MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

THESE DE DOCTORAT LMD

SPECIALITE : MATHEMATIQUES

OPTION : MATHEMATIQUES APPLIQUEES ET RECHERCHE OPERATIONNELLE

Présentée par :

Mme Meriem AMMOURA

Sujet :

Logiques floues et recherche opérationnelle

Devant le jury d'examen composé :

Mr. Mohamed Aidene	Professeur	U.M.M.T.O	Président
Mr. Brahim Oukacha	M.C.A	U.M.M.T.O	Rapporteur
Mr. Yakoub Salhi	M.C	CRIL(U.Lens)	Co-Rapporteur
Mr Bachir Saadi	M.C.A	U.M.M.T.O	Examinateur
Mr. Lakhdar Sais	Professeur	CRIL(U.Lens)	Examinateur

Soutenue : le 18/12/2016

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur Brahim OUKACHA mon directeur de thèse, pour sa disponibilité et son soutien scientifique et humain.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Yakoub SALHI mon directeur de thèse, maître de conférence à l'université d'Artois de Lens, qui a accepté de m'encadrer et de diriger ce travail. Ses remarques, ses conseils m'ont été indispensable dans la rédaction de ce document. Je le remercie de m'avoir guidé jusqu'au bout pour la réalisation de ce manuscrit.

Il m'est très agréable de remercier le Professeur Mohamed AIDENE de l'université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je tiens à remercier Monsieur Bachir SADI maître de conférence A de l'université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou, d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

J'ai l'honneur de remercier le Professeur Lakhdar SAIS de l'université d'Artois de Lens, de faire partie de mon jury et d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Mes remerciements chaleureux s'adressent également à mon mari Brahim et surtout à mon fils adoré Ayan, je remercie également mon papa et ma maman qui m'ont toujours soutenue et sans oublier mes frères Elias et Sofiane et ma belle soeur Safia.

Mes remerciements vont particulièrement vers mon beau père, ma belle mère et toutes mes belles soeurs.

Table des matières

Introduction générale

Introduction

Dans les logiques classiques, le principe de l'explosion est une loi qui stipule que toute formule peut être déduite à partir d'une contradiction en utilisant le processus d'inférence. Ce principe signifie que le processus d'inférence seul ne permet pas de raisonner en présence d'incohérence dans les logiques classiques. Pour rémédier à ce problème, plusieurs approches ont été proposées dans la littérature comme la théorie d'argumentation, les logiques para-cohérentes, la révision de croyances. L'objectif principal de ces approches est de traiter l'incohérence comme un concept informatif. Dans la même veine, les mesures d'incohérence ont été introduites pour les utiliser dans l'analyse d'incohérence. Dans la littérature, une mesure d'incohérence est définie par une fonction qui associe une valeur non négative à chaque base de croyances [22]. Plusieurs mesures d'incohérence ont été proposées dans la littérature (i.e.[16,25,27,35,22,32,19,23]), et il a été démontré qu'elles sont appropriées à de diverses applications telles que les protocoles de commerce [9], la spécification des logiciels [30], la fusion de croyances [35], les nouveaux reportages [21], l'ingénierie des exigences [22], les contraintes d'intégrité [17], les bases de données [30], les ontologies [40], la sémantique du web [40], la détection d'intrusion du réseau [31], et les systèmes multi-agents [23].

Dans [22], Hunter et Konieczny ont proposé quatre propriétés axiomatiques que toute mesure d'incohérence doit satisfaire. A savoir les propriétés de Cohérence, Monotonie, Indépendance des formules libres et de Dominance. Par contre, dans un récent article [7], Besnard a fourni des objections aux propriétés axiomatiques d'Indépendance des formules libres et de Dominance. En effet, l'auteur a souligné dans son article les conséquences indésirables de ces propriétés, telles que l'ignorance de certains conflits, et il a fourni des propriétés alternatives afin d'éviter ces conséquences. Il est intéressant de noter que Hunter et Konieczny ont également fourni des objections similaires dans [22] à la propriété d'Indépendance des formules libres en pointant les cas où cette propriété peut être considérée comme trop forte. Pour répondre à ces objections, les auteurs ont proposé de considérer une propriété plus faible introduite dans [37], appelée Indépendance des formules sûres.

L'incohérence est souvent mesurée d'une manière unidimentionnelle, telle que le nombre de sous ensembles minimaux incohérents [22] et le nombre de sous ensembles maximaux cohérents [18]. Cependant, de nombreuses mesures d'incohérence existantes montrent dans un sens qu'aucune seule mesure peut capturer les différents aspects de l'incohérence. En effet, l'incohérence d'une base de croyances peut résulter à partir de plusieurs raisonnements et doit être mesurer d'une manière multidimentionnelle. Par exemple, nous considérons la base de croyances $K = \{p, \neg p \wedge q, \neg p \wedge r, \neg p \wedge s\}$. Il est clair que le conflit est entre la formule p et la sous-formule $\neg p$. Si nous utilisons la mesure d'incohérence $\mathcal{I}_{\mathcal{LP}m}$ définie dans [27] qui est basée sur la logique tri-valués de Priest [20], alors nous pouvons capturer le conflit entre p et $\neg p$. En effet ($\mathcal{I}_{\mathcal{LP}m} = 1$) signifie qu'il y a seulement une variable propositionnelle qui est impliquée dans les conflits de K. Cependant, puisque la mesure $\mathcal{I}_{\mathcal{LP}m}$ considère K comme une seule formule, elle ne révèle pas le fait qu'il y a trois conflits entre les formules de K. A cette fin, nous pouvons utiliser la mesure $\mathcal{I}_{SMI}$ [22] qui est définie comme étant le nombre de sous ensembles minimaux incohérents de K ($\mathcal{I}_{SMI}(K) = 3$). Nous ne pouvons pas dire que la mesure $\mathcal{I}_{SMI}$ est plus informative que la mesure $\mathcal{I}_{\mathcal{LP}m}$ ou inversement, mais les deux mesures fournissent l'information sur les facettes incomparables d'incohérence. Autrement dit, les deux mesures ne sont pas nécessairement comparables dans le sens où l'une est meilleure que l'autre, elles peuvent capturer les aspects incomparables qui constitut l'incohérence. Nous pensons que les objections de Besnard aux propriétés d'Indépendance des formules libres et de Dominance peuvent être utilisées pour plaider dans ce sens. Par exemple, la propriété d'Indépendance des formules libres a un sens quand nous ne considérons pas la structure interne des formules dans une base de croyances. En effet, cela signifie que l'ajout d'une nouvelle formule qui n'est pas impliquée dans aucun conflit, ne change pas le degré d'incohérence. Cependant, nous avons besoin d'autres propriétés dans les cas où nous considérons la structure interne des formules. Par exemple, le fait que $\mathcal{I}_{\mathcal{LP}m}$ ne satisfait pas la propriété d'Indépendance des formules libres ne signifie pas que cette mesure d'incohérence n'est pas appropriée, puisqu'elle capture les importants aspects d'incohérence.

Avant d'introduire notre mesure d'incohérence, nous présentons tout d'abord dans cette thèse les résultats sur la compatibilité de certaines propriétés de l'état de l'art des mesures d'incohérence. Notre objectif derrière est d'établir cette incompatibilité des résultats qui démontre qu'il n'y a aucune mesure d'incohérence qui est meilleure que toutes les autres, sachant que la plupart des propriétés proposées dans la littérature pour les mesures d'incohérence ont des motivations raisonnables. En outre, nous cherchons à fournir les raisons formelles expliquant pourquoi notre mesure ne satisfait pas certaines propriétés. Nous démontrons que les propriétés d'Additivité introduites dans [22] et [38] sont incompatibles avec la propriété de Dominance [22] et la propriété de Subsumption-Orientation introduite dans [7]. Nous démontrons également que les mesures d'incohérence qui satisfont les propriétés du système fort de Besnard [7], permettent seulement de distinguer les bases de croyances incohérentes de celles qui sont cohérentes (la quantité d'incohérence est la même pour toutes les bases de croyances qui sont incohérentes).

Ensuite, nous introduisons notre mesure d'incohérence dénotée $\mathcal{I}_{SMC}$, qui est une approche basée sur les sous ensembles maximaux cohérents ($SMCs$). En utilisant cette mesure, la quantité de conflits dans une base de croyances est définie comme le plus petit nombre de pièces d'informations qui ne sont pas dans l'intersection des $SMCs$ couvrant toutes les pièces d'informations cohérentes. L'idée principale porte sur deux volets. Premièrement, l'incohérence doit être quantifiée en considérant toutes les formules cohérentes possibles d'une croyance. Deuxièmement, une base de croyances avec les $SMCs$ partageant beaucoup de formules devrait être assignée une plus petite valeur d'incohérence qu'une base de croyances avec les $SMCs$ partageant un petit nombre de formules. Intuitivement, en tenant compte des formules partagées par les $SMCs$, nous cherchons à capturer les formules qui sont impliquées dans un petit nombre de conflits. En outre, nous décrivons un consensus multi-agents basé sur l'interprétation de $\mathcal{I}_{SMC}$ en utilisant une logique épistémique bien connue, nommée logique multimodale **S5**. Dans cette approche, nous considérons chaque pièce d'informations cohérente comme une conclusion qui est possible selon un agent distinct, et la quantité de conflits est définie à partir de la taille du plus grand consensus entre tous les agents. Un consensus possible est un sous ensemble de pièces d'informations cohérentes qui ne sont pas rejetées par aucun agent. Un agent rejette un sous ensemble de pièces d'informations s'il est incompatible avec la piece d'informations qu'il/elle soutient.

Après la description de $\mathcal{I}_{SMC}$, nous démontrons qu'elle satisfait plusieurs propriétés désirables proposées dans la littérature, telles que la Cohérence, Monotonie, Indépendance des formules libres et la Super-Additivité. Nous indiquons également que d'autres propriétés intéressantes sont satisfaites par notre mesure d'incohérence telles qu'une généralisation de Super-Additivité et une variante Faible-Dominance. Alors, nous démontrons que le problème du calcul de notre mesure d'incohérence peut être formulé en un problème de programmation linéaire en nombres binaires. Cet encodage est principalement défini à partir d'un ensemble de sous ensembles maximaux cohérents. A savoir que le nombre des $SMCs$ d'une base de croyances est exponentiel dans le pire des cas. Ainsi, pour éviter le calcul des $SMCs$, nous proposons un encodage en Partiel Max-SAT, qui est de taille polynomiale et il est défini sans le calcul d'aucun sous ensemble maximal cohérent.

Finalement, nous étudions la relation entre notre mesure d'incohérence et les deux mesures d'incohérence de l'état de l'art appelées $\mathcal{I}_{CC}$ proposée dans [24] et $\mathcal{I}_M$ proposée dans [18]. La mesure $\mathcal{I}_{CC}$ tient en compte les formules partagées par les sous ensembles minimaux incohérents ($SMIs$). Intuitivement, cette mesure quantifie la quantité de conflits comme le nombre des $SMIs$ qui peuvent être isolés en éliminant les formules. Notre comparaison de $\mathcal{I}_{SMC}$ et de $\mathcal{I}_{CC}$ est motivée par le fait que ces deux mesures satisfont plusieurs propriétés existantes, en particulier, la propriété intéressante introduite dans [24], appelée, Independent-SMI-Additivité. En outre, $\mathcal{I}_{SMC}$ et $\mathcal{I}_{CC}$ tiennent en compte la distribution des formules parmis les conflits. En particulier, nous démontrons qu'il y a des bases de croyances incohérentes qui sont non distinguables par $\mathcal{I}_{CC}$ mais qui sont distinguables par $\mathcal{I}_{SMC}$ et inversement. En outre, notre comparaison entre notre mesure d'incohérence $\mathcal{I}_{SMC}$ et la mesure d'incohérence $\mathcal{I}_M$ est motivée par le fait que toutes les deux sont fondées sur les $SMCs$. En effet, la mesure d'incohérence $\mathcal{I}_M$ quantifie la quantité de conflits à partir du nombre des $SMCs$: plus de $SMCs$ signifie plus de conflits. Nous démontrons que $\mathcal{I}_{SMC}$ et $\mathcal{I}_M$ ne quantifient pas la quantité de conflits de la même manière. En effet, contrairement à $\mathcal{I}_{SMC}$, $\mathcal{I}_M$ ne tient pas en compte la distribution des formules parmis les conflits.

Le reste de la thèse est structuré comme suit.

Le premier chapitre introduit les notions essentielles de la logique propositionnelle classique, incohérence et les bases de croyances et quelques applications citées dans l'état de l'art sur la résolution de l'incohérence telles que la fusion de plusieurs bases de croyances, l'objectif derrière est d'extraire une base de coyances cohérente à partir de cette fusion et la théorie d'argumentation qui consiste à soutenir ou non une conclusion initiale qui est déduite à partir d'une pièce d'informations.

Le deuxième chapitre propose la définition formelle de la mesure d'incohérence telle qu'elle a été donnée dans l'état de l'art. Nous présentons ici les objections de Besnard sur les propriétés fondamentales a savoir, Indépendance des formules libres et Dominance. Nous fournissons également les résultats sur la compatibilité de certaines propriétés de l'état de l'art des mesures d'incohérence. Finalement, nous terminons ce chapitre par la description de quelques exemples de mesures d'incohérence.

Le troisième chapitre présente notre mesure d'incohérence qui est fondée sur les sous ensembles maximaux cohérents. Puis, nous présentons un ensemble de propriétés que satisfait notre mesure d'incohérence. Nous présentons également une interprétation épistémique de notre mesure d'incohérence tout en utilisant la logique multimodale **S5**.

Dans le dernier chapitre, nous founissons deux modèles d'approche pour le problème du calcul de notre mesure d'incohérence, le premier est fondé sur la programmation linéaire en nombres binaires et le deuxième en Partiel Max-SAT. Ensuite, nous comparons notre mesure d'incohérence avec deux autres métriques existantes.

Chapitre 1

Notations et préliminaires

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques définitions sur la logique classique propositionnelle, ensuite nous définissons quelques concepts concernant l'incohérence et les bases de croyances que nous utiliserons dans le reste de ce manuscrit et à la fin de ce chapitre nous présentons des applications pour la résolution d'incohérence dans le cadre de la fusion de croyances et dans la théorie d'argumentation.

1.2 Logique classique propositionnelle

Dans un premier temps, nous définissons la syntaxe de la logique classique propositionnelle $\mathcal{LCP}$ [8]. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble dénombrable de variables propositionnelles. On utilisera les lettres minuscules p,q,r,... pour dénoter les éléments de $\mathcal{P}$. On notera par $\mathcal{F}$ l'ensemble des formules de la logique classique propositionnelle, et on utilisera les lettres grecques ϕ,ψ,... pour dénoter ses éléments. Une formule dans $\mathcal{F}$ est définie par induction en partant de $\mathcal{P}$ et les constantes $\perp$, qui dénote faux, et $\top$, qui dénote vrai, et en utilisant les connecteurs logiques usuels, à savoir $\wedge$, $\vee$,$\neg$ et $\rightarrow$. Autrement dit, le langage de la logique classique propositionnelle est défini par la grammaire suivante :

$$\phi ::= \perp \mid \top \mid p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi \mid \phi \vee \phi \mid \phi \rightarrow \phi$$

Etant donné une formule ϕ, on utilisera $Var(\phi)$ pour dénoter l'ensemble des variables apparaissant dans ϕ.

Exemple 1.1. *Par exemple les formules suivantes sont des formules de la logique classique propositionnelle :*

$$\mathcal{F} = \{p, \neg p \vee q, (p \wedge q) \rightarrow r\}$$

Nous définissons maintenant la sémantique booléenne pour $\mathcal{LCP}$. Une interprétation booléenne $\mathcal{B}$ d'une formule ϕ est une fonction de $Var(\phi)$ dans $\{0,1\}$ (0 pour faux et 1 pour vrai). Elle est étendue par induction aux formules de la manière suivante :

$$\mathcal{B}(\perp) = 0$$

$$\mathcal{B}(\phi \wedge \psi) = \min((\phi),(\psi))$$
$$\mathcal{B}(\neg\phi) = 1 - \mathcal{B}(\phi)$$
$$\mathcal{B}(\top) = 1$$
$$\mathcal{B}(\phi \vee \psi) = \max((\phi),(\psi))$$
$$\mathcal{B}(\phi \rightarrow \psi) = \max(1 - \mathcal{B}(\phi),\mathcal{B}(\psi))$$

où min est utilisé pour minimum et max pour maximum. Une formule est dite cohérente s'il existe une interprétation booléenne $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{B}(\phi) = 1$, dans ce cas, $\mathcal{B}$ est dit modèle de ϕ. Par exemple $(p \wedge (q \rightarrow r))$ est une formule cohérente. ϕ est incohérente si et seulement si ϕ n'a aucun modèle. Par exemple $(\phi \wedge \neg\phi)$ est une formule incohérente.

Table de vérité des connecteurs logiques est :

TAB. 1.1 – *Table de vérité des connecteurs logiques*

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

TAB. 1.2 – *Table de vérité*

p	q	r	$\neg p \vee q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Exemple 1.2. *Reprenons l'exemple précédent. L'ensemble des interprétations des formules de $\mathcal{F}$ est donné par la table de vérité ci-dessus.*

Il est important de dénoter qu'il est possible de définir de manière équivalente tous les connecteurs en fonction uniquement de $\wedge$ et $\neg$. Cela en utilisant les équivalences suivantes :

$$\phi \vee \psi \equiv \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \quad et \quad \phi \rightarrow \psi \equiv \neg(\phi \wedge \psi)$$

1.3 Incohérence et Base de croyances

Une croyance désigne l'information qu'un individu croit actuellement, c'est-à-dire les informations incertaines que possède l'individu (une information qu'il considère vraie sans en être sûre). Inversement une connaissance désigne l'information qu'un individu sait vraie, c'est-à-dire les informations certaines et compatibles que possède l'individu (les informations qu'il considère vraies avec certitude et qui ne peuvent être remises en cause).

Nous donnons maintenant la définition d'une base de croyances.

Définition 1.1. (Base de croyances). Une base de croyances K est définie par un ensemble fini de croyances données sous forme de formules logiques propositionnelles $K = \{\phi,\psi,...\}$.

Dénotons par $\mathcal{K}$ l'ensemble des bases de croyances.

Nous distinguons deux manières différentes de voir une base de croyances. La première est qu'une base de croyances peut être représentée par l'ensemble de ses modèles et la deuxième est que chaque formule de la base de croyances constitut une information bien distincte. pour bien illustrer, étant donné les deux bases de croyances $K = \{\phi,\psi\}$ et $K' = \{\phi \wedge \psi\}$. Les bases de croyances sont différentes puisque la première base est issue à partir de deux sources possibles différentes alors que la deuxième est issue à partir d'une seule source possible. Particulièrement, nous pouvons garder ou rejeter la formule ϕ indépendemment de la formule ψ alors que ce n'est pas le cas dans la deuxième base de croyances.

Une base de croyances est dite incohérente lorsqu'elle contient à la fois une formule ϕ et sa négation $\neg\phi$, autrement dit elle contient au moins une formule contradictoire.

Pour une meilleure compréhension, nous nous donnons les exemples suivants.

Exemple 1.3. *Considérons un homme politique de gauche (p), et il fait compagne sur un programme de gauche qui est basé sur une politique économique de la demande (augmentation des salaires, des allocations et préstations sociales, baisse des impôts...)(q). Considérons également un* *autre homme politique de droite (r), et il fait compagne sur un programme de droite basé sur une politique économique de l'offre (baisse des charges des entreprises, gel des salaires des fonctionnaires, augmentation de la TVA,...)(s). En outre, Un homme politique ne peut pas être à la fois de gauche et de droite. Et une fois un homme politique de gauche est élu, il applique tout le contraire de ce qu'il a dit auparavant au gouvernement et il applique une politique de droite. Ce qui nous donne la base de croyances incohérente suivante :* $\{p \wedge q, r \wedge s, \neg p \vee \neg r, p \wedge s\}$.

Exemple 1.4. *Un élève est surdoué (p), alors on s'attend à ce qu'il a d'excellents résultats scolaires (q) et qu'il réussisse professionnellement ou autres vu son potentiel (s). Or, il s'avère que dans certaines situations, l'élève est surdoué et rate sa scolarité. Ce qui nous donne la base de croyances incohérente suivante :* $\{p \rightarrow (q \wedge s), p \wedge \neg q\}$.

