

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERRI DE TIZI-OUZOU
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE MASTER

En Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

THÈME

Application du principe du maximum pour le
Problème de Heisenberg

PRÉSENTÉ PAR :

Mlle GHAROUT Kenza

DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE :

M. AIDENE	Mohamed	Professeur	UMMTO	Président
Mme. HARRACHE	Fazia	M. C. B	UMMTO	Encadrante
Mme. ZIDELMAL	Nacera	M. A. A.	UMMTO	Examinatrice

26 Septembre 2024

REMERCIEMENTS

Je remercie d'abord et avant tout le bon dieu tout puissant de m'avoir donné le courage et la force pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à mon encadrante Mme Harrache Fazia, d'avoir proposé et accepté de diriger ce travail, pour son soutien inestimable et son accompagnement tout au long de la réalisation de ce mémoire de master. Je suis sincèrement reconnaissante d'avoir eu la chance de travailler sous son encadrement.

Il m'est très agréable de remercier Monsieur Aidene Mohamed qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance. Je tiens également à remercier Madame Zidelmal Nacera qui a accepté d'être examinatrice de mon mémoire.

Je remercie également tous les enseignants qui m'ont donné des connaissances tout au long de mon cursus.

Je remercie tous les membres de ma famille pour leurs soutiens et leurs encouragements, particulièrement mes parents.

Enfin, je remercie tous les gens qui m'ont aidé de près ou de loin à réaliser ce travail.

Table des matières

Remerciements	1
Introduction	4
1 Quelques rappels mathématiques	6
1.1 Problème de Cauchy	6
1.1.1 Théorème d'existence et d'unicité	6
1.2 Systèmes différentiels linéaires	7
1.2.1 Exponentielle de matrices	8
1.3 Variétés différentielles	10
1.3.1 Rappels de calcul différentiel	10
1.3.2 Rappel de topologie	11
1.3.3 Sous-variétés de \mathbb{R}^n	13
1.4 Crochet de Lie	13
1.4.1 Champs de vecteurs	13
2 Généralité sur la théorie du contrôle optimal	15
2.1 Théorie du contrôle optimal	15
2.1.1 Définitions	15
2.1.2 Position du problème	17
2.1.3 Classement des problèmes de contrôle	18
2.2 Contrôlabilité des systèmes dynamiques	19
2.2.1 Ensemble accessible	19
2.2.2 Définition de la contrôlabilité	20
2.2.3 Contrôlabilité des systèmes linéaires	20
2.2.4 Contrôlabilité des systèmes non linéaires	24
2.2.5 Existence de trajectoire optimale	25
2.2.6 Principe du Maximum de Pontryagin	26
2.3 Systèmes sans dérive	29

3	Problème de Heisenberg	32
3.1	Présentation du problème	32
3.2	La contrôlabilité	34
3.3	Résolution du problème	35
3.3.1	Extrémales anormales	36
3.3.2	Extrémales normales	37
3.3.3	Symétrie du problème	44
3.3.4	Structure des géodésiques	45
3.3.5	Perte d'optimalité pour le problème de Heisenberg . . .	51

Introduction

La théorie du contrôle optimal est un domaine des mathématiques appliquées qui cherche à déterminer la meilleure manière de contrôler un système dynamique afin d'optimiser une certaine performance, souvent sous des contraintes spécifiques. Son origine remonte à la seconde moitié du XXe siècle, en réponse aux besoins croissants en matière de guidage et de régulation, notamment dans les secteurs de l'aéronautique et de la dynamique du vol.

Historiquement, la théorie du contrôle optimal s'inscrit dans la continuité du calcul des variations, une discipline qui étudie comment minimiser ou maximiser des fonctionnelles. Les premiers développements significatifs ont été réalisés après la Seconde Guerre mondiale, avec des contributions majeures liées à la mécanique classique et aux principes variationnels, tels que les équations d'Euler-Lagrange. Un tournant décisif dans ce domaine a été marqué par le principe du maximum formulé par Lev Pontriaguine en 1956, qui fournit des conditions nécessaires pour l'optimalité des solutions aux problèmes de contrôle. Aujourd'hui, le contrôle optimal trouve des applications dans divers domaines allant de l'ingénierie aérospatiale à la robotique, en passant par les systèmes économiques et biologiques. La recherche continue d'explorer les interactions entre les mathématiques pures et les applications pratiques, rendant cette discipline essentielle pour le développement des technologies modernes et l'amélioration des processus industriels.

Un système de contrôle peut être présenté par une famille de champs de vecteurs (système dynamique). Les propriétés du système de contrôle dépendent des propriétés des champs de vecteurs et des interactions entre eux. L'outil de base qui nous permet de comprendre les interactions entre différents champs de vecteurs sera le crochet de Lie.

L'objectif de ce mémoire est de développer des outils qui nous permettront d'étudier la contrôlabilité des systèmes de contrôle géométrique, en particulier le problème de Heisenberg qui apparaît dans divers domaines mathématiques.

Ce problème est un modèle de référence important en théorie du contrôle optimal géométrique. Le groupe de Heisenberg se présente généralement comme un espace de dimension 3 avec une structure de groupe particulière. [1],[2],[4],[10].

Ce présent travail est donc divisé en trois chapitres. Voici un bref résumé sur chacun d'eux :

Chapitre 1 : Dans ce chapitre, on va rappeler le problème de Cauchy et les systèmes différentiels, ensuite on va introduire les crochets de Lie, puis on s'intéressera aux variétés différentielles.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de contrôle optimal et nous présentons ici quelques notions de base nécessaires pour l'étude des problèmes de contrôle optimal telles que, la contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires ainsi que le principe du maximum.

Chapitre 3 : Dans ce chapitre qui représente la partie principale de ce mémoire, nous présentons d'abord le problème de Heisenberg, puis nous allons passer à la résolution de ce problème qui consiste à trouver les géodésiques minimales.

Chapitre 1

Quelques rappels mathématiques

1.1 Problème de Cauchy

Soit I_0 un intervalle de \mathbb{R} , et t_0 un point fixé dans I_0 .
Soit f une fonction définie et continue sur $I_0 \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R}^n , ainsi qu'un élément $y_0 \in \mathbb{R}^n$.
On cherche à trouver une solution $y : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall t \in I_0, y'(t) = f(t, y(t)), \quad (1.1)$$

$$y(t_0) = y_0. \quad (1.2)$$

Ce problème s'appelle problème de Cauchy pour le système différentiel (1.1).
La condition (1.2) s'appelle condition initiale.
La variable t représente le temps, et l'instant t_0 représente le temps initial.

1.1.1 Théorème d'existence et d'unicité

1.1.1.1 Théorème d'existence (Cauchy-Péano) :

On suppose que la fonction f est continue dans un voisinage du point (t_0, y_0) dans $I_0 \times \mathbb{R}^n$, alors il existe un intervalle $J_0 \subset I_0$, au voisinage de t_0 et une fonction $y \in C^1(J_0)$ tels que

$$\begin{cases} \forall t \in J_0 & y'(t) = f(t, y(t)) \\ & y(t_0) = y_0, t \in I. \end{cases} \quad (1.3)$$

Définition 1.1 On appelle solution locale du problème (1.3), la donnée d'un couple (I, y) , où I est un intervalle de \mathbb{R} qui est un voisinage de t_0 inclu dans

I_0 et où y est une fonction appartenant à $C^1(I)$ telle que

$$\forall t \in I \quad y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{et} \quad y(t_0) = y_0.$$

Définition 1.2 On dit que la solution locale (J, \tilde{y}) prolonge la solution locale (I, y) si on a $I \subseteq J$, et $\forall t \in I; y(t) = \tilde{y}(t)$.

Si de plus $I \neq J$, on dit que (J, \tilde{y}) prolonge strictement (I, y) .

Définition 1.3 On dit que la solution locale (I, y) est une solution maximale du problème ((1.3) s'il n'existe pas de solution locale de ce problème qui la prolonge strictement.

Définition 1.4 On dit que (I, y) est une solution globale de (1.3) dans I_0 , si (I, y) est une solution locale de ce problème et si $I = I_0$.

Remarque 1.1 Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse.

1.1.1.2 Théorème d'unicité[5] (Cauchy-Lipschitz) :

On suppose que la fonction f est continue sur $I_0 \times \mathbb{R}^n$, et qu'il existe une constante K tel que

$$\forall t \in I_0, \forall y, z \in \mathbb{R}^n : \quad |f(t, y) - f(t, z)| \leq K|y - z|,$$

alors le problème (1.3) admet une unique solution.

1.2 Systèmes différentiels linéaires

Considérons le problème de Cauchy dans \mathbb{R}^n

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

où les applications $t \rightarrow A(t) \in M_n(\mathbb{R})$ et $t \rightarrow B(t) \in \mathbb{R}^n$ sont localement intégrables sur l'intervalle I considéré.

Définition 1.5 La résolvante du problème (1.4) est la solution du problème de Cauchy

$$\frac{\partial R}{\partial t}(t, t_0) = A(t)R(t, t_0), \quad R(t_0, t_0) = Id$$

avec $R(t, t_0) \in M_n(\mathbb{R})$.

Proposition 1.1 *La résolvante possède les propriétés suivantes :*

- Pour tout $t, t_0, t_1 \in I_0$: $R(t_2, t_0) = R(t_2, t_1)R(t_1, t_0)$.
- Pour tout $t, t_0 \in I_0$: $(R(t_1, t_0))^{-1} = R(t_0, t_1)$.

Proposition 1.2 *(formule de Duhamel) :*

La solution du problème de Cauchy (1.4) est donnée par la formule de variation de la constante :

$$y(t) = R(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)B(s)ds.$$

Remarque 1.2 *Lorsque $t_0 = 0$, on note $M(t) = R(t, 0)$.*

Par la formule de variation de la constante, la solution du problème de Cauchy (1.4) peut s'écrire comme suit :

$$y(t) = M(t) \left(y_0 + \int_{t_0}^t M(s)^{-1}B(s)ds \right).$$

Cas des systèmes autonomes

Considérons le problème de Cauchy dans \mathbb{R}^n

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où $y(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_n(\mathbb{R})$. La résolvante de ce système est $M(t) = e^{tA}$.

La théorie dit que la solution générale est de la forme :

$$y(t) = y_0 e^{tA}.$$

1.2.1 Exponentielle de matrices

Définition 1.6 *Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on définit l'exponentielle de la matrice A par*

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

qui converge normalement sur tout compact de $M_n(\mathbb{R})$.

