République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE

En vue de l'obtention du diplôme de master
en Recherche Opérationnelle

Thème

Sur le problème d'équilibre de Nash généralisé

Présenté par :
Mme BENALI Sihem
M^{elle} HAMITI Célia

Devant le jury composé de :

Mme F.ACHEMINE ;	MCA ;	UMMTO ;	Présidente
Mr M.AOUANE ;	MAA ;	UMMTO ;	Examinateur
Mme K.FAHEM ;	MCB ;	UMMTO ;	Promotrice

Promotion 2020/2021

Remerciements

Nous tenons à exprimer notre gratitude envers Dieu de nous avoir guidées dans la réalisation de ce modeste travail.

Madame K. FAHEM
Maitre de conférences

Nous vous prions de trouver ici l'expression de notre profonde gratitude pour nous avoir suivies, conseillées et encouragées.

Nous remercions profondément les membres de jury qui ont accepté d'évaluer et de juger notre travail.
Nos remerciements s'adressent à tous ceux qui ont contribué de près où de loin à la réalisation de ce mémoire.

Dédicaces

Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce modeste travail à ceux qui, quels que soient les termes embrassés, je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère.

À l'homme, mon précieux offre de Dieu, à qui je doit ma vie, ma réussite et mon respect : mon cher père ***Djamal*** .
À la femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non a mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable mère ***Daikha***.
À mes chers frères **Juba**, **Koceila** et **Tarèk** qui n'ont pas cessés de me conseiller, encourager et soutenir tout au long de mes études. Que Dieu les protège et leurs offre la chance et le bonheur.
À ma très chère tante **Saida** pour son soutien moral et ses conseils précieux tout au long de mes études. Que Dieu te protège tata et te garde à mon adorable petite soeur **Maya**.
À mes belles-soeurs **Maissane** et **Manel** pour leur soutien moral.
À la mémoire de mon cher oncle **Mohand Akli** parti trop tôt, j'espère que, du monde qui est sien maintenant, il apprécie cet humble geste comme preuve de reconnaissance de ma part. Puisse Dieu, le tout puissant, l'avoir en sa sainte miséricorde !
À ma chère grand mère **Farroudja**, ceci est ma profonde gratitude pour son éternel amour, que ce rapport soit le meilleur cadeau que je puisse lui offrir.
À mes oncles, mes tantes, mes cousins et cousines. Que Dieu leurs donne une longue et joyeuse vie.
À mes chères amies **Lydia** et **Fériel** pour leur amour et leur encouragement.
Sans oublier ma chère binôme **Sihem** pour son soutien moral, sa patience et sa compréhension tout au long de ce projet.

Célia

Dédicaces

Je dédie humblement ce modeste travail :

Aux être les plus chères au monde, **mes parents** que Dieu les garde et les protège.

À mes trois anges : **Amina**, **Omnia** et **Omaima**.

À ma soeur **Leila** et mon frère **Mohamed**.

À mes nieces et neveux : **Amira**, **Romaissa**, **Yahia**, **Mahmoud Soheib**, **Yousra** et **Chouaib**.

À toute ma famille.

À **Célia**.

À toute la famille **AIT SAID** en particulier à la mémoire de mes beaux parents "**Yema Ouiza** et **Vava Ahmed**".

Sans oublier les adorables AIT SAID : **Racim**, **Manel** et la petite **Dania**.

*À mon mari **Ali** qui n'a jamais cessé de croire en moi, sans toi ce mémoire n'aurait jamais vu le jour........*

Sihem

Table des matières

Introduction

La théorie des jeux se définit généralement comme l'outil mathématique permettant d'analyser les interactions stratégiques entre les individus, en particulier lorsque ces derniers ont des intérêts divergents. Elle s'intéresse à toutes les configurations dans lesquelles la situation de chacun dépend du comportement de tous et constitue donc la théorie mathématique des comportements stratégiques. Cela amène des difficultés supplémentaires comparée à l'optimisation classique, où l'utilité ne dépend des choix que d'un seul agent. Bien qu'assez différente en termes d'approche, c'est une branche étroitement liée à l'optimisation.
La théorie des jeux a été fondée par des mathématiciens (notamment John Van Neumann, Émile Borel et Ernst Zermelo) dans les années 1920. Elle doit son nom au fait qu'à l'origine, elle était orientée vers l'étude des jeux de société tels que les Échecs ou le Pocker. Mais elle prend véritablement son essor avec la publication, en 1944, de l'ouvrage de John van Neumann et de l'économiste Oskar Morgenstern qui ambitionnent ni plus ni moins de refonder la science économique sur des bases plus solides.
Elle se développera ensuite dans les années 1950 avec les travaux de John Nash qui ont ensuite été prolongés, notamment par Reinhard Selten et John Harsanyi.
La théorie des jeux étant devenue l'outil méthodologique de référence de la science économique, Nash, Selten et Harsanyi se verront récompensés par le prix Nobel d'économie en 1994. En 2005, le prix Nobel d'économie a été attribué à deux autres théoriciens des jeux, Robert Aumann et Thomas Schelling, pour leur analyse de la coopération et des conflits. Le prix Nobel 2012 est revenu à Lloyd Shapley et Alvin Roth qui ont utilisé la théorie des jeux pour étudier les problèmes d'appariement (matching markets).
Par ailleurs, les théoriciens des jeux ont très rapidement associé à leurs travaux théoriques la démarche expérimentale. Comme le notent Goeree et Holt[2001]"L'idée que la théorie des jeux devait être testée avec des expériences en laboratoire est aussi vieille que la notion d'équilibre de Nash". L'une des premières expériences a d'ailleurs été réalisée dès 1950 par Melvin Dresher et Merrill Flood : La première formulation du "dilemme du prisonnier". Nash, dans les années 1950, puis selten, à partir des années 1960, développeront également des expériences visant à évaluer la capacité predictive de la théorie.
Depuis sa naissance, la théorie des jeux a donc associé à l'approche purement théorique

(mathématique) une démarche empirique fondée sur l'expérimentation.
L'objet d'étude de la théorie des jeux implique un champ d'application extraordinairement vaste : elle permet de modéliser les relations de travail, le commerce international, les négociations, les enchères, les stratégies militaires, la congestion routière, les paniques bancaires, l'exploitation conjointe de ressources naturelles, les systèmes électoraux, les problèmes de partage de coûts et bien d'autre situations encore. Ces nombreuses applications expliquent pourquoi la théorie des jeux est devenue un enseignement incontournable dans la plupart des cursus d'économie et gestion.
La théorie des jeux a donc pour but de résoudre les jeux c'est à dire prédire une issue probable "logique". Pour cela, il convient de définir un concept de solution : Le plus communément admis est sans conteste celui proposé par John Nash. L'équilibre de Nash constitue une pierre angulaire de la théorie des jeux moderne, qui consiste qu'aucun joueur ne regrette son choix au vu du choix des autres.
L'objectif de notre mémoire concerne en l'étude de l'équilibre de Nash généralisé, que nous pouvons dire dans une certaine mesure, qu'il généralise la situation du problème d'équilibre de Nash puisque désormais, le choix du joueur dépend du choix des autre joueurs aussi.
Notre mémoire sera divisé en trois parties distinctes :
Nous introduirons la théorie des jeux dans la première partie par une synthèse bibliographique qui permettra au lecteur de se familiariser avec les différentes notations abordées en théorie des jeux en particulier les jeux non coopératifs sous forme normale.
Des rappels sur l'optimisation avec contraintes et ses méthodes de résolution seront largement commentés dans la deuxième partie.
Dans la dernière partie, nous aborderons le problème d'équilibre de Nash généralisé avec sa définition, ensuit nous reformulerons ce problème en un problème d'inéquation variationnelle pour terminer avec un exemple numérique et un autre pratique dans le cas où toutes les fonctions sont linéaires.
Et enfin nous terminons ce travail par une conclusion dans laquelle nous présenterons les points les plus importants qui ressortent de cette étude.

1

Introduction à la théorie des jeux

Introduction

La théorie des jeux est un outil mathématique permettant d'étudier les comportements ; prévus, réels ou justifiés à posteriori ; d'individus face à des situations d'antagonisme.
Dans ce chapitre, nous présentons un certain nombre de notations et de définitions qui nous serons utiles dans la suite de ce mémoire. Nous allons donc tout d'abord présenter les différents contexts de jeux puis les types de représentation des jeux et enfin nous présenterons les concepts de solution standards que propose la théorie des jeux non coopératifs.
Dans ce premier chapitre, nous avons utilisé [4], [20], [1], [12], [2], [6] comme références pour donner les différentes définitions et exemples.

1.1 Qu'est ce qu'un jeu

Selon l'acception courante, un jeu est une situation où des individus (les joueurs) sont conduits à faire des choix parmi un certain nombre d'actions possibles appelées "stratégies", où chaque stratégie est une description complète de la façon dont un joueur entend jouer du début à la fin du jeu et dans un cadre défini à l'avance "les règles du jeu". Le résultat de ces choix constituant une issue du jeu, à laquelle est associé un gain positif ou négatif, pour chacun des participants.

1.2 Les différents contexts de jeux

La théorie des jeux permet d'analyser l'interaction d'entités rationnelles, appelées agents ou joueurs (un être humain, un animal, une entreprise...), poursuivant des buts qui leur sont propres. Dans une situation d'interaction entre différents joueurs, nous pouvons dégager les propriétés suivantes qui donneront lieu à des modèles différents.

1.2.1 Les relations entre les joueurs

Une caractéristique fondamentale des jeux est que le gain obtenu par un joueur dépend de ses choix, mais aussi des choix effectués par les autres joueurs. Il convient alors de distinguer deux grandes familles de jeux : les jeux coopératifs et les jeux non coopératifs.

Jeux coopératifs

Un jeu est coopératif lorsque les joueurs peuvent passer entre eux des accords qui les lient de manière contraignante. On dit alors qu'ils forment une Coalition dont les membres agissent de concert.

Définition 1.1.
une coalition est un sous-ensemble de joueurs $C \subseteq N = \{1, ..., n\}$

- Si C est une coalition d'un seul joueur ($C = \{i\}$), C est appelé singleton ;
- Si C est la coalition formée de tous les joueurs ($C = N$), alors C est appelé grande coalition.

Définition 1.2 (Accord contraignant)**.**
On dit qu'un accord entre les joueurs est contraignant s'il existe un organe qui assure son application tels qu'un état, gouvernement, l'ONU....

Jeux non coopératifs

Par opposition aux jeux coopératifs, les jeux où aucune alliance n'est possibles sont appelés jeux non coopératifs. Les jeux non coopératifs se divisent en deux grandes familles : jeux à somme nulle et ceux à somme non nulle. En économie, cette notion simplificatrice de jeu à somme nulle est importante [Ces jeux correspondent à l'absence de production, ou de destruction, de produits].

Définition 1.3.
Les jeux à somme nulle sont tous les jeux où la somme "algébrique" des gains des joueurs est nulle : ce que gagne l'un est nécessairement perdu par un autre.

- Il est possible que le jeu ne soit pas à somme nulle mais à somme constante, et cela n'a aucune importance en pratique : l'enjeu est de répartir entre tous les joueurs un total de gains préalablement fixé.
- Les échecs, le poker, sont des jeux à somme nulle, les gains d'un joueur étant très exactement les pertes d'un autre joueur.

1.2.2 Déroulement du jeu

Un jeu peut être joué une seule ou plusieurs fois. Dans le premier cas il s'agit d'un jeu dit statique, dans le second nous parlons de jeu répété (dynamique).

Jeux statiques

Un jeu est dit statique lorsque les joueurs choisissent simultanément leurs actions et en une seule étape, et reçoivent ensuite leurs gains respectifs. Et si de plus les joueurs ne connaissent pas toutes les stratégies des autres joueurs, le jeu est dit en information imparfaite.

Jeux dynamiques

Un jeu dynamique est un jeu qui se déroule en plusieurs étapes. Et si de plus chaque joueur connaît l'ensemble des actions choisies par tous les joueurs qui sont intervenues avant qu'il sélectionne sa stratégie, le jeu est dit en information parfaite.

Remarque 1.1.
Dans le cadre des jeux statiques, la notion d'information parfaite n'a aucun sens : les joueurs jouent simultanément et en une seule étape, et n'ont pas donc à connaître les actions déjà réalisées.

1.2.3 Selon l'information que possède chaque joueur

Quel que soit l'environnement auquel un joueur fait face, le jeu puisse être :

À information complète

Le joueur connaît les règles du jeu, et tout le déroulement du jeu jusqu'à sa prise de décision.

À information incomplète

Un ou plusieurs de ces éléments est inconnu du joueur.

1.3 Formalisation du concept de jeu

Les jeux sont décrit sous deux formes souvent opposées : la forme extensive (dite aussi développée) et la forme normale (dite aussi stratégique).

1.3.1 La forme normale

Un jeu sous forme normale est la donnée de l'ensemble des joueurs, de l'ensemble des stratégies pour chaque joueurs et des paiements associés à toute combinaison possible de stratégies. On peut alors représenter les jeux à somme nulle sous forme matricielle, en associant à chaque profil de stratégies S un n-uplet donnant l'utilité obtenue par chaque joueur dans l'ordre : $(f_1(S), f_2(S), ..., f_n(S))$. Cette représentation sous forme matricielle permet de représenter des jeux ayant un nombre de joueurs et un nombre de stratégies pour chaque joueur raisonnable : la taille de la matrice est exponentielle en fonction du nombre d'agents, et du nombre de choix possible pour chaque agent. Par exemple, si n agents ont chacun le choix entre deux actions possibles, il faudra spécifier 2^n valeurs numériques.

1.3.2 La forme extensive

Un jeu sous forme extensive est défini par un arbre de décision ou encore appelé arbre de Kuhn (en référence au mathématicien ayant développé les concepts de forme extensive de jeu (1953)) décrivant les actions possibles des joueurs à chaque étape du jeu, la séquence de tours de jeu des joueurs ainsi que l'information dont ils disposent à chaque étape pour prendre leur décision. Chaque noeud de l'arbre spécifie le joueur qui doit choisir une action à ce moment du jeu, ainsi que l'information dont il dispose. Les gains que chaque joueur peut réaliser après avoir suivi un des chemins possibles au sein de l'arbre, correspondant à chaque profil de stratégies, sont associés à chaque feuille de l'arbre.

