

République Algérienne Démocratique et Populaire.  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.  
Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

**Faculté des Sciences**  
**Département des Mathématiques**



Mémoire de Master

Spécialité : MATHÉMATIQUES

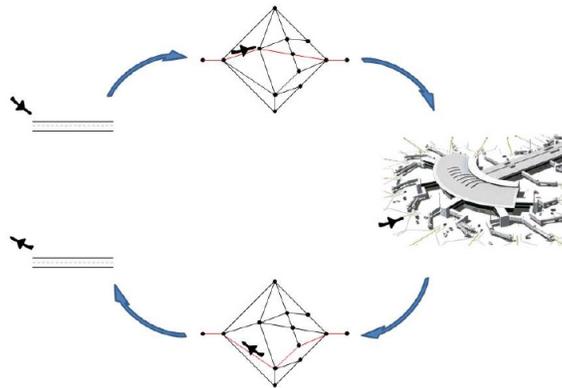
Option : Recherche Opérationnelle

Intitulé du mémoire

---

**Optimisation dans les systèmes de files d'attente : cas de gestion des arrivées des avions dans un aéroport**

---



*Réalisé par :*

**M. BAAHMED Ahmed**  
**M. BECHAR Karim**

*Dirigé par :*

**M. HAMADOUCHE Djamel**

*Année Universitaire : 2016/2017*



# Table des Matières

<b>Bibliographie</b>	<b>1</b>
<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Dédicace</b>	<b>4</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
<b>1 Systèmes de files d'attente Markoviens</b>	<b>8</b>
1.1 Processus Markoviens . . . . .	8
1.1.1 Rappels sur processus stochastiques . . . . .	8
1.1.2 Processus Stationnaires . . . . .	9
1.1.3 Processus à accroissements indépendants et stationnaires . . . . .	10
1.1.4 Processus de Poisson . . . . .	10
1.1.5 Processus de Poisson et loi exponentielle . . . . .	11
1.1.6 Loi de Poisson et loi uniforme . . . . .	11
1.1.7 Processus de naissance et de mort . . . . .	12
1.1.8 Processus de Markov . . . . .	18
1.2 Files d'attente . . . . .	22
1.2.1 Description . . . . .	23
1.3 Caractéristiques d'un système d'attente . . . . .	23
1.4 Notation de Kendall . . . . .	24
1.4.1 Étude de la file $M/M/1$ . . . . .	24
1.4.2 Étude du processus $(N_t)_{t \in T}$ . . . . .	25
1.4.3 Loi du système en régime permanent (stable) . . . . .	26
1.4.4 Nombre moyen de clients dans le système à la date $t$ . . . . .	26
1.4.5 Écart type $\sigma_t$ . . . . .	27
1.4.6 Nombre moyen de clients dans la file à la date $t$ . . . . .	28
1.4.7 Formule de Little : . . . . .	28
1.4.8 Caractéristiques du système liées au serveur . . . . .	29
1.4.9 Étude de la file $M/M/1/k$ . . . . .	30
1.4.10 Étude de la file $M/M/1/k/[F]$ . . . . .	32
1.4.11 Étude de la file $M/M/s$ . . . . .	33
1.4.12 Étude de la file $M/M/\infty$ . . . . .	34

<b>2</b>	<b>Modélisation de files d'attente</b>	<b>36</b>
2.1	Introduction . . . . .	36
2.2	Modélisation de systèmes . . . . .	37
2.3	Etude de cas . . . . .	37
2.4	Position du problème . . . . .	37
2.5	Détermination des lois . . . . .	38
2.5.1	Loi des arrivées . . . . .	38
2.5.2	Loi de service . . . . .	38
2.6	Analyse mathématiques de la file M/M/s . . . . .	39
2.6.1	Étude du processus $(N_t)_{t \geq 0}$ . . . . .	39
2.6.2	Carractéristiques ou performances du système liées aux avions . . .	41
2.6.3	Carractéristiques liées aux serveurs . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Simulation de files d'attente</b>	<b>47</b>
3.1	Simulation et implémentation . . . . .	47
3.1.1	Simulation de la loi des arrivées . . . . .	47
3.1.2	Simulation du risque de saturation . . . . .	49
3.1.3	Simulation du nombre moyen d'avions en orbite . . . . .	50
3.1.4	Simulation du temps d'attente en orbite . . . . .	52
3.2	Illustrations numeriques et graphiques . . . . .	54
3.2.1	Loi de N(t) . . . . .	54
3.2.2	Risque de saturation . . . . .	61
3.2.3	Nombre moyen d'avions en orbite . . . . .	62
3.2.4	Temps moyen d'attente en orbite . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Optimisation dans les systèmes d'attente</b>	<b>64</b>
4.1	Evaluation du risque de saturation . . . . .	65
4.2	Optimisation du risque de saturation . . . . .	69

# Remerciements

Avant d'entamer cette présentation, nous tenons à exprimer notre sincère gratitude envers tous ceux qui nous ont aidés à faire en sorte que ce projet arrive à terme.

