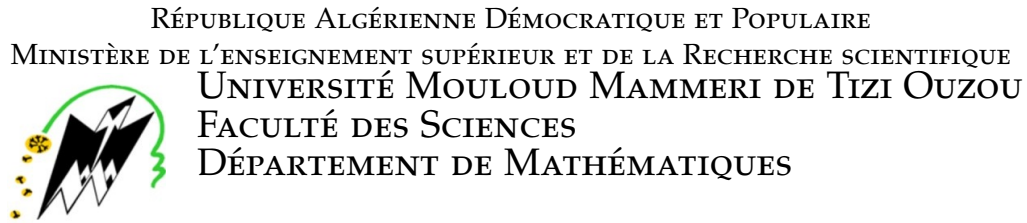


N° d'ordre:



MÉMOIRE DE MASTER

Filière : Mathématiques
Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par

OURIDA KADI

CONTRÔLE OPTIMAL D'UN MODÈLE HYBRIDE À COMMUTATION AUTONOME

Soutenu le 30 septembre 2023 devant le jury :

Mme. REZKI. FARIZA	UMMTO	Présidente du jury
Mme. HARRACHE. FAZIA	UMMTO	Examinatrice
Mme. ZIDELMAL. NACERA	UMMTO	Promotrice

Année Universitaire : 2022/2023

*Je dédie ce modeste travail
À mes chers parents,
À ma famille précieuse,
À tous ceux qui font partie de ma sphère personnelle et affective,
À toutes les personnes qui ont joué un rôle essentiel dans ma vie,
À toutes les personnes qui m'ont encouragé et qui ont contribué chacune à sa manière
à la réussite de mon projet
...*

REMERCIEMENTS

JE désire exprimer ma profonde gratitude envers le Créateur, qui a éclairé mon chemin vers la connaissance et m'a doté de la force ainsi que de la persévérance nécessaires pour mener à bien ce travail.

Je souhaite également adresser mes chaleureux remerciements à ma promotrice, Madame ZIDELMAL Nacera, qui a été une source d'orientation précieuse tout au long de ce parcours.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers les membres du jury qui ont accepté de consacrer leur temps à l'examen de mon travail, et je les remercie pour cet honneur.

Enfin, mes remerciements sincères vont à tous ceux qui, même s'ils n'étaient pas directement impliqués dans ce projet, ont toujours été un soutien précieux. Mes enseignants, ma famille, mes amis, chacun d'entre vous a joué un rôle important dans mon parcours, et je suis extrêmement reconnaissante.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	iv
TABLE DES FIGURES	vi
LISTE DES TABLEAUX	vi
INTRODUCTION	1
1 INTRODUCTION AU CONTRÔLE OPTIMAL	3
1.1 INTRODUCTION	3
1.2 FORMULATION GÉNÉRALE D'UN PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL	3
1.3 POSITION DU PROBLÈME	5
1.3.1 Types de problèmes de contrôle optimal	6
1.4 CONTRÔLABILITÉ	8
1.4.1 Ensemble accessible :	8
1.4.2 Cas des systèmes linéaires	9
1.4.3 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes	10
1.4.4 Contrôlabilité des systèmes non linéaires	11
1.5 MÉTHODES DE RÉOLUTION	12
1.5.1 Méthodes directes :	12
1.5.2 Méthodes indirectes :	12
1.6 LE PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRYAGIN :	14
1.6.1 Exemple :	15
CONCLUSION	18
2 LES SYSTÈMES DYNAMIQUES HYBRIDES	19
2.1 INTRODUCTION	19
2.2 DÉFINITIONS	20
2.2.1 Systèmes dynamiques	20
2.2.2 Variable discrète et variable continue	20
2.2.3 Systèmes continus et systèmes discrets	20
2.3 SYSTÈMES DYNAMIQUES HYBRIDES	23
2.3.1 Interactions entre les systèmes : phénomènes hybrides	23
2.3.2 Actions des phénomènes hybrides	23

2.3.3	Déclenchement des phénomènes hybrides	24
2.3.4	Exemple de phénomènes hybrides	24
2.4	DÉFINITION FORMELLE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES HYBRIDES	25
2.4.1	Définition[1] :	25
2.5	CLASSIFICATION DES SYSTÈMES DYNAMIQUES HYBRIDES :	25
2.5.1	Commutation autonome :	26
2.5.2	Commutation contrôlée :	27
2.5.3	Saut autonome :	28
2.5.4	Saut contrôlé	29
2.6	APPROCHES DE MODÉLISATION	29
2.6.1	Approche continue	29
2.6.2	Approche événementielle	29
2.6.3	Approche mixte	30
2.7	MODÉLISATION DES SYSTÈMES DYNAMIQUES HYBRIDES	30
2.7.1	Les automates hybrides	30
2.7.2	Les Réseaux de Petri	31
2.7.3	Modélisation des SDH par les systèmes à interface :	32
2.7.4	Formulation du problème de commande	35
2.7.5	Principe du maximum pour les SDH	36
	CONCLUSION	38
3	CONTRÔLE OPTIMAL À SYSTÈME DYNAMIQUE HYBRIDE À COMMUTATION AUTONOME	39
3.1	INTRODUCTION :	39
3.2	MODÈLE DE CHAUFFAGE INITIAL :	39
3.3	DU CHAUFFAGE AU REFROIDISSEMENT :	41
3.4	FONCTIONNEMENT D'UN THERMOSTAT DANS LE CAS DE RÉFROIDISSEMENT :	41
3.5	MODÉLISATION DU SYSTÈME ÉTUDIÉ :	42
3.6	AUTOMATE HYBRIDE ASSOCIÉ :	42
3.7	POSITION DU PROBLÈME LORSQUE LE CLIMATISEUR EST EN ÉTAT DE MARCHÉ :	43
3.8	APPLICATION DU PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRYAGIN	43
3.9	POSITION DU PROBLÈME LORSQUE LE CLIMATISEUR EST EN ARRÊT	45
3.10	RÉSOLUTION NUMÉRIQUE :	46
3.11	CONCLUSION	49
	CONCLUSION GÉNÉRALE	50
	BIBLIOGRAPHIE	51
	NOTATIONS	52

TABLE DES FIGURES

1.1	Destruction de vagues dans le bac	8
2.1	Systèmes à évènement Discret :une lampe	22
2.2	Système continu :l'objet sur convoyeur	22
2.3	Classification de Branicky.	26
2.4	Commutation autonome[2].	26
2.5	Système d'embrayage mécanique.	27
2.6	Saut autonome.	28
2.7	Modèle de la balle rebondissante.	28
2.8	Automate à états finis modèle d'une vanne[3].	31
2.9	Réseau de Petri d'une lampe torche	32
2.10	Modèle à interface d'Antasklis.	33
2.11	Schéma simplifié du système.	34
3.1	Schéma fonctionnel d'un thermostat d'ambiance à action tout-ou-rien équipé d'une résistance anticipatrice R [4].	40
3.2	Trajectoire de la température. [5].	41
3.3	L'automate hybride associé	43
3.4	Trajectoire de la commande	48
3.5	Trajectoire de la température	48

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Comparaison entre les méthodes directes et les méthodes indirectes . .	13
-----	--	----

INTRODUCTION GÉNÉRALE

DE nos jours, les systèmes automatisés font complètement partis de notre quotidien, ils ont pour but d'améliorer notre qualité de vie et de faciliter certaines tâches. L'automatique s'est intéressé dès ces origines à l'étude de la commande des systèmes physiques généralement représentés par un modèle dynamique continu, ou par un modèle à événements discrets. Cependant, l'application de méthodes rigoureuses pour traiter les aspects continus d'une part et les aspects discrets d'autre part ne saurait pas garantir la qualité du système global tant que les interactions entre ces deux aspects ne sont pas prises en compte. Donc le mixage des deux types de composantes de nature différente a donné une nouvelle catégorie de système dynamique dite Hybride. Cette catégorie de système se caractérise par l'interaction de la partie continue décrite par les équations différentielles et de la partie discrète, représentée par les automates à états finis ou des réseaux de Pétri.

Le contrôle optimal entre en jeu et vise à trouver les stratégies de contrôle qui optimisent les performances d'un système en maximisant ou en minimisant une certaine fonction objectif tout en respectant des contraintes spécifiées. Dans le contexte des systèmes dynamiques hybrides ; le contrôle optimal devient plus délicat car il doit prendre en compte à la fois les actions continues pour les composantes continues et les commutations de mode discret pour les transitions.

La résolution de ces problèmes de contrôle des SDH nécessite l'utilisation de méthodes mathématiques avancées, telle que la programmation dynamique, les algorithmes génétiques, les méthodes de tir optimale, et bien d'autres.

Dans le cadre de ce travail on s'est intéressé à l'application de la théorie du contrôle optimal à un système dynamique hybride . L'exemple étudié est un climatiseur basé sur un modèle hybride avec commutation autonome. L'objectif de cette modélisation est d'optimiser le fonctionnement de la climatisation pour un confort et une efficacité énergétique.

Ce document est composé de trois chapitres, qui sont organisé comme suit :
Le chapitre 1 : Présente des généralités sur le contrôle optimal, les conditions d'existence des solutions optimales, ainsi que les conditions nécessaires d'optimalité déduites en utilisant le principe du maximum de Pontryagin [6, 7, 8, 9].

Le chapitre 2 : Consiste à présenter les SDH. Une classification des systèmes est proposée par M.S Braincky. Chaque classe est illustrée par un exemple. Ainsi que les moyens de modélisations de ces systèmes [10, 4, 11, 12, 1, 13, 3, 2].

Le Chapitre 3 : Il constitue la partie essentielle; c'est la modélisation d'un système dynamique hybride à commutation autonome[4, 5].

Enfin, nous terminons ce travail par une conclusion générale dans laquelle nous allons récapituler l'essentiel de nos résultats.

INTRODUCTION AU CONTRÔLE OPTIMAL



1.1 INTRODUCTION

La théorie du contrôle optimal est le prolongement du calcul variationnel. Elle a pris naissance durant les années 1940. Cette théorie vise à analyser les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard... Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie... L'objectif de la théorie de contrôle peut être : de stabiliser le système, c'est-à-dire le rendre insensible à des perturbations ; c'est ce qu'on appelle la stabilisation, ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation. Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles (décrivant les taux de variation), des équations intégrales (décrivant les cumuls), des équations aux différences finies (utilisées dans des systèmes échantillonnés), des équations aux dérivées partielles (pour des systèmes continus en plusieurs dimensions), des équations stochastiques (pour des systèmes avec des incertitudes), etc. Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques. Les contrôles sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes.

1.2 FORMULATION GÉNÉRALE D'UN PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL

Lors de leurs fonctionnements, les processus physiques consomment de l'énergie. L'objectif est alors de minimiser cette dépense. Une fois qu'on a déterminé la modélisation mathématique on obtient un système comportant beaucoup de variables et de paramètres.

Nous présentons dans ce qui suit quelques notations et définitions importantes pour la suite de ce travail.

- Les variables nommées variable d'état notée x_i ; $i = 1 \dots n$. Dans le cas des systèmes qui évoluent dans le temps, les x_i sont des fonctions de temps notées : $x_i(t), t \in [0, T]$
- Les composantes du contrôle seront notées $u_j(t)$; $j = 1, \dots, m$, elles doivent être intégrables par rapport à t .
- les n variables d'états vont être gouvernées par n équations différentielles du premier ordre nommées équations d'états de la forme :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(t, x, u) \quad (1.1)$$

où :

$\dot{x}(t)$: loi d'évolution.

$x(t) \in X$ l'état du système à l'instant $t \in [0, T]$.

T : l'instant final.

$u(t) \in U$: la commande choisie.

Classe des commandes admissibles

L'ensemble U est l'ensemble des commandes admissibles qui peut être borné, non borné ou du type Bang-Bang.