Remarque 1.2.
A chaque jeu sous forme extensive correspond un jeu sous forme normale dans lequel les joueurs choisissent simultanément les stratégies qu'ils mettront en oeuvre. En revanche, un jeu sous forme normale peut correspondre à plusieurs jeux sous forme extensive différente.

Exemple 1.1.
Deux éleveurs de vaches E_1 et E_2 se partagent une prairie sur laquelle les vaches peuvent paître. Chaque éleveur peut décider d'élever une ou deux vaches sur le terrain commun. Les éleveurs font ce choix simultanément. Le gain (utilité) d'un éleveur dépend de la quantité d'herbe que ses vaches peuvent brouter. La quantité d'herbe disponible sur le pré est limitée. Si un éleveur place une vache sur le terrain : son gain est de 5 si sa vache se trouve avec une

Nombre de vaches		Gain	
Éleveur 1	Éleveur 2	Éleveur 1	Éleveur 2
1	1	5	5
1	2	3	6
2	1	6	3
2	2	4	4

TABLE 1.1 – Éleveur de vaches

vache appartenant à l'autre éleveur, son gain est de 3 si sa vache se trouve avec deux vaches appartenant à l'autre éleveur. Si un éleveur place deux vaches sur le terrain : son gain est de 6 si ses vaches se trouvent avec une vache appartenant à l'autre éleveur et son gain est de 4 si ses vaches se trouvent avec deux vaches appartenant à l'autre éleveur. Les données du jeu sont récapitulées dans la TABLE 1.1

Quel est le choix de chaque éleveur ?
La situation décrite ci-dessus met bien en scène un jeu puisqu'elle concerne deux individus en interaction stratégique, le choix de l'un influençant la situation de l'autre. Puisque les deux joueurs sont interrogés séparément, sans qu'ils puissent communiquer entre eux et s'engager à prendre certaines décisions, on parle de jeu non coopératif. De plus, les deux acteurs jouent simultanément : on parle alors de jeu statique

- (Une vache, deux vaches) sont qualifiées de stratégies pures (par opposition aux stratégies dites mixtes).
- Le nombre de joueurs ici est 2.
- L'ensemble des stratégies pures pour chaque joueur $\{1, 2\}$.
- L'ordre dans lequel les joueurs interviennent : simultanément.
- L'information dont dispose chaque joueur : connaissance de la structure du jeu, mais aucune information sur la stratégie adoptée par le partenaire.
- Les gains des joueurs : $\{3, 4, 5, 6\}$

Pour présenter un tel jeu, il y'a deux possibilités (quasiment équivalentes). Lorsque les deux joueurs sont amenés à jouer simultanément, il est commode de représenter le jeu sous forme normale. C'est à dire sous forme d'un tableau représentant les gains des joueurs en fonction de leurs stratégies respectives $\{1, 2\}$.(voir la TABLE 1.2)

		Éleveur 2	
		1	2
Éleveur 1	1	(5,5)	(3,6)
	2	(6,3)	(4,4)

TABLE 1.2 – La forme normale

On peut aussi représenter ce jeu par l'arbre de Kuhn donné par la Figure 1.1

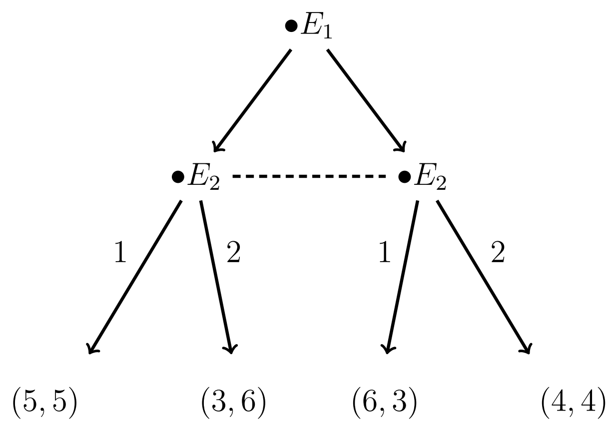

Figure 1.1-La forme extensive

• Noeud : joueur

→ Un coup de jeu

Cette présentation pose un problème par rapport au jeu étudié, dans la mesure où elle suggère qu'il y a un certain ordre dans les actions, donné par le sens des flèches. La figure indique que l'éleveur 1 choisit avant l'éleveur 2 alors que, dans le jeu que nous avons considéré, les deux éleveurs jouent bien simultanément. Lorsque les deux joueurs jouent simultanément, on relie par des pointillés les noeuds correspondant au choix du deuxième joueur pour signifier que ce dernier ignore le choix du premier joueur au moment où il est amené à jouer. L'ensemble des noeuds se trouvant reliés entre eux par des pointillés est appelé ensemble d'information. Lorsqu'un ensemble d'information contient au moins deux noeuds, le jeu est à information imparfaite. Dans une telle configuration, la représentation sous forme extensive apporte peu et une représentation sous forme normale est suffisante.

1.4 Concepts de solutions pour jeu sous forme normale

L'analyse d'un jeu permet de prédire l'équilibre qui émergera si les joueurs sont rationnels. Par équilibre, nous entendons un état ou une situation dans laquelle aucun joueur ne souhaite modifier son comportement compte tenu du comportement des autres joueurs. De façon plus précise, un équilibre est une combinaison de stratégies telle qu'aucun des joueurs n'a d'intérêt à changer sa stratégie compte tenu des stratégies des autres joueurs. Une fois que l'équilibre a été atteint dans un jeu (et peu importe la manière dont il a été obtenu), il n' y a aucune raison de le quitter. Nous allons présenter ici deux concepts de solution : Elimination répétée des stratégies dominées, Équilibre de Nash qui s'appliquent à des jeux statiques non coopératifs.

Notons par

$$J = < N, X, f > \tag{1.1}$$

un jeu sous forme normale (stratégique) où :

$N = \{1, 2, ..., i, ..., n\}$ représente l'ensemble des n joueurs,

Pour chaque joueur i, $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ est l'ensemble de ses stratégies disponibles x_i,

Le choix par chaque joueur d'une stratégie détermine l'issue du jeu notée.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X et\ X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ est l'ensemble des issues du jeu

On peut aussi écrire :$X = X_i \times X_{-i}$ et $x = (x_i, x_{-i})$, où :

$x_{-i} = (x_1, x_2, .., x_{i-1}, x_{i+1} ..., x_n) \in X_{-i}$ représente les stratégies des autres joueurs sur lesquelles il n'a aucun contrôle en absence de coopération.

$X_{-i} = \prod_{i \neq j} X_j$ pour $i \in N$ est l'ensemble des stratégies des joueurs autres que i.

De plus, chaque joueur possède une fonction objectif (d'utilité ou de paiement), aussi appelée fonction gain ou fonction perte $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$

Dans ce mémoire, on considérera f_i comme fonction perte.

1.4.1 Elimination des stratégies strictement dominées

L'élimination des stratégies dominées est un premier concept qui peut permettre de prédire le résultat d'un jeu. Supposons une situation dans laquelle une stratégie apparaîtrait comme moins payante qu'une autre, et ce, indépendamment du comportement des adversaires. Dans ce cas, il semble naturel de considérer qu'un joueur rationnel ne choisira jamais cette stratégie qui est dite strictement dominée.

Définition 1.4.

Une stratégie $x_i \in X_i$ du joueur i est strictement dominée s'il existe une stratégie alternative $x_i^* \in X_i$ telle que :

$$f_i(x_i, x_{-i}) > f_i(x_i^*, x_{-i}) \quad \textit{pour chaque } x_{-i} \in X_i \tag{1.2}$$

		Joueur 2		
		G	B	R
Joueur 1	M	(2,0)	(1,4)	(0,2)
	D	(0,1)	(0,2)	(4,0)

Table 1.3 – Jeu sous forme normale quelconque

		Joueur 2	
		G	B
Joueur 1	M	(2,0)	(1,4)
	D	(0,1)	(0,2)

Table 1.4 – Première itération

Dans le contexte de la définition précédente, si les autres joueurs connaissent les stratégies et les gains du joueur i et s'ils savent que ce joueur est rationnel, alors ils devraient s'attendre à ce qu'une stratégie dominée ne soit jamais choisie. Ils pourraient alors se concentrer sur le jeu réduit obtenu en éliminant cette stratégie (c'est à dire en faisant comme si elle n'existait pas), puis continuer dans ce nouveau jeu à éliminer d'éventuelles nouvelles stratégies strictement dominées, et ainsi de suite. Dans certains jeux comme celui de l'exemple ci-dessous, cette procédure aboutit à un profil de stratégies unique.

Exemple 1.2.
Considérons le jeu sous forme normale représenté par la matrice de la TABLE 1.3 où les joueurs sont maximiseurs.

D'après l'inéquation (1.2), la stratégie R est strictement dominée par B pour le joueur 2.
En effet, on a bien $f_2(B, M) = 4 > f_2(R, M) = 2$ et $f_2(B, D) = 2 > f_2(R, D) = 0$.
Cette stratégie peut donc être éliminée, si bien que les joueurs considèrent désormais le jeu réduit de la TABLE 1.4

Dans ce jeu réduit, la stratégie D est strictement dominée par M pour le joueur 1, alors que ce n'était pas le cas dans la matrice de départ. Cette stratégie peut être éliminer à son tour. Nous obtenons le nouveau jeu réduit à la TABLE 1.5

Dans une troisième itération, la stratégie G, strictement dominée par B pour le joueur 2, peut à son tour être éliminée, conduisant à la matrice de la TABLE 1.6

		Joueur 2	
		G	B
Joueur 1	M	(2, 0)	(1, 4)

TABLE 1.5 – Deuxième itération

		Joueur 2
		B
Joueur 1	M	(1, 4)

TABLE 1.6 – Troisième itération

Finalement, il subsiste un profil de stratégies unique,(M, B), qui constitue une solution naturelle pour le jeu (que l'on qualifie alors de résoluble par dominance).
Dans cet exemple, il faut noter que le résultat du jeu, qui résulte d'une élimination itérative des stratégies strictement dominées, est indépendant de l'ordre d'éliminations. Autrement dit, si l'élimination des stratégies strictement dominées conduit à un unique profil de stratégies, pour un ordre donné, alors tout ordre d'éliminations (R, D, G) aboutit au même résultat que la séquence alternative (R, G, D). Le résultat ci-dessous étend cette propriété pour une large catégorie de jeux sous form normale, qu'ils soient résoluble par dominance ou non.

Proposition 1.1 (Dufwenberg et Stegeman, 2002)**.**
Si un jeu sous forme normale est fini, alors l'élimination itérative des stratégies strictement dominées conduit à un unique jeu réduit, indépendamment de la séquence d'éliminations.

- Le résultat de la proposition reste vrai sous certaines conditions lorsque le jeu n'est pas fini.
- Le processus d'élimination des stratégies dominées ne conduit pas nécessairement à une solution unique.
- Les jeux pour lesquels il est possible de calculer les stratégies strictement dominées jusqu'au bout, le procédé d'élimination conduit à l'équilibre de Nash.
- L'équilibre de Nash est un concept de solution plus fin que celui de la dominance.

1.4.2 Équilibre de Nash

L'équilibre de Nash, introduit par le lauréat du prix Nobel, Jhon Nash [14][15] est un concept fondamental de solution en théorie des Jeux. Il décrit une issue du jeu dans laquelle aucun joueur ne souhaite modifier sa stratégie étant donnée la stratégie de chacun de ses rivaux.

Définition 1.5 (Équilibre de Nash).
Le profil des stratégies $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in X$ est dit équilibre de Nash (équilibre non coopératif) pour le jeu (1.1), si pour tout $i \in N$ la composante x_i^* satisfait :

$$f_i(x_i, x_{-i}^*) \geq f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \quad \forall x_i \in X_i$$

Interpretation

Dans la définition de l'équilibre de Nash, aucun joueur ne peut, de manière unilatéralement (seul), choisir une action différente lui permettant d'améliorer son utilité. A l'équilibre, aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie, étant données les stratégies jouées par les autres joueurs.

Exemple 1.3 (Dilemme du prisonnier).
Le dilemme du prisonnier que nous allons présenter maintenant, est un exemple célèbre de la théorie des jeux.
Deux suspects sont retenus dans des cellules séparés, et ne peuvent pas communiquer. La police ne dispose pas d'éléments de preuve suffisants pour obtenir leur condamnation. L'aveu d'au moins un des deux est donc indispensable. La police propose à chacun d'entre eux le marché suivant :

1. Si vous avouez et que votre complice n'avoue pas, vous aurez une remise de peine, tandis que votre complice aura la peine maximale de 10 ans.
2. Si vous avouez tous les deux, vous serez condamnés à une peine plus légère de 5 ans.
3. Si aucun de vous n'avoue, la peine sera minimale d'une année, faute d'éléments au dossier.

On peut formaliser cette situation par un jeu à 2 joueurs, chaque joueur ayant 2 stratégies possibles : Avouer (dénotée A) ou se taire (dénotée T). Les utilités de chacun des joueurs pour chacune des issues possibles du jeu sont :

$f_1(A, A) = f_2(A, A) = -5$

$f_1(T, T) = f_2(T, T) = -1$

$f_1(A, T) = f_2(T, A) = 0$

$f_1(T, A) = f_2(A, T) = -10$

Le profil de stratégies (A, A) est un équilibre de Nash en stratégies pures. En effet, on peut vérifier dans la matrice des paiements représentée par la TABLE 1.7 que l'on a :

		Joueur 2	
		A	T
Joueur 1	A	(-5,-5)	(0,-10)
	T	(-10,0)	(-1,-1)

TABLE 1.7 – Dilemme du prisonnier

		Joueur 2	
		H	R
Joueur 1	H	(1,2)	(0,0)
	R	(0,0)	(2,1)

TABLE 1.8 – Bataille des sexes

$f_1(A, A) \geq f_1(T, A)$ et $f_2(A, A) \geq f_2(A, T)$.
Ce jeu n'a qu'un seul équilibre de Nash en stratégies pures. Pourtant cette unicité n'est pas toujours garantie.

