REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE et POPULAIRE.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MASTER
en
MATHEMATIQUES

Spécialité
Méthodes et modèles de décision

Thème

Sous-treillis de produit des espaces : Enveloppants, représentations et dénombrement

Présenté par

MEDJOUTI Norredine
ZEHER Yacine

Travail dirigé par :

B. SADI	M. Conf A	UMMTO	Président
A. BELHADJ	M. assist A	UMMTO	Examinateur
B. OUKACHA	M. Conf A	UMMTO	Rapporteur

Année universitaire 2014 / 2015

Remerciements

Nous tenons à remercier tout d'abord, Mr. B.OUKACHA de nous avoir proposé ce sujet de recherche, pour toute sa présence, ces précieux conseils et remarques.

Nos vives reconnaissance à Mr. A.BELHADJ et Mr. R.AREZKI de nous avoir orienté et aidé tout au long de ce modeste travail.

On remercie Messieurs B. SADI, A. BELHADJ d ?avoir accepté de prendre part au jury qui évaluera notre travail.
On remercie nos amis (ies) pour leurs soutiens et encouragements.

Enfin, on remercie chaleureusement nos chers parents pour tout leurs efforts. Nous espérons que leurs fierté ne sera pas que celle de ce titre obtenu, mais surtout d'avoir fait de nous ce que nous sommes.

Table des matières

Remerciements **1**

Introduction générales **4**

1 Définitions sur les graphes et ordres **7**
1.1 Introduction 7
1.2 Rappels mathématiques 7
1.3 Graphes 9
1.3.1 Définitions 9
1.3.2 Représentation matricielle des graphes 11
1.3.3 Représentation par liste d'adjacence 12
1.4 Ensemble ordonnés 12
1.4.1 Définitions sur les ensembles ordonnés 12
1.4.2 Graphe de couverture 14
1.4.3 produits d'ensemble ordonnés 15

2 Une classe d'ordre partiels : les treillis **17**
2.1 Introduction 17
2.2 Éléments historiques 17
2.3 Treillis ordinal et treillis algébrique 18
2.3.1 Définitions algébrique et ordinale d'un treillis 18
2.3.2 Irréductibles et générateurs minimaux d'un treillis 21
2.4 Quelques classes de treillis 23
2.4.1 Treillis distributifs 23
2.4.2 Treillis Complémenté 24
2.4.3 Treillis Modulaires 25
2.5 Quelques Proprités de produit des treillis 26

3 Sous-treillis de produit des espaces **27**
3.1 Introduction 27
3.2 Quelques notions et définitions 29
3.3 Représentation des sous-treillis par projection 31

3.4 Représentation des sous-treillis hulls avec épigraphes strictement borné 34
3.5 Dénombrement des sous-treillis dans le produit des espaces 41
3.6 Codage des fonctions isotones et sous-treillis 45
3.7 Relation des sous-treillis enveloppant et aspect algorithmique 49

Conclusion **53**

Bibliographie **54**

Introduction générale

Au dix-huitième siècle, la logique a fait son apparition grâce aux travaux de plusieurs chercheurs comme Boole, Peirce, Schroder, Dedekind, Skolem, Menger etc..., la théorie des treillis a longtemps été négligée, avant de prendre son essor à partir des années 30, grâce à des auteurs et chercheurs comme Klein, Birkhoof, Ore, Stone, Kurosh , Tarski , Glivenko, Von Neumann, etc. . ., la transformant en branche fertile de l'algèbre. C'est à cette époque qu'on découvre que la structure de treillis se retrouve dans de nombreux domaines mathématiques tels que : l'algèbre, la géométrie, la logique, l'analyse fonctionnelle, etc. . . ; mais ce n'est que vers les années 60 que l'aspect combinatoire des treillis va se développer, en liaison avec la naissance de l'informatique et donc l'accroissement des besoins en informatique, algorithmique, programmes et combinatoire.

Le premier ouvrage de référence de la théorie des treillis est la première édition du livre de Birkhoff en 1940.

Treillis et sous-treillis sont des structures algébrique fondamentales viennent de l'économie pour l'optimisation, théorie des graphes, engineering et d'autres domaines.

Notre mémoire est consacré à faire une synthèse sur l'article "Sublattices of product spaces : Hulls, representations and counting" de Maurice Queyranne et Fabio Tardella dont nous nous focalisons particulièrement à la représentation des sous-treillis des produits d'espaces

Ce document est organisé de la manière suivante :
Le premier chapitre est constitué de définitions et des concepts de base ; à ce niveau, nous rappelons les notions et outils de base de la théorie des graphes et des ensembles ordonnés, nous présentons les concepts et le vocabulaire permettant de définir et représenter un graphe et un ensemble ordonné en proposant pour chacun un exemple illustratif.

Le chapitre 2 introduit les deux définitions fondamentales d'un treillis, la définition algébrique et la définition ordinale. Nous ne traiterons dans ce document que des treillis dans le cas fini. La théorie des treillis utilise l'existence d'éléments particuliers d'un treillis qui sont ses éléments irréductibles : alors que tout élément réductible d'un treillis peut s'obtenir à partir d'autres éléments par une opération de borne supérieure ou inférieure, les éléments irréductibles - éléments qui ne sont pas une borne supérieure ou une borne inférieure d'une partie ne les contenant pas - décrivent la structure même du treillis.

Dans le chapitre 3, on s'intéresse au produit cartésien de treillis qui est un treillis, appelé un produit d'espace, avec composante par composante par rapport aux opérations sup et inf. Un sous-treillis d'un treillis L est un sous-ensemble fermé pour les opérations sup et inf L. Le sous-treillis enveloppant (hull) $\mathscr{L}Q$ d'un sous-ensemble Q d'un treillis est le plus petit sous-treillis contenant Q. On considère deux types de représentations de sous-treillis et des sous-treillis enveloppants dans le produit d'espaces : représentation par des projections et de représentation avec épigraphes. On donne des conditions suffisantes, sur la dimension du produit d'espace et/ou sur le sous-treillis enveloppant d'un sous-ensemble Q, pour $\mathscr{L}Q$ entièrement définies par la projection en deux dimension du sous-treillis enveloppant de Q.
Cela étend les résultats de Topkis (1978) et de Veinott [Representation of general and polyhedral subsemilattices and sublattices of product spaces]. On donne des conditions similaires suffisantes pour le sous-treillis enveloppant $\mathscr{L}Q$ pour être représenté en utilisant les épigraphes de certaines fonctions isotones (ie, non décroissante) fonction définit sur la projection unidimensionnelle de Q. Cela étend également les résultats de Topkis et Veinott. En utilisant cette représentation, nous montrons que $\mathscr{L}Q$ est convexe lorsque Q est une partie convexe dans un treillis de vecteur (espace de Riesz), et est un polyèdre lorsque Q est un polyèdre dans $\mathbb{R}^n$.

On considère plus en détail le cas d'un produit fini de chaînes finis (ie, ensemble totalement ordonné). On utilise la représentation avec épigraphes propres bornés et on fournit des bornes supérieures et inférieures sur le nombre de sous-treillis, donnant une réponse partielle à un problème posé par Birkhoff en 1937. Ces limites sont proches les unes des autres dans le sens logarithmique. On définit une représentation angulaire (corner representation) des fonctions isotones et on les utilise en conjonction avec la représentation avec des épigraphes propres bornés pour définir un encodage de sous-treillis. On montre que cet encodage est optimale (jusqu'à un facteur constant) en termes d'espace mémoire. On considèrent également le problème d'adhésion de sous-treillis enveloppant, si un point donné est dans le sous-treillis

enveloppant $\mathscr{L}Q$ d'un sous-ensemble donné Q ou non. On présente une bonne caractérisation et un algorithme en temps polynomial pour ce problème d'adhésion de sous-enveloppant.On construisent en temps polynômiale une structure de données pour la représentation des épigraphes propres bornés, telles que les requêtes d'adhésion du sous-treillis enveloppant peuvent être obtenu en temps logarithmique de la taille $\mid Q \mid$ d'un sous-ensemble donné.

Chapitre 1

Définitions sur les graphes et ordres

1.1 Introduction

Afin de faciliter au lecteur la compréhension et la lecture du contenu de ce travail, nous avons jugé utile de donner quelques rappels mathématiques, des définitions et orientation de base concernant les graphes et les ensemble ordonnés.

1.2 Rappels mathématiques

Définition 1.1. Épigraphe
Pour une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'épigraphe est défini par :

$$E_f = \{(x, y); x \in Ietf(x) \leq y\}.$$

L'épigraphe est relié aux fonctions convexes : Une fonction est convexe si et seulement

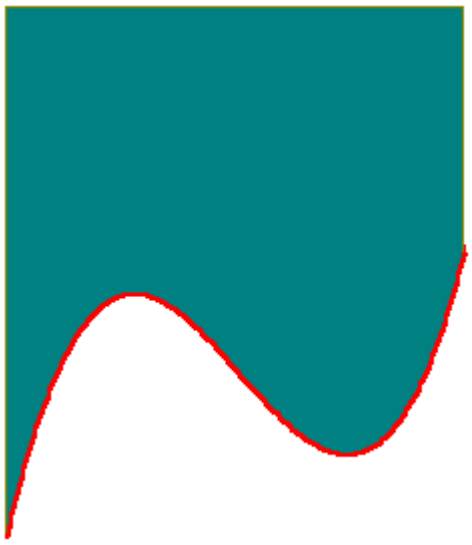

FIGURE 1.1 – épigraphe d'une fonction

si son épigraphe est convexe.

Définition 1.2. Programmation linéaire
Un programme linéaire, PL en abrégé est de la forme

$$\begin{cases} \max C^t x \\ \quad sc : \\ Ax \leq b \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Une solution réalisable d'un PL est un vecteur x qui vérifie $Ax \leq b$.
Une solution réalisable d'un PL atteignant le max est appelé solution optimale.
L'ensemble des solutions réalisable d'un PL forme un polyèdre.

Définition 1.3. Polyèdre
L'ensemble des solutions réalisables d'un PL est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces. Un tel ensemble est un polyèdre.
Un polyèdre de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice et $b \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur. Si A et b sont rationnel, P est un polyèdre rationnel.
Un polyèdre borné est appelé un polytope.

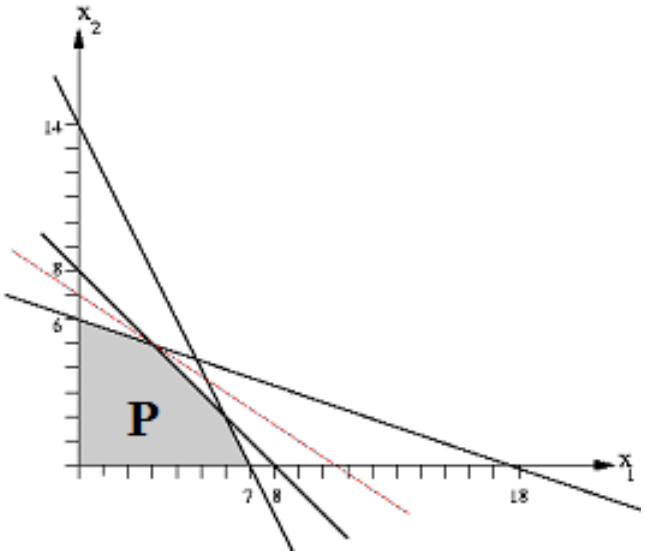

FIGURE 1.2 – Polyèdre

Définition 1.4.
— Fonction isotone : f est dite isotone si
pour tout $x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
— Fonction antitone : f est dite antitone si
pour tout $x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f(y) \leq f(x)$.
— Fonction monotone : f est dite monotone si f est isotone ou f est antitone.

1.3 Graphes

Les graphes tirent leur nom du fait qu'on peut les représenter par des dessins. À chaque sommet de G , on fait correspondre un point distinct du plan et on relie les points correspondant aux extrémités de chaque arête. Il existe donc une infinité de représentations d'un graphe. Les arêtes ne sont pas forcément rectilignes.

1.3.1 Définitions

Soit X un ensemble fini. Nous désignons par $|X|$ le cardinal de X, de plus $P(X)$ désigne l'ensemble des parties de X, et, pour $0 \leq k \leq |X|$, $P_k(X)$ désigne l'ensemble des parties de X ayant k éléments.

- Il est bien connu que $|P(X)| = 2^n$ si $|X| = n$, dans ce cas on a évidemment $P_0(X) = \varnothing$ et $P_n(X) = X$.
- Les éléments de $P_1(X)$ sont appelés des boucles et les éléments de $P_2(X)$ des arêtes.
- Un graphe G, est défini par un ensemble fini non-vide X, appelé ensemble des sommets de G et un ensemble E de paires de sommets, appelé ensemble des arêtes de G.
- On a donc $E \subseteq P_2(X)$; et on écrit $G = (X, E)$.
- Lorsque $e = (x, y)$, on dit que e est l'arête de G d'extrémités x et y ; ou que e joint x et y ; ou que e passe par x et y.
- Les sommets x et y sont alors adjacents dans G et on dit qu'ils sont incidents à l'arête e.
- Un graphe simple ne possède ni arêtes multiples ni boucles.
- Le nombre de sommets $|X|$ du graphe simple $G = (X, E)$ s'appelle ordre de G. On le note $|G|$ ou ord$|G|$. Le nombre d'arêtes du graphe est noté par $|E|$.
- Un graphe simple $G = (X, E)$ où $X = \{1, 2, 3, 4\}$ et $E = \{(1, 3), (1, 2), (1, 4), (2, 4)\}$ peut se représenter par le figure 1.3

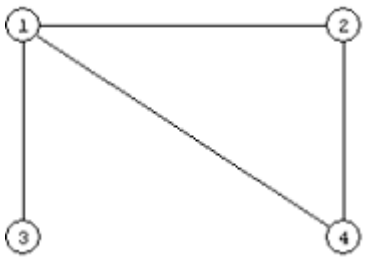

FIGURE 1.3 – Exemple de graphe

— On appelle degré du sommet x , et on note $d(x)$, le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.

— Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets. Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit régulier. Si le degré commun est k , alors on dit que le graphe est k-régulier.

— Un graphe est complet si chaque sommet du graphe est relié directement à tous les autres sommets.

— Dans un graphe simple $G = (X, E)$, une chaîne C est une séquence finie de sommets $x_0, x_1, ..., x_p$ telle que $\forall 0 \leq i \leq p, (x_i, x_{i+1}) \in E$;
on écrit $C = [x_0, x_1, ..., x_p]$.

— $p = l(C)$: longueur de la chaîne C.

— Lorsque $x_0 = x_p$, on dit que la chaîne est fermée et on l'appelle cycle.

— Une chaîne dont toutes le arêtes $(x_i, x_i + 1)$ sont distinctes est dites simple.

— Une chaîne dont tous les sommets x_i sont distincts est dite élémentaire.

— Un graphe G est connexe si $\forall x, y \in X$, il existe une chaîne de x à y.

— Sur l'ensemble X des sommets du graphe simple G, on définit la relation d'équivalence suivante :
$x \Re y \Leftrightarrow$ il existe une chaîne de x à y dans G.

— Soient $X_1, X_2, ..., X_k$ les classes d'équivalence de $\Re$, pour $1 \leq i \leq k, G_i = G_{Xi}$ le sous-graphe de G engendré par X_i, les graphes simples G_i sont appelés composantes connexe de G.

— Un graphe orienté $G = (X, U)$, est un graphe formé d'un ensemble fini non vide X de sommets et d'un ensemble $U \subseteq X * X$ d'arcs.

— Si $u = (x, y) \in U$, alors on dit que x est l'extrémité initiale de u et y l'extrémité finale de u. On dit aussi que u est un arc de x à y.

— Si $u = (x, x)$, alors u est une boucle en x.

— On note $d^+(x)$ le degré extérieur du sommet x ,c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant x comme extrémité initiale.

— On note $d^-(x)$ le degré intérieur du sommet x , c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant x comme extrémité finale.

— On définit le degré d'un sommet x dans un graphe orienté par $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$:

— Étant donné un graphe simple $G = (X, E)$, on lui associe un graphe orienté (X, U) où $(x, y) \in U \Leftrightarrow (x, y) \in E$; où chaque arête $(x, y) \in E$ donne lieu à deux arcs (x, y) et (y, x) dans U.

— Inversement, à tout graphe orienté $G = (X, U)$, on associe un graphe simple $G = (X, E)$, où $(x, y) \in E \Leftrightarrow x \neq y$ et $(x, y) \in U$ ou $(y, x) \in U$.

— Un chemin de $G = (X, U)$ est une séquence de sommets $C = [x_0, x_1, ..., x_n]$, telles que pour $i = 0, 1, ..., n - 1$, on ait $(x_i, x_{i+1}) \in U$.

— On dit que x_0 est l'extrémité initiale, x_n est l'extrémité terminale et n la longueur du chemin C.
— Si $x_0 = x_n$, on dit que le chemin est fermé et on l'appelle circuit.
— Le chemin C est dit élémentaire si les sommets x_i sont distincts.
— Il est dit simple si les arcs u_i sont distincts.
— On appelle distance entre deux sommets d'un graphe la longueur du plus petit chemin les reliant. S'il n'existe pas de chemin entre les sommets x et y , on pose $d(x, y) = \infty$.
— G est fortement connexe si : $\forall x, y \in X$ il existe un chemin de x à y et un chemin de y à x.
— Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté sans circuit. On dit que (x, y) est un arc de transitivité s'il existe un sommet z tel que (x, z) et (z, y) sont des arcs de G.
— A tout graphe, on peut associer de façon unique un graphe transitif, $\hat{G} = (X, \hat{U})$, appelé fermeture transitive de $G = (X, U)$, ou $\hat{U}$ est définie par la relation d'appartenance suivante : $(x, y) \in \hat{U} \Leftrightarrow \exists$ dans G un chemin de x à y.
— On appelle fermeture transitive de G, le graphe obtenu en ajoutant à G tous les arcs de transitivité.
— On appelle réduction transitive de G, le graphe obtenu en retirant à G tous les arcs de transitivité.

1.3.2 Représentation matricielle des graphes

Matrice d'adjacences

On peut représenter un graphe orienté par une matrice d'adjacences. Il s'agit d'une matrice carrée $(n \times n)$ où (i, j) désigne l'intersection de la ligne i et de la colonne j. Dans une matrice d'adjacences, les lignes et les colonnes représentent les sommets du graphe. Un « 1 » à la position (i, j) signifie qu'un arc part de i vers j.

Pour le graphe de la figure 1.3 la matrice d'adjacence est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a plusieurs caractéristiques :

1. Il n'y a que des zéros sur la diagonale. Un « 1 » sur la diagonale indiquerait une boucle.

2. Pour un graphe non orienté cette matrice est symétrique : $m_{ij} = m_{ji}$. On peut dire que la diagonale est un axe de symétrie. A l'opposé, pour un graphe orienté, elle n'est pas symétrique.