Commande bornée :

La commande $u_j(t)$ est dite commande bornée si elle peut être minorée et majorée par des constantes a_j et b_j par la forme suivante :

$$a_j \leq u_j(t) \leq b_j, \quad j = 1..m, \quad t \in [0, T]$$

Commande Bang Bang :

Un contrôle $u \in U$ est appelé un contrôle de Bang Bang si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1, \dots, m$ on a :

$$|u_j(t)| = 1$$

1.3 POSITION DU PROBLÈME

Un problème de contrôle optimal se formule comme suit :

$$J(x, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \text{opt} \quad (1.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \in M_0 \\ x(T) = x_1 \in M_1 \\ u \in U, t \in I = [0, T] \end{array} \right.$$

où :

- $J(x, u)$ est le critère à optimiser .
- $x(t_0) = x_0$ est la position initiale du système dynamique .
- $x(T) = x_1$ est la position finale du système.
- M_0 est l'ensemble de départ.
- M_1 est l'ensemble de d'arrivé.
- $u(t)$ est la commande du problème de contrôle optimal.
- U est l'ensemble des applications mesurables localement bornées à valeurs dans l'ensemble non vide $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.
- $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 dépend de x (variables d'état) et de u (variable de contrôle).
- $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: c'est le coût terminal qui est une fonction continue dépend de T et $x(T)$.

L'objectif de la commande consiste à conduire un système dynamique contrôlé d'une position initiale $x_0 = x(0)$ ($x_0 \in M_0$) à une autre position finale souhaitée $x_1 = x(T)$ ($x_1 \in M_1$), tout en minimisant ou maximisant un certain coût. Ou bien optimiser le fonctionnement d'un système en fonction de coût, ou de stabiliser un système pour le rendre insensible à certaines perturbations.

1.3.1 Types de problèmes de contrôle optimal

On distingue trois problèmes importants :

Problème de Mayer Lagrange

Le problème est défini comme suit :

$$J(x, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow opt$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(t_0) = x_0, \\ x(T) = x_1, \\ u \in U, t \in [0, T] \end{cases}$$

Exemple :

$$J(x, u) = -x(1) + \int_0^1 u(t)^2 dt \rightarrow min$$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = u(t), \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0, \\ t \in [0, 1], u \in R \end{cases}$$

Problème de Lagrange

C'est un problème où le coût terminal est nul, c-à-d le critère à optimiser est égal à :

$$J(x, u) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow opt$$

Exemple :

$$J(x, u) = 1/2 \int_0^1 u(t)^2 dt \rightarrow min$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 + u(t), \\ x(0) = 0, x(1) = 2 \\ u \in R, t \in [0, 1] \end{cases}$$

Problème de Mayer

Ce problème dépend uniquement de la valeur terminale de l'état de contrôle du système c-à-d :

$$f^0 = 0$$

Donc, le critère à optimiser est :

$$J(x, u) = g(T, x(T))$$

Exemple :

$$\begin{cases} J(x, u) = x_1(T) + T \rightarrow \min \\ \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \\ x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_2(T) = 0 \\ |u(t)| \leq 1, t \in [0, T] \end{cases}$$

1.4 CONTRÔLABILITÉ

Le problème de contrôlabilité est de savoir avant de déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible si cette dernière est admissible en d'autres termes ;

« Étant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, existe-t-il un contrôle u tel que la trajectoire associée à ce contrôle joigne x_0 à x_1 en un temps fini T ? »

Exemple : Destruction de vagues dans le bac

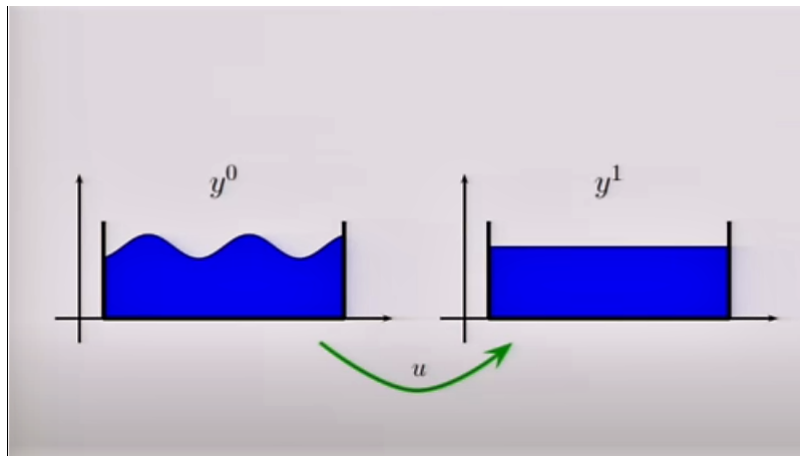


FIGURE 1.1 – Destruction de vagues dans le bac .

En déplaçant le bac de façon convenable, on veut arriver à la même position mais sans vagues ; autrement dit : existe-t-il un u qui va permettre de faire passer l'état du système de y_0 à y_1 en un temps fini ?.

La notion de la Contrôlabilité a été inventée en 1960 par Kalman à propos des systèmes linéaires de la forme $\dot{x} = Ax + Bu$. L'état x évolue dans un espace vectoriel réel E , de dimension n .

On dit que $\dot{x} = Ax + Bu$ est contrôlable, si l'on peut joindre deux points de l'espace d'état ; c'est à dire , étant donné deux points $x_0, x_1 \in E$ et deux instants t_0, t_1 avec $t_0 < t_1$, il existe une commande u , définie sur $[t_0, t_1]$ tel que : $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$.

1.4.1 Ensemble accessible :

Considérons le système dynamique suivant :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, T] \quad (1.3)$$

— L'ensemble des points ou des extrémités des solutions du système accessible à

partir de x_0 en temps final T en faisant varier u , est défini par :

$$Acc(x_0, T) = x_u(T), u \in U$$

où : $x_u(\cdot)$ est la solution du système (1.3) associée au contrôle u .

— Le système de contrôle (1.3) est dit contrôlable en un temps T si :

$$Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n$$

c'est à dire : $\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, \exists u \in U$ telle que la trajectoire $x(t)$ associée à $u(t)$ relie x_0 à x_1 en un temps T fini .

1.4.2 Cas des systèmes linéaires

Définition[9] :

Soit le système de contrôle linéaire suivant :

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), x(0) = x_0, t \in I = [0, T] \quad (1.4)$$

Avec :

A, B et r trois applications localement intégrales sur I à valeurs respectivement dans $M_n(\mathbb{R}), M_{n,m}(\mathbb{R}),$ et \mathbb{R} . L'ensemble des contrôles u considérés est l'ensemble des applications mesurables localement bornées sur I à valeurs dans un sous ensemble $U \subset \mathbb{R}$. où : I est un intervalle de \mathbb{R} .

Soit $M(\cdot) : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, la résolvante du système linéaire homogène $\dot{x} = A(t)x(t)$ est définie par

$$\begin{cases} \dot{M}(t) = A(t).M(t) \\ M(0) = id \end{cases}$$

Pour tout contrôle u le système $\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t); x(0) = x_0$ admet une unique solution $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue donnée par :

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^T [M(t)M(s)^{-1}B(s)u(s) + r(s)] ds, t \in [0, T] \quad (1.5)$$

Si $r=0$ et $x_0 = 0$, alors la solution du système s'écrit :

$$x(t) = \int_0^T [M(t)M(s)^{-1}B(s)u(s)] ds \quad (1.6)$$

Condition générale pour la contrôlabilité des systèmes linéaires

le théorème suivant donne une condition générale pour la contrôlabilité des systèmes linéaires :

Théorème[6] : Le système (1.4) est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice :

$$C(t_f) = \int_0^T M(t)^{-1} B(t) B'(t) M(t)^{-1} dt \quad (1.7)$$

dite matrice de contrôlabilité, est inversible.

$B'(t)$ est la transposée de $B(t)$ et $M^{-1}(t)$ est l'inverse de $M(t)$.

1.4.3 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

Définition

le système :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$$

est dit autonome si les matrices A et B ne dépendent pas de t.

Dans ce cas, la matrice $M(t) = e^{tA}$. La solution du système associée au contrôle u s'écrit, pour tout $t \in I$:

$$x(t) = e^{tA}(x_0 + \int_0^T e^{-As} B(u) + r(s)) ds$$

Contrôlabilité des systèmes linéaires autonome sans contraintes sur le contrôle

Théorème[6] :

Le système autonome :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$$

Est contrôlable (en temps T quelconque, depuis un point initial quelconque) si et seulement si la matrice

$$C = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

est de rang n

avec A et B deux matrices constantes sur $[0, T]$

Remarque :

La matrice C est appelée matrice de Kelman, et la condition rang C = n est appelée condition de Kelman.

Exemple

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + 2u \end{cases}$$

Nous avons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$n = 2$$

La matrice de Contrôlabilité est :

$$C = (B, AB) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice est :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

et donc :

$$\text{rang}C = 2 = n$$

Donc le système est contrôlable .

Contrôlabilité d'un système autonome avec contraintes sur le contrôle

C'est à dire u appartient à un sous ensemble $U \subset \mathbb{R}^m$. Les propriétés de contrôlabilité globale sont reliées aux propriétés de stabilité de la matrice A . Il est clair que si[7] :

- La condition de Kalman est vérifiée.
- $r = 0$ et $0 \in U$.
- Toutes les valeurs propres de la matrice A sont de partie réelle strictement négative.

Alors tout point de \mathbb{R}^n peut être conduit à l'origine en temps fini.

1.4.4 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Les systèmes non linéaires sont plus difficiles à étudier que les systèmes linéaires. Néanmoins, en linéarisant (quand c'est possible) un système non linéaire autour d'un point d'équilibre ou d'une trajectoire, on obtient un système linéaire qui représente correctement le système non linéaire au voisinage de ce point d'équilibre ou de cette

trajectoire.

L'extension de la contrôlabilité au cas non-linéaire de dimension finie et de dimension infinie a suscité depuis près de cinquante ans une littérature considérable, qui n'a en rien épuisé ce sujet riche et varié. Les auteurs, dans leur quasi-totalité, ont considéré des généralisations naturelles de : $\dot{x} = Ax + Bu$ Le résultat suivant donne une condition sur la contrôlabilité locale des systèmes non linéaires [9] :

Proposition[6] :

Considérons le système $\dot{x} = f(t, x(t), u(t)); x(0) = x_0$; avec $f(x^0, u^0) = 0$. On note :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, u^0) \text{ et } B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^0, u^0)$$

Si $\text{rang } C = [B, |AB|, \dots, |A^{n-1}B|] = n$, alors le système est localement contrôlable en x^0 . En général, le problème de contrôlabilité globale est difficile. Cependant, il existe des techniques qui permettent de déduire la contrôlabilité locale dans le cas des systèmes non linéaires.

1.5 MÉTHODES DE RÉOLUTION

On trouve deux méthodes numériques pour résoudre les problèmes de contrôle optimal [6] :

1.5.1 Méthodes directes :

Les méthodes directes consistent à discrétiser l'état et le contrôle, et elle réduisent le problème à un problème d'optimisation non linéaire (programmation non linéaire, ou "nonlinear programming"). La méthode utilisée est la méthode de Discrétisation totale (tir direct).

1.5.2 Méthodes indirectes :

Les méthodes indirectes consistent à dériver les conditions d'optimalité, en utilisant soit le principe du maximum de pontryagin, soit en utilisant la programmation dynamique basée sur le principe de Bellman ; les méthodes utilisées sont :

- la méthode de tir simple.
- tir multiples.

Le tableau suivant résume les caractéristiques des méthodes directes et indirectes[9] :

Méthodes directes	Méthodes indirectes
Mise en œuvre simple, sans connaissance a priori de la solution	Connaissance a priori de la structure de la trajectoire optimale
Facilité de la prise en compte des contraintes sur l'état	Difficulté théorique de la prise en compte de contraintes sur l'état
Précision numérique basse ou moyenne	Très grande précision numérique
Efficace en base ou moyenne	Efficaces en toute dimension
Gourmandise en mémoire	Calculs parallélisables
Peu sensible au choix de la condition initiale	Très sensibles au choix de la condition initiale

TABLE 1.1 – Comparaison entre les méthodes directes et les méthodes indirectes

Quelle méthode choisir ?

On utilisera la méthode directe si :

- on a pas besoin d'une grande précision de calcul .
- la dimension de l'espace est assez petite
- on n'a aucune idée a priori de la trajectoire optimale recherchée, par exemple on ne sait rien sur la structure des commutations.
- on veut introduire facilement des contraintes sur l'état.