Exemple 1.4 (Bataille des sexes)**.**
Un couple veut aller au cinéma, ils ont le choix entre un film d'horreur et une comédie romantique. Pour les deux, ce qui compte avant tout, c'est d'être ensemble. Néanmoins, la femme a une préférence pour la comédie romantique et l'homme pour le film d'horreur. On peut formaliser cette situation par un jeu à 2 joueurs, chaque joueur ayant 2 stratégies possibles : aller voir le film d'horreur (dénotée H), aller voir la comédie romantique (dénotée R). Les utilités de chacun des joueurs pour chacune des issues possibles du jeu sont :

$$f_1(H, H) = f_2(R, R) = 1$$

$$f_1(R, R) = f_2(H, H) = 2$$

$$f_1(H, R) = f_1(R, H) = f_2(H, R) = f_2(R, H) = 0$$

Ce jeu a deux équilibres de Nash en stratégies pures. En effet, on peut vérifier dans la matrice des paiements représentée par la TABLE 1.8 que l'on a :
$f_1(R, R) \geq f_1(H, R)$ et $f_2(R, R) \geq f_2(R, H)$.
$f_1(H, H) \geq f_1(R, H)$ et $f_2(H, H) \geq f_2(H, R)$.
De la même façon, l'existence d'un équilibre de Nash en stratégies pures n'est pas garantie non plus, comme on peut le constater facilement dans le jeu matching pennies suivant :

Exemple 1.5 (Matching pennies)**.**
Parfois traduit en Français par Appariement des sous. Deux joueurs doivent placer simultanément sur une table, soit côté pile ou côté face.

		Joueur 2	
		P	F
Joueur 1	P	(1,-1)	(-1,1)
	F	(-1,1)	(1,-1)

TABLE 1.9 – Matching pennies

1. Lorsque les deux pièces sont retournées sur le même côté le joueur 1 garde les deux pièces (il récupère sa pièce et gagne celle de son partenaire, ce qui lui donne un gain de (1) correspondant à la perte du joueur 2(-1))
2. Si les deux pièces ne sont pas retournées du même côté c'est le joueur 2 qui empoche les deux pièces et gagne donc (1).

On peut formaliser cette situation par un jeu à 2 joueurs, chaque joueur ayant 2 stratégies possibles : côté pile (dénotée P) ou face (dénotée F). Les utilités de chacun des joueurs pour chacune des issues possibles du jeu sont :

$$f_1(P,P) = f_1(F,F) = f_2(P,F) = f_2(F,P) = 1$$
$$f_1(P,F) = f_1(F,P) = f_2(P,P) = f_2(F,F) = -1$$

Ce jeu est bien un jeu à somme nulle : tout ce qui est gagné par le joueur 1 est perdu par le joueur 2 et vice versa.
Donc le jeu matching pennies n'a aucun équilibre de Nash en stratégies pures.

Existence de l'équilibre de Nash

Il n'existe pas nécessairement un équilibre de Nash pour les jeux où les stratégies sont des actions directes des joueurs.
Dans quelles conditions un jeu possède t-il un équilibre de Nash ?
C'est la question pour laquelle on va répondre dans ce paragraphe en utilisant les différentes approches les plus étudiées dans la littérature.

Théorème 1.1. [14][15]
Soit le jeu J défini par (1.1) et supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :

1. X_i est non vide, convexe et compact [1] $\forall\ i \in N$
2. les fonctions $x \mapsto f_i(x)$ sont continues $\forall\ i \in N$.

1. Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est dit compact si et seulement si S est fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$.

3. les fonctions $x_i \mapsto f_i(x)$ sont quasi-convexes sur X_i $\forall$ $x_{-i} \in X_{-i}$.

alors le jeu J admet au moins un équilibre de Nash.

Approche basée sur le point fixe de Kakutani

Il est en fait possible de déterminer l'équilibre de Nash de manière plus constructive en utilisant les fonctions de meilleures réponses des joueurs.
Nous introduisons tout d'abord la notion de la correspondance.

Définition 1.6.
On dit que $H : E \to 2^F$ est une correspondance (ou application multivoque) définie de E dans F si pour tout $x \in E$, $H(x)$ est un sous-ensemble de F ie : $H(x) \in 2^F$. $H(x)$ est appelé image ou valeur de x par H. On appelle graphe de H le sous ensemble $Graph(H)$ de $E \times F$ défini par :

$$Graph(H) = \{(x, y) \in E \times F \ \ tels\ que\ y \in H(x)\}$$

L'inverse H^{-1} de H est la correspondance définie de F dans 2^E comme suit :

$$\begin{aligned} x \in H^{-1}(y) \ &\Leftrightarrow \ y \in H(x) \\ &\Leftrightarrow \ (x, y) \in Graph(H). \end{aligned}$$

Soit P une propriété d'un sous-ensemble (convexe, compact,..........). On dit qu'une correspondance vérifie la propriété P si son graphe la satisfait.

Définition 1.7.
Soit H une correspondance définie de E dans 2^E alors on dit que $x \in H(x)$ est un point fixe de H si $x \in H(x)$.

Nous pouvons également introduire la notion de meilleure réponse.

Définition 1.8.
Pour chaque joueur $i \in N$ et chaque profil de stratégies des autres joueurs x_{-i} , on dit que x_i^* est la meilleure réponse contre x_{-i} si : $f_i(x_i^*, x_{-i}) \leq f_i(y_i, x_{-i}) \ \ \forall\ y_i \in X_i$.

Par conséquent on aura la correspondance des meilleures réponses.

Définition 1.9.
On appelle correspondance de meilleures réponses du joueur i l'application

$$\begin{aligned} C_i : X_{-i} \ &\to \ 2^{X_i} \\ x_{-i} \ &\mapsto \ C_i(x_{-i}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_i(x_{-i}) &= \{x_i^* \in X_i \ / \ f_i(x_i^*, x_{-i}) \leq f_i(y_i, x_{-i}) \quad \forall y_i \in X_i\} \\ &= \{x_i \in X_i \ / \ f_i(x_i^*, x_{-i}) = \inf_{y_i \in X_i} f_i(y_i, x_{-i})\} \end{aligned}$$

Définition 1.10.
On appelle correspondance des meilleures réponses du jeu J, l'application multivoque C :

$$\begin{aligned} C : X &\rightarrow 2^X \\ x &\mapsto C(x) = \prod_{i \in N} C_i(x_{-i}) \end{aligned}$$

Proposition 1.2.
Considérons la correspondance des meilleures réponses du jeu J : $C : X \rightarrow 2^X$.
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. x^* est un point fixe de C ;
2. x^* est un équilibre de Nash pou le jeu J.

Démonstration.
Soit

$$\begin{aligned} x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots\ldots, x_n^*) \in C(x^*) &\Leftrightarrow x_i^* \in \prod_{i \in N} C_i(x_{-i}^*) \\ &\Leftrightarrow \forall i \in N, \ x_i^* \in C_i(x_{-i}^*) \\ &\Leftrightarrow \forall i \in N, \ f_i(x_i, x_{-i}^*) \geq f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \ \ \forall x_i \in X_i \\ &\Leftrightarrow x^* \text{ est un équilibre de Nash pour J.} \end{aligned}$$

□

Le théorème de Kakutani suivant utilisé pour la démonstration du théorème 1.1 donne les conditions d'éxistence d'un point fixe d'une correspondance.

Théorème 1.2 (Kakutani)**.** [2]
Soit E un ensemble non vide,convexe et compact et $H : E \rightarrow 2^F$ une correspondance fermée à valeurs non vides, convexe et compact alors H admet un point fixe, $\exists \ x^* \in E, x^* \in H(x^*)$.

Par consequent, pour démontrer le théorème 1.1 on applique le théorème 1.2 à la correspondance C définie dans 1.10.

Approche basée sur l'inégalité de Ky-Fan

On introduit la fonction $\varphi : X \times X \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) - f_i(y_i, x_{-i}). \tag{1.3}$$

Souvant appellée fonction de Ky-Fan ou fonction de Nikaido-Isoda.

Théorème 1.3 (Inégalité de Ky-Fan)**.** [2]
Soit X un sous-ensemble non vide, convexe et compact d'un espace de Banach [2].
$\varphi : X \times X \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant :

1. $x \to \varphi(x, y)$ est semi-continue inférieurement sur X, $\forall\ y \in X$;
2. $y \to \varphi(x, y)$ est quasi concave sur X, $\forall\ x \in X$.

alors il existe $x^* \in X$ tel que : $\sup\limits_{y \in X} \varphi(x^*, y) \leq \sup\limits_{y \in X} \varphi(y, y)$.

Il est d'abord à rappeler que :

Définition 1.11.
La fonction f est :

- Semi-continue supérieurement en x_0 si : $\forall\ \lambda \geq f(x_0)$, $\exists\ \eta > 0$ tel que :
  $\forall\ x \in \beta(x_0, \eta),\ \ \lambda \geq f(x)$.
  ($\beta(x_0, \eta)$: la boule de centre x_0 et de rayon η).
- Semi-continue supérieurement, si elle l'est en tout point $x \in K$.
- Semi-continue inférieurement si $(-f)$ est semi-continue supérieurement.
- Continue, si elle est à la fois semi-continue supérieurement et inférieurement.

Dans cette approche, pour démontrer le théorème 1.1 on utilisera le théorème 1.3 et la proposition suivante qui donne la relation entre l'équilibre de Nash et la fonction φ donnée par (1.3)

Proposition 1.3.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $x^* \in X$ est un équilibre de Nash.
2. x^* vérifie $\varphi\ (x^*, y) \leq 0\ \ \forall\ y \in X$.

2. Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Démonstration.

$1 \Rightarrow 2$: Montrons $x^* \in X$ est un équilibre de Nash $\Rightarrow \varphi(x^*, y) \leq 0,\ \forall y_i \in X_i$

On a

$$\begin{aligned} x^* \text{est un équilibre de Nash} \quad &\Rightarrow \quad f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \leq f_i(y_i, x_{-i}^*) \quad \forall y_i \in X_i\ \forall i \\ &\Rightarrow \quad f_i(x_i^*, x_{-i}^*) - f_i(y_i, x_{-i}^*) \leq 0 \quad \forall y_i \in X_i\ \forall i. \end{aligned}$$

en additionnant les inégalités, on obtient : $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^*, x_{-i}^*) - f_i(y_i, x_{-i}^*) \leq 0$

et ça ce n'est rien d'autre que : $\varphi(x^*, y) \leq 0 \quad \forall\ y \in X$

$2 \Rightarrow 1$:Soit $x^* \in X$ vérifiant $\varphi(x^*, y) \leq 0 \ \ \forall y \in X$ c'est à dire

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^*, x_{-i}^*) - f_i(y_i, x_{-i}^*) \leq 0.$$

Fixons i et prenons $y = (y_i, x_{-i}^*)$, donc $\varphi(x^*, y) \leq 0$ s'écrit :

$f_i(x_i^*, x_{-i}^*) - f_i(y_i, x_{-i}^*) + \sum_{i \neq j} f_j(x_j^*, x_{-j}^*) - f_j(y_j, x_{-j}^*) \leq 0$

or $x = (x_j, x_{-j}) = (y_j, x_{-j})$ toutes les fois que $j \neq i$

par conséquent $\sum_{i \neq j} f_j(x_j^*, x_{-j}^*) - f_j(y_j, x_{-j}^*) = 0$ ce qui donne $f_i(x_i^*, x_{-i}^*) - f_i(y_i, x_{-i}^*) \leq 0$

d'où $f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \leq f_i(y_i, x_{-i}^*)$.

x^* est donc un équilibre de Nash.

□

Démonstration. (du théorème de Nash)

L'ensemble X est convexe compact, comme produit d'ensembles convexes compacts X_i. D'autre part, $x \to f_i(x)$ sont continues implique evidemment que les fonctions $x \to \varphi(x, y)$ sont continues (la fonction φ est en fonction de f_i).

Et pour $x_i \to f_i(x)$ sont quasi-convexes donc $(-f_i)$ sont quasi-concaves.

Le théorème de Ky-Fan (1.3) entraine donc l'existence de $x^* \in X$ tel que :

$$\sup_{y \in X} \varphi(x^*, y) \leq \sup_{y \in X} \varphi(y, y)$$

Puisque $\varphi(y, y) = 0$ pour tout y, on applique alors la proposition 1.3.

D'où $x^* \in X$ est un équilibre de Nash. □

Remarque 1.3.

Dans le cas d'une fonction gain, on définit de manière analogue les équations, il suffit d'inverser le sens d'inégalités.

2

Optimisation avec contraintes

Introduction

Les algorithmes d'optimisation sont des outils importants pour les ingénieurs, mais difficiles à utiliser. Une bonne compréhension des différentes méthodes est nécessaire pour identifier, voir adapter, les outils existants aux besoins des applications.
Dans cette partie, nous nous intéressons à l'optimisation avec contrainte, avec un petit aperçu sur la convexité et les fonctions convexes. Puis les caractéristiques d'un problème d'optimisation et les conditions d'optimalité sont discutées, indépendamment de tout algorithme, avant de donner les méthodes permettant de résoudre cette catégorie de problèmes.

2.1 Ensembles convexes

Définition 2.1.
Un ensemble K est dit convexe si $\forall x_1, x_2 \in K$ alors :

$$\forall \lambda \in [0,1], \quad \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in K$$

Définition 2.2.
Soient $\lambda_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ alors : $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ est appelée combinaison linéaire convexe des points $x_1, x_2, ..., x_n$.

Théorème 2.1.
K est convexe $\Longleftrightarrow$ toute combinaison linéaire convexe des points de K appartient à K.
$\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in K, \forall\ i \in N$, avec $\lambda_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

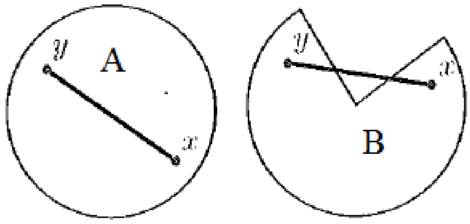

FIGURE 2.1 – A est convexe. B est non convexe

2.2 Fonctions convexes

Dans cette partie nous considérons f une fonction définie sur un convexe $K \subset \mathbb{R}^n$ dans$\mathbb{R}$

Définition 2.3.
On définit le gradient de f au point x par :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Définition 2.4.
Si les dérivées partielles sont continues sur K, on dit que f est de classe C^1 sur K.