Propriétés : L'exponentielle de matrices réelles ou complexes vérifie les propriétés suivantes :

- Si on note O_n la matrice nulle, alors $\exp(O_n) = Id$.
- Si A et $B \in M_n(\mathbb{R})$ (ou $M_n(\mathbb{C})$), vérifient $AB = BA$, alors

$$e^{(A+B)} = e^A \cdot e^B.$$

- Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ (ou $M_n(\mathbb{C})$), la matrice e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Remarque 1.3 Si A et B ne commutent pas, alors on a en général

$$e^{(A+B)} \neq e^A \cdot e^B.$$

1.2.1.1 Exponentielle d'une matrice diagonale

Soit la matrice diagonale D d'ordre n

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

On vérifie facilement que

$$e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

1.2.1.2 Exponentielle d'une matrice nilpotente

Rappel :

Une matrice N est dite nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que N^p soit une matrice nulle.

Pour une telle matrice nilpotente, l'exponentielle de N est une somme finie :

$$e^N = \exp(N) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{A^k}{k!}.$$

1.2.1.3 Exponentielle d'une matrice diagonalisable

Diagonalisation d'une matrice carrée :

Une matrice carrée Δ est diagonalisable, s'il existe une matrice P inversible et D diagonale, telle que $\Delta = PDP^{-1}$.

D est la matrice diagonale des valeurs propres de Δ , quant à la matrice de passage P de la base canonique vers la base où Δ est diagonale, elle correspond à la matrice des vecteurs propres.

Exponentielle d'une matrice diagonalisable :

Le calcul de l'exponentielle d'une matrice diagonalisable est donné par la formule suivante :

$$e^{\Delta} = e^{PDP^{-1}} = Pe^D P^{-1}.$$

Méthode de calcul de $\exp(A)$:

Si on utilise la décomposition de Dunford $A = \Delta + N$, avec Δ diagonalisable, N nilpotente et $N\Delta = \Delta N$, alors :

$$e^A = e^{\Delta} e^N.$$

1.3 Variétés différentielles

1.3.1 Rappels de calcul différentiel

Avant de donner la définition d'une variété différentielle, nous allons d'abord rappeler le calcul différentiel.

Applications différentiables :

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Voici quelques propriétés de base :

- Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$ s'il existe une forme linéaire $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + l(h) + o(h).$$

- On note $D_a f := l$ la différentielle de f au point a et $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \rightarrow \mathbb{R}$ les dérivées partielles de f définies par $D_a f(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

- Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable dans U , si elle est différentiable en tout point $a \in U$; elle est de classe C^1 si toutes ses dérivées partielles sont continues.
- Par récurrence : une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^k , si elle est différentiable et si toutes ses dérivées partielles sont de classe C^{k-1} .
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse ou (C^∞) si elle est classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- Une application $F : x \in U \rightarrow (f_1(x), \dots, f_p(x)) \in \mathbb{R}^p$ est différentiable (resp. C^k ou lisse) si et seulement si chacune de ses fonctions coordonnées f_1, \dots, f_p est différentiable (resp. C^k ou lisse).

Définitions

Difféomorphisme : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^p$ deux ouverts.

Une application $f : U \rightarrow V$ lisse est un difféomorphisme si elle est bijective et si son application inverse f^{-1} est également lisse.

On dit dans ce cas que les ouverts U et V sont difféomorphes.

Immersion : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Une application lisse $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une immersion si sa différentielle est injective en tout point.

Submersion : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Une application lisse $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une submersion si sa différentielle est surjective en tout point.

1.3.2 Rappel de topologie

- **Espace topologique :** On appelle espace topologique, un couple (E, T) où E est un ensemble et T une famille de parties de E vérifiant :
 1. $\emptyset \in T, E \in T$.
 2. Une intersection finie d'élément de T appartient à T .
 3. Une réunion quelconque d'éléments de T appartient à T .
 On appelle T la topologie sur E .
- **Espace métrique :** Soit E un ensemble non vide. Si d est une distance sur E , alors (E, d) est un espace métrique.

- **Ouvert** : Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E .
On dit que A est un ouvert de (E, d) si,

$$\forall a \in A, \exists r > 0 \mid B(a, r) \subset A.$$

- **Fermé** : Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E .
On dit que A est un fermé de (E, d) si son complémentaire A^c est un ouvert de (E, d) .
- Soit X un espace topologique.
 - On dit que X est à base dénombrable s'il admet une base d'ouverts dénombrable.
 - On dit que X est séparé si deux points distincts admettent des voisinages disjoints.
- **Recouvrement** : un recouvrement d'un espace topologique M est une famille (U_i) de parties de M , telle que $M = \cup(U_i)$.
- **Géodésique** : une géodésique est le chemin le plus court entre deux points sur une surface. Par exemple, sur une sphère, les géodésiques sont les arcs de grands cercles.

Théorème 1.3 [3] (théorème d'invariance du domaine de Brouwer)

soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et injective.

Alors $f(U)$ est ouvert, et $f : U \rightarrow f(U)$ est un homéomorphisme.

Définition 1.7 (Variété topologique)

Une variété topologique est un espace topologique M , tel que

- l'espace M soit séparé et à base dénombrable.
- tout point de M admet un voisinage de M homéomorphe à un ouvert d'un espace \mathbb{R}^n .

Définition 1.8 (Atlas)

un couple (U, φ) , où U est un ouvert de M , et $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme de U sur un ouvert de \mathbb{R}^n , s'appelle une carte de M .

Une collection de cartes (U_i, φ_i) qui recouvrent M est appelée atlas topologique de M .

Définition 1.9 Pour $k \geq 1$, une variété différentiable de classe C^k est une variété topologique munie d'une classe d'équivalence d'atlas de classe C^k .
Une variété lisse est une variété différentiable de classe C^∞ .

1.3.3 Sous-variétés de \mathbb{R}^n

Théorème 1.4 [3]

Soit $n \geq p$ dans \mathbb{N} et k dans $(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$. Les propriétés suivantes d'une partie M de \mathbb{R}^n sont équivalentes :

— **Définition locale par redressement :**

Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x dans \mathbb{R}^n , un voisinage V de 0 dans \mathbb{R}^n et un C^k -difféomorphisme $f : U \rightarrow V$ tels que :

$$f(U \cap V) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}).$$

— **Définition locale par fonction implicite :**

Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x dans \mathbb{R}^n , et une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ de classe C^k qui est une submersion en x , tels que $U \cap M = f^{-1}(0)$.

— **Définition locale par graphe :**

Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x dans \mathbb{R}^n , une identification par un auto-morphisme linéaire $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, un ouvert V de \mathbb{R}^p et une application $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ de classe C^k , tels que $U \cap M = \text{graphe}(f)$.

— **Définition locale par paramétrage :**

Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x dans \mathbb{R}^n , un voisinage V de 0 dans \mathbb{R}^p et une application $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k , tels que $f(0) = x$, f soit une immersion en 0 , et f soit un homéomorphisme de V sur $U \cap M$.

On dit qu'une partie M de \mathbb{R}^n est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension p et de classe C^k , si elle vérifie l'une des propriétés du théorème 1.4.

1.4 Crochet de Lie

1.4.1 Champs de vecteurs

Définition 1.10 Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^n . On appelle champ de vecteurs de classe C^k sur M une application $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k telle que $X(x) \in T_a M$ pour tout $x \in M$. ($T_a M$ est l'espace tangent à M en un point a).

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , $X : x \mapsto \sum X_j(x)e_j$ un champ de vecteur sur U , et f une fonction différentiable sur U . Alors, on note $X \cdot f$ la dérivée de

f selon X donnée par

$$(X \cdot f)(a) = df(X(a)) = \sum_{j=1}^n X_j(a) \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Pour cette raison, le champ de vecteur X est souvent noté $\sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Définition 1.11 (*Crochet de Lie*)

Soit M une variété de \mathbb{R}^n , et soient f et g deux champs de vecteurs sur M . Le crochet de Lie de f et g est un autre champs de vecteurs dans M défini comme suit :

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x)f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x)g(x). \quad (1.5)$$

On a bien sur

$$[f, g] = -[g, f] \quad (\text{Antisymétrie})$$

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0 \quad (\text{Condition de Jacobi})$$

Exemple 1.1 *Étant donnés deux champs de vecteurs f et g tels que*

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$

On calcule le crochet de Lie de f et g :

$$\begin{aligned} [f, g] &= \left[\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 0 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 0 \\ [f, g] &= 0. \end{aligned}$$

Proposition 2

- Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs constants est nul.
- Le crochet de Lie d'un champ de vecteurs constant avec un champ de vecteurs linéaire est un champ de vecteurs constant.
- Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs linéaires est un champ de vecteurs linéaires.

Chapitre 2

Généralité sur la théorie du contrôle optimal

2.1 Théorie du contrôle optimal

Le problème général du contrôle optimal est constitué des définitions suivantes :

2.1.1 Définitions

- Le système du contrôle est caractérisé par le vecteur

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n,$$

qui est appelé vecteur d'état.

- Le vecteur du contrôle est donné par

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m,$$

qui est une fonction intégrable par rapport à t .

- La variable d'état est gouvernée par le système d'équations différentielles du premier ordre nommée équation d'état de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, t_f] \quad (2.1)$$

où \dot{x} est le vecteur dérivé par rapport au temps t de toutes les composantes de x , et $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ est une fonction vectorielle.

Trajectoire admissible

Une trajectoire qui satisfait les contraintes des variables d'état pendant tout l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ est appelée trajectoire admissible.

L'ensemble des trajectoires admissibles sera noté X , ($x \in X$ signifie que la trajectoire x est admissible).

Condition initiale du système

La condition initiale est un cas particulier de l'état ; c'est l'état à l'instant $t = t_0$ (l'instant initial), elle est donnée par :

$$x(t_0) = x_0. \quad (2.2)$$

Condition finale du système

La condition finale désigne l'état du système à l'instant $t = t_f$, elle est donnée par :

$$x(t_f) = x_1 \quad (2.3)$$

avec t_f est l'instant final, il peut être fixé ou non.

Le but de la commande

Dans un problème de contrôle, le but de la commande consiste à ramener l'objet de la position initiale $x_0 = x(t_0)$, ($x_0 \in M_0$), à une autre position $x_1 = x(t_f)$ ($x_1 \in M_1$), où M_0 est l'ensemble de départ et M_1 est l'ensemble d'arrivée.

Contrôle admissible

Un contrôle qui satisfait les contraintes du problème pendant tout l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ est appelé contrôle admissible.

Classe des commandes admissibles

La classe des commandes admissibles U est constituée de fonctions mesurables $u(t)$:

$$U = \{u(t), t \in [t_0, t_f]\}.$$

Il peut être borné, non borné ou du type bang-bang.

Commande bornée : la commande $u_j(t)$ est dite commande bornée, si elle peut être minorer et majorer par des constantes a_j et b_j :

$$a_j \leq u_j(t) \leq b_j, \quad j = 1 \cdots m, \quad t \in [t_0, t_f].$$

Notons que l'on peut remplacer u_j par v_j en posant $u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j$ et ainsi v_j est aussi intégrable et l'on a $-1 \leq v_j \leq 1$. Donc lorsque U est borné, il est toujours pratique de se ramener à des commandes entre -1 et 1 .