On utilisera plutôt une méthode indirecte

- si la dimension de l'espace est assez grande.
- si on a besoin de calculer la trajectoire optimale de manière très précise.
- dans un deuxième temps, après avoir appliqué une méthode directe qui a donné une première approximation de la solution optimale.

1.6 LE PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRYAGIN :

La version forte suivante du principe du maximum de Pontryagin (PMP) est très générale, puisqu'elle est valide pour des systèmes différentiels généraux et qu'elle prend en compte des contraintes sur le contrôle.

On considère le système contrôlé dans \mathbb{R}^n

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (1.8)$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 , et les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle $[0, T_e(u)[$ de \mathbb{R}^+ et à valeurs dans $U \subset \mathbb{R}^m$. Par ailleurs on définit le coût

$$J(T, u) = \int_0^T f^0(s, x(s), u(s)) ds + g(T, x(T))$$

où $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 , et $x(\cdot)$ est la trajectoire solution de (1.8) associée au contrôle u .

On considère le problème suivant : Déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 (autrement dit telle que $x(0) \in M_0$ et $x(T) \in M_1$ en minimisant le coût. Le temps final peut être fixé ou non.

si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[0, T]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial, et tels que, pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \end{aligned}$$

Où $H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u)$ est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, T]$

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, v) \quad (1.9)$$

Si de plus le temps final pour joindre la cible M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final T.

$$\max H(T, x(T), p(T), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)).$$

Condition de transversalité :

Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) \in M_0$ et $x(T) \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux)

$$p(0) \perp T_{x(0)}M_0$$

et

$$p(T) - p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x(T)}M_1$$

De plus,

- Si M_0 (resp. M_1) est réduit à un élément, cela n'impose aucune condition de transversalité sur $p(0)$ (resp. $p(T)$).
- Si $M_0 = \mathbb{R}^n$ (resp. $M_1 = \mathbb{R}^n$), alors, cela impose la condition $p(0)=0$ (resp. $p(T) - p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T))=0$)

Remarque 1 :

Lorsqu'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle, la condition de maximum (1.9) devient : $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$

Remarque 2 :

La convention $p_0 \leq 0$ conduit au principe du maximum. La convention $p_0 \geq 0$ conduirait au principe du minimum. La condition (1.9) serait une condition de minimum[6].

1.6.1 Exemple :

Une banque possède au temps t une quantité d'argent $x(t)$; soit $u(t)$ la quantité à réinvestir au temps $T \geq 0$ avec $0 \leq u(t) \leq 1$.

La dynamique de la banque est donnée par :

$$\dot{x}(t) = u(t)x(t)$$

$$x(0) = x_0$$

$$0 \leq t \leq T$$

où $x_0 > 0$ est la quantité d'argent possédée au temps $T=0$ et T la période du temps désignée. (T est fixé : c'est le nombre d'années).

le bénéfice de la banque est égal à :

$$J(u(t)) = \int_0^T (1 - u(t))x(t)dt \rightarrow \max$$

Déterminer la commande optimale c'est à dire le meilleur investissement sur la période de temps $[0, T]$ pour avoir un bénéfice maximale .

Application du principe du maximum

Le hamiltonien du problème s'écrit :

$$H(t, x, p, p^0, u) = (1 - u)x + p(t)u(t)x(t)$$

et

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\dot{p}(t) = -1 + u(1 - p)$$

comme le point final $x(T)$ est libre alors on a la condition de transversalité : $P(T)=0$.

et la condition de maximisation :

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{0 \leq u \leq 1} H(t, x(t), p(t), p^0, v)$$

$$\max H = \max_{0 \leq u \leq 1} (x - ux + pux)$$

$$\max H = x + \max_{0 \leq u \leq 1} (ux(p - 1))$$

comme $x(t) > 0$ alors

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } p(t) < 1 \\ 1 & \text{si } p(t) > 1 ; t \in [0, T] \end{cases}$$

De la condition $P(T)=0$ et de la continuité de $P(t)$, $\exists V(t) = [t_c, T] / P(t) < 1$; et t_c c'est le temps de commutation.

on aura donc :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [t_c, T] \\ 1 & \text{si } t \in [0, t_c[\end{cases}$$

Sur $[0, t_c[$, $u = 1$, alors

$$\dot{p} = -p$$

et donc

$$p(t) = \lambda \exp^{-t}$$

Sur $[t_c, T]$, $u = 0$, alors

$$\dot{p} = -1$$

et donc

$$p(t) = -t + C_1$$

Et comme on a

$$P(T) = 0$$

on aura

$$C_1 = T$$

ce qui fait

$$P(t) = T - t$$

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_c, T], P(t) \leq 1 &\Rightarrow T - 1 \leq 1 \\ &\Rightarrow t \leq T - 1 \\ &\Rightarrow T - 1 \leq t \leq T \end{aligned}$$

et donc

$$t_c = T - 1$$

la commande optimale :

$$u^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, T - 1[\\ 0 & \text{si } t \in [T - 1, T] \end{cases}$$

La trajectoire optimale :

Pour $u = 1, [0, T - 1[$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(t) \\ x(t) &= x_0 \exp^t \end{aligned}$$

Pour $u=0, [T - 1, T]$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0 \\ x(t) &= C \\ x(T - 1) = C &\Rightarrow x(t) = x_0 \exp^{T-1} \end{aligned}$$

$$x^0(t) = \begin{cases} x_0 \exp^t & \text{si } t \in [0, T - 1[\\ x_0 \exp^{T-1} & \text{si } t \in [T - 1, T] \end{cases}$$

Pendant la période $[0, T - 1[$ la banque devrait investir pleinement ($u = 1$), ce qui signifie qu'elle réinvestit la totalité de l'argent disponible à chaque instant. La quantité d'argent $x(t)$ augmente de manière exponentielle.

Pendant $[T - 1, T]$ un an avant la fin de la période, la banque devrait cesser tout investissement ($u = 0$). La quantité $x(t)$ reste constante à une valeur donnée; qui signifie que la banque conserve l'argent sans le réinvestir.

Et donc la meilleure stratégie d'investissement consiste à investir pleinement pendant la période $[0, T - 1]$ et à cesser tout investissement un an avant la fin de la période c'est-à-dire sur l'intervalle $[T - 1, T]$.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Dans ce chapitre, on a introduit les principes fondamentaux de la théorie du contrôle optimal. Dans un premier temps on a commencé par établir une base pour comprendre la théorie du contrôle optimal. Par la suite on a parlé de la notion de contrôlabilité, des méthodes de résolutions d'un problème de contrôle. A la fin on a abordé le PMP; un concept clé en contrôle, et pour mieux comprendre le principe on a présenté un exemple.

2.1 INTRODUCTION

L'histoire de la recherche sur les SDH remonte au moins à l'étude des systèmes d'ingénierie contenant des relais et / ou une hystérésis dans les années 1960. Les systèmes hybrides ont commencé à attirer sérieusement l'attention des chercheurs en contrôle et en informatique au début des années 1990. Principalement en raison de mise en œuvre de microcontrôleurs numériques et d'équipements embarqués[10].

Les SDH contiennent des dynamiques hétérogènes qui interagissent les unes avec les autres et déterminent conjointement les comportements des systèmes dans le temps. Par dynamique hétérogène, nous entendons deux types différents de dynamique : une dynamique à variable continue pilotée par le temps, dont les évolutions sont typiquement gouvernées par des lois physiques et sont décrites par des équations différentielles ; et une dynamique à variables discrètes, dont l'évolution dépend des règles de type « if-then-else », généralement décrites par des automates ou des réseaux de Petri. Ces deux types de dynamique interagissent entre eux et génèrent des comportements dynamiques complexes, tels que le changement une fois que la valeur d'une variable continue passe par un seuil et un saut d'état lorsque un certain événement discret se produise[10].

Ces systèmes dynamiques hybrides sont omniprésents et peuvent être trouvés dans les systèmes de fabrication, les usines chimiques, la gestion du trafic, les réseaux électriques et les systèmes de communication. Et non seulement dans les systèmes artificiels créés par l'homme, mais également dans les systèmes naturels ; si on prend l'exemple des réseaux de régulation des gènes à l'intérieure de nos cellules sont de nature hybride, car les processus de traduction et de transcription des gènes se produisent en continu, tandis que l'activation ou la désactivation de gènes particuliers est discrète[10].

L'objectif de ce chapitre est de préciser ce que l'on veut entendre par « système hybride » on va donner donc en première partie quelques définitions puis on va introduire une classification des SDH, et on va présenter les différents moyens de modélisation de ces SDH.

2.2 DÉFINITIONS

Comme les systèmes de contrôle hybrides sont des systèmes de contrôle qui impliquent à la fois des variables à valeurs continues et des variables discrètes; donc avant de donner une définition formelle des SDH, on va citer quelques notions préliminaires nécessaires pour la compréhension de la suite de ce travail.

2.2.1 Systèmes dynamiques

En mathématiques, en chimie ou en physique, un système dynamique est la donnée d'un système et d'une loi décrivant l'évolution de ce système. Ca peut être l'évolution d'une réaction chimique au cours du temps, le mouvement des planètes dans le système solaire (régé par la loi universelle de la gravitation de Newton) ou encore l'évolution de la mémoire d'un ordinateur sous l'action d'un programme informatique. Formellement on distingue les systèmes dynamiques à temps discrets (comme un programme informatique) des systèmes dynamiques à temps continu (comme une réaction chimique).

2.2.2 Variable discrète et variable continue

Variable discrète

Une variable est dite discrète si elle peut prendre ses valeurs dans un ensemble dénombrable de valeurs. Les variables $V_1 \in \{0, 1\}$, $V_2 \in \{-4, 1, 3\}$, $N \in \{B, M, H\}$, $P \in \{Arret, Demarrer, Repos\}$, sont des variables d'état discrètes.

Variable continue

Une variable est dite continue si elle peut prendre ses valeurs dans un ensemble continu de valeurs (donc non dénombrable) et ses variations ne présentent pas de discontinuités.

2.2.3 Systèmes continus et systèmes discrets

Systèmes discrets

Les systèmes dynamiques discrets sont modélisés par des variables d'états discrètes qui prennent leurs valeurs dans un ensemble fini de valeurs (entier, booléen..). Dans le temps discret on distingue deux cas : les systèmes échantillonnés et les systèmes à événement discret c'est à dire lorsque les instants sont réglés par une horloge (synchrone) on dit que ces systèmes sont échantillonnés et lorsque sont asynchrone on définit les systèmes à événement discret. Ces systèmes à événement discret peuvent être modélisé par des automates, et des réseaux de pétri.

Les automates à états finis sont décrits par un triplet (Q, Σ, G) où Q est un ensemble

fini dont les éléments q sont les états discrets. Σ est l'ensemble des évènements et G est une fonction de transition. La fonction de transition définit le prochain état discret :

$$q^+ = G(q, \sigma)$$

où : σ c'est l'évènement qui se produit. Il déclenche une transition d'état.

Et q^+ se rapporte à l'état discret après la transition qui est due à l'occurrence de l'évènement σ .

Systemes continus

Un système dynamique à temps continu est caractérisé par une évolution continue de ses variables ou états en fonction du temps. Ces variables peuvent prendre une infinité de valeurs, c'est à dire $X \subset \mathbb{R}^n$ avec l'ensemble X est l'espace d'état. Pour un système continu, les dynamiques sont décrites par des équations différentielles et peuvent être définit comme suit : Le système dynamique d'état continu et de temps continu est décrit par un triplet (X, U_c, F) où l'ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est l'espace d'état, $U_c \subset \mathbb{R}^c$ est l'ensemble des commandes continues, et $F : X \times U_c \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteur décrivant la dynamique du système :

$$\dot{x}(t) = F(x(t), U_c(t), t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

avec $x \in X$ étant les variables d'états, $u_c \in U_c$ les commandes continues.

Exemple :

Une lampe torche comme présentée sur la figure (2.1) n'a que deux états : allumée ou éteinte. La lampe passe de l'état éteinte à allumée s'il y a eu l'évènement « allumer », et passe de l'état allumée à éteinte lorsqu'il y a eu l'évènement « éteindre ».