Définition 2.5.
On définit la matrice Jacobienne de

$$\begin{aligned} F : K &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longrightarrow F(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \end{aligned}$$

par :

$$JF(x) = \begin{pmatrix} (\nabla f_1(x))^t \\ \vdots \\ (\nabla f_m(x))^t \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Définition 2.6.
f est dite de classe C^2 sur K si les dérivées secondes sont continues sur K.

Définition 2.7.
On définit la matrice Hessienne par :

$$H_f(x) = J((\nabla f(x))^t) = J \begin{pmatrix} (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x))^t \\ \vdots \\ (\frac{\partial f}{\partial x_n}(x))^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

Remarque 2.1.
Pour une fonction de classe C^2, la matrice Hessienne est toujours symétrique.

Définition 2.8.
La fonction f est dite :

- Convexe si $\forall x_1, x_2 \in K$, $\forall \lambda \in [0,1]$ $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$
- Quasi-convexe si $\forall x_1, x_2 \in K$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $sup[f(x_1), f(x_2)] \geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$
- Concave si $\forall x_1, x_2 \in K$, $\forall \lambda \in [0,1]$ $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$
- Quasi-concave si $\forall x_1, x_2 \in K$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $min\{f(x_1), f(x_2)\} \leq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$
- Strictement convexe (concave) si
  $\forall x_1, x_2 \in K$, $\forall \lambda \in [0,1]$ $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$
  ($\forall x_1, x_2 \in K$, $\forall \lambda \in [0,1]$ $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$).
- Concave si $(-f)$ est convexe.

Interpretation géométrique

- f est dite convexe si, pour tout vecteur x_1 et x_2 de K, le graphe de f entre x_1 et x_2 se trouve sous le segment de droite reliant $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$.
- f est dite concave si, pour tout vecteur x_1 et x_2 de K, le graphe de f entre x_1 et x_2 se trouve au-dessus du segment de droite reliant $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$.

Remarque 2.2.

•Les fonctions linéaires sont convexes et concaves au même temps.

•Si la fonction$f$ est concave (convexe), alors f est quasi-concave (quasi-convexe).

Définition 2.9 (Pseudo-convexe)**.**
Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'ensemble X. On dit que la fonction f est pseudo-convexe en $x_0 \in X$ si f est différentiable en x_0 et si :

$$\begin{cases} x \in X \\ \nabla f(x_0)(x - x_0) \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(x_0)$$

On dira que f est pseudo-convexe sur X si elle est pseudo-convexe en chaque $x \in X$

Définition 2.10.
La matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite :

- Définie positive lorsque $x^t Ax > 0$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$

•Semi-définie positive lorsque $x^t Ax \geq 0$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}^n$

•Définie négative lorsque $x^tAx < 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$

•Semi-définie négative lorsque $x^tAx \leq 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}^n$

•Indéfinie si aucun des cas n'est vérifié.

Critère de Sylvester

Soit A une matrice carrée $(n \times n)$ symétrique et $A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$, A est dite :

• Définie positive si $\det A_k > 0 \; k = 1, ..., n$.

•Semi-définie positive si $\det A_k \geq 0 \; k = 1, ..., n$.

•Définie négative si $(-1)^k \det A_k > 0 \; k = 1, ..., n$.

•Semi-définie négative si $(-1)^k \det A_k \geq 0 \; k = 1, ..., n$.

Un autre critère qui utilise les valeurs propres :
soient λ_i les valeurs propres de la matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A est dite :

• Définie positive si $\lambda_i > 0 \; \forall \; i$

•Semi-définie positive si $\lambda_i \geq 0 \; \forall \; i$

•Définie négative si $\lambda_i < 0 \; \forall \; i$

•Semi-définie négative si $\lambda_i \leq 0 \; \forall \; i$

•Indéfinie s'il existe des valeurs propres positives et négatives.

Proposition 2.1 (Critère d'ordre 0)**.**
f est convexe sur K convexe $\Leftrightarrow f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$; $\lambda_i \geq 0$, i=1,....,n ; $x_i \in K, \; \forall \; n \in N^*$

Proposition 2.2 (Critère d'ordre 1)**.**
Soit f une fonction de classe C^1 alors f est convexe sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si

$$f(X_1) \geq f(X_2) + \nabla f(X_2)^t (X_1 - X_2) \; \forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$$

Proposition 2.3 (Critère d'ordre 2)**.**
Soit f de classe C^2, f est convexe sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si H_f est semi définie positive sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 2.3.
Le critère d'ordre 0 de la convexité est le plus difficile à utiliser.

Exemple 2.1.
Montrons que $f(x) = x^2$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$ par trois façons différentes :

- En utilisant le critère d'ordre 0 :
  Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0, 1]$
  $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$?

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 \\ &= \lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2 \\ &= \lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 + (1-\lambda)\lambda(2x_1 x_2) \end{aligned}$$

  Or

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 \geq 0 &\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \geq 0 \\ &\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1 x_2 \end{aligned}$$

  donc

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &\leq \lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 + \lambda(1-\lambda)(x_1^2 + x_2^2) \\ &\leq \lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 + \lambda(1-\lambda)x_1^2 + \lambda(1-\lambda)x_2^2 \\ &\leq (\lambda^2 + \lambda(1-\lambda))x_1^2 + ((1-\lambda)^2 + \lambda(1-\lambda))x_2^2 \\ &\leq \lambda x_1^2 + (1-\lambda)(1-\lambda+\lambda)x_2^2 \\ &\leq \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 \\ &\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \end{aligned}$$

  D'où f est strictement convexe

- En utilisant le critère d'ordre 1 :
  $f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)\ \forall\ x_1, x_0 \in \mathbb{R}$?

$$\begin{aligned} f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) &= x_0^2 + 2x_0(x_1 - x_0) \\ &= x_0^2 + 2x_0 x_1 - 2x_0^2 \\ &= 2x_0 x_1 - x_0^2 \end{aligned}$$

  D'autre part on a $(x_1 - x_0)^2 = x_1^2 - 2x_1 x_0 + x_0^2 \geq 0$ alors $x_1^2 \geq 2x_1 x_0 - x_0^2$
  Donc $f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \leq x_1^2 \leq f(x_1)$
  D'où f est strictement convexe

• En utilisant le critère d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 &\Rightarrow f'(x) = 2x \neq 0 \\ &\Rightarrow f''(x) = 2 > 0 \end{aligned}$$

Donc f est strictement convexe donc convexe.

2.3 Problèmes d'optimisation avec contraintes

Le développement des conditions d'optimalité en presence des contraintes est basés sur la même intuition que dans le cas sans contrainte : il est impossible de descendre à partir d'un minimum. Dans cette partie nous allons proposer des conditions d'optimalité pour des problèmes particuliers.

2.3.1 Contraintes convexes

Définition 2.11.
On définit un problème d'optimisation avec contraintes convexes par :

$$(P1) \begin{cases} \min f(x) \\ x \in X \end{cases} \tag{2.1}$$

Où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est differentiable sur X et X : un ensemble convexe non vide.

Définition 2.12.
On dit que x^* est :

- •Un minimum local si $f(x^*) \leq f(x),\ \forall x \in V(x)$ (voisinage de x).
- •Un minimum global si $f(x^*) \leq f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- •Un maximum local si $f(x^*) \geq f(x),\ \forall x \in V(x)$.
- •Un maximum global si $f(x^*) \geq f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 2.2. (Conditions nécessaires d'optimalité)
Soit x^* un minimum local du problème $(P1)$. Alors, $\forall x \in X$,

$$\nabla f(x^*)^t(x - x^*) \geq 0 \tag{2.2}$$

Théorème 2.3. (Conditions suffisantes d'optimalité)
Soit le problème d'optimisation $(P1)$, où de plus f est convexe sur X fermé, alors (2.2) est une condition suffisante pour que x^* soit un minimum global de f sur X.

Il est aussi intéressant de caractériser la condition (2.2) en utilisant l'opérateur de projection.

Théorème 2.4.
Soit le problème d'optimisation $(P1)$, où de plus X est un ensemble fermé. Si x^* est un minimum local, alors

$$x^* \quad = \quad [x^* - \alpha\nabla f(x^*)]^p, \forall\ \alpha > 0 \tag{2.3}$$

Si de plus f est convexe, (2.3) est suffisante pour que x^* optimise f sur X.

2.3.2 Contraintes linéaires

Définition 2.13.
On définit un problème d'optimisation avec contraintes linéaires par :

$$(P2)\begin{cases} \min f(x) \\ Ax = b \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.4}$$

Avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est differentiable, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$. La matrice A peut être supposée de rang plein.

Définition 2.14.
On dit que A est de rang plein si $rg(A) = m$.

Définition 2.15.
On appelle Lagrangien ou fonction de Lagrange associée au problème

$$(p)\begin{cases} minf(x) \\ h(x) = 0 \\ g(x) \leq 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}^m \qquad \text{et} \quad \mu \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

avec

$$h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \end{pmatrix} \textit{telle que } h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_p(x) \end{pmatrix} \textit{telle que } g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

et $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$
la fonction $L : \mathbb{R}^{n+m+p} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} L(x,\lambda,\mu) &= f(x) + \lambda^t h(x) + \mu^t g(x) \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j(x) \end{aligned}$$

Dans ce cas, les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)[18][10] s'énoncent de la manière suivante.

Théorème 2.5. (Karush-Kuhn-Tucker)
Soit x^* un minimum local du problème $(P2)$. Alors, il existe un vecteur unique $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) + A^t \lambda^* = 0$$

et si f est deux fois différentiables, alors

$$y^t \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*) y \geq 0,\ \forall\ y \in \mathbb{R}^n\ \textit{tel que}\ Ay = 0$$

2.3.3 Contraintes égalités

Définition 2.16.
On définit un problème d'optimisation avec contraintes égalités par :

$$(P3) \begin{cases} \min f(x) & \\ h_i(x) = 0 & \text{i=1,....,m} \\ x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n & \end{cases} \tag{2.5}$$

Où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differentiable.
et $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continûment differentiable.

Définition 2.17.
Un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est dit admissible s'il vérifie toutes les contraintes.

Définition 2.18.
d est dite direction admissible en $x^* \in \mathbb{R}^n$ s'il existe $\eta > 0$ tel que $(x^* + \alpha d)$ soit admissible pour tout $0 < \alpha < \eta$.

Définition 2.19.
On appelle cône des directions en un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ admissible, noté $D(x^*)$, l'ensemble constitué des directions d telles que

$$d^t \nabla g_j(x^*) \leq 0,\ \forall\ j = 1, ..., p\ \textit{tel que}\ g_j(x^*) = 0$$

$$et\ d^t \nabla h_i(x^*) = 0\ i = 1, ..., m$$

et de tous leurs multiples, c'est à dire :

$$\{\alpha d / \alpha > 0\}$$

Définition 2.20.
La contrainte $g_j(x) \leq 0$ est dite active ou saturée en x^0 si $g_j(x^0) = 0$ et elle est inactive si $g_j(x) < 0$. On note l'ensemble des indices des contraintes actives en x^0 par :

$$E(x^0) = \{j \in \{1, ..., p\} / g_j(x^0) = 0\}$$

Définition 2.21.
La condition d'indépendance linéaire des contraintes est vérifiée en un point admissible x^* si les gradients des contraintes d'égalité et les gradients des contraintes d'inégalité actives en x^* sont linéairement indépendants. Par abus de langage, nous dirons simplement que les contraintes sont linéairement indépendantes.

Théorème 2.6. (Condition nécessaire Karush-Kuhn-Tucker)
Soit x^* un minimum local du problème $(P3)$. Si les contraintes sont linéairement indépendantes en x^*, alors il existe un vecteur unique $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\nabla L(x^*, \lambda^*) = 0$$

et si f et h est deux fois différentiables, alors

$$y^t \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*) y \geq 0, \ \forall\ y \in D(x^*)$$

de plus $\lambda^* = -(\nabla h(x^*)^t \nabla h(x^*))^{-1} \nabla h(x^*)^t \nabla h(x^*)$

Nous présentons maintenant le résultat de John (1948)[16] pour les contraintes d'égalité, qui est une généralisation du théorème précèdent.

Théorème 2.7. (Fritz-John)
Soit x^* un minimum local du problème $(P3)$. Alors il existe $\mu_0^* \in \mathbb{R}$ et un vecteur unique $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\mu_0^* \nabla f(x^*) + \nabla h(x^*) \lambda^* = 0$$

et $\mu_0^*, \lambda_1^*, ..., \lambda_m^*$ ne sont pas tous nuls.

Théorème 2.8. (Condition suffisante)
Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ des fonctions deux fois différentiables. Soient $x^* \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tels que :

$$\nabla L(x^*, \lambda^*) = 0$$

et

$$y^t \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*) y \geq 0, \ \forall \ y \in D(x^*), \ y \neq 0$$

Alors, x^* est un minimum local strict du problème d'optimisation.

2.3.4 Contraintes mixtes

Définition 2.22.
On définit un problème d'optimisation avec cotraintes mixtes par :

$$(P4) \begin{cases} \min f(x) & \\ h_i(x) = 0 & \text{i=1,....,m} \\ g_j(x) \leq 0 & \text{j=1,....,p} \\ x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n & \end{cases} \tag{2.6}$$

Où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continûment différentiables.

Nous présentons maintenant les conditions nécessaires d'optimalité de KKT [18][10]pour le cas général comprenant des contraintes d'égalité et d'inégalité. Comme souvent, la démarche consiste à se ramener à un cas déjà étudié, en l'occurrence au problème avec contraintes d'égalité uniquement.