Commande bang-bang : Un contrôle $u \in U$ est appelé contrôle bang-bang, si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1 \cdots m$, on a $|u_j(t)| = 1$. Une commande Bang-Bang est alors une commande qui possède au moins une commutation.

2.1.2 Position du problème

La formulation du problème de contrôle optimal est donnée par l'expression suivante :

$$(2.4) \left\{ \begin{array}{l} J(t_f, u) = g(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt \longrightarrow \min_u \quad (1) \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (2) \\ x(t_0) = x_0 \in M_0 \quad (3) \\ x(t_f) = x_1 \in M_1 \quad (4) \\ u \in U, \quad t \in [t_0, t_f] \quad (5) \end{array} \right.$$

où

$J(t_f, u)$ est la fonction coût (critère de qualité), elle comporte deux parties :

$g(t_f, x(t_f))$ est le coût terminal, il a son importance lorsque t_f est libre, sinon il est constant.

$\int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt$ est le coût intégral, il dépend de l'état du système tout au long de la trajectoire de la solution, elle dépend aussi du temps t mais surtout des variables de contrôle u .

$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ est le système dynamique du contrôle optimal.

On distingue trois problèmes importants :

2.1.2.1 Problème de Lagrange

Lorsque $g \equiv 0$ dans l'expression de la fonctionnelle J , on parlera d'un problème de Lagrange donné par

$$\min J(t_f, u) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt.$$

On suppose que $f_0(t, x(t), u(t))$ et ses dérivées partielles sont définies et continues sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

2.1.2.2 Problème de Mayer

Lorsque $f_0 \equiv 0$ dans l'expression de la fonctionnelle J , on parlera d'un problème de Mayer donné par :

$$\min J(t_f, u) = g(t_f, x(t_f)).$$

Egalement, il sera supposé que $g(t_f, x(t_f))$ et ses dérivées partielles existent et sont continues sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

2.1.2.3 Problème de Bolza

Le problème de Bolza est donné par :

$$J(t_f, u) = g(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt$$

l'objectif étant de minimiser le coût J .

2.1.3 Classement des problèmes de contrôle

Problème en temps optimal :

On parle d'un problème en temps optimal, lorsque $f_0(t, x(t), u(t)) = 1$ et $g(t_f, x(t_f)) = 0$, et le temps final t_f est libre dans l'expression :

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} dt.$$

Problème en coût optimal :

On parle d'un problème en coût optimal, lorsque le temps final t_f est fixé dans l'expression :

$$\min_u J(t_f, u) = g(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt.$$

2.2 Contrôlabilité des systèmes dynamiques

La contrôlabilité est un concept fondamental de la théorie du contrôle optimal. Elle consiste à trouver une commande qui permet à la trajectoire de passer d'un état initial x_0 à un état final x_f en un temps fini.

2.2.1 Ensemble accessible

Considérons le système dynamique :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0, t \in [t_0, t_f] \end{cases} \quad (2.4)$$

Définition 2.9. [15]

L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps t_f est :

$$Acc(x_0, t_f) = \{x_u(t_f), u \in U\}$$

Où $x_u(\cdot)$ est la solution du système (2.4) associé au contrôle u .

Autrement dit, $Acc(x_0, t_f)$ est l'ensemble des extrémités des solutions du système (2.4), au temps t_f lorsque le contrôle u varie (voir figure 2.1).

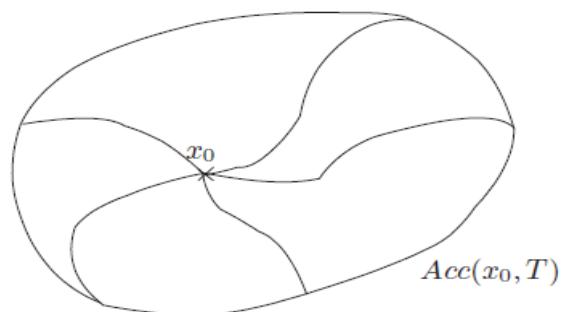


FIGURE 2.1 – Ensemble accessible

2.2.2 Définition de la contrôlabilité

Définition 2.1 Le système (2.4) est dit contrôlable en temps t_f si :

$$Acc(x_0, t_f) = \mathbb{R}^n.$$

Autrement dit, pour tous $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie x_0 à x_1 en temps t_f .



FIGURE 2.2 – Problème de contrôlabilité

Définition 2.2 Le contrôle u est dit extrémal sur $[t_0, t_f]$ si la trajectoire du système (2.4) du problème de contrôle associée à u vérifie :

$$x(t) \in \partial Acc(x_0, t); t \in [t_0, t_f].$$

2.2.3 Contrôlabilité des systèmes linéaires

La notion de contrôlabilité a été introduite en 1960 par Kalman pour des systèmes linéaires de la forme $\dot{x} = Ax + Bu$. Le concept de cette notion est l'un des piliers fondamentaux de la théorie du contrôle.

La formulation mathématique d'un système de contrôle linéaire est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t) \\ x(t_0) = x_0, t \in I = [t_0, t_f] \end{cases} \quad (2.5)$$

Où I est un intervalle de \mathbb{R}^+ , A, B et r sont trois applications localement intégrables sur I à valeurs respectivement dans $M_n(\mathbb{R}), M_{n,m}(\mathbb{R})$ et \mathbb{R}^n (avec n et m deux entiers naturels non nuls).

Où $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles de dimensions n ,

et $M_{n,m}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles de m lignes et n colonnes.

L'ensemble des contrôles u considéré est l'ensemble des applications mesurables localement bornées sur I à valeurs dans un sous ensemble $U \subset \mathbb{R}^m$.

Contrôlabilité des systèmes linéaires non autonomes :

La solution du système (2.5) en temps t est la suivante :

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_{t_0}^{t_f} M(t)M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds, \quad \forall t \in I.$$

où $M(\cdot) : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ est la résolvante du système linéaire homogène suivant :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

définie par

$$\begin{cases} \dot{M}(t) = A(t)M(t) \\ M(t_0) = Id, t \in I \end{cases}$$

Où Id est la matrice identité.

Théorème 2.1 [15] *Le système (2.5) est contrôlable en temps t_f si et seulement si la matrice de contrôlabilité*

$$C(t) = \int_{t_0}^{t_f} M(t)^{-1}B(t)B(t)^T(M(t)^{-1})^T dt,$$

est inversible.

où $B(t)^T$ est la transposée de $B(t)$ et $M(t)^{-1}$ est l'inverse de $M(t)$.

Remarque 2.1 *Cette condition dépend de t_f , mais ne dépend pas du point initial x_0 . Autrement dit, si un système linéaire non autonome est contrôlable en temps t_f depuis x_0 , alors il est contrôlable en temps t_f depuis tout point.*

Théorème 2.2 [15]

Considérons le système

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t).$$

Où les applications A, B sont de classe C^∞ sur $[t_0, t_f]$. Définissons par récurrence

$$B_0(t) = B(t),$$

$$B_{i+1}(t) = A(t)B_i(t) - \frac{\partial B_i}{\partial t}(t).$$

1. S'il existe $t \in [t_0, t_f]$ tel que

$$\text{Vect}\{B_i(t)v \mid v \in \mathbb{R}^m, i \in \{0, \dots, n-1\}\} = \mathbb{R}^n,$$

alors le système est contrôlable en temps t_f .

2. Si de plus les applications A, B sont analytiques sur $[t_0, t_f]$, alors le système est contrôlable en temps t_f , si et seulement si :

$$\forall t \in [t_0, t_f] \quad \text{Vect}\{B_i(t)v \mid v \in \mathbb{R}^m, i \in \{0, \dots, n-1\}\} = \mathbb{R}^n.$$

Exemple 2.1 Montrer que le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$, avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t^3 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est contrôlable en temps quelconque.

On a A, B sont des applications de classe C^∞ sur $[t_0, t_f]$. Définissons alors

$$\bullet B_0(t) = B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \dot{B}_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet B_1(t) = B_{0+1}(t) = AB_0 - \dot{B}_0(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$$\implies \dot{B}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\bullet B_2(t) = B_{1+1}(t) = AB_1 - \dot{B}_1(t) = \begin{pmatrix} t + t^3 \\ t^6 - 3t^2 \\ t^4 - 2t \end{pmatrix}$$

$$\implies \dot{B}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 + 3t^2 \\ 6t^5 - 6t \\ 4t^3 - 2 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier aisément que :

$$\det(B_0, B_1, B_2) = -2t^4 + t^3 - 3t^2 + 2t \neq 0 \quad \forall t \neq 0.$$

De plus les matrices A et B sont analytiques alors le système est contrôlable en un temps quelconque.

Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes :

Le système (2.5) est dit autonome lorsque les matrices A et B ne dépendent pas de t . Dans ce cas, le système s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t) \\ x(t_0) = x_0, t \in I \end{cases} \quad (2.6)$$

Dans ce cas, la matrice $M(t) = e^{At}$ est la solution du système associée au contrôle u s'écrit, pour tout $t \in I$:

$$x(t) = e^{At} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t^*} e^{-As} (B(s)u(s) + r(s)) ds \right).$$

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité du système (2.6).

Théorème 2.3 [15] *Le système (2.6) est contrôlable en temps t_f si et seulement si la matrice*

$$K = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$$

est de rang n .

La matrice K est appelée *matrice de Kalman*, et la condition $\text{rang}(K) = n$ est appelée *condition de Kalman*.

Remarque 2.2 *La condition de Kalman ne dépend ni de t_f ni de x_0 . Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps t_f depuis x_0 , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.*

Exemple 2.2 *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases}$$

Dans ce cas :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous sommes dans une situation où $n = 2$ états et $m = 1$ entrée. La matrice de commandabilité associée :

$$K = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons le rang $K = 2$, donc le système est commandable.

Exemple 2.3 *Considérons maintenant ce système :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

On a $n = 2$ états et $m = 1$ entrée. Dans ce cas :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de commandabilité du système est :

$$K = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang $K = 1 \neq 2$ *donc le système n'est pas contrôlable.*

Note : $\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = 0$, soit $x_1 - x_2 = \text{constante}$, donc c'est une relation indépendante de u , alors pas de commandabilité.

2.2.4 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Pour étudier la contrôlabilité d'un système non linéaire, il faut linéariser le système autour d'un point, c'est-à-dire : étudier la contrôlabilité locale partant du fait que la contrôlabilité d'un système linéarisé implique celle d'un système non linéaire d'une manière locale. Cette condition reste une condition nécessaire pour la contrôlabilité.

On considère le système de contrôle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0, t \in [t_0, t_f] \end{cases} \quad (2.7)$$

Définition 2.3 *On appelle un point d'équilibre du système (2.7) un couple $(x_e, u_e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, tel que $f(x_e, u_e) = 0$.*

Pour énoncer le résultat de la contrôlabilité locale, il est utile de définir la notion d'un système linéarisé autour d'un équilibre.

