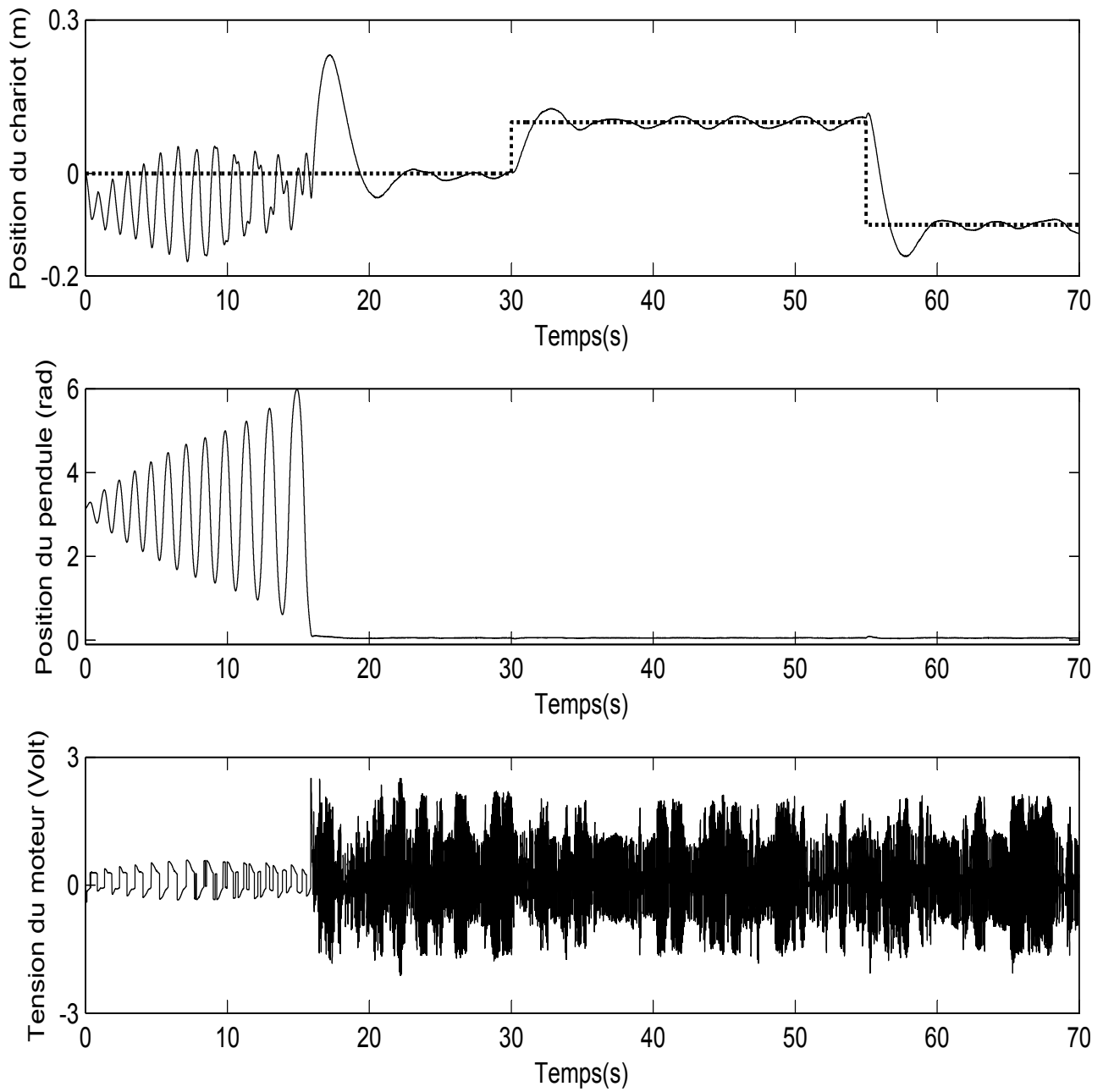


FIG. 4.21: Résultats expérimentaux en utilisant le contrôleur $C_{frac}(s)$

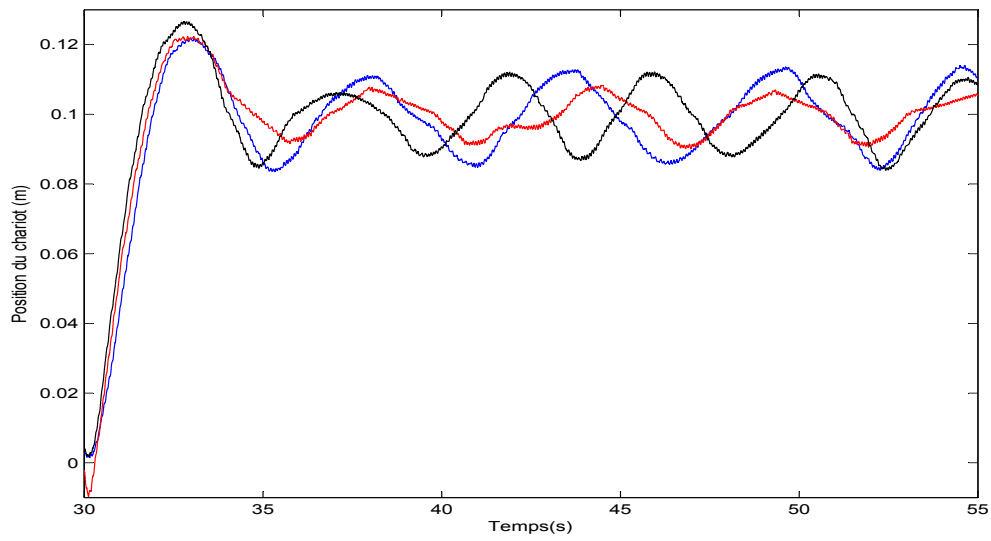


FIG. 4.22: Position du chariot pour $t(30 : 55)$

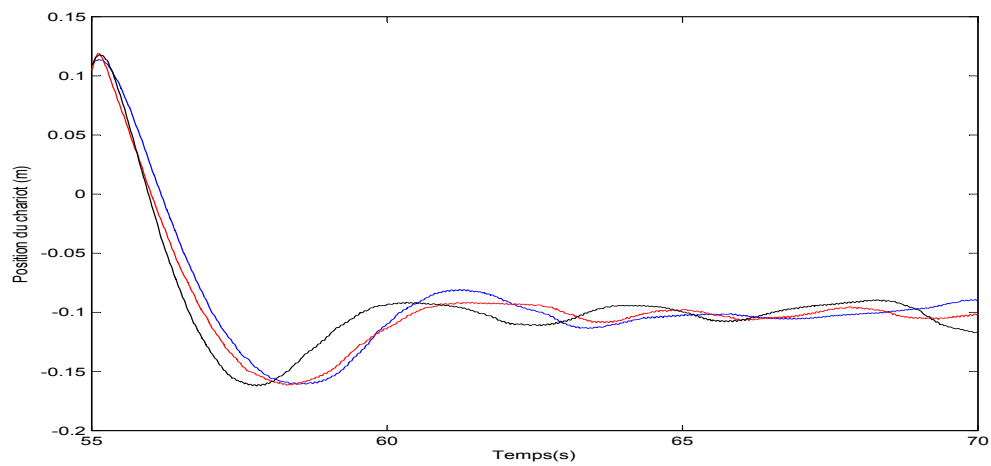


FIG. 4.23: Position du chariot pour $t(55 : 70)$

Ces résultats montrent que le contrôleur synthétisés par la base des modèles premier ordre, second ordre et fractionnaire donnent des résultats très proche puisque le modèle de référence imposé pour le système est le même.

TAB. 4.1: Paramètres du position du chariot

Performances	Temps	Modèle 1 ^{er} ordre	Modèle 2 ^{eme} ordre	Modèle non entier
Dépassement(%)	$t(30 : 55)$	21.7	23.30	26.7
	$t(55 : 70)$	30.30	30.45	30.55

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la structure de commande à 2DDL est utilisée pour commander un pendule inversé monté sur un chariot qui est un système instable, sous actionné et possède des non linéarités non négligeables. L'objectif de cette commande est la stabilisation du pendule inversé et l'asservissement de la position du chariot. Pour ce faire, nous avons utilisé le modèle linéaire obtenu par linéarisation du modèle non linéaire du système chariot-pendule. Afin de n'utiliser que des contrôleurs proportionnels, nous avons utilisé une loi de commande stabilisante par retour d'état statique car le modèle linéaire du système pendule-chariot est d'ordre 4. Le contrôleur stabilisant permet de maintenir le pendule dans sa position d'équilibre instable, il permet également de stabiliser le transfert permettant de synthétiser le contrôleur de suivi de consigne pour l'asservissement de la position du chariot. De plus, et afin de réduire la complexité de ce contrôleur, nous avons approximé cette fonction de transfert par trois modèles simples différents.