Théorème 2.9. (Condition nécessaire Karush-Kuhn-Tucker)
Soit x^* un minimum local du problème $(P4)$. Si les contraintes sont linéairement indépendantes en x^*, alors il existe un vecteur unique $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ et un vecteur unique $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ tels que

$$\begin{cases} \nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0 \\ \mu_j^* \geq 0, \ j = 1, ..., p \\ \mu_j^* g_j^*(x^*) = 0 \end{cases}$$

si f, h et g sont deux fois différentiables, alors

$$y^t \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*, \mu^*) y \geq 0, \ \forall \ y \neq 0$$

tel que

$$\begin{array}{l} y^t \nabla h_i(x^*) = 0 \quad i = 1, ..., m \\ y^t \nabla g_j(x^*) = 0 \quad j = 1, ..., p \quad tel \ que \ g_j(x^*) = 0 \end{array}$$

Théorème 2.10. (Condition suffisante)
Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ des fonctions deux fois différentiables. Soient $x^* \in \mathbb{R}^n$, $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ tels que :

$$\begin{array}{rcl}
\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) & = & 0 \\
h(x^*) & = & 0 \\
g(x^*) & \leq & 0 \\
\mu^* & \geq & 0 \\
\mu_j^* g_j(x^*) & = & 0 \; j = 1, ..., p \\
\mu_j^* & > & 0 \; \forall \; j \in E(x^*)
\end{array}$$

$y^t \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*, \mu^*) y > 0 \; \forall \; y \neq 0$ tel que

$$\begin{array}{lc}
y^t \nabla h_i(x^*) = 0 & i = 1, ..., m \\
y^t \nabla g_j(x^*) = 0 & j = 1, ..., p \; tel \; que \; g_j(x^*) = 0
\end{array}$$

Alors, x^* est un minimum local strict du problème d'optimisation.

Exemple 2.2. Soit le problème

$$(p^*) \begin{cases} min(x^2 + y^2) \\ x + y \leq -1 \\ x - y \leq 1 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- Qualification des contraintes :
  Les contraintes sont linéaires alors la Q C est vérifiée partout.
- On applique le théorème de KKT :

$$\begin{cases} \nabla f(X) + \sum\limits_{i=1}^{2} \lambda_i \nabla g_i(X) = 0 \\ \lambda_i g_i(X) = 0 & i = 1, 2 \end{cases}$$

  avec

$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \; \nabla g_1(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \nabla g_2(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  ce qui donne :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2y + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1(x + y + 1) = 0 \\ \lambda_2(x - y - 1) = 0 \end{cases}$$

  - 1^{er} cas : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ alors la résolution du système (*) donne :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vérifions si $(0,0)$ est admissible ?
On remplace $(0,0)$ dans la $1^{\text{ère}}$ contrainte : $0+0 \leq -1$ n'est pas vérifié donc $(0,0)$ n'est pas admissible.

- $2^{\text{ème}}$ cas : $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 > 0$ alors la résolution du système (*) donne :

$$\begin{cases} 2x + \lambda_2 = 0 \\ 2y - \lambda_2 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

En sommant la première et la deuxième équation on aura : $2x + 2y = 0 \Rightarrow x = -y$
on remplace dans la troisième : $x + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
donc $y = -\frac{1}{2}$
Calculons maintenant la valeur de λ_2 pour le point $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
en remplaçant dans la première équation : $2\ \frac{1}{2} + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -1$ ce qui est impossible car $\lambda_i \geq 0\ \forall\ i = \overline{1,n}$

- $3^{\text{ème}}$ cas : $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 = 0$ alors la résolution du système (*) donne :

$$\begin{cases} 2x + \lambda_1 = 0 \\ 2y - \lambda_1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

De la première et la deuxième équation on aura : $2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y$
On remplace dans la troisième : $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$
Donc $y = -\frac{1}{2}$
calculons maintenant la valeur de λ_1 pour le point $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
en remplaçant dans la première : $2(-\frac{1}{2}) + \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$
Donc $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ et $X^* = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
Vérifions enfin si X^* est admissible ?
On remplace dans la $1^{\text{ère}}$ contrainte : $-\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) = -1 \leq 1$ vérifiée
On remplace dans la $2^{\text{éme}}$ contrainte : $-\frac{1}{2} + (\frac{1}{2}) = 0 \leq 1$ vérifiée
Conclusion $X^* = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ est admissible, donc X^* est solution de KKT.

- $4^{\text{ème}}$: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ alors la résolution du système $(*)$ donne :

$$\begin{cases} 2x + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2y + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

En sommant la troisième et la quatrième on aura : $2x = 0 \Rightarrow x = 0$

On remplace x dans la troisième : $y = -1$
et dans la première : $\lambda_1 = -\lambda_2$
On remplace y et λ_1 dans la deuxième : $-2-\lambda_2-\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -1 < 0$ impossible car $\lambda_i \geq 0$.

Le problème (P^*) admet une solution $X^* = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ pour les multiplicateurs de KKT $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0$

2.4 Méthodes de résolution pour les problèmes d'optimisation avec contraintes

2.4.1 Méthode du Simplexe

La méthode du simplexe (Wood et Dantzig (1949) [7], Dantzig (1963)) [13] est probablement l'algorithme le plus célèbre en optimisation, conçu pour résoudre les problèmes de programmation linéaire. Une idée centrale de la méthode est basée sur le fait que, si une solution optimale existe, alors il existe une solution optimale qui soit point extrême du polytope des contraintes.

2.4.2 Méthodes de Newton contrainte

La méthode de Newton pour l'optimisation sans contrainte est adaptée aux problèmes avec contraintes convexes :

$$\min_x f(x) \ s.c \ x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$$

Elle peut être vue comme une version préconditionnée de la méthode de la plus forte pente. D'abord nous allons présenter la méthode en utilisant la direction de la plus forte pente, et ensuit préconditionner celle-ci de manière appropriée.

Définition 2.23.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soient $x, d \in \mathbb{R}^n$. La direction d est une direction de descente en x si

$$d^t \nabla f(x) < 0$$

La terminologie "Direction de descente" est justifiée par le théorème suivant

Théorème 2.11.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla f(x) \neq 0$ et $d \in \mathbb{R}^n$. Si d est une direction de descente, alors il existe $\eta > 0$ tel que

$$f(x + \alpha d) \quad < \quad f(x) \ \forall \ 0 < \alpha \leq \eta$$

De plus, pour tout $\beta < 1$, il existe $\widehat{\eta}$ tel que

$$f(x + \alpha d) \quad < \quad f(x) + \alpha\beta\nabla f(x)^t d \textit{ pour tout } 0 < \alpha \leq \widehat{\eta}$$

Parmi toutes les directions d à partir d'un point x, celle où la pente est la plus forte est la direction du gradient $\nabla f(x)$.

Théorème 2.12.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $d^* = \nabla f(x)$. Alors, pour tout $d \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|d\| = \|\nabla f(x)\|$, on a

$$d^t \nabla f(x) \leq d^{*t} \nabla f(x) = \nabla f(x)^t \nabla f(x)$$

Méthode du gradient projeté

L'idée de base est de suivre la direction de plus forte pente. Dès que l'on obtient un point non admissible, on projette celui-ci sur l'ensemble X. Notons $[.]^+$ l'opérateur de projection tel que $[.]^+ = \max\{0, f(x_k)\}$. A chaque itération, nous générons un point admissible y_k à partir de x_k .

$$y_k = [x_k - \gamma_k \nabla f(x_k)]^+, \ \textit{avec} \ \gamma_k > 0$$

. Montrons que la direction $d_k = y_k - x_k$ (si elle est non nulle) est une direction de descente pour toute valeur de $\gamma_k > 0$.

Lemme 2.1.
Soit f : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable, et $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe. Soit $x_k \in X$ et $x(\gamma) = x_k - \gamma \nabla f(x_k)$, avec $\gamma > 0$. Alors si la direction $d(\gamma) = [x(\gamma)]^+ - x_k$ est non nulle, il s'agit d'une direction de descente, $\forall \gamma > 0$

La direction $d(\gamma) = [x(\gamma)]^+ - x_k$ possède les propriétés suivantes :

- Si $d(\gamma) = 0$, alors x_k est un point stationnaire car la condition nécessaire d'optimalité est vérifiée .
- Si $d(\gamma) \neq 0$, alors $d(\gamma)$ est une direction de descente par le lemme précèdent.
- Comme x_k et $[x(\gamma)]^+$ sont admissibles, la convexité de X assure que $x_k + \alpha d(\gamma) \in X$ pour tout $0 \leq \alpha \leq 1$.

Il est ainsi aisé de généraliser l'algorithme de la plus forte pente.

Algorithme méthode du gradient projeté

Objectif : Trouver (une approximation de) la solution du problème :

$$\min_{x \in X \subset \mathbb{R}^n} f(x)$$

Avec X est convexe
Input

- La fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continûment différentiable.
- Le gradient de la fonction $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;
- L'opérateur de projection sur X : $[.]^+$;
- Une première approximation de la solution $x_0 \in \mathbb{R}^n$;
- Un paramètre $\gamma > 0$ (par exemple, $\gamma = 1$) ;
- La précision demandée $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$.

Output
Une approximation de la solution $x^* \in \mathbb{R}$
Initialisation
K=0
Itérations

1. $y_k = [x_k - \gamma \nabla f(x_k)]^+$,
2. $d_k = y_k - x_k$
3. Déterminer α_k en appliquant une recherche linéaire avec $\alpha_0 = 1$.
4. $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
5. $k = k + 1$.

Critère d'arrêt
Si $\|d_k\| \leq \varepsilon$, alors $x^* = x_k$.

Gradient projeté préconditoinné

Nous allons maintenant appliquer la méthode du gradient projeté, mais après avoir appliqué au préalable un changement de variables. Soit le problème original

$$\min_{x \in X} f(x)$$

et soit une matrice H définie positive, dont la factorisation de Cholesky est LL^T. Définissons

$$x' = L^T x \Leftrightarrow x = L^{-T} x'$$

Dans les nouvelles variables, le problème s'écrit :

$$\min_{x' \in X'} g(x') = f(L^{-T}x')$$

avec $X' = \{x' | L^{-T}x' \in X\}$. En utilisant l'équation

$$\begin{aligned} y_k &= \arg\min_{x\in X} \frac{1}{2}\|x_k - \gamma\nabla f(x_k) - x\|^2 \\ &= \arg\min_{x\in X} \frac{1}{2}\|x - x_k\|^2 + \gamma\nabla f(x_k)^T(x - x_k) \end{aligned}$$

Le pas 1 de l'algorithme s'écrit donc :

$$y'_k = \arg\min_{x'\in X'} \frac{1}{2}\|x' - x'_k\|^2 + \gamma\nabla g(x'_k)^T(x' - x'_k)$$

Pour écrire cette expression dans les variables originales, nous notons que

$$\nabla g(x'_k) = L^{-1}\nabla f(L^{-T}x'_k) = L^{-1}\nabla f(x_k)$$

Pour obtenir

$$y_k = \arg\min_{x\in X} \frac{1}{2}(L^T x - L^T x_k)^T(L^T x - L^T x_k) + \gamma\nabla f(x_k)^T L^{-T}(L^T x - L^T x_k)$$

Ou encore

$$y_k = \arg\min_{x\in X} \frac{1}{2}(x - x_k)^T H(x - x_k) + \gamma\nabla f(x_k)^T(x - x_k)$$

A nouveau, le calcul de y_k peut s'avérer difficile. Dans le cas où X est défini par des équations linéaires, il s'agit d'un programme quadratique.

Algorithme méthode du gradient projeté préconditionné

Objectif : Trouver (une approximation d') un minimum local du problème

$$\min_x \in X \subseteq \mathbb{R}^n f(x)$$

Avec X convexe.
input

- La fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuement differentiable ;
- Le gradient de la fonction $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;
- Une famille de préconditionneurs $(H_k)_k$ telle que H_k est définie positive pour tout k ;
- Une première approximation de la solution $x_0 \in \mathbb{R}^n$;

•Un paramètre $\gamma > 0$ (par exemple,$\gamma = 1$).

•La précision demandée $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$.

Output
Une approximation de la solution $x^* \in \mathbb{R}$
Initialisation
k=0
Itérations

1. Calculer y_k en résolvant
$$y_k = \arg\min_{x \in X} \frac{1}{2}(x - x_k)^T H_k (x - x_k) + \gamma \nabla f(x_k)^T (x - x_k)$$
2. $d_k = y_k - x_k$
3. Déterminer α_k en appliquant une recherche linéaire avec $\alpha_0 = 1$.
4. $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$,
5. k= k+1.

critère d'arrêt
Si $\|d_k\| \leq \epsilon$, alors $x^* = x_k$.

2.4.3 Méthode de points intérieurs

La méthode du simplexe se déplace d'un point extrême du polytope des contraintes à un autre. Elle peut, dans certains cas pathologiques, nécessiter un nombre extrêmement grand d'itérations. Dans le contexte de la théorie de la complexité des algorithmes, on parle d'un nombre exponentiellement grand d'itérations, car la nombre d'itérations dans le pire des cas grandit d'une manière exponentielle avec la taille du problème à résoudre. Les méthodes de points intérieurs, comme le nom l'indique, vont soigneusement éviter la frontière de l'ensemble admissible, et ne pas souffrir ainsi de l'aspect combinatoire inhérent à la méthode du simplexe. Khachiyan (1979) [19] fut le premier à proposer un algorithme dit "polynomiale", c'est à dire dont le nombre d'itérations grandit d'une manière polynomiale avec la taille du problème. Malheureusement, cet algorithme s'avéra inefficace en pratique et il faudra attendre les travaux de Karmarkar (1984)[17] pour susciter un engouement pour les méthodes de points intérieurs. Actuellement, l'importance de ces méthodes a dépassé le cadre de la programmation linéaire et est beaucoup utilisé dans le cadre de l'optimisation convexe, grâce notamment aux travaux de Nesterov et Nemirovsky (1994)[9]. Nous motivons ici les méthodes de points intérieurs par le biais des méthodes barrières, déjà utilisées dans les années 60. Bien que peu utilisées en pratique, elles fournissent une approche intuitive des méthodes de points intérieurs. Les méthodes barrières, ou méthodes de points intérieurs, se sont avérées très efficaces dans le cadre de la programmation convexe en général, et principalement dans le cadre de la programmation linéaire.

2.4.4 Lagrangien augmenté

Une difficulté importante des problèmes d'optimisation avec contraintes est la présence de deux critères souvent contradictoires : réduire la valeur de la fonction objectif et identifier des points admissibles. Les méthodes de points intérieurs commencent par donner un poids important au second critère, au détriment du premier, et ré-équilibrent les deux au cours des itérations. Alors que la méthode de Lagrangien augmenté fonctionne de la manière opposée. Elle tâche de réduire la fonction objectif, au besoin en violant les contraintes. Ensuit, l'admissibilité est restaurée au fur et à mesure des itérations. Cette méthode est directement inspirée des conditions de KKT.