La figure (2.2) représente un convoyeur sur lequel à tout moment, un objet peut être déplacé entre 2 positions : 0m et 2m, ceci est un système continu[12].

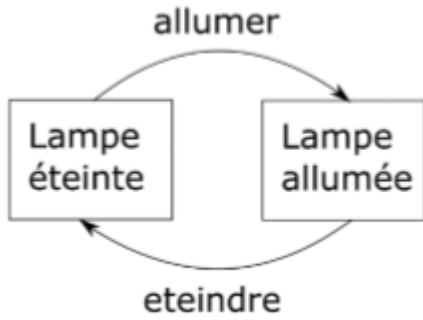


FIGURE 2.1 – Systèmes à évènement Discret :une lampe

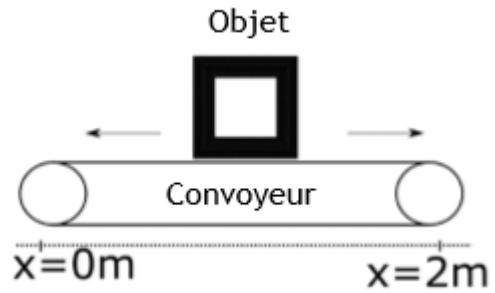


FIGURE 2.2 – Système continu :l'objet sur convoyeur

2.3 SYSTÈMES DYNAMIQUES HYBRIDES

Les systèmes dynamiques hybrides sont des systèmes dynamiques faisant intervenir explicitement et simultanément des phénomènes ou des modèles de type dynamique continu et discret. Ce terme hybride se réfère au couplage essentiel de phénomènes continus et discrets au sein d'un système dont l'évolution au cours du temps est décrite par un ensemble des lois mathématiques qui peuvent être de natures continues au sens classique des équations différentielles ou équations aux différences soumis aux éléments décisionnels discrets ou événementiels. La première formulation unitaire des concepts concernant les systèmes hybrides a été proposée par M.S Branicky. Ses travaux ont permis d'établir une classification de ces systèmes.

2.3.1 Interactions entre les systèmes : phénomènes hybrides

Comment se produisent les interactions entre les deux sous systèmes (continu et discret) qui forment le SDH ?

Pour cela, nous allons présenter les actions discrètes qui peuvent intervenir lors de l'évolution d'un système continu décrit par un système différentiel de la forme :

$$\dot{x}(t) = \zeta(t), \text{ pour } t \geq 0,$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$: est le vecteur d'état du système .

On note τ l'instant où intervient une action discrète dont nous verrons comment elle peut être déclenchée l'ensemble action et déclenchement est appelé phénomène hybride[1] .

2.3.2 Actions des phénomènes hybrides

Les actions des phénomènes hybrides sur le système continu sont de deux types[1] :

- Les phénomènes hybrides agissent sur la dynamique du système continu, modifiant ainsi cette dynamique. Le système hybride se situe alors pour $t \geq \tau$ dans un autre mode de fonctionnement. On appelle ce phénomène commutation de modèle et τ instant de commutation. Un exemple simple de modèle formel avec deux modes de fonctionnement est le suivant :

$$\dot{x}(t) = \zeta_1(t), \text{ pour } t < \tau,$$

$$\dot{x}(t) = \zeta_2(t), \text{ pour } t \geq \tau.$$

- Les phénomènes hybrides agissent également sur le vecteur d'état du système, le faisant évoluer de manière différente pour $t = \tau$. Une discontinuité apparaît alors sur le vecteur d'état. On appelle ce phénomène saut de l'état. Un exemple de modèle formel est représenté par les équations suivantes[1] :

$$\dot{x}(t) = \zeta(t), \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } t \neq \tau$$

$$x(\tau) = g(\cdot, \tau)$$

Les deux actions peuvent être couplées. En effet, on peut considérer qu'à l'instant τ , on a une commutation de modèle et saut du vecteur d'état. Un exemple de modèle formel est le suivant[1] :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \zeta_1(t), \text{ pour } t \leq \tau, \\ x(\tau) &= g(\cdot, \tau), \\ \dot{x}(t) &= \zeta_2(t), \text{ pour } t > \tau.\end{aligned}$$

où :

$\dot{x}(t)$: l'évolution de l'état du système continu au fil du temps.

$\zeta(t)$: la fonction qui décrit la dynamique du système continu.

τ : le temps de commutation. $x(\tau) = g(\cdot, \tau)$: l'équation représente un saut de l'état du système à l'instant τ .

La fonction g provoque une discontinuité de l'état à l'instant τ , puis intervient la deuxième dynamique continue ζ_2 .

2.3.3 Déclenchement des phénomènes hybrides

L'action du phénomène hybride, comme le passage d'un mode de fonctionnement à un autre est déclenché par un événement. Ces événements sont alors classés en deux types :

- Les événements déclenchés lorsque le vecteur d'état continu atteint certaines valeurs, provoquant ainsi un phénomène hybride dit autonome.
- Les événements déclenchés par une commande discrète externe, provoquant un phénomène hybride dit contrôle.

2.3.4 Exemple de phénomènes hybrides

Une boîte à vitesse automatique est un exemple de système complexe où sont présents les différents déclenchements et actions des phénomènes hybrides.

On considère comme variables discrètes les trois vitesses v_1 , v_2 , et v_3 et deux modes de conduite : ville avec les vitesses autorisées v_1 , et v_2 et route où toutes les vitesses sont disponibles.

Le nombre de tours par minutes du moteur est noté $N(t)$ est la variable continue du système ; dont la dynamique est représentée par une équation différentielle.

Le passage d'une vitesse à une autre lorsque $N(t)$ atteint certaines valeurs correspond à un phénomène hybride déclenché de manière autonome. Tandis que le passage d'un mode de conduite à un autre est décidé par le conducteur, cela correspond à un phénomène hybride contrôlé.

Ces deux phénomènes agissent sur la variable continue $N(t)$; en effet lorsqu'on change de vitesse le nombre de tours par minute du moteur est réinitialisé on a un saut de l'état et à chaque vitesse correspond une dynamique différente on a donc également une commutation de modèle[1].

2.4 DÉFINITION FORMELLE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES HYBRIDES

Nous proposons la définition formelle des systèmes dynamiques hybrides suivants :

2.4.1 Définition[1] :

Soit $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n$, $q(t) \in Q \subset \mathbb{N}^m$, $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^c$, $v(t) \in \Omega_c \subset \mathbb{N}^d$ et $t \in \mathbb{R}^+$ où n, m, c, d sont donnés.

L'ensemble X représente l'ensemble des états continus et l'ensemble Q représente l'ensemble des états discrets. L'ensemble U représente l'ensemble des commandes continues et l'ensemble Ω_c représente le sous-ensemble d'un espace discret de dimension d (\mathbb{N}^d). La variable t représente le temps .

Soit $S = X \times Q$ et soit P un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n \times Q$. On définit l'état hybride $s(t) \in S$ du système à l'instant t par la donnée du couple $[x(t), q(t)]$ et on appelle SDH un système dynamique décrit par les équations suivantes pour $t \in [t_0, T]$:

$$\dot{x}(t) = F(x(t), q(t), u(t)) \quad \forall s(t) \in S \cap CP \quad (2.1)$$

$$[x(t^+), q(t^+)] = G(x(t), q(t), v(t)) \begin{cases} \text{si } s(t) \in \partial P \\ \text{si } v(t) \in \Omega_c \text{ intervient} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.3)$$

$$q(t_0) = q_0 \quad (2.4)$$

La fonction F représente la dynamique continue du système hybride et G représente la dynamique hybride du système correspondant aux phénomènes hybrides décrits précédemment. L'ensemble P est celui des zones de déclenchement des phénomènes hybrides et ∂P est la frontière de P . La commande discrète $v(t)$ détermine les instants où la fonction G intervient (instants de commutation/saut). Elle détermine également le nouveau modèle ou l'amplitude du saut de l'état suivant l'action du phénomène hybride. Les fonctions F et G sont supposées suffisamment régulières pour que le système défini par les équations (2.1-2.4) admette une solution unique ; c'est à dire que F et G sont des fonctions continues et différentiables.

2.5 CLASSIFICATION DES SYSTÈMES DYNAMIQUES HYBRIDES :

L'influence de l'évolution de la partie continue sur l'évolution de la partie discrète et inversement est une transition correspondant à un changement de modalité de l'état discret qui entraîne soit la modification du modèle d'état continu, on parle alors de

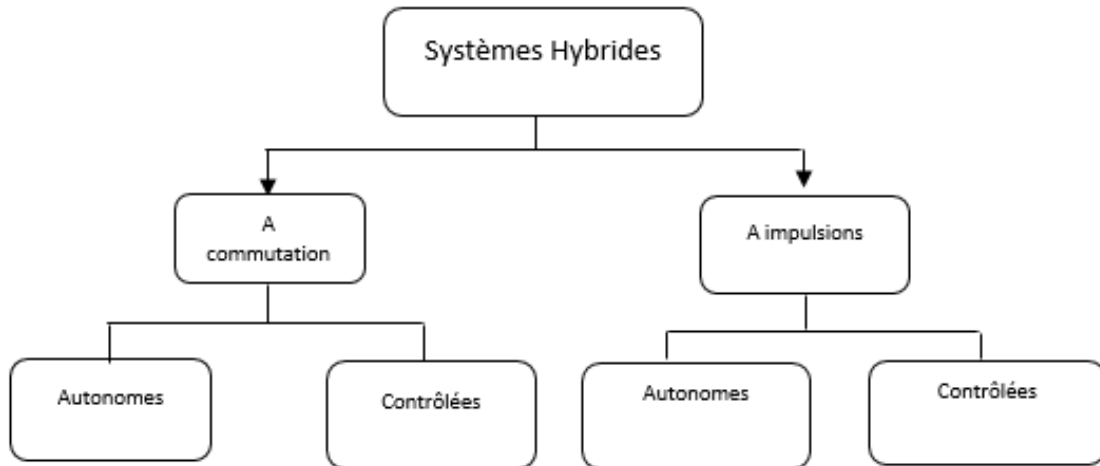


FIGURE 2.3 – Classification de Branicky.

commutation (“switching”), soit une discontinuité du vecteur d’état discret, on parle alors de saut (jump). Branicky a proposé une classification en fonction des phénomènes discrets comme le montre la figure[12] :

2.5.1 Commutation autonome :

Une commutation autonome caractérise un phénomène où le champ de vecteur $f(x,t)$ change de façon discontinue lorsque l’état x atteint certains seuils comme schématisé dans la figure (2.4). Un exemple illustratif est présenté dans le troisième chapitre.

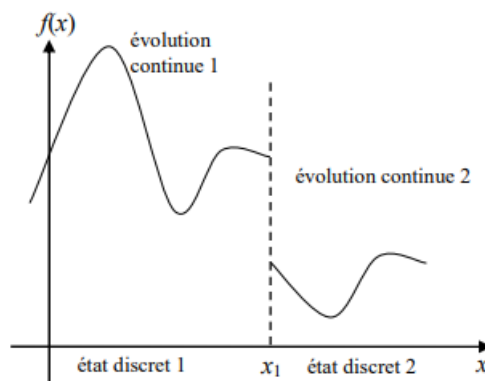


FIGURE 2.4 – Commutation autonome[2].

2.5.2 Commutation contrôlée :

Une Commutation contrôlée traduit un phénomène où le champ de vecteur $f(x, t)$ change de façon discontinue et instantanée en réponse à une entrée de commande.

Exemple : Système d'embrayage mécanique

Il s'agit d'un système composé de deux masses en rotation. Les masses sont couplées par un embrayage mécanique idéal. Chaque masse i , dont l'inertie est J_i est entraînée par un couple Ω_i à une vitesse de rotation ω_i . Quand les masses sont couplées, les valeurs des vitesses de rotation sont identiques. Ces vitesses sont indépendantes quand les masses sont découplées, cela est illustré par la figure(2.5)[2].