Définition 2.4 [13] Soit $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e) \in M_n(\mathbb{R})$ (matrice jacobienne de f par rapport à la variable x évaluée en (x_e, u_e)), et $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ (matrice jacobienne de f par rapport à la variable u évaluée en (x_e, u_e)).

Le système différentiel linéarisé autour de l'équilibre (x_e, u_e) est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial(\delta x)}{\partial t} = A\delta x(t) + B\delta u(t) , t \in [t_0, t_f] \\ \delta x(t_0) = 0_{\mathbb{R}^n}. \end{cases}$$

Où $\delta u \in L^\infty(0, t_f, \mathbb{R}^m)$ est donné.

Théorème 2.4 On suppose qu'aucune contrainte n'est imposée sur le contrôle. Si le système différentiel linéarisé est contrôlable en temps t_f (autrement dit s'il satisfait la condition de Kalman), alors le système différentiel non linéaire est localement contrôlable en temps t_f à partir de x_0 .

2.2.5 Existence de trajectoire optimale

Après avoir résolu le problème de contrôlabilité, on cherche parmi toutes les solutions possibles (admissible) une trajectoire qui minimise le coût

$$J(t_f, u) = g(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt.$$

La condition nécessaire d'optimalité des trajectoires est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.5 [15]

considérons le système de contrôle général suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 , t \in [t_0, t_f] \end{cases} \quad (2.8)$$

Où

- f est C^1 de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$,
- les contrôles u sont à valeurs dans un compact $U \subset \mathbb{R}^m$, et où éventuellement on a des contraintes sur l'état :

$$j_1(x) \leq 0, \dots, j_r(x) \leq 0,$$

Où $j_1 \dots j_r$ sont des fonctions continues sur \mathbb{R}^n .

Soient M_0 et M_1 deux compacts de \mathbb{R}^n tel que M_1 est accessible depuis M_0 .
 Soit U l'ensemble des contrôles à valeurs dans \mathbb{R}^m joignant M_0 à M_1 .
 Soient f_0 une fonction C^1 sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, et g une fonction continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

On considère le coût

$$J(t_f, u) = g(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt$$

où $t_f \geq 0$ est tel que $x(t_f) \in M_1$, on suppose que :

-il existe un réel positif b tel que toute trajectoire associée à un contrôle $u \in U$ est uniformément bornée par b sur $[t_0, t_f]$, i.e :

$$\exists b > 0 \mid \forall u \in U, \forall t \in [t_0, t_f], \|x(t)\| \leq b,$$

-pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, l'ensemble des vecteurs vitesses augmentés :

$$\tilde{V}(t, x) = \{(f_0(t, x, u)), f(t, x, u), \mid u \in U\}$$

est convexe.

Alors il existe un contrôle optimal u sur $[t_0, t_f]$ tel que la trajectoire associée joint M_0 à M_1 en temps t_f et en coût minimal.

2.2.6 Principe du Maximum de Pontryagin

Introduction

L'outil standard pour déterminer les trajectoires optimales est le principe bien connu du maximum de Pontryagin, qui donne une condition de premier ordre pour l'optimalité.

Avant d'énoncer le principe du maximum, introduisons d'abord certaines définitions et théorèmes essentiels.

Définition 2.5 Le contrôle u est dit extrémal sur $[t_0, t_f]$, si la trajectoire du système $\dot{x}(t) = f(t, x, u)$ du problème de contrôle (2.4) associé à u , vérifie :

$$x(t) \in \text{Acc}(x_0, t), \quad t \in I = [t_0, t_f].$$

Définition 2.6 Un contrôle $u^*(t)$, $\forall t \in [t_0, t_f]$ est dit optimal, si $u^*(.)$ est extrémal et $J(u^*(t)) < J(u(t))$ pour tout contrôle extrémal $u(t)$, $t \in [t_0, t_f]$.

Théorème 2.6 *Considérons le système*

$$\forall t \in I, \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Supposant que le domaine des contrôles noté U est compact.

Soit $t_f > 0$, le contrôle u est extrémal sur $I = [t_0, t_f]$ si et seulement si il existe une solution non triviale, $p(t)$, $t \in I$ de l'équation $\dot{p}(t) = -p(t)A(t)$ tel que :

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{v \in U} p(t)B(t)v \quad (2.9)$$

pour presque tout $t \in [t_0, t_f]$.

Définition 2.7 *Le vecteur $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur adjoint.*

Définition 2.8 *Le temps t_c auquel le contrôle extrémal $u(t)$ change de signe est appelé temps de commutation.*

2.2.6.1 Enoncé général

Théorème 2.7 [15]

On considère le système de contrôle dans \mathbb{R}^n :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)). \quad (2.10)$$

Où $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et où les contrôles sont des applications mesurables et bornées à valeurs dans un compact $U \subset \mathbb{R}^m$.

Soient M_0 et M_1 deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n .

On définit le coût

$$J(t_f, u) = g(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt. \quad (2.11)$$

Où $f_0 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 et $x(\cdot)$ est la trajectoire solution de (2.10) associée au contrôle u .

On considère le problème de contrôle suivant : déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 en minimisant le coût. Le temps final peut être fixé ou non.

Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[t_0, t_f]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue et un réel $p_0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p_0)$ est non trivial et tel que pour presque tout $t \in [t_0, t_f]$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)),$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)),$$

où

$$H(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) = p_0 f_0(t, x(t), u(t)) + p(t) f(y, x(t), u(t))$$

est le hamiltonien du système vérifiant la condition de maximisation sur $[t_0, t_f]$:

$$H(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) = \max_{v \in U} H(t, x(t), p(t), p_0, v).$$

Si de plus M_0 et M_1 (où juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) \in M_0$ et $x(t_f) \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux).

$$p(t_0) \perp (T)_{x(t_0)} M_0. \quad (2.12)$$

Et

$$p(t_f) - p_0 \frac{\partial g}{\partial x}(t_f, x(t_f)) \perp (T)_{x(t_f)} M_1. \quad (2.13)$$

Ces conditions sont appelées conditions de transversalité sur le vecteur adjoint.

2.2.6.2 Quelques remarques

- Dans le cas où $U = \mathbb{R}^m$, c'est à dire lorsqu'il n'y a pas de contrainte sur le contrôle, alors la condition du maximum sur le hamiltonien devient $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$.
- Si f et f_0 ne dépendent pas de t , c'est à dire si le système considéré est autonome alors, le Hamiltonien H ne dépend pas de t , et on a

$$\forall t \in [t_0, t_f] \quad \max_{v \in U} H(t, x(t), p(t), p_0, v) = \text{constante}$$

— La convention $p_0 \leq 0$ conduit au principe du maximum. La convention $p_0 \geq 0$ conduirait au principe du minimum.

— **Problème de Lagrange** : $J(t_f, u) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt$.

Si $M_0 = \{x_0\}$, alors la condition (2.12) devient vide.

Si au contraire $M_0 = \mathbb{R}^n$ i.e. si le point initial n'est pas fixé, on obtient $p(t_0) = 0$. De même si $M_1 = \mathbb{R}^n$, et $x(t_f)$ n'est pas fixé alors, on obtient $p(t_f) = 0$.

— **Problème de Mayer** : $J(t_f, x(t_f)) = g(t_f, x(t_f))$.

Si $M_1 = \mathbb{R}^n$, alors $p(t_f) = p_0 \frac{\partial g}{\partial x}(t_f, x(t_f))$. Et si de plus, g ne dépend pas du temps t , alors on écrit $p(t_f) = -\nabla g(t_f, x(t_f))$.

2.3 Systèmes sans dérive

Dans cette section, on regarde une classe particulière de systèmes de contrôle non linéaires : les systèmes sans dérive et affines par rapport au contrôle, c'est-à-dire que

$$f(x, u) = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x),$$

où, pour $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Ces systèmes sont dits sans dérive car quand le contrôle est nul, l'état ne bouge pas. Bien sûr, de tels systèmes sont très particuliers ; mais ils se rencontrent très souvent dans les systèmes d'origine mécanique.

Pour ce type de systèmes, le critère de Kalman n'est pas toujours satisfait et donc ce système linéarisé n'est pas commandable.

Le théorème de Chow ci-dessous nous donne un critère nécessaire et suffisant de contrôlabilité des problèmes sans dérive.

Théorème 2.8 [4] *Si*

$$\{g(x) \mid g \in \text{Lie}\{f_1, \dots, f_m\}\} = \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.14)$$

alors le système

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$$

est commandable.

Expliquant maintenant pourquoi les crochets de Lie sont importants pour le problème de la commandabilité. Considérons, pour simplifier, le cas $m = 2$, de sorte que le système est

$$\dot{x} = u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x).$$

On sait comment se déplacer “dans la direction de f_1 ” : il suffit de prendre $(u_1, u_2) = (1, 0)$. De la même façon, on sait comment se déplacer “dans la direction de f_2 ”. Expliquons comment on peut se déplacer dans la direction de $[f_1, f_2]$.

Considérons, pour $\varepsilon > 0$, le contrôle $u : [0, 4\varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par

$$u(t) = \begin{cases} (1, 0), & t \in [0, \varepsilon[, \\ (0, 1), & t \in [\varepsilon, 2\varepsilon[, \\ (-1, 0), & t \in [2\varepsilon, 3\varepsilon[, \\ (0, -1), & t \in [3\varepsilon, 4\varepsilon]. \end{cases} \quad (2.15)$$

Supposons qu’au temps $t = 0$, l’état du système soit $a \in \mathbb{R}^n$. Alors, au temps $t = 4\varepsilon$, l’état du système quand $\varepsilon \rightarrow 0$ est $x(4\varepsilon) \simeq a + \varepsilon^2 [f_1, f_2](a)$.

Exemple 2.4 [4]

Soit une poussette pour bébé. Notons x_1, x_2 sa position dans le plan, et x_3 sa direction angulaire. Supposons que les parents contrôlent la vitesse et la vitesse angulaire. Le système est donc :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t) \cos x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = u_1(t) \sin x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = u_2(t). \end{cases}$$

Il s’agit d’un système affine avec :

$$f_1 = (\cos x_3, \sin x_3, 0) \quad \text{et} \quad f_2 = (0, 0, 1),$$

qu’on peut écrire aussi comme suit :

$$f_1 = \cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Alors

$$\begin{aligned} [f_1, f_2] &= \left[\cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right] \\ &= \left(\cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ &= \cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_3} + \sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ [f_1, f_2] &= \sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - \cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$[f_1, f_2] = (\sin x_3, -\cos x_3, 0).$$

Par conséquent, le système est globalement contrôlable en temps petit (car en tout point, l'algèbre de Lie engendre \mathbb{R}^3).