Les simulations effectuées sur le modèle du système pendule-chariot-moteur ont permis de vérifier la validité des contrôleurs obtenus à base de ces trois modèles. Ces contrôleurs ont par la suite été implémenté sur le banc d'essai expérimental, les résultats expérimentaux ont mis en évidence les avantages de la structure à deux degrés de liberté.

Conclusion générale

Les travaux que nous avons mené au cours de cette thèse ont eu pour but de développer une méthode de synthèse de contrôleurs fractionnaires pour la commande des systèmes linéaires instables en particulier. Dans un premier lieu, des contrôleurs fractionnaires ont été synthétisés pour un système du premier ordre à retard instable, dont deux cas ont été considérés selon la valeur du rapport θ/τ soit inférieur ou supérieur à 1. Le système étant commandé en utilisant une structure de commande à deux degrés de liberté. Les deux objectifs de commande (stabilisation et suivi de consigne) se réalisent séparément en utilisant deux contrôleurs distincts. La méthode de synthèse utilisée est basée sur l'équivalence entre la structure de commande par modèle interne et la structure de commande par retour de sortie classique. L'approche considérée pour étudier la stabilité repose principalement sur la notion de la stabilité des quasi-polynômes en utilisant la méthode de Walton-Marshall. Dans un deuxième lieu, la structure de commande à deux degrés de liberté est utilisée pour la stabilisation du pendule inversé et l'asservissement du chariot sur lequel est monté le pendule. L'avantage de la commande à plusieurs degrés de liberté réside dans le fait que les objectifs de commande tels que suivi de consigne, le rejet de perturbations, stabilisation... se réalisent séparément l'un de l'autre.

Le premier chapitre a été consacré à la présentation de la méthode de Walton-Marshall pour l'étude de la stabilité des quasi-polynômes, cette méthode a été utilisée, par la suite, pour déterminer les paramètres du contrôleur stabilisant un système du premier ordre à retard instable. En effet le contrôleur stabilisant est un correcteur proportionnel (P) si le rapport $\theta/\tau < 1$ et proportionnel dérivé (PD) si le rapport $1 < \theta/\tau < 2$.

Dans le deuxième chapitre, la première partie a été consacré à la représentation de quelques notions sur la simulation des régulateurs fractionnaires. Dans la deuxième partie du chapitre, la méthode de commande à modèle interne a été abordée. Afin d'obtenir des contrôleurs fractionnaires, le modèle de référence utilisé est la fonction de transfert en boucle fermée de la fonction idéale de Bode. A la fin, une analogie est faite entre le modèle fractionnaire et le modèle de second ordre.

Dans le troisième chapitre, un état de l'art sur la commande à plusieurs degrés de liberté a été présenté. La structure à 2DDL a été utilisé pour commander un système du premier ordre à retard instable, deux contrôleurs ont été utilisés, le premier contrôleur sert à stabiliser le système instable et le deuxième contrôleur est responsable du suivi de consigne. Le contrôleur de suivi de consigne obtenu est un contrôleur fractionnaire ayant une forme simple à implémenter. C'est pourquoi, nous faisons toujours en sorte que ce dernier soit un contrôleur PI ou PID standard en cascade avec un filtre fractionnaire. De plus le contrôleur de suivi de consigne doit être stable afin de maintenir la stabilité interne du système en boucle fermée.

Le dernier chapitre, a été consacré à la synthèse des contrôleurs pour la commande du pendule inversé qui se trouve au laboratoire L2CSP. En effet, une commande de stabilisation a été appliquée pour stabiliser le pendule inversé et le maintenir dans sa position instable (le pendule étant redressé). Le deuxième contrôleur est le contrôleur du suivi de consigne, il permet d'asservir la position du chariot sur lequel le pendule est monté. Les simulations en utilisant ces contrôleurs ainsi que leur implémentation sur le pendule inversé ont mis en évidence les avantages de la structure à 2DDL utilisée.