La matrice d'incidence

On peut représenter un graphe orienté par une matrice d'incidence de dimension $(n \times m)$, où chaque ligne est associée à un sommet et chaque colonne à un arc. Ses éléments prennent les valeurs (0,-1,1)

$$\mathrm{m}_{ij} = \begin{cases} +1 \text{ , Si } x_i = I(u_j) \\ -1 \text{ , Si } x_i = T(u_j) \\ 0 \text{ , Sinon} \end{cases}$$

1.3.3 Représentation par liste d'adjacence

On peut aussi représenter un graphe simple en donnant pour chacun de ses sommets la liste des sommets auxquels il est adjacent. Ce sont les listes d'adjacences. Pour un graphe orienté, en donnant pour chacun de ses sommets la liste des sommets qu'on peut atteindre directement en suivant un arc (dans le sens de la flèche).

1.4 Ensemble ordonnés

1.4.1 Définitions sur les ensembles ordonnés

Une relation $\Re$ défini sur un ensemble X est appelée relation d'ordre si pour tout $x, y, z \in T$, on a les propriétés suivantes :

1. Réflexivité : $x \Re x$;
2. Antisymétrie :$x \Re y$ et $y \Re x \Rightarrow x = y$;
3. Transitivité :$x \Re y$ et $y \Re z \Rightarrow x \Re z$;

Nous notons $P = (X, \leq_P)$ un ensemble ordonné où $\leq_P$ est une relation d'ordre (c'est à dire réflexive, anti-symétrique et transitive) sur l'ensemble X. Pour éviter une certaine redondance nous nous autorisons par la suite l'abus de langage consistant à appeler ordre un ensemble ordonné. Nous ne considérons que les ordres finis et nous notons $\mid P \mid$ le cardinal de X.

La même relation d'ordre $\leq_P$ peut être restreinte à un sous ensemble Y de X et est appelée sous ordre de P ou ordre induit par P sur Y .

Soient x et y dans X, nous disons que x et y sont comparables dans P si $x \leq_P y$ ou si $y \leq_P x$. Dans le cas contraire nous disons que x et y sont incomparables. Un ordre tel que tout élément est comparable à tous les autres est appelé une chaîne. Si

chaque élément de l'ordre est incomparable à tous les autres éléments, alors l'ordre est appelé anti-chaîne.

Par extension, pour un ordre $P = (X, \leq_P)$, un sous-ensemble non vide Y de X est appelé une chaîne (resp. anti-chaîne) de P si chaque paire d'éléments de Y est constituée de deux éléments comparables (resp. incomparables) dans P. La cardinalité maximale d'une chaîne de P moins 1 est appelée la hauteur de P (notée $h(P)$) et la cardinalité maximale d'une anti-chaîne de P est appelée la largeur de P (notée $w(P)$). Un élément x dans X est appelé maximum (resp. minimum) de P si pour tout y dans X nous avons $y \leq_P x$ (resp. $x \leq_P y$).

La relation d'ordre stricte pour $P = (X, \leq_P)$ est notée $<_P$ et est définie pour tout élément x et y dans X : $x <_p y$ si $x \leq_P y$ et $x \neq y$. Pour chaque x dans X, nous définissons l'ensemble des prédécesseurs (resp. successeurs) de x dans P par $pred_P(x) = \{y \in X \mid y <_p x\}$ (resp. $succ_P(x) = \{y \in X \mid x <_p y\}$). De plus nous disons que x est couvert par y dans P, noté $x \prec_p y$, si $x <_p y$ et s'il n'existe pas z dans X tel que $x <_p z$ et $z <_p y$. Nous notons alors pour tout x dans X, $imPred(x) = \{y \in X \prec_p x\}$ (resp. $imSucc(x) = \{y \in X \prec_p y\}$) l'ensemble des prédécesseurs immédiats (resp. successeurs immédiats) de x dans P.

Un élément x est minimal (resp. maximal) dans P s'il n'existe pas y dans P avec $y <_p x$ (resp. avec $x <_p y$). Soit $Q = (Y, \leq_Q)$ un sous-ordre de P, naturellement ces définitions s'appliquent à Q par extension. De plus, nous appelons minorant (resp. majorant) de Y un élément m de P tel que $m \leq_P x$ (resp. $x \leq_P m$) pour tout x dans Y . Ainsi, la partie Y est dite minorée (resp. majorée) si elle admet au moins un minorant (resp. un majorant). Enfin, un élément r de X est appelé infimum (ou borne inférieure) de Y , si Y est minorée et si l'ensemble de ses minorants admet r comme maximum. De façon duale, Y admet un supremum (ou borne supérieure) t, si Y est majorée et si l'ensemble de ses majorants admet t pour minimum.

Un ordre $P = (X, \leq_P)$ est appelé ordre biparti s'il existe une partition de X en deux sous-ensembles X_1 et X_2 tels que pour tout x et y dans X nous avons $x <_p y$ implique que $x \in X_1$ et $y \in X_2$. Dans ce cas, l'ordre est aussi noté $P = (X_1, X_2, <_P)$. Un ordre biparti complet $P = (X_1, X_2, <_p)$ est un ordre biparti tel que pour tout x dans X_1 et tout y dans X_2, nous avons $x <_P y$.

Soit $P = (X, \leq_P)$ et $Q = (Y, \leq_Q)$ deux ordres, un plongement d'ordre de P dans Q est une application ϕ de X dans Y telle que pour tout x et y dans X, nous avons $x \leq_P y$ si et seulement si $\phi(x) \leq_Q \phi(y)$. Nous notons l'existence d'un tel plongement

de P dans Q par $P \hookrightarrow Q$. Par ailleurs nous disons que l'ordre P est isomorphe à l'ordre Q s'il existe une bijection ϕ de X dans Y qui est un plongement de P dans Q.

1.4.2 Graphe de couverture

On peut schématiser un graphe de couverture au moyen d'une représentation graphique conventionnelle. Dans celui-ci, les éléments x appartenant à X sont représentés par des points $p(x)$ du plan, de façon que la règle suivante soit respectée : $x \leq_P y$ si et seulement si $p(x)$ est au-dessous de $p(y)$ et il existe une arête reliant le point $p(x)$ et $p(y)$.

Exemple 1.1.

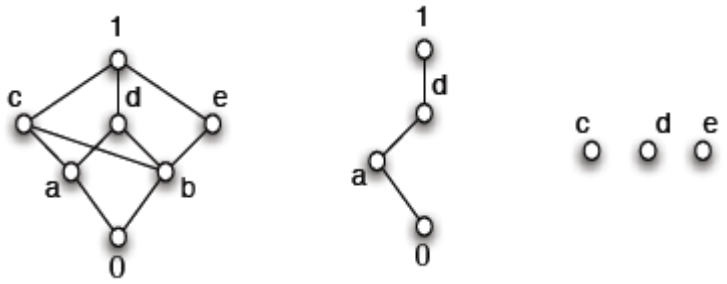

FIGURE 1.4 – Exemple d'un ensemble ordonné

À gauche, la représentation graphique de la réduction transitive d'un ordre, orientée de bas en haut. Au centre, une chaîne maximale de taille 4 de l'ordre et à droite, une anti-chaîne maximale de taille 3. L'ordre est de hauteur 3 et de largeur 3.

Cet ordre admet un élément minimum 0 et un élément maximum 1. La partie $\{c, d, e\}$ de l'ordre admet comme minorants les éléments b et 0 et comme majorant l'élément 1. L'infimum de $\{c, d, e\}$ est b (le maximum des minorants) et son supremum est 1. La partie $\{a, b\}$ admet comme majorants les éléments c, d et 1 et comme minorant l'élément 0. Cette partie admet comme infimum l'élément 0 mais n'admet pas de supremum car l'ensemble de ses majorants ne possède pas d'élément minimum. En effet c et d, tous deux minimaux parmi les majorants, sont incomparables.

On appel idéal I d'un ordre P, une partie héréditaire inférieure, i.e. $I \subseteq X$ tel que si $x \in I$ et $y \in X$ vérifient $y \leq_P x$ alors $y \in I$, on note par $I(P)$ l'ensemble des idéaux de P. Un idéale est dit principale s'il existe un élément $a \in X$ tel que $I = \{x \in X / x \leq_P a\}$, on note alors $I = \downarrow a$.
La partie héréditaire supérieure peuvent se définir dualement.

1.4.3 produits d'ensemble ordonnés

Le produit direct $T = \prod_{i \in I} T_i$ d'ensembles ordonnés par la relation $\leq$ est l'ensemble des éléments définis en prenant un élément et un seul dans chaque ensemble T_i :

$$T = \{x / x = \{x_i\}_{i \in I}, x_i \in T_i\}$$

x_i est nommée composante de x dans l'ensemble T_i ; on a, dans T_i :

$$x = y \text{ si et seulement si } \forall i \in I, x_i = y_i.$$

On peut définir sur T une relation d'ordre R telle que : x_i est nommée composante de x dans l'ensemble T_i ; on a, dans T_i :

$$xRy \text{ si et seulement si } \forall i \in I, x_i \leq y_i.$$

Elle est en effet : antisymétrique, transitive et réflexive.

L'ensemble ordonné $T = \prod_{i \in I} T_i$ est appelé produit direct général des ensembles T_i . Si I est fini, on le note $T = T_1 \times T_2 \times ... \times T_n$.

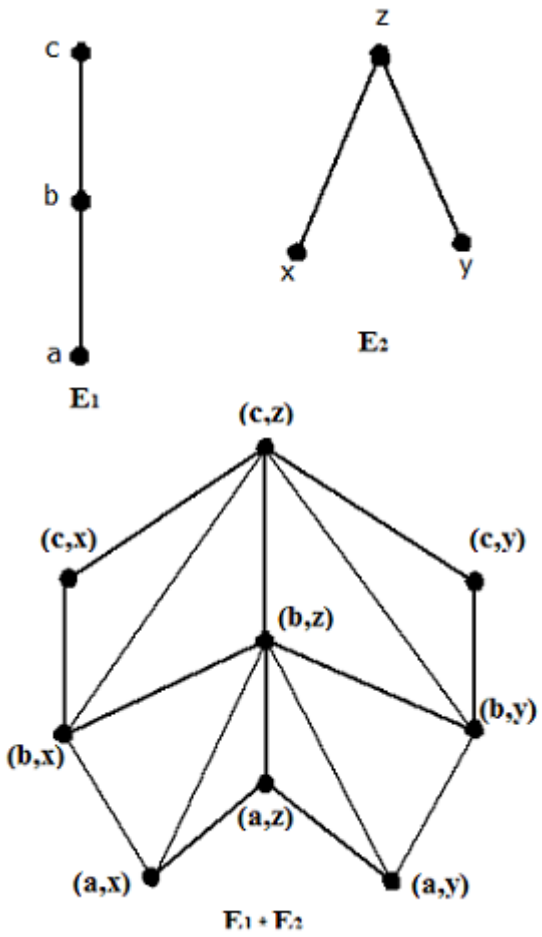

FIGURE 1.5 – Produit de 2 ensembles ordonnés

Chapitre 2

Une classe d'ordre partiels : les treillis

2.1 Introduction

Dans ce chapitre ; nous allons nous intéresser spécialement au cas d'une classe d'ordre (les treillis), qui a particulièrement intéressé et occupé les informaticiens sur les aspects et les retombées algorithmiques ; ainsi que sur les différents domaines d'application.

2.2 Éléments historiques

Treillis algébrique et ordinal (1900) : La notion de treillis définie comme une structure algébrique munie de deux opérateurs appelés borne inférieure et borne supérieure a été introduite dès la fin du 19ème siècle par Dedekind - sous le terme de dualgruppe- et Schröder, puis oubliée. Elle a été redécouverte et développée au 20ème siècle, sous diverses formes et terminologies entre 1928 et 1936 dans les travaux de Menger, Klein, Stone, Birkhoff, Öre ou encore Von Neuman. L'introduction d'un treillis sous forme ordinale - structure ordonnée (i.e. transitive, antisymétrique et réflexive) définie par l'existence d'éléments particuliers appelés bornes supérieures et inférieures - trouve son origine dans les axiomatiques des treillis booléens (algèbre de Boole) dues par exemple à Pierce en 1880, ou à Huntington. Le terme de treillis a, quant à lui, été proposé par Birkhoff lors du premier sympsosium sur la structure de treillis en 1938, pour être finalement repris dans son ouvrage de référence, alors que Menger utilisait le terme de *Système von Dingen* et Öre celui de structure. S'ensuivent plusieurs conférences, ainsi que des publications, en particulier dans la revue *Algebra Universalis* créée en 1970, ainsi que dans la revue *Order*, revue du domaine créée en 1984. De nombreux ouvrages sur la théorie des treillis portent sur la définition ordinale, en particulier celui de Davey et Priestley ou encore de Grätzer.

Treillis de Galois et treillis de fermés (1970) : Un résultat fondamental de la théorie des treillis se constitue autour d'un résultat principal qui établit que

tout treillis fini est isomorphe au treillis de Galois ou treillis des concepts de sa table. Barbut et Monjardet introduisent ainsi le terme de treillis de Galois, alors que le terme de correspondance de Galois a quant à lui été introduit par Öre en 1944. Cette bijection peut se voir comme une conséquence des propriétés de fermeture portées par toute correspondance de Galois, et par conséquent s'applique également aux treillis de fermés, ainsi qu'à tout système muni d'un opérateur de fermeture. Plusieurs travaux font apparaître la notion d'éléments irréductibles d'un treillis qui permettent par exemple de caractériser certaines classes de treillis, ou encore d'en concevoir des représentations compactes du treillis.

Treillis des concepts et Analyse Formelle des Concepts (1990) Le treillis des concepts a été introduit dans les années 1980 par Wille dans le cadre de l'Analyse Formelle des Concepts (AFC). L'AFC est une approche à la représentation des connaissances en pleine émergence dans les années 90 qui définit le treillis des concepts à partir de données binaires (ou contexte) de types objet $\times$ attributs. Un n ?ud du treillis, appelé concept, est un regroupement maximal d'objets possédant des attributs en commun. Le treillis ainsi composé de concepts reliés par inclusion, fournit une représentation des données très intuitive. L'émergence du treillis des concepts ces dernières années s'explique à la fois par la part grandissante de l'informatique dans la plupart des champs disciplinaires, ce qui conduit à la production de données en quantité de plus en plus importante ; mais également par la récente montée en puissance des ordinateurs qui, bien que la taille du treillis puisse être exponentielle en fonction des données dans le pire des cas, rend possible le développement d'un grand nombre d'applications le concernant. Des extensions du champ de l'AFC à des données plus complexes que les données binaires ont récemment été proposées, extensions qui maintiennent une connexion de Galois entre les objets et leur espace de description.

2.3 Treillis ordinal et treillis algébrique

2.3.1 Définitions algébrique et ordinale d'un treillis

On trouve dans la littérature deux définitions d'un treillis : une définition algébrique et une définition ordinale. Ces définitions introduisent notion de borne supérieure (ou supremum) et de borne inférieure (ou infimum) : alors qu'il s'agit d'opérateurs binaires dans la définition algébrique, ce sont des éléments particuliers dans la définition ordinale. La figure 2.1 en fournit un exemple.

Définition 2.1. (Définition algébrique)
Un treillis ou encore une algèbre de treillis est un triplet $L = (S; \wedge; \vee)$ où $\wedge$ et $\vee$ sont

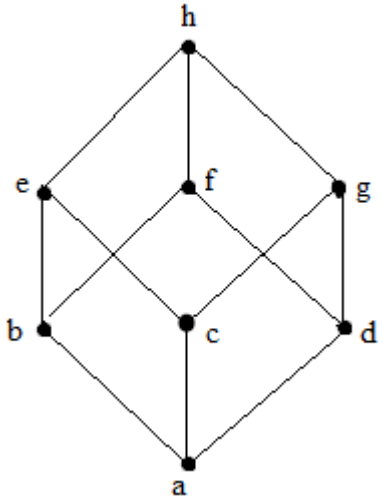

FIGURE 2.1 – Exemple de treillis

deux opérateurs binaires sur l'ensemble S qui vérifient les propriétés suivantes :

— associativité : pour tous $x; y; z \in S$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ et $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
— commutativité : pour tous $x; y \in S$, $x \vee y = y \vee x$ et $x \wedge y = y \wedge x$
— idempotence : pour tous $x \in S, x \vee x = x = x \wedge x$
— loi d'absorption : pour tous $x; y \in S, x \vee (x \wedge y) = x = x \wedge (x \vee z)$

Définition 2.2. (Définition ordinale)
Un treillis est une paire $L = (S; \leq)$ où :
— $\leq$ est une relation d'ordre sur l'ensemble S, i.e. une relation binaire qui vérifie les propriétés suivantes :
  — réflexivité : pour tout $x \in S$, on a $x \Re x$
  — antisymétrie : pour tous $x, y \in S$, $x \Re y$ et $y \Re x$ impliquent $x = y$
  — transitivité : pour tous $x, y, z \in S$, $x \Re y$ et $y \Re z$ impliquent $x \Re z$
— toute paire d'éléments $\{x, y\}$ de S admet à la fois une borne inférieure et une borne supérieure :
  — la borne inférieure de x et y, notée $x \wedge y$, est l'unique élément maximal (plus grand élément) de l'ensemble des prédécesseurs (ou minorants) de x et y (ensemble des éléments $z \in S$ tels que $z \leq x$ et $z \leq y$).
  — la borne supérieure de x et y, notée $x \vee y$, est l'unique élément minimal (i.e. plus petit élément) de l'ensemble des successeurs (ou majorants) de x et y (ensemble des éléments $z \in S$ tels que $z \geq x$ et $z \geq y$).

Les bornes inférieure et supérieure se définissent de façon plus générale mais équivalente pour une partie $X \subseteq S$: la borne inférieure de X, notée $\bigwedge X$, est l'unique

élément maximal de l'ensemble des minorants de X, alors que la borne supérieure de X, notée $\bigvee X$, est l'unique élément minimal de l'ensemble des majorants de X.

Lorsque seule l'existence de la borne inférieure est vérifiée, on parle d'inf-demi-treillis (figure 2.2.a) . Un sup-demi-treillis est défini dans le cas dual où seule l'existence d'une borne supérieure est vérifiée (figure 2.2.b). Un treillis est donc à la fois un inf-demi-treillis et un sup-demi-treillis. L'ensemble des noeuds d'un arbre muni de la relation "*est ancêtre de*" forme ainsi un sup-demi-treillis où aucune borne inférieure d'éléments incomparables n'existe, alors qu'il forme un inf-demi-treillis lorsqu'on considère la relation "*est descendant de*".