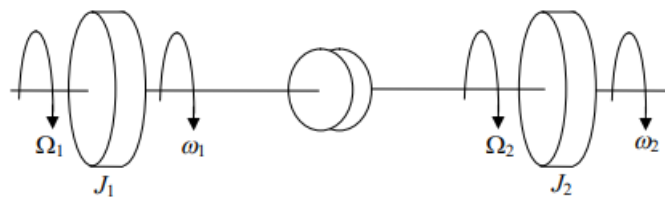


FIGURE 2.5 – Système d'embrayage mécanique.

Lorsque les axes de rotation sont indépendants le système est débrayé. Le modèle mathématique est donné par :

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}$$

Quand les axes de rotation sont couplés le système est embrayé, les vitesses de rotation sont identiques et le système peut être décrit par l'équation :

$$\begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}$$

D'une manière plus générale, le système peut donc être décrit par une équation sous la forme [4] :

$$I_k \dot{x} = A_k x + B_k u$$

Où les matrices I_k , A_k et B_k dépendent de l'état k du système. Nous avons donc une équation d'état dans laquelle figure la représentation hybride décrivant la dynamique continue du système dans ses différents états.

2.5.3 Saut autonome :

Il s'agit d'un saut discontinu de l'état continu x lorsqu'il atteint une région donnée de l'espace d'état, c'est-à-dire que l'état passe de façon discontinue de sa valeur courante à une autre. Comme le montre schématiquement la figure(2.6)[2].

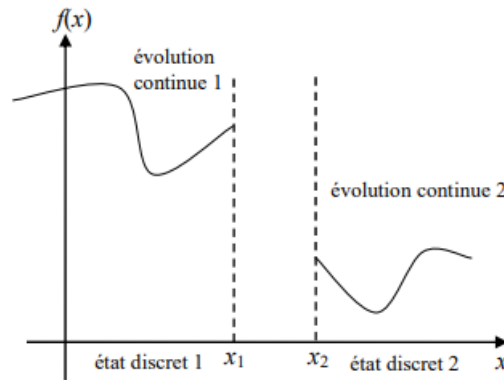


FIGURE 2.6 – Saut autonome.

Exemple :

Voici un exemple pour illustrer ce concept : Considérons un système simple où une balle est lancée verticalement vers le haut, puis retombe en raison de la gravité. Lorsque la balle atteint son point le plus élevé, sa direction change de manière discontinue en raison de l'inversion de la force gravitationnelle. Le modèle de la balle rebondissante est représenté par la figure ci-dessous[11] :

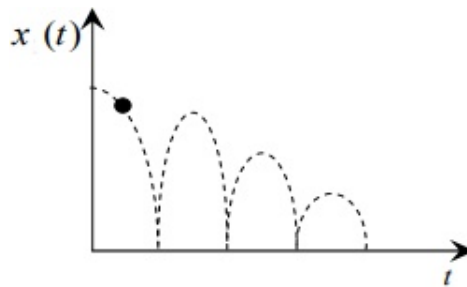


FIGURE 2.7 – Modèle de la balle rebondissante.

Le modèle mathématique simplifié de ce système peut être décrit par l'équation de mouvement suivante, où x représente la position verticale de la balle et t le temps :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

Ici, g représente l'accélération due à la gravité et est une constante positive. Lorsque la balle est en montée, l'expression $(-g)$ dans l'équation indique que la balle

ralentit. Cependant, au moment où elle atteint sa hauteur maximale et commence à retomber, la direction de la force change et devient positive, entraînant un changement de signe dans l'équation.

2.5.4 Saut contrôlé

C'est un changement de façon discontinue de l'état en réponse à une commande de l'utilisateur ou un événement externe.

Exemple :

Supposons que vous ayez un robot industriel avec un bras articulé. Ce bras peut effectuer des mouvements dans différentes directions en fonction des commandes qu'il reçoit. Lorsque le robot est en train de déplacer son bras et que vous lui donnez une commande pour arrêter brusquement, la transition entre le mouvement en cours et l'arrêt complet du bras est une transition discontinue.

Pendant le mouvement du bras, les moteurs et les actionneurs sont actifs pour générer le mouvement. Lorsque la commande d'arrêt est donnée, les moteurs sont instantanément désactivés, ce qui provoque l'arrêt complet du bras. Cette transition est brusque et instantanée, et elle peut avoir un impact sur la précision et la stabilité du robot.

2.6 APPROCHES DE MODÉLISATION

En général, un système hybride sera modélisé par un ensemble de systèmes à dynamique continue interagissant avec un ou plusieurs systèmes à événements discrets. Les trois approches principales de modélisation des systèmes dynamiques hybrides sont les suivantes :

2.6.1 Approche continue

L'approche continue consiste à modéliser le système hybride comme un système à dynamique continue, dans lequel les variables d'état évoluent de manière continue dans le temps. Cette approche est adaptée aux systèmes dans lesquels les événements discrets ont un impact limité sur la dynamique globale du système. Un exemple d'approche continue serait la modélisation de la température d'un four en fonction du temps.

2.6.2 Approche événementielle

L'approche événementielle consiste à modéliser le système hybride comme un système à événements discrets, dans lequel les transitions entre les différents modes de fonctionnement du système sont déclenchées par des événements discrets. Cette approche est adaptée aux systèmes dans lesquels les événements discrets ont un impact

important sur la dynamique globale du système. Un exemple d'approche événementielle serait la modélisation d'un système de file d'attente, où les événements seraient l'arrivée et le départ des clients.

2.6.3 Approche mixte

L'approche mixte consiste à combiner les approches continue et événementielle pour modéliser le système hybride. Cette approche est adaptée aux systèmes dans lesquels les événements discrets ont un impact modéré sur la dynamique globale du système. Un exemple d'approche mixte serait la modélisation d'un système de production industrielle, où les processus de production seraient modélisés de manière continue, tandis que les événements liés à la maintenance, aux pannes et aux réparations seraient modélisés de manière événementielle.

Chacune de ces approches a ses avantages et ses inconvénients et est adaptée à différents types de systèmes et de problèmes de contrôle. Les choix de modélisation dépendent donc des spécificités du système à modéliser et des objectifs de la modélisation.

2.7 MODÉLISATION DES SYSTÈMES DYNAMIQUES HYBRIDES

La modélisation des systèmes dynamiques hybrides peut être réalisée à l'aide de différents outils, tels que les automates hybrides, les réseaux de Petri, les systèmes à événements discrets, et les équations différentielles ordinaires.

La modélisation des systèmes dynamiques hybrides est une étape importante qui permet l'étude et la mise au point d'une loi de commande. Elle consiste à proposer des modèles précis qui peuvent décrire le comportement riche et complexe des systèmes dynamiques hybrides. Ce domaine a reçu l'attention des chercheurs, et plusieurs formalismes ont été proposés afin d'établir un modèle homogène permettant la conciliation entre les parties discrètes et continues. Les modèles les plus utilisés pour la représentation des systèmes hybrides sont décrits ci-dessous.

2.7.1 Les automates hybrides

Un automate hybride est un automate à états finis qui peut également contenir des variables continues. Les transitions entre les états discrets sont déterminées par les valeurs des variables continues.

Les automates à états finis

Définition : (automate à états finis) : un automate à états finis est un quadruplet $AEF = (Q, \Sigma, T, q_0)$ où :

- Q = est un ensemble fini de sommets.
- Σ est un ensemble fini d'évènements.
- σ est un ensemble de transitions entre sommets. Une transition est un triplet $t_i = (q, \sigma, q')$, ou q est un sommet source, σ est un évènement de Σ et q' est un sommet but, q_0 est l'état initial de l'automate.

Dans un automate à états finis chaque sommet représente un état du SED. La transition $t_i = (q, \sigma, q')$ traduit le passage du système du sommet q vers le sommet q' suite à l'occurrence de l'évènement σ .

Exemple :

Considérons la vanne 1 dans le système de bac . Cette vanne peut avoir deux états (position A ou position B). Notons par α le passage de la position A vers la position B et par β le passage de la position B vers la position A. Initialement la vanne est supposée en position A. La figure(2.8) représente l'automate décrivant cette dynamique événementielle.

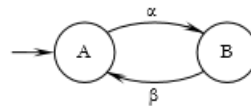


FIGURE 2.8 – Automate à états finis modèle d'une vanne[3].

2.7.2 Les Réseaux de Petri

Principe des réseaux de Petri

Un réseau de Petri est un formalisme permettant de modéliser des systèmes à évènements discrets sous la forme d'une représentation graphique du système relativement facile à comprendre par un humain. Il a l'avantage de pouvoir représenter des systèmes à évènements discrets complexes sous un format plus compact que les automates à états finis. Dans le principe, un réseau de Petri peut être considéré comme un graphe orienté bipartite contenant des places (des cercles vides), des transitions (des rectangles noirs) et des arcs (des flèches reliant les transitions et les places entre elles). On peut considérer les places comme des récipients dans lesquelles on peut placer des jetons (pastille noire à l'intérieur des places). Les places peuvent représenter une partie du système, un lieu dans le système, un compteur, ou autre. L'ensemble des jetons dans les places représente le marquage du réseau de Petri et un marquage est associé à un état du système.

Exemple : Le cas d'une lampe, le réseau de Petri qui décrit son comportement est le suivant[12] :

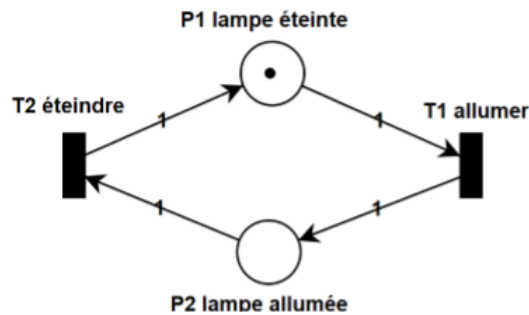


FIGURE 2.9 – Réseau de Petri d'une lampe torche .

Le jeton représente ici dans quel état est la lampe, s'il est dans la place P1 la lampe est éteinte et s'il est dans la place P2, la lampe est allumée. Ici le marquage initial du système est défini par un jeton présent dans la place P1 et aucun dans la place P2. Cela correspond à l'état du système où la lampe est éteinte.

Définition d'un réseau de Petri

De manière plus formelle, un réseau de Petri est défini comme un 5-uplets (c'est-à-dire un ensemble de 5 éléments) : $\{P, T, A, W, M_0\}$

Les éléments de ce 5-uplets sont définis comme suit :

- P est l'ensemble des places ;
- T est l'ensemble des transitions ;
- A est l'ensemble des arcs allant d'une place à une transition, ou d'une transition à une place. Il est important de noter qu'un arc ne peut pas relier deux transitions ou deux places entre elles ;
- W est appelée la fonction poids (aussi appelée matrice d'incidence dans la représentation matricielle des réseaux de Petri), elle associe à chaque arcs un nombre entier. Ce nombre sera utilisé par la suite pour définir la façon dont les jetons peuvent passer d'une place à une autre ;
- M_0 est appelé marquage initial. A un instant donné, le marquage du réseau de Petri est défini par le nombre de jetons présents dans chacune des places du réseau de Petri. Le marquage initial est donc le nombre de jetons initialement présent dans chaque place, il représente l'état initial du système.

2.7.3 Modélisation des SDH par les systèmes à interface :

La modélisation des systèmes dynamiques hybrides par les interfaces est une approche spécifique pour représenter et analyser ces systèmes complexes. Cette méthode se concentre sur la description des interactions et des échanges

d'informations entre les composants continus et discrets d'un système hybride.

Dans cette approche, chaque composant du système est considéré comme une entité autonome avec une interface spécifique. L'interface d'un composant représente les variables d'état, les signaux d'entrée et de sortie, ainsi que les événements discrets associés à ce composant.

Les interfaces facilitent la communication et la coordination entre les différents composants du système. Elles permettent de spécifier les conditions de transition entre les modes, les déclencheurs des événements discrets et les interactions entre les parties continues et discrètes.

La modélisation par les interfaces permet de représenter la dynamique temporelle du système, en prenant en compte à la fois les évolutions continues et les transitions discrètes.