Exemple 1.5. *Un médecin nous avance que symptôme 1* (s_1) *et symptôme 2* (s_2) *impliquent la maladie* m_1 ($s_1 \wedge s_2 \rightarrow m_1$)*, il nous dit également que le symptôme 2 et le symptôme 3 impliquent la maladie* m_2 ($s_2 \wedge s_3 \rightarrow m_2$) *; on sait par ailleurs qu'on ne peut pas avoir les maladies* m_1 *et* m_2 *ensembles* ($\neg m_1 \vee \neg m_2$)*, et qu'un malade a les symptômes* s_1,s_2 *et* s_3*. Cela donne la base de croyances incohérente suivante* $\{s_1 \wedge s_2 \wedge s_3, \neg m_1 \vee \neg m_2, s_1 \wedge s_2 \rightarrow m_1, s_2 \wedge s_3 \rightarrow m_2\}$.

A savoir qu'à partir de toute base de croyances incohérente, nous pouvons construire des sous ensembles de formules minimaux incohérents. La définition de ces sous ensembles est donnée comme suit.

Définition 1.2. (SMI**).** Soit K une base de croyances. M est un sous-ensemble minimal incohérent (SMI) de K ssi (i) $M \subseteq K$, (ii) M est incohérent, et (iii) $M' \not\subset M$ pour tout M' sous-ensemble incohérent de K.

Il est clair qu'une base de croyances incohérente K peut avoir plusieurs sous ensembles minimaux incohérents. Dénotons par $SMIs(K)$ l'ensemble de tous les sous ensembles minimaux incohérents de K.

Exemple 1.6. *soit $K = \{p,\neg p \wedge q,\neg q\}$ une base de croyances incohérente. L'ensemble des sous ensembles minimaux incohérents de K est le suivant :*

$$SMIs(K) = \{\{p,\neg p \wedge q\},\{\neg p \wedge q,\neg q\}\}$$

Il est clair qu'une base admettant un SMI est elle-même incohérente. Par ailleurs, le nombre de SMIs est exponentiel dans le pire des cas. Dans la littérature, de nombreux algorithmes et outils ont été proposés pour l'énumération des SMIs d'une base de croyances (e.g. [20,28]).

De la même façon, nous pouvons également construire des sous ensembles de formules maximaux cohérents.

Définition 1.3. (SMC). Soit K une base de croyances. M est un sous-ensemble minimal cohérent (SMC) de K ssi (i) $M \subseteq K$, (ii) M est cohérent, et (iii) $M' \not\subset M$ pour tout M' sous-ensemble cohérent de K.

L'ensemble des sous ensembles maximaux cohérents est dénoté par $SMCs(K)$.

Exemple 1.7. *Reprenons l'exemple précédent. L'ensemble des sous ensembles maximaux cohérents est le suivant :*

$$SMCs(K) = \{\{p,\neg q\},\{\neg p \wedge q\}\}$$

On peut constater qu'une base de croyances cohérente n'admet qu'un unique SMC, qui est elle-même. Cela dit, tout comme les $SMIs$, le nombre de $SMCs$ est exponentiel dans le pire des cas. Il existe dans la littérature des algorithmes combinant l'énumération des SMIs avec celle des $SMCs$ en utilisant le principe de dualité.

Définition 1.4. (Formule libre). Soit K une base de croyances et ϕ une formule dans K. ϕ est une formule libre dans K si $\phi \notin M$, pour tout $M \in SMIs$.

Nous utilisons $Free(K)$ pour représenter l'ensemble des formules libres dans K. Par exemple, pour une base de croyances $K = \{p,\neg p \wedge q,\neg q,r\}$, la formule r est une formule libre dans K.

Il est clair que la formule libre n'appartient à aucun sous ensemble minimal incohérent.

Nous utilisons également $IF(K)$ pour désigner l'ensemble des formules incohérentes dans K, c-à-d $IF(K) = \{\phi \in K \mid \phi \vdash \bot\}$.

Soit S un ensemble fini, et $|S|$ pour désigner sa cardinalité. Cependant, nous utilisons $\uplus$ pour dénoter l'union disjointe, qui est juste l'union régulière, sauf que ses ensembles d'opérandes doivent avoir aucun élément en commun. Plus précisément, étant donné deux ensembles S_1 et S_2, $S_1 \uplus S_2$ signifie $S_1 \cup S_2$ tel que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Une formule propositionnelle en forme normale conjonctive (CNF pour Conjunctive Normal Form) est définie comme une conjonction de clauses. Une clause est une disjonction de littéraux, où un littéral est soit une variable propositionnelle (p), soit sa négation ($\neg p$). Par exemple, $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)$ est une formule CNF où $(p \vee \neg q)$ est une de ses clauses et p et q des littéraux. Nous rappelons que chaque formule propositionnelle peut être transformer en une formule CNF en utilisant l'encodage linéaire de Tseitin [22] tout en préservant l'équivalance entre les deux formules du point de vue de satisfaisabilité. Le principe de la transformation est d'associer une variable propositionnelle fraîche à chaque sous formule de $\mathcal{F}$ de la forme : $\neg p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \rightarrow q$ et $p \leftrightarrow q$. Pour mieux clarifier cette transormation, on se donne l'exemple suivant.

Exemple 1.8. *Nous mettons la formule $\mathcal{F}$ suivante en CNF. $\mathcal{F} = ((p \wedge q) \vee (\neg r \wedge (s \vee t))$.*
D'abord, nous introduisons les variables propositionnelles fraîches a_1, a_2, a_3 et a_4 comme suit :

$$a_1 \leftrightarrow (a_2 \vee a_3)$$

$$a_2 \leftrightarrow (p \wedge q)$$

$$a_3 \leftrightarrow (\neg r \wedge a_4)$$

$$a_4 \leftrightarrow ((s \vee t)).$$

En utlisant les équivalences traditionnelles logiques, nous obtenons la formule $CNF(\mathcal{F})$ suivante :
$CNF(\mathcal{F}) = (\neg a_1 \vee a_2 \vee a_3) \wedge (a_1 \vee \neg a_2) \wedge (a_1 \vee \neg a_3) \wedge (\neg a_2 \vee p) \wedge (\neg a_2 \vee q) \wedge (a_2 \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (\neg a_3 \vee \neg r) \wedge (\neg a_3 \vee a_4) \wedge (a_3 \vee r \vee \neg a_4) \wedge (\neg a_4 \vee s \vee t) \wedge (a_4 \vee \neg s) \wedge (a_4 \vee \neg t) \wedge a_1$.

Nous avons introduit dans les sections précédentes des notions qui vont nous permettre de définir concrètement le problème SAT.
Le problème de satisfaisabilité n'est rien d'autre qu'un problème de décision qui vise à savoir si une formule propositionnelle donnée est vraie ou fausse. D'une vue de complexité, ce problème est NP-complet [10].

Avant de définir le problème SAT, tout d'abord nous introduisons le problème de décision.

Définition 1.5. (Problème de décision). Un problème de décision est une question mathématique dont la réponse et soit "oui" ou "non".

Définition 1.6. (Problème SAT). Le problème de satisfaisabilté d'une formule propositionnelle ou problème SAT consiste à décider si une formule en forme normale conjonctive (CNF) donnée admet un modèle ou non.

Nous présentons une des règles pour résoudre le problème SAT qui est, la règle de résolution.

Définition 1.7. (Résolution). Si nous avons $c_1 \vee p$ et $c_2 \vee \neg p$, où c_1 et c_2 sont des clauses et p une variable propositionnelle, le résolvant de $c_1 \vee p$ et de $c_2 \vee \neg p$ est donné par $c_1 \vee c_2$.

Cette méthode est complèle pour le problème SAT.

Exemple 1.9. *Soient* $c_1 = (p \vee q \vee r)$ *et* $c_2 = (\neg p \vee s)$*. Le résolvant de* c_1 *et* c_2 *est* $(q \vee r \vee s)$.

Définition 1.8. (Max-SAT). Un problème Max-SAT est un problème d'optimisation que nous associons au problème SAT. Il consiste à maximiser le nombre de clauses qui peuvent être satisfaites pour une formule propositionnelle donnée.

Définition 1.9. (Partiel Max-SAT). Un problème Partiel Max-SAT est une formule CNF dont certaines clauses sont relaxables (souples) et les restes sont non-relaxables (dures). La résolution d'une instance Max-SAT partiel consiste à trouver une affectation qui satisfait toutes les clauses dures et le maximum de clauses souples.

Le raisonnement en présence d'incohérence est un problème très important dans le domaine de l'intelligence artificielle dont la résolution de conflits logiques est de raisonner à partir d'un ensemble de pièces d'informations incohérentes. En tenant compte des hypothèses que l'on peut faire sur cet ensemble, diverses applications sont proposées comme la révision de croyances qui consiste a implémenter d'autres formules, et peuvent révéler des informations plus importantes que d'autres tout en supprimant les informations incohérentes, la fusion de croyances provenant de sources multiples, l'objectif est de construire une base cohérente à partir de ces informations confondues et la théorie d'argumentation, qui est fondée sur la construction d'arguments et de contre-arguments, l'objectif est d'accepter ou de rejeter une pièce d'informations initiale.

1.4 Exemples sur la résolution d'incohérence

Plusieurs applications ont été proposées dans la littérature afin de résoudre l'incohérence. Nous présentons ici deux sortes de résolution, la première est fondée sur la fusion de plusieurs sources d'informations possibles et la deuxième est fondée sur la théorie d'argumentation qui est basée sur la construction d'arguments et de contre-argumments afin de soutenir une information donnée.

Tout d'abord nous présentons celle qui est fondée sur la fusion des croyances.

1.4.1 Fusion de croyances

La fusion des croyances est censée contribuer au domaine d'incohérence, puisqu'elle vise à intégrer les croyances de différentes sources possibles (agents). Plusieurs approches ont été proposées pour la fusion de bases de croyances potentiellement contradictoires [35,5,11,12,26].

La fusion des bases de croyances ordonnées a pour objectif de déteminer le nombre maximum d'informations cohérentes à partir de ces bases, qui sont individuellement cohérente. Chaque base de croyances ordonnée est un multi-ensemble d'informations sous forme de formules propositionnelles issues d'un agent (source).

Un profil de croyances est un ensemble d'informations qui englobe toutes les différentes sources d'informations possibles. L'opération de fusion est une notion intutive pour la résolution d'incohérence de l'ensemble du profil des croyances. Autrement dit, l'opération de fusion vise à déterminer un ensemble d'informations cohérent à partir de plusieurs sources d'informations possibles confondues. Par conséquent, l'opération de fusion assigne une base de croyances cohérente à chaque profil de croyances.

Les opérateurs de fusions des bases de croyances proposés dans la littérature sont classés essentiellement en deux familles de fusion : les opérateurs d'arbitrage et les opérateurs de majorité. Les opérateurs d'arbitrage consistent à trouver au mieux une solution qui arrange toutes les sources possibles, en d'autres termes, est de trouver un terrain d'enttente entre toutes les sources possibles. Les opérateurs de majorité consistent à prendre la décision proposée par la majorité des sources possibles. Parmis ces opérateurs de fusion, nous avons la conjonction entre les bases de croyances et également l'opérateurs de la disjonction entre les bases de croyances. Et d'autres opérateurs basés sur la notion de distance [19], par exemple, l'opérateur somme qui consiste à additionner toutes les distances entre une interprétation et les bases de croyances et choisit la distance la plus proche du profil.

L'objectif de tous ces opérateurs est d'extraire une pièce d'informations cohérente à partir de plusieures sources possibles confondues tout en utilisant le maximum d'informations et en favorisant aucune source.

1.4.2 Théorie d'argumentation

L'argumentation est une activité verbale, sociale et rationnelle visant à convaincre d'accepter un point de vue mis en avant par une constellation de propositions justifiant ou réfutant la proposition exprimée dans le point de vue.

Toutefois, L'argumentation est un processus important pour traiter les informations contradictoires en générant et/ou en comparant les arguments. Souvent, il est fondé sur la construction et la comparaison des arguments. Plusieures approches de la théorie d'argumentation ont été proposées dans la littérature afin de résoudre l'incohérence, (voir par exemple [1,6,13]).

L'argumentation consiste donc à identifier les hypothèses pertinentes et les conclusions pour analyser un problème donné. En outre, elle implique l'identification des conflits, ce qui entraîne la nécessité de rechercher des conclusions particulières. L'argumentation est une forme vitale de la cognition humaine. Constamment dans notre quotidien, nous sommes confrontés à des informations qui sont en conflit, et nous contraignons de faire face aux résultats incohérents. Inconsiemment, nous pesons les informations contradictoires et nous sélectionnons certaines informations préférées aux autres. Quelquefois, nous traitons les informations contradictoires de manière plus consciente. Par exemple, si nous prenons une grande décision, nous pouvons avoir à l'esprit certains arguments et de contre-arguments. Considérons par exemple une décision sur où aller faire ses études supérieures. Ici, il y a une liste de points avec des avantages et des inconvénients pour chaque point. Et quand nous ne sommes pas sûrs de notre information, nous pouvons essayer de chercher une meilleure information, ou de demander conseil, afin de résoudre l'incohérence. Les professionnels entreprennent systématiquement l'argumentation comme une partie intégrale de leur travail. Ils doivent identifier les avantages et les inconvénients pour analyser les situations avant de présenter certaines informations à un auditoire et / ou avant de prendre une décision. De nombreux conflits consciemment identifiés dans l'information disponible, puis, selon la tâche à entreprendre, des arguments et des contre-arguments sont construits. L'argumentation peut aussi impliquer des chaînes de raisonnement, où les conclusions sont utilisées dans les hypothèses pour tirer de nouvelles conclusions. De plus, la tâche de trouver des avantages et des inconvénients peut être décomposée récursivement. Ainsi, des contre-arguments peuvent être en conflit avec les hypothèses d'un argument.

Un argument est composé d'un ensemble d'hypothèses et d'une conclusion qui peut être obtenue par une ou plusieurs étapes de raisonnement (i.e, étapes de déduction). Les hypothèses utilisées sont appelées le support ou les prémisses de l'argument, et la conclusion ou la conséquence de l'argument. Le support d'un argument fournit la raison (la justification) en faveur de la conclusion de l'argument. En d'autres termes, le support entraîne déductivement la conclusion.

Pour formaliser l'argumentation, nous pouvons utilisé n'importe quelle logique pour définir l'implication de la conclusion à partir d'un support. Les logiques possibles incluent les logiques déscriptives, logiques paracohérentes, logiques modales et la logique classique. Par exemple, en utilisant la logique classique, la position de départ est qu'un argument déductif consiste en une conclusion impliquée par une série d'hypothèses telles que la conclusion ainsi que les hypothèses sont désignées par les formules de la logique classique et l'implication est la déduction dans la logique classique. La logique classique est un formalisme bien connu. Il est largement utilisé par la philosophie, les mathématiques et l'informatique pour capturer le raisonnement déductif. Ella a une simple sémantique et syntaxe, et elle est soutenue par la théorie de la preuve et des résultats fondamentaux. En utilisant la logique classique, nous pouvons fournir une formalisation simple et efficace d'arguments et de contre-arguments. Un argument est une paire $\langle$ support, conclusion$\rangle$ où le support est un ensemble minimal cohérent de formules en faveur de la conclusion. Un contre-argument est également un argument où sa conclusion contredit le suport de l'argument initial.

L'objectif de cette méthode est de prendre une décision sur une information ou une série d'informations donnée afin d'acceter ou de refuser cette information. Autrement dit, nous construisons tous les arguments et les contre-arguments, ensuite nous comparons entre ces arguments et enfin nous séléctionnons juste les arguments jugés acceptables.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les notions de base de la logique classique propositionnelle. Nous nous sommes également intéressés aux concepts d'incohérence et bases de croyances. Enfin, nous avons présenté deux exemples de résolution d'incohérence, la première de construire une base de croyances cohérente à partir de la fusion de plusieurs bases de croyances et la seconde est de soutenir ou non une conclusion donnée qui est issue à partir d'un ensemble d'hypothèses.

Chapitre 2

Sur les mesures d'incohérence : définition et propriétés

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la définition standard associée aux mesures d'incohérence, puis nous fournissons quelques objections proposées par Besnard sur les propriétés que doit satisfaire toute mesure d'incohérence [7]. Nous décrivons également quelques propriétés de l'état de l'art sur les systèmes axiomatiques des mesures d'incohérence. Et nous étudions la cohérence des systèmes construits à partir des propriétés nommées : Super-Additivité, SMI-Additivité et Dominance, et de la même façon la propriété de Subsumption-Orientation avec les propriétés d'Additivité. Enfin, nous terminons ce chapitre par la description de quelques exemples de mesures d'incohérence.

2.2 Mesures d'incohérence

Les mesures d'incohérence ont été introduites afin de quantifier le degré de conflits d'une ou de plusieurs bases de croyances. Dans la littérature, une mesure d'incohérence est définie par une fonction qui assigne une valeur réelle non négative à chaque base de croyances [22].

Définition 2.1. (Mesure d'incohérence). Une mesure d'incohérence $\mathcal{I}$

est une fonction $\mathcal{I} : \mathcal{K} \rightarrow [0, +\infty]$.

Au cours de ces dernières années, le raisonnement en présence d'incohérence a eu un regain d'intérêt en raison d'un certain nombre de défis en termes de collecte, de modélisation, de représentation, et la demande de l'information. Dans ce contexte, diverses approches basées sur la logique ont été proposées dans la littérature pour quantifier le degré d'incohérence. Par conséquent, plusieurs propriétés ont été définies pour caractériser ces mesures. Plus spécialement, dans [22], Hunter et Konieczny proposent les propriétés axiomatiques que toute mesure d'incohérence doit satisfaire. Une mesure d'incohérence $\mathcal{I}$ est appelée une mesure d'incohérence basique si elle satisfait les propriétés suivantes, pour toutes bases de croyances K et K', et deux formules ϕ et ψ :

- **Cohérence** : $\mathcal{I}(K) = 0$ ssi K est cohérente. La propriété de Cohérence indique qu'une mesure d'incohérence doit permettre de distinguer les bases de croyances cohérentes de celles incohérentes.
- **Monotonie** : $\mathcal{I}(K) \leq \mathcal{I}(K \cup K')$. La propriété de Monotonie signifie que le degré d'incohérence d'une base de croyances peut augmenter lorsque nous ajoutons d'autres formules à cette base (définies sur le même langage).
- **Indépendance des formules libres** : si $\phi \in Free(K)$, alors, $\mathcal{I}(K) = \mathcal{I}(K \backslash \phi)$. La propriété d'Indépendance des formules libres dit que l'ajout d'une formule qui ne cause pas d'incohérence ne peut pas changer la mesure d'incohérence.
- **Dominance** : si $\phi \vdash \psi$ et $\phi \nvdash \bot$, alors $\mathcal{I}(K \cup \{\psi\}) \leq \mathcal{I}(K \cup \{\phi\})$. La propriété de Dominance déclare que les formules logiquement plus forte apportent (potentiellement) plus de conflits. Nous notons que, pour la propriété de Dominance, la condition que ϕ est cohérente assure que ψ n'est pas trivialement implicite par ϕ.