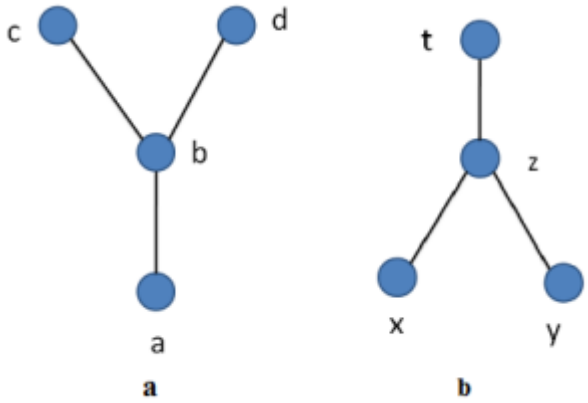

FIGURE 2.2 – Sup et Inf-demi-treillis

On montre facilement qu'un treillis admet un unique élément maximal noté $\top$, ainsi qu'un unique élément minimal noté $\bot$. On montre également qu'un inf-demi-treillis muni d'un unique élément maximal est un treillis, de même que l'est un sup-demi-treillis muni d'un unique élément minimal.

A toute relation d'ordre $\leq$ on associe sa relation d'ordre strict : notée $<$, c'est une relation asymétrique ($(x; y) \in \mathbb{R}$ implique $(y; x) \in \mathbb{R}$) transitive et irréflexive définie par $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$. Elle se déduit de la relation $\leq$ en supprimant les relations de réflexivité.

On associe également à une relation d'ordre sa relation de couverture : notée $\prec$, c'est une relation antisymétrique définie par $x \prec y$ si $x < y$, et il n'existe pas d'élément z tel que $x < z < y$. On dit alors que y couvre x. Elle se déduit de la relation $\leq$ en supprimant les relations de réflexivité et de transitivité.

Il est d'usage d'identifier relation binaire et graphe orienté simple où chaque élément est représenté par un sommet du graphe, et où la relation entre deux éléments x et y est représentée par un arc du graphe entre le sommet x et le sommet y. Le diagramme de Hasse est une représentation d'un ordre proche de la représentation habituelle d'un graphe : les noeuds sont positionnés de telle sorte que x sera au-dessous de y lorsque $x \leq y$; les orientations des arcs ne sont pas toujours représentées car elles peuvent se déduire du positionnement des noeuds ; seuls les arcs de la relation de couverture $\prec$ sont représentés car les arcs de réflexivité (boucles) et de transitivité s'en déduisent. Le diagramme de Hasse permet ainsi de ne pas surcharger le dessin pour faciliter une meilleure lisibilité. Il s'étend naturellement au cas particulier des treillis.

Dans la suite de ce document, les ensembles seront assimilés à des mots. L'ensemble $\{a, b\}$ sera ainsi noté ab. Par abus de notation, l'union ensembliste $X \cup \{x\}$ sera notée $X + x$, et la différence ensembliste $X \setminus \{x\}$ sera notée $X - x$.

2.3.2 Irréductibles et générateurs minimaux d'un treillis

Un élément d'un treillis est dit réductible s'il est résultat de l'application de l'opérateur de borne supérieure $\vee$ ou inférieure $\wedge$ sur au moins deux autres éléments distincts. Dans le cas contraire, il sera dit irréductible.

Définition 2.3. (Éléments irréductibles) Soit $L = (S; \leq)$ un treillis.
— Un élément $j \in S$ est appelé sup-irréductible si, pour tout sous-ensemble X de S, $j = \bigvee X$ implique que $j \in X$.
— Un élément $m \in S$ est appelé inf-irréductible si, pour tout sous-ensemble X de S, $j = \bigwedge X$ implique que $j \in X$.
L'ensemble des sup-irréductibles du treillis L est noté JL, et celui des inf-irréductibles ML.

En particulier, on a $\bot = \vee\emptyset$ et $\top = \wedge\emptyset$, impliquant ainsi que $\bot$ n'est pas un sup-irréductible, et $\top$ n'est pas un inf-irréductible.

Tout élément réductible peut par conséquent s'obtenir par applications successives des opérateurs $\vee$ et sur un ensemble d'irréductibles. Les éléments irréductibles représentent alors la structure même du treillis, la plupart des résultats structurels pouvant s'établir sur la base de leurs propriétés, notamment les isomorphismes entre treillis, treillis de fermés et treillis de Galois.

Une caractérisation immédiate des éléments irréductibles à partir de la relation de couverture $\prec$ du treillis, et donc de son diagramme de Hasse, établit qu'un élément est un sup-irréductible si et seulement si il couvre un seul élément, noté j^-, alors qu'un élément est un inf-irréductible si et seulement si il est couvert par un seul élément, noté m^+. En particulier, les atomes (un atome est un élément couvrant l'élément minimal $\bot$) sont des sup-irréductibles, alors que les co-atomes (un co-atome est un élément couvert pas l'élément maximal $\top$) sont des inf-irréductibles. Lorsque tous les sup-irréductibles sont des atomes, le treillis est alors un treillis atomistique. Dualement, lorsque tous les inf-irréductibles sont des co-atomes, le treillis est un treillis co-atomistique.

Tout élément $x \in S$ d'un treillis $L = (S; \leq)$ est la borne supérieure de l'ensemble de ses prédécesseurs, ainsi que la borne inférieure de l'ensemble de ses successeurs. La définition latticielle permet d'établir facilement qu'il est possible de réduire ces ensembles aux seuls prédécesseurs sup-irréductibles, et successeurs inf-irréductibles :

$$x = \vee J_x = \vee\{y \text{ sup-irréductible, tel que } y \leq x\} \tag{2.1}$$

$$x = \wedge M_x = \wedge\{y \text{ inf-irréductible, tel que } y \geq x\} \tag{2.2}$$

Par conséquent, les ensembles d'éléments irréductibles portent l'information minimale permettant de reconstruire le treillis dans sa globalité par reconstructions successives de bornes supérieures (en utilisant les sup-irréductibles) ou de bornes inférieures (en utilisant les inf-irréductibles).

Cependant, un ensemble minimal nécessaire à la reconstruction par borne supérieure d'un élément donné $x \in S$ peut ne pas être l'ensemble complet J_x, mais en être une ou plusieurs parties strictes. On parle alors de générateurs minimaux de x :

Définition 2.4. Soit $L = (S; \leq)$ un treillis et $x \in S$ un élément du treillis. Un générateur minimal de x est un sous-ensemble B de J_x tel que $x = \bigvee B$ et qui soit minimal au sens de l'inclusion, i.e pour tout $A \subset B$, on a $x < \bigvee A$. La famille B_x des générateurs minimaux de x se définit donc par :

$$B_x = \{B \subseteq J_x : x = \bigvee B \text{ et } x < \bigvee A \text{ pour tout } A \subset B\} \tag{2.3}$$

L'observation duale vaut pour la reconstruction de x comme borne inférieure à partir de M_x. Le nombre de générateurs minimaux d'un élément x peut se réduire à 1 (le seul ensemble J_x), mais peut également être élevé, au pire exponentiel en la cardinalité de J_x, d'où une explosion combinatoire de la cardinalité de B_x.

— Un treillis est dit complet lorsque tous sous ensemble d'éléments (quelque soit son cardinal) admet une borne supérieure et une borne inférieure.
— Lorsque le treillis est fini ou complet, on peut étendre ces notions de bornes supérieures ou inférieures aux sous ensemble de cardinal quelconque.
— Ainsi, les notations suivantes : $\vee Y$ et $\wedge Y$ représentent les bornes d'un ensemble $Y \subseteq X$.
— Notons que le dual d'un treillis est aussi un treillis.
— Tout treillis sur un ensemble fini est un treillis complet.
— Si $T = (X, \leq_T)$ est un treillis, alors $L = (Y, \leq_L)$ avec $Y \subseteq X$ est appelé sous-treillis engendré par Y si et seulement si pour tout x, y de Y $x \vee_T y$ et $x \wedge_T y$ appartiennent à Y.

2.4 Quelques classes de treillis

Les treillis quelconques en général étant définis, on passera aux différentes classes de treillis, dont le nombre est assez élevé. On citera les plus connues : bornés inférieurement, bornés supérieurement, Démantelables, Rangés, Atomistiques, Coatomistiques, Géométriques, Modulaires, Orthomodulaires, Distributifs, Semi-distributifs inférieurement, Semi-distributifs supérieurement, Localement distributifs, Complémentés, Orthocomplémentés, de Stone, de Post, Booléens, de Galois...etc.
Chacune de ces classes a sa particularité et possède des propriétés algébriques importantes et intéressantes.

Nous allons étudier les classes de treillis distributifs, complémenté et modulaires. Ce choix n'est pas arbitraire, mais ; bien réfléchi, car celles-ci sont les plus importantes, les plus intéressantes et les plus particulières dans la théorie des treillis.
On donnera aussi quelques propriétés et on les représentera à l'aide de schémas illustratifs.

2.4.1 Treillis distributifs

Un treillis T est dit distributif si et seulement si $\forall x, y, z \in T$ les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

et

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

C'est à dire, qu'un treillis est distributif si et seulement si on a la distributivité de l'opération $\wedge$ par rapport à l'opération $\vee$ et inversement.

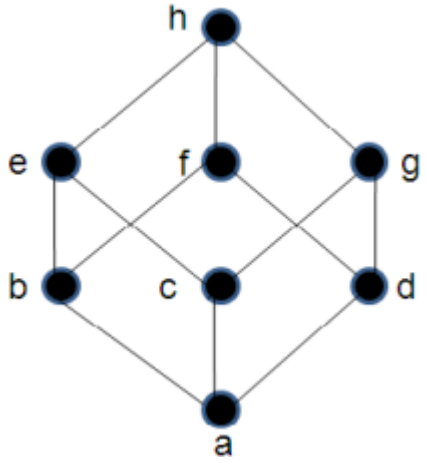

FIGURE 2.3 – treillis distributif

Proposition 2.1. *Dans un treillis distributif, on peut simplifier les propriétés algébriques suivantes comme suit :*
$\forall x, y, z \in T, x \wedge z = y \wedge z$ *; et* $x \vee z = y \vee z$ *; alors* $x = y$ *;*

Exemple 2.1. —
- $I(P)$ et $A(P)$ sont respectivement les ensembles des idéaux de P et des antichaînes maximales de P, ceux ci sont deux treillis distributifs appelés respectivement treillis des idéaux de P et treillis des anti-chaînes maximales de P.
- Le treillis T formé par l'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble X ordonné par la relation d'inclusion est un treillis distributif.
- L'ensemble des parties de E dans lequel les opérations sont $(\cap)$ et $(\cup)$ au sens ensembliste est un treillis distributif.

Proposition 2.2. *Soit* T *un treillis, il est distributif si et seulement si* T *est gradué et* $\mid J(T) \mid = \mid M(T) \mid = \mid H(T) \mid$*. Sachant que :* $J(T)$ *étant l'ensemble des éléments sup-irréductibles,* $M(T)$ *l'ensemble des éléments inf-irréductibles, et* $H(T)$ *la hauteur du treillis.*

2.4.2 Treillis Complémenté

Définition du complément : Dans un treillis possédant un élément plus grand que tous les autres (que l'on notera M) et un élément plus petit que tous les autres (que l'on notera m), le complément d'un élément $x \in X$ est un élément $y \in X$ tel que : $x \vee y = M$ et $x \wedge y = m$.

Un treillis dans lequel tout élément a au moins un complément est dit Complémenté. Si, pour tout élément $x \in S$, il existe un $\vee$-complément (i.e. élément $x' \in S$

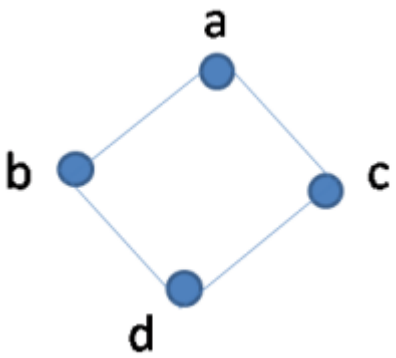

FIGURE 2.4 – treillis complémenté

tel que $x \vee x' = \top$), le treillis est $\vee$-complémenté. La définition d'un treillis $\wedge$-complémenté est duale

Remarque 2.1. — En raison de la commutativité, si y est le complément de x alors x est le complément de y.
— Dans un treillis distributif le complément d'un élément s'il existe alors il est unique.

2.4.3 Treillis Modulaires

Un treillis T est dit modulaire si $\forall x, y, z \in T$, on a :
$x \leq z$ alors $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.
Tout treillis distributif est modulaire, car l'égalité $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ avec $x \leq z$, donne bien la relation modulaire.

Remarque 2.2. La propriété de modularité se conserve par dualité, car la propriété duale
$x \geq z$ entraine $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$ c'est à dire $x \leq z$ entraine $z \vee (x \wedge y) = (z \vee y) \wedge x$.

— Tout sous-treillis d'un treillis modulaire est modulaire.
— Pour qu'un treillis soit modulaire, il suffit de montrer que, si $x \leq z$, alors $x \vee (y \wedge z) \geq (x \vee y) \wedge z$.

Théorème 2.1. *Les treillis modulaires sont les treillis distributifs qui vérifient la condition : (II)*

$$\begin{cases} a \text{ et } b \text{ comparables} \\ a \wedge c = b \wedge c \\ a \vee c = b \vee c \\ \text{entrainent } a = b \end{cases}$$

Théorème 2.2. *Les treillis modulaires sont ceux qui n'admettent aucun sous-treillis à cinq éléments du type $N5$.*

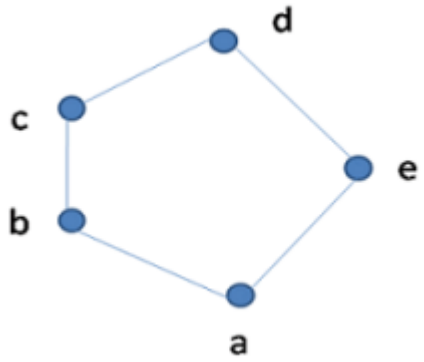

FIGURE 2.5 – treillis modulaire

2.5 Quelques Proprités de produit des treillis

— Le produit direct général T d'une famille de demi-treillis T_i (resp. de treillis) est un demi-treillis (resp. treillis).
Soient en effet $x = (x_i)_{i\in I}$ et $y = (y_i)_{i\in I}$ deux éléments de T ; si les ensembles ordonnés T_i sont des sup-demi-treillis, on peut définir la borne supérieure de x et de y dans T par : $x \vee y = \{x_i \vee y_i\}_{i\in I}$; cet élément est évidemment un majorant de x et de y qui est contenu dans tout autre majorant. S'ils sont inf-demi-treillis, on peut définir la borne inférieure : $x \wedge y = \{x_i \wedge y_i\}_{i\in I}$; s'il s'agit de treillis, on peut définir, simultanément les deux opérations.

— Le produit T d'une famille de treillis est l'union directe de ces treillis, considérés comme des ensembles abstraits.

— Si le produit général T d'une famille d'ensemble ordonnés T_i est un demi-treillis (resp. un treillis), chacun des sous-ensemble T_i est un demi-treillis (resp. un treillis).

— le produit d'une famille de demi-treillis complets (resp. treillis complets) est complet si et seulement si chaque demi-treillis (resp. treillis) T_i est complet.

Chapitre 3

Sous-treillis de produit des espaces

3.1 Introduction

Un treillis est un ensemble partiellement ordonné L ; tel que chaque paire d'éléments $\mu, \nu \in L$ a une borne inférieure $\mu \wedge \nu$ et une borne supérieure $\mu \vee \nu$ qui sont uniques . (union et intersection). Un treillis S d'un treillis L est un sous-ensemble de L fermé pour les opérations inférieure et supérieure de L.

Pour de nombreuses applications, il est souvent important de pouvoir représenter un sous-treillis algébriquement par des structures qui conviennent ; il est ainsi utile pour pouvoir connaitre si un sous-ensemble donné Q d'un treillis est un sous-treillis ; si non, on construit ses sous-treillis enveloppants (Hulls) $\mathscr{L}Q$, qui est le plus petit sous-treillis contenant Q.

Topiks et Veinott [6,8] présentent plusieurs résultats concernant la représentation et la reconnaissance des sous-treillis des espaces produits etc. les produits cartésiens de treillis avec composantes par composantes pour les opérations supérieure et inférieure. Des exemples typiques des espaces produits incluent l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$, le treillis entier $\mathbb{Z}^n$, le treillis booléen $\mathbb{B}^n = \{0, 1\}$ et plus généralement chaque espace de fonction Y^x, où Y est un treillis.

Topkis prouve que chaque sous-treillis L dans un produit fini des treillis peut être représenté comme une intersection des "Cylindres" basée sur des projections à deux dimensions de L sur un plan de coordonnées.

Veinott élargis ce résultat à une classe de produit d'espace de dimension infini. Dans la section 02, on donne un similaire et une présentation par projection plus générale pour des sous-treillis enveloppants et pour une classe plus large d'espace de produits.

Topkis aussi prouve que chaque sous-treillis L d'un produit des espaces fini peut être représenté comme l'ensemble des points qui sont dans le produit cartésien $\bigotimes_{i=1}^{n} \pi_i L$ de ces projections sur des axes des coordonnées, et ça satisfait un certain système de résolution des inégalités non linéaire à plusieurs variables (plus de deux coordonnées). Dans la section 03, on affine et on élargit ce résultat en montrant que le sous-treillis enveloppants de chaque sous-ensemble dans une classe de produit des espaces est une intersection des cylindres basés sur les épigraphes de certaines fonctions à une variable isotone (non décroissante). on utilisera cette présentation avec des épigraphes propres bornés en montrant que le sous-treillis enveloppant d'un sous-ensemble convexe (resp : polyèdre) est convexe (resp : polyèdre).

En 1937 Birkhoff a posé le problème de détermination du nombre de sous-treillis d'un treillis booléen $\mathbb{B}^d$. Dans la section 04, en utilisant la représentation par les épigraphes propres bornés, on détermine les bornes supérieures et inférieures sur le nombre de sous-treillis dans un produit fini des chaines finies (une chaîne est un ensemble totalement ordonné), ces bornes sont fermées (c'est-à-dire dans un facteur constant) une autre dans un sens logarithmique.

Dans la section 05, on présente une présentation angulaire (*corner presentation*) des fonctions isotones et leurs épigraphes, où l'espace est un produit fini des chaines finies. Cette représentation angulaire de l'épigraphe bornée nous offre un moyen de codage de sous-treillis arbitraire d'un produit d'espaces donné. L'utilisation du logarithme en base 2 de nombres des sous-treillis encodé (à un facteur constant) est optimal en terme d'espace mémoire requis.

Dans la section 06, on considère le problème de relation entre les sous-treillis enveloppant, si un point donné est dans le sous-treillis enveloppant d'un sous ensemble donné du produit d'espace, où l'espace est un produit fini des chaines finies ;on présente une caractérisation et un algorithme en temps polynomial pour ce problème de sous-treillis enveloppant. On montra également comment construire en temps polynomial une structure de données implémentait la représentation de la section 03 par le sous-treillis enveloppant d'un sous ensemble donné. Cette structure de données permet alors de répondre aux questions de sous-treillis enveloppant membre en un temps logarithmique dans la taille de sous-ensemble.