Les différents modèles interface proposés en littérature sont :

- Le modèle proposé par Antasklis , est divisé en trois parties. La première contient le système continu, la deuxième contient le SED et la troisième l'interface[11].

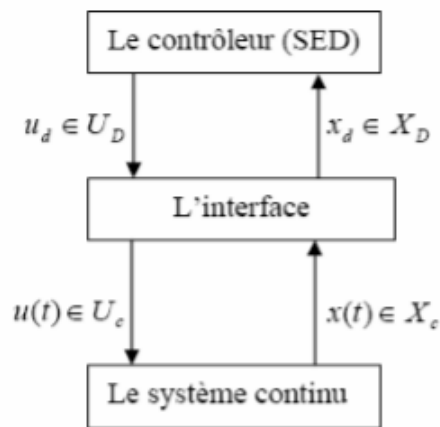


FIGURE 2.10 – Modèle à interface d'Antasklis.

- Le modèle de Brocket , qui a utilisé d'une manière simultanée les commandes continues et discrètes en introduisant une horloge ou un compteur variable.
- Le modèle à interface généralisée, qui a une particularité d'inclure tous les modèles cités ci-dessus. Ce qui fait que le modèle est capable de d'écrire l'influence de la partie discrète sur la partie continue et vice versa[11].

Exemple :

Prenons l'exemple d'un système de climatisation intelligent pour une maison, qui utilise à la fois des composants continus et discrets. Voici un schéma simplifié du système :

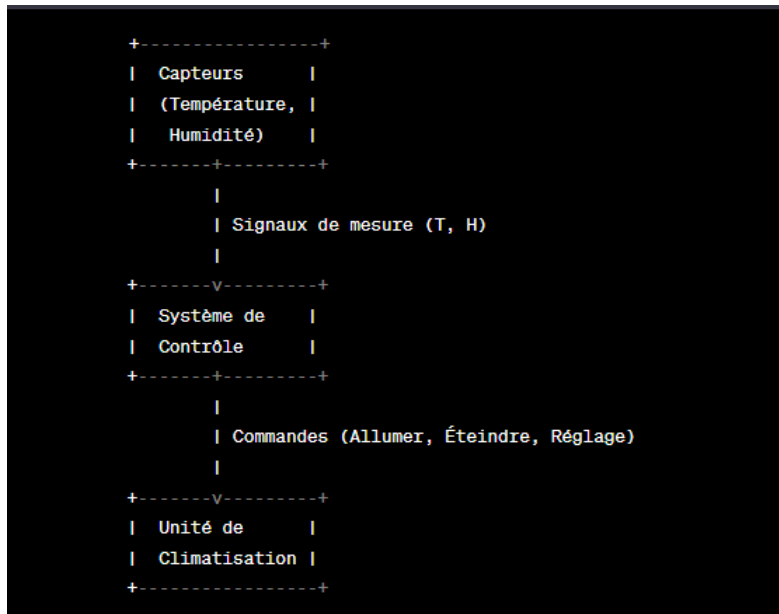


FIGURE 2.11 – Schéma simplifié du système.

Dans cet exemple, les capteurs mesurent la température (T) et l'humidité (H) dans la maison. Ces signaux de mesure sont transmis à un système de contrôle, qui prend des décisions en fonction des valeurs mesurées.

Le système de contrôle analyse les mesures et envoie des commandes à l'unité de climatisation. Les commandes peuvent inclure des instructions pour allumer ou éteindre l'unité de climatisation, ainsi que des réglages spécifiques (par exemple, la température cible souhaitée).

L'unité de climatisation reçoit les commandes et ajuste son fonctionnement en conséquence, en régulant la température et l'humidité de la maison.

Dans ce système, les capteurs, le système de contrôle et l'unité de climatisation sont des composants discrets, tandis que les grandeurs physiques mesurées (température et humidité) sont des composants continus.

La modélisation par les interfaces permettrait de définir les interfaces pour

chaque composant, spécifiant les signaux d'entrée et de sortie, ainsi que les événements discrets échangés entre les composants. Par exemple, l'interface des capteurs pourrait inclure des signaux de mesure (T, H), tandis que l'interface du système de contrôle pourrait inclure des signaux de commande (Allumer, Éteindre, Réglage) et l'interface de l'unité de climatisation pourrait inclure des signaux de réponse ou de confirmation.

En utilisant cette modélisation par les interfaces, on peut analyser comment les mesures influencent les décisions prises par le système de contrôle, et comment les commandes envoyées à l'unité de climatisation affectent les conditions de confort dans la maison.

2.7.4 Formulation du problème de commande

La formulation générale d'un système hybride tel que décrit est la suivante :

Etat continu :

L'état continu du système est représenté par le vecteur $x(t) \in \mathbb{R}^n$, où n est la dimension de l'état continu. Les équations différentielles associées décrivent l'évolution de l'état continu dans le temps et sont de la forme :

$$\dot{x}(t) = f_{q_i}(x(t), u(t), t)$$

où

$q_i \in Q$ représente l'état discret actuel du système et f_{q_i} est une fonction dépendante de l'état continu, de la commande continue $u(t) \in \mathbb{R}^m$, et du temps t .

Etat discret :

L'état discret du système est représenté par la variable $q(t)$, qui prend ses valeurs dans l'ensemble fini $Q = [q_1, q_2, \dots, q_{r+1}]$. Les transitions d'état discret sont déterminées par la fonction de transition discrète

$$\varphi(x(t^-), q(t^-), v(t), t)$$

où :

$x(t^-)$ représente la valeur de l'état continu juste avant le changement d'état, $q(t^-)$ est l'état discret précédent, $v(t) \in \Omega_c$ représente la commande discrète, et t est le temps courant. La fonction de transition discrète ϕ définit comment l'état discret change en fonction de l'état continu, de l'état discret précédent et de la commande discrète.

$$\phi(q_i, q_{i+1})(x(t^-), t)$$

c'est l'ensemble de fonctions de saut; Ces fonctions de saut décrivent le comportement lors d'une transition de l'état discret q_i à q_{i+1} . Lorsqu'une telle transition se produit, l'état continu est réinitialisé de $x(t^-) \in \mathbb{R}^n$ à $x(t^+) \in \mathbb{R}^n$.

Nous posons $[t_0, \tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_r, \tau_{r+1} = T]$ comme une séquence d'instant de commutation et $q_i \in Q = [q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_{r+1}]$ comme la séquence des modes associés à la commande $(u, v)(t)$ sur l'intervalle $[t_0, T]$.

Maintenant, nous définissons la fonction de coût $J(u, v)$ comme :

$$J(u, v) = \int_{t_0}^T L_{q(t)}(x(t), u(t), t) dt = \sum_{t=0}^{\tau} L_{q_i}(x(t), u(t), t)$$

Ici, $L_{q_i}(t)(x(t), u(t), t)$ représente la fonction de coût instantané associée à l'état discret $q_i(t)$. Dans l'intervalle entre chaque paire d'instant de commutation $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, nous intégrons la fonction de coût $L_{q_i}(x(t), u(t), t)$ correspondant au mode q_i .

Ainsi, une commande $(u, v)(t)$ est alors une commande qui minimise J sur l'intervalle $[t_0, T]$; c'est-à-dire qu'elle cherche à trouver les valeurs de la commande continue $u(t)$ et de la commande discrète $v(t)$ qui minimisent le coût total J sur la durée de l'intervalle.

La fonction de coût $L_{q_i}(x(t), u(t), t)$ peut être définie en fonction des objectifs spécifiques du système de contrôle, tels que le suivi de trajectoire, la consommation d'énergie, la robustesse, etc. Le choix de cette fonction de coût dépend des besoins et des spécifications du système donné.

2.7.5 Principe du maximum pour les SDH

Le théorème du Principe du Maximum pour les systèmes dynamiques hybrides permet de déterminer les trajectoires optimales en termes de minimisation ou de maximisation d'un critère de performance, tout en respectant les contraintes spécifiques du système.

Théorème [11] : L'hamiltonien $H_{q_i}(\lambda, \lambda_0, x, u, t)$ est introduit pour le système hybride, où est la fonction de coût adjointe associée à l'état continu x ,

λ_0 est le multiplicateur de Lagrange associé au coût instantané L_{q_i} , et u est la commande continue. Cet hamiltonien est défini comme suit :

$$H_{q_i}(\lambda, \lambda_0, x, u, t) = \lambda^t f_{q_i}(x, u, t) - \lambda^0 L_{q_i}(x, u, t)$$

Si le contrôle u est optimal sur l'intervalle de temps $[t_0, T]$, alors il existe une application non triviale $\lambda : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, absolument continue par morceaux, telle que pour tout $t \in [t_0, T]$, $(\lambda^*, \lambda^0, x^*, u^*)(t)$ vérifie la condition du maximum :

$$H(\lambda^*, \lambda^0, x^*, u^*, t) = \sup_{u \in U} H_{q_i}(\lambda^*, \lambda^0, x^*, u^*, t)$$

Les équations différentielles associées à cette condition du maximum sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H_{q_i}}{\partial \lambda}(\lambda, \lambda^0, x, u, t) \\ \dot{\lambda}(t) &= -\frac{\partial H_{q_i}}{\partial x}(\lambda, \lambda^0, x, u, t) \end{aligned}$$

De plus, $H_{q_i}(\lambda, \lambda^0, x, u, t) = 0$ le long de la trajectoire optimale. Aux instants de transition τ entre deux modes q_i et q_{i+1} , les conditions de transversalité sont données par :

- Si τ est un instant de transition depuis le mode q_i vers le mode q_{i+1} , alors :

$$\begin{aligned} \lambda(\tau^+) &= \lambda(\tau^-) - \left(\frac{\partial C_{q_i, q_{i+1}}^t(x(t), t)}{\partial x} \right) \Big|_{\pi/t=\tau_i} \\ H(\lambda, \lambda_0, x, u, \tau_i^+) &= H_{q_i}(\lambda, \lambda_0, x, u, \tau_i^-) + \left(\frac{\partial C_{q_i, q_{i+1}}^t(x(t), t)}{\partial x} \right) \Big|_{\pi/t=\tau_i} \end{aligned}$$

Avec π est un vecteur de dimension p

- Si τ est un instant de transition non contraint depuis le mode q_i vers le mode q_{i+1} , alors :

$$\lambda(\tau^+) = \lambda(\tau^-)$$

$$H_{q_i}(\lambda, \lambda^0, x, u, \tau_i^+) = H_{q_i}(\lambda, \lambda^0, x, u, \tau_i^-)$$

Enfin, $\lambda(t)$ doit satisfaire les conditions de transversalité aux instants initiaux et finaux :

$$\begin{aligned} \lambda(t_0) &\in N_{C_0}(x(t_0)) \\ \lambda(T) &\in N_{C_f}(x(T)) - \lambda \left(\frac{\partial \phi_{q_{r+1}}(x(T), T)}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Où $N_C(x)$ représente le sous espace normal à C au point x , C_0 et C_f définissent respectivement les frontières des ensembles X_0 et X_f .

CONCLUSION DU CHAPITRE

Nous avons donné dans ce chapitre une définition et une classification des systèmes dynamiques hybrides et leurs modélisation. Dans ce qui suit on va s'intéressé à une seule classe des SDH et on va étudier un exemple qu'on pourra résoudre à l'aide du principe du maximum de pontriyagin.

CONTRÔLE OPTIMAL À SYSTÈME DYNAMIQUE HYBRIDE À COMMUTATION AUTONOME

3

3.1 INTRODUCTION :

Nous traitons dans ce dernier chapitre un problème de contrôle optimal de systèmes dynamiques hybrides, en particulier ceux qui impliquent des commutations de modèle autonomes. Pour commencer, nous allons présenter un exemple d'un thermostat qui est un dispositif que nous utilisons régulièrement pour contrôler la température dans une pièce.

Par la suite, on va étudier un exemple mathématique qui sera résolu en appliquant le principe du maximum de Pontryagin (PMP). Cet exemple peut être interprété comme une transformation d'un modèle de chauffage en un modèle de refroidissement.

Le modèle initial était conçu pour maintenir une température intérieure à une température cible, généralement dans le contexte d'un système de chauffage. Cependant, nous cherchons maintenant à adapter ce modèle pour atteindre un objectif inverse : refroidir l'environnement intérieur jusqu'à une température de consigne.