2.3 Discussion

Il est important de noter que, Besnard a fourni dans [7] des objections sur les propriétés d'Indépendance des formules libres et de Dominance. En particulier, l'objection à la propriété d'Indépendance des formules libres vient du fait qu'une formule libre peut être impliquée dans un conflit si nous considérons la structure interne de la formule, et dans ce cas le degré de conflits doit augmenter. Nous considérons pour une instance, la base de croyances suivante proposée dans [7] : $K = \{p \wedge r, q \wedge \neg r, \neg p \vee \neg q\}$. La base de croyances a un seul sous ensemble minimal incohérent $M = \{p \wedge r, q \wedge \neg r\}$, par conséquent $\neg p \vee \neg q$ est une formule libre dans K. En utilisant la propriété d'Indépendance des formules libres, nous devrions avoir $\mathcal{I}(M) = \mathcal{I}(K)$. Pourtant, p et q sont compatibles et $p \wedge q$ est contradictoire avec la formule libre $\neg p \vee \neg q$. En conséquence, nous pouvons considérer que K contient plus de conflits que M et dans ce cas, la propriété d'Indépendance des formules libres a échoué. De plus, Besnard a démontré que la propriété d'Indépendance des formules libres est fortement liée à la notion des sous ensembles minimaux incohérents qui peut être considérée comme une restriction forte dans la définition des mesures d'incohérence. Pour illustrer ce point, nous considérons la propriété suivante :

Pour tous K, K' si $SMIs(K) \subseteq SMIs(K')$, alors $\mathcal{I}(K) \leq \mathcal{I}(K')$ (SMI-Dependent) Alors, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.1. *$\mathcal{I}$ satisfait la propriété de Monotonie et la propriété d'Indépendance des formules libres ssi $\mathcal{I}$ satisfait la propriété de SMI-Dependent.*

Preuve. *Condition nécessaire. Supposons que $\mathcal{I}$ est une mesure d'incohérence qui satisfait la propriété d'Indépendance des formules libres et la propriété de Monotonie. Soient K et K' deux bases de croyances telles que $SMIs(K) \subseteq SMIs(K')$. Puisque, $\mathcal{I}$ satisfait la propriété d'Indépendance des formules libres, nous avons à la fois $\mathcal{I}(K) = \mathcal{I}(\bigcup_{M \in SMIs(K)} M)$ et*

$\mathcal{I}(K') = \mathcal{I}(\bigcup_{M \in SMIs(K')} M)$. *Ainsi, en utilisant la propriété de Monotonie, nous obtenons* $\mathcal{I}(K) \leq \mathcal{I}(K')$, *ce qui signifie que* $SMIs(K) \subseteq SMIs(K')$. *Condition suffisante. Supposons maintenant que* $\mathcal{I}$ *est une mesure d'incohérence qui satisfait la propriété de SMI-Dependent. Pour tous* K *et* K' *avec* $K \subseteq K'$, $SMIs(K) \subseteq SMIs(K')$. *En conséquence, nous obtenons que* $\mathcal{I}$ *satisfait la propriété de Monotonie. Nous démontrons maintenant que* $\mathcal{I}$ *satisfait également la propriété d'Indépendance des formules libres. Soit* K *une base de croyances et* ϕ *une formule libre dans* K. *Alors, nous avons* $SMIs(K) = SMIs(K \backslash \{\phi\})$. *Ainsi, en utilisant la propriété de SMI-Dependent, nous obtenons* $\mathcal{I}(K) = \mathcal{I}(K \backslash \{\phi\})$.

A noter que dans [22], Hunter et Konieczny ont également fourni des objections à la propriété d'Indépendance des formules libres. En effet, du fait que la mesure d'incohérence $\mathcal{I}_{LPm}$ fondée sur la logique tri-valuées de Priest [34] ne satisfait pas la propriété d'Indépendance des formules libres, les auteurs plaident en faveur d'une propriété plus faible, appelée propriété d'Indépendance des formules sûres (appelée également faible-Independent dans [38]). Une formule sûre dans une base de croyances est une formule cohérente qui ne partage aucune variable propositionnelle avec les autres formules. Il est clair que toute formule sûre est une formule libre. L'Indépendance des formules sûres signifie que si nous ajoutons les formules sûres qui n'ont aucun rapport avec les conflits existants, nous ne changeons pas la quantité d'incohérence.

Concernant l'objection à la propriété de Dominance de Besnard, elle est liée à la structure interne des formules. Proposons les bases de croyances similaires à celles proposées dans [7] : $K_1 = \{p \wedge q \wedge r, \neg p\}$ et $K_2 = \{p \wedge q \wedge r, \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)\}$. Nous avons $\neg p \vdash \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)$ et $\neg p \nvdash \perp$. Besnard a argumenté que K_2 est plus incohérente que K_1, puisque l'incohérence de K_2 provient soit de p et $\neg p$ ou soit de $q \wedge r$ et $\neg q \wedge \neg r$, quant à K_1, elle provient seulement de p et $\neg p$. Dans ce cas, la propriété de Dominance est considérée comme étant violée à cause de l'interprétation de la disjonction utilisée au sein de l'incohérence. Comme Besnard a indiqué, qu'il est difficile d'évaluer combien une disjonction est incohérente. Dans ce contexte, l'auteur a introduit la propriété suivante, appelée la propriété de Disjonction-Maximalité :

$$\mathcal{I}(K \cup \{\phi \vee \psi\}) \leq Max(\mathcal{I}(K \cup \{\phi\},\mathcal{I}(K \cup \{\psi\})$$

En outre, par exemple, si nous considérons une mesure d'incohérence comme une fonction associant à chaque base de croyances la quantité nécessaire d'effort pour résoudre son incohérence possible ou le coût qu'un agent doit payer à cause de l'incohérence possible de sa base de croyances, alors il est raisonnable d'utiliser la limite suivante :

$$\mathcal{I}(K \cup \{\phi \vee \psi\}) \leq Min(\mathcal{I}(K \cup \{\phi\},\mathcal{I}(K \cup \{\psi\})$$

En résolvant l'incohérence dans $K \cup \{\phi\}$ ou dans $K \cup \{\psi\}$, nous résolvons l'incohérence dans $K \cup \{\phi \vee \psi\}$. En utilisant cette interprétation pour les mesures d'incohérence, l'objection à la propriété de Dominance de Besnard peut être éviter. En outre, considérons la base de croyances $K = \{p,p \vee \neg p\}$. La partie droite du tiers exclu est impliquée dans un conflit. Si nous considérons l'interprétation utilisée dans l'objection de la propriété de Dominance de Besnard, nous déduisons que K contient plus de conflits que $\{p\}$, toutefois, K et $\{p\}$ sont toutes les deux des bases cohétentes.

D'autres objections à la propriété de Dominance peuvent être obtenues à partir de son incompatibilité avec certaines propriétés de l'état de l'art, qui ont des motivations raisonnables. Par exemple, dans la section 2.3, nous démontrons que la Dominance est incompatible avec les propriétés d'Additivité introduites dans [22,38].

En résumé, nous pensons que les objections de Besnard sont acceptables dans le sens où il ne convient pas d'exiger les propriétés basiques de Hunter et Konieczny pour toute mesure d'incohérence. Cependant, nous pensons aussi que l'incohérence est un concept multidimentionnel et qu'une seule mesure d'incohérence est insuffisante pour capturer toutes les informations relatives aux conflits dans une base de croyances. Dans ce contexte, pour capturer certains aspects importants qui constituent l'incohérence, nous avons besoin de mesures d'incohérence satisfaisant les propriétés basiques.

2.4 Systèmes axiomatiques incohérents

Dans cette section, nous considérons des propriétés importantes sur les mesures d'incohérence introduites dans la littérature. En particulier, nous démontrons que des combinaisons de quelques propriétés conduisent à des systèmes incohérents. Un système axiomatique est incohérent s'il n'y a pas de mesures d'incohérence qui satisfait tous ses axiomes.

L'objectif que nous visons derrière l'établissement de résultats d'incompatibilité entre des propriétés de l'état de l'art comporte deux volets. Premièrement, nous montrons qu'il n'y a pas de mesure d'incohérence meilleure que toutes les autres, sachant que la plupart des propriétés proposées dans la littérature pour les mesures d'incohérence ont des motivations raisonnables. Deuxièmement, nous fournissons des raisons formelles expliquant pourquoi notre mesure d'incohérence introduite dans le chapitre 3 ne satisfait pas certaines propriétés.

2.4.1 Propriétés pour mesurer l'incohérence

Nous présentons ici quelques propriétés de l'état de l'art sur les mesures d'incohérence. L'objectif de telles propriétés est de fournir un moyen raisonnable pour mesurer la quantité de conflits.

D'abord considérons les propriétés d'Additivité introduites respectivement dans [38] et [22] :

- **Super-Additivité** : pour toutes bases K, K' si $K \cap K' = \emptyset$, alors $\mathcal{I}(K \cup K') \geq \mathcal{I}(K) + \mathcal{I}(K')$.
- **SMI-Additivité** : pour toutes bases K, K' si $SMIs(K \cup K') = SMIs(K) \uplus SMIs(K')$, alors $\mathcal{I}(K \cup K') = \mathcal{I}(K) + \mathcal{I}(K')$, où $\uplus$ est l'union disjointe.

La propriété de Super-Additivité signifie que les quantités d'incohérence dans deux bases de croyances disjointes sont préservées dans l'union de ces bases. Il est important de noter que la propriété de Super-Additivité et la propriété de Cohérence impliquent la propriété de Monotonie. En ce qui concerne la propriété de SMI-Additivité, elle capture une idée similaire à la propriété de Super-Additivité, elle lie la quantité de conflits aux sous ensembles minimaux incohérents.

Nous définissons maintenant deux concepts qui sont utilisés dans la définition des propriétés de Besnard. Tout d'abord, une substitution est une application $\sigma : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$, à partir de l'ensemble des variables propositionnelles vers l'ensemble des formules propositionnelles. Puis, étant donné une formule propositionnelle $\sigma(\phi)$, et une substitution σ, $\sigma(p)$ est le résultat du remplacement de chaque variable propositionnelle p par $\sigma(p)$. Par exemple, pour $\sigma(p) = r \wedge s$ et $\sigma(q) = r \rightarrow s$, nous avons $\sigma(\neg p \wedge q) = \neg\sigma(p) \wedge \sigma(q) = \neg(r \wedge s) \wedge (r \rightarrow s)$. Donnons une base de croyances K, nous utilisons $\sigma(K)$ pour dénoter la base de croyances

$\bigcup_{\phi \in K}\{\sigma(\phi)\}$. Ensuite, un conflit primitif est une notion qui est considérée pour quantifier la quantité d'incohérence. Par exemple, nous pouvons considérer la notion des sous ensembles minimaux incohérents, et dans ce cas, les conflits primitifs d'une base de croyances sont ses sous ensembles minimaux incohérents. Besnard a utilisé le conflit primitif comme une notion abstraite qui permet de représenter les conflits d'une base de croyances considérés par un mesureur.

Dans la suite, nous décrivons les propriétés de Besnard proposées dans [7] :

- **Subsumption-Orientation** : si $\mathcal{C}(\sigma K) \subseteq \mathcal{C}(K')$ pour une substitution σ alors $\mathcal{I}(K) \leq \mathcal{I}(K')$, où $\mathcal{C}(K)$ correspond à l'ensemble de conflits primitifs de K.
- **Conjunction-Dominance** : $\mathcal{I}(K \cup \{\phi \wedge \psi\} \geq \mathcal{I}(K \cup \{\phi\})$
- **Tautology-Independence** : si $\phi \equiv \top$ alors $\mathcal{I}(K \cup \{\phi\}) = \mathcal{I}(K)$.
- **Rewriting** : si ψ est une forme pré-normale de ϕ alors $\mathcal{I}(K \cup \{\phi\}) = \mathcal{I}(K \cup \{\psi\})$ où ψ est une forme pré-normale de ϕ si ψ est obtenue à partir de ϕ en appliquant (éventuellement à plusieurs reprises) un ou plusieurs des principes suivants : la commutativité, l'associativité, la distribution de $\wedge$ et $\vee$, les lois De Morgan, l'équivalence de la double négation.
- **Instance-Low** : si $\sigma K \subseteq K'$ pour une certaine substitution σ alors $\mathcal{I}(K) \leq \mathcal{I}(K')$.
- **Disjunction-Maximality** : $\mathcal{I}(K \cup \{\phi \vee \psi\}) \leq max(\mathcal{I}(K \cup \{\phi\}), \mathcal{I}(K \cup \{\psi\}))$.
- **Disjunction-Minimality** : $\mathcal{I}(K \cup \{\phi \vee \psi\}) \geq min(\mathcal{I}(K \cup \{\phi\}), \mathcal{I}(K \cup \{\psi\}))$.
- **Exchange** : si $K' \equiv K''$ et $K' \nvdash \perp$ alors $\mathcal{I}(K \cup K') = \mathcal{I}(K \cup K'')$.
- **Adjunction-Invariancy** : $\mathcal{I}(K \cup \{\phi, \psi\}) = \mathcal{I}(K \cup \{\phi \wedge \psi\})$.

On peut noter que la plupart des précédentes propriétés, contrairement à celles de Hunter et Konieczny, prennent en compte la structure interne des formules dans une base de croyances. Par exemple dans [7], l'auteur explique que la propriété de Rewriting permet de ne pas prendre en compte les différences non essentielles entre les formules. Notons que le système fort de Besnard est défini par la propriété de Cohérence avec les propriétés de Rewriting, Instance-Low, Disjunction-Maximality, Disjunction-Minimality, Exchange, Adjunction-Invariancy. En outre, nous notons que les propriétés dans le système fort entraînent les propriétés suivantes : Conjunction-Dominance et Tautology-Independence. De plus, toutes les propriétés dans le système fort peuvent être entraînées par la propriété de Subsumption-Orientation à partir de proriétés spécifiques sur $\mathcal{C}$. Par exemple, si $\mathcal{C}$ satisfait la propriété $\mathcal{C}(K \cup \{\phi\}) = \mathcal{C}(K \cup \{\phi'\})$ pour toute base de croyances K, la formule ϕ, ϕ' est une forme pré-normale de ϕ, alors, la propriété Rewriting peut être dérivée à partir de la propriété Subsumption-Orientation (pour plus de détails voir [7]).

2.4.2 Dominance et Additivité

Nous étudions ici la cohérence des systèmes en combinant la propriété de Super-Additivité et de SMI-Additivité avec la propriété de Dominance. Notre principal objectif est d'indiquer l'incompatibilté des résultats entre ces propriétés.

Dans la proposition suivante, nous démontrons que la propriété de SMI-Additivité est plus forte que la propriété d'indépendance des formules libres.

Proposition 2.2. *Soit $\mathcal{I}$ une mesure d'incohérence, si $\mathcal{I}$ satisfait les propriétés de Cohérence et de SMI-Additivité, alors $\mathcal{I}$ satisfait la propriété d'Indépendance des formules libres.*

Preuve. *Soit* K *une base de croyances. Alors, nous avons* $SMIs(K) = SMIs(K \setminus Free(K))$. *Ainsi, nous avons* $SMIs(K) = SMIs(K \setminus Free(K)) \uplus SMIs(Free(K))$, *avec* $SMIs(Free(K)) = \emptyset$. *En utilisant la propriété de SMI-Additivité, par conséquent, nous obtenons* $\mathcal{I}(K) = \mathcal{I}(K \setminus Free(K)) + \mathcal{I}(Free(K))$. *En utilisant la propriété de Cohérence, nous obtenons* $\mathcal{I}(Free(K)) = 0$, *puisque* $Free(K) \nvdash \perp$. *D'où nous obtenons,* $\mathcal{I}(K) = \mathcal{I}(K \setminus Free(K))$.

Nous démontrons maintenant que la propriété de Dominance est incompatible avec les propriétés d'Additivité considérées.

Proposition 2.3. *Les systèmes suivants sont incohérents :*

1. $\{Cohérence, Dominance, Super-Additivité\}$;
2. $\{Cohérence, Dominance, SMI-Additivité\}$.

Preuve. *(1). Nous supposons qu'il existe une mesure d'incohérence* $\mathcal{I}$ *qui satisfait la propriété de Cohérence, la propriété de Dominance et la propriété de Super-Additivité. Soit* $K = \{p \wedge q, \neg p \wedge q\}$ *une base de croyances. En utilisant la propriété de Dominance deux fois, nous obtenons* $\mathcal{I}(K \cup \{p, \neg p\}) \leq \mathcal{I}(K \cup \{p \wedge q, \neg p\}) \leq \mathcal{I}(K \cup \{p \wedge q, \neg p \wedge q\})$, *puisque* $p \wedge q \nvdash \perp$, $\neg p \wedge q \nvdash \perp$, $p \wedge q \vdash p$ *et* $\neg p \wedge q \vdash \neg p$. *Notons que* $K \cup \{p \wedge q, \neg p \wedge q\} = K$. *De plus, en utilisant la propriété de Super-Additivité, nous obtenons* $\mathcal{I}(K \cup \{p, \neg p\}) \geq \mathcal{I}(K) + \mathcal{I}(\{p, \neg p\})$. *Puis, en utilisant la propriété de Cohérence, nous obtenons* $\mathcal{I}(\{p, \neg p\}) > 0$, *par conséquent, nous obtenons* $\mathcal{I}(K \cup \{p, \neg p\}) > \mathcal{I}(K)$ *et nous avons une contradiction.*

(2). Nous supposons qu'il existe une mesure d'incohérence $\mathcal{I}$ *qui satisfait la propriété de Cohérence, la propriété de Dominance et la propriété de SMI-Additivité. Soit* $K = \{p \wedge r, q \wedge \neg r, \neg p \vee \neg q\}$ *une base de croyances. En utilisant la propriété de Dominance, nous obtenons* $\mathcal{I}(K \cup \{p, q\}) \leq \mathcal{I}(K \cup \{p \wedge r, q \wedge \neg r\})$, *puisque* $p \wedge r \vdash p$ *et* $q \wedge \neg r \vdash q$. *Notons que* $K \cup \{p \wedge r, q \wedge \neg r\} = K$. *Nous avons* $SMIs(K \cup \{p, q\}) =$

$SMIs(K \setminus \{\neg p \vee \neg q\} \cup \{p,q,\neg p \vee \neg q\}) = SMIs(K) \cup SMIs(\{p,q,\neg p \vee \neg q\})$. *Ensuite, en utilisant la propriété de SMI-Additivité, nous obtenons* $\mathcal{I}(K \cup \{p,q\}) = \mathcal{I}(K) + \mathcal{I}(\{p,q,\neg p \vee \neg q\})$. *En utilisant la propriété de Cohérence, nous obtenons* $\mathcal{I}(K \cup \{p,q\}) > \mathcal{I}(K)$, *puisque* $\mathcal{I}(\{p,q,\neg p \vee \neg q\}) > 0$, *et nous avons une contradiction.*

Dans notre preuve de la proposition 2.3, nous utilisons le fait que la propriété de Dominance nous permet d'ajouter à une base de coyances les conséquences logiques de ses formules sans changer la quantité de conflits. En effet, la propriété de Dominance n'exprime pas exactement que la quantité de conflits n'augmente pas lorsqu'une formule cohérente est remplacée par une de ses conséquences logiques. Afin d'éviter ce problème, nous considérons la variante de la propriété de Dominance suivante :

- **Dominance-Faible** : si $\phi \notin K$, $\phi \vdash \psi$ et $\phi \not\vdash \bot$, alors $\mathcal{I}(K \cup \{\psi\}) \leq \mathcal{I}(K \cup \{\phi\})$.

La condition $\phi \notin K$ dans la propriété de Dominance-Faible signifie que $\phi \notin K \cup \{\psi\}$, ce qui nous permet d'exprimer que ϕ est remplacée par ψ.

Nous démontrons maintenant que la propriété de Super-Additivité est compatible avec la propriété de Dominance-Faible. Pour cet objectif, nous utilisons la mesure d'incohérence $\mathcal{I}_{CC}$ introduite dans [24]. Cette mesure prend en compte les formules partagées entre les sous ensembles minimaux incohérents. Etant donné une base de croyances K, une SMI-décomposition de K est une paire $(\{K_1,...,K_n\},K')$ qui satisfait les propriétés suivantes :

(i) $(\bigcup_{i=1}^{n} K_i) \cup K' = K$;

(ii) $(\bigcup_{i=1}^{n} K_i) \cap K' = \emptyset$;

(iii) $K_i \vdash \perp$ pour tout $1 \leq i \leq n$;

(iv) $K_i \cap K_j = \emptyset$; pour tout $1 \leq i \neq j \leq n$; et

(v) $SMIs(\bigcup_{i=1}^{n} K_i) = \biguplus_{i=1}^{n} SMIs(K_i)$.

Soit K une base de croyances, $\mathcal{I}_{CC}(K) = n$, s'il y a une SMI-décomposition (D,K') tel que $\mid D \mid = n$, et il n'y a pas de SMI-décomposition (D',K'') tel que $\mid D' \mid > n$. Intuitivement, cette mesure peut être vu comme le nombre maximum des sous ensembles minimaux incohérents qui peut être isolés par l'élimination de formules.