3.2 Quelques notions et définitions

Avant d'entamer ce chapitre, nous avons jugé utile de donner quelques définition sur les treillis des espaces

Définition 3.1. La relation de dominance

— On dit que $x = (x_1, ..., x_n)$ domine $y = (y_1, ..., y_n)$ si $x_i \geq y_i, \forall i = 1, ..., n$.
— On dit que $x = (x_1, ..., x_n)$ est dominé par $y = (y_1, ..., y_n)$ si $x_i \leq y_i, \forall i = 1, ..., n$.
— On dit que $x = (x_1, ..., x_n)$ est un point dominant si $\forall y = (y_1, ..., y_n) \in R^n : x \geq y$.
— On dit que $x = (x_1, ..., x_n)$ est un point dominé si $\forall y = (y_1, ..., y_n) \in R^n : x \leq y$.

Définition 3.2. Treillis polyèdreaux

— Un polyèdre non vide est dit polyèdre inf-demi-treillis s'il possède la borne inférieure.
— Un polyèdre non vide est dit polyèdre sup-demi-treillis s'il possède la borne supérieure.
— Un polyèdre non vide est dit un treillis polyèdreau si il est à la fois un polyèdre inf et sup-demi-treillis.

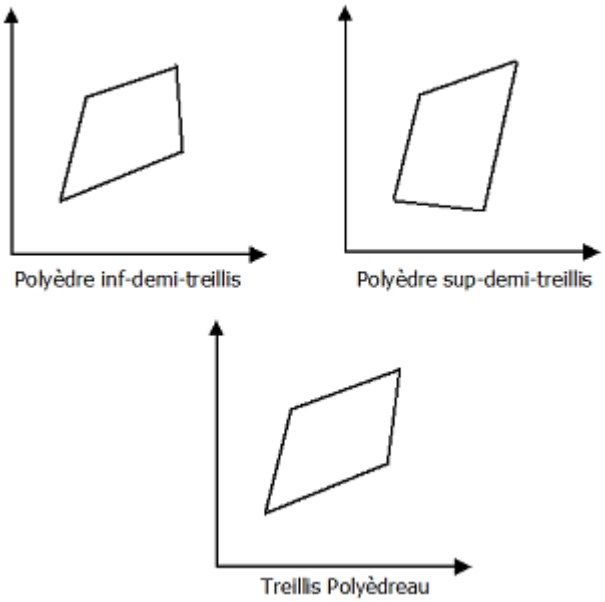

FIGURE 3.1 – Treillis polyèdreau, polyèdre inf et sup-demi-treillis

Définition 3.3. Ensembles incrémentés et désincrémentés
Soit T_I un produit de treillis $T_i, i \in I$. Un sous ensemble L de T_I est appelé incrémenté (resp. désincrémenté) si $i \in I$ et pour tout $r = (r_i) \in L$ et $t = (t_i) \in T_I$ avec $r \geq t$ (resp. $r \leq t$) et $r_i = t_i$, on a $s \in L$.

Puisque pour chaque $i \in N$, l'ensemble des i-désincrémenté (resp. incrémenté) des sous ensembles de T_I est un treillis de Moore, chaque sous ensemble L de T_I a une i-désincrémenté (resp. i-incrémenté), l'enveloppant noté $L_i^{\downarrow}$ (resp. $L_i^{\uparrow}$), il est facile de voir, pour chaque i que les deux enveloppant i-désincrémenté et i-incrémenté de L a une représentation interne utile comme les projections $\pi_S K$ des sous-ensembles K de $L \times T_I$ sur T_I.

$$L_i^{\downarrow} = \pi_{T_I}\{r,t) \in L \times T_I : r \geq t, r_i = t_i\}$$

et

$$L_i^{\uparrow} = \pi_{T_I}\{r,t) \in L \times T_I : r \leq t, r_i = t_i\}$$

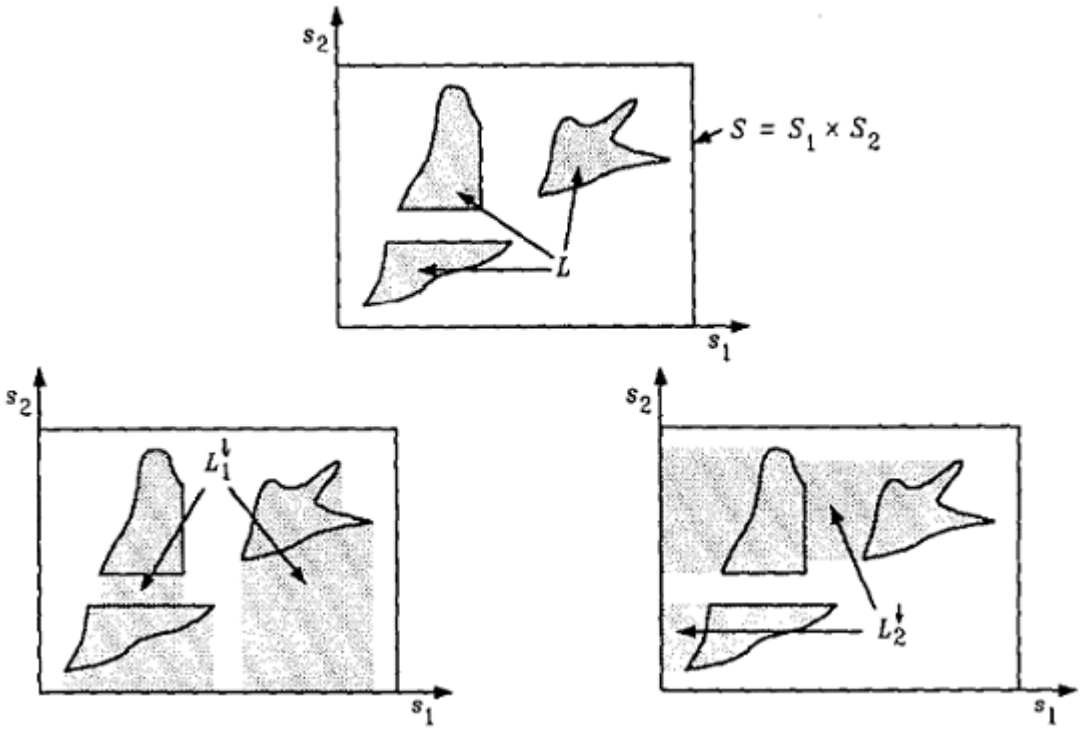

FIGURE 3.2 – Représentation des ensembles incrémenté et désincrémenté

Définition 3.4. Projection
Pour $i,j \in \{1,...,n\}, i \neq j$, les projection en une et deux dimensions d'un point $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ sont respectivement $\pi_i x = x_i$ et $\pi_{ij} x = (x_i, x_j)$, tandis que les projection en une et deux dimensions d'un sous ensemble $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ sont $\pi_i Q = \{x_i, x \in Q\}$ et $\pi_{ij} Q = \{(x_i, x_j) : x \in Q\}$, respectivement.

Définition 3.5. Cylindre
Etant donné $i \neq j$, le cylindre fondée sur un sous-ensemble $S \subseteq \pi_{ij}\mathbb{R}^n$ est $\mathrm{Cyl}_{ij} S = \{x \in \mathbb{R}^n : \pi_{ij} x \in S\}$.

Définition 3.6. Espace
Un espace est un ensemble muni de structures supplémentaires remarquables, permettant d'y définir des objets analogues à ceux de la géométrie usuelle. Les éléments peuvent être appelés suivant le contexte (points, vecteurs, fonctions...).

Définition 3.7. Demi-espaces
Une inégalité linéaire définit un demi-espace qu'est un sous-treillis sur $\mathbb{R}^n$ (sous ensemble fermé à composante par composante max et min) ssi il est bi monotone.

3.3 Représentation des sous-treillis par projection

Soit I un ensemble d'indices arbitraire. Pour tout $i \in I$, soit T_i un treillis avec les opérations Sup et Inf noté $\vee$ et $\wedge$ respectivement, associé à un ordre partiel $\leq$ (défini par $u \leq v$ ssi $u \wedge v = u$).
Le produit cartésien ou produit d'espace, $T_I = \bigotimes_{i\in I} T_i$ est l'ensemble de tous les vecteurs (ou points) $x = (x_i)_{i\in I}$ avec $x_i \in T_i$ pour tout $i \in I$. L'espace produit T_I est un treillis respectant les opérations $\vee$ et $\wedge$ définies composante par composante, c'est à dire : $x \vee y = (x_i \vee y_i)_{i\in I}$ et $x \wedge y = (x_i \wedge y_i)_{i\in I}$ pour chaque $x, y \in T_I$. Son ordre partiel associé est alors défini par $x \leq y$ ssi $x_i \leq y_i$ pour tout $i \in I$.
Un sous ensemble L de T_I est appelé sous-treillis de T_I si $x \wedge y \in L$ et $x \vee y \in L$ pour tout $x, y \in L$. L'intersection de toute famille de sous-treillis de L est un sous-treillis de L. Si Q est un sous ensemble quelconque de T_I, on note par $\mathscr{L}Q$ le sous-treillis enveloppant de Q, qui est l'intersection de tous les sous-treillis de T_I contenant Q ; donc $\mathscr{L}Q$ est le plus petit sous-treillis contenant Q.
Dans cette section, on examinera les résultats de Topkis et Veinott sur la représentation des sous-treillis de produit d'espace , et on élargira ces résultats, en particulier, pour la représentation des sous-treillis enveloppant d'un sous ensemble donné en une ou deux dimensions (projection en une ou deux dimensions).

Étant donné un sous ensemble $J \subseteq I$ et $x \in T_I$, soit x_J noté par $(x_j)_{j\in J} \in T_J$. La projection d'un sous ensemble $Q \subseteq T_I$ sur le sous espace T_J est $\pi_J Q = \{x_J : x \in Q\}$. On utilisera les notations simples π_i et π_{ij} pour $\pi_{\{i\}}$ et $\pi_{\{i,j\}}$, respectivement.
Autrement, donnant $J \subseteq I$ et $R \subseteq T_J$, le cylindre générer par R dans T_I est $Cyl_I R = \{x \in T_I : x_J \in R\}$.

Proposition 3.1. *(Projection et sous-treillis enveloppants commun)*
Si $J \subseteq I$ et $T_I = \bigotimes_{i\in I} T_i$ est un treillis de produit, alors $\pi_J \mathscr{L}Q = \mathscr{L}\pi_J Q$ pour chaque sous ensemble $Q \subseteq T_I$.

Preuve. L'inclusion $\pi_J \mathscr{L}Q \supseteq \mathscr{L}\pi_J Q$ vient de $\mathscr{L}Q \supseteq Q$ qui implique $\pi_J \mathscr{L}Q \supseteq \pi_J Q$, et par le fait que la projection $\pi_J L$ d'un sous-treillis $L \subseteq T_I$ est un sous-treillis de T_J.

Pour l'inclusion inverse, notons que $Q \subseteq Cyl_I \mathscr{L}\pi_J Q$. Donc le dernier cylindre est un sous-treillis de T_I et l'opérateur des treillis enveloppant $\mathscr{L}$ préserve l'inclusion, on a $\mathscr{L}Q \subseteq Cyl_I \mathscr{L}\pi_J Q$. Alors $\pi_J \mathscr{L}Q \subseteq \pi_J Cyl_I \mathscr{L}\pi_J Q = \mathscr{L}\pi_J Q$.

Topkis a prouvé [6-théorème 1] que chaque sous-treillis L d'un produit fini des treillis T_I peut être représenté comme une intersection des cylindre $Cyl_I \pi_{ij} L$ pour $i, j \in I$ avec $i \neq j$.
Veinott a prouvé ce résultat pour certains sous-treillis d'un produit arbitraire de chaîne. L'exemple suivant montre que ce résultat n'est pas valide pour les sous-treillis quelconques d'un produit arbitraire (pas nécessairement finies) des chaînes ou treillis.

Exemple 3.1. Soit I un ensemble fini et pour tout $i \in I$, soit T_i une chaîne à deux éléments $\mathcal{B} = \{0, 1\}$. Regardons chaque éléments $x \in T_I$ comme un vecteur caractéristique du sous ensemble $S(x) = \{i \in I : x_i = 1\}$, définissons donc un treillis isomorphisme S de T_I ensemble de puissance (powerset) 2^I de I, les opérations Sup et Inf dans T_I sont l'union et l'intersection dans 2^I. Soit L^1 un ensemble fini des vecteurs caractéristiques du sous-ensembles finis I. Par l'isomorphisme ci-dessus, L^1 est un sous-treillis de T_I, et donc I est infini, $L^1 \neq T_I$. Pour tout $i, j \in I$ (avec $i \neq j$), on a $2^{\{i,j\}} \subset S(L^1)$ et donc $\pi_{ij} L^1 = T_i \times T_j$. En conséquence, $Cyl_I \pi_{ij} L^1 = T_I$ et $\bigcap_{i,j \in I, i \neq j} Cyl_I \pi_{ij} L^1 = T_I \neq L$.

On étend maintenant les résultats de Topkis et Veinott au treillis enveloppant $\mathscr{L}Q$ du sous-ensemble Q d'un produit arbitraire des treillis. Comme le suggère l'exemple précédent, on a besoin d'imposer des conditions sur l'ensemble d'indices I ou sur Q. Pour cela, nous rappelons les définitions suivantes. Un élément l dans un ensemble ordonné M est une borne inférieure d'un sous-ensemble $K \subseteq M$ si $l \leq k$ pour tout $k \in K$. Si une borne inférieure de K existe, alors elle est unique ; On l'appelle le minimum (meet) K qui est notée $\bigwedge K$. Les limites supérieures et l'union de la $\bigvee K$ sont définies dualement [1]. Un ensemble ordonné M est un inf-demi-treillis s'il contient le minimum de chaque paire de ses éléments. Un demi-treillis inférieur M est un demi-treillis inférieur complet si toute partie non vide $K \subseteq M$ a une borne inférieure $\bigwedge K$ dans M. Un sous-ensemble S d'un demi-treillis M est un sous-demi-treillis inférieur de M s'il est fermé pour les opérations Inf(1) entre chaque paires d'éléments dans M.

Un sous-ensemble de S d'un demi-treillis inférieur M est un inf-sous-complet si chaque sous ensemble non vide K de S a un inf dans M et ainsi dans S. Il est (conditionnellement) inf sous complet si ça correspondante s'applique seulement aux sous ensemble K de M avec cardinal k. Pour l'union, toutes ces notions sont définies

1. Nous utilisons la dualité dans le sens des ordres partiels et treillis.

dualement. On utilise l'adjectif "dénombrable" pour le cas où k est le cardinal N_0. Notons que, par un argument standard, un sous-treillis L est conditionnellement dénombrable par union(resp.intersection) sous complet ssi la condition précédente est restreinte à une chaîne croissante dénombrable (rep.décroissante) K dans L. On note par $\mid I \mid$ le cardinal de I.

Théorème 3.1. *(Représentation de sous-treillis enveloppant par projection)*
Soit Q un sous ensemble d'un produit T_I de treillis. Alors le sous-treillis enveloppant $\mathscr{L}Q$ est contenu dans l'intersection de tous les cylindres générés par la projection en 2 dimensions des sous-treillis hulls de Q, qui est,

$$\mathscr{L}Q \subseteq \bigcap_{i,j\in I, i\neq j} Cyl_I \mathscr{L}\pi_{ij}Q. \tag{3.1}$$

De plus, si une de ces conditions est vérifiées :

(i) I est fini ;
(ii) soit (a) $\mathscr{L}Q$ est $|I|$-Inf-sous-complet et conditionnellement $|I|$-sup-sous-complet ;
ou (b) la condition de dualité est vérifiée.
Alors l'égalité est satisfaite en (3.1), qui est $\mathscr{L}Q$ est déterminé par le sous-treillis hulls $\mathscr{L}\pi_{ij}Q$ des projections en deux dimensions de Q :

$$\mathscr{L}Q = \bigcap_{i,j\in I, i\neq j} Cyl_I \mathscr{L}\pi_{ij}Q. \tag{3.2}$$

Preuve. Soit Q' la partie droite de (3.1) et (3.2). Par la proposition 3.1, Q' est l'intersection des cylindres $Cyl_I\pi_{ij}\mathscr{L}Q$. Notons que, pour tous sous ensemble $K \subseteq T_I$ et $J \subseteq I$, l'intersection $K \subseteq Cyl_I\pi_J K$ est vérifiée. Donc $\mathscr{L}Q \subseteq Q'$ et (3.1) est prouvé. Maintenant, on montre l'inclusion inverse sous la condition (i) ou (ii)-(a) du théorème ; la preuve pour la (b) contre partie de la dernière condition suivant la dualité. Ainsi, on fixe $x \in Q'$ et on montre que $x \in \mathscr{L}Q$. Pour tous $i, j \in I$ distinct, $(x_i, x_j) \in \pi_{ij}\mathscr{L}Q$, d'où il existe $y^{ij} \in \mathscr{L}Q$ avec $y^{ij}_i = x_i$ et $y^{ij}_j = x_j$. Soit $K^i = \{y^{ij} : j \in I, j \neq i\}$, la condition (i) ou (ii) implique que l'intersection $u^i = \bigwedge K^i$ existe et elle est en $\mathscr{L}Q$. En outre, $u^i_i = x_i$ et, pour tout $j \in I\backslash\{i\}, u^i_j \leq y^{ij}_j = x_j$, si $u^i \leq x$. Par conséquent l'ensemble $K = \{u^i : i \in I\}$ est borné par x dans T_I, donc les conditions (i) ou (ii) impliquent que l'union $z = \bigvee K$ existe et elle est en $\mathscr{L}Q$. Par conséquent $z \leq x$ et pour tout $i \in I, z_i \geq u^i_i = x_i$. En outre, $x = z \in \mathscr{L}Q$, et la preuve est complète.

Si, dans l'exemple 3.1, on donne I dénombrable alors le sous-treillis L^1 est inf-sous-complet (l'intersection de n'importe collection d'ensemble finis est finis), mais il n'est pas conditionnellement dénombrable. Comme L^1 ne satisfait pas (2), cet exemple

montre que la première condition dans (2)-(a) ne suffit pas lorsque I est dénombrable. De même si on pose I ensemble non dénombrable et L^2 un sous-treillis de tous les sous ensembles dénombrable de I, alors on voit que la première condition dans (2)-(a) ne suffit pas non plus lorsque I est non dénombrable.
Duallement, soit L^3 (resp. L^4) le sous-treillis des ensemble cofinite (resp. Cocountable) de I, à savoir, des sous-ensembles $K \subseteq I$ dont le complément $I \setminus K$ est fini (resp. dénombrable), la dernière remarque s'applique également pour la condition (ii)-(b).