Chapitre 3

Problème de Heisenberg

3.1 Présentation du problème

Soit la variété $M = \mathbb{R}^3$. On note $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 avec $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, et on considère la structure L^1 de groupe de Heisenberg ([1],[2]) déterminée par les deux champs de vecteurs f_1 et f_2 comme suit :

$$f_1 := \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y \frac{\partial}{\partial z}, \quad f_2 := \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial z}.$$

Tout d'abord nous remarquons que le crochet de Lie des champs de vecteurs f_1, f_2 est donné par

$$[f_1, f_2] = \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial z}.$$

En effet :

$$\begin{aligned} [f_1, f_2] &= \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= 0 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} - 0 - \frac{yx}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 0 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} - 0 + \frac{yx}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ [f_1, f_2] &= \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Proposition : La condition de rang maximal suivante est satisfaite :

$$\dim\{f_1(X), f_2(X), [f_1, f_2](X)\} = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \quad \forall X \in \mathbb{R}^3. \quad (3.1)$$

Démonstration :

on a

$$f_1 := \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y \frac{\partial}{\partial z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y}{2} \end{pmatrix}$$

$$f_2 := \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}$$

$$[f_1, f_2] := \frac{\partial}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$\text{Det}[f_1, f_2, [f_1, f_2]] = \text{Det} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{y}{2} & \frac{x}{2} & 1 \end{vmatrix} = \text{Det} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

D'où la condition de rang maximal est satisfaite.

Remarque 3.1 *Les crochets de Lie d'ordre supérieur ou égal à 3 sont nuls.*

Exemple 3.1

$$\begin{aligned} [f_1, [f_1, f_2]] &= \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{y}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{y}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ [f_1, [f_1, f_2]] &= 0. \end{aligned}$$

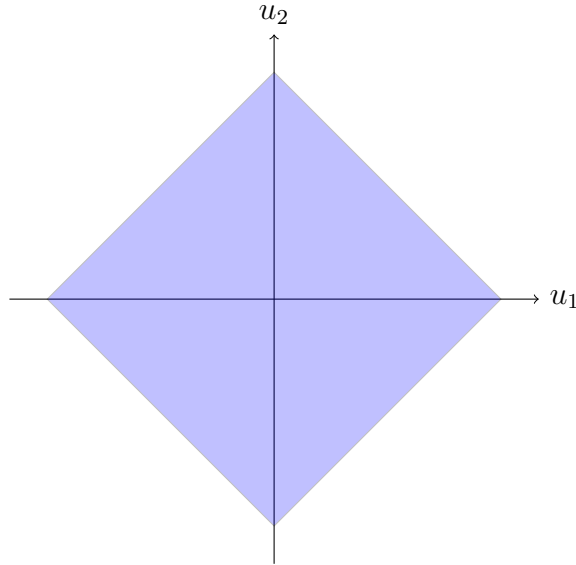


FIGURE 3.1 – Ensemble des contrôles admissibles

Pour tout $\hat{x}_f \in M$, nous considérons le problème de minimisation du temps suivant :

$$\min_{|u_1|+|u_2|\leq 1} T \quad (3.2)$$

tel que

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = u_1(t)f_1(X(t)) + u_2(t)f_2(X(t)) \\ X(0) = 0, \quad X(T) = \hat{x}_f \\ |u_1| + |u_2| \leq 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

avec f_1 et f_2 sont deux champs de vecteurs de classe C^∞ , $X = (x, y, z)$ un vecteur de \mathbb{R}^3 et les fonctions contrôles u_1 et u_2 sont des fonctions mesurables.

3.2 La contrôlabilité

Théorème 3.1 [4] (*Théorème de Chow*)

Si la condition (3.1) est satisfaite alors le système $\dot{X} = \sum_{i=1}^2 u_i f_i(X)$ est contrôlable.

Le problème de contrôle précédent vérifie les hypothèses de théorème de Chow, alors c'est un problème contrôlable.

3.3 Résolution du problème

Considérons le problème du temps minimal précédent. Le principe du maximum de Pontryagin (PMP) donne les conditions nécessaires d'optimalité. Ci-dessous, on va énoncer une version adaptée à notre problème.

Théorème 3.2 [15] *Principe du Maximum de Pontryagin*
On définit le Hamiltonien comme suit :

$$H(X, P, u, \lambda_0) = u_1 \langle P, f_1(X) \rangle + u_2 \langle P, f_2(X) \rangle + \lambda_0$$

où $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $P = (p, q, r) \in \mathbb{R}^3$, $u = (u_1, u_2) \in U$ tel que $|u_1| + |u_2| \leq 1$.

Pour toute trajectoire minimisante $(X(t), u(t))$ il existe un covecteur continument Lipschitzien $P : t \mapsto P(t) \in \mathbb{R}^3$ et une constante $\lambda_0 \leq 0$ tel que pour presque tout $t \in [0, T]$ on a :

i. $\dot{X}(t) = \frac{\partial H}{\partial P}(X(t), P(t), u(t), \lambda_0)$

ii. $\dot{P}(t) = -\frac{\partial H}{\partial X}(X(t), P(t), u(t), \lambda_0)$,

iii ; $H(X(t), P(t), u(t), \lambda_0) = \max_{u_1, u_2} \{H(X(t), P(t), v, \lambda_0) : |u_1| + |u_2| \leq 1\}$,

iv. $H(X(t), P(t), u(t), \lambda_0) = 0$.

Si $\lambda_0 = 0$ alors le couple (P, X) est dit une extrémale anormale, sinon il est une extrémale normale.

Définition 3.1 Pour un triplet extrême $(X(\cdot), P(\cdot), u(\cdot))$, on définit les fonctions

$$F_1(P, X) = \langle P(t), f_1(X(t)) \rangle$$

$$F_2(P, X) = \langle P(t), f_2(X(t)) \rangle$$

Les fonctions F_1 et F_2 s'appellent fonctions de switch (fonctions de commutation).

Pour le système de Heisenberg, l'équation de Hamilton est de la forme :

$$H = u_1 \langle (p, q, r), f_1 \rangle + u_2 \langle (p, q, r), f_2 \rangle + \lambda_0 = u_1 F_1 + u_2 F_2 + \lambda_0$$

avec

$$F_1 = p - r \frac{y}{2}, \quad F_2 = q + r \frac{x}{2}.$$

Nous avons donc le système Hamiltonien suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = u_1 \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial q} = u_2 \\ \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{2}(u_2x - u_1y) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{r}{2}u_2 \\ \dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{r}{2}u_1 \\ \dot{r} = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

On remarque que $\dot{r} = 0$, ce qui implique que r est une constante.
On dérive les fonctions de switch :

$$\dot{F}_1 = \dot{p} - \frac{\dot{r}}{2}y - \frac{r}{2}\dot{y} = \dot{p} - \frac{r}{2}\dot{y} = -\frac{r}{2}u_2 - \frac{r}{2}u_2 = -ru_2.$$

$$\dot{F}_2 = \dot{q} + \frac{\dot{r}}{2}x + \frac{r}{2}\dot{x} = \dot{q} + \frac{r}{2}\dot{x} = \frac{r}{2}u_1 + \frac{r}{2}u_1 = ru_1.$$

Comme les dérivées des fonctions de switch sont proportionnelles à r alors, c'est le signe de ce dernier qui nous détermine les contrôles.

3.3.1 Extrémales anormales

Les extrémales anormales correspondent à $\lambda_0 = 0$.

Dans ce cas $H = u_1F_1 + u_2F_2$ et le maximum de H par rapport à u_1 et u_2 est atteint lorsque $H = 0$. Cela entraîne que $F_1(t) = p(t) - r\frac{y(t)}{2} = 0$ et $F_2(t) = q(t) + r\frac{x(t)}{2} = 0, \forall t \in [0, T]$. En dérivant par rapport au temps on obtient :

$$\begin{cases} \dot{F}_1 = 0 \\ \dot{F}_2 = 0 \end{cases}$$

Il est possible de voir que le long des extrémales anormales nous aurons : $u_1r = u_2r = 0$. Ceci nous permet de distinguer deux cas :

- Soit u_1 et u_2 ne s'annulent pas simultanément, alors $F_1 \equiv F_2 \equiv 0$ d'où $r = 0$ et $H = u_1p + u_2q$, ce qui implique $p = q = 0$, d'où le vecteur adjoint est nul et cela contredit le PMP.
- Soit $u_1 = u_2 = 0$, c'est un cas stationnaire.

Par conséquent, le problème de Heisenberg n'admet pas d'extrémales anormales.

3.3.2 Extrémales normales

Dans ce cas $\lambda_0 \neq 0$, ($\lambda_0 < 0$). Puisque le système est homogène en P alors nous pouvons fixer $\lambda_0 = -1$ et nous aurons $H = u_1F_1 + u_2F_2 - 1$.

Si $(F_1, F_2) = (0, 0)$ alors $H = -1$ ce qui contredit la dernière condition du théorème 1. Donc les fonctions de commutations de s'annulent jamais simultanément. Nous obtenons alors deux cas :

Premier cas : $|F_1| = |F_2|$ sur un intervalle du temps I .

- $F_1 = F_2 > 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{F_1}{F_2} = 1 &\implies \left(\frac{\dot{F}_1}{F_2} \right) = 0 \implies \frac{\dot{F}_1 F_2 - F_1 \dot{F}_2}{F_2^2} = 0. \\
&\implies \frac{-ru_2 F_2 - ru_1 F_1}{F_2^2} = 0 \\
&\implies -ru_2 F_2 - ru_1 F_1 = 0 \\
&\implies -r(u_2 F_2 + u_1 F_1) = 0 \\
&\implies r = 0
\end{aligned}$$

D'où $r = 0$ et $\dot{F}_1 = \dot{F}_2 = 0$. Par conséquent, les fonctions de commutations F_1 et F_2 deviennent des constantes telles que $(F_1, F_2) = (p, q)$. Le vecteur adjoint sera $P = (p, q, 0)$.

Le Principe du Maximum de Pontryagin assure que $u_1 + u_2 = \text{sign } F_1 = 1$, mais il ne permet pas de déterminer les valeurs des contrôles, cela veut dire que le maximum est atteint sur tout le segment qui relie les points $(0, 1)$ à $(1, 0)$ du domaine des contrôles de la forme $\{(\alpha, 1 - \alpha) : \alpha \in [0, 1]\}$. Ce type de contrôle est dit *singulier*.