Exemple 2.1. *Nous considérons la base de croyances* $K = \{p,\neg p \wedge q,\neg q,q \wedge r,q \wedge \neg r\}$*. Alors, nous avons* $SMIs(K) = \{\{p,\neg p \wedge q\},\{\neg p \wedge q,\neg q\},\{\neg q,q \wedge r\},\{\neg q,q \wedge \neg r\},\{q \wedge r,q \wedge \neg r\}\}$*. Notons que chacune des formules* $\neg p \wedge q,\neg q,q \wedge r$ *et* $q \wedge \neg r$ *appartient à au moins deux sous ensembles minimaux incohérents.*

Pour construire une SMI-décomposition, nous devons mettre quelques formules précédentes dans le coté droit. Par exemple, la paire $S = (\{\{p,\neg p \wedge q\},\{q \wedge r,q \wedge \neg r\}\},\{\neg q\})$ est une SMI-décomposition. En effet, nous avons : la condition (i): $\{p,\neg p \wedge q\} \cup \{q \wedge r,q \wedge \neg r\} \cup \{\neg q\} = K$; la condition (ii) : $(\{p,\neg p \wedge q\} \cup \{q \wedge r,q \wedge \neg r\}) \cap \{\neg q\} = \emptyset$; la condition (iii) : $\{p,\neg p \wedge q\} \vdash \perp$ et $\{q \wedge r,q \wedge \neg r\} \vdash \perp$; la condition (iv) : $\{p; \neg p \wedge q\} \cap \{q \wedge r,q \wedge \neg r\} = \emptyset$; et la condition (v): $SMIs(\{p,\neg p \wedge q\} \cup \{q \wedge r,q \wedge \neg r\}) = \{\{p,\neg p \wedge q\},\{q \wedge r,q \wedge \neg r\}\} = SMIs(\{p,\neg p \wedge q\}) \cup SMIs(\{q \wedge r,q \wedge \neg r\})$. De plus, on peut voir qu'il n'y a pas de SMI-décomposition (D,K') de K tel que $\mid D \mid > 2$, car il n'y a pas plus de deux sous ensembles minimaux incohérents disjoints. Par conséquent, nous avons $\mathcal{I}_{CC}(K) = 2$.

Proposition 2.4. *Le système { Cohérence, Indépendance des formules* *libres, Monotonie, Dominance-Faible, Super-Additivité } est cohérent.*

Preuve. *Nous démontrons ici que $\mathcal{I}_{CC}$ satisfait toutes les propriétés du système précédent. On peut facilement voir que $\mathcal{I}_{CC}$ satisfait la propriété de Cohérence, car $\mathcal{I}_{CC}(K) = 0$ ssi $SMIs(K) = \emptyset$. Elle satisfait également la propriété d'Indépendance des formules libres, puisque la quantité de conflits est calculée à travers les sous ensembles minimaux incohérents. En outre, la propriété de Monotonie est impliquée par les propriétés de Cohérence et de Super-Additivité.*

Super-Additivité. Soient K et K' deux bases de croyances telles que $K \cap K' = \emptyset$, et $S = (D,K_1)$ et $S' = (D',K_2)$ sont respectivement des SMI-décompositions de K et K' telles que $\mathcal{I}_{CC}(K) =\mid D \mid$ et $\mathcal{I}_{CC}(K') =\mid D' \mid$. Ainsi, nous obtenons que $S^3 = (D \uplus D', K_1 \uplus K_2)$ est une SMI-décomposition de $K \cup K'$. En effet, S^3 satisfait les conditions (i) et (iii) puisque ces conditions sont satisfaites par S et S'. De plus, S^3 satisfait les conditions (ii),(iv) et (v), puisque $K \cap K' = \emptyset$ et ces conditions sont satisfaites par S et S'. Par conséquent, nous obtenons $\mathcal{I}_{CC}(K \uplus K') \geq \mathcal{I}_{CC}(K) + \mathcal{I}_{CC}(K')$.

Dominance-Faible. Soit K une base de croyances, et ϕ et ψ deux formules telles que $\phi \notin K, \phi \nvdash \perp$. Si $\psi \in K$, alors nous avons $K \cup \{\psi\} \subseteq K \cup \{\phi\}$. En utilisant le fait que $\mathcal{I}_{CC}$ satisfait la propriété de Monotonie, nous avons $\mathcal{I}_{CC}(K \cup \{\phi\}) \geq \mathcal{I}_{CC}(K \cup \{\psi\})$. Considérons maintenant que $\psi \notin K$. Soit $S = (\{K_1,...,K_n\},K')$ une SMI-décomposition de $K \cup \{\psi\}$. si $\psi \notin K_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$, alors $S' = (\{K_1,...,K_n\},(K' \setminus \{\psi\}) \cup \{\phi\})$ est une SMI-décomposition de $K \cup \{\phi\}$. Autrement, il y a un unique $i \in 1..n$ tel que $\psi \in K_i$. Nous avons $(K_i \setminus \{\psi\}) \cup \{\phi\} \vdash \perp$ puisque $\phi \vdash \psi$. D'où, il existe $K'_i \in SMIs(K \cup \{\phi\})$ tel que $K'_i \subseteq (K_i \setminus \{\psi\}) \cup \{\phi\}$ et $\phi \in K'_i$. Ainsi, il existe K'' tel que $(\{K_1,...,K'_i,...,K_n\},K'')$ est une SMI-décomposition de $K \cup \{\phi\}$. Par conséquent, nous savons que si $K \cup \{\psi\}$ a une SMI-décomposition (D,K'), alors $K \cup \{\phi\}$ a une SMI-décomposition (D',K'') tel que $\mid D \mid \leq \mid D' \mid$. En conclusion, nous obtenons $\mathcal{I}_{CC}(K \cup \{\phi\}) \geq \mathcal{I}_{CC}(K \cup \{\psi\})$.

Dans la proposition suivante, nous démontrons que, contrairement à la propriété de Super-Additivité, la propriété de SMI-Additivité est également incompatible avec la propriété de Dominance-Faible.

Proposition 2.5. *Le système {Cohérence, Dominance-Faible, SMI-Additivité} est incohérent.*

Preuve. *Supposons qu'il y a une mesure d'incohérence qui satisfait les propriétés de Cohérence, Dominance-Faible et SMI-Additivité. Soient* $K_1 = \{\neg q, p \wedge (\neg p \vee q)\}$ *et* $K_2 = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$ *deux bases de croyances. En utilisant la propriété de Cohérence, nous avons à la fois* $\mathcal{I}(K_1)$ *et* $\mathcal{I}(K_2)$ *supérieurs à* 0. *Nous définissons* n *comme un entier strictement supérieur à* $\frac{\mathcal{I}(K_1)}{\mathcal{I}(K_2)}$. *Considérons maintenant la base de croyances* $K_3 = \{p \wedge r_1, ..., p \wedge r_n, \neg q, p \wedge (\neg p \vee q)\}$ *où* $r_1, ..., r_n$ *sont* n *variables propositionnelles fraîches distinctes. Ensuite, en utilisant la Proposition 2.2, nous avons* $\mathcal{I}(K_3) = \mathcal{I}(K_1)$ *puisque* $SMIs(K_3) = SMIs(K_1) = \{\{\neg q, p \wedge (\neg p \vee q)\}\}$. *De plus, en utilisant la propriété de Dominance-Faible et* $p \wedge (\neg p \vee q) \vdash \neg p \vee q$, *nous avons* $\mathcal{I}(K_3) \geq \mathcal{I}(K_4)$ *où* $K_4 = \{p \wedge r_1, ..., p \wedge r_n, \neg q, \neg p \vee q\}$. *En utilisant la propriété de SMI-Additivité, nous obtenons* $\mathcal{I}(K_4) = \mathcal{I}(\{p \wedge r_1, \neg q, \neg p \vee q\}) + ... + \mathcal{I}(\{p \wedge r_n, \neg q, \neg p \vee q\})$, *puisque* $SMIs(K_4) = \{\{p \wedge r_1, \neg q, \neg p \vee q\}, ..., \{p \wedge r_n, \neg q, \neg p \vee q\}\}$. *De plus, en utilisant la propriété de Dominance-Faible, nous obtenons* $\mathcal{I}(K_4) \geq n \times \mathcal{I}(K_2)$ *puisque* $p \wedge r_i \vdash p$ *pour tout* $i \leq i \leq n$. *Par conséquent, nous obtenons* $\mathcal{I}(K_3) \geq n \times \mathcal{I}(K_2)$. *Ainsi, nous avons une contradiction puisque* $\mathcal{I}(K_3) = \mathcal{I}(K_1)$ *et* $n > \frac{\mathcal{I}(K_1)}{\mathcal{I}(K_2)}$.

Il est important d'indiquer que la Propostion 2.5 implique la deuxième propriété de la Proposition 2.3, puisque la propriété de Dominance est plus forte que la propriété de Dominance-Faible.

2.4.3 Subsumption-Orientation et Additivité

De la même manière que pour la propriété de Dominance, nous démontrons ici des résultats d'incompatibilité entre la propriété de

Subsumption-Orientation et les propriétés d'Additivité considérées ci-dessus. Nous démontrons également que les mesures d'incohérence qui satisfont les propriétés du système fort de Besnard, permettent seulement de distinguer les bases de croyances incohérentes de celles qui sont cohérentes (la quantité d'incohérence est la même pour toutes les bases de croyances qui sont incohérentes).

Proposition 2.6. *Les systèmes suivants sont incohérents :*

1. $S_1 = \{$*Cohérence, Subsumption-Orientation, Super-Additivité* $\}$;
2. $S_2 = \{$*Cohérence, Subsumption-Orientation, SMI-Additivité* $\}$.

Preuve. *(1) et (2). Supposons qu'il existe une mesure d'incohérence qui satisfait les propriétés de* S_1 *(respectivement* S_2*). Soit* $K = \{p,\neg p,q,\neg q\}$ *une base de croyances et* σ *une substitution telle que* $\sigma(p) = p$ *et* $\sigma(q) = p$*. Alors, en utilisant la propriété de Super-Additivité (respectivement la propriété de SMI-Additivité), nous avons* $\mathcal{I}(K) \geq \mathcal{I}(\{p,\neg p\})+\mathcal{I}(\{q,\neg q\})$ *(respectivement* $\mathcal{I}(K) = \mathcal{I}(\{p,\neg p\}) + \mathcal{I}(\{q,\neg q\})$*) puisque* $K = \{p,\neg p\} \uplus \{q,\neg q\}$ *(respectivement* $SMIs(K) = SMIs(\{p,\neg p\}) \uplus SMIs(\{q,\neg q\})$*). En outre, puisque* $\sigma(K) = \{p,\neg p\}$*, nous avons* $\mathcal{C}(\sigma(K)) = \mathcal{C}(\{p,\neg p\})$*. Ensuite, en utilisant la propriété de Subsumption-Orientation, nous avons* $\mathcal{I}(K) \leq \mathcal{I}(\{p,\neg p\})$*. En utilisant la propriété de Cohérence, nous obtenons une contradiction puisque nous avons* $\mathcal{I}(\{q,\neg q\}) > 0$.

Proposition 2.7. *Une mesure d'incohérence* $\mathcal{I}$ *satisfait les propriétés du système fort de Besnard si et seulement si elle est définie comme suit :*

$$\mathcal{I}(K) = \begin{cases} 0 & si\ K \nvdash \perp \\ n & sinon \end{cases}$$

où n *est une constante différente de* 0.

Preuve. *On peut considérer que toutes les formules dans une base de croyances sont cohérentes. En effet, pour chaque base de croyances* K*, en* *utilisant les propriétés Rewriting et Adjunction-Invariancy, il existe un ensemble de clauses K' tel que $\mathcal{I}(K) = \mathcal{I}(K')$. Cela vient du fait qu'une formule propostionnelle peut être réécrite en forme normale conjonctive (CNF) en utilisant les lois De Morgan. De plus, nous savons que toute clause non vide est cohérente.*

Revendication 1 : pour toute base de croyances K et $p \in Var(K)$, $\mathcal{I}(K) \leq \mathcal{I}(\{p,\neg p\})$.

Soit K une base de croyances incohérente telle que $\phi \not\vdash \perp$ pour tout $\phi \in K$. Alors, nous avons, $\phi \equiv \bigwedge_{\mathcal{B} \in Mod(\neg\phi)} \overline{\mathcal{B}}$ pour tout $\phi \in K$ où $Mod(\neg\phi)$ est l'ensemble de modèles de $\neg\phi$ sur $Var(K)$ et $\overline{\mathcal{B}}$ dénote la clause $(\bigvee_{p \in Var(K), \mathcal{B}(p)=1} \neg p) \vee (\bigvee_{q \in Var(K), \mathcal{B}(p)=0} q)$. Nous considérons ici les interprétations booléennes construites sur l'ensemble $Var(K)$. En utilisant les propriétés Exchange et Adjunction-Invariancy, nous avons $\mathcal{I}(K) = \mathcal{I}(K')$ où $K' = \bigcup_{\phi \in K} \{\overline{\mathcal{B}} \mid \mathcal{B} \in Mod(\neg\phi)\}$. Soit p est une variable propositionnelle dans $Var(K)$ et σ une substitution définie par $\sigma(q) = p$ pour tout $q \in Var(K)$. En utilisant la propriété de Instance-Low, nous obtenons $\mathcal{I}(K) \leq \mathcal{I}(\sigma(K))$. Ensuite, en utilisant les propriétés Tautology-Independence et Rewriting, nous obtenons $\mathcal{I}(\sigma(K)) = \mathcal{I}(\{p,\neg p\})$. En effet, chaque clause positive $p_1 \vee ... \vee p_n$ (respectivement la clause négative $\neg p_1 \vee ... \vee \neg p_n$) est transformée en $p \vee ... \vee p$ (respectivement $\neg p \vee ... \vee \neg p$), en utilisant σ qui est équivalent à p (respectivement $\neg p$). En outre, chaque clause de la forme $p_1 \vee ... \vee p_l \vee \neg q_1 \vee ... \vee \neg q_m$ est transformée en $p \vee ... \vee p \vee \neg p \vee ... \vee \neg p$ en utilisant σ qui est une tautologie. En conséquence, nous obtenons $\mathcal{I}(K) \leq \mathcal{I}(\{p,\neg p\})$.

Revendication 2 : Pour toute base de croyances K et $p \in Var(K)$, $\mathcal{I}(K) \geq \mathcal{I}(\{p,\neg p\})$.

Nous avons $K' = K_1 \uplus K_2$ où $K_1 = \{\overline{\mathcal{B}} \in K' \mid \mathcal{B}(p) = 1\}$ et $K_2 = \{\overline{\mathcal{B}} \in K' \mid \mathcal{B}(p) = 0\}$. Il est clair que K_1 et K_2 sont cohérentes, et par conséquent, elles sont non-vides puisque K' est incohérente. De plus, en utilisant le principe de la distributivité de la conjonction sur la disjonction, nous savons qu'il existe deux formules ψ_1 et ψ_2 telles que $K_1 \equiv p \wedge \psi_1$ et $K_2 \equiv \neg p \wedge \psi_2$.

Puis, en utilisant les propriétés Conjunction-Dominance et Exchange, nous obtenons $\mathcal{I}(\{p,\neg p\}) \leq \mathcal{I}(K') = \mathcal{I}(K)$.
En conséquence, en utilisant la revendication 1 et la revendication 2, nous obtenons $\mathcal{I}(K) = \mathcal{I}(\{p,\neg p\})$. *De plus, en utilisant la propriété d'Instance-Low, nous obtenons* $\mathcal{I}(\{p,\neg p\}) = \mathcal{I}(\{q,\neg q\})$ *pour chaque paire de variables propositionnelles* p *et* q. *Donc, il existe* $n > 0$ *tel que pour toute base de croyances incohérente* K*, nous avons* $\mathcal{I}(K) = n$.

2.5 Exemples de mesures d'incohérence

Dans cette section, nous décrivons des mesures d'incohérence issues de l'état de l'art. Cela nous permettra de décrire les deux approches utilisées dans la définition des mesures d'incohérence, à savoir l'approche syntaxique et celle sémantique.

Nous proposons d'abord celles fondées sur la syntaxe.

2.5.1 Approche syntaxique

Dans l'approche syntaxique, les mesures d'incohérence sont en général fondées sur les concepts de sous ensembles minimaux incohérents et de sous ensembles maximaux cohérents. En effet, ces concepts permettent de décrire de manière concise les différents conflits existant entre les formules qui composent une base de croyances.

Les sous ensembles minimaux incohérents peuvent être considérés comme la forme d'incohérence la plus pure pour la résolution des conflits, car il suffit de retirer une formule dans chaque sous ensemble minimal incohérent pour avoir un ensemble cohérent. Dans [22], Hunter et Konieczny ont soutenu qu'il est naturel de définir l'incohérence de chaque formule d'une base de croyances en utilisant les sous ensembles minimaux incohérents de cette base.

Définition 2.2. La mesure d'incohérence $\mathcal{I}_{SMI}$ est une mesure d'incohérence basique et est définie comme étant le nombre des sous ensembles minimaux incohérents d'une base de croyances K :

$$\mathcal{I}_{SMI} = \mid SMIs(K) \mid$$

Exemple 2.2. *Soit* $K = \{p,\neg p,\neg p \wedge q,r \wedge \neg r,s\}$ *une base de croyances.* $SMIs(K) = \{\{r \wedge \neg r\},\{p,\neg p\},\{p,\neg p \wedge q\}\}$ *: les sous ensembles minimaux incohérents de* K*. La mesure d'incohérence est :*

$$\mathcal{I}_{SMI} = \mid SMIs(K) \mid = 3$$

Nous présentons une autre mesure d'incohérence dénotée $\mathcal{I}cc$, introduite récemment par Jabbour et al. dans [18]. Cette mesure peut être vu comme le plus grand nombre de $SMIs(K)$ qui peuvent être isolés en éliminant les formules de la base de croyances.

Définition 2.3. (SMI-décomposition). Soit K une base de croyances, une SMI-décomposition de K est une paire $\langle\{K_1,...,K_n,K'\}\rangle$ qui satisfait les propriétés suivantes :

- (i) $(\bigcup_{i=1}^{n} K_i) \cap K' = \emptyset$;
- (ii) $K_i \vdash \perp$ pour chaque $1 \leq i \leq n$;
- (iii) $K_i \cap K_j = \emptyset$ pour chaque $1 \leq i \neq j \leq n$;
- (iv) $SMIs(\bigcup_{i=1}^{n} K_i) = \biguplus_{i=1}^{n} SMIs(K_i)$.

Définition 2.4. (SMI-décomposition maximale). Soit K une base de croyances, $\mathcal{I}cc(K) = n$ s'il existe une SMI-décomposition $\langle D, K' \rangle$ où $\mid D \mid = n$ et qu'il n'existe pas une SMI-décomposition $\langle D', K'' \rangle$ tel que $\mid D' \mid > n$. Dans ce cas, $\langle D, K' \rangle$ est appelé une SMI-décomposition maximale.

Exemple 2.3. *Considérons la base de croyances suivante :* $K = \{p \wedge q_1, p \wedge q_2, \neg p, r, \neg r\}$. *Alors* $\langle \{\{p \wedge q_1, p \wedge q_2, \neg p\}, \{r, \neg r\}, \emptyset\} \rangle$ *est une SMI-décomposition de* K. *Et par conséquent, nous obtenons* $\mathcal{I}cc(K) = 2$

Maintenant, nous présentons une mesure d'incohérence dénotée, $\mathcal{I}_M$ introduite dans [24], qui est fondée sur les sous ensembles maximaux cohérents.

Définition 2.5. Soit K une base de croyances, la mesure d'incohérence $\mathcal{I}_M$ est définie comme suit :

$$\mathcal{I}_M(K) = (|SMCs(K)| + |IF(K)|) - 1$$

Cette mesure compte le nombre de sous ensembles maximaux cohérents ainsi que les formules contradictoire mais 1 doit être soustrait pour rendre $\mathcal{I}(K) = 0$ lorsque K est cohérente.

Exemple 2.4. *Considérons la base de croyances suivante :* $K = \{p, \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r, q, s\}$. *Alors* $SMCs(K) = \{\{p, q, s\}, \{\neg p \wedge \neg q, \wedge \neg r, s\}\}$. *Et par conséquent,* $\mathcal{I}_M(K) = 3$.