3.4 Représentation des sous-treillis hulls avec épigraphes strictement borné

On présente maintenant une nouvelle caractérisation des sous-treillis de deux dimensions $\mathscr{L}\pi_{ij}Q$ en utilisant les épigraphes des fonctions isotones. Pour cela nous avons besoin d'autre définitions. Un (sous) treillis est (sous) complet si il est inf et sup-demi-treillis en même temps et chaque treillis L peut être plongé dans un treillis complet $L^\sharp$ contenant L. Notons que si le treillis L a la borne supérieur $\bigvee L$(resp. la borne inférieur $\bigwedge L$), alors son ensemble inférieur (resp. supérieur) est un sous ensemble vide $\bigwedge \varnothing = \bigvee L$ (resp. $\bigvee \varnothing = \bigwedge L$).
Posons $Q \subseteq T_I$, on définit pour chaque $i, j \in I$ avec $i \neq j$, la fonction limite $\varphi_{ij}^Q : T_i^\sharp \mapsto T_j^\sharp$ par

$$\varphi_{ij}^Q(h) = \bigwedge \pi_j\{x \in Q : x_i \geq h\}. \tag{3.3}$$

Notons que la fonction φ_{ij}^Q est isotone et basé inférieur , c'est à dire,
$\varphi_{ij}^Q(\bigwedge \pi_i Q) = \bigwedge \pi_j Q$.
soit

$$\Phi_{ij}Q = \{h \in T_i : \exists x \in Q \text{ avec } x_j = \varphi_{ij}^Q(h) \text{ et } x_i \geq h\} \tag{3.4}$$

qui désigne l'ensemble de tous les $h \in T_i$ pour les quels la valeur limite $\varphi_{ij}^Q(h)$ est atteinte en $\pi_j Q$.L'épigraphe borné propre $\mathscr{E}_{ij}Q$ est

$$\mathscr{E}_{ij}Q = \{(h,k) \in \mathscr{L}\pi_i Q \times \mathscr{L}\pi_j Q : k \geq \varphi_{ij}^Q(h) \text{ si } h \in \Phi_{ij}Q \text{ et } k > \varphi_{ij}^Q(h) \text{ sinon}\} \tag{3.5}$$

La nécessité de distinguer les deux cas dans (3.5) est justifiée dans la preuve du théorème 3.2 de représentation en deux dimensions des sous-treillis enveloppant.

Rappelons que, lorsque A est un ensemble et B un ensemble ordonné, l'épigraphe $\mathscr{E}f$ d'une fonction $f : A \mapsto B$ est

$$\mathscr{E}f = \{(h,k) \in A \times B : k \geq f(h)\}$$

Lemme 3.1. *Soit f une fonction de l'ensemble A à l'ensemble ordonné B :*

(i) Si f est isotone, A et B sont inf-demi-treillis, alors $\mathscr{E}f$ est un inf-demi-treillis de $A \times B$.

(ii) Si f est isotone, A est une chaîne et B un treillis, alors $\mathscr{E}f$ est un sous-treillis de $A \times B$.

(iii) Si A et B sont deux chaînes et $\mathscr{E}f$ un sous-inf-demi-treillis de $A \times B$, alors f est isotone.

Preuve. (i) Pour chaque $(h,k),(h',k') \in \mathscr{E}f$, nous avons $f(h \wedge h') \leq f(h) \wedge f(h') \leq k \wedge k'$. Donc $(h,k) \wedge (h',k') \in \mathscr{E}f$.
(ii) De plus, si A est une chaîne et B un treillis, alors $f(h \vee h') = f(h) \vee f(h') \leq k \vee k'$. Donc $(h,k) \vee (h',k') \in \mathscr{E}f$.
(iii) Soient $h, h' \in A$ avec $h < h'$, puisque $x = (h, f(h)) \in \mathscr{E}f, x' = (h', f(h')) \in \mathscr{E}f$ et $\mathscr{E}f$ est sous-inf-demi-treillis, on a $x \wedge x' = (h, f(h) \wedge f(h')) \in \mathscr{E}f$, pour cela $f(h) \wedge f(h') \geq f(h)$, implique $f(h) \leq f(h')$.

L'exemple suivant montre que lorsque A est un treillis, B est une chaîne, et $f : A \mapsto B$ est isotone, l'épigraphe $\mathscr{E}f$ ne nécessite pas d'être sous-sup-demi-treillis de $A \times B$.

Exemple 3.2. Soit $A = \{0, a, b, 1\}$ un treillis avec $a \wedge b = 0$ et $a \vee b = 1$, et une chaine $B = \{0, 1\}$ avec $0 < 1$.Soit f une fonction isotone tele que $f : A \mapsto B$ définie par $f(h) = 1$, si $h = 1$; 0 sinon. On a $(a,0),(b,0) \in \mathscr{E}f$ tandis que $(a,0) \vee (b,0) = (1,0) \notin \mathscr{E}f$.

Remarque 3.1. Si $j \in I$ et $\pi_j Q$ un sous ensemble sous-inf-demi-complet de T_j, alors pour tout $i \in I, i \neq j$, on a $\Phi_{ij} Q = T_i$ et

$$\mathscr{E}_{ij} Q = \{(h,k) \in \mathscr{L}\pi_i Q \times \mathscr{L}\pi_j Q : k \geq \varphi_{ij}^{Q}(h)\}, \tag{3.6}$$

qui est, l'épigraphe propre borné $\mathscr{E}_{ij}Q$ est l'intersection de l'épigraphe φ_{ij}^{Q} et $\mathscr{L}\pi_i Q \times \mathscr{L}\pi_j Q$. C'est le cas lorsque le sous ensemble est inf-sous-complet de T_I, ou lorsque chaque T_i est une chaîne et Q est fini.

Remarque 3.2. Dans le cas où $T_I = \mathbb{R}^n$ et Q est un polyèdre. La fonction bornée φ_{ij}^{Q} est la fonction valeur d'un programme linéaire. Donc dans ce cas, la fonction bornée φ_{ij}^{Q} est convexe et linéaire par morceaux, et l'épigraphe borné propre $\mathscr{E}_{ij}Q$ est un polyèdre.

Lemme 3.2. *Soit Q un sous ensemble d'un produit T_I de treillis, et soit $\pi_j Q$ une chaîne ou un sous ensemble inf-sous-complet de T_j. Alors pour tout $i \in I, i \neq j$ et pour chaque point $(h,k) \in \mathscr{E}_{ij}Q$:*

(i) Il existe $x \in Q$, tel que $x_i \geq h$ et $x_j \leq k$.

(ii) Si $(h', k') \in \mathscr{L}\pi_i Q \times \mathscr{L}\pi_j Q$ *satisfait* $h' \leq h$ *et* $k' \geq k$*, alors* $(h', k') \in \mathscr{E}_{ij} Q$

Preuve. (i) Si $h \in \Phi_{ij} Q$, alors par définition de $\mathscr{E}_{ij} Q$ on a $k \geq \varphi_{ij}^Q(h)$ et par définition de $\Phi_{ij} Q$, il existe $x \in Q$ tel que $x_i \geq h$ et $x_j = \varphi_{ij}^Q(h) \leq k$.
Si $\pi_j Q$ est inf-sous-complet, alors $\Phi_{ij} Q = T_i$ par la remarque 3.1 et (i) précédent. Le cas restant est où $\pi_j Q$ est une chaîne et $h \notin \Phi_{ij} Q$. Dans ce cas, si $x_j > k$ pour tout $x \in Q$ avec $x_i \geq h$ alors $\varphi_{ij}^Q(h) \geq k$, en contredisant l'hypothèse $(h, k) \in \mathscr{E}_{ij} Q$ puisque $h \notin \Phi_{ij} Q$. Donc (i) doit être vérifiée.

(ii) Puisque φ_{ij}^Q est isotone, on a $\varphi_{ij}^Q(h') \leq \varphi_{ij}^Q(h) \leq k \leq k'$. Si $h \notin \Phi_{ij} Q$ où $\varphi_{ij}^Q(h') < \varphi_{ij}^Q(h)$, alors $\varphi_{ij}^Q(h') < k'$ et donc $(h', k') \in \mathscr{E}_{ij} Q$. Dans le cas inverse, $h \in \Phi_{ij} Q$ et $\varphi_{ij}^Q(h') = \varphi_{ij}^Q(h)$, alors il existe $x \in Q$ avec $x_i \geq h \geq h'$, et $x_j = \varphi_{ij}^Q(h) = \varphi_{ij}^Q(h')$. Par conséquent, $h' \in \Phi_{ij} Q$ et $\varphi_{ij}^Q(h') \leq k'$, et donc $(h', k') \in \mathscr{E}_{ij} Q$.

Notons que l'hypothèse selon laquelle $\pi_i Q$ est une chaîne est trivialement satisfaite quand T_i est une chaîne. En plus, si Q est inf sous-complet alors chaque $\pi_i Q$ est une chaîne.
Avec l'épigraphe borné propre $\mathscr{E}_{ji} Q \subseteq T_j \times T_i$, on considère aussi sa transposée (inverse) $\widetilde{\mathscr{E}}_{ji} Q = \{(h, k) : (k, h) \in \mathscr{E}_{ji} Q\} \subseteq T_i \times T_j$.

Théorème 3.2. *(Représentation en deux dimension de sous-treillis enveloppant). Soit* Q *un sous ensemble d'un produit* T_I *des treillis, et soient* $i, j \in I$ *avec* $i \neq j$*, et supposons que* $\pi_i Q$*, ainsi que* $\pi_j Q$*, une chaîne ou inf sous-complet. Alors, on a*

$$\mathscr{L}\pi_{ij} Q \supseteq \mathscr{E}_{ij} Q \cap \widetilde{\mathscr{E}}_{ji} Q. \tag{3.7}$$

De plus, si une de ces conditions est vérifiée :

(i) $\pi_{ij} Q$ *est un sous-treillis de* $T_i \times T_j$ *;*
(ii) T_i *et* T_j *sont des chaînes ;*
Alors l'égalité est vérifiée en (3.7)*, qui est,*

$$\mathscr{L}\pi_{ij} Q = \mathscr{E}_{ij} Q \cap \widetilde{\mathscr{E}}_{ji} Q. \tag{3.8}$$

Preuve. En premier temps, on prouve l'inclusion en (3.7). Soit $(h, k) \in \mathscr{E}_{ij} Q$. Alors, par définition de $\mathscr{E}_{ij} Q$ et la proposition 3.1, $h \in \mathscr{L}\pi_i Q = \pi_i \mathscr{L} Q$. Par conséquence, il existe $y^1 \in \mathscr{L} Q$, tel que $y_i^1 = h$, et d'après le lemme 3.2(i), il existe $x^1 \in Q$, tel que $x_i^1 \geq h$ et $x_j^1 \leq k$. Définissons $z^1 = y^1 \wedge x^1$, on a $z^1 \in \mathscr{L} Q$, $z_i^1 = h$ et $z_j^1 \leq k$. De même, Supposons que $(h, k) \in \widetilde{\mathscr{E}}_{ji} Q$, implique l'existence de $z^2 \in \mathscr{L} Q$, tel que $z_j^2 = k$ et $z_i^2 \leq h$. Donc, si $(h, k) \in \mathscr{E}_{ij} Q \cap \widetilde{\mathscr{E}}_{ji} Q$, il existe $z = z^1 \vee z^2 \in \mathscr{L} Q$ tel que $z_i = h$ et

$z_j = k$. ce qui prouve (3.7).

Pour prouver l'inclusion inverse, et donc l'égalité en (3.8), soit $(h,k) \in \mathscr{L}\pi_{ij}Q$. Sous la condition (i), $\mathscr{L}\pi_{ij}Q = \pi_{ij}Q$ et il existe $y \in Q$ avec $y_i = h$ et $y_j = k$. Sous la condition (ii), on prouve l'existence d'un élément $y \in Q$ avec $y_i \geq h$ et $y_j \leq k$. Par contradiction, s'il n'existe pas d'élément alors, puisque T_i et T_j sont des chaînes, $x_i < h$ ou $x_j > k$ pour tout $x \in Q$. Ainsi Q est contenu dans l'ensemble $B_{ij}(h,k) = \{x \in T_I : x_i < h \text{ ou } x_j > k\}$. Cet ensemble est le complement de "j-décroissant i-croissant enveloppant" (Veinott[8] : voir aussi définition 3.3 ci dessus) de l'ensemble singleton $\{(h,k)\}$. Il suit que $B_{ij}(h,k)$ est un treillis de produit T_I des chaînes. Donc $Q \subseteq B_{ij}(h,k)$, il suit que $\mathscr{L}Q \subseteq B_{ij}(h,k)$. Donc $(h,k) \notin \pi_{ij}B_{ij}(h,k)$, il suit que $(h,k) \notin \pi_{ij}\mathscr{L}Q$. Contredisant la proposition que $(h,k) \in \mathscr{L}\pi_{ij}Q = \pi_{ij}\mathscr{L}Q$. Par conséquent, sous l'une des conditions (i) et (ii), il existe $y \in Q$ avec $y_i \geq h$ et $y_j \leq k$. Ceci implique $k \geq \varphi^Q_{ij}(h)$. Si $k > \varphi^Q_{ij}(h)$ alors, par définition $(h,k) \in \mathscr{E}_{ij}Q$. Sinon, $k = \varphi^Q_{ij}(h)$. Donc $y_i \geq h$ et $y_j \leq k = \varphi^Q_{ij}(h) \leq y_j$, ceci implique que $y_j = k$ et donc $y_j = \varphi^Q_{ij}(h)$. Donc $h \in \Phi_{ij}Q$ et $(h,k) \in \mathscr{E}_{ij}Q$. Un argument dual pour montrer que $(h,k) \in \mathscr{E}_{ij}Q$, c.à.d $(h,k) \in \widetilde{\mathscr{E}}_{ji}Q$. Ce qui complète la preuve.

L'exemple suivant montre que l'égalité (3.8) peut ne pas être vérifié si ni la condition (i), ni (ii) sont vérifiées du théorème 3.2 .
Pour simplifier les notations, dans ce qui suit et dans les exemples suivant, on présente $x = (u,v)$ en deux dimensions par uv.

Exemple 3.3. Soit $I = \{1,2\}$, et $T_1 = T_2 = \{0,a,b,c,1\}$ des treillis avec $a \wedge b = 0, a \vee b = c$ et $c < 1$. Soit $Q = \{aa, bb, 11\} \subset T_1 \times T_2$. Alors la fonction borné φ^Q_{12} satisfait $\varphi^Q_{12}(0) = \bigwedge\{a,b,1\} = 0$, $\varphi^Q_{12}(a) = a$, $\varphi^Q_{12}(b) = b$, et $\varphi^Q_{12}(c) = \varphi^Q_{12}(1) = 1$. Donc
$\Phi_{12}Q = \{a,b,c,1\}$, l'épigraphe borné propre est
$\mathscr{E}_{12}Q = \{0a, 0b, 0c, 01, aa, ac, a1, bb, bc, b1, c1, 11\}$.
Notons que $\mathscr{E}_{12}Q$ n'est pas un sous-treillis car $00 = 0a \wedge 0b \notin \mathscr{E}_{12}Q$. Par symétrie, $\mathscr{E}_{12}Q = \mathscr{E}_{21}Q$ et $\mathscr{E}_{12}Q \cap \widetilde{\mathscr{E}}_{21}Q = \{aa, bb, 11\} = Q \neq \mathscr{L}Q = \mathscr{L}\pi_{12}Q$.

On est maintenant en mesure d'établir le résultat principal de cette section.

Théorème 3.3. *(Représentation de sous-treillis enveloppant avec épigraphes bornés propres.)*
Soit Q un sous ensemble d'un produit T_I des treillis. Si une des conditions (i) ou (ii) du théorème 3.1 *est vérifiée, alors*

$$\mathscr{L}Q \supseteq \bigcap_{i,j \in I, i \neq j} Cyl_I \mathscr{E}_{ij}Q. \tag{3.9}$$

En plus, si chaque $\pi_i Q$ est une chaîne ou inf-sous-complet, et pour tout $i, j \in I$ avec $i \neq j$, la conditions (i) ou (ii) est satisfaite, alors l'égalité est vérifiée en (3.9)*, qui est*

$$\mathscr{L}Q = \bigcap_{i,j \in I, i \neq j} Cyl_I \mathscr{E}_{ij} Q. \tag{3.10}$$

Preuve. L'inclusion (3.9) résulte de l'égalité (3.2), l'inclusion (3.7) et le fait que $Cyl_I \widetilde{\mathscr{E}}_{ji} Q = Cyl_I \mathscr{E}_{ji} Q$.
L'égalité (3.10) est issue de (3.8) sous les conditions cités.

On peut utiliser le théorème 3.3 pour montrer que la convexité ou la structure polyédrale est conservée par opérateur de treillis enveloppant.

Corollaire 3.1. *Si $T_I \in \mathbb{R}^n$ et Q est un polyèdre, alors $\mathscr{L}Q$ est un polyèdre.*

Preuve. Elle découle immédiatement du théorème 3.3 et la remarque 3.2.

Rappelons qu'un treillis de vecteurs (ou riesz space) est un espace vectoriel réel avec un ordre des treillis qui est conservé par transformation et multiplication par scalaires positives. Quand T_I est un treillis de vecteur on peut appliquer le théorème 3.3 pour prouver que le treillis enveloppant $\mathscr{L}Q$ d'un ensemble convexe Q est convexe.