Tout d'abord, nous tenons à remercier M. HAMADOUCHE Djamel, notre encadreur, pour son aide, sa générosité et le temps qu'il nous a consacré.

Nous sommes reconnaissants également à tous nos enseignants pour leur disponibilité, leur soutien et leur précieuse contribution à notre formation.

Un grand merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

# Dédicace

**Nous dédions ce modeste travail:  
A nos familles,  
A nos amis,  
Et à nos professeurs.**

# Introduction générale

L'origine des études sur les phénomènes d'attente remonte aux années 1909-1920 avec les travaux du mathématicien Danois A.K. Erlang concernant le réseau téléphonique de Copenhague. La théorie mathématique s'est ensuite développée grâce notamment aux contributions de Palm, Kolmogorov, Khintchine, Pollaczek, et s'est ensuite étendue à de nombreux champs d'application comme la gestion de stocks, les télécommunications en général, la fiabilité de systèmes complexes,... Les problèmes liés à l'attente dans un centre de service de masse sont omniprésents dans notre société. Les exemples sont:

- Attente a un guichet (caisse dans un supermarché, administration,...),
- Trafic urbain ou aérien,
- Réseaux téléphoniques,
- Circulation de pièces dans un atelier,
- Programmes dans un système informatique,
- ...

Construire un système adapté, que ce soit un système informatique, un réseau de communication, un système de production ou un système de la vie quotidienne, passe obligatoirement par une étape de modélisation et d'analyse des performances du système. La pression des enjeux économiques est telle actuellement que l'on ne peut aboutir à un système sous-dimensionné et que l'on doit éviter au maximum le surdimensionnement.

En plus des modélisations analytiques, les simulations sur calculateurs permettent des évaluations relativement précises, mais demandant parfois des temps de calcul qui peuvent être importants si l'on veut reproduire correctement les phénomènes aléatoires et atteindre un régime permanent.

Une condition nécessaire pour dimensionner un centre de service est qu'il soit capable d'absorber le débit moyen de clients prévus, condition très facile à vérifier par de simples calculs de débits moyens. Mais, même avec un système correctement dimensionné, le caractère aléatoire des arrivées et des temps de service rend les attentes impossibles à éviter complètement.

L'étude et l'analyse de ces phénomènes d'attente se basent sur la théorie des processus stochastiques, en particulier des processus Markoviens.

La modélisation et la simulation jouent un rôle prépondérant dans l'évaluation prédictive du comportement du système. Il s'agit de modéliser par exemple une file d'attente (clients entrants et traitement de leurs demandes par des serveurs ou caisses).

Comme les arrivées des clients et les temps de service dépendent de certains paramètres souvent difficiles à évaluer, on opte souvent pour un modèle stochastique en rendant certains paramètres du système, aléatoires. Evidemment, ces clients arrivent en des temps aléatoires, les temps de service sont eux aussi aléatoires, il peut y avoir un seul guichet, ou un nombre déterminé 'k' de guichets. Les modèles les plus simples à étudier théoriquement sont ceux pour lesquels les clients arrivent suivant un processus de Poisson homogène (Markovien) qui ne dépend pas du temps (les temps d'inter-arrivées sont exponentiels).

On parle de file d'attente M/M/1 ou M/M/k s'il y a k guichets et capacité infinie (dans le sens assez grand) et caractère Markovien. Lorsque les temps d'inter-arrivées et/ou de service ne sont pas exponentiels exemple de loi Binomiale, il s'agira de système G/M ou M/G ou G/G, avec là aussi éventuellement plusieurs guichets et une file d'attente limitée. En pratique, dès que le système n'est pas de type Markovien (M/M/.), on se contente de l'approximer et d'utiliser une simulation informatique pour le traiter.

Ce mémoire traite d'un problème d'optimisation dans les systèmes d'attente, cas de gestion des arrivées d'avions dans un aéroport et il est composé de quatre chapitres organisés comme suit : Le premier traite des files d'attentes markoviennes. On y introduira d'importantes définitions (processus stochastiques-processus stationnaires, processus à accroissements indépendants et stationnaires, Poisson, Markoviens,...). Ces généralités seront nécessaires à la compréhension de la notion de files d'attente markoviennes. On présentera ensuite au deuxième chapitre une modélisation par files d'attente du système de gestion des avions dans un aéroport (aéroport d'Alger), qui est notre objet d'étude et d'analyse dans ce mémoire, et qui vise à mesurer et évaluer les performances du système présenté. Dans le troisième, on va s'intéresser à la simulation du système et de ces différentes mesures de performances où on implémentera des algorithmes en utilisant le logiciel MATLAB. Dans le dernier chapitre, comme application numérique, on résoudra un problème d'optimisation où on déterminera la structure optimale des pistes d'atterrissage pour minimiser le risque de saturation et le temps d'attente des avions en orbite.