2.4.5 Programmation quadratique séquentielle

L'idée de base de l'algorithme est simple : les conditions nécessaires d'optimalité constituent un système d'equations non linéaires. La méthode est pertinente dans ce contexte.

Remarque 2.4.
Nous invitons le lecteur à consulter "Introduction à l'optimisation différentiable"(Michel Bierlaire 2005) [3] pour de plus amples détails.

3

Équilibre de Nash généralisé

Introduction

L'équilibre de Nash généralisé (équilibre social), où les ensembles réalisables des joueurs dépendent de l'action des autres joueurs, devient de plus en plus populaire parmi les universitaires et les praticiens.
Dans ce chapitre, nous abordons le problème d'équilibre de Nash généralisé avec sa définition et quelques notations. Ensuite nous exposons le modèle d'économie abstraite de Arrow et Debreu [8] comme exemple d'équilibre de Nash généralisé. Enfin, nous fournissons les théorèmes d'existence d'un tel équilibre en utilisant les inéquations variationnelles.
[11], [5] et [2] ont été utilisé dans la rédaction de ce chapitre.

3.1 Notations

Tout comme dans le problème d'équilibre de Nash, on note par :

$$J_G = < N, X_i, f_i > \tag{3.1}$$

un jeu sous forme généralisé où :

$N = \{1, 2, ..., n\}$ l'ensemble des n joueurs,

$x = (x_i, x_{-i})$ une issue où x_i la stratégie du joueur i appartenant à l'ensemble $X_i(x_{-i}) \subset \mathbb{R}^{n_i}$ qui dépend des stratégies x_{-i} des autres joueurs.

- Le but du joueur i, étant données les stratégies des autres joueurs x_{-i}, est de choisir une stratégie x_i qui résout le problème de minimisation :

$$\min_{x_i} f_i(x_i, x_{-i}) \quad \textit{sous contrainte} \quad x_i \in X_i(x_{-i})$$

avec $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$ et $f = (f_i)_{i \in N}$;

Définition 3.1 (Équilibre de Nash généralisé).
Le vecteur $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ est dit équilibre de Nash généralisé du jeu J_G si pour tout $i \in N,\ x_i^* \in X_i(x_{-i}^*)$ et

$$f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \leq f_i(x_i, x_{-i}^*) \ \forall \ x_i \in X_i(x_{-i}^*) \tag{3.2}$$

Remarque 3.1.

- Si l'ensemble des stratégies $X_i(x_{-i})$ ne dépend pas des stratégies des joueurs adverses, ainsi on a : $X_i(x_{-i}) = X_i \subset \mathbb{R}^{n_i} \ \forall \ i \in N$, le problème d'équilibre de Nash généralisé devient un problème d'équilibre de Nash classique présenté au premier chapitre.
- Les ensembles $X_i(x_{-i})$ sont souvent représentés par des contraintes d'inégalités et/ou d'égalités données comme suit

$$X_i(x_{-i}) = \{x_i \in \mathbb{R}^{n_i} : g_i(x_i, x_{-i}) \leq 0\}$$

où $g_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{m_i}$

3.2 Modèle d'économie abstraite de Arrow et Debreu

Le modèle d'équilibre économique est un thème central de l'économie et traite le problème de la manière dont les marchandises sont produites et échangées entre les individus. Walras(1874) [22] a probablement été le premier auteur à aborder cette question dans une perspective mathématique moderne. Arrow et Debreu (1954) [8] ont considéré un"système économique général" avec définition correspondante de l'équilibre. Ils ont ensuite montré que les équilibres de leurs modèle sont ceux d'un équilibre de Nash généralisé (GNEP) correctement défini (qu'ils ont appelé une "économie abstraite") ; sur cette base, ils ont pu prouver des résultats importants sur l'existence d'équilibres économiques. Ci-dessous, nous décrivons ce modèle économique. Nous supposons qu'il existe "l" produits distincts (y compris toutes sortes de services). Chaque marchandise peut être achetée ou vendue à un nombre fini d'endroits (dans l'espace et dans le temps). Les marchandises sont produites dans des "unités de production" (entreprise) dont le nombre est n. Pour chaque unité de production j il existe

un ensemble Y_j de plans de productions possibles. Un élément $y_j \in Y_j$ est un vecteur dans $\mathbb{R}^l$ dont la $h^{ème}$ composante désigne la sortie de la marchandise h selon ce plan ; une composante négative indique une entrée. Si nous notons par $P \in \mathbb{R}^l$ les prix des marchandises, les unités de productions viseront naturellement à maximiser le revenue total, $P_t y_j$, sur l'ensemble Y_j. Nous supposons également l'existence d'unités de consommation (particuliers ou des individus) dont le nombre est m. On associe à chaque unité de consommation i un vecteur $x_i \in \mathbb{R}^l$ dont la $h^{\text{ème}}$ composante représente la quantité de la $h^{\text{ème}}$ marchandise consommée par le $i^{\text{ème}}$ individu. Pour toute marchandise, autre qu'un service de travail fourni par l'individu, la consommation est non négative.
Plus général, x_i doit appartenir à un certain ensemble $X_i \subseteq \mathbb{R}^l$. l'ensemble X_i comprend des vecteurs de consommation parmi lesquels l'individu pourrait choisir s'il n'y avait pas de contraintes budgétaires (ces dernières contraintes seront explicitement formulées ci-dessous). Nous supposons également que la $i^{ème}$ unité de consommation est doté d'un vecteur $\varepsilon_i \in \mathbb{R}^l$ de la détention initiale des marchandises (matières premières) et a un droit contractuel sur le partage du bénéfice α_{ij} de la $j^{ème}$ unité de production.
Dans ces conditions il est alors clair que, étant donné un vecteur de prix P, le choix de la $i^{ème}$ unité est en outre limité aux vecteurs $x_i \in X_i$ tels que $P_t x_i \leq P_t \varepsilon_i + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(P_t y_j)$.
Comme c'est le cas en théorie économique, les unités de consommation visent à maximiser une fonction d'utilité $u_i(x_i)$, qui peut être différente pour chaque unité. Concernant les prix, évidemment le vecteur P doit être non négatif ; de plus, après normalisation, on suppose que $\sum\limits_{h=1}^{1} P_h = 1$.
On s'attend également à ce que les marchandises gratuites, c'est à dire les marchandises dont le prix est nul, ne sont possibles que si l'offre dépasse la demande ; d'autre part, il est raisonnable d'exiger que la demande soit toujours satisfaite.
Ces deux dernières exigences peuvent être exprimées sous la forme :

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} x_i - \sum\limits_{j=1}^{n} y_j - \sum\limits_{i=1}^{m} \varepsilon_i \leq 0 \\ P_t(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i - \sum\limits_{j=1}^{n} y_j - \sum\limits_{i=1}^{m} \varepsilon_i) = 0 \end{cases}$$

En gardant à l'esprit ce qui précède, Arrow et Debreu font également une série d'autres hypothèses techniques (qui sont sans importance pour notre discussion)sur les propriétés des ensembles Y_j, X_i les fonctions u_i,...etc, qui correspondent à des conditions économiques plutôt naturelles, et sur cette base ils définissent une notion d'équilibre économique. Essentiellement, un équilibre économique est un ensemble de vecteur $(x_1^*, ..., x_m^*, y_1^*, ..., y_n^*, P^*)$ tels que toutes les relations décrites ci-dessus sont satisfaites.
Le plus intéressant est que Arrow et Debreu montrent que les équilibres économiques peuvent

être décrits comme des équilibres de Nash généralisé, et cette reduction est en fait la base sur laquelle ils peuvent prouver leur résultat clé : l'existence d'équilibre.
L'équilibre de Nash généralisé qu'ils définissent a $(n+m+1)$ acteurs. Les premiers n acteurs correspondent aux unités de production, les m suivants sont les unités de consommation, et le joueur final est un joueur fictif qui fixe les prix et que l'on appelle"participant au marché".
Le $j^{ème}$ joueur producteur contrôle les variables y_j et son objectif est de résoudre le problème de maximistion

$$\max_{y_j} P_t y_j \quad \textit{sous contraites} \quad y_j \in Y_J \tag{3.3}$$

Le $i^{ème}$ joueur consommateur contrôle les variables x_i et son but est résoudre le problème

$$\begin{cases} \max\limits_{x_i} u_i(x_i) \\ \textit{sous contraintes } x_i \in X_i \\ P_t x_i \leq P_t \varepsilon_i + \max\{0, \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(P_t y_j) \end{cases} \tag{3.4}$$

Et enfin, le problème de l'acteur du marché est :

$$\begin{cases} \max\limits_{P} P_t(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i - \sum\limits_{j=1}^{n} y_j - \sum\limits_{i=1}^{m} \varepsilon_i) \\ \textit{sous contrainte } P \geq 0 \\ \sum\limits_{h=1}^{1} P_h = 1 \end{cases} \tag{3.5}$$

Au final, (3.3)-(3.5) représentent un problème d'équilibre de Nash généralisé avec les contraintes conjointes provenant de (3.4).

3.3 Existence de l'équilibre de Nash généralisé

L'existence de l'équilibre de Nash généralisé peut être abordé de deux manières différentes : soit par l'approche directe basée sur le théorème du point fixe, ou bien par l'approche basée sur l'inéquation variationnelle.

3.3.1 Approche direct

Dans un premier temps, nous présentons l'approche directe dont lesconditions d'existence sont données par le théorème (3.1) (Arrow-Debren-Nash) qui a été établi dans le contexte de l'économie abstraite.

Théorème 3.1 (Arrow-Debren-Nash).
Considérons le jeu avec contraintes J_G défini par (3.1). Supposons que pour tout $i \in N$:

1. il existe un sous-ensemble non vide, convexe et compact K_i *de* $\mathbb{R}^{n_i}$ tel que :
   $\forall x \in K = \prod_{i=1}^{n} K_i,\ X_i(x_{-i})$ est non vide, fermé et convexe de K_i ;
2. les correspondances $X_i : X_{-i} \to 2^{K_i}$ sont semi-continues supérieurement et semi-continues inférieurement ;
3. les fonctions f_i sont continues ;
4. les fonctions $x_i \to f_i(x_i, x_{-i})$ sont quasi-convexes.

Alors il existe un équilibre de Nash généralisé pour le jeu J_G .

Avant de donner la preuve du théorème ci-dessus rappelons le théorème du minimum de Berge

Théorème 3.2. Soient X, Y deux espaces métriques, soit $f : X \times\ Y \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $F : X \longrightarrow 2^Y$ une correspondance continue à valeurs non vides et compactes. Alors

i) la fonction $v : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $v(x) = \min\limits_{y \in F(x)} f(x,\ y)$ est continue ;

ii) la correspondance $G : X \longrightarrow 2^Y$, $G(x) = \arg\min\limits_{y \in F(x)} f(x,\ y)$ est semi-continue supérieurement à valeurs non vides et compactes.

Preuve du Théorème 3.1

Pour $i \in N$ notons par $C_i : X_{-i} \longrightarrow 2^{K_i}$ la correspondance des meilleures réponses définie par $C_i(x_{-i}) = \arg\min\limits_{x_i \in X_i(x_{-i})} f_i(x_i,\ x_{-i})$. Toutes les conditions du théorème du minimum sont satisfaites, alors la correspondance C_i est semi-continue supérieurement. Il est facile de voir qu'elle est à valeurs non vides et fermées. Pour montrer que $C_i(x_{-i})$ est convexe, soient y_i, z_i deux éléments quelconques de $C_i(x_{-i})$ et $t \in [0,\ 1]$ posons $w_i = (1-t)y_i + tz_i$. La convexité de $X_i(x_{-i})$ entraîne $w_i \in$ et de la quasi-convexité de f_i on déduit

$$f_i(w_i,\ x_{-i}) \leq \max\{f_i(y_i,\ x_{-i}),\ f_i(z_i,\ x_{-i})\} \leq f_i(x_i,\ x_{-i})$$

c.à.d $w_i = (1-t)y_i + tz_i \in C_i(x_{-i})$, ainsi $C_i(x_{-i})$ est convexe.
Soit maintenant la correspondance produit $C : X \longrightarrow 2^X$ définie par

$$C(x) = C_1(x_{-1}) \times C_2(x_{-2}) \times ... \times C_n(x_{-n}).$$

Elle satisfait toutes les hypothèses du théorème du point fixe de Kakutani, elle admet donc un point fixe $\bar{x}$ qui est un équilibre de Nash généralisé.

3.3.2 Approche indirecte

L'équilibre de Nash généralisé peut être reformulé dans le cadre de l'inéquation variationnelle ou l'inéquation quasi-variationnelle. Commençons d'abord par donner la définition de l'inéquation variationnelle et l'inéquation quasi-variationnelle puis nous introduisons le théorème d'existence .

Reformulation d'un problème d'équilibre de Nash généralisé en un problème d'inéquation variationnelle

Définition 3.2 (Inéquation variationnelle)**.**
Soit K une partie non vide, convexe et fermée de $\mathbb{R}^n$ et $F : K \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Le problème d'inéquation variationnelle, noté $VI(K, F)$ consiste à trouver un vecteur $x^* \in K$ qui vérifie l'inéquation

$$(y - x^*)^t F(x^*) \geq 0 \qquad \forall y \in \ K \tag{3.6}$$

Le but dans cette partie est de trouver une solution pour le problème d'équilibre de Nash généralisé en résolvant un problème d'inéquation variationelle. C'est pourquoi, nous devons être sûrs que le problème d'inéquation variationelle a au moins une solution. Le théorème suivant assure l'existence d'une solution pour le problème $VI(K, F)$.

Théorème 3.3.
Supposons que le sous-ensemble K de $\mathbb{R}^n$ soit convexe, compact et que F soit continue dans $\mathbb{R}^n$, alors il existe une solution $x^* \in K$ de l'inéquation variationnelle (3.6).