Dans ce cas le système Hamiltonien est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} &= u_1 \\ \dot{y} &= 1 - u_1 \\ \dot{z} &= \frac{1}{2}(x - u_1(x + y)). \end{cases}$$

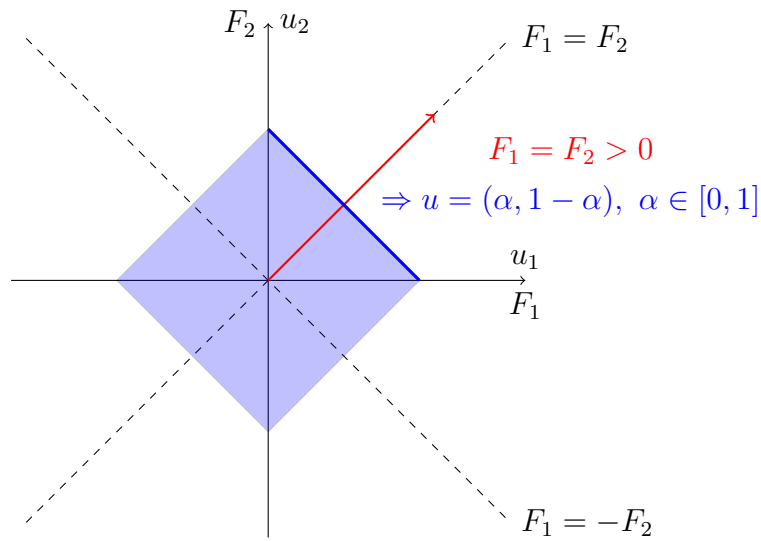


FIGURE 3.2 – Extrémales normales ($F_1 = F_2 > 0$).

Les trajectoires satisfont le système d'équations :

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t u_1(t) dt \\ y(t) = \int_0^t (1 - u_1(t)) dt \end{cases}$$

$$y(t) = \int_0^t (1 - u_1(t)) dt = t - x(t), \text{ d'où : } t = x(t) + y(t).$$

$$\text{nous avons aussi : } \frac{d}{dt}(x(t)y(t)) = \dot{x}(t)y(t) + \dot{y}(t)x(t) = u_1(t)y(t) + (1 - u_1(t))x(t).$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(x(t)y(t)) - u_1(t)y(t) = \frac{1}{2}u_1(t)y(t) + \frac{1}{2}u_1(t)y(t) + \frac{1}{2}x(t)(1 - u_1(t) - u_1(t)y(t))$$

$$= \frac{1}{2}x(t)(1 - u_1(t)) - \frac{1}{2}u_1(t)y(t) = \dot{z}(t).$$

comme $u_1(t)y(t) > 0$

alors

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(xy) \geq \dot{z}$$

$$z(t) = \int_0^t \dot{z} dt \leq \int_0^t \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(xy) dt$$

$$\implies z(t) \leq \frac{1}{2} x(t)y(t).$$

- $F_1 = F_2 < 0$

$$H = u_1 F_1 + u_2 F_2 - 1$$

donc $H = F_1(u_1 + u_2) - 1$

Le principe du Maximum assure que $u_1 + u_2 = \text{signe} F_1 = -1$, mais il ne permet pas de déterminer les valeurs des contrôles, cela veut dire que le maximum est atteint sur tout le segment qui relie les points $(-1, 0)$ à $(0, -1)$ du domaine des contrôles de la forme $\{(\alpha, -1 - \alpha) : \alpha \in [-1, 0]\}$

Dans ce cas, le système hamiltonien est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} &= u_1 \\ \dot{y} &= -1 - u_1 \\ \dot{z} &= \frac{1}{2}(-x - u_1(x + y)). \end{cases}$$

Les trajectoires satisfont le système d'équations :

$$\begin{cases} x(t) &= \int_0^t u_1(t) dt \\ y(t) &= \int_0^t (-1 - u_1(t)) dt, \end{cases}$$

ainsi $y(t) = - \int_0^t (1 + u_1(t)) dt = -t - x(t)$, d'où : $t = -x(t) - y(t)$.

Nous avons aussi :

$$\frac{d}{dt}(x(t)y(t)) = \dot{x}(t)y(t) + \dot{y}(t)x(t) = u_1(t)y(t) - (1 + u_1(t))x(t).$$

On aura alors : $\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(x(t)y(t)) = \frac{1}{2} u_1(t)y(t) - \frac{1}{2} (1 + u_1(t))x(t)$,

d'où $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} x(t)y(t) - u_1(t)y(t) = -\frac{1}{2}(u_1(t)y(t)) - \frac{1}{2}(1 + u_1(t))x(t) = \dot{z}$.

Comme $u_1(t)y(t) < 0$ alors $-z \leq \frac{-xy}{2}$.

- $F_1 = -F_2 > 0$

$$H = u_1 F_1 + u_2 F_2 - 1 = (u_1 - u_2) F_1 - 1$$

D'après le principe du maximum, $u_1 - u_2 = \text{signe} F_1 = 1$, d'où le maximum est atteint sur tout le segment qui relie les points $(0, -1)$ à $(1, 0)$ du domaine des contrôles de la forme $\{(\alpha, -1 + \alpha) : \alpha \in [0, 1]\}$

Dans ce cas, le système hamiltonien est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} &= u_1 \\ \dot{y} &= -1 + u_1 \\ \dot{z} &= \frac{1}{2}(-x + u_1(x - y)). \end{cases}$$

Les trajectoires satisfont le système d'équations :

$$\begin{cases} x(t) &= \int_0^t u_1(t) dt \\ y(t) &= \int_0^t (-1 + u_1(t)) dt \end{cases}$$

$$y(t) = \int_0^t (-1 + u_1(t)) dt = -t + x(t), \text{ d'où : } t = x(t) - y(t).$$

Nous avons aussi :

$$\frac{d}{dt}(x(t)y(t)) = \dot{x}(t)y(t) + \dot{y}(t)x(t) = u_1(t)y(t) + (-1 + u_1(t))x(t),$$

$$\text{d'où : } \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(x(t)y(t)) = \frac{1}{2} u_1(t)y(t) + \frac{1}{2} (-1 + u_1(t))x(t),$$

$$\text{ce qui donne } \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x(t)y(t) - u_1(t)y(t) = -\frac{1}{2} (u_1(t)y(t)) + \frac{1}{2} (-1 + u_1(t))x(t) = \dot{z}.$$

Comme $u_1(t)y(t) > 0$ alors $z \leq \frac{xy}{2}$.

- $F_1 = -F_2 < 0$

$$H = u_1 F_1 + u_2 F_2 - 1 = (u_1 - u_2) F_1 - 1.$$

D'après le principe du maximum, $u_1 - u_2 = \text{signe} F_1 = -1$, d'où le maximum est atteint sur tout le segment qui relie les points $(1, 0)$ à $(0, -1)$ du domaine des contrôles de la forme $\{(\alpha, 1 + \alpha) : \alpha \in [-1, 0]\}$

Dans ce cas, le système hamiltonien est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} &= u_1 \\ \dot{y} &= 1 + u_1 \\ \dot{z} &= \frac{1}{2}(x + u_1(x - y)). \end{cases}$$

Les trajectoires satisfont le système d'équations :

$$\begin{cases} x(t) &= \int_0^t u_1(t) dt \\ y(t) &= \int_0^t (1 + u_1(t)) dt \end{cases}$$

$$y(t) = \int_0^t (1 + u_1(t)) dt = t + x(t), \text{ d'où : } t = -x(t) - y(t).$$

$$\frac{d}{dt}(x(t)y(t)) = \dot{x}(t)y(t) + \dot{y}(t)x(t) = u_1(t)y(t) + (1 + u_1(t))x(t).$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(x(t)y(t)) = \frac{1}{2}u_1(t)y(t) + \frac{1}{2}(1 + u_1(t))x(t)$$

$$\text{D'où } \frac{1}{2} \frac{d}{dt}x(t)y(t) - u_1(t)y(t) = -\frac{1}{2}(u_1(t)y(t)) + \frac{1}{2}(1 + u_1(t))x(t) = \dot{z}.$$

$$\text{Comme } u_1(t)y(t) < 0 \text{ alors } -z \leq \frac{-xy}{2}.$$

Nous avons obtenu alors $|u_1(t)| + |u_2(t)| = 1$, $|x(t)| + |y(t)| = t$, de plus le long de ces trajectoires singulières nous avons toujours $|z| \leq \frac{|xy|}{2}$.

Ces propriétés peuvent être résumés dans les lemmes suivants :

Lemme 3.3 *Une trajectoire si elle est singulière alors elle l'est pour tout les temps.*

Lemme 3.4 *Soit le point final $\hat{x}_{f_1} = (x, y, z)$. Si $|z| > \frac{|xy|}{2}$ alors la trajectoire optimale ne peut pas être singulière.*

Lemme 3.5 *Soit le point final $\hat{x}_{f_1} = (x, y, z)$. Si $|z| \leq \frac{|xy|}{2}$ alors le temps minimal pour atteindre \hat{x}_{f_1} est $t = |x| + |y|$.*

Deuxième cas : $|F_1| \neq |F_2|$ alors les contrôles varient sur les points $(0, 1), (1, 0) \dots$.

— Si $|F_1| > |F_2| \Rightarrow \max H = \max u_1 | F_1 | \Rightarrow u_1 = \text{Sign} | F_1 | = \pm 1$.

— Si $|F_1| < |F_2| \Rightarrow \max H = \max u_2 | F_2 | \Rightarrow u_2 = \text{Sign} | F_2 | = \pm 1$.

Proposition 3.6 *La séquence exacte des contrôles qui satisfait le PMP est déterminée suivant la valeur initiale du contrôle et le signe de $r \neq 0$.*

En effet : Si l'évolution est gouvernée par le contrôle $u = (1, 0)$ alors : $\dot{F}_1 = 0$ d'où F_1 est constante et $\dot{F}_2 = r$. Si $r > 0$ alors F_2 est croissante et varie dans le sens antihoraire pour atteindre la valeur de F_1 . Après la première commutation le contrôle $(0, 1)$ est joignable. Si $r < 0$ alors F_2 est décroissante et varie dans le sens horaire pour atteindre la valeur de F_1 , et après la première commutation nous atteignons le contrôle $(0, -1)$. En conclusion :

○ Si $r > 0$ alors les contrôles varient dans le sens antihoraire, ils suivent la suite :

$$u = \{ \dots (1, 0); (0, 1); (-1, 0); (0, -1); (1, 0); (0, 1) \dots \}.$$

○ Si $r < 0$ alors les contrôles varient dans le sens horaire, ils suivent la suite :

$$u = \{ \dots (1, 0); (0, -1); (-1, 0); (0, 1); (1, 0); (0, -1) \dots \}.$$

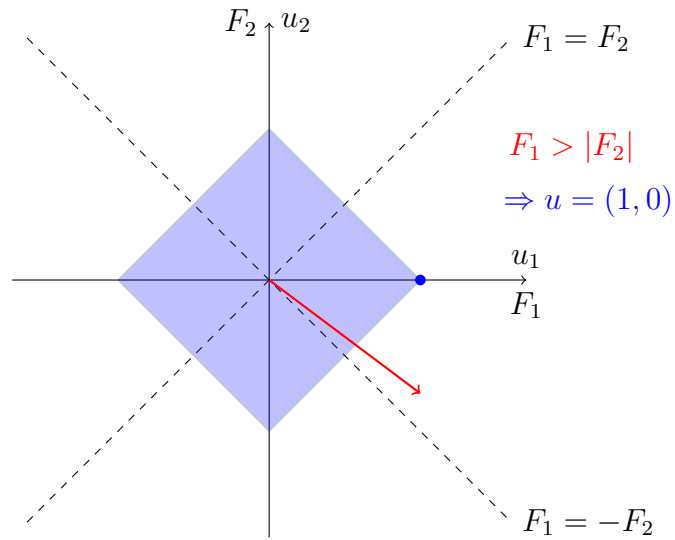


FIGURE 3.3 – Extrêmes normales ($F_1 > |F_2|$).