Théorème 3.4. *(Convexité des sous-treillis enveloppant dans un treillis des vecteurs)*
Supposons que la condition (i) ou (ii) du théorème 3.1 *est vérifiée ; T_I est un treillis de vecteur ; et Q un sous ensemble convexe de T_I, tel que $\mathscr{L}\pi_i Q$ est convexe pour tout $i \in I$. Alors $\mathscr{L}Q$ est convexe.*

Preuve. Par le théorème 3.3, on a $\mathscr{L}Q = \bigcap_{i,j \in I, i \neq j} Cyl_I \mathscr{E}_{ij} Q$. Donc c'est suffisant de prouver que l'épigraphe bornée propre $\mathscr{E}_{ij} Q$ est convexe quand Q est convexe.
En effet, Soient (h^1, k^1) et (h^2, k^2) appartiennent à $\mathscr{E}_{ij} Q$. Alors par le lemme 3.2(i), il existe deux point $x^1, x^2 \in Q$, tel que $x_i^1 \geq h^1, x_i^2 \geq h^2, x_j^1 \leq k^1$ et $x_j^2 \leq k^2$. Par convexité de Q, pour chaque $\alpha \in [0, 1]$ le point $x(\alpha) = \alpha x^1 + (1 - \alpha) x^2$ est dans Q. En outre, on a $\alpha h^1 + (1 - \alpha) h^2 \leq x_i(\alpha)$ et $\alpha k^1 + (1 - \alpha) k^2 \geq x_j(\alpha)$. Donc, de la convexité de $\mathscr{L}\pi_i Q$ et $\mathscr{L}\pi_j Q$, et de la définition de $\mathscr{E}_{ij} Q$, il résulte que $\alpha(h^1, k^1) + (1 - \alpha)(h^2, k^2) \in \mathscr{E}_{ij} Q$

Corollaire 3.2. *Supposons que chaque T_i est une chaîne, la condition (i) ou (ii) est vérifiée ; T_I est un treillis de vecteur ; et Q un sous ensemble convexe de T_I. Alors $\mathscr{L}Q$ est convexe.*

Preuve. Il résulte du théorème 3.4, l'égalité $\mathscr{L}\pi_i Q = \pi_i Q$, et la convexité de $\pi_i Q$

Si Q est un sous-treillis de T_I, alors la condition (i) du théorème 3.2 est satisfaite et l'équation (3.10) est vérifiée sous la condition (i) ou (ii) du théorème 3.1 , ainsi fournissons une représentation de sous-treillis de produit d'espaces (d'espaces produit) avec les épigraphes bornée propre. Cette représentation est liée à celle dans Topkis [6] et Veinott [8]. Pour $i, j \in I$, la i-incrémentation j-descrémentation (enveloppant) $Q_{ij}^{\uparrow\downarrow}$ d'un ensemble $Q \subseteq T_I$ est définie (voir [8]) par :

$$Q_{ij}^{\uparrow\downarrow} = \{x \in T_I : \exists y \in Q, x_i \geq y_i \text{ et } x_j \leq y_j\}. \tag{3.11}$$

Dans le cas en deux dimension $I = \{1, 2\}$, Topkis [6] appelle les ensembles $Q_{12}^{\uparrow\downarrow}$ et $Q_{21}^{\uparrow\downarrow}$ le bimonotone hulls de Q. Pour généraliser, I et tout $i, j \in I$ avec $i \neq j$, on a $Q_{ij}^{\uparrow\downarrow} = Cyl_I \pi_{ij} Q_{ij}^{\uparrow\downarrow}$, tel que, $Q_{ij}^{\uparrow\downarrow}$ un cylindre généré par un sous ensemble de $T_i \times T_j$. En outre , pour $i \neq j$, l'ensemble $Q_{ij}^{\uparrow\downarrow}$ est lié aux épigraphes bornés propres $\mathscr{E}_{ij}Q$ comme suit.

Proposition 3.2. *Soit Q un sous ensemble d'un produit T_I des treillis, et soit $\pi_j Q$ une chaine ou un sous ensemble inf-sous-complet de T_j. Alors pour tout $i \in I, i \neq j$,*

$$Cyl_I \mathscr{E}_{ij} Q = Q_{ji}^{\uparrow\downarrow} \cap Cyl_I \mathscr{L} \pi_i Q \cap Cyl_I \mathscr{L} \pi_j Q. \tag{3.12}$$

Preuve. Donc la partie droite de l'équation (3.12) est un cylindre généré par un sous ensemble $T_i \times T_j$, il suffit de montrer que

$$\mathscr{E}_{ij} Q = \pi_{ij}(Q_{ji}^{\uparrow\downarrow} \cap Cyl_I \mathscr{L} \pi_i Q \cap Cyl_I \mathscr{L}_j Q) = \pi_{ij} Q_{ji}^{\uparrow\downarrow} \cap ((\mathscr{L} \pi_i Q) \times (\mathscr{L} \pi_j Q)) \tag{3.13}$$

On montra d'abord que $\mathscr{E}_{ij}Q$ est inclus dans la partie droite de l'équation (3.12). Par définition, $\mathscr{E}_{ij}Q \subseteq \mathscr{L}\pi_i Q \times \mathscr{L}\pi_j Q$. Soit $(h, k) \in \mathscr{E}_{ij}Q$. D'après le lemme 3.2(i), il existe $y \in Q$, tel que $y_i \leq k$ et $y_j \geq h$. En outre, $(h, k) \in \pi_{ij} Q_{ji}^{\uparrow\downarrow}$. Ceci complète la première partie de la preuve.

Pour montrer l'inclusion inverse, soit $(h', k') \in \pi_{ij} Q_{ji}^{\uparrow\downarrow} \cap ((\mathscr{L}\pi_i Q) \times (\mathscr{L}\pi_j Q))$. Par définition de $Q_{ji}^{\uparrow\downarrow}$ il existe $y \in Q$, tel que $y_j \leq k'$ et $y_i \geq h'$, donc $Q \subseteq \mathscr{E}_{ij}Q$, on a $(y_i, y_j) \in \mathscr{E}_{ij}Q$ et, par (ii) du lemme 3.2, $(h', k') \in \mathscr{E}_{ij}Q$.

Si chaque $\pi_i Q$ est une chaîne ou inf-sous-complet, et la condition (i) du théorème 3.2 est satisfaite pour tout $i, j (i \neq j)$, alors $\bigcap_{i \in I} Cyl_I L \pi_i Q = \otimes_{i \in I} \pi_i Q$. l'équation (3.3) est alors équivalente à :

$$\mathscr{L} Q = \bigcap_{i,j \in I, i \neq j} Q_{ij}^{\uparrow\downarrow} \cap \bigotimes_{i \in I} \pi_i Q. \tag{3.14}$$

Si Q est un sous-treillis de T_I, appliquant la condition (i) du théorème 3.2 pour tout $i, j (i \neq j)$; chaque $\pi_i Q$ est une chaîne ou inf-sous-complet ; et I est fini ; alors (3.14) implique les théorèmes 2 et 3 de Topkis [6]. D'autre part, $Q_{ii}^{\uparrow\downarrow} = Cyl_I \pi_i Q$, si I est fini et chaque T_i est une chaîne, l'équation (3.10) devient alors :

$$\mathscr{L}Q = \bigcap_{i,j\in I, i\neq j} Q_{ij}^{\uparrow\downarrow} \cap \bigcap_{i\in I} Q_{ii}^{\uparrow\downarrow} = \bigcap_{i,j\in I} Q_{ij}^{\uparrow\downarrow}$$

.

Remarque 3.3. Topkis [6] et Veinott[8] montrent que, sous une des conditions (i) ou (ii) du théorème 3.2, les sous-ensembles $Q_{ij}^{\uparrow\downarrow}$ sont des sous-treillis. Par l'équation (3.3), ça implique que les épigraphes bornées propres $\mathscr{E}_{ij}Q$ sont ainsi sous-treillis où chaque $\pi_i Q$ est ainsi soit une chaine ou inf sous complet. D'où, les cylindres $Cyl_I\mathscr{E}_{ij}Q$ en (3.10) sont ainsi des sous-treillis.

Une autre représentation des sous-treillis en produit des treillis a été décrite par Topkis [6] en termes de niveau des ensembles de fonctions. Plus précisément Topkis a montré qu'un sous ensemble Q d'un produit treillis T_I est un sous-treillis de T_I si et seulement si il peut être représenté comme une intersection des niveaux des ensembles de d fonction à une seule variable (uni-variable) et de $d(d-1)/2$ fonctions bimonotone de T_I dans une chaîne Ce, où $I = \{1, ..., d\}$. Rappelons que la fonction $f : T_I \to C$ est appelé à une seule variable (uni-variable) si $f(x) = f_i(x_i)$ pour un certain $i \in I$ et $f_i : T_i \to C$. Elle est appelée bimonotone si $f(x) = f_{ij}(x_i, x_j)$ pour certain $f_{ij} : T_i \times T_j \mapsto C$, avec $i, j \in I, i \neq j$ et $f_{ij}(x_i, x_j)$ isotone en x_i et antitone en x_j. Donnons un ensemble ordonné P et $\alpha \in P$, l'ensemble niveau $lev \leq_\alpha (f)$ d'une fonction f d'un ensemble S dans P est l'ensemble $\{x \in S, f(x) \leq \alpha\}$.

Dans le théorème 3.3, on peut remplacer les ensembles de niveau des fonctions bimonotones dans la représentation de Topkis, avec l'épigraphe de fonction isotone inférieurement basé comme suit.

Proposition 3.3. *Soit T_i une chaîne pour chaque $i \in I$ et $Q \subseteq T_I$. Supposons que chaque $\pi_i Q$ est inf-sous-complet et que la condition (i) ou (ii) du théorème* 3.1 *est vérifiée. Alors Q est un sous-treillis de T_I si et seulement si il existe des fonctions $f_i : T_i \mapsto \{0, 1\}$ pour tout $i \in I$, et une fonctions isotone inférieurement basé $f_{ij} : lev \leq_0 (f_i) \mapsto lev \leq_0 (f_j)$ pour tout $i, j \in I$ avec $i \neq j$, tel que :*

$$Q = \{x \in T_I : f_i(x_i) \leq 0, \forall i \in I, \text{ et } x_j \geq f_{ij}(x_i), \forall i, j \in I, i \neq j\}$$

Preuve. le "si" découle du fait que Q est l'intersection d'un produit, pour tout $i \in I$, des chaînes $\{x \in T_I : f_i(x_i) \leq 0\}$, et des cylindres basés sur les épigraphes $\mathscr{E}f_{ij}$ pour tout $i \neq j \in I$, qui sont des sous-treillis d'après le lemme 3.1. Pour le "seulement si", définissons f_i par $f_i(h) = 0$ si $h \in \pi_i Q$, et 1 sinon ; et $f_{ij} = \varphi_{ij}^Q$ pour tout $i, j \in I$ avec $i \neq j$, et en appliquant le théorème 3.3.

3.5 Dénombrement des sous-treillis dans le produit des espaces

Dans cette section, on suppose que l'ensemble des indices I et chaque treillis T_i est fini et, pour simplifier les notations, soit $I = \{1, .., d\}$. Notre objectif ici est de fournir les bornes supérieur et inférieur sur le nombre de sous-treillis de T_I, plus précisément, on va utiliser le théorème 3.3 de représentation de sous-treillis enveloppant pour obtenir une borne supérieur sur le nombre des sous-treillis en terme de nombre de fonctions isotones entre chaque paire de treillis T_i et T_j. Avec le même outil, on va ainsi obtenir la borne inférieur sur le nombre de sous-treillis dans le cas où chaque T_i est une chaîne.

Ainsi, on montra comment encoder précisément un treillis Q par moyen d'encodation des fonctions bornées φ_{ij}^Q du théorème de présentation 3.3.

Pour i, j dans I (avec $i \neq j$) et des sous-treillis $P_i \subseteq T_i$ et $P_j \subseteq T_j$, considérons l'ensemble $\mathscr{S}_{ij}(P_i, P_j)$ de tous-sous-treillis Q de T_I avec $\pi_i Q = P_i$ et $\pi_j Q = P_j$. Soit $\mathscr{I}(P_i, P_j)$ l'ensemble de toutes les fonctions isotones inf-basées f de P_i à P_j. De la remarque 3.1, les épigraphes bornées $\mathscr{E}_{ij}Q = \mathscr{E}\varphi_{ij}^Q \cap (P_i \times P_j)$ pour tout $Q \in \mathscr{S}_{ij}(P_i, P_j)$, le nombre des ensembles distincts $\mathscr{E}_{ij}Q$ pour tout $Q \in \mathscr{S}_{ij}(P_i, P_j)$ est au plus $\mid \mathscr{I}(P_i, P_j) \mid$.

Soit $\mathscr{S}(L)$ qui est l'ensemble de tous les sous-treillis d'un treillis donnée L. Soit $\mathscr{R}(T_I) = \{(P_1, ..., P_d) : P_i \in \mathscr{S}(T_i) \forall i \in I\}$.
Pour $(P_1, ..., P_d) \in \mathscr{R}(T_I)$, le produit $\prod_{i,j \in I, i \neq j} \mid \mathscr{I}(P_i, P_j) \mid$ est le nombre de tuples $f = (f_{ij})_{i,j \in I, i \neq j}$ des fonctions $f_{ij} \in \mathscr{I}(P_i, P_j)$. De l'équation 3.3 et la remarque ci-dessus, ce nombre est le nombre maximal sur le nombre de sous-treillis $Q \in \mathscr{S}(T_I)$ avec les projections $\pi_i Q = P_i$ pour tout $i \in I$.En outre on obtient la borne supérieur suivante sur le nombre des sous-treillis d'un produit d'espace T_I :

$$\mid \mathscr{S}(T_I) \mid \leq U(T_I), \text{ avec } U(T_I) = \sum_{(P_1,...,P_d) \in \mathscr{R}(T_I)} \prod_{i,j \in I, i \neq j} \mid \mathscr{I}(P_i, P_j) \mid \tag{3.15}$$

Notons que cette borne supérieure $U(T_I)$ peut dépasser $\mid \mathscr{S}(T_I) \mid$ pour au moins deux raisons : (i) le tuple distingué f peut donner lieu à la même intersection $\bigcap_{i,j \in I, i \neq j} Cyl_I \mathscr{E} f_{ij}$, comme illustré dans l'exemple 3.4 ; (ii) l'épigraphe de fonction isotone inf-basée $f_{ij} \in \mathscr{I}(P_i, P_j)$ peut ne pas être un sous-treillis, comme montré dans l'exemple 3.2.
Cependant, lorsque tous les T_i sont des chaînes, le lemme 3.1 montre que la dernière difficulté ne se pose pas. Pour le reste de cette section, on suppose que tous les T_i sont des chaînes.

Exemple 3.4. Soit $I = \{1, 2, 3\}$ et $T_i = \{0, 1\}$ pour tout $i \in I$. considérons le treillis $Q = \{000, 111\}$, alors tout $\pi_i Q = \{0, 1\}$ et tout $\pi_{ij} Q = \{00, 11\}$. Donc $\varphi_{ij}^{Q}(h) = h$ pour tout $h \in T_i$. Toutefois, on peut aussi obtenir $Q = \bigcap_{i,j \in I, i \neq j} Cyl_I \mathscr{E} f_{ij}$ avec une tuple différente f. Par exemple, on peut supposer $f_{13} = f_{31} = 0$ et $f_{ij} = \varphi_{ij}^{Q}$ pour tout autre i, j. En effet, soit $Q' = \bigcap_{i,j \in I, i \neq j} Cyl_I \mathscr{E} f_{ij}$, on a $Q \subseteq Q'$. pour montrer l'inclusion inverse, soit $x \in Q'$. Alors, $x \in Cyl_I \mathscr{E} f_{12}$ implique $x_2 \geq x_1$, ensuite $x \in Cyl_I \mathscr{E} f_{21}$ implique $x_1 \geq x_2$, donc $x_1 = x_2$. De même on a $x_2 = x_3$, et donc $x \in Q$. Ceci montre que $Q = Q'$.

Supposons C_1 et C_2 deux chaînes finies avec $\mid C_1 \mid = c_1$ et $\mid C_2 \mid = c_2$. Notons que $\mid \mathscr{I}(C_1, C_2) \mid$ est égale au nombre de séquence non dégressive de nombre entier $c_1 - 1$ pris à partir de $\{1, ..., c_2\}$, on a

$$\mid \mathscr{I}(C_1, C_2) \mid = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 - 2 \\ c_1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 - 2 \\ c_2 - 1 \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Soit $p = (p_1, ..., p_d)$ et $t = (t_1, ..., t_d)$, où $t_i = \mid T_i \mid$ pour tout i. Combinons les équations (3.2) et (3.3) on obtiendra

$$U(T_I) = \sum_{1 \leq p \leq t} \prod_{i=1}^{d} \begin{pmatrix} t_i \\ p_i \end{pmatrix} \prod_{i \neq j} \begin{pmatrix} p_i + p_j - 2 \\ p_i - 1 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

On présente maintenant une borne inférieur sur le nombre de sous-treillis d'un produit fini de T_I des chaînes finis. Afin d'obtenir cette borne, on utilise les résultats suivants qui nous permettrons de générer des sous-treillis distincts.

Lemme 3.3. *Soit T_I un produit de chaînes. Pour tout $i \in I$, soit P_i une sous chaîne de T_i. Soit J, K une partition d'ensemble d'indices de I. Pour tout $j \in J$ et $k \in K$, soit $f_{jk} \in \mathscr{I}(P_j, P_k)$. Soit $Q = \bigcap_{(j,k) \in J \times K} Cyl_I \mathscr{E} f_{jk}$. Alors $Q \in \mathscr{I}(T_I)$ et $\pi_{jk} Q = \mathscr{E} f_{jk}$ pour tout $j \in J$ et $k \in K$.*

Preuve. Par le lemme 3.1, l'épigraphe $\mathscr{E} f_{jk}$ est un sous-treillis de $P_j \times P_k$. Ainsi Q est un sous-treillis de T_I. Donc $Q \subseteq Cyl_I \mathscr{E} f_{jk}$, trivialement alors $\pi_{jk} Q \subseteq \mathscr{E} f_{jk}$. Pour prouver l'inclusion inverse, considérons chaque point $(x_j, x_k) \in \mathscr{E} f_{jk}$. Pour tout $u \in J \setminus \{j\}$ définissons $x_u = \bigwedge P_u$ et pour tout $v \in K \setminus \{k\}$ définissons $x_v = \bigvee P_v$. On montre maintenant que le point $x = (x_i)_{i \in I}$ ainsi défini est en $Cyl_I \mathscr{E} f_{uv}$ pour tout $u \in J$ et $v \in K$. Ceci est trivial si $u = j$ et $v = k$. si $u \in J \setminus \{j\}$ et $v \in K$ alors, $f_{uk} \in \mathscr{I}(P_u, P_k)$, on a $f_{uk}(x_u) = f_{uk}(\bigwedge P_u) = \bigwedge P_k \leq x_k$ et donc $(x_u, x_k) \in \mathscr{E} f_{uk}$. Pour $u = j$ et $v \in K \setminus \{k\}$, alors $f_{jv}(x_j) \leq \bigvee P_v = x_v$ et donc $(x_j, x_v) \in \mathscr{E} f_{jv}$. Il s'ensuit que $x \in Q$.CQFD.

Corollaire 3.3. *Soit T_I un produit de chaîne. Pour tout $i \in I$, soit P_i une sous chaîne de T_i. Soit J, K une partition de l'ensemble d'indice I. Supposons que*

$Q = \bigcap_{(j,k)\in J\times K} Cyl_I \mathscr{E} f_{jk}$ et $R = \bigcap_{(j,k)\in J\times K} Cyl_I \mathscr{E} g_{jk}$ où f_{jk} et $g_{jk} \in \mathscr{I}(P_j, P_k)$ pour tout $j \in J$ et $k \in K$. Alors $Q = R$ si et seulement si $f_{jk} = g_{jk}$ pour tout $j \in J$ et $k \in K$.

Preuve. La partie si est trivial. la partie et seulement si est découle du lemme 3.3 en notant que $f_{jk} = g_{jk}$ ssi $f_{jk} = \mathscr{E} g_{jk}$.