Enfin, nous effectuons une mise en œuvre numérique à l'aide de logiciel Matlab.

3.2 MODÈLE DE CHAUFFAGE INITIAL :

Considérons l'exemple classique d'un thermostat d'ambiance (figure 3.1) à action tout ou rien (TOR) équipé d'une résistance anticipatrice R . Quand la température du local varie, les deux bandes de métal qui forment le bilame se dilatent ou se contractent en fonction de la consigne et ceci provoque l'ouverture ou la fermeture de l'interrupteur c . Pour une température inférieure à la consigne, le bilame se contracte et ferme l'interrupteur c . Ainsi, la résistance R est alimentée et commence à chauffer l'environnement du bilame. En même temps un signal

constitué par le courant qui traverse la résistance est envoyé vers l'organe de commande, c'est à dire le brûleur est alimenté en gaz[4].

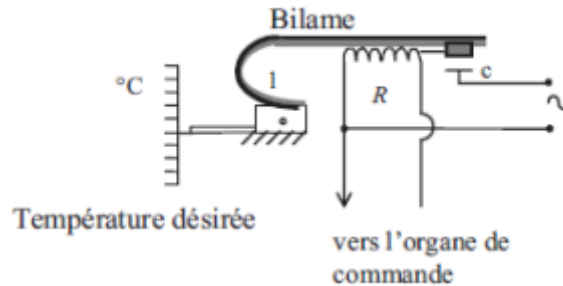


FIGURE 3.1 – Schéma fonctionnel d'un thermostat d'ambiance à action tout-ou-rien équipé d'une résistance anticipatrice R [4].

Pour maintenir la température confortable. Le système étudié est composé par un système de chauffage et un capteur de température. Les seuils inférieur et supérieur du thermostat sont fixés à des valeurs θ_m et respectivement θ_M , tel que $\theta_m < \theta_M$. Le système de chauffage est en marche tant que la température est inférieure au seuil θ_M . Le chauffage est arrêté lorsque le capteur détecte le seuil supérieur θ_M et il reste en arrêt jusqu'au moment où la température chute au-dessous du seuil inférieur θ_m .

Considérons que l'évolution de la température peut être modélisée par les équations différentielles suivantes [5] :

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x) = -x + \alpha & \text{si le chauffage est en marche} \\ f_2(x) = -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\alpha \in \mathbf{R}^+$ est la quantité de chaleur produite par le chauffage en consommant de l'énergie.

Initialement, supposons que le système est dans l'état de marche et la valeur initiale de la température vérifie la relation $\theta_0 \in [\theta_m, \theta_M]$. Dans cet état, l'évolution de la température respectera l'expression :

$$x(t) = \theta_0 e^{-t} + \alpha(1 - e^{-t})$$

L'évolution croissante fait que, au bout de t_1 unité de temps, le seuil θ_M est atteint. Alors, le système de chauffage passera à l'état d'arrêt. Suite au changement d'état du système, la dynamique de la température change et la nouvelle évolution est donnée par :

$$x(t) = \theta_0 e^{-t}$$

Dans cet état, la température aura une évolution décroissante jusqu'au moment où le seuil inférieur θ_m est atteint. A cet instant, le chauffage sera remis en

marche et le système reviendra à l'état initial. La trajectoire de la température est présentée sur la figure(3.2).

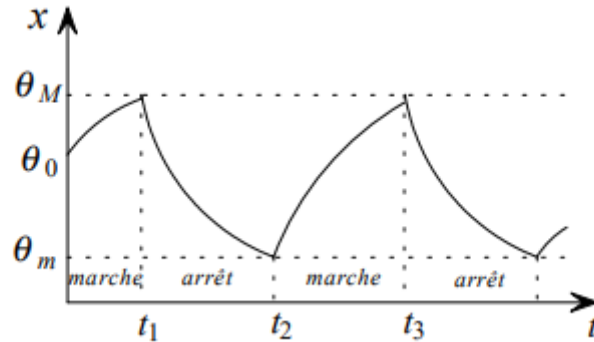


FIGURE 3.2 – Trajectoire de la température. [5].

3.3 DU CHAUFFAGE AU REFROIDISSEMENT :

Le système étudié :

Dans ce cas, un thermostat d'ambiance d'un climatiseur est placé à l'intérieur d'une pièce que nous souhaitons climatiser. Le système sera composé d'un climatiseur et d'un capteur de température.

3.4 FONCTIONNEMENT D'UN THERMOSTAT DANS LE CAS DE REFROIDISSEMENT :

Un thermostat d'un climatiseur fonctionne de manière similaire à un thermostat de chauffage mais avec des actions inversées pour atteindre des objectifs de refroidissement. Voici comment il fonctionne typiquement :

Détection de la température :

Le thermostat est équipé d'un capteur de température qui mesure en permanence la température de l'air à l'intérieur de la pièce ou de l'espace où il est installé.

Comparaison avec la Consigne :

Le thermostat compare la température mesurée avec la température de consigne définie. Si la température mesurée dépasse la consigne de refroidissement, le thermostat déclenche l'action de refroidissement.

Activation du Compresseur :

Lorsque la température ambiante est supérieure à la consigne, le thermostat active le compresseur du climatiseur. Le compresseur comprime un gaz réfrigérant, provoquant ainsi un transfert de chaleur de l'intérieur vers l'extérieur. Cela refroidit l'air dans la pièce.

Arrêt du Compresseur :

Une fois que la température atteint la consigne de refroidissement, le thermostat arrête le compresseur. Cela évite que la pièce ne devienne trop froide.

Le climatiseur est en marche tant que la température dans la pièce dépasse le seuil supérieur θ_M . Le climatiseur est désactivé lorsque le capteur détecte le seuil inférieur θ_m , et il reste inactif jusqu'à ce que la température remonte au-dessus du seuil inférieur θ_m .

3.5 MODÉLISATION DU SYSTÈME ÉTUDIÉ :

La température à l'intérieur de l'espace et le thermostat peuvent être considérés comme un système dynamique dont l'évolution continue est déterminée par la variation de la température θ à l'intérieur de la pièce, tandis que l'évolution discrète est caractérisée par le passage de l'état de fonctionnement du climatiseur à l'état d'arrêt.

Considérons que l'évolution de la température en état de fonctionnement du climatiseur peut être modélisée par une équation différentielle similaire à celle[1] :

$$\dot{\theta}(t) = -k(u(t) - \theta(t))$$

où "u" représente l'énergie consommée pour refroidir la pièce, et "k" est une constante qui dépend des caractéristiques de l'espace climatisé.

3.6 AUTOMATE HYBRIDE ASSOCIÉ :

L'automate hybride représentant ce système est illustré dans la figure(3.3). Dans la place 1 le thermostat est en marche et dans la place 2 le thermostat est en arrêt. Les activités dans les places 1 et 2 correspondent respectivement à l'évolution de la température quand le climatiseur est en marche et à l'évolution de la température quand le climatiseur est en arrêt.

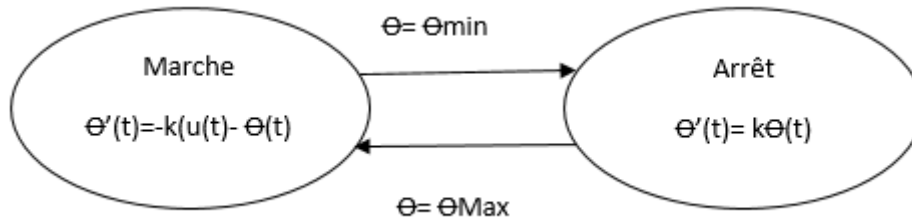


FIGURE 3.3 – L'automate hybride associé

3.7 POSITION DU PROBLÈME LORSQUE LE CLIMATISEUR EST EN ÉTAT DE MARCHÉ :

Lorsque le climatiseur est en état de marche le problème de contrôle optimal est donné comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \int_0^{T_1} u(t)^2 dt \rightarrow \text{Min} \\ \dot{\theta}(t) = -k(u(t) - \theta(t)) \\ 0 \leq t \leq T_1 \\ \theta(0) = \theta_0 \quad \theta_m \leq \theta \leq \theta_M \\ u \geq 0 \end{array} \right.$$

Avec $f(\theta, u, t) = -k(u(t) - \theta(t))$ et une fonction de classe C^1 et où le contrôle est une application mesurable et bornée.

3.8 APPLICATION DU PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRYAGIN

Résolution théorique

On pose $k=1$ et on réécrit le problème sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \int_0^{T_1} u(t)^2 dt \rightarrow \text{Min} \\ \dot{\theta}(t) = -(u(t) - \theta(t)) \\ t \in [0, T_1] \\ \theta(0) = \theta_0 \quad \theta_m \leq \theta \leq \theta_M \\ u \geq 0 \end{array} \right.$$

Avant la caractérisation du contrôle optimal, nous définissons d'abord l'Hamiltonien pour le problème de contrôle optimal par :

$$H(\theta, p, u) = p^0 u^2(t) + p(-(u(t) - \theta))$$

$$H(\theta, p, u) = p^0 u^2 - pu + p\theta$$

Où p est le vecteur adjoint. En appliquant le principe du minimum de Pontryagin nous obtenons : L'équation adjointe :

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$$

Ce qui donne :

$$\dot{p} = -p$$

On minimise le hamiltonien H en utilisant le principe du minimum ($p^0 = 1$), on aura

$$\min_{u \geq 0} H = \min_{u \geq 0} [u^2 + (p(-u + \theta))]$$

Ce qui est équivalent à minimiser :

$$u^2 - pu$$

On pose :

$$\Phi = u^2 - pu$$

- Condition nécessaire :

Cherchons les racines de sa dérivée

$$\dot{\Phi} = 0$$

Ce qui fait :

$$2u - p = 0$$

qui implique que :

$$u^* = 1/2p$$

- Condition suffisante :

La deuxième dérivée est égale à :

$$\ddot{\Phi} = 2$$

qui est :

$$\ddot{\Phi} > 0$$

et donc :

$$u^* = 1/2p$$

est un minimum .

3.9 POSITION DU PROBLÈME LORSQUE LE CLIMATISEUR EST EN ARRÊT

Lorsque le climatiseur est en état d'arrêt le problème de contrôle optimal est donné comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \int_0^{T_1} u(t)^2 dt \\ \dot{\theta}(t) = k\theta(t) \\ t \in [T_1, T_2] \\ \theta(0) = \theta_0 \quad \theta_m \leq \theta \leq \theta_M \\ u \geq 0 \end{array} \right.$$

La solution analytique de ce système est :

$$\theta(t) = C_1 e^{kt}$$

De la condition initiale $\theta(0) = \theta_0$ on aura :

$$\theta(t) = \theta_0 e^{kt}$$

Cela signifie que la température intérieure évolue exponentiellement avec le temps en l'absence de tout contrôle actif. Cependant, il n'y a rien à optimiser dans ce cas, car le problème ne consiste pas à déterminer comment contrôler la température intérieure, mais plutôt à comprendre comment elle évolue naturellement en l'absence de contrôle actif. La solution analytique donne simplement la façon dont la température intérieure change avec le temps en fonction des paramètres du système (en particulier, la valeur de k) et de la condition initiale (θ_0).

3.10 RÉOLUTION NUMÉRIQUE :

Nous effectuons la mise en œuvre numérique à l'aide du logiciel Matlab.