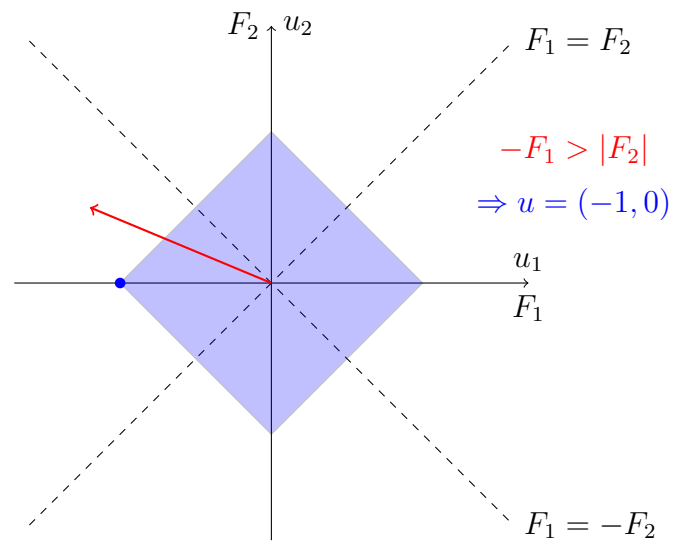


FIGURE 3.4 – Extrêmes normales ($-F_1 > |F_2|$).

3.3.3 Symétrie du problème

Dans cette section, on va montrer que le système de Heisenberg (3.2), (3.3) possède une symétrie discrète.

Soit $\theta = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, on note $\mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

$$\dot{X} = \frac{d}{dt} (\tilde{\mathcal{R}}_\theta X) = \tilde{\mathcal{R}}_\theta \dot{X} = \tilde{\mathcal{R}}_\theta (u_1 f_1(X) + u_2 f_2(X)) = \tilde{u}_1 \tilde{f}_1(\tilde{X}) + \tilde{u}_2 \tilde{f}_2(\tilde{X}).$$

On aura :

$$f_1(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y}{2} \end{pmatrix} = f_1(\tilde{\mathcal{R}}_\theta^{-1} \tilde{X}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}(-\tilde{x} \sin \theta + \tilde{y} \cos \theta) \end{pmatrix}$$

$$f_2(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x} \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix} = f_2(\tilde{\mathcal{R}}_\theta^{-1} \tilde{X}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2}(\tilde{x} \cos \theta + \tilde{y} \sin \theta) \end{pmatrix}$$

D'où

$$u_1 f_1(X) + u_2 f_2(X) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ -\frac{\tilde{y}}{2}(u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta) + \frac{\tilde{x}}{2}(u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta) \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 \tilde{f}_1(\tilde{X}) + \tilde{u}_2 \tilde{f}_2(\tilde{X}) &= \tilde{\mathcal{R}}_\theta (u_1 f_1(X) + u_2 f_2(X)) \\ &= \begin{pmatrix} u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta \\ u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta \\ -\frac{\tilde{y}}{2}(u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta) + \frac{\tilde{x}}{2}(u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{On pose : } \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = v_1 \\ \dot{\tilde{y}} = v_2 \end{cases}$$

Alors : $v_1 + v_2 = u_1(\cos \theta + \sin \theta) + u_2(\cos \theta - \sin \theta)$. Pour $\theta = \frac{k\pi}{2}$, on a $v_1 + v_2 = |u_1| + |u_2|$.

C'est facile de vérifier que $\dot{\tilde{z}} = \dot{z}$. En effet,

$$\begin{cases} x &= \tilde{x} \cos \theta + \tilde{y} \sin \theta \\ y &= -\tilde{x} \sin \theta + \tilde{y} \cos \theta \\ u_1 &= v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta \\ u_2 &= -v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta, \end{cases}$$

ce qui implique $\dot{z} = \frac{1}{2}(u_2x - u_1y) = \frac{1}{2}(v_2\tilde{x} - v_1\tilde{y}) = \dot{\tilde{z}}$. D'où la symétrie.

Lemme 3.7 Soit $\theta = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ et soit $X(t)$ la solution du problème de Heisenberg relatif au contrôles (u_1, u_2) , alors $\tilde{X}(t) = \tilde{\mathcal{R}}_\theta X(t)$ est solution du même problème correspondant au contrôles $(v_1 = (u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta), v_2 = (u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta))$.

3.3.4 Structure des géodésiques

Dans cette section, nous considérons $U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : |u_1| + |u_2| \leq 1\}$ l'ensemble des contrôles et nous allons fixer les conditions initiales suivantes : $X(0) = (0, 0, 0)$, $P(0) = (p_0, q_0, r)$.

Grâce à la proposition 3.6, on peut se focaliser sur le cas où $r > 0$. Comme par hypothèse $p_0 > q_0$, alors il existe un $T_1 > 0$ tel que le contrôle associé à l'extrémale $(P(t), X(t))$ dans l'intervalle $[0, T_1]$ est $(1, 0)$. Ceci implique que $\dot{F}_1 = 0$ et $\dot{F}_2 = r$, donc F_2 varie pour atteindre la valeur de F_1 .

Déterminons T_1 :

$$\begin{cases} \dot{F}_1(t) = 0 \implies F_1(T_1) = F_1(0) = p_0, \\ \dot{F}_2(t) = r \implies F_2(T_1) = F_2(0) + \int_0^{T_1} r dt = q_0 + rT_1. \end{cases}$$

Puisque $F_1(T_1) = F_2(T_1)$, alors $p_0 = q_0 + rT_1$, d'où :

$$T_1 = \frac{p_0 - q_0}{r}.$$

Dès qu'on dépasse T_1 alors $F_2 > F_1$ et $u = (0, 1)$ est l'unique contrôle admis par le PMP jusqu'à ce que F_1 atteint la valeur $-p_0$. Ceci arrive au temps T_2 avec $F_2(T_2) = F_2(T_1)$, et $-F_1(T_2) = F_2(T_2)$.

Nous avons

$$F_1(T_2) = F_1(T_1) + \int_{T_1}^{T_2} \dot{F}_1(t) dt = F_1(T_1) - r(T_2 - T_1),$$

alors :

$$p_0 = F_1(T_1) = F_2(T_1) = F_2(T_2) = -F_1(T_2) = -F_1(T_1) + r(T_2 - T_1) = -p_0 + r(T_2 - T_1).$$

D'où :

$$T_2 - T_1 = \frac{2p_0}{r}.$$

Nous pouvons répéter le même argument exposé ci-dessus et conclure que pour $t \in [T_2, T_2 + \varepsilon]$, $u = (-1, 0)$, puis $u = (0, -1) \cdots$ etc, et nous trouvons pour $k \geq 2$, $\Delta t = T_k - T_{k-1} = \frac{2p_0}{r}$.

Calculons les trajectoires :

Le problème de Cauchy $\dot{X}(t) = u_1 f_1(X) + u_2 f_2(X)$ correspond au système de Heisenberg, déterminons alors $X(t)$ solution de ce problème sur chaque intervalle du temps.

◦ Sur l'intervalle $[0, T_1]$: Avant la première commutation, la condition initiale est

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et le contrôle associé à la géodésique est $u = (1, 0)$. Déterminons alors la trajectoire du point initial :

$$\dot{X}(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) &= u_1 = 1 \\ \dot{y}(t) &= u_2 = 0 \\ \dot{z}(t) &= \frac{1}{2}(u_2 x - u_1 y) = \frac{1}{2}y. \end{cases}$$

En intégrant ces équations, on obtient :

$$X(t) = \begin{cases} x(t) &= x(0) + \int_0^t dt = t \\ y(t) &= y(0) = 0 \\ z(t) &= z(0) = 0. \text{ (puisque } y(t)=0) \end{cases}$$

d'où

$$X(t) = \begin{cases} x(t) &= t \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= 0. \end{cases}$$

◦ Sur l'intervalle $[T_1, T_2]$: La condition initiale est

$$X(T_1) = \begin{pmatrix} T_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et l'évolution est gouvernée par le contrôle $u = (0, 1)$. La trajectoire associée est donnée par :

$$\dot{X}(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) &= u_1 = 0 \\ \dot{y}(t) &= u_2 = 1 \\ \dot{z}(t) &= \frac{1}{2}(u_2x - u_1y) = \frac{1}{2}x. \end{cases}$$

On obtient alors

$$X(t) = \begin{cases} x(t) &= x(T_1) + \int_{T_1}^t 0 dt = T_1 \\ y(t) &= y(T_1) + \int_{T_1}^t 1 dt = t - T_1 \\ z(t) &= z(T_1) + \int_{T_1}^t \frac{1}{2}T_1 dt = \frac{1}{2}T_1(t - T_1). \end{cases}$$

D'où

$$X(t) = \begin{pmatrix} T_1 \\ t - T_1 \\ \frac{1}{2}T_1(t - T_1) \end{pmatrix}$$

Après une seule commutation on atteint le point du type $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{xy}{2} \end{pmatrix}$ en un temps $t = x + y$.

◦ Sur l'intervalle $[T_2, T_3]$: La condition initiale est

$$X(T_2) = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 - T_1 \\ \frac{1}{2}T_1(T_2 - T_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 \\ \Delta t \\ \frac{1}{2}\Delta t T_1 \end{pmatrix}$$

et l'évolution est gouvernée par le contrôle $u = (-1, 0)$. On a

$$\dot{X}(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) &= u_1 = -1 \\ \dot{y}(t) &= u_2 = 0 \\ \dot{z}(t) &= \frac{1}{2}(u_2x - u_1y) = \frac{1}{2}y. \end{cases}$$

La trajectoire associée est donnée par :

$$X(t) = \begin{cases} x(t) &= x(T_1) + \int_{T_2}^t -1 dt = T_1 - t + T_2 \\ y(t) &= y(T_2) + \int_{T_2}^t 0 dt = T_2 - T_1 = \Delta t \\ z(t) &= z(T_2) + \int_{T_2}^t \frac{1}{2} \Delta t = \frac{1}{2} \Delta t (t - \Delta t). \end{cases}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} -t + T_1 + T_2 \\ \Delta t \\ \frac{1}{2} \Delta t (t - \Delta t) \end{pmatrix}$$

Après la deuxième commutation on atteint les point du type $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{-xy}{2} + T_1 y \end{pmatrix}$
en un temps $t = y - x + 2T_1$.