Avec chaque $P = (P_1, ..., P_d) \in \mathscr{R}(T_I)$ on associe un sous ensemble non trivial $J(P)$ de l'ensemble des indices (qui est, $\emptyset \subset J(P) \subset I$) ; qui avec leurs complémentaire $K(P) = I \setminus J(P)$ d'une partition de I. Par le corollaire 3.3, pour chaque tuple $\mathscr{G} = (J(P))_{P\in\mathscr{R}(T_I)}$ on obtient la borne inférieure suivante sur le nombre des sous-treillis de T_I :

$$| \mathscr{S}(T_I) | \geq L\mathscr{G}(T_I), oL\mathscr{G}(T_I) = \sum_{P\in\mathscr{R}(T_I)} \prod_{j\in J(P),k\in K(P)} | \mathscr{I}(P_j, P_k) | \tag{3.18}$$

On construit maintenant un tuple $\mathscr{G}$, tel que $\log L\mathscr{G}(T_I) \geq \frac{1}{4} \log U(T_I)$, où "log" dénote le logarithme de base 2. Fixons $P = (P_1, ..., P_d) \in (T_I)$. Pour simplifier les notations, on suppose (W.L.O.G)[2] que $| P_1 | \geq | P_2 | \geq ... \geq | P_d |$.

Lemme 3.4. *Soit $P = (P_1, ..., P_d) \in \mathscr{R}(T_I)$ avec $| P_1 | \geq | P_2 | \geq ... \geq | P_d |$. Soit $J(P)$ l'ensemble de tous les indices entiers dans $I = \{1, ..., d\}$ et $K(P) = I \setminus J(P)$. Alors*

$$\log \prod_{j\in J(P),k\in K(P)} | \mathscr{I}(P_j, P_k) | \geq \frac{1}{4} \log \prod_{u,v\in I,u\neq v} | \mathscr{I}(P_u, P_v) | . \tag{3.19}$$

Preuve. Donnons un sous ensemble $A \subseteq I \times I$, Par souci de concision, soit

$$\mathscr{P}(A) = \prod_{(u,v)\in A} | \mathscr{I}(P_u, P_v) |$$

En premier temps, soient $(u, v) \in J(P)$ avec $u < v$. Donc $| P_v | \leq | P_{v-1} |$, on a $| \mathscr{I}(P_u, P_v) | \leq | \mathscr{I}(P_u, P_{v-1}) |$ et $u < v - 1 \in K(P)$.
En outre,

$$\mathscr{P}(\{u, v\} \in J(P) \times J(P) : u < v\}) \leq \mathscr{P}(\{j, k\} \in J(P) \times K(P) : j < k\}).$$

En suite, soient $u, v \in K(P)$ avec $u < v$. Donc $| P_v | \leq | P_{v-1} |$, on a $| \mathscr{I}(P_u, P_v) | = | \mathscr{I}(P_v, P_u) | \leq | \mathscr{I}(P_{v-1}, P_u) |$ et $u < v - 1 \in J(P)$. En outre,

$$\mathscr{P}(\{u, v\} \in K(P) \times K(P) : u < v\}) \leq \mathscr{P}(\{j, k\} \in J(P) \times K(P) : j > k\}).$$

De plus :

$$\mathscr{P}(\{k, j\} \in K(P) \times J(P) : k < j\}) = \mathscr{P}(\{j, k\} \in J(P) \times K(P) : j > k\}).$$

2. Without Loss Of any Generality

on conclut que

$$\begin{aligned}
\log \mathscr{P}(\{u,v\} \in I \times I : u \neq v\}) &= 2\log \mathscr{P}(\{u,v\} \in I \times I : u < v\}) \\
&= 2(\log \mathscr{P}(\{u,v\} \in J(P) \times J(P) : u < v\}) \\
&+ \log \mathscr{P}(\{u,v\} \in K(P) \times K(P) : u < v\}) \\
&+ \log P(\{j,k\} \in J(P) \times K(P) : j > k\}) \\
&+ \log \mathscr{P}(\{(j,k) \in J(P) \times K(P) : j < k\})) \\
&\leq 2(2\log P(J(P) \times K(P))).
\end{aligned}$$

Théorème 3.5. *(Comparaison des bornes inférieurs et supérieurs) Considérons le tuple $\mathscr{G} = (J(P)_{P \in \mathscr{R}(T_I)}$, où chaque $J(P)$ est construit comme dans l'hypothèse du lemme* 3.4. *Alors :*

$$\log L\mathscr{G}(T_I) \geq \frac{1}{4}\log U(T_I). \tag{3.20}$$

Preuve. Par le lemme 3.4, il suffit de noter que la fonction $f(x) = x^{1/4}$ est sous additive sur $\mathbb{R}_+$, c'est à dire, $\sum_{i=1}^n x_i^{1\backslash 4} \geq (\sum_{i=1}^n x_i)^{1\backslash 4}$ pour $x_i \geq 0$.

Dans le cas booléen $T_I = \mathbb{B}^d = \{0,1\}^d$, on a $t_i = 2$ pour tout i et on peut identifier $\mathbb{B}^d$ avec l'ensemble 2^I de tous les sous ensembles de d éléments de l'ensemble I. Donc la borne supérieur $U(T_I)$ peut être décrite comme la suivante :

$$U(\mathbb{B}^d) = \sum_{A \subseteq I} 2^{d-|A|} 2^{|A|(|A|-1)} = \sum_{a=0}^{d} \begin{matrix} d \\ a \end{matrix} 2^{a^2-2a+d} = 2^{d^2+O(d)}$$

D'autre coté,par le théorème 3.5, la borne inférieur $L\mathscr{G}(\mathbb{B}^d)$ satisfait

$$L\mathscr{G}(\mathbb{B}^d) satisfait \geq 2^{d^2/4+O(d)}$$

On compare maintenant les bornes ci-dessus pour le nombre des sous-treillis $\mathbb{B}^d$ avec un résultat asymptotique du théorème well-known de Birkhoff. Par le théorème de représentation de Birkhoff, chaque sous-treillis 2^I est uniquement identifié par ces éléments supérieurs et inférieurs $T, B \in 2^I$, et par un ordre partiel sur $T \setminus B$. Puis, notons $PO(\ell)$ le nombre d'ordre partiel sur un ensemble de ℓ éléments, on a :

$$\mid \mathscr{S}(\mathbb{B}^d) \mid = \sum_{\ell=0}^{d} \left(\begin{matrix} d \\ \ell \end{matrix} \right) 2^{d-\ell} PO(\ell),$$

Où $\ell = \mid T \setminus B \mid$ et le facteur $2^{d-\ell}$ compte toutes les affectations des éléments de $I \setminus (T \setminus B)$ à B ou $I \setminus T$. Kleitman et Rotschild montrent que $PO(\ell) = 2^{\ell^2/4+O(\ell)}$. D'où l'exposant dans la borne inférieur $L\mathscr{G}(\mathbb{B}^d)$ est asymptotique en terme de $O(d)$.

3.6 Codage des fonctions isotones et sous-treillis

Sur la base de représentation du théorème 3.3, on décrit maintenant un codage pour un sous-treillis Q d'un produit treillis T_I. Ainsi, on montre que notre codage est "**consise**" dans le sens où il utilise au plus $O(\log \mid \mathscr{S}(T_I) \mid$ bits, alors que $\log \mid \mathscr{S}(T_I) \mid$ est la borne inférieur sur le nombre de bits nécessaires dans certaines représentations des éléments de $\log \mathscr{S}(T_I)$.

Du théorème 3.3 et la remarque 3.1, un sous-treillis Q de T_I peut être identifié en spécifiant ces d projections : $P_i = \pi_i Q \subseteq T_i$ et $d(d-1)$ fonctions isotones inf-basé $\varphi_{ij} : P_i \mapsto P_j$.

Pour coder cette représentation, on associe d'abord avec chaque P_i leur vecteurs caractéristique comme un sous ensemble en utilisant $t_i = \mid T_i \mid$ bits. Après on parle sur le codage de chaque fonction isotone inf-basée $\varphi_{ij} : P_i \mapsto P_j$.

Pour simplifier plus les notations, on identifie chaque P_i avec l'ensemble des entiers $\{1, ..., p_i\}$ et observons que la condition inf-basé $\varphi_{ij}(1) = 1$.

La représentation angulaire (corner) d'une fonction isotone inf-basé $\varphi_{ij} : P_i \mapsto P_j$ est la séquence $((s_1, r_1), ..., (s_K, r_K))$ des points angulaire $((s_\ell, r_\ell) \in Pi \times P_j (\ell = 1, ..., K)$, définit comme suit. L'ensemble $\{r_1, ..., r_K\}$ est le rang $\varphi_{ij}(P_i)$ de φ_{ij}, avec $1 = r_1 < ... < r_K \leq p_j$; et chaque $s_\ell = \vee\{u \in P_i : \varphi_{ij}(u) = r_\ell\}$, tel que $1 \leq s_1 \leq ... \leq s_K = p_i$ (φ_{ij} est isotone et $\varphi_{ij}(p_i) = \varphi_{ij}(\vee P_i) = \vee \varphi_{ij}(P_i) = r_K$). Donc, les ongles (corners) forment une séquence strictement croissante $((s_1, r_1), ..., (s_K, r_K))$ dans $P_i \times P_j$. Notons que l'épigraphe $\mathscr{E}\varphi_{ij}$ est l'union de j-descrémentation, i-incrémentation hulls.

$$H_{ij\ell} = \{(s_\ell, r_\ell)\}_{ji}^{\uparrow\downarrow} = \{(x, y) \in P_i \times P_j : x \leq s_\ell, y \geq r_\ell\}$$

des points angulaires (corners), c'est à dire, $\mathscr{E}\varphi_{ij} = \bigcup_{\ell=1}^{K} H_{ij\ell}$. De plus, si $\pi_{ij} Q \subseteq P_i \times P_j$, alors par la construction des points angulaires (s_ℓ, r_ℓ) de φ_{ij}^Q sont tous contenus dans $\pi_{ij} Q$.

Si $p_i \leq p_j$, on code ces représentations angulaires en codant l'ensemble $\{s_1, ..., s_K\}$ directement comme un sous ensemble de P_i utilisant p_i bits, et l'ensemble $\{r_1, ..., r_k\}$ indirectement en donnant ces différences successives (or "heights") $h_\ell = r_{\ell+1} - r_\ell (\ell = 1, ..., K-1)$ comme une séquence des entiers positifs en utilisant $\sum_{\ell=1}^{K-1} (\lfloor \log h_\ell \rfloor + 1)$ bits. Dans l'autre coté, si $p_i > p_j$, on code la représentation angulaire (corner) de φ_{ij} en codant l'ensemble $\{r_1, ..., r_K\}$ directement comme un sous ensemble de P_j et l'ensemble $\{s_1, ..., s_k\}$ indirectement en donnant ces "largeurs" séquence largeur

$w_\ell = s_\ell - s_{\ell-1}$ (avec $s_0 = 1$) pour $\ell = 1, ..., k-1$ (notons que la dernière largeur $w_K = p_i - s_{K-1}$ pas nécessairement codée) en utilisant $p_j + \sum_{\ell=1}^{K-1}(\lfloor \log w_\ell \rfloor + 1)$ bits au total.

En captant le nombre de bits dans le codage décrit, on néglige le coût nécessaire pour l'entrée de la dimension d, les tailles $t_1, ..., t_d$ et les séparateurs (c.à.d : virgules et espaces vierges(blancs)) utilisées pour séparer les entrées de la variable largeur entières.

On peut maintenant énoncer les résultats de cette section, où "ln" dénote le logarithme naturel et e sa base.

Théorème 3.6. *Le codage de la représentation décrit si-dessus pour un treillis d'un produit fini de treillis T_I utilise au plus* $64(e \ln 2)^{-1} \log \mid \mathscr{S}(T_I) \mid$ *bits.*

La preuve de ce théorème nécessite deux techniques du lemme suivant.

Lemme 3.5. *Supposons $2 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_d$. Le codage décrit ci dessus pour un treillis $Q \subseteq T_I$ exige au plus $\sum_{i=1}^{d}(t_i + 4(e\ ln2)^{-1} \sum_{j>i} t_i(\log(t_j/t_i) + 2))$ bits.*

Preuve. Pour chaque $i \neq j$ dans I, soit $E(P_i, P_j)$ le nombre maximum de bits utilisés pour coder une fonction isotone inf-basée de P_i à P_j. Notons que $E(P_i, P_j)$ incrémente avec la taille de P_i et P_j, donc $E(P_i, P_j) \leq E(T_i, T_j)$. Maintenant, soit $i < j$, on a aussi $2 \leq t_i \leq t_j$.

Considérant une fonction isotone inf-basée φ de T_i à T_j et soit K le nombre de ces angles (corners). Si $K = 1$, alors l'unique angle de la fonction φ est $(P_i, 1)$, et ce codage utilise plus de $t_i(\log(t_j/t_i) + 2)$ bits. Sinon, $2 \leq K \leq p_i$. Soit $(h_1, ..., h_{K-1})$ la séquence des largeurs angulaires de φ. Alors le nombre $\mid \varphi \mid$ de bits nécessaire pour le codage de φ satisfait

$$\begin{aligned}
\mid \varphi \mid &= t_i + \sum_{\ell=1}^{K-1}(\lfloor \log h_\ell \rfloor + 1) \\
&\leq t_i + \sum_{\ell=1}^{K-1}(\log h_\ell + 1) \\
&\leq t_i + (K-1)(\log \frac{\sum_{\ell=1}^{K-1} h_\ell}{K-1} + 1) \\
&\leq t_i + (K-1)(\log \frac{t_j}{K-1} + 1),
\end{aligned}$$

où les deux dernière égalités suites de la concavité de la fonction log et de $\sum_{l=1}^{K-1} h_l \leq t_j$, respectivement.

Quand $t_j \geq 2$, la fonction $F : [1, t_j] \mapsto \mathbb{R}$ définie par $F(x) = x(\log(t_j/x) + 1)$ est croissante en x, où $1 \leq x < x^* = 2e^{-1}t_j$; atteint son minimum à $x = x^* < t_j$; et décroissante pour $x > x^*$. Si $t_i \leq x^*$ alors $F(K-1) < F(t_i)$. Sinon $x^* < t_i \leq t_j$ et $F(K-1) \leq F(x^*) = 2(e\ln 2)^{-1}t_j = 2(e\ln 2)^{-1}F(t_j) \leq 2(e\ln 2)^{-1}F(t_i)$. puisque $2(e\ln 2)^{-1} \approx 1.06 > 1$, dans l'autre cas on a $F(K-1) \leq 2(e\ln 2)^{-1}F(t_i)$. En conséquence $\mid \varphi \mid \leq t_i + F(K-1) \leq 2(e\ln 2)^{-1}t_i(\log(t_j/t_i) + 2)$, et
$E(T_i, T_j) = max_\varphi \mid \varphi \mid \leq 2(e\ln 2)^{-1}t_i(\log(t_j/t_i) + 2)$.

Considérons maintenant une fonction isotone inf-basée φ' de T_j à T_i et soit K' le nombre de ces angles (corners). Si $K' = 1$ alors φ' a un seul angle (corners) $(p_i, 1)$ et il est son codage précis. Sinon, $2 \leq K' \leq p_i$. Soit $(\omega_1, ..., \omega_{K'-1})$ une séquence de largeur d'un angle (corner), ainsi $\sum_{\ell=1}^{K'-1} \omega_\ell \leq t_j$. Alors on a

$$\mid \varphi' \mid = t_i + \sum_{\ell=1}^{K'-1} (\lfloor \log \omega_\ell \rfloor + 1) \leq t_i + (K'-1)(\log \frac{\sum_{\ell=1}^{K'-1} \omega_\ell}{K'-1} + 1)$$
$$\leq t_i + (K'-1)(\log \frac{t_j}{K'-1} + 1) \leq 2(e\ln 2)^{-1}t_i(\log(t_j/t_i) + 2),$$

Comme ci dessus en impliquant $E(T_j, T_i) \leq 2(e\ln 2)^{-1}t_i(\log(t_j/t_i) + 2)$.
Donc, la longueur total de codage est limité par $\sum_{i<j}(E(T_i, T_j) + E(T_j, T_i))$ plus $\sum_{i=1}^{d} t_i$ pour le codage de l'ensemble $\pi_i Q \subseteq T_i$, dans le lemme suivant

Lemme 3.6. *Supposons $n \geq k \geq 1$. Alors l'inégalité suivante est vérifiée*

$$\log \begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix} \geq \frac{1}{4}(k+1)(\log \frac{n+1}{k+1} + 2).$$

Preuve. De l'inégalité $k! \leq (k+1)^k 2^{-k}$ et $k! \leq k^{k-1}$ on déduit que

$$(k!)^4 \leq \frac{(k+1)^{3k}k^{k-1}}{2^{3k}} \leq \frac{(k+1)^{3k}(n+1)^{k-1}}{2^{3k}}$$

d'où, on a

$$\begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}^4 \geq \frac{(n+1)^{4k}}{(k!)^4} \geq \frac{(n+1)^{3k+1}(n+1)^{k-1}2^{3k}}{(k+1)^{3k}(n+1)^{k-1}} \geq (2\frac{n+1}{k+1})^{3k+1},$$

et

$$4\log \begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix} \geq (3k+1)(\log \frac{n+1}{k+1} + 1) \geq (k+1)(\log \frac{n+1}{k+1} + 2).$$

Avec les résultats ci-dessus, on peut démontrer le théorème 3.6.

Preuve. Le théorème est vérifié trivialement si $d = 1$, pour ce cas $\log \mid \mathscr{S} \mid = t_1$, égale au nombre de bits utilisés pour présenter un sous ensemble arbitraire $Q \subseteq T_1$. Et pour $d \geq 2$ et sans perdre les généralité, $2 \leq t_1 \leq ... \leq t_d$.

Si tout les $t_i = 2$, en utilisant (3.18) on a

$$\log \mid \mathscr{S}(T_I) \mid \geq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor \lceil \frac{d}{2} \rceil 2 \geq \frac{d(d-1)}{2}.$$

Tandis que le codage de sous-treillis Q utilise $B = 2d + d(d-1)$ bits (c.à.d, deux bits pour chaque projection $\pi_i Q$, et un bit pour chacune des $d(d-1)$ fonctions bornées φ_{ij}^{Q}. et pour $d \geq 2$, on a $\log \mid \mathscr{S}(T_I) \mid \geq \frac{1}{6}B$ et le théorème est vérifié dans ce cas.