Le programme MATLAB

```
% Parametres
theta_marche = 18; % Temperature cible en mode marche
theta_arret = 24; % Temperature cible en mode arret

% Plage de commande
commande_min = 0;
commande_max = 10;

% Temps de simulation
t_total = 100; % Duree totale de la simulation en unit s
                de temps
dt = 0.1; % Pas de temps
t = 0:dt:t_total; % Vecteur de temps

% Initialisation
temperature = zeros(size(t)) + 20; % Temperature initiale
                20
commande = zeros(size(t)); % Initialisation de la
                commande (0 pour arret)

% Nombre de cycles marche/arret
nombre_cycles = 2; % Par exemple, 5 cycles

% Simulation des cycles
for cycle = 1:nombre_cycles
    mode = 'marche'; % Commence en mode marche

    for i = 2:length(t)
        if strcmp(mode, 'marche')
            temperature(i) = temperature(i-1) - 0.2; %
                Diminution de la temprature en mode
                marche
            if temperature(i) <= theta_marche
                mode = 'arret'; % Passage en mode arret
```

```
        commande(i) = 0; % Commande gale 0 (
            arret)
    else
        commande(i) = commande_max; % Commande
            pleine puissance (20)
    end
elseif strcmp(mode, 'arret')
    temperature(i) = temperature(i-1) + 0.2; %
        Augmentation de la temperature en mode
        arret
    if temperature(i) >= theta_arret
        mode = 'marche'; % Passage en mode marche
        commande(i) = commande_max; % Commande
            pleine puissance (20)
    else
        commande(i) = 0; % Commande egale 0 (
            arret)
    end
end
end
end

% Affichage de la trajectoire de la commande
subplot(2, 1, 1)
stairs(t, commande)
xlabel('Temps')
ylabel('Commande (0 pour arret, >0 pour marche)')
title('Trajectoire de la Commande du Climatiseur')

% Affichage de la trajectoire de la temperature
subplot(2, 1, 2)
plot(t, temperature)
xlabel('Temps')
ylabel('Temperature')
title('Trajectoire de la Temperature avec le Climatiseur')
```

Les résultats obtenus sur matlab sont représentés dans les figures suivantes :

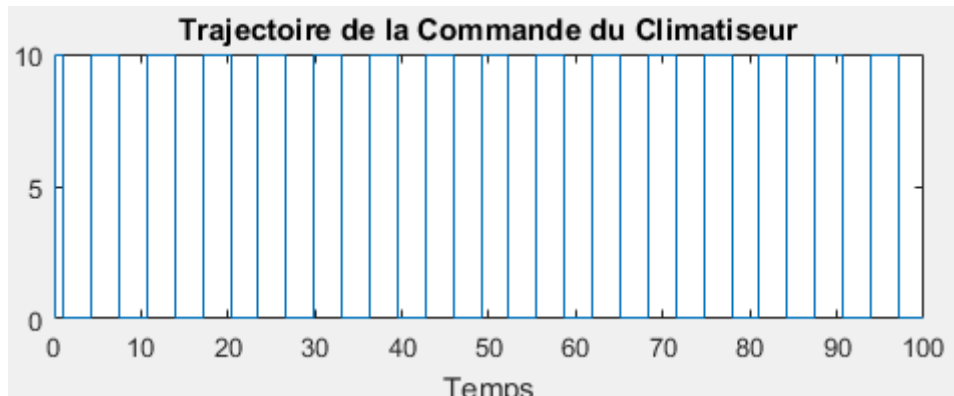


FIGURE 3.4 – Trajectoire de la commande

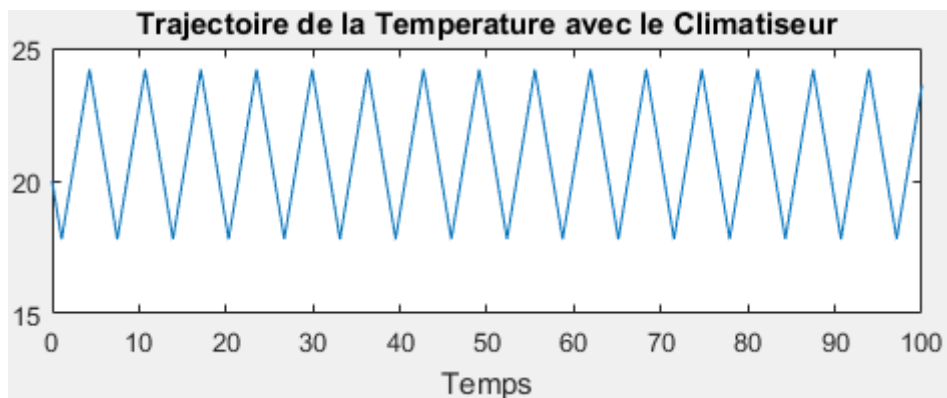


FIGURE 3.5 – Trajectoire de la température

Interprétation des résultats :

Au début (t_0), la température θ_0 de la pièce est de 20°C , le climatiseur est en marche car il vise à refroidir la pièce jusqu'à un seuil minimum θ_m fixé à 18°C . Le climatiseur restera actif tant que la température (qui débute à θ_0) diminuera jusqu'à atteindre ou descendre en dessous de θ_m , le climatiseur passe de l'état de marche à l'état d'arrêt.

En mode d'arrêt, la température intérieure augmentera naturellement jusqu'à ce qu'elle atteigne le seuil maximal θ_M fixé à 24°C .

Dès que la température atteint ou dépasse θ_M , le climatiseur peut être réactivé pour refroidir à nouveau la pièce jusqu'à θ_m , et le cycle recommence.

Ce processus de commutation entre les états de marche et d'arrêt du climatiseur est conçu pour maintenir la température souhaitée entre 18°C et 24°C , tout en économisant de l'énergie.

3.11 CONCLUSION

Dans ce dernier chapitre, nous avons exploré les systèmes dynamiques hybrides à commutation autonome en utilisant le thermostat comme exemple. Notre objectif principal était de minimiser la consommation d'énergie tout en maintenant efficacement la température désirée dans une pièce. Pour y parvenir, nous avons appliqué le Principe du Maximum de Pontryagin, une méthode de résolution indirecte.

Dans le cas du chauffage, nous avons donné un exemple illustrant comment maintenir la température intérieure dans des limites spécifiées, tout en minimisant la consommation d'énergie. Lorsque la température atteint les seuils supérieur et inférieur, le chauffage passe de l'état de marche à l'état d'arrêt et vice versa.

Pour la climatisation, nous avons démontré comment ajuster la commande du climatiseur pour refroidir la pièce jusqu'à un seuil minimum, puis passer à l'arrêt lorsque cette température est atteint, puis réactiver le climatiseur lorsque la température atteinte le seuil maximal.

En concluant, nous pouvons dire que notre approche a démontré sa flexibilité et son efficacité pour réguler la température, que ce soit pour chauffer ou refroidir un espace, tout en minimisant la consommation d'énergie. Cette méthode est applicable dans diverses situations de gestion thermique et souligne l'importance de considérer les systèmes dynamiques hybrides à commutation autonome dans le domaine de la régulation thermique.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce travail on a exploré le domaine du contrôle optimal des systèmes dynamiques hybrides, qui combinent des éléments continus et discrets. Pour cela on a débuté par une introduction au contrôle optimal et on a présenté la méthode du principe du maximum de Pontryagin, qui est une approche puissante pour résoudre les problèmes de contrôle optimale. Pour mieux comprendre les systèmes dynamiques hybrides, on a présenté les principales classes de ces systèmes, notamment la commutation autonome, le saut autonome, la commutation contrôlée et le saut contrôlé. Chaque cas a été illustré par un exemple concret pour mettre en évidence les caractéristiques spécifiques de chaque type de système.

Ensuite, on a parlé des approches de modélisation des systèmes dynamiques hybrides et présenté le principe du maximum de Pontryagin adapté à ce type de système. Cette adaptation nous permet d'obtenir les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre pour le contrôle optimal des systèmes dynamiques hybrides.

À titre d'application, nous avons abordé le problème de contrôle optimal d'un système dynamique hybride à commutation autonome. Plus précisément, nous avons modélisé une situation visant à maintenir une température désirée tout en minimisant la consommation d'énergie.

Notre étude a porté sur la transformation d'un problème de chauffage en un problème de climatisation, démontrant ainsi la flexibilité du cadre de contrôle pour différentes situations de gestion thermique.

En conclusion, ce travail a permis d'explorer le domaine du contrôle optimal des systèmes dynamiques hybrides, en mettant l'accent sur les méthodes de résolution et l'application pratique à un problème spécifique. Le contrôle optimal des systèmes dynamiques hybrides joue un rôle essentiel dans de nombreux domaines d'application et continue de susciter l'intérêt de la recherche pour relever les défis de la complexité et de l'efficacité dans notre monde moderne.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Benoît Cébron. *Commande de systèmes dynamiques hybrides*. PhD thesis, Angers, 2000.
- [2] Sofiane Khaoui. *Modélisation et surveillance des systèmes dynamiques hybrides par automates hybrides*. PhD thesis, 2018.
- [3] Latéfa Ghomri. *Synthèse de contrôleur de systèmes hybrides à flux continu par réseaux de petri hybrides*. *Thèse de doctorat*, 2012.
- [4] Amal Madjour and Hanane Sahnoun. *Minimisation d'une énergie dans un problème de contrôle optimal à système dynamique hybride*. PhD thesis, UMMTO, 2018.
- [5] Monika Kurovszky. *Etude des systèmes dynamiques hybrides par représentation d'état discrète et automate hybride*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, 2002.
- [6] Emmanuel Trélat. *Contrôle optimal : théorie & applications*, volume 36. Vuibert Paris, 2005.
- [7] Sabrina Hakkoum and Samia Fateh. *Contrôle optimal de la traversée d'un fleuve par une barque*. PhD thesis, UMMTO, 2016.
- [8] Rima Terkmani and Ouiza Nait Abdesselam. *Contrôle optimal non linéaire Application*. PhD thesis, UMMTO, 2013.
- [9] Rachida Moussaoui et al. *Contrôle optimal de la trajectoire d'une fusée*. PhD thesis, UMMTO, 2018.
- [10] Hai Lin and Panos J Antsaklis. *Hybrid Dynamical Systems : Fundamentals and Methods*. Springer, 2022.
- [11] Aldjia Nait Abdesselam. *Résolution d'un problème de contrôle optimal des systèmes dynamiques hybrides*. PhD thesis, Tizi ousou, 2009.
- [12] Introduction à la modélisation et à la simulation de systèmes à événements discrets par réseaux de petri. page 014, 2021.
- [13] OURAMDANE Farouk. *Observateur Hybride Comme Outil de Diagnostic*. PhD thesis, Bejaia, 2013.

NOTATIONS

\mathbb{R}	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ <i>n fois</i>
Ω	Sous ensemble de l'espace euclidien \mathbb{R}
$\text{Acc}(x_0, T)$	Ensemble accessible depuis x_0 en temps T
PMP	Principe du maximum de pontryagin
T_x	Espace tangent au point x
SDH	Système dynamique hybrid
SED	Système à événement discret
AEF	Automate à états finis
RDP	Réseaux de petri
θ_0	La température initiale
θ_m	Seuil inferieur
θ_M	Seuil supérieur

Résumé

Dans le cadre de notre recherche, nous avons effectué une analyse bibliographique approfondie, en mettant l'accent sur la résolution de problèmes de commande optimale dans des systèmes dynamiques hybrides à commutation autonomes. Ce type de problème est étroitement lié au célèbre principe du maximum de Pontryagin. Notre étude se concentre spécifiquement sur l'optimisation du fonctionnement d'un système de climatisation. L'objectif est de maintenir une température confortable tout en optimisant l'efficacité énergétique en minimisant la consommation d'énergie lorsque cela est possible.

En résumé, notre travail s'inscrit dans le domaine de la commande optimale, où nous cherchons à résoudre des problèmes de contrôle pour améliorer l'efficacité opérationnelle du climatiseur en minimisant les variations de température et en optimisant l'utilisation de l'énergie. Cette approche combine des concepts de la théorie de la commande optimale et de la recherche opérationnelle pour atteindre ces objectifs.

Abstract

In the context of our research, we conducted an in-depth literature review, with a focus on solving optimal control problems in hybrid dynamical systems with an autonomous switched. This type of problem is closely related to the renowned Pontryagin's Maximum Principle. Our study specifically centers on optimizing the operation of an air conditioning system. The goal is to maintain a comfortable temperature while maximizing energy efficiency by minimizing energy consumption whenever possible.

In summary, our work falls within the field of optimal control, where we aim to address control problems to enhance the operational efficiency of the air conditioning system by minimizing temperature fluctuations and optimizing energy usage. This approach combines concepts from optimal control theory and operations research to achieve these objectives.