Perspectives

- Ajouter le problème du rejet de perturbations.
- Utiliser la méthode de W-M lorsque le modèle est non entier.
- Refaire le même travail lorsque le système est de second ordre instable.

- Implémenter cette commande sur d'autre systèmes réels.

Bibliographie

- [1] Ait-Messaoud, L. (2007), "Contribution à la commande des systèmes par des régulateurs d'ordre non entier. Application à la commande de la machine asynchrone". Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Algérie.
- [2] Amoura, K., Mansouri, R., Bettayeb, M., et Al-Saggaf, U. M., (2016). "Closed-loop step response for tuning PID-fractional-order-filter controllers". ISA transactions, vol. 64, pp. 247-257.
- [3] Ang, K. H., Chong, G., et Li, Y., (2005). "PID control system analysis, design, and technology". IEEE transactions on control systems technology, vol. 13, n° 4, pp. 559-576.
- [4] Araki, M., (1984). "On two-degree-of-freedom PID control systems". SICE Research Committee on Modeling and Control Design of Real Systems.
- [5] Astrom, K.J. et Hagglund, T. (1995). "PID Controllers : Theory, Design and Tuning". Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC.
- [6] Barbosa, R.S, Machado, J.A.T. et Ferreira, I.M. (2004). "Tuning of PID controller based on Bode's ideal transfer function". Nonlinear dynamics, vol. 38, n° 1, pp. 305-321.
- [7] Bettayeb, M. et Mansouri R., (2013). "Fractional IMC-PID-filter controllers design for non integer order systems", J. Process Control, vol. 24, n° 4, pp. 261-271.
- [8] Bettayeb, M. et Mansouri R., (2014). "IMC-PID-fractional-order-filter controllers design for integer order systems", ISA Transaction, vol. 53, n° 5, pp. 1620-1628.
- [9] Bode, H.W., (1945). "Network Analysis and Feedback Amplifier Design", Van Nostrand, New York.

- [10] Boussalem, C., (2012). "Implémentation de régulateurs fractionnaires pour la stabilisation d'un pendule inversé". Mémoire de Magister, Université Mouloud Maameri de Tizi Ouzou, Algérie.
- [11] Bugeja, M., (2003). "Non-linear swing-up and stabilizing control of an inverted pendulum system". EUROCON 2003. Computer as a Tool. The IEEE Region 8, vol. 2, pp. 437-441.
- [12] Carlson, G.E. et Halijak C.A., (1964). "Approximation of fractional capacitor $(1/s)^{1/n}$ by a regular Newton Process". IRE Transactions on circuit theory, vol. 11, n° 2, pp. 210-213.
- [13] Castillo-Garcia, F. J., Millan-Rodriguez, A. S., Feliu-Batlle, V., et Sanchez-Rodriguez, L., (2013). "Fractional-Order Control of First Order Plants with Guaranteed Time Specifications". Journal of Applied Mathematics. vol. 2013.
- [14] Chan, J.S., Song, H. K., et Hyun, J. C., (1999). "A direct synthesis tuning method of unstable first-order-plus-time-delay processes". Journal of process control, vol. 9, n° 3, pp. 265-269.
- [15] Charef, A., Sun H.H., Tsao Y.Y. et Onaral B., (1992). "Fractal system as represented by singularity function". IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 37, n° 9, pp. 1465-1470.
- [16] Chek, L. S., (2012). "Stabilization and control of unstable time delay systems". Thèse de doctorat. National University of Singapore.
- [17] Chen, Y. Q., Vinagre, B. M. et Podlubny, I., (2003). "Using Continued Fraction to Discretize Fractional Order Derivatives". Kluwer Academic Publishers.
- [18] Chen, Y. Q. et Moore, K. L., (2002). "Discretization Schemes for Fractional Order Differentiators and Integrators". IEEE Transactions on Circuits and Systems I, vol. 49, n° 3, pp. 363-367.
- [19] Dambrine, M. et Richard J.P., (1993). "Stability analysis of time-delay systems", Dyn. Sys. Appl., vol. 2, n° 3, pp. 405-414.