◦ Sur l'intervalle $[T_3, T_4]$: La condition initiale est

$$X(T_3) = \begin{pmatrix} T_1 - \Delta t \\ \Delta t \\ \frac{\Delta t}{2} (\Delta t + T_1) \end{pmatrix}$$

et le contrôle associé est $u = (0, -1)$.

En effet :

$$x(T_3) = -T_3 + T_1 + T_2 = T_1 - \Delta t$$

car on $\forall k \geq 2, \Delta t = T_k - T_{k-1}$ donc $-T_3 + T_2 = -\Delta t$.

$$\begin{aligned} y(T_3) &= \Delta t \\ z(T_3) &= \frac{\Delta}{2}(T_3 - \Delta t) = \frac{\Delta t}{2}(\Delta t + T_1) \end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\dot{X}(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) &= u_1 = 0 \\ \dot{y}(t) &= u_2 = -1 \\ \dot{z}(t) &= \frac{1}{2}(u_2 x - u_1 y) = -\frac{1}{2}x. \end{cases}$$

alors :

$$x(t) = x(T_3) = T_1 - \Delta t$$

$$y(t) = y(T_3) + \int_{T_3}^t (-1) dt = \Delta t - t + T_3$$

$$T_3 = \Delta t + T_2 \implies T_2 = \Delta t + T_1$$

$$\implies T_3 = \Delta t + \Delta t + \Delta + T_1 \implies T_3 = 2\Delta t + T_1.$$

$$\text{donc } y(t) = \Delta t - t + 2\Delta t + T_1.$$

$$z(t) = z(T_3) + \int_{T_3}^t -\frac{1}{2}(3\Delta t + T_1 - t) dt$$

$$z(t) = \frac{\Delta t}{2}(\Delta t + T_1) + \frac{(\Delta t - T_1)}{2}(t - 2\Delta t - T_1).$$

alors la trajectoire associée est donnée par :

$$X(t) = \begin{cases} x(t) &= T_1 - \Delta t \\ y(t) &= 3\Delta t + T_1 - t \\ z(t) &= \frac{\Delta t}{2}(\Delta t + T_1) + \frac{(\Delta t - T_1)}{2}(t - 2\Delta t - T_1). \end{cases}$$

On remarque que pour tout entier naturel $n \geq 2, T_n = (n - 1)\Delta t + T_1$.

Après la troisième commutation on atteint le point du type : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{xy}{2} + (x - T_1)^2 \end{pmatrix}$
en un temps $t = -x - y + 2\Delta t + 2T_1$.

On remarque que jusqu'à T_4 on a toujours $z \geq \frac{|xy|}{2}$ le long d'une trajectoire bang-bang, et $z(T_4) = \frac{\Delta t}{2}(T_3 - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2}(\Delta t - T_1) = \frac{\Delta t}{2}(T_3 - T_1) = \Delta t^2$.

o Sur l'intervalle $[T_4, T_5]$: condition initiale est :

$$X(T_4) = \begin{pmatrix} T_1 - \Delta t \\ 0 \\ \Delta t^2 \end{pmatrix}$$

et le contrôle associé est $u = (1, 0)$.

En effet :

$$x(T_4) = T_1 - \Delta t$$

$$y(T_4) = 3\Delta t + T_1 - T_4, \text{ Or } T_4 = (4 - 1)\Delta t + T_1 = 3\Delta t + T_1$$

$$y(T_4) = 3\Delta t + T_1 - 3\Delta t + T_1 = 0$$

$$z(T_4) = \frac{\Delta t}{2}(\Delta t + T_1) + \frac{(\Delta t - T_1)}{2}(3\Delta t + T_1 - 2\Delta t - T_1)$$

$$z(T_4) = \frac{\Delta t}{2}(\Delta t + T_1) + \frac{(\Delta t - T_1)}{2}(\Delta)$$

$$z(T_4) = \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{T_1 \Delta t}{2} + \frac{\Delta t^2}{2} - \frac{T_1 \Delta t}{2} = \Delta t^2.$$

Nous avons aussi :

$$\dot{X}(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) & = u_1 = 1 \\ \dot{y}(t) & = u_2 = 0 \\ \dot{z}(t) & = \frac{1}{2}(u_2 x - u_1 y) = -\frac{1}{2}y \end{cases}$$

alors

$$x(t) = x(T_4) + \int_{T_4}^t 1 dt = T_1 - \Delta t + t - T_4 = T_1 - \Delta t + t - 3\Delta t - T_1$$

$$x(t) = t - 4\Delta t$$

$$y(t) = y(T_4) + \int_{t_4}^t 0 dt = 0$$

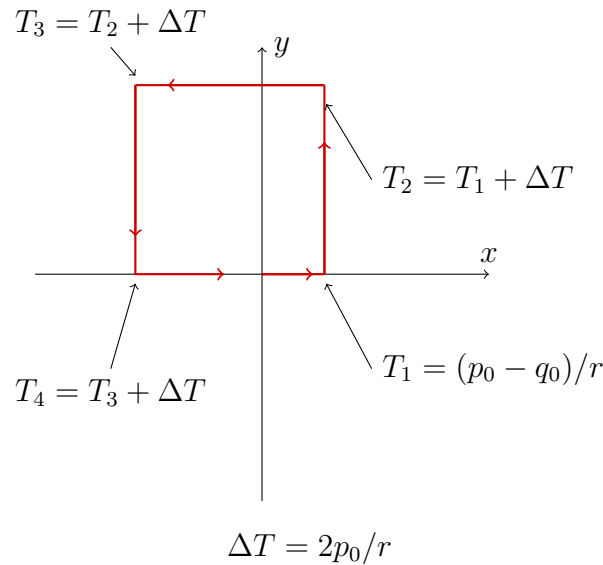
$$z(t) = z(T_4) + \int_{T_4}^t \left(-\frac{1}{2}y\right) dt = \Delta t^2$$

alors la trajectoire correspondante est :

$$X(t) = \begin{cases} x(t) & = t - 4\Delta t \\ y(t) & = 0 \\ z(t) & = \Delta t^2. \end{cases}$$

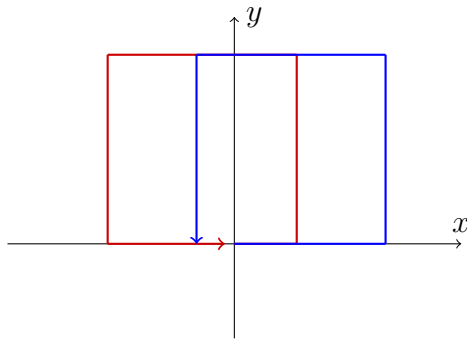
Conséquence 1 Pour atteindre le point $(0, 0, \Delta t^2)$ il nous faut un temps égal à $4\Delta t$.

Si on suppose que la géodésique $X(\cdot)$ vérifie le PMP avec le contrôle $u(\cdot)$ et le vecteur adjoint $p(\cdot)$, tel que $P(0) = (p_0, q_0, r)$ avec $p_0 \geq |q_0|$, $p_0 \neq 0$ et $r > 0$, alors la trajectoire prendra cette allure.



3.3.5 Perte d'optimalité pour le problème de Heisenberg

Prenons deux trajectoires avec les mêmes p_0 et r , et changons la valeur de premier temps de commutation T_1 , on obtient la figure suivante.



Au temps où les deux trajectoires se rencontrent (le quatrième temps de switch), elle aurons la même valeur de z . Cela implique la perte d'optimalité locale.

Conclusion

En conclusion, ce travail met en lumière l'interaction fascinante entre la théorie du contrôle et la géométrie, en se concentrant sur le groupe de Heisenberg comme modèle central. À travers les trois chapitres, nous avons d'abord établi les fondements mathématiques nécessaires à la compréhension des systèmes dynamiques, en revisitant des concepts clés tels que le problème de Cauchy et les variétés différentielles. Ensuite, nous avons exploré la théorie du contrôle optimal, soulignant son importance dans la détermination des stratégies efficaces pour atteindre des états désirés tout en respectant des contraintes spécifiques.

Enfin, la discussion approfondie sur le problème de Heisenberg a permis de mettre en évidence les défis et les opportunités qu'offre ce cadre géométrique pour la recherche de géodésiques minimales. Ce travail ouvre la voie à de futures recherches dans le domaine du contrôle optimal, où l'intégration de concepts géométriques peut enrichir notre compréhension et notre capacité à résoudre des problèmes complexes. En somme, l'étude du groupe de Heisenberg non seulement illustre les applications pratiques de la théorie du contrôle géométrique, mais elle souligne également l'importance d'une approche interdisciplinaire qui combine mathématiques pures et applications concrètes.

Bibliographie

- [1] S. Arguillère. *Une Introduction à la Géométrie Sous-Riemannienne*. polycopie de cours : Ecole Normale Supérieure. 2010.
- [2] D. Barilari, U. Boscain, E. Le Donne, and M. Sigalotti. *Sub-Finsler geometry from the time-optimal control viewpoint for some nilpotent distributions*. J. Dyn. Control Syst., 3(3) :547–575, 2017.
- [3] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. théorie et application*. Masson Paris, 1983.
- [4] J-M. Coron. *Quelques résultats sur la commandabilité et la stabilisation des systèmes non linéaire*. Journées mathématiques X-UPS (1999), p. 127-174.
- [5] M. Crouzeix and A.L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. 2ème Edition Masson, 1989.
- [6] P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. 3e édition. EDP SCIENCES, 2006.
- [7] J. Faraut. *Analyse sur les groupes de Lie*. Calvage et Mounet, Paris, 2018.
- [8] F. Harrache, F.C. Chittaro, J.-P. Gauthier, and M. Aidène. Cut locus of L1 sub-Finsler problems in \mathbb{R}^3 : two case studies. In 5th International Conference on Mathematics “ An Istanbul Meeting for World Mathematicians”, 2021.
- [9] F.Harrache. *Les métriques sous Finsleriennes en dimension 3*. thèse de doctorat, l’université de Toulon, HAL Open Science 2022.
- [10] B. Jakubczyk. *Introduction to Geometric Nonlinear Control; Controllability and Lie Bracket* Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, 00-950 Warsaw, ‘Sniadeckich 8, Poland.
- [11] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*, EDP Sciences, 2010.
- [12] K. Louadj. *Résolution des problèmes paramétriques en contrôle optimal*. Thèse de doctorat, page 116, 2012.

- [13] Y. Privat, “Introduction au contrôle optimal : Aspects théoriques et numériques”, 2022-2023.
- [14] H. Schättler, U. Ledzewicz. *Geometric Optimal control : theory, methods and examples*, Interdisciplinary Applied Mathematics 38, Springer 2012.
- [15] E. Trélat, “Contrôle optimal : Théorie et application”, 2008.