Supposons maintenant que $t_d \geq 3$. D'après les équations (3.17), (3.18) et le théorème 3.5, on obtient :

$$\log \mid \mathscr{S}(T_I) \mid \geq \frac{1}{4} \log \mid U(T_I) \mid = \frac{1}{4} \log \Big(\sum_{i \leq p \leq t} \prod_{i=1}^{d} \begin{pmatrix} t_i \\ p_i \end{pmatrix} \prod_{i \neq j} \begin{pmatrix} p_i + p_j - 2 \\ p_i - 1 \end{pmatrix} \Big)$$

Donc pour chaque vecteur p' avec $1 \leq p' \leq t$, on a :

$$\log \mid \mathscr{S}(T_I) \geq \frac{1}{4} \log \Big(\prod_{i=1}^{d} \begin{pmatrix} t_i \\ p'_i \end{pmatrix} \prod_{i \neq j} \begin{pmatrix} p'_i + p'_j - 2 \\ p'_i - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{d} \Big(\log \begin{pmatrix} t_i \\ p'_i \end{pmatrix} + 2 \sum_{j>1} \log \begin{pmatrix} p'_i + p'_j - 2 \\ p'_i - 1 \end{pmatrix} . \tag{3.21}$$

On pose $p'_i = 2$ si $t_i = 2$, et $p'_i = \lceil t_i/2 \rceil$ si $t_i \geq 3$. Soit

$$\Delta_i = \log \begin{pmatrix} t_i \\ p'_i \end{pmatrix} + 2 \sum_{j>i} \log \begin{pmatrix} p'_i + p'_j - 2 \\ p'_i - 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} (t_i + 2 \sum_{j>i} t_i (\log \frac{t_j}{t_i} + 2)).$$

Pour tout $i \in I$ tel que $t_i = 2$ on a $\Delta_i = -\frac{1}{4} + \sum_{j>i} \delta_{ij}$ où
$\delta_{ij} = 2 \log p'_j - \frac{1}{2} \log t_j - \frac{1}{2}$.
Si $t_j = 2$ alors $\delta_{ij} = 1$; si $t_j = 3$ alors $\delta_{ij} > 0.7$; tandis que si $t_j \geq 4, \delta_{ij} \geq 2 \log(t_j/2) - \frac{1}{2} \log(t_j) - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$.quand $t_d \geq 3$ on a $\Delta_i = -\frac{1}{4} + \sum_{j>i} g_{ij} \geq -\frac{1}{4} + g_{id} > 0$.
Pour tout les indices $i \in I$ tel que $t_i \geq 3$ on a :

$$\begin{pmatrix} t_i \\ p'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_i \\ \lceil t_i/2 \rceil \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_i \\ \lfloor t_i/2 \rfloor \end{pmatrix} \geq 2^{t_i/2} \text{ et ainsi } \log \frac{t_i}{p'_i} \geq \frac{t_i}{2}.$$

par le lemme 3.6, pour tout $j > i$,

$$\begin{aligned} \log \begin{pmatrix} p'_i + p'_j - 2 \\ p'_i - 1 \end{pmatrix} &= \log \begin{pmatrix} (\lceil t_i/2 \rceil - 1) + (\lceil t_j/2 \rceil - 1) \\ \lceil t_i/2 \rceil - 1 \end{pmatrix} \\ &\geq \frac{1}{4} \lceil t_i/2 \rceil (\log \frac{t_j/2}{t_i/2} + 2) \\ &\geq \frac{1}{4} \frac{t_i}{2} (\log \frac{t_j/2}{t_i/2} + 2) \end{aligned}$$

Où la deuxième inégalité issue de faite que la fonction $(x, y) \mapsto x(\log(x/y) + 2)$ est isotone sur l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq y\}$. De là $\Delta_i \geq \frac{3}{8} t_i > 0$.
Puisque tout $\Delta_i > 0$, par l'équation (3.21) on a

$$\log \mid \mathscr{S}(T_I) \mid \geq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{8} (t_i + 2 \sum_{j>i} t_i (\log \frac{t_j}{t_i} + 2)) \geq \frac{e \ln 2}{64} \sum_{i=1}^{d} (t_i + \frac{4}{e \ln 2} \sum_{j>i} t_i (\log \frac{t_j}{t_i} + 2)).$$

Ce qui implique le théorème par le lemme 3.5.

3.7 Relation des sous-treillis enveloppant et aspect algorithmique

Dans cette section, on considère le problème suivant de relation de sous-treillis enveloppant : donnant un espace produit T_I, un sous ensemble $Q \subseteq T_I$ est un point $\overline{x} \in T_I$, est ce que $\overline{x} \in \mathscr{L}Q$? On suppose que Q est fini et $T_I \subseteq \mathbb{Q}^d$ avec
$I = \{1, ..., d\}$, comme utilisée dans plusieurs applications. On va montrer que la représentation (10) avec des épigraphes bornée propres, ou qui est dans Eq. (3.2), ou la représentations correspondantes dans Topkis[6] ou Veinott [8], rapporte une bonne représentation pour ce problème, dans le sens suivant : si la réponse est "Oui" il existe un certificat qui permet une vérification "facile" de cette réponse positive ; et si la réponse est "Non", il existe aussi un certificat qui permet une vérification facile de cette réponse négative. (Une vérification "facile" est celle qui peut être réalisé en temps polynomial de la taille de l'entrée du sous-ensemble Q d'un point $\overline{x}$. Lorsque le sous-ensemble Q est donnée comme une liste d'éléments,cette bonne représentation donne un algorithme polynomial qui résout le problème d'adhésion du sous-treillis enveloppant en temps $O(d^2 \mid Q \mid)$. On utilise la représentation avec épigraphes bornées propres et construisons une structure de données qui permet de résoudre à plusieurs reprises le problème de l'adhésion sous-treillis enveloppant en $O(d^2 \log \mid Q \mid)$ par requête lorsque Q est fixé et le nombre de point $\overline{x}$ proposés peuvent être de largeur arbitraire.
Notons que le problème de l'appartenance de sous-treillis enveloppant est non trivial, puisque $\mid \mathscr{L}Q \mid$ peut être exponentielle dans $\mid Q \mid$, comme le montre l'exemple simple suivant.

Exemple 3.5. Soit $T_I = \mathbb{B}^d$ et $Q = \{e^1, ..., e^d\}$ où chaque e^i est le i^{me} vecteur unité. Alors $\mathscr{L}Q = \{0, 1\}^d$ et $\mid \mathscr{L}Q \mid = 2^{|Q|}$.

Afin d'obtenir une bonne représentation pour l'adhésion de sous-treillis, on peut

écrire 3.3 ou 3.2 comme les équivalences suivantes :

$$\overline{x} \in \mathscr{L}Q \Leftrightarrow \begin{cases} \text{pour tout } i \in I, \text{ il existe } y^i \in Q \text{ tels que } y^i_i = \overline{x}_i; \text{ et} \\ \text{pour tout } i \neq j \in I, \text{ il existe } z^{ij} \in Q \text{ de telle sorte que} \\ z^{ij}_i \geq \overline{x}_i \text{ et } z^{ij}_j \leq \overline{x}_j. \end{cases} \tag{3.22}$$

Notons que, pour tout $i \neq j$ le point z^{ij} peut être choisi comme point de Q dont la projection $\pi_{ij} z^{ij}$ est un angle de φ^Q_{ij}. Donc, lorsque $\overline{x} \notin \mathscr{L}Q$ un simple certificat négative consiste (i), soit un indice $i \in I$, pour le quelle on peut vérifier directement que $q_i \neq \overline{x}_i$ pour tout $q \in Q$, ou (ii) deux indices distincts $i \neq j \in I$, pour lesquels on peut aussi vérifier directement que, pour tout $q \in Q, q_i < \overline{x}_i$ ou $q_j > \overline{x}_j$. Satisfaisant Q, et donc $\mathscr{L}Q$, est contenu dans le sous-treillis $\{x \in T^I : x_i \neq \overline{x}_i\}$ en cas (i), ou $\{x \in T^I : x_i < \overline{x}_i \text{ ou } x_j > \overline{x}_j\}$ dans le cas (ii), alors que $\overline{x}$ ne l'est pas.

D'autre part, si $\overline{x} \in \mathscr{L}Q$, pour tous point y^i (Pour tout $i \in I$) et z^{ij} (Pour tous $i \neq j \in I$) de Q vérifiant 3.5, on a

$$\overline{x} = \bigvee_{i \in I} (y^i \wedge \bigwedge_{j \neq i} z^{ij}). \tag{3.23}$$

(En effet, pour tout $i \in I$, on a $\overline{x} \geq (y^i \wedge \bigwedge_{j \neq i} z^{ij}$ avec l'égalité pour les i^{me} composantes). Par conséquent, une telle liste d'au plus $d + d(d-1) = d^2$ points de y^i (Pour tout $i \in I$) et z^{ij} (Pour tout $i \neq j \in I$) de Q satisfaisant (3.22) donne un certificat positif qui peut être vérifiée en temps polynomial. Ainsi les équations. 3.5 et 3.6 donnent un algorithme $O(d^2 \mid Q \mid)$ pour le problème de l'adhésion ou d'appartenance de sous-treillis enveloppant lorsque le sous-ensemble Q est donnée comme une liste de ses éléments.

Supposons Q est fixe et on peut être confronté à un grand nombre de requêtes "donnée $\overline{x} \in T^I$, $\overline{x} \in \mathscr{L}Q$?" Compte tenu du théorème 3.3 de représentation de sous-treillis enveloppant, on construit, en temps polynomial dans $\mid Q \mid$ et d, une structure de données contenant la projection $\pi_i Q$ et les fonctions bornées φ^Q_{ij}, comme suit. Soit le sous ensemble Q de T_I donné comme une liste de $\mid Q \mid$ points, $Q = \{q^1, ...q^{|Q|}\}$. Pour tout $i \in I$, soit $p_i = \mid \pi_i(Q) \mid$, avec $p_i \leq \mid Q \mid$.

Tout d'abord, on détermine chaque projection $\pi_i(Q)$ en temps $O(\mid Q \mid \log p_i) = O(\mid Q \mid \log \mid Q \mid)$. Pour cela, on commence avec $\pi_i Q = \emptyset$, on ajoute séquentiellement des points à $\pi_i Q$ en le conservant comme un ensemble totalement ordonné (ou un dictionnaire). Pour chaque $q \in Q$, on vérifie, en utilisant par exemple la recherche binaire, en $O(\log p_i)$ de temps si son i^{e} composante q_i est déjà dans $\pi_i Q$ et, si non, on l'ajoute à $\pi_i Q$.

Ayant ainsi déterminé chaque projection $P_i = \pi_i Q$, on peut maintenant identifier P_i, avec l'ensemble des entiers $P'_i = \{1, ..., p_i\}$. Pour chaque point $q \in Q$ on associe le point $q' \bigotimes_{i \in I} P'_i$ de telle sorte que chaque composant de q_i de q est le $q_i{}^{\text{e}}$ élément de la chaîne P_i. Ainsi, il existe une correspondance naturelle one-to-one entre Q et l'ensemble Q' de tout les points q', et on travaille maintenant avec l'ensemble Q'.

Ensuite, pour chaque $i, j \in I(i \neq j)$, on construit la représentation angulaire de la fonction bornée $\varphi_{ij}^{Q'}$ comme suit. On détermine d'abord, dans un seul passage à travers tous les points de Q' et en temps $O(\mid Q \mid)$, la fonction : $\psi : P'_j \mapsto P'_i$ définie par

$$\psi(v) = \max\{u \in P'_i : \exists q' \in Q', q'_i = u \text{ et } q'_j = v\}.$$

Ainsi Q' est fini, tous les points $(\psi(v), v)$ sont en $\pi_{ij} Q'$. Cependant, chaque angle (corner) (s_ℓ, r_ℓ) de $\varphi_{ij}^{Q'}$ satisfait $s_\ell = \psi(r_\ell)$ et donc $(s_\ell, r_\ell) \in \pi ij Q'$. Le premier angle (corner) est $(s_1, r_1) = (\psi(1), 1)$. Donnant le ℓ^{e} angle (corner) (s_ℓ, r_ℓ), Si $s_\ell = p_i$ alors cet angle (corner) est le dernier, sinon déterminer l'angle (corner) suivant en trouvant la dernière valeur de v dans $\{r_\ell + 1, ..., p_j$ tel que $\psi(r_\ell) < \psi(v)$. Le prochain angle (corner) est $(s_\ell + 1, r_\ell + 1) = (\psi(v), v)$ et on répète avec $l \leftarrow \ell + 1$.

Pour chaque $i, j \in I(i \neq j)$, le temps nécessaire est $O(\mid Q \mid)$ pour construire la fonction ψ , et $O(p_j) = O(\mid Q \mid)$ pour construire tous les angles (corner). Ainsi, chaque fonction φ_{ij}^{Q} est déterminée en temps $O(\mid Q \mid)$. En résumant l'implantation de la structure de données, la représentation du théorème 3.3 est construite en temps $O(d \mid Q \mid (\log \mid Q \mid + d))$.

Une fois cette structure de données est construite, on peut répondre à chaque requête, "étant donné $\overline{x} \in T^I$, est ce que $\overline{x} \in \mathscr{L}Q$?", en temps $O(d^2 \log \mid Q \mid)$, comme suit. D'abord, pour chaque $i \in I$ on détermine en temps $O(\log \mid Q \mid)$ si $\overline{x}_i \in \pi_i Q$ et son rang $\overline{x'}_i$ dans cette chaîne $\pi_i Q$ (On peut utilisé la recherche binaire si $\pi_i Q$ est simplement maintenue comme une liste totalement ordonnée de ces éléments). Si $\overline{x} \in \bigotimes_{i \in I} \pi_i Q$, ou de manière équivalente $\overline{x'}_i \in \bigotimes_{i \in I} P'_i$, on utilise la recherche binaire afin de déterminer, pour chaque $i, j \in I(i \neq j)$, entre ces angles (corners) successive de φ_{ij}^{Q} le point $\overline{x'}_i$ liés, qui est, pour trouver ℓ tel que $s_{\ell-1} < \overline{x'}_i \leq s_\ell$ (où $s_0 = 0$), et donc de déterminer $\varphi_{ij}^{Q}(\overline{x'}_i) = r_\ell$.

Ensuite, on teste si $\overline{x'}_j \geq \varphi_{ij}^{Q'}(\overline{x'}_i)$ (Qui est équivalent à $\overline{x}_j \geq \varphi_{ij}^{Q}(\overline{x}_i = z_j)$ pour certains $z \in Q$ avec $z_i \geq \overline{x}_i$). Cela exige un temps de $O(\log p_i) = O(\log \mid Q \mid)$ pour la paire i, j. Alors $\overline{x} \in \mathscr{L}Q$ si et seulement si $\overline{x'}$ passe ce test pour tout $i, j \in I(i \neq j)$. Notons que nous avons immédiatement un certificat négatif i ou(i, j) si on trouve que

$\overline{x}_i \in \pi_i Q$ ou $\overline{x'}_j < \varphi_{ij}^{Q'}(\overline{x'}_i)$, respectivement.

Si on a également besoin des certificats positifs alors, tant que la construction de la structure de données ci-dessus, on peut ainsi stocker pour chaque $i \in I$ et $u \in P'_i$ un point $y^{i,u} \in Q$ tel que $y_i^{i,u}$ est le u^{eme} élément de $\pi_i Q$; et pour chaque $i, j \in I (i \neq j)$ et $u \in P'_i$, un point $z^{i,j,u} \in Q$ tels que $z^{i,j,u}$ est le u^{eme} élément de $\pi_i Q$ et $z_i^{i,j,u}{}_j = \varphi_{ij}^{Q'}(u)$. Si $\overline{x} \in \mathscr{L}Q$, on peut alors extraire comme un certificat positif les points $y^i = Y^{i,u}$ pour chaque $i \in I$, et $z^{i,j} = Z^{i,j,u}$ pour chaque $i, j \in I (i \neq j)$, où $u = \overline{x'}_i$.Ce certificat peut être validé en temps $O(d^3)$ en vérifiant l'équation (3.23).

Conclusion

Notre travail consacré à faire une synthèse pour les représentations des sous-treillis d'espace présenté par M.QUEYRANNE et F.TARDELLA. On a abordé tellement de définition sur la théorie des graphes, ensembles ordonnés, treillis et les ensembles dans R^n.

Dans l'article qu'on a étudié, Quyranne et Tardella ont amélioré l'article sur la structure des sous-treillis d'un produit de n treillis de Topkis ainsi la représentation générale et polyédrale des sous-demi-treillis et sous-treillis du produit d'espaces de Veinott, en utilisant les projections et les cylindres.
Queyranne et Tardella ont utilisé ces dernières et les fonctions limites, les projections des épigraphes d'un sous-ensemble quelconque Q de T_I pour la construction du sous-treillis enveloppant qui est le plus petit sous-treillis contenant Q, et qui vérifie les bornes sup et inf pour chaque paire d'éléments.

Veinott a prouvé que les polyèdres ou l'ensemble des solutions pour les problèmes linéaires ou les systèmes d'inégalités linéaires peuvent être représentés comme l'intersection des ensembles incrémentés et désincrémentés pour chaque inégalité pour ces programmes qui sont effectivement des inf et sup-demi-treillis par leurs projections sur chaque axe des coordonnées.

Avec l'importance de résolution de plusieurs problème d'optimisation combinatoire cité en [4] pour une classe des problème de programmation linéaire avec des inégalité bimonotone et en [3] pour les problèmes de flots, on a visé à avoir comme perspective la continuité et le développement de cet approche pour élargir les recherches en ce domaine et pour la résolution de plus de problèmes d'optimisation combinatoire

Bibliographie

[1]C. BERGE. *Graphes et hypergraphes*, France : DUNOD, 1970 p. (M0550)

[2]A. BELHADJ. *Génération de treillis et propriétés algébriques*, Mémoire Magister, Université Mouloud Mammeri,Tizi-Ouzou, 2011.

[3]M. QUEYRANNE F.TARDELLA. *Sublattices of product spaces : hulls, representations and counting*.http ://www.sciencedirecte.com

[4]M. QUEYRANNE F.TARDELLA. *Bimonotone linear inequalities and sublattices of* $\mathbb{R}^n$, 2005. http ://www.sciencedirecte.com

[5]KARELL BERTET. *Structure de treillis : Contributions structurelles et algorithmiques, Quelques usages pour des données images*, HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES, Université de La Rochelle, 2011.

[6]DONALD MARK TOPKIS. *The structure of sublattices of the product of n lettices*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 65, No. 2, 197.

[7]ROBERT FAURE et EDITH HEURGON. *Structure ordonnées et algèbre de boole*, Grathier-Villars Editeur,6ème Edition,1971.

[8]Arthur F. VEINOTT, . *Representation of General and Polyhedral Subsemilattices and Sublattices of Product Spaces* , LINEAR AL,GEBRA AND ITS APPLICATIONS 114/115 :681-704 (1989).

[9]Olivier RAYNAUD, . *Ensembles Ordonnés, Treillis et Familles d ?Ensembles* , HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES, Université Blaise Pascal ? Clermont-Ferrand II, [2012].