2.5.2 Approche sémantique

Nous nous intéressons ici aux mesures d'incohérence basées sur les variables, celles proposées dans [22], c'est ce qui nous permet de faire la distinction entre les bases de croyances, i.e., de voir celles qui possèdent le moins ou le plus de variables conflictuelles. Pour cela les logiques paracohérentes ont été introduites pour éviter toute conclusion fausse de la logique classique, d'où le traitement des base incohérentes d'une manière plus satisfaisante. Alors que beaucoup de logiques paracohérentes ont été définies et pourraient être utilisées dans notre cadre, nous nous concentrons ici sur la logique $\mathcal{LP}m$ qui est définie par Priest dans [34]. Ce choix est principalement motivé par le fait que cette logique est assez simple et a une relation d'inférence qui coincide avec l'implication classique lorsque la base de croyances est classiquement cohérente (cette caractéristique n'est pas partagée par de nombreuses logiques paracohérentes).
Pour bien cerner l'incohérence, nous ne pouvons pas utiliser la logique classique pour exprimer la valeur de vérité d'une variable impliquée dans l'incohérence, une méthode qui cible directement les variables conflictuelles est d'utiliser les logiques tri-valuées avec une troisième valeur de vérité indiquant que la variable est en conflit (vraie et fausse à la fois). Le but de cette mesure est de minimiser le nombre de variables conflictuelles dans les $\mathcal{LP}m$-modèles. Introduisons tout d'abord la relation de conséquence $\mathcal{LP}m$.

Soit $\mathcal{B}$ une interprétation telle que nous associons à chaque variable propositionnelle une valeur parmis ces valeurs de vérité **"T ,B ,F"**. Les valeurs de vérité sont ordonnées comme suit : **F**<**B**<**T**.

Nous présentons les interprétations étendues aux formules comme suit :

$\mathcal{B}(\top) = \mathbf{T}$,$\mathcal{B}(\bot)=\mathbf{F}$
Si $\mathcal{B}(p)=\mathbf{B}$ alors $\mathcal{B}(\neg p) = \mathbf{B}$

Si $\mathcal{B}(p)$=$\mathbf{T}$ alors $\mathcal{B}(\neg p)$ =$\mathbf{F}$
Si $\mathcal{B}(p)$ = $\mathbf{F}$ alors $\mathcal{B}(\neg p)$ =$\mathbf{T}$
$\mathcal{B}(p \wedge q) = \min(\mathcal{B}(p),\mathcal{B}(q))$
$\mathcal{B}(p \vee q) = \max(\mathcal{B}(p),\mathcal{B}(q))$
$\mathcal{B}(p \rightarrow q) = \begin{cases} \mathbf{T}, & \text{si } \mathcal{B}(\text{p})=\mathbf{F}; \\ \mathcal{B}(q), & \text{sinon.} \end{cases}$

Nous définissons l'ensemble des modèles d'une formule ϕ comme suit :

$\mathcal{M}(\phi) = \{\mathcal{B} \in 3^{\mathcal{P}} \mid \mathcal{B}(\phi) \in \{\mathbf{T},\mathbf{B}\}\}$, où $3^{\mathcal{P}}$ est l'ensemble de toutes les interprétations pour $\mathcal{LP}m$.

$\mathcal{B}!$ est l'ensemble des variables incohérentes d'une interprétation $\mathcal{B}$, i.e.

$$\mathcal{B}! = \{p \in \mathcal{P} \backslash \mathcal{B}(p) = \mathbf{B}\}$$

Les modèles minimaux d'une formule sont les plus classiques, et sont définis comme suit :

$$\min(\mathcal{M}(\phi)) = \{\mathcal{B} \in \mathcal{M}(\phi) \backslash \nexists \mathcal{B}' \in \mathcal{M}(\phi) t.q. \mathcal{B}'! \subset \mathcal{B}!\}$$

La relation conséquence de $\mathcal{LP}m$ est alors définie par :

$$K \models_{LPm} \phi \quad ssi \quad \min(\mathcal{M}(K) \subseteq \mathcal{M}(\phi))$$

Donc ϕ est une conséquence de K si tous les modèles les plus classiques de K sont des modèles de ϕ.

La mesure d'incohérence $\mathcal{I}_{\mathcal{LP}m}$ est donnée par la définition suivante.

Définition 2.6. (Mesure d'incohérence $\mathcal{I}_{\mathcal{LP}m}$). La mesure d'incohérence $\mathcal{I}_{\mathcal{LP}m}$ d'une base de croyances K est définie comme le nombre minimum de variables conflictuelles dans les $\mathcal{LP}m$-modèles de K et est donnée comme suit :

$$\mathcal{I}_{\mathcal{LP}m} = \frac{\min_{\mathcal{B} \in \mathcal{M}(\phi)}\{|\mathcal{B}!|\}}{|\mathcal{P}|}$$

Exemple 2.5. *Soit* $K = \{p \wedge q, r \wedge \neg r, s, \neg s\}$ *une base de croyances. Le modèle le plus classique de cette base est :* $\mathcal{B}(p) = \boldsymbol{T}$, $\mathcal{B}(q) = \boldsymbol{T}$, $\mathcal{B}(r) = \boldsymbol{B}$ *et* $\mathcal{B}(s) = \boldsymbol{B}$, *ainsi nous avons deux variables incohérentes, d'où* $\mathcal{I}_{\mathcal{LP}m}(K) = \frac{2}{4}$.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné la définition d'une mesure d'incohérence et nous avons fourni quelques propriétés intéressantes citées dans l'état de l'art. Nous avons également démontré l'incompatibilité de systèmes axiomatiques à partir de propriétés issues de l'état de l'art. Et finalement, nous avons fourni quelques exemples de mesures d'incohérence les plus connues. Dans le chapitre suivant, nous présenterons notre mesure d'incohérence fondée sur les sous-ensembles maximaux cohérents suivant l'approche syntaxique.

Chapitre 3

Mesure $\mathcal{I}_{SMC}$ et propriétés

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons une nouvelle mesure d'incohérence dénotée $\mathcal{I}_{SMC}$ qui est fondée sur les sous ensembles maximaux cohérents $SMCs(K)$. Pour définir $\mathcal{I}_{SMC}$, nous utilisons un concept appelé SMC-couverture qui consiste en un ensemble de $SMCs(K)$ couvrant toutes les pièces d'informations cohérentes. Techniquement, en utilisant notre mesure d'incohérence, la quantité de conflits dans une base de croyances est définie comme le plus petit nombre de pièces d'informations qui ne sont pas toutes dans les éléments d'une SMC-couverture. En outre, nous fournissons une interprétation épistémique de notre mesure d'incohérence tout en utilisant la logique multimodale **S5.**

L'idée principale de $\mathcal{I}_{SMC}$ est de considérer que l'incohérence est une conséquence d'informations qui sont souvent reçues de plusieurs sources cohérentes dont nous ignorons leurs origines. Dans ce contexte le degré de conflits correspond au plus petit nombre de croyances qui ne sont pas partagées par les sources d'informations possibles. Ces sources d'informations sont caractérisées par les sous ensembles cohérents. Notre but est de minimiser les croyances qui ne sont pas en communes et nous considérons seulement les sources possibles caractérisées par les $SMCs$.

3.2 Mesure $\mathcal{I}_{SMC}$

Avant de définir notre mesure d'incohérence $\mathcal{I}_{SMC}$, nous définissons d'abord les concepts fondamentaux suivants que nous utiliserons par la suite.

Définition 3.1. **(SMC-couverture).** Soit K une base de croyances. Une SMC-couverture de K est un sous ensemble $\mathcal{C}$ de $SMCs(K)$ tel que $\bigcup_{S\in\mathcal{C}} S = K \setminus IF(K)$.

En d'autres termes, une SMC-couverture d'une base de croyances est un sous ensemble de ses $SMCs$ qui couvrent toutes les formules cohérentes. Intuitivement, une SMC-couverture d'une base de croyances peut être vu comme un scénario possible dont l'origine est ses formules cohérentes dans le sens où chaque SMC peut être considéré comme un ensemble de pièces d'informations fourni par un agent qui représente une source possible. L'interprétation suivante est que l'intersection des éléments d'une SMC-couverture peut être vu comme un consensus possible entre les agents de différentes sources possibles. Cette interprétation est formellement décrite dans la section 3.3.

Exemple 3.1. *Nous considérons la base de croyances suivante :* $K = \{\neg p \vee \neg q, \neg p \vee \neg r, \neg q \vee \neg r, p, q, r, r \wedge \neg r\}$. *Les deux ensembles SMC-couvertures de K sont :* $\mathcal{C}_1 = \{\{\neg p \vee \neg q, \neg p \vee \neg r, \neg q \vee \neg r, p\}, \{p, q, r\}\}$ *et* $\mathcal{C}_2 = \{\{\neg p \vee \neg q, \neg q \vee \neg r, p\}, \{\neg p \vee \neg q, \neg p \vee \neg r, q, r\}\}$. *En effet, nous avons* $\{\neg p \vee \neg q, \neg p \vee \neg r, \neg q \vee \neg r\} \cup \{p, q, r\} = \{\neg p \vee \neg q, \neg p \vee \neg r, \neg q \vee \neg r, p\} \cup \{\neg p \vee \neg q, \neg p \vee \neg r, q, r\} = K \setminus \{r \wedge \neg r\}$.

Nous définissons maintenant une relation de préordre sur les SMC-couvertures d'une base de croyances donnée, notée $\succeq$. Soit K une base de croyances, pour tous $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux SMC-couvertures de K, $\mathcal{C} \succeq \mathcal{C}'$ si et seulement si $\mid \bigcap_{M\in C} M \mid \geq \mid \bigcap_{M\in\mathcal{C}'} M' \mid$. Reprenons l'exemple 3.1, nous avons $\mathcal{C}_2 \succeq \mathcal{C}_1$ puisque $\mid \{\neg p \vee \neg q, \neg p \vee \neg r, \neg q \vee \neg r, p\} \cap \{p,q,r\} \mid = 1$ et $\mid \{\neg p \vee \neg q, \neg p \vee \neg r, \neg q \vee \neg r, p\} \cap \{\neg p \vee \neg q, \neg p \vee \neg r, q, r\} \mid = 2$.

Définition 3.2. (SMC-couverture normale). Soit K une base de croyances et $\mathcal{C}$ une SMC-couverture de K. Alors $\mathcal{C}$ est appelé une SMC-couverture normale si $\mathcal{C}'$ n'est pas une SMC-couverture pour chaque $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$.

La normalisation a pour objectif de considérer un nombre minimal des $SMCs$ puisque nous avons l'intention de maximiser le nombre de formules partagées entre les $SMCs$. En effet, nous pouvons facilement voir que si $\mathcal{C}$ est une SMC-couverture qui n'est pas normale alors il existe une SMC-couverture $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ telle que les $SMCs$ dans $\mathcal{C}'$ partagent au moins le même nombre de formules que dans $\mathcal{C}$. Par exemple, dans l'exemple 3.1, la SMC-couverture $\mathcal{C}_3 = \{\{\neg p \vee q, \neg p \vee \neg r, \neg q \vee \neg r, p\}, \{\neg p \vee \neg q, \neg p \vee \neg r, q, r\}, \{p,q,r\}\}$ ne l'est pas, puisque $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_3$.

Définition 3.3. (SMC-couverture maximale). Soit K une base de croyances et $\mathcal{C}$ une SMC-couverture de K. Alors $\mathcal{C}$ est dite une SMC-couverture maximale de K , si elle est normale et $\forall \mathcal{C}'$ une SMC-couverture de K, $\mathcal{C} \succeq \mathcal{C}'$. Nous dénotons par $\lambda(K)$ la valeur $\mid \bigcap_{M \in \mathcal{C}} M \mid$.

Considérons l'exemple précédent, l'ensemble $\mathcal{C}_2$ est une SMC-couverture maximale de K, car il n'y a aucun sous ensemble de $SMCs$ de K qui couvre toutes les formules cohérentes de K tel que le nombre de formules partagées entre les $SMCs$ de ce sous ensemble est supérieur à 2.

Intuitivement, une SMC-couverture maximale d'une base de croyances capture le nombre maximum de ses formules cohérentes qui ne contredisent aucune formule cohérente dans cette base. Plus précisément, étant donné une base de coyances K et $\mathcal{C} = \{M_1,...,M_n\}$ une SMC-couverture de K, nous démontrons que $\bigcap_{i=1}^{n} M_i \nvdash \neg \phi$ pour tout $\phi \in K$ avec $\phi \nvdash \perp$. En effet, cette propriété est une conséquence du fait que les $SMCs$ de $\mathcal{C}$ couvrent toutes les formules cohérentes dans K.

Le raisonnement classique indique qu'une base de croyances incohérente ne contient pas les informations utiles, ce qui est contre-intuitif dans plusieurs cas. Par exemple, il est raisonnable de considérer que la base de croyances $\{p,q,\neg q\}$ est plus informative (ou "moins incohérente") que $\{p,\neg p,q,\neg q\}$, puisque la formule p dans la première base de croyances est impliquée dans aucun conflit. Ceci explique le besoin d'avoir des techniques et des principes qui nous permet d'analyser l'information cohérente, tel que les mesures d'incohérence. Rappelons qu'une mesure d'incohérence est définie par une fonction qui assigne une valeur réelle non négative à chaque base de croyances.

Nous présentons maintenant notre mesure d'incohérence, dénotée $\mathcal{I}_{SMC}$ qui est fondée sur la notion des SMC-couvetures maximales. L'idée principale porte sur deux volets. Premièrement, l'incohérence a été quantifiée en considérant toutes les formules cohérentes possibles d'une croyance. Ceci explique pourquoi nous utilisons la notion de SMC-couverture. Deuxièmement, une base de croyances avec les $SMCs$ partageant beaucoup de formules doit être assignée à une plus petite valeur d'incohérence qu'une base de croyances avec les $SMCs$ partageant un petit nombre de formules. Intuitivement, en tenant compte des formules partagées par les $SMCs$, nous visons à capturer les formules qui sont impliquées dans un petit nombre de conflits. En particulier, une formule dans tous les $SMCs$ d'une base de croyances n'appartient à aucun sous ensemble minimal incohérent.

Définition 3.4. (Mesure $\mathcal{I}_{SMC}$). Soit K une base de croyances. La mesure d'incohérence $\mathcal{I}_{SMC}$ de K est définie comme suit :

$$\mathcal{I}_{SMC}(K) = \mid K \mid - \lambda(K).$$

En d'autres termes, $\mathcal{I}_{SMC}$ correspond au nombre minimum de formules qui ne peuvent pas être partagées entre les $SMCs$ couvrant toutes les formules cohérentes.

Reprenons la base de croyances dans l'exemple 3.1, nous avons $\mathcal{I}_{SMC}(K) = 5$ puisque $\mathcal{C}_2$ est une SMC-couverture maximale et $r \wedge \neg r$ est l'unique formule incohérente dans K.

Exemple 3.2. *Une logique classique propositionnelle peut être utilisée pour représenter les préférences d'un agent. Ceci peut être réalisé en considérant les modèles d'une formule comme les résultats préférés et ses contre-modèles comme les résultats rejetés. Par exemple, la formule (poisson $\rightarrow$ vin-blanc) $\wedge$ (viande $\rightarrow$ vin-rouge)$\wedge$($\neg$vin-rouge $\vee \neg$ vin-blanc) signifie que nous préférons prendre du vin-blanc avec du poisson et du vin-rouge avec de la viande. En outre, nous rejetons le vin-blanc avec de la viande et le vin-rouge avec du poisson. Dans ce contexte, nous considérons la base de croyances d'un agent suivante :*

$$K = \left\{ \begin{array}{c} \phi_1 : (poisson \rightarrow (vin - blanc \wedge \textit{ thé})) \wedge (viande \rightarrow (vin - rouge \wedge \textit{café})) \\ \phi_2 : (fromage \rightarrow (vin - rouge \wedge \textit{ thé})) \wedge (\textit{gâteau} \rightarrow (vin - blanc \wedge \textit{café})) \\ \phi_3 : (poisson \wedge fromage) \wedge (\neg vin - rouge \vee \neg vin - blanc) \wedge \\ (\neg fromage \vee \neg \textit{gâteau}) \wedge (\neg \textit{café} \vee \neg \textit{thé}) \\ \phi_4 : \textit{café} \vee \textit{thé}. \end{array} \right\}$$

Il est clair que la base de croyances K est incohérente, puisque l'agent préfère du poisson avec du vin-blanc (ϕ_1) et du fromage avec du vin-rouge (ϕ_2) mais elle/il préfère également du poisson avec du fromage (ϕ_3). Il est *important de noter que la base de croyances* K *admet trois SMC-couvertures maximales :* $\mathcal{C}_1 = \{\{\phi_1,\phi_2,\phi_4\},\{\phi_1,\phi_3,\phi_4\}\}$, $\mathcal{C}_2 = \{\{\phi_1,\phi_2,\phi_4\},\{\phi_2,\phi_3,\phi_4\}\}$ *et* $\mathcal{C}_3 = \{\{\phi_1,\phi_3,\phi_4\},\{\phi_2,\phi_3,\phi_4\}\}$. *Le nombre de formules partagées entre les* $SMCs$ *de chaque SMC-couverture maximale est égale à* 2, *i.e.,* $\lambda(K) = 2$. *En conséquence, nous obtenons* $\mathcal{I}_{SMC}(K) = 4 - 2 = 2$. *Ici le nombre* 2 *signifie que nous avons ignoré au moins deux formules dans* K *qui ne contredisent aucune formule dans* K.

En effet, si nous ignorons une seule formule, alors nous démontrons qu'elle est contredite par les quatre formules restantes. Par exemple, si nous ignorons seulement ϕ_3, *alors nous avons* $\{\phi_1,\phi_2,\phi_4\} \vdash \neg\phi_3$. *Cependant, si nous ignorons quelques deux formules, par exemple les formules qui ne sont pas partagées par les* $SMCs$ *de la SMC-couverture maximale* $\mathcal{C}_2$, *alors ces deux formules ne sont pas contredites par les formules partagées par les* $SMCs$ *de* $\mathcal{C}_2$, *i.e.,* $\{\phi_2,\phi_4\} \nvdash \neg\phi_1$ *et* $\{\phi_2,\phi_4\} \nvdash \neg\phi_3$.

En d'autres termes, en considérant pour les préférences de l'agent les formules ϕ_2 *et* ϕ_4, *les deux formules* ϕ_1 *et* ϕ_3 *restent possibles (elles sont satisfaites par les interprétations qui satisfont* $(\phi_2 \wedge \phi_4)$*).*

Considérons maintenant la base de croyances K' *obtenue à partir de* K *en remplaçant* ϕ_4 *avec du café i.e.,* $K' = \{\phi_1,\phi_2,\phi_3, \textit{café}\}$. *De la même façon que* K, *la base de croyances* K' *admet trois SMC-couvertures maximales :* $\mathcal{C}_1 = \{\{\phi_1,\phi_2,\phi_4\},\{\phi_1,\phi_3\}\}$, $\mathcal{C}_2 = \{\{\phi_1,\phi_2,\phi_4\},\{\phi_2,\phi_3\}\}$ *et* $\mathcal{C}_3 = \{\{\phi_1,\phi_2,\phi_4\},\{\phi_3,\phi_4\}\}$. *Ainsi, nous obtenons* $\mathcal{I}_{SMC}(K') = 3$ *puisque* $\lambda(K') = 1$. *En conséquence, après notre mesure d'incohérence, la quantité de conflits dans* K' *est supérieure à celle de* K. *Ceci peut être expliquer par le fait que la formule (café* $\vee$ *thé) n'est impliquée dans aucun conflit dans* K, *mais café est impliqué dans un conflit dans* K'.

3.3 Une interprétation de $\mathcal{I}_{SMC}$ avec une logique épistémique

La logique multimodale **S5** est parmis les logiques épistémiques les plus étudiées. Il convient pour la représentation et le raisonnement sur les croyances des agents [14].

Par exemple, étant donné une formule propositionnelle ϕ, nous utilisons la formule $\mathcal{K}_a\phi$ pour représenter le fait que l'agent a connaît ϕ. Pour une meilleure compréhension de notre mesure d'incohérence, nous utilisons ici la logique multimodale **S5** pour fournir une interprétation épistémique de $\mathcal{I}_{SMC}$. Dans ce contexte, nous considérons que chaque pièce d'informations possible est cohérente selon un agent distinct. Alors, nous démontrons que la quantité de conflits est définie à partir de la taille du plus grand consensus entre tous les agents considérés. Un consensus possible est un sous ensemble de pièces d'informations cohérentes qui ne sont pas rejetées par aucun agent. Un agent rejette un sous ensemble de pièces d'informations s'il est incohérent avec la pièce d'informations qu'elle/ il soutient.