-
- [20] Desborough, L. et Miller, R., (2002). "Increasing customer value of industrial control performance monitoring-Honeywell's experience". AICHE symposium series, New York ; American Institute of Chemical Engineers, pp. 169-189.
- [21] De Paor, A. M. et O'Malley, M., (1989). "Controllers of Ziegler-Nichols type for unstable process with time delay". International Journal of Control", vol. 49, n° 4, pp. 1273-1284.
- [22] Duraté, V. et Da Costa, J. S., (2005). "Levy's Identification Method Extended to Commensurate Fractional Order Transfer Functions". In Fifth Euromech Nonlinear Dynamics conference. pp. 1357-1366.
- [23] Flaus, J.M., (1994). "La régulation industrielle, régulateurs PID, prédictifs et flous". Paris, Hermès.
- [24] Freudenberg, J.S. et Looze D.P., (1985). "Right Half plane poles and zeros and design tradeoffs in feedback systems", IEEE Trans. Autom. Control, vol. 30, n° 6, pp. 555-565.
- [25] Garcia, C.E. et Morari M., (1982). "Internal model control I. A unifying review and some new results", Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev. vol. 21, n° 2, pp. 308-323.
- [26] Gonzalez, O. R. et Antsaklis, P. J., (1989). "Implementations of Two Degrees of Freedom Controllers", Proc. of the American Control Conference, pp. 269-273.
- [27] Gustavsen, B. et Semlyen, A., (1999). "Rational Approximation of Frequency Domain Responses by Vector Fitting". IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 14, n° 3, pp. 1052-1061.
- [28] Haugen, F. (2010). "Ziegler-Nichols' Closed-Loop Method". Skien, Norway : Tech-Teach.
- [29] Hiroi, K. (1986). "Two-degree-of-freedom PID control system and its application", Instrumentation, vol. 29, pp. 39-43.
- [30] Horowitz, I.M., (1963). "Synthesis of Feedback Systems", Academic Press.
- [31] Huang, H.P. et Chen C.C., (1997). "Control system synthesis for open-loop unstable process with time delay", IEE Proc. Control Theory Appl., vol. 144, n° 4, pp. 334-346.

-
- [32] Hwang, C. et Cheng Y.C., (2006). "A numerical algorithm for stability testing of fractional delay systems", em Autom., vol. 42, n° 5, pp. 825-831.
- [33] Hwang, C. et Hwang, J. H., (2004). "Stabilisation of first-order plus dead-time unstable processes using PID controllers", IEE Proc. Contr. Theory Appl., vol. 151, n° 1, pp. 89-94.
- [34] Lahouazi, F., (2011). "Mise en œuvre d'une stratégie de commande neuro-floue. Application à un pendule inversé". Mémoire de Magister. Université Mouloud Maameri de Tizi Ouzou, Algérie.
- [35] Lee, Y., Lee M., Park S. et Brosilow C., (1998). "PID controller tuning for desired closed-loop responses for SISO systems". A.I.Ch.E. Journal, vol. 44, n° 1, pp. 106-115.
- [36] Lee, Y., Lee J. et Park S., (2000). "PID controller tuning for integrating and unstable processes with time delay". Chem. Eng. Sci., vol. 55, n° 17, pp. 3481-3493.
- [37] Levy, E., (1959). "Complex curve fitting". IRE transactions on automatic control, vol. 4, n° 1, pp. 37-43
- [38] Liu, T., Zhang, W. et Gu, D., (2005). "Analytical two-degree-of-freedom tuning design for open-loop unstable processes with time delay". Journal of Process Control, vol. 15, n° 5, pp. 559-572.
- [39] Liu, T., Gao, F. et (2011). "Enhanced IMC design of load disturbance rejection for integrating and unstable Processes with slow dynamics". ISA Transactions. vol. 50, n° 2, pp. 239-248.
- [40] Liu, T. et Gao, F., (2012). "Industrial Process Identification and Control Design, step-test and relay-experiment-based methods", Springer.
- [41] Luyben, W. L., (2001). "Effect of derivative algorithm and tuning selection on the PID control of dead-time processes". Industrial and engineering chemistry research, vol. 40, n° 16, pp. 3605-3611
- [42] Manabe, S., (1961). "The Non-Integer Integral and its Application to Control Systems", ETJ of Japan, vol. 2, n° 2 pp. 83-87.