Les problèmes d'inéquations variationnelles ont été beaucoup étudiés car ils permettent de généraliser les conditions d'optimalité classiques pour les problèmes d'optimisation avec contraintes.

Proposition 3.1.
Soit K un ensemble fermé et convexe et $F : K \to \mathbb{R}^n$ une fonction convexe de classe C^1.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. x^* est solution du problème d'optimisation $\min\limits_{x \in K} f(x)$
2. x^* est solution du $VI(K, F)$.

Théorème 3.4.
Soit le jeu J_G définit par (3.1). Supposons que pour tout $i \in N$: f_i est continuement différentiable et pseudo-convexe en x et il existe un sous-ensemble $X_i(x_{-i})$ défini par : $X_i(x_{-i}) = \{x_i : (x_i, x_{-i}) \in X\}$ où $X \subset \mathbb{R}^n$ est fermé et convexe.
Alors chaque solution de $VI(X, F)$ est une solution du problème d'équilibre de Nash généralisé.

Démonstration.
Soit x^* une solution de $VI(X,F)$. Nous allons montrer que pour chaque joueur i, la composante x^* satisfait

$$f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \leq f_i(x_i, x_{-i}^*) \; x_i \in X_i(x_{-i}^*)$$

Soit $x_i \in X_i(x_{-i}^*)$, alors le vecteur $y = (x_1^*, ...x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, ...x_n^*)^t \in X$, et par définition de $VI(X,F)$, nous pouvons écrire $(y - x^*)^t F(x^*) \geq 0$
c'est à dire :

$$\underbrace{(x_1^* - x_1^*)^t \nabla_{x_1} f_1(x_1^*, x_{-1}^*)}_{=0} \; + \; \underbrace{(x_2^* - x_2^*)^t \nabla_{x_2} f_2(x_2^*, x_{-2}^*)}_{=0} + ... +$$
$$(x_i - x_i^*)^t \nabla_{x_i} f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \; + \; .... + \underbrace{(x_n^* - x_n^*)^t \nabla_{x_n} f_n(x_n^*, x_{-n}^*)}_{=0} \geq 0$$

donc on peut écrire :

$$(x_i - x_i^*)^t \nabla_{x_i} f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq 0 \; \forall x_i \in X_i(x_{-i}^*)$$

et comme f_i est pseudo-convexe alors on peut déduire que :

$$f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \leq f_i(x_i, x_{-i}^*) \; x_i \in X_i(x_{-i}^*)$$

□

Remarque 3.2.
Lorsque les ensembles $X_i(x_{-i})$ sont définis explicitement par un système d'inéquations $X_i(x_{-i}) = \{x_i \in \mathbb{R}^{n_i} : g_i(x_i, x_{-i}) \leq 0\}$, alors il est facile de vérifier que
$X_i(x_{-i}) = \{x_i \in \mathbb{R}^{n_i} : (x_i, x_{-i}) \in X\}$ est equivalent à l'exigence que $g_1 = g_2 = ... = g_n = g$ et $g(x)$ soit convexe par rapport à toutes les variables x ; de plus, dans ce cas, il est evident que $X = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) \leq 0\}$.

Remarquons que le théorème ci-dessus ne dit pas que n'importe solution du problème d'équilibre de Nash généralisé est aussi une solution du problème $VI(X,F)$. En fait il peut arriver que le problème d'équilibre de Nash généralisé ait une solution et que le problème $VI(X,F)$ n'en ait pas. C'est à dire que les solutions du problème d'équilibre de Nash généralisé ne sont pas préservées. Cette sous section va nous permettre de mettre en evidence quels types de solutions sont obtenues en résolvant le problème d'inéquation variationelle. Par conséquent un type spécial d'équilibre de Nash généralisé a été introduit : équilibre variationel appelé aussi équilibre normalisé.

Définition 3.3 (Équilibre Variationel)**.**
Une stratégie x^* est dite équilibre variationel d'un jeu généralisé si x^* résout $VI(K, F)$.

Un équilibre variationel a une interpretation particulière en terme de multiplicateurs de Lagrange du système KKT correspondant à l'équilibre de Nash généralisé.
Nous supposons que X est défini par un nombre fini de contraintes c'est à dire :
$X = \{x \in \mathbb{R}^n / g(x) \leq 0\}$ où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et toutes les contraintes $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ j = 1, ..., m$ sont convexes et continuement differentiable.
Nous supposons que x^* est une solution du problème d'équilibre de Nash généralisé.
Alors si pour le joueur i une contrainte de qualification est vérifiée, il y a un vecteur $\lambda_i \in \mathbb{R}^m$ de multiplicateurs tels que les conditions de KKT sont satisfaites.

$$\begin{cases} \nabla_{x_i} f_i(x_i, x_{-i}) + \lambda_i \nabla_{x_i} g_i(x_i, x_{-i}) = 0 \\ \lambda_i g_i(x_i, x_{-i}) = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Les solutions du problème d'équilibre de Nash généralisé qui sont préservées lors du passage à un problème d'inequation variationelle sont exactement celles pour lesquelles tous les joueurs ont les mêmes multiplicateurs pour toutes les contraintes. Considérons les conditions de KKT pour le problème $VI(X, F)$:

$$\begin{cases} F(x) + \lambda \nabla_x g(x) = 0 \\ \lambda g(x) = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Le théorème suivant donne la relation entre les conditions de KKT et une solution de l'équilibre de Nash généralisé.

Théorème 3.5.
Supposons que le problème d'équilibre de Nash généralisé où f_i est continuement differentiable en x $\forall\ i \in N$ et que $X_i(x_{-i}) = \{x_i : (x_i, x_{-i}) \in X\}$ avec
$X = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) \leq 0\}$ sont convexes :

1. si x^* est une solution du problème d'équilibre de Nash généralisé qui vérifie les conditions de KKT avec $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n$ alors x^* est une solution du problème $VI(X, F)$.
2. réciproquement, si x^* est une solution du problème $VI(X, F)$vérifiant les conditions de KKT, alors x^* est une solution du problème d'équilibre de Nash généralisé qui vérifie les conditions de KKT avec $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n$

Démonstration.

1. Si $F(x) + \lambda \nabla_x g(x) = 0$ est vérifiée (conditions de KKT pour le problème $VI(F, X)$), et que d'autre part $\nabla_{x_i} f_i(x_i, x_{-i}) + \lambda_i \nabla_{x_i} g_i(x_i, x_{-i}) = 0$ (conditions de KKT du problème

d'équilibre de Nash généralisé), une simple comparaison entre les deux équations nous montre que x^* satisfait les conditions de KKT du problème d'équilibre de Nash généralisé en prenant $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \lambda$ et par hypothèse de pseudo-convexité de f_i et la convexité de$X$, ces conditions de KKT sont suffisantes pour garantir que x^* est une solution du problème d'équilibre de Nash généralisé (en utilisant le théorème précèdent).

2. Si x^* est une solution du problème d'équilibre de Nash généralisé qui vérifie les conditions de KKT données par (3.7) avec $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \lambda$. Les conditions de KKT données par (3.8) sont évidement satisfaites pour $\lambda_1 = \lambda$. La satisfaction de ces conditions assure que x^* est une solution du problème $VI(F,X)$).

$\square$

Exemple 3.1.
Prenons un exemple d'un jeu à deux joueurs ($N = \{1,2\}$), de sorte que chaque joueur contrôle une variable : le joueur 1 contrôle la variable x et le joueur 2 contrôle la variable y. Les problèmes des deux joueurs sont donnés par :

$$joueur\ 1 : \left\{ \begin{array}{c} \min\limits_{x}(x-1)^2 \\ x+y \leq 1 \end{array} \right. \quad joueur\ 2 : \left\{ \begin{array}{c} \min\limits_{y}(y-\frac{1}{2})^2 \\ x+y \leq 1 \end{array} \right.$$

On remarque que les deux problèmes sont des problèmes d'optimisation avec contraintes inégalités traités en détail dans le chapitre précédent (chapitre 2).
Appliquons le Théorème de KKT :
Joueur 1 :

$$\begin{cases} \nabla f(X) + \lambda \nabla g(X) = 0 \\ \lambda g(X) = 0 \end{cases}$$

avec

$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 2(x-1)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \ et \ \nabla g(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{cases} 2x - 2 + \lambda = 0 \\ \lambda = 0 \\ \lambda(x+y-1) = 0 \end{cases}$$

Remplaçons $\lambda = 0$ dans la condition de stationnarité ie : $2x - 2 + 0 = 0 \Rightarrow x = 1$
et comme $\lambda = 0$ alors la contrainte doit être strictement inactive ($g(X) < 0$).
C'est à dire $x + y - 1 < 0 \Rightarrow x < 1 - y$
donc pour $x = 1$, $1 < 1 - y \Rightarrow y < 0$ et pour $x = 1 - y$, $\forall\ y \geq 0$

D'où l'ensemble des solutions optimales est :

$$S(y) = \begin{cases} 1 & si \;\; y \leq 0 \\ 1-y & si \;\; y \geq 0 \end{cases}$$

Joueur 2 :

$$\begin{cases} \nabla f(X) + \mu \nabla g(X) = 0 \\ \mu g(X) = 0 \end{cases}$$

avec

$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2(y-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} \; et \; \nabla g(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{cases} \mu = 0 \\ 2y - 1 + \mu = 0 \\ \mu(x+y-1) = 0 \end{cases}$$

Remplaçons $\mu = 0$ dans la condition de stationnarité ie : $2y - 1 + 0 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$
et comme $\mu = 0$ alors la contrainte doit être strictement négative ($g(X) < 0$). c'est à dire $x + y - 1 < 0 \Rightarrow y < 1 - x$
donc pour $y = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < 1 - x \Rightarrow x < \frac{1}{2}$ et pour $y = 1 - x$, $\forall x \geq \frac{1}{2}$
D'où l'ensemble des solutions optimales est :

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si \;\; x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x & si \;\; y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Les solutions de ce problème sont données par $(\alpha, 1-\alpha)$ pour $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$. Le problème a une infinité de solutions, et pour chaque solution $(\alpha, 1-\alpha)$ il y a des multiplicateurs uniques notés $\lambda(\alpha)$ pour le joueur 1 et $\mu(\alpha)$ pour le joueur 2 qui satisfont les conditions de KKT.
En remplaçant $(\alpha, 1-\alpha)$ dans la condition de stationnarité ou aura :
$2x - 2 + \lambda = 0 \Rightarrow 2\alpha - 2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\alpha) = 2 - 2\alpha$
$2(y - \frac{1}{2}) + \mu = 0 \Rightarrow 2(1 - \alpha - \frac{1}{2}) + \mu = 0 \Rightarrow \mu(\alpha) = 2\alpha - 1$
D'où nous pouvons dire qu'il y a seulement une solution pour laquelle

$$\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) \Rightarrow 2 - 2\alpha = 2\alpha - 1 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{4}$$

et le couple de solution correspondant est donné par :

$$(x^*, y^*) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) \; et \; \lambda^* = \mu^* = \frac{1}{2}$$

Considérons maintenant le problème $VI(X, F)$ qui, dans ce cas, est obtenu en posant :

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \leq 1\}$$

et

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla_x f_x(x,y) \\ \nabla_y f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y-1 \end{pmatrix}$$

Appliquons le Théorème de KKT :

$$\begin{cases} F(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) = 0 \\ \lambda g(x,y) = 0 \end{cases}$$

avec

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y-1 \end{pmatrix} \ et \ \ \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$\begin{cases} 2x-2+\lambda = 0 \\ 2y-1+\lambda = 0 \\ \lambda(x+y-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-\frac{1}{2}\lambda \\ y = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda \\ (1-\frac{1}{2}\lambda)+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda)-1 = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne $\lambda = \frac{1}{2}$ et la solution unique est donnée par $(x^*, y^*) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$.
Nous voyons par cet exemple que le problème de Nash généralisé a une infinité de solution alors que le problème $VI(X,F)$ a seulement une solution, et cette solution est la seule solution du problème de Nash généralisé pour lequel la contrainte commune a des multiplicateurs égaux.

Reformulation d'un problème d'équilibre de Nash généralisé en un problème d'inéquation quasi-variationnelle

Dans le problème d'inéquation variationnelle l'ensemble admissible K est une partie fixe de $\mathbb{R}^n$. Lorsque K dépend aussi de la variable x, le problème VI devient un problème d'inéquation quasi-variationnelle QVI. Formellement, le problème d'inéquation quasi-variationnelle s'énonce comme suit :

Définition 3.4 (Inéquation quasi-variationnelle)**.**
Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et $K : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ une correspondance. Le problème d'inéquation quasi-variationnelle, noté $QVI(K,F)$ consiste à trouver un vecteur $x^* \in K(x^*)$ tel que :

$$(y - x^*)^t F(x^*) \geq 0 \qquad \forall\ y \in K(x^*) \tag{3.9}$$

Remarque 3.3.
Dans le cas où $F \equiv 0$, le problème $QVI(K,F)$ se réduit au problème qui consiste à trouver un vecteur x^* point fixe de K : $x^* \in K(x^*)$.

Le théorème suivant qui est très utile en théorie des jeux non coopératifs assure l'existence d'une solution pour le problème $QVI(K,F)$ (sa démonstration repose sur l'inégalité de Ky-Fan et le théorème de point fixe de Kakutani).

Théorème 3.6.
Soit $F : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ une application, $K : \mathbb{R}^l \to 2^{\mathbb{R}^l}$ une correspondance.
Supposons qu'il existe un ensemble non vide, convexe et compact τ tel que :

1. $K(x) \subset \tau$.
2. F est continue sur τ.
3. K est continue à valeur non vide, convexe et fermé dans τ.

Alors le problème $QVI(K,F)$ admet au moins une solution.

La définition (3.1) peut être reformulée comme un problème d'inéquation quasi-variationnelle $QVI(X,F)$. En effet : $X(x) = X_i(x_{-1}) \times X_i(x_{-2}) \times \ldots\ldots \times X_i(x_{-n})$ avec : $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ avec

$$F(x) = \begin{pmatrix} \nabla_{x_1} f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla_{x_n} f_n(x) \end{pmatrix}$$

Notons que cette reformulation suppose que la fonction objectif f_i est continuement différentiable en x et elle est pseudo-convexe en x_i, ce qui est très commun et souvent satisfait dans les applications économiques travaillant avec le problème d'équilibre de Nash généralisé. La plupart du temps, elle apparaît quand les joueurs se partagent des resources disponibles en quantité limitée.