Nous fournissons maintenant un aperçu de la logique multimodale **S5**. Etant donné un ensemble dénombrable d'agents $\mathcal{A}$, l'ensemble des formules multimodales **S5** est obtenu par l'extention du langage propositionnel avec le modal primitif unaire $\mathcal{K}_a$ pour $a \in \mathcal{A}$. Etant donné une formule ϕ multimodale **S5**, nous utilisons $Var(\phi)$ (respectivement $\mathcal{A}(\phi)$) pour dénoter l'ensemble des variables propositionnelles (respectivement les agents) qui apparaissent dans ϕ. Par exemple, pour $\phi = \mathcal{K}_a p \wedge \mathcal{K}_b \neg q$, nous obtenons $Var(\phi) = \{p,q\}$ et $\mathcal{A}(\phi) = \{a,b\}$.

Pour définir les sémantiques des mondes possibles de la logique multimodale **S5**, nous définissons d'abord la structure de l'interprétation

S5.

Définition 3.5. (S5-Interprétation). Une S5-interprétation d'une formule ϕ de **S5** est une structure de la forme $(W; \{\sim_a\}_{a \in A(\phi)}, V)$ où W est un ensemble non vide de mondes, V est une fonction de W vers $2^{Var(\phi)}$ (l'ensemble de puissance de $Var(\phi)$), et pour tout $a \in \mathcal{A}(\phi)$, $\sim_a \subseteq W \times W$ est une relation d'équivalence.

Définition 3.6. (Relation de satisfaction). La relation de satisfaction entre une formule ϕ de **S5**, une S5-interprétation $\mathcal{M} = ((W, \{\sim_a\}_{a \in A(\phi)}, V))$ et $w \in W$ un monde, écrit $\mathcal{M}, w \models \phi$, est définie inductivement comme suit :

$\mathcal{M}, w \models p$ ssi $p \in V(w)$;
$\mathcal{M}, w \models \phi \wedge \psi$ ssi $\mathcal{M}, w \models \phi$ et $\mathcal{M}, w \models \psi$;
$\mathcal{M}, w \models \phi \vee \psi$ ssi $\mathcal{M}, w \models \phi$ ou $\mathcal{M}, w \models \psi$;
$\mathcal{M}, w \models \neg\phi$ ssi $\mathcal{M}, w \not\models \phi$;
$\mathcal{M}, w \models \mathcal{K}_a\phi$ ssi $\forall w' \in W$, si $w \sim_a w'$ alors $\mathcal{M}, w' \models \phi$.

Définition 3.7. (**Problème de cohérence S5**). Etant donné une formule ϕ de **S5**, déterminer s'il existe une S5-interprétation

$$\mathcal{M} = ((W, \{\sim_a\}_{a \in A(\phi)}, V))$$

et $w \in W$ un monde tel que $\mathcal{M}, w \models \phi$. Si $\mathcal{M}$ satisfait ϕ, nous dirons que $\mathcal{M}$ est un **S5**-modèle de ϕ.

Nous décrivons notre interprétation de $\mathcal{I}_{SMC}$, nous associons à chaque formule cohérente dans une base de croyances un agent distinct qui considère cette formule comme possible (il/elle ne connaît pas sa négation). En d'autres termes, chaque pièce d'informations possible est cohérente selon son agent associé. Plus précisément, étant donné une base de croyances K, nous associons à chaque formule $\phi \in K \backslash IF(K)$ un agent distinct a_ϕ et nous utilisons la **S5** formule suivante dénotée $\mathcal{IS}(K)$($\mathcal{IS}$ signifie état initial), pour exprimer que chaque formule cohérente est possible selon son agent associé :

$$\bigwedge_{\phi \in K \backslash IF(K)} \neg \mathcal{K}_{a_\phi} \neg \phi$$

A noter que chaque agent considère sa formule correspondante possible mais pas nécessairement connue. En effet, en utilisant $\mathcal{K}_{a_\phi}\phi$ à la place de $\mathcal{K}_{a_\phi}\neg\phi$ signifie que nous exigeons que chaque agent connaît sa pièce d'informations correspondante, ce qui est impossible dans le cas d'une base de croyances puisqu'il n'y a pas de monde qui satisfait toutes ses formules, i.e., il n'y a pas d'état de croyance commune. Ainsi, la formule $\mathcal{IS}(K)$ est utilisée pour pouvoir avoir un état de croyance commune entre tous les agents, qui peut être vu comme un consensus.

Alors, étant donné une base de croyances K et $K' \subseteq K$, nous utilisons $\mathcal{PC}(K,K')$ ($\mathcal{PC}$ signifie un consensus possible) pour dénoter la formule suivante :

$$\mathcal{IS}(K) \wedge \bigwedge_{\phi \in K \backslash IF(K)} \mathcal{K}_{a_\phi} \bigwedge_{\psi \in K'} \psi$$

La formule $\mathcal{PC}(K,K')$ est utilisée pour représenter le fait que tous les agents qui satisfont $\mathcal{IS}(K)$, connaissent toutes les formules dans K'. Nous dirons que K' est un consensus possible dans K si $\mathcal{PC}(K,K') \nvdash \perp$. Nous utilisons $\mathcal{PCS}(K)$ ($\mathcal{PCS}$ signifie un ensemble de consensus possibles) pour dénoter l'ensemble de tous les consensus possibles dans K, i.e., $\mathcal{PCS}(K) = \{K' \subseteq K \mid \mathcal{PC}(K,K') \nvdash \perp\}$.

Intuitivement, l'incohérence de $\mathcal{PC}(K,K')$ signifie qu'il existe un scénario (une **S5**-interprétation) où tous les agents connaissent les pièces d'informations dans K', sachant que chaque agent considère sa pièce d'informations correspondante possible. En d'autres termes, K' peut être vu comme un état de croyance possible commune entre tous les agents.

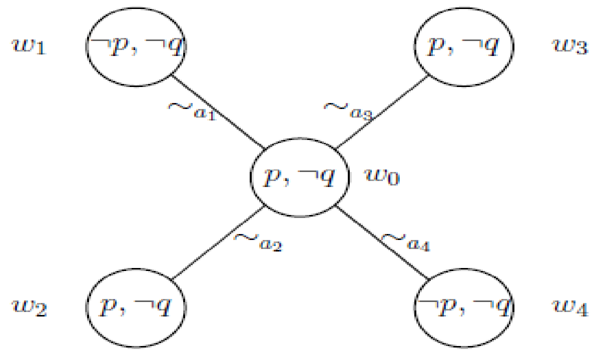

Figure 3.1 : Une S5-interprétation

Exemple 3.3. *Considérons la base de croyances* $K = \{p \rightarrow q, p \wedge \neg q, \neg q, \neg p\}$*. Alors, nous associons à chaque formule dans* K *un agent distinct :* a_1, a_2, a_3 *et* a_4 *sont associés respectivement à* $p \rightarrow q$, $p \wedge \neg q$, $\neg q$ *et* $\neg p$*. Soit* $K' = \{\neg q\}$ *un sous ensemble de* K*. Alors, nous obtenons* $\mathcal{PC}(K,K') = (\neg \mathcal{K}_{a_1} \neg (p \rightarrow q)) \wedge (\neg \mathcal{K}_{a_2} \neg (p \wedge \neg q)) \wedge (\neg \mathcal{K}_{a_3} \neg (\neg q)) \wedge (\neg \mathcal{K}_{a_4} \neg (\neg p)) \wedge (\mathcal{K}_{a_1} \neg q) \wedge (\mathcal{K}_{a_2} \neg q) \wedge (\mathcal{K}_{a_3} \neg q) \wedge \mathcal{K}_{a_4} \neg q)$*. La* ***S5****-interprétation* $\mathcal{M}$ *décrite dans la Figure 3.1 est un* ***S5****-modèle de la formule* $\mathcal{PC}(K,K')$*. En effet, suivant la* ***S5****-interprétation* $\mathcal{M}$*, la pièce d'informations* $\neg q$ *est connue par quatre agents, et* a_i *considère sa pièce d'informations possible associée dans le monde* w_i *pour* $i = 1,2,3,4$*. Plus précisément, nous avons* $\mathcal{M}$, $w_0 \models (\mathcal{K}_{a_1} \neg q) \wedge (\mathcal{K}_{a_2} \neg q) \wedge (\mathcal{K}_{a_3} \neg q) \wedge (\mathcal{K}_{a_4} \neg q)$ *puisque* $\neg q$ *est satisfaite par chaque monde. En outre,* $\mathcal{M}$, $w_0 \models \neg \mathcal{K}_{a_1} \neg (p \rightarrow q)$, $\mathcal{M}$, $w_0 \models \neg \mathcal{K}_{a_2} \neg (p \wedge \neg q)$, $\mathcal{M}$, $w_0 \models \neg \mathcal{K}_{a_3} \neg (\neg q)$ *et nous avons* $\mathcal{M}$, $w_0 \models \neg \mathcal{K}_{a_4} \neg (\neg p)$ *puisque* $\mathcal{M}$, $w_1 \models \neg p$, $\mathcal{M}$, $w_2 \models p \wedge \neg q$, $\mathcal{M}$, $w_3 \models \neg q$ *et* $\mathcal{M}$, $w_4 \models \neg p$*. En conséquence, nous obtenons* $\mathcal{M}$, $w_0 \models \mathcal{PC}(K,K')$*. Ainsi,* K' *est un consensus possible.*

Dans le théorème suivant, nous démontrons que $\mathcal{I}_{SMC}$ peut être définie à partir d'un ensemble de consensus possibles entre les agents considérés. Plus précisément, étant donné une base de croyances K, nous démontrons $\mathcal{I}_{SMC}(K)$ est le nombre de formules qui ne sont pas dans l'un du plus grand consensus possible. Le théorème 3.1 démontre que notre mesure d'incohérence est directement liée à la notion du consensus possible décrit précédemment.

Théorème 3.1. *Etant donné une base de croyances K, nous avons $\mathcal{I}_{SMC}(K) = |K| - \max\{|K'| \mid K' \in \mathcal{PCS}(K)\}$.*

Preuve. *En utilisant la définition de $\mathcal{I}_{SMC}$, il suffit de démonter que $\lambda(K) = max\{|K'| \mid K' \in \mathcal{PCS}(K)\}$. Démontrons d'abord que $\lambda(K) \leq \max\{|K'| \mid K' \in \mathcal{PCS}(K)\}$. Soit $\mathcal{C} = \{M_1,...,M_l\}$ une SMC-couverture maximale de K et $\mathcal{B}$ un modèle de $\bigcap_{1\leq i\leq l} M_i$. Afin d'associer une **S5**-interprétation qui satisfait la formule $\mathcal{PC}(K,\bigcap_{1\leq i\leq l} M_i)$, nous associons deux mondes distincts w_ϕ et w'_ϕ pour chaque élément ϕ dans $K \setminus IF(K)$. Alors, nous associons à $\mathcal{C}$ une **S5**-interprétation $\mathcal{M} = (W,\{\sim_{a_\phi}\}_{\phi\in K\setminus IF(K)},V)$, où $W = \bigcup_{\phi\in K\setminus IF(K)}\{w_\phi,w'_\phi\}$ et pour tout $\phi \in K \setminus IF(K)$, nous avons :*

- $V(w_\phi) = \{p \mid \mathcal{B}'(p) = 1\}$ *avec* $\mathcal{B}'$ *un modèle de* ϕ,
- $V(w'_\phi) = \{p \mid \mathcal{B}(p) = 1\}$ *et,*
- $\sim_{a_\phi} = \{(w_\phi,w_\phi),(w'_\phi,w'_\phi),(w_\phi,w'_\phi),(w'_\phi,w_\phi)\}$.

*Il est clair que, pour tout $\phi \in K \setminus IF(K)$, nous obtenons $\mathcal{M}, w_\phi \models \phi$ et $\mathcal{M}, w_\phi \models \bigcap_{1\leq i\leq l} M_i$, puisque $V(w_\phi) = \{p \mid \mathcal{B}'(p) = 1\}$ avec $\mathcal{B}'$ un modèle de ϕ et $V(w'_\phi) = \{p \mid \mathcal{B}(p) = 1\}$. En conséquence, $\mathcal{M}$ est un **S5**-modèle de $\mathcal{PC}(K,\bigcap_{1\leq i\leq l} M_i)$. Ainsi, nous obtenons $\lambda(K) \leq \max\{|K'| \mid K' \in \mathcal{PCS}(K)\}$.*

*Démontrons maintenant que $\lambda(K) \geq \max\{|K'| \mid K' \in \mathcal{PCS}(K)\}$. Soit $K' \in \mathcal{PCS}(K)$ et $\mathcal{M} = (W,\{\sim_{a_\phi}\}_{\phi\in K\setminus IF(K)},V)$ un **S5**-modèle de $\mathcal{PC}(K,K')$. Alors, pour tout $\phi \in K \setminus IF(K)$, il existe un monde $w_\phi \in W$ tel* *que* $\mathcal{M},w_\phi \models \phi \wedge \bigwedge_{\psi \in K'} \psi$ *. Ainsi,* $\bigcup_{\phi \in K \setminus IF(K)} \{K' \cup \{\phi\}\}$ *est un ensemble de sous ensembles cohérents de* K*. Donc, il existe une SMC-couverture* $\mathcal{C}$ *de* K *telle que, pour tout* $\phi \in K \setminus IF(K)$*, il existe* $M \in \mathcal{C}$ *tel que* $K' \cup \{\phi\} \subseteq M$*. Nous obtenons* $\mid \bigcap_{M \in \mathcal{C}} M \mid \geq \mid K' \mid$ *et, par conséquent,* $\lambda(K) \geq |K'|$.

3.4 Mesure d'incohérence pondérée $\mathcal{I}_{WSMC}$

Nous fournissons maintenant une généralisation de la mesure d'incohérence $\mathcal{I}_{SMC}$. L'idée de base est d'associer un poids à chaque formule dans une base de croyances selon son importance. Dans ce contexte, la valeur d'incohérence correspond au plus petit poinds des croyances non partagées.

Etant donné une base de croyances K, nous définissons une fonction pondérée W de K comme une fonction de K à $\mathbb{N}^*$.

Définition 3.8. (SMC-couverture maximale pondérée). Soit K une base de croyances, W est une fonction pondérée de K et $\mathcal{C}$ une SMC-couverture de K. Alors $\mathcal{C}$ est appelé une SMC-couverture maximale pondérée de K si elle est normale et $\sum_{\phi \in \bigcap_{M \in \mathcal{C}} M} W(\phi) \geq \sum_{\phi \in \bigcap_{M \in \mathcal{C}'} M} W(\phi)$ pour chaque SMC-couverture $\mathcal{C}'$. Nous dénotons par $\lambda(K,W)$ la valeur $\sum_{\phi \in \bigcap_{M \in \mathcal{C}} M} W(\phi)$.

Définition 3.9. (Mesure $\mathcal{I}_{WSMC}$). Soit K une base de croyances et W une fonction pondérée de K. La mesure d'incohérence de K, notée $\mathcal{I}_{WSMC}(K,W)$ est définie comme suit :

$$\mathcal{I}_{WSMC}(K) = |K| - \lambda(K,W).$$

Nous pouvons voir que $\mathcal{I}_{WSMC}$ est une généralisation de $\mathcal{I}_{SMC}$. En effet, en utilisant la fonction pondérée W et en associant un poids égal à 1 à chaque formule de la base de croyances K, nous obtenons $\mathcal{I}_{WSMC}(K,W) = \mathcal{I}_{SMC}(K)$. Il y a plusieurs manières de définir une fonction pondérée d'une base de croyances à partir de la structure de ses formules. Par exemple, le poids d'une formule est le nombre de variables qui apparaissent. Intuitivement, cela signifie que l'importance d'une croyance dépend du nombre d'informations qui les lies.

3.5 Propriétés de $\mathcal{I}_{SMC}$

Dans cette partie, nous démontrons que $\mathcal{I}_{SMC}$ satisfait plusieurs propriétés raisonnables. Nous démontrons d'abord qu'elle satisfait les propriétés de Cohérence, Monotonie et d'Indépendance des formules libres. Ensuite, nous démontrons que notre mesure satisfait la propriété de Faible-Dominance et une variante forte de Super-Additivité. Nous rappelons, comme indiquer dans la proposition 2.3, il n'y a pas de mesure d'incohérence qui satisfait les propriétés de Cohérence, Faible-Dominance, et de Super-Additivité. Cela peut être vu comme une raison expliquant pourquoi notre mesure d'incohérence ne satisfait pas la propriété de Dominance.

Proposition 3.1. *La mesure d'incohérence $\mathcal{I}_{SMC}$ satisfait les propriétés suivantes : Cohérence, Monotonie et Indépendance des formules libres.*

Preuve. ***Cohérence***. *Nous considérons d'abord la partie "si". Soit K une base de croyances cohérente. Alors $\{K\}$ est l'unique SMC-couverture maximale de K ($\lambda(K) = |K|$). D'où, $\mathcal{I}_{SMC}(K) = 0$. Nous considérons maintenant la partie "seulement si". Soit K une base de croyances telle que $\mathcal{I}_{SMC} = 0$. Alors, nous avons $|K| - \lambda(K) = 0$. Donc, nous obtenons $\lambda(K) = |K|$ et, par conséquent, K est une base de croyances cohérente.*
Monotonie. *La proposition 3.3 implique que $\mathcal{I}_{SMC}$ satisfait la Monotonie.*
Indépendance des formules libres. *Soit K une base de croyances et ϕ est une formule libre dans K. Soit $\mathcal{C} = \{M_1,...,M_n\}$ une SMC-couverture*

maximale de $K\backslash\{\phi\}$. *Puisque* $\phi \in Free(K)$, *nous avons* $M_i \cup \{\phi\} \nvdash \perp$ *pour chaque* $1 \leq i \leq n$. *Ainsi,* $\{M_1 \cup \{\phi\},...,M_n \cup \{\phi\}\}$ *est une SMC-couverture maximale de* K *et nous obtenons* $\lambda(K) = \lambda(K\backslash\{\phi\}) + 1$. *Par conséquent,* $\mathcal{I}_{SMC}(K) = |K| - \lambda(K) =| K\backslash\{\phi\} | +1 - \lambda(K\backslash\{\phi\}) - 1 = \mathcal{I}_{SMC}(K\backslash\{\phi\})$.

Proposition 3.2. *La mesure* $\mathcal{I}_{SMC}$ *satisfait la propriété de Faible-Dominance.*

Preuve. *Soit* K *une base de croyances et* ϕ *et* ψ *deux formules telles que* $\phi \nvdash \perp$, $\phi \notin K$ *et* $\phi \vdash \psi$. *Soit* $\mathcal{C}$ *une SMC-couverture maximale de* $K \cup \{\phi\}$. *Nous considérons* $\psi \notin K$, *puisque* $\mathcal{I}_{SMC}$ *satisfait la propriété de Monotonie. Il est clair qu'en remplaçant dans* $\mathcal{C}$ *la formule* ϕ *par* ψ *nous obtenons un ensemble de sous ensembles satisfaisables de* $K \cup \{\psi\}$. *En conséquence, nous obtenons* $\lambda(K \cup \{\psi\}) \geq \lambda(K \cup \{\phi\})$. *Donc, nous obtenons* $\mathcal{I}_{SMC}(K \cup \{\psi\}) = |K \cup \{\psi\}| - \lambda(K \cup \{\psi\}) \leq |K \cup \{\phi\}| - \lambda(K \cup \{\phi\}) = \mathcal{I}_{SMC}(K \cup \{\phi\})$.

Fournissons maintenant un exemple qui démontre que $\mathcal{I}_{SMC}$ ne satisfait la propriété de Dominance. Considérons par exemple la base de croyances $K = \{p \wedge (p \rightarrow q),\neg q\}$. Nous avons $p \wedge (p \rightarrow q) \nvdash \perp$, $p \wedge (p \rightarrow q) \vdash q$ et $\lambda(K) = 0$. En outre, nous avons $\lambda(K \cup \{q\}) = 0$. Alors, nous avons $\mathcal{I}_{SMC}(K \cup \{q\}) = 3 > \mathcal{I}_{SMC}(K \cup \{p \wedge (p \rightarrow q)\}) = 2$. En d'autres termes, dans ce cas la propriété de Dominance a échoué car elle indique que nous pouvons ajouter q à K sans changer la quantité de conflits.