-
- [43] Mansouri, R., M. Bettayeb, T. Djamah et S. Djennoune, (2007). "System Identification in Frequency Domain by Fractional Vector Fitting Algorithm". Second International Conference on Modelling, Simulation and Applied Optimization, ICMSAO'07, pp. 24-27. Abu Dhabi, E.A.U.
- [44] Mansouri, R., (2008). "Contribution à l'analyse et la synthèse d'ordre fractionnaire par la représentation d'état", Thèse de Doctorat. Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, Algérie.
- [45] Matsuda, K. et Fujii H. (1993)" Optimised Wave Absorbing Control : Analytical and Experimental Results". Journal guidance control and dynamics, vol.16, n° 6, pp. 1146-1153.
- [46] Meshram, P. M. et Kanojiya, R. G. (2012). "Tuning of PID controller using Ziegler-Nichols method for speed control of DC motor". International Conference on Advances in Engineering, Science and Management (ICAESM), pp. 117-122.
- [47] Morari, M. et Zafiriou, E., (1991). "Robust Process Control". Englewood Cliffs : Prentice-Hall.
- [48] Morere, Y., (2001). "Mise en œuvre de lois de Commande pour les Modèles Flous de Type Takagi-Sugeno", Thèse de Doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis. France.
- [49] Monje, C. A., Vinagre, B. M., Feliu, V., et Chen, Y. (2008). "Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications". Control engineering practice, vol. 16, n° 7, pp. 798-812.
- [50] Namie, M., Ueda, T., Tsukabe, T. et Taguchi, H., (1988). "Two degree-of-freedom PID controller used for temperature control : Simultaneity reference response and disturbance response", OMRON Technics, vol. 28, pp. 285-291.
- [51] Nezzari, H., (2013). "Contribution à l'analyse des systèmes d'ordre fractionnaire", Thèse de Doctorat en sciences, Université Constantine 1, Algérie.
- [52] Ogata, K., (1993). "Modern Control Engineering", Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall, USA.

- [53] Oustaloup, A., (1991). "La commande CRONE", Edition Hermès, Paris.
- [54] Oustaloup, A., (1983). "Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire". Editions Masson, Paris.
- [55] Podlubny, I., (1999). "Fractional Order Systems and $PI^\alpha D^\mu$ Controllers", IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 44, pp. 208-214.
- [56] Pramod, S., et Chidambaram, M. (2000). "Closed loop identification of transfer function model for unstable bioreactors for tuning PID controllers". Bioprocess engineering, vol. 22, n° 2, pp. 185-188.
- [57] Rivera, D.E., Morari M. et Skogestad S., (1989). "Internal model control 4. PID controller design", Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev., vol. 25, n° 1, pp. 252-265.
- [58] Rotstein, G.E. et Lewin D.R., (1991). "Simple PI and PID tuning for Open-loop unstable systems", Ind. Eng. Chem. Res., vol. 30, n° 8, pp. 1864-1869.
- [59] Silva, G. J., Datta A. et Bhattacharyya S.P., (2005). "PID Controllers for Time-Delay Systems". Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin.
- [60] Shamsuzzoha, M. et Lee M., (2008). "Analytical design of enhanced PID Filter controller for integrating and first order unstable processes with time delay", Chem. Eng. Sci., vol. 63, n° 10, pp. 2717-2731.
- [61] Shamsuzzoha, M., and Lee, M., (2009). "Enhanced disturbance rejection for open-loop unstable process with time delay". ISA transactions, vol. 48, n° 2, pp. 237-244.
- [62] Sutikno, J. P., Aziz, B. A. et Yee, C. S., (2013). "A New Tuning Method for Two-Degree-of-Freedom Internal Model Control under Parametric Uncertainty". Chinese Journal of Chemical Engineering, vol. 21, n° 9, pp. 1030-1037.
- [63] Taarit, K. I., (2010). "Contribution à l'identification des systèmes à retards et d'une classe de systèmes hybrides". Thèse de Doctorat. Ecole Centrale de Lille ; école Nationale d'ingénieurs de Tunis (Tunisie).
- [64] Trigeassou, J. C., Poinot, T., Lin, J., Oustaloup, A., et Levron, F., (1999, August). "Modeling and identification of a non integer order system". European Control Conference, KARLSRUHE, Germany, 1999, . pp. 2453-2458.