3.4 Application : problème d'équilibre de Nash généralisé

Depuis sa première formulation mathématique au $18^{ème}$ siècle, le problème de transport est l'un des problèmes les plus connus de la Recherche Opérationnelle. Dans le problème de transport classique, nous avons un transitaire qui transporte un bien donné des fabricants aux consommateurs tout en minimisant ses coûts de transport. M.Sc.Nathan Georg Sudermann-Merx [21] a étendu le problème de transport vers un scénario plus réaliste et il a introduit plusieurs transitaires comme illustré à la figure :

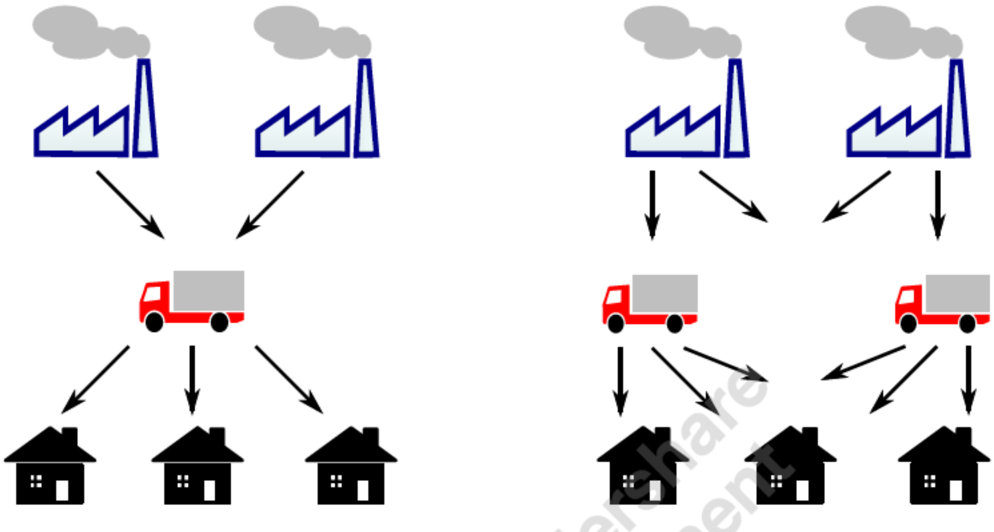

Figure : Le problème de transport classique du côté gauche et le problème de transport étendu du côté droit.

Dans le cadre résultant, chaque transitaire souhaite minimiser ses coûts de transport tout en partageant les contraintes d'offre et de demande avec les autres transitaires. C'est exactement la situation qui est abordée dans la théorie des jeux non coopératifs.

On peut donc s'interroger sur l'existence et le calcul des équilibres de Nash qui sont des configurations où aucun transitaire ne veut s'écarter de sa stratégie compte tenu de la décision des transitaires restants .

3.4.1 Modèle

Considérons n transitaires concurrents qui souhaitent transporter un bien de R fabricants à T consommateurs. Le fabricant r a une capacité de production $S_r \geq 0, r \in \{1, ..., R\}$ et le consommateur t a besoin d'au moins $D_t \geq 0, t \in \{1, ..., T\}$, unités de ce bien avec $\sum_{r=1}^{R} S_r = \sum_{t=1}^{T} D_t$. Le coût unitaire de transport du fabricant r au consommateur t par le transitaire $i \in \{1, ..., n\}$ est noté par C_{rt}^i et x_{rt}^i est défini comme le nombre d'unités transportées du fabricant r au consommateur t par le transitaire i . Chaque transitaire souhaite minimiser ses frais de transport compte tenu de la décision des transitaires restants, c'est le transitaire qui fait face au problème d'optimisation

$$\min_{x^i \in \mathbb{R}^{R \times T}} \sum_{r=1}^{R} \sum_{t=1}^{T} C_{rt}^i x_{rt}^i$$

Soumis à ses contraintes concernant l'approvisionnement :

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} x_{rt}^{l} = S_r, r \in \{1, ..., R\}$$

Ainsi que ses contraintes de demande :

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=1}^{R} x_{rt}^{l} = D_t, t \in \{1, ..., T\}$$

Et la condition de non-négativité :

$$x_{rt}^{i} \geq 0, \quad r \in \{1, ..., R\} \quad et \quad t \in \{1, ..., T\}$$

La recherche d'équilibres dans le problème de transport étendu conduit à un problème d'équilibre de Nash linéaire généralisé.

Hypothèse

Nous avons $D_t > 0$ pour au moins un $t \in \{0, ..., T\}$.
Afin d'obtenir une représentation claire du problème d'optimisation du joueur i, nous donnons la forme vectorielle suivante :

$$Q_i(x^{-i}) \begin{cases} \min\limits_{x^i \in \mathbb{R}^{R\times T}} < C^i, x^i > \\ Ax^i + \sum\limits_{j\neq i} Ax^j = b \\ x^i \geq 0 \end{cases}$$

Étant donné la decision x^i $(i \neq j)$ des joueurs restants avec :
$x^i = (x_{11}^i, ..., x_{1T}^i, x_{21}^i, ..., x_{2T}^i, ..., x_{R1}^i, ..., x_{RT}^i)^t \in \mathbb{R}^{R\times T}$
$C^i = (c_{11}^i, ..., c_{1T}^i, c_{21}^i, ..., c_{2T}^i, ..., c_{R1}^i, ..., c_{RT}^i)^t \in \mathbb{R}^{R\times T}$
$b = (s_1, ..., s_R, D_1, ..., D_T)^t \in \mathbb{R}^{R+T}$
et

$$A = \begin{pmatrix} e^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^T & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^T \\ I_T & I_T & \dots & I_T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(R+T)\times(R\times T)} .$$

Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et $e = (1, ..., 1)^t \in \mathbb{R}^T$ et I_T la matrice d'identité à dimension T .

Remarque 3.4.
Il est possible de représenter les contraintes dans le problème de transport étendu sous la forme suivante :

$$A^{ii}x^i + \sum_{j\neq i} A^{ij}x^j \leq b^i$$

Cependant, le modèle choisi permet un traitement explicite et épuré des contraintes d'égalité du $i^{ème}$ joueur et est donc préférable.

Notons que $Q_i(x^{-i})$ est resoluble pour tout $x^{-i} \in domX_i$ avec

$$domX_i = \left\{\ x^{-i} \in \mathbb{R}^{R\times T\times(N-1)} \quad : \exists\ x^i \text{ avec } Ax^i + \sum_{i\neq j} Ax^j = b, \quad x^i \geq 0\ \right\}$$

Puisque le problème de transport classique est resoluble cela implique que l'hypothèse suivante : Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et pour tout $x_{-i} \in domX_i$, le problème $Q_i(x^{-i})$ est resoluble, c'est à dire $Q_i(x^{-i})$ parcourt au moins un point optimal, est toujours valable dans le problème de transport étendu .

Dans la partie suivante, nous étudions le calcul numérique des équilibres de Nash dans le problème de transport étendu . Il est possible de calculer très efficacement un ensemble d'équilibres de Nash de dimension $(n-1)$, de sorte que la question se pose de savoir quel équilibre choisir dans les applications pratiques .

3.4.2 Calcul des équilibres de Nash

Il est possible de calculer très efficacement un ensemble d'équilibres de Nash de dimension de $(n-1)$ dans le problème de transport étendu en résolvant n problèmes d'optimisation linéaire comme nous le verrons par la suite. Avant cela, nous devons introduire quelques notions : Soit $y^i \in \mathbb{R}^{R\times T}$ un point optimal du problème d'optimisation du joueur i pour $x^{-i} = 0$, c'est à dire un point optimal de $Q_i(0)$. Ce point optimal existe puisque le problème de transport classique est resoluble.

En outre, définir les vecteurs :

$$\widehat{y^1} = \begin{pmatrix} y^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \widehat{y^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \ \widehat{y^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{R\times T\times n}$$

Et l'ensemble : $Y = conv(\widehat{y^1}, ..., \widehat{y^n})$.
On définit la dimension d'un ensemble convexe par la dimension de son enveloppe affine, c'est à dire, le plus petit sous-espace affine contenant Y.

Proposition 3.2.
Soit $D_t > 0$ pour au moins un $t \in \{0, T\}$ alors Y est un ensemble de dimension $(n-1)$.

Théorème 3.7.
Chaque élément de Y est un équilibre de Nash dans le problème de transport étendu .

Exemple 3.2.
Considérons le problème de transport étendu où nous avons deux fabricants produisant un bien qui est livré par deux transitaires à deux consommateurs, c'est à dire n= R= T= 2. Le premier fabricant offre une unité de ce bien et le second veut vendre deux unités. On pose donc $S_1 = 1$ et $S_2 = 2$, la demande du premier consommateur est donnée par $D_1 = 2$ et le deuxième consommateur a besoin de deux unités, c'est à dire $D_2 = 2$. De plus, les frais de transitaire $i \in \{1, 2\}$ sont données par C^i_{rt}. Les matrices des coûts $C^i = (C^i_{rt})$ sont données par :

$$c^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } c^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La forme vectorielle est donnée par :

$$c^1 = (1,2,2,1)^t, \quad c^2 = (2,1,1,2)^t, \quad b = (1,2,-2,-1).$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $x^* = (1,0,0,1,0,0,1,0)^t$ est un équilibre de Nash puisque le plan de transport :

$X^{*1} = (x^{*1}_{rt}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est optimal pour le joueur 1. Si le joueur 2 livre l'accord de $X^{*2} = (x^{*2}_{rt}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et vice versa .

De plus, les problèmes d'optimisation $Q_1(0)$ et $Q_2(0)$ ont les plans de transport optimaux uniques :

$$y^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; et \; y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

que nous n'avons pas vectorisés afin d'améliorer la lisibilité .

Ainsi, nous avons :

$$Y = \{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \\ 2\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \in R^{4\times 2} : \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}$$

Nous avons vu plus que la matrice $X^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est un équilibre de Nash de ce problème de transport étendu . Cependant, il est simple de voir que x^* n'est pas un élément de Y .

Comme nous l'avons vu dans l'exemple, il n'est pas possible de calculer chaque équilibre de Nash du problème de transport étendu en calculant l'ensemble Y, il est nécessaire d'appliquer des méthodes supplémentaires capables de calculer des équilibres de Nash arbitraires et pas seulement des équilibres dans Y .

Conclusion

A l'issue de l'étude réalisée dans le cadre de ce projet de fin d'étude, plusieurs remarques et constatations ont été enregistré concernant l'équilibre de Nash généralisé. Parmi ces constatations on peut citer :

Il existe plusieurs méthodes permettant de résoudre un problème d'équilibre de Nash généralisé alors que dans ce mémoire nous avons vu uniquement comment réduire ce problème à une inéquation variationnelle mais en perdant certaines solutions.

Le problème de transport étendu est un cas particulier du problème d'équilibre de Nash généralisé pour des fonctions linéaires, il reste à voir d'autre cas pour des fonctions quelconques.

Une méthode numérique s'avère nécessaire pour calculer les équilibres de Nash arbitraires, comme la méthode du sous-gradient projeté à l'aide d'une implementation Matlab

En perspective à ce qui a été réalisé, il est souhaitable d'étendre cette etude.

Bibliographie

[1] F. Achemine. *Cours de la théorie des jeux*. Université de Mouloud Mammeri, Tizi Ouzou, 2020.

[2] J.P. Aubin. *Analyse non linéaire et ses motivations économiques*. Paris, 1984.

[3] M. Bierlaire. *Introduction à l'optimisation differentiable*. Institut de mathématiques, ROSO, 2005.

[4] E. Bonzon. *Modélisation des interactions entre agents rationnels : Les jeux booleens*. PhD thesis, Université Paul Sabatier de Toulouse, 2007.

[5] C. Dutang. Existance theorms for generalised nash equilibrium problems : an analysis of assumptions. Technical report, Université de Strasbourg, France, 2013.

[6] N. Eber. *Théorie des jeux*. Dunod, Paris, 2 edition, 2007.

[7] Wood.M.K et Dantzig.G.B. Programming of interdependent activities. *General discussion, Econometrica*, 17 :193–199, 1949.

[8] Arrow.K.J et Debreu. Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 22 :265–290, 1954.

[9] Nesterov.Y et Nemirovsky.A. Interior point polynomial methods in convex programming : theory and algorithms. *SIAM, Philadelphia, USA*, 1994.

[10] Kuhn.H et Tucker.A.W. Non linear programming, proceeding of the second berkeley symposium on mathematical statistics and probability. *University of California press*, 1951.

[11] F. Facchinei and C. Kanzow. Generalised nash equilibrium problems. *Spring Verlag*, 5 :173–210, 2007.

[12] Y. Gabuthy. *Théorie des jeux coopératifs et non coopératifs*. Deboeck, Paris, 2018.

[13] Dantzig G.B. Linear programming and extensions. *Princeton university press, Princeton, USA*, 1963.

[14] J.F.Nash. Equilibrum point in n-person games. *PNAS*, 36 :48–49, 1950.

[15] J.F.Nash. Non cooperative games. *Annals of mathematies*, 54 :289–295, 1951.

[16] Fritz John. *Extremum problems with inequalities as side conditions*, volume Studies and essays, Courant anniversary. Wiley Interscience, New york, in k.o friedrichs, o.e.neugbauer et j.j.stoker edition, 1948.

[17] Karmakar.N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4 :373–395, 1984.

[18] Karush.W. Minima of functions of several variables with inequalities as side conditions. Master's thesis, University of Chicago, 1939.

[19] Khachiyan L.G. A polynomial algorithm in linear programming. *Doklay Akedamii Nauk SSSR (in Russian)*, 244 :1093–1096, 1979.

[20] L. Rodier. *Existence et calcul distribué d'équilibres dans les jeux de congestion généralisés*. PhD thesis, Université Paris-saclay, 2016.

[21] M.Sc.Nathan Georg Sudermann-Merx. *Linear Generalized Nash Equilibrium problems*. PhD thesis, 2016.

[22] Walras.L. Elements d'économie politique pure. *Corbaz, Lausanne*, 1874.