Proposition 3.3. *La mesure* $\mathcal{I}_{SMC}$ *satisfait la propriété de Super-Additivité.*

Preuve. *Une conséquence directe de la Proposition 3.4.*

Dans la proposition suivante, nous démontrons que la mesure $\mathcal{I}_{SMC}$ satisfait une généralisation de la propriété de Super-Additivité.

Proposition 3.4. ***(Généralisation de Super-Additivité)****. Etant donné deux bases de croyances K et K', nous avons :*

$$\mathcal{I}_{SMC}(K \cup K') \geq \mathcal{I}_{SMC}(K) + \mathcal{I}_{SMC}(K') - |K \cap K'|$$

Preuve. *Nous avons, pour tous $M \in SMCs(K \cup K')$, $M' = M \cap K$ et $M'' = M \cap K'$ sont à la fois cohérents. Soit $\mathcal{C} = \{M_1,...,M_n\}$ est une SMC-couverture maximale de $K \cup K'$. Alors, $\mathcal{C}' = \{M_1 \cap K,...,M_n \cap K\}$ et $\mathcal{C}'' = \{M_1 \cap K',...,M_n \cap K'\}$ sont des ensembles de sous ensembles cohérents. En outre, $\bigcap_{M \in \mathcal{C}} M = (\bigcap_{M' \in \mathcal{C}} M') \cup (\bigcap_{M'' \in \mathcal{C}''} M'')$. Ainsi, nous avons $\lambda(K \cup K') \geq \lambda(K) + \lambda(K')$. En conséquence, nous avons $\mathcal{I}_{SMC}(K \cup K') \geq |K \cup K'| - \lambda(K) - \lambda(K')$. Ainsi, nous avons $|K \cup K'| = |K| + |K'| - |K \cap K'|$. Donc, $\mathcal{I}_{SMC}(K \cup K') \geq \mathcal{I}_{SMC}(K) + \mathcal{I}_{SMC}(K') - |K \cap K'|$.*

Notons que $\mathcal{I}_{SMC}$ ne satisfait pas la propriété de SMI-Additivité, puisqu'il n'y a pas de mesure d'incohérence qui satisfait les propriétés de Cohérence, Faible-Dominance et SMI-Additivité (Proposition 2.5). Pour illustrer ce point, considérons par exemple $K = \{p,q,\neg p \wedge \neg q\}$,$K_1 = \{p,\neg p \wedge \neg q\}$ et $K_2 = \{q,\neg p \wedge \neg q\}$. Il est facile de voir que $\mathcal{I}_{SMC}(K) = 3$, $\mathcal{I}_{SMC}(K_1) = 2$ et $\mathcal{I}_{SMC}(K_2) = 2$. Nous avons $SMIs(K) = SMIs(K_1) \cup SMIs(K_2)$, mais $\mathcal{I}_{SMC}(K) < \mathcal{I}_{SMC}(K_1) + \mathcal{I}_{SMC}(K_2)$.

Dans la proposition suivante, nous fournissons les bornes intéressantes inférieure et supérieure de $\mathcal{I}_{SMC}$.

Proposition 3.5. *Etant donné une base de croyances K, $|IF(K)| \leq \mathcal{I}_{SMC}(K) \leq |K| - |Free(K)|$.*

Preuve. *L'inégalité $\mathcal{I}_{SMC}(K) \leq |K| - |Free(K)|$ est une conséquence directe du fait que, pour tout $M \in SMCs(K)$, $Free(K) \subseteq M$. Ainsi, l'inégalité $|IF(K)| \leq \mathcal{I}_{SMC}(K)$ est une conséquence directe du fait que,* *pour tout* $M \in SMCs(K)$, $IF(K) \cap M = \emptyset$.

De la même manière que la propriété MinInc introduite dans [22], la proposition suivante exprime que tous les sous ensembles minimaux incohérents sont considérés de manière égale.

Proposition 3.6. *Etant donné un sous ensemble minimal incohérent d'une base de croyances* K *tel que* $|K| > 1$, *nous avons* $\mathcal{I}_{SMC}(K) = 2$.

Preuve. *Soit* $K = \{\phi_1,...,\phi_n\}$ *un ensemble minimal incohérent tel que* $n > 1$. *Alors,* $M = \{\phi_1,...,\phi_{n-1}\}$ *et* $M' = \{\phi_2,...,\phi_n\}$ *sont les SMCs de* K, *et* $\{S,S'\}$ *est une SMC-couverture de* K. *Alors, nous avons* $\mathcal{I}_{SMC}(K) \leq n - (n-2) = 2$. *Supposons que* $\mathcal{I}_{SMC}(K) = 1$. *Alors, il existe* M *et* M' *dans* $SMCs(K)$ *tels que* $M \neq M'$ *et* $|M \cap M'| > n-1$. *Ainsi, nous avons* $|S| = |S'| = n$ *et nous obtenons une contradiction. D'où, nous avons* $\mathcal{I}_{SMC}(K) = 2$.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fourni une nouvelle approche de la mesure d'incohérence dénotée $\mathcal{I}_{SMC}$ qui est fondée sur les sous ensembles maximaux cohérents et nous avons fourni également une interprétation de $\mathcal{I}_{SMC}$ en se basant sur la logique épistémique multimodale **S5**. Et nous avons terminé par démontrer que notre mesure $\mathcal{I}_{SMC}$ satisfait plusieurs propriétés proposées dans la littérature.

Chapitre 4

Le calcul de la $\mathcal{I}_{SMC}$

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous décrivons deux approches de modélisation pour le calcul de notre mesure d'incohérence $\mathcal{I}_{SMC}$. D'une part, nous proposons un modèle en Programmation linéaire en nombres binaires qui est défini principalement sur l'ensemble des $SMCs$ et d'autre part, nous proposons un modèle en Partiel Max-SAT qui nous permet d'éviter le calcul des $SMCs$. Et enfin, nous étudions la relation entre notre mesure d'incohérence et deux autres mesures d'incohérence existantes.

4.2 Formulation en programmation linéaire en nombres binaires

Dans cette section, nous démontrons que le problème du calcul $\mathcal{I}_{SMC}$ peut être formulé sous forme d'un programme linéaire en nombres binaires (ILP), en fournissant un encodage défini principalement sur l'ensemble des $SMCs$ d'une base de croyances. Pour cela, chaque variable utilisée dans notre encodage est binaire (une variable $0-1$) et correspond soit à une formule ou à un SMC. Les contraintes sont définies de sorte que l'objectif consiste à maximiser la fonction correspondante à la somme des variables associées aux formules.

Les variables. Nous associons une variable binaire X_ϕ ayant un domaine $\{0,1\}$ pour chaque formule ϕ dans K. Nous associons également une variable binaire Y_M ayant un domaine $\{0,1\}$ pour chaque SMC M de K.

Nous définissons le programme linéaire en nombres binaires $ILP - SMCs(K)$ comme suit :

$$minimiser \quad \mid K \mid - \sum_{\phi \in K \setminus IF(K)} X_\phi$$

Sous les contraintes

$$\sum_{M \in SMCs(K):\phi \in M} Y_M \geq 1 \quad pour \quad tout \quad \phi \in K \setminus IF(K) \quad (1)$$

$$X_\phi + Y_M \leq 1 \quad pour \quad tout \quad \phi \in K \quad et \quad M \in SMCs(K) \quad avec \quad \phi \notin M \quad (2)$$

Intuitivement, l'inégalité linéaire nous permet de considérer les sous ensembles de $SMCs(K)$ qui couvrent toutes les formules cohérentes de K. Ensuite, l'inégalité linéaire (2) indique que si $X_\phi = 1$ alors ϕ est une formule partagée entre tous les $SMCs(K)$ considérés. La fonction objectif vise à maximiser le nombre de formules partagées entre les $SMCs$ considérés.

Proposition 4.1. ***(Correction).*** *Soit K une base de croyances et S une solution de $ILP - SMCs(K)$, alors $\mathcal{I}_{SMC}(K) =\mid K \mid - \mid \{\phi \in K \backslash S(X_\phi) = 1\} \mid$.*

Preuve. *Chaque solution S_1 de l'inégalité linéaire (1) signifie que l'ensemble $\mathcal{C} = \{M \in SMCs(K) \mid S_1(Y_M) = 1\}$ est une SMC-couverture de K. En outre, chaque solution S_2 de l'inégalité linéaire (2) signifie que $\{\phi \in K \mid S_2(X_\phi) = 1\} \subseteq \bigcap_L M$ où $L = \{M \in SMCs(K) \mid S_2(Y_M) = 1\}$. Ainsi, minimiser $\mid K \mid - \sum_{\phi \in K | IF(K)} X_\phi$ correspond à maximiser $\sum_{\phi \in K|IF(K)} X_\phi$,* *nous avons* $\lambda(K) =\mid \{\phi \in K \mid S_(X_\phi) = 1\} \mid$. *Par conséquent, nous obtenons* $\mathcal{I}_{SMC}(K) =\mid K \mid - \mid \{\phi \in K \backslash S(X_\phi) = 1\} \mid$.

4.3 Formulation en Partiel Max-SAT

Nous proposons ici un encodage en Partiel Max-SAT du problème de calcul $\mathcal{I}_{SMC}$, qui est de taille polynomiale et est défini directement à partir d'une base de croyances sans calculer ses $SMCs$.

Un Partiel Max-SAT est un problème d'optimisation tel que chaque clause soit relaxable (souple) ou non relaxable (dure). L'objectif est de trouver une interprétation qui satisfait toutes les clauses dures avec un nombre maximum de clauses souples (par exemple [15]).

Dans la proposition suivante, nous démontrons qu'il suffit de considérer un nombre linéaire borné de $SMCs(K)$ d'une base de croyances pour le calcul de $\mathcal{I}_{SMC}$.

Proposition 4.2. *Soit K une base de croyances, si $\mathcal{C}$ est une SMC-couverture maximale de K, alors $|\mathcal{C}| \leq |K \setminus IF(K)|$.*

Preuve. *Soit $\mathcal{C} = \{M_1,...,M_k\}$ une SMC-couverture de K. Supposons que $k > n$ où $n =\mid K \setminus IF(K) \mid$. Si nous considérons que chaque SMC dans $\mathcal{C}$ contient une formule qui l'appartient, nous obtenons une contradiction, ainsi nous avons $k > n$. Alors, il existe $1 \leq i \leq k$ tel que $M_i \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n, j \neq i} M_j$. Toutefois, $\mathcal{C}$ est une SMC-couverture (voir la Définition 3.2 et la Définition 3.3). Ainsi, nous obtenons une contradiction et nous déduisons que $k \leq n$.*

En utilisant la Proposition 4.2, nous démontrons que la valeur $\lambda(K)$ d'une base de croyances K peut être redéfinie comme le nombre maximum de formules $n = \{K \setminus IF(K)\}$ partagées entre les sous ensembles cohérents

$\{S_1,...,S_n\}$ de K où $\bigcup_{i=n}^{n} S_i = K \setminus IF(K)$. Ci-dessous nous introduisons un modèle en Partial Max-SAT qui encode $\lambda(K)$ en utilisant cette définition.

Soit $K = \{\phi_1,...,\phi_n\}$ une base de croyances. Nous supposons que K ne contient aucune formule incohérente. En effet, pour définir notre modèle, il suffit de considérer le sous ensemble de formules cohérentes d'une base de croyances.

Variables. Pour chaque variable propositionnelle p apparente dans K et $1 \leq j \leq n$, nous introduisons une variable propositionnelle fraîche p^j. Alors, pour tout $1 \leq i,\ j \leq n$, nous utilisons ϕ_i^j pour dénoter la formule obtenue à partir de ϕ_i en renommant chaque variable propositionnelle p avec sa $j^{\text{ème}}$ variable propositionnelle fraîche correspondante p^j. De plus, pour tout $1 \leq i,\ j \leq n$, nous introduisons une variable fraîche q_i^j, qui est utilisée pour représenter le fait que r_i appartient au $j^{\text{ème}}$ sous ensemble cohérent. En plus, pour tout $1 \leq i \leq n$, nous introduisons une variable propositionnelle fraîche r_i, qui est utilisée pour représenter le fait que ϕ_i est partagée par tous les n sous ensembles cohérents.

Partie dure. Nous fournissons d'abord une formule déclarant que q_i^j est vraie si et seulement si sa formule correspondante ϕ_i^j est vraie (ϕ_i appartient au $j^{\text{ème}}$ sous ensemble cohérent) :

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} q_i^j \leftrightarrow \phi_i^j \quad (3)$$

Nous fournissons alors la formule codant le fait que chaque formule dans K appartient à au moins un des sous ensembles cohérents :

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{n} q_i^j \quad (4)$$

Finalement, la formule suivante rapporte les valeurs de vérité des variables de la forme r_i aux formules partagées entre les n sous ensembles cohérents :

$$\bigwedge_{i=1}^{n}(r_i \leftrightarrow \bigwedge_{j=1}^{n} q_i^j) \quad (5)$$

A noter que nous n'utilisons pas la forme normale conjonctive dans notre définition de la partie dure. Cependant, en utilisant l'encodage linéaire de Tseitin [39], nous démontrons que chaque formule propositionnelle peut être transformée en CNF.

Partie souple. Afin de maximiser le nombre de formules partagées entre les n sous ensembles cohérents, nous avons besoin seulement des clauses unaires souples suivantes :

$$r_1,...,r_n \quad (6)$$

Soit K une base de croyances, nous utilisons $MSAT(K)$ pour dénoter l'encodage en Partiel Max-SAT décrit ci-dessus.

Proposition 4.3. ***(Correction)****. Soit K une base de croyances et $\mathcal{B}$ une solution de $MSAT(K \setminus IF(K))$, alors $\lambda(K) = |\{r_i | 1 \leq i \leq |K \setminus IF(K)|$ et $\mathcal{B}(r_i) = 1\}|$.*

Preuve. *Soit $K = \{\phi_1,...,\phi_n,\psi_1,...,\psi_m\}$ une base de croyances t.q. $\psi_1,...,\psi_m$ sont ses formules incohérentes. Chaque modèle $\mathcal{B}$ de la partie dure de $MSAT(K \setminus IF(K))((3) \wedge (4) \wedge (5))$ représente un ensemble $\{S_1,...,S_n\}$ de $n = |K \setminus IF(K)|$ sous ensembles cohérents de K. Alors, en utilisant la formule (5), nous démontrons que $\mathcal{B}(r_i) = 1$ ssi $\phi_i \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i$. En conséquence, puisque l'objectif est de trouver une interprétation qui satisfait la partie dure avec le nombre maximum de clauses souples dans (6), nous démontrons que $|\{r_i | 1 \leq i \leq n$ et $B(r_i) = 1\}|$ est le nombre maximum de formules qui peuvent être partagées par les n sous ensembles cohérents $\{S_1,...,S_n\}$ de K*

où $\bigcup_{i=1}^{n} S_i = K \setminus IF(K)$. *D'où, nous avons* $\lambda(K) = |\{r_i | 1 \leq i \leq n$ *et* $B(r_i) = 1\}|$.

4.4 La relation entre les mesures

Dans cette section, nous étudions la relation entre notre mesure d'incohérence et les deux mesures existantes. Nous considérons d'abord la mesure d'incohérence $\mathcal{I}_{CC}$ [24] fondée sur les $SMIs$ décrite dans la section 2.3. La comparaison entre les mesures d'incohérence $\mathcal{I}_{SMC}$ et $\mathcal{I}_{CC}$ est motivée par le fait qu'elles satisfaient à la fois plusieurs propriétés fondamentales, appelées : Cohérence, Monotonie, Indépendance des formules libres, Faible-Dominance et Super-Additivité (voir Proposition 2.4 les Propositions 3.1-3.3). Elles satisfaient également la propriété fondamentale introduite dans [24], appelée Indépendent-SMI- Additivité. Le but de cette propriété est de distinguer les mesures d'incohérence qui tiennent en compte la distribution des formules parmis les conflits. Nous considérons également la mesure d'incohérence $\mathcal{I}_M$ fondée sur les $SMCs$ introduite dans [18]. La comparaison de $\mathcal{I}_{SMC}$ et $\mathcal{I}_M$ est motivée par le fait qu'elles sont définies à la fois par les sous ensembles maximaux cohérents.

Définition 4.1. (Independent-SMI-Additivité). Soit $\mathcal{I}$ une mesure d'incohérence. Alors, $\mathcal{I}$ satisfait la propriété d'Independent-SMI-Additivité ssi, pour toutes les bases de croyances K et K', si nous avons $SMIs(K \cup K') = SMIs(K) \uplus SMIs(K')$ et $(\bigcup_{M \in SMIs(K)} M) \cap (\bigcup_{M \in SMIs(K')} M) = \emptyset$,alors $\mathcal{I}(K \cup K') = \mathcal{I}(K) + \mathcal{I}(K')$.

Proposition 4.4. *La mesure d'incohérence* $\mathcal{I}_{SMC}$ *satisfait la propriété d'Independent-SMI-Additivité.*

Preuve. *Soient* K, K_1 *et* K_2 *des bases de croyances telles que* $SMIs(K) =$

$SMIs(K_1) \uplus SMIs(K_2)$ et, pour tous $M \in SMIs(K_1)$ et $M' \in SMIs(K_2)$, $M \cap M' = \emptyset$. Nous dénotons par K', K'_1 et K'_2 respectivement les ensembles $\bigcup_{M \in SMIs(K)} M, \bigcup_{M \in SMIs(K_1)} M$ et $\bigcup_{M \in SMIs(K_2)} M$. Notons que $K' = K'_1 \uplus K'_2$. En utilisant la propriété d'Indépendance des formules libres, nous avons $\mathcal{I}_{SMC}(K) = \mathcal{I}_{SMC}(K')$, $\mathcal{I}_{SMC}(K_1) = \mathcal{I}_{SMC}(K'_1)$ et $\mathcal{I}_{SMC}(K_2) = \mathcal{I}_{SMC}(K'_2)$. Puis, en utilisant la propriété de Super-Additivité, nous avons $\mathcal{I}_{SMC}(K) \geq \mathcal{I}_{SMC}(K_1) + \mathcal{I}_{SMC}(K_2)$. Soit $M_1 \in SMCs(K'_1)$ et $M_2 \in SMCs(K'_2)$. Puis $(\bigcup_{M \in SMIs(K_1)} M) \cap (\bigcup_{M \in SMIs(K_2)} M) = \emptyset$, $M_1 \cup M_2$ est un ensemble cohérent dans K'. Ensuite, en utilisant le fait que $K' = K'_1 \uplus K'_2$, nous avons $\lambda(K') \geq \lambda(K'_1) + \lambda(K'_2)$ et, par conséquent, $\mathcal{I}_{SMC}(K') \leq \mathcal{I}_{SMC}(K'_1) + \mathcal{I}_{SMC}(K'_2)$. Ainsi, nous avons $\mathcal{I}_{SMC}(K) \leq \mathcal{I}_{SMC}(K_1) + \mathcal{I}_{SMC}(K_2)$. D'où, nous obtenons $\mathcal{I}_{SMC}(K) = \mathcal{I}_{SMC}(K_1) + \mathcal{I}_{SMC}(K_2)$.

Dans la proposition suivante, nous mettons en évidence une relation intéressante entre $\mathcal{I}_{SMC}$ et $\mathcal{I}_{CC}$.

Proposition 4.5. *Etant donné une base de croyances K, nous avons $\mathcal{I}_{SMC}(K) \geq 2 \times \mathcal{I}_{CC}(K)$.*

Preuve. *Soit $S = (\{K_1,...,K_n\}; K')$ est une SMI-décomposition t.q. $\mathcal{I}_{CC}(K) = n$. En utilisant la condition (iv) dans la définition de la SMI-décomposition, nous obtenons $K_i \cap K_j = \emptyset$ pour chaque $1 \leq i < j \leq n$. Ainsi, nous obtenons $\mathcal{I}_{SMC}(\bigcup_{i=1}^{n} K_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathcal{I}_{SMC}(K_i)$ puisque $\mathcal{I}_{SMC}$ satisfait la propriété de Super-Additivité. En outre, en utilisant la condition (iii), nous obtenons $K_i \vdash \perp$ pour chaque $1 \leq i \leq n$. En conséquence, pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe $M_i \subseteq K_i$ t.q. M_i est un sous ensemble minimal incohérent. En utilisant la Proposition 3.6, nous obtenons $\mathcal{I}_{SMC}(M_i) = 2$ pour chaque $1 \leq i \leq n$. Ensuite, en utilisant le fait que $\mathcal{I}_{SMC}$ satisfait la propriété de Monotonie, nous obtenons $\mathcal{I}_{SMC}(K_i) > 2$ pour chaque $1 \leq i \leq n$. Ainsi, nous avons $\mathcal{I}_{SMC}(\bigcup_{i=1}^{n} K_i) \geq 2 \times n$. Finalement, en uti-*

lisant le fait que $\mathcal{I}_{SMC}$ satisfait la propriété de Monotonie, nous obtenons $\mathcal{I}_{SMC}(K' \cup \bigcup_{i=1}^{n} K_i) = \mathcal{I}_{SMC}(K) \geq 2 \times n$.