-
- [65] Titouche, K., Mansouri, R., Bettayeb, M., et Al-Saggaf, U. M. (2016). "Internal Model Control Proportional Integral Derivative-Fractional-Order Filter Controllers Design for Unstable Delay Systems". *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 138, *n° 2*, pp. 451-461.
- [66] Venkatasankar, V., et Chidambaram, M., (1994). "Design of P and PI controllers for unstable first-order plus time delay systems", *International Journal of Control*, vol. 60, *n° 1*, pp. 137-144.
- [67] Vilanova, R. et A. Visioli, (2012). "PID Control in the Third Millennium : Lessons Learned and New Approaches, Springer.
- [68] Vinagre, B. M., Y. Q. Chen et I. Petras, (2003). "Two Direct Tustin Discretization Methods for Fractional Order Differentiator / Integrator". *Journal of Franklin Institute*, vol. 340, *n° 5*, pp. 349-362.
- [69] Visioli, A., (2006). "Advances in Industrial Control : Practical PID Control", Springer-Verlag, London.
- [70] Walton, K. and Marshall J. E., (1987). "Direct method for TDS stability analysis", *IEE Proc. D : Control Theory & Appl.*, vol. 134, *n° 2*, pp. 101-107.
- [71] Xue, D. Y. et Y. Q. Chen, (2005). "Sub-Optimum Rational Approximation to Fractional Order Linear Systems". *Proceedings of the ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences, Computers and Information in Engineering Conference*, long Beach, California, USA.
- [72] Xiang, C., Wang Q.G., Lu X., Nguyen L.A. et Lee T.H., (2007). "Stabilization of second-order unstable delay processes by simple controllers", *J. Process Control*, vol. 17, *n° 8*, pp. 675-682.
- [73] Zhang, B. et Zhang, W. (2006). "Two-degree-of-freedom control scheme for processes with large time delay". *Asian Journal of Control*, vol. 8, *n° 1*, pp. 50-55.
- [74] Zhang, W., Gu, D., Wang, W., and Xu, X. (2004). "Quantitative performance design of a modified Smith predictor for unstable processes with time delay". *Industrial and engineering chemistry research*, vol. 43, *n° 1*, pp. 56-62.

Résumé Une méthode analytique pour la synthèse d'un contrôleur proportionnel intégrale dérivée (PID) en cascade avec un filtre d'ordre non entier est proposée pour les systèmes du premier ordre à retard instables. L'algorithme de conception est basé sur la méthode de commande à modèle interne (IMC). La structure de commande à deux degrés de liberté (2DDL) est aussi, utilisée pour améliorer les performances du système en boucle fermée. Dans cette structure, un contrôleur entier est utilisé pour stabiliser la boucle interne, puis un contrôleur fractionnaire est employé pour améliorer les performances du système en boucle fermée. La méthode de Walton-Marshall utilisée pour l'analyse de la stabilité des systèmes à retard, est ensuite utilisée, d'une part, pour établir la condition de stabilité interne de la boucle fermée du système (la partie fractionnaire du contrôleur en particulier), et, d'autre part, pour déterminer les paramètres du contrôleur stabilisant proportionnel (P) ou proportionnel dérivée (PD). Une application réelle est présentée afin d'implémenter la structure de commande à deux degrés de libertés pour la stabilisation d'un pendule inversé et l'asservissement du chariot sur lequel est monté le pendule.

Mots-clé : Contrôleur d'ordre non entier, régulateur PID, Commande par modèle interne, Commande à plusieurs degrés de liberté, Système instable, Système à retard.

Abstract An analytical design for an integer proportional integral derivative (PID) controller cascaded with a fractional order filter is proposed for first order unstable processes with time delay. The design algorithm is based on the internal model control (IMC) paradigm. The two degrees of freedom (2DOF) control structure is used to improve the performance of the closed-loop system. In the 2DOF control structure an integer order controller is used to stabilize the inner-loop, then a fractional order controller for the stabilized system is employed to improve the performance of the closed-loop system. The Walton Marshall's method, usually used to analyse the stability of the time delay systems, is then used, on the one hand, to establish the internal stability condition of the closed-loop system (the fractional part of the controller in particular), and on the other hand, to seek the set of stabilizing proportional (P) or proportional-derivative (PD) controller parameters. A application is presented in order to implement the proposed two degrees of freedom control structure for the stabilization of an inverted pendulum and the set-point tracking of the car on which the pendulum is mounted.

Keywords : Fractional Order Controller, PID Controllers, Internal Model Control, two degrees of freedom, unstable system, time delay system.