Nous démontrons maintenant que $\mathcal{I}_{SMC}$ permet de distinguer les bases de croyances qui ne sont pas distinguables par $\mathcal{I}_{CC}$.

Exemple 4.1. *Considérons, les deux bases de croyances $K_1 = \{p \wedge q, p \wedge r \neg p\}$ et $K_2 = \{p \wedge q, \neg p\}$. Alors, $SMIs(K_1) = \{\{p \wedge q, \neg p\}, \{p \wedge r, \neg p\}\}$ et $SMIs(K_2) = \{\{p \wedge q, \neg p\}\}$. Ainsi, nous obtenons $\mathcal{I}_{CC}(K_1) = \mathcal{I}_{CC}(K_2) = 1$. En outre, $\mathcal{C}_1 = \{\{p \wedge q, p \wedge r\}, \{\neg p\}\}$ et $\mathcal{C}_2 = \{\{p \wedge q\}, \{\neg p\}\}$ sont respectivement les SMC-couvertures de K_1 et K_2. En conséquence, $\lambda(K_1) = \lambda(K_2) = 0$. D'où, nous obtenons $\mathcal{I}_{SMC}(K_1) = 3$ et $\mathcal{I}_{SMC}(K_2) = 2$. L'exemple précédent démontre que $\mathcal{I}_{SMC}$ permet de distinguer les bases de croyances qui ne sont pas distinguables par $\mathcal{I}_{CC}$. Généralement, nous montrons formellement dans les deux propositions suivantes que $\mathcal{I}_{CC}$ ne distingue pas les bases de croyances dans certains cas, contrairement $\mathcal{I}_{SMC}$ l'est.*

Proposition 4.6. *Etant donné une base de croyances K, si $M \cap M' \neq \emptyset$ pour tous M, $M' \in SMIs(K)$ avec $M \neq M'$, alors $\mathcal{I}_{CC}(K) = 1$.*

Preuve. *Cette propriété est une conséquence du fait que le nombre maximum des $SMIs$ qui peuvent être isolés en éliminant les formules est 1, puisque ils partagent tout sous ensemble non-vide de formules.*

Proposition 4.7. *Etant donné une base de croyances K, si (i) $IF(K) = \emptyset$ et (ii) il existe une formule $\phi \in K$ t.q. $M \cap M' = \{\phi\}$ pour tous M, $M' \in SMIs(K)$ avec $M \neq M'$, alors $\mathcal{I}_{SMC}(K) = |SMIs(K)| + 1$.*

Preuve. *En utilisant la condition (ii), nous démontrons que $K \setminus \{\phi\}$ est un SMC. En outre, en utilisant la condition (i) et la condition (ii),* *nous démontrons que pour chaque SMC M contenant ϕ, $|M| = |K| - |SMIs(K)|$. En conséquence, $\{K \setminus \{\phi\}, M\}$ est une SMC-couverture maximale de K pour tout $M \in SMCs(K)$ avec $\phi \in M$. Ainsi, nous avons $\lambda(K) = |K| - |SMIs(K)| - 1$. D'où, nous obtenons $\mathcal{I}_{SMC}(K) = |K| - \lambda(K) = |SMIs(K)| + 1$.*

Il est intéressant de noter que les bases de croyances qui sont considérées dans la Proposition 4.7 sont des cas particuliers de celles considérées dans la Proposition 4.6.

Exemple 4.2. *Inversement, nous considérons les bases de croyances $K_3 = \{p \wedge q_1, p \wedge q_2, \neg p, r, \neg r\}$ et $K_4 = \{p \wedge q_1, p \wedge q_2, p \wedge q_3, p \wedge q_4, \neg p\}$. Alors, $\langle\{\{p \wedge q_1, p \wedge q_2, \neg p\}, \{r, \neg r\}\}, \emptyset\rangle$ et $\langle\{\{p \wedge q_1, p \wedge q_2, p \wedge q_3, p \wedge q_4, \neg p\}\}, \emptyset\rangle$ sont respectivement des SMI-décompositions maximales de K_3 et de K_4 et, inversement $\mathcal{I}_{CC}(K_3) = 2$ et nous avons $\mathcal{I}_{CC}(K_3) = 1$. En outre, $\{\{p \wedge q_1, p \wedge q_2, r\}, \{\neg p, \neg r\}\}$ et $\{\{p \wedge q_1, p \wedge q_2, p \wedge q_3, p \wedge q_4\}, \{\neg p\}\}$ sont respectivement des SMC-couvertures maximales de K_3 et de K_4. Ainsi, nous obtenons $\mathcal{I}_{SMC}(K_3) = \mathcal{I}_{SMC}(K_4) = 5$. Cet exemple démontre que $\mathcal{I}_{CC}$ permet de distinguer les bases de croyances qui ne sont pas distinguables par $\mathcal{I}_{SMC}$. En conséquence, nous pouvons déduire que $\mathcal{I}_{SMC}$ et $\mathcal{I}_{CC}$ ne capturent pas les même facettes dans la mesure d'incohérence, puisque l'une nous permet de distinguer les bases de croyances qui ne sont pas distinguables par l'autre.*

Considérons maintenant la mesure d'incohérence $\mathcal{I}_M$ introduite dans [18]. Elle est définie comme suit :

$$\mathcal{I}_M(K) = |SMCs(K)| + |IF(K)| - 1$$

Dans notre comparaison de $\mathcal{I}_{SMC}$ et $\mathcal{I}_M$, nous considérons d'abord un cas simple de bases de croyances contenant seulement les formules incohérentes. Nous avons la propriété suivante : pour toute base de croyances K avec $IF(K) = K$, $\mathcal{I}_{SMC}(K) = \mathcal{I}_M(K) = |K|$. En effet, quand une base de croyances K contient seulement les formules incohérentes, nous obtenons $\lambda(K) = 0$ et $|SMCs(K)| = 1$. Plus généralement, en utilisant les arguments similaires, nous obtenons la propriété suivante : pour toute base de croyances K avec $|M| = 1$ pour tout $M \in SMIs(K)$, $\mathcal{I}_{SMC}(K) = \mathcal{I}_M(K) = |IF(K)|$. En d'autres termes, $\mathcal{I}_{SMC}$ et $\mathcal{I}_M$ procèdent de la même façon dans le cas où l'incohérence d'une base de croyances est seulement la conséquence de la présence des formules incohérentes.

En outre, il est intéressant de noter que, pour une base de croyances donnée $K, \mathcal{I}_{SMC}(K) \leq |K|$, mais $\mathcal{I}_M(K)$ pourrait être de taille exponentielle de K.

Exemple 4.3. *Considérons, la base de croyances K suivante:*

$$K = \{\sum_{i=1}^{2n} p_i > n, \neg p_1, \ldots, \neg p_{2n}\}$$

L'inégalité dans K correspond à une instance de contrainte de cardinalité bien connue. Plusieurs encodages polynomiaux de ce genre de contraintes en formules propositionnelles ont été proposées dans la littérature (i.e. [25, 26]). Il est clair que, chaque SMC dans K est soit $\{\neg p_1, \ldots, \neg p_{2n}\}$ ou soit un sous ensemble de n formules dans $\{\neg p_1, \ldots, \neg p_{2n}\}$ avec $\sum_{i=1}^{2n} p_i \geq n$. En conséquence, nous obtenons $|SMCs(K)| = 1 + \binom{2n}{n} = 1 + \frac{2n!}{n!.n!} \geq 2^n$.

Par exemple, Considérons les deux bases de croyances $K_1 = \{p \wedge \neg q, q \wedge r_1\}$ et $K_2 = \{p \wedge \neg q, q \wedge r_1, \ldots, q \wedge r_n\}$ pour un entier $n \geq 2$. Dans les deux bases de croyances, il y a deux sous ensembles maximaux cohérents disjoints et par conséquent, nous obtenons $\mathcal{I}_M(K_1) = \mathcal{I}_M(K_2) = 1$. Toutefois, nous avons $\mathcal{I}_{SMC}(K_1) = 2$ et $\mathcal{I}_{SMC}(K_2) = n + 1$. A l'exception du fait que cet *exemple démontre que $\mathcal{I}_{SMC}$ peut distinguer les bases de croyances qui ne sont pas distinguables en utilisant $\mathcal{I}_M$, il démontre également que $\mathcal{I}_{SMC}$ et $\mathcal{I}_M$ ne quantifient pas la quantité de conflits de la même façon. En effet, contrairement à $\mathcal{I}_{SMC}$, la mesure d'incohérence $\mathcal{I}_M$ ne tient pas en compte la distribution des formules entre les sous ensembles maximaux cohérents.*

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé deux manières différentes pour le problème du calcul de notre mesure d'incohérence $\mathcal{I}_{SMC}$. La première manière est d'encoder $\mathcal{I}_{SMC}$ en un problème de programmation linéaire en nombres binaires et la seconde manière est de proposer un encodage en Partiel Max-SAT. Et nous avons terminé par étudier la relation entre notre mesure $\mathcal{I}_{SMC}$ et deux autres mesures existantes $\mathcal{I}_{CC}$ et $\mathcal{I}_M$.

Chapitre 5

Conclusion générale

Conclusion générale

Plusieurs approches ont été proposées dans la littérature sur les mesures d'incohérence. Dans ce manuscrit, nous avons proposé une approche originale fondée sur les sous ensembles maximaux cohérents. En utilisant cette mesure, le degré de conflits dans une base de croyances est défini comme le plus petit nombre de pieces d'informations qui ne sont pas dans l'intersection des $SMCs$ couvrant toutes les pièces d'informations cohérentes. L'idée principale porte sur deux volets. Premièrement, l'incohérence doit être quantifiée en considérant toutes les formules cohérentes possibles d'une croyances. Ceci explique pourquoi nous utilisons la notion de la SMC-couverture. Deuxièmement, une base de croyances avec les $SMCs$ partageant beaucoup de formules doit être assignée à une petite valeur d'incohérence qu'une base de croyances avec les $SMCs$ partageant un petit nombre de formules. Intuitivement, en tenant compte des formules partagées par les $SMCs$, nous cherchons à capturer les formules qui sont impliquées dans un petit nombre de conflits. En outre, nous proposons un consensus multi-agents basé sur l'interprétation de notre mesure d'incohérence. Dans cette interprétation, nous considérons que chaque pièce d'informations cohérente possible selon un agent distinct, et la quantité de conflits est définie à partir de la taille du plus grand consensus entre tous les agents. Un consensus possible est un sous ensemble de pièces d'informations cohérentes qui ne sont pas rejetées par aucun agent. Nous utilisons une logique épistémique, appelée la logique multimodale **S5**, pour décrire cette interprétation. Nous démontrons alors que notre mesure d'incohérence satisfait plusieurs propriétés de l'état de l'art, telles que : Cohérence, Monotonie, Indépendence des formules libres et Super-Additivité. En outre, nous avons proposé un encodage en programmation linéaire en nombres binaires pour le calcul de nontre mesure, qui est défini à partir de l'ensemble des sous ensembles maximaux cohérents. Nous proposons également un encodage polynomial en Partiel Max-SAT, qui nous permet d'éviter le calcul des sous ensembles maximaux cohérents.

Comme perspective, nous prévoyons d'effectuer des évaluations expérimentales pour le problème du calcul de $\mathcal{I}_{SMC}$. Nous comptons également d'étudier les relations entre notre approche pour les mesures d'incohérence et les modèles des consensus multi-agents existants.

Bibliographie

[1] Amgoud. L, Cayrol. C., : A Reasoning Model Based on the Production of Acceptable Arguments. In : Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, vol. 34, 2002, pp. 197–215.

[2] Ammoura. M, Raddaoui. B, Salhi. Y, Oukacha. B., : On Measuring Inconsistency Using Maximal Consistent Sets. In : Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty -13th European Conference, ECSQARU 2015, Vol. 9161 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, (2015) 267-276.

[3] Ammoura. M, Salhi. Y, Oukacha. B, Raddaoui. B., : On an MCS-based inconsistency measure. In : International Journal of Approximate Reasoning (IJAR),2016.

[4] Bailleux.O, Boufkhad.Y, : Efficient CNF encoding of boolean cardinality constraints. In : Principles and Practice of Constraint Programming - CP 2003, 9th International Conference, CP 2003, Kinsale, Ireland, Vol. 2833 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, (2003), pp. 108-122.

[5] Benferhat. S, Kaci. S., : Fusion of possibilistic knowledge bases from a postulate point of view. In : International Journal of Approximate Reasoning, 33(3), (2003), pp. 255–285.

[6] Besnard. P, Hunter. A., : Argumentation Based on Classical Logic. In Argumentation in Artificial Intelligence, Springer, (2009), pp. 133–152.

[7] Besnard. P., : Revisiting postulates for inconsistency measures. In : Logics in Artificial Intelligence - 14th European Conference, JELIA 2014, Madeira, Portugal, Vol. 8761 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, (2014), pp. 383-396.

[8] Boole. G., : being an essay towards a calculus of deductive reasoning. In : The mathematical analysis of logic, Cambridge, Philosophical Library, 1847, pp. 10.

[9] Chen. Q, Zhang. C, Zhang. S., : A verification model for electronic transaction protocols. In : Advanced Web Technologies and Applications, 6th Asia-Pacific Web Conference, APWeb 2004, Hangzhou, China, Vol. 3007 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, (2004) 824-833.

[10] Cook. S.A., : The complexity of theorem-proving procedures. In : Proceedings of the 3rd annual ACMsymposium, of the theory computing, (1971), pp. 151-158.

[11] Destercke. S, Dubois. D, Chojnacki. E., : Possibilistic information fusion using maximal coherent subsets. IEEE T. Fuzzy Systems, 17(1), (2009), pp. 79–92.

[12] Dubois. D., : Information Fusion and Revision in Qualitative and Quantitative Settings. Steps Towards a Unified Framework . In : W.

Liu, editor, European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU), Belfast, vol. 6717, Springer, (2011), pp. 1–18.

[13] Dung. P.M., : On the Acceptability of Arguments and its Fundamental Role in Nonmonotonic Reasoning, Logic Programming and n-Person Games. In : Artificial Intelligence, vol. 77, (1995), pp. 321–358.

[14] Fagin. R, Halpern. J, Moses. Y, Vardi. M.Y., : Reasoning About Knowledge. In : MIT Press Books (2003).

[15] Fu. Z, Malik. S., : On solving the partial MAX-SAT problem. In : Theory and Applications of Satisfiability Testing - SAT 2006, 9th International Conference, Seattle, WA, USA, Vol. 4121 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, (2006), pp. 252-265.

[16] Grant. J., : Classifications for inconsistent theories. In : Notre Dame Journal of Formal Logic (1978) 435-444.

[17] Grant. J, Hunter. A., : Measuring inconsistency in knowledgebases. In : J. Intell. Inf. Syst. (2006) 159-184.

[18] Grant.J, Hunter.A., : Measuring consistency gain and information loss in stepwise inconsistency resolution. In : Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty - 11th European Conference, ECSQARU 2011, Belfast, UK, Vol. 6717 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, 2011, pp. 362-373.

[19] Grant. J, Hunter. A., : Distance-based measures of inconsistency.

In : Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty -12th European Conference, ECSQARU 2013, Utrecht, The Netherlands, Vol. 7958 of Lecture Notes in Computer Science, Springer,(2013) 230-241.

[20] Gregoire. E, Mazure. B, Piette. C., : Using local search to find MSSes and MUSes. In : European Journal of Operational Research, vol. 199, (2009), pp. 640–646.

[21] Hunter. A., : How to act on inconsistent news : Ignore, resolve, or reject. In : Data Knowl. Eng. (2006), pp. 221-239.

[22] Hunter. A, Konieczny. S., : On the measure of conflicts: Shapley inconsistency values. In : Artif. Intell. 174(14) (2010), pp. 1007-1026.

[23] Hunter. A, Parsons. S, Wooldridge. M., : Measuring inconsistency in multi-agent systems. In : Kunstliche Intelligenz 28 (2014),pp 169-178.

[24] Jabbour. S, Ma. Y, Raddaoui. B., : Inconsistency measurement thanks to mus decomposition. In : International conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems, AAMAS 14, Paris, France, IFAA- MAS/ACM, (2014), pp. 877-884.

[25] Knight. K., : Measuring inconsistency. In : J. Philosophical Logic 31(1) (2002), pp. 77-98.

[26] Konieczny. S, Perez. R.P., : Merging information under constraints : a logical framework. In : Journal of Logic and Computation, vol.

12, (2002), pp. 773–808.

[27] Konieczny. S, Lang. J, Marquis. P., : Quantifying information and contradiction in propositional logic through test actions. In : IJCAI-03, proceedings of the 18th International Joint Conference on Artificial Intelligence, Acapulco, Mexico, Morgan Kaufmann,. (2003), pp. 106-111.

[28] Liffiton. M.H, Sakallah. K.A., : Algorithms for Computing Minimal Unsatisfiable Subsets of Constraints. In : Journal of Automated Reasoning, vol. 40,(2008) pp. 1–33.

[29] Martinez. A.B.B, Arias. J.J.P, Vilas. A.F., : On measuring levels of inconsistency in multi-perspective requirements specifications. In : Proceedings of the first International Conference on the Principles of Software Engineering, PRISE-04, Buenos Aires, Argentina, (2004), pp. 21-30.

[30] Martinez. M.V, Pugliese. A, Simari, G.I, Subrahmanian, V.S, Prade. H., : How dirty is your relational database? an axiomatic approach. In : Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty, 9th European Conference, ECSQARU 2007, Hammamet,Tunisia, Vol. 4724 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, (2007), pp. 103-114.

[31] McAreavey. K, Liu. W, Miller. P, Mu. K., : Measuring inconsistency in a network intrusion detection rule set based on snort. In : Int. J. Semantic Computing, (2011).

[32] Mu. K, Liu. W, Jin. Z., : A general framework for measuring

inconsistency through minimal inconsistent sets. In : Knowl. Inf. Syst. (2011), pp. 85-114.

[33] Pollock. J.L., : How to reason defeasibly. In : Artificial Intelligence, vol. 57, (1992), pp. 1–42.

[34] Priest, G., : Minimally inconsistent LP. In : Studia Logica 50 (1991), pp. 321-331.

[35] Qi. G, Liu. W, Bell. D.A., : Measuring conflict and agreement between two prioritized belief bases. In: IJCAI-05,Proceedings of the 19th International Joint Conference on Artificial Intelligence, Edinburgh, Scotland, UK, Professional Book Center, (2005), pp. 552-557.

[36] Sinz. C., : Towards an optimal CNF encoding of boolean cardinality contraints. In: Principles and Practice of Constraint Programming - CP 2005, 11th International Conference, CP 2005, Sitges, Spain, Vol. 3709 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, 2005, pp. 827-831.

[37] Thimm. M., : Measuring inconsistency in probabilistic knowledge bases. In : UAI 2009, Proceedings of the 25th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, Montreal, QC, Canada, AUAI Press, (2009), pp. 530-537.

[38] Thimm. M., : Inconsistency measures for probabilistic logics. In : Artificial Intelligence 197 (2013), pp. 1-24.

[39] Tseitin. G., : On the complexity of derivations in the propositional calculus. In : H. Slesenko (Ed.), Structures in Constructives Mathematics and Mathematical Logic, Part II, (1968), pp. 115-125.

[40] Zhou. L, Huang. H, Qi. G, Ma. Y, Huang. Z, Qu. Y., : Measuring inconsistency in DL-Lite ontologies. In : 2009 IEEE/WIC/ACM International Conference on Web Intelligence, WI-09, Milan, Italy, IEEE Computer Society, (2009), pp. 349-356.