# Chapitre 1

## Systemes de files d'attente Markoviens

### Introduction

On parle des phénomènes d'attentes chaque fois que certaines unités appelées «client» se présentent d'une manière aléatoire à des situations afin de recevoir un service dont la durée est généralement aléatoire. Si un poste de service est libre, le client se dirige immédiatement vers ce poste où il est servi. Sinon, il prend sa place dans une file d'attente dans laquelle les clients se rangent suivant leur ordre d'arrivée. Un système d'attente comprend donc 'un espace de service' avec une ou plusieurs stations de service et 'un espace d'attente' dans lequel se forme une éventuelle file d'attente. Comme le montre le schéma suivant.

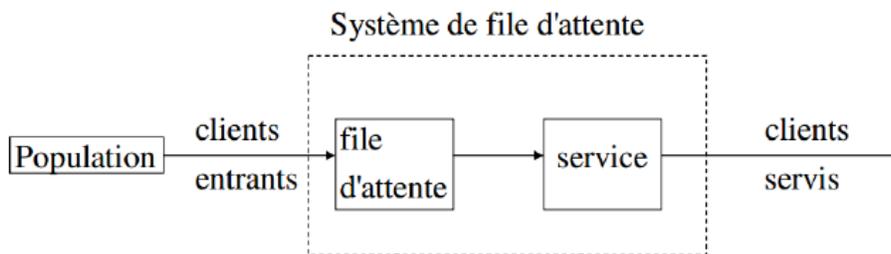


Figure 1.1: Système d'attente.

Les systèmes d'attente se basent sur les processus Markoviens et sur quelques notions importantes que nous allons rappeler.

## 1.1 Processus Markoviens

### 1.1.1 Rappels sur processus stochastiques

Soit  $(\Omega, F, P)$  un espace de probabilité,  $T \subset \mathbb{R}_+$  un espace temps (ou de paramètres) et  $\mathbb{E} \in \mathbb{N}$  un espace des états.

### Définition 1.1.

Un processus stochastique est une application mesurable

$$X : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{E}$$
$$(\omega, t) \rightarrow X(t, \omega) = X_t(\omega)$$

où à  $t_0$  fixé,  $\omega \rightarrow X_{t_0}(\omega)$  est une variable aléatoire, et à  $\omega_0$  fixé,  $t \rightarrow X(t, \omega_0)$  est une application mesurable.

### Remarque 1.1.

- Si  $T$  est dénombrable (fini ou infini,  $T \subseteq \mathbb{N}$ ),  $X = (X_t)_{t \in T}$  est une suite de variables aléatoires ou un processus à temps discret.
- Si  $T \subset \mathbb{R}_+$  a la puissance du continu (intervalle ou combinaison d'intervalles),  $(X_t)_{t \in T}$  est dit processus à temps continu ou processus stochastique.
- Si  $\mathbb{E}$  est discret (dénombrable fini ou infini),  $X$  est dit processus discret.
- Si  $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$  a la puissance du continu,  $X$  est dit processus continu.

## 1.1.2 Processus Stationnaires

### Définition 1.2. : Stationnarité forte

Un processus stochastique  $(X_t)_{t \in T}$ , est dit fortement stationnaire (stationnaire au sens strict), si les lois fini-dimensionnelles sont invariantes par translation c'est-à-dire

$$\forall h > 0, \forall t_1, t_2, \dots, t_n \in T, n \in \mathbb{N}^*$$

le vecteur  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  a la même loi que le vecteur  $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$ .

En particulier  $X_t$ , et  $X_{t+h}$ , ont la même loi  $\forall t, h \in T$  (c'est-à-dire  $X_t$  et  $X_s$  ont la même loi  $\forall t, s \in T$ ).

### Définition 1.3. : Stationnarité faible

Un processus stochastique  $(X_t)_{t \in T}$  est dit faiblement stationnaire (stationnaire au sens large) si

- i)  $\mathbb{E}(X_t) := m_t = m < +\infty$ ,
- ii)  $\mathbb{E}(X_t^2) := \delta_t^2 = \delta^2 < +\infty$ ,
- iii)  $Cov(X_t, X_s) := \mathbb{E}((X_t - m)(X_s - m)) = \Gamma(t, s) = \Gamma(t - s)$ .

### Remarque 1.2.

*Stationnarité forte  $\Rightarrow$  Stationnarité faible.*

### 1.1.3 Processus à accroissements indépendants et stationnaires

#### Définition 1.4. : Processus à accroissements indépendants (PAI)

Un processus  $(X_t)_{t \in T}$ , est dit PAI si  $\forall t_0, t_1, \dots, t_n \in T, \forall n \in \mathbb{N}$ , les variables aléatoires

$$X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}}, \dots, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_1} - X_{t_0}$$

sont indépendantes.

Sachant que  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes ssi quelque soit l'événement dépendant de  $X$  est indépendant de l'événement dépendant de  $Y$ .

$A$  et  $B$  sont indépendants ssi  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

#### Définition 1.5. : Processus à accroissements stationnaires (PAS)

Un processus stochastique  $(X_t)_{t \in T}$  est dit PAS si  $\forall t, s \in T$ , la loi de l'accroissement  $X_t - X_s$  ne dépend que de  $t - s$ , c'est-à-dire  $X_t - X_s$  a la même loi que  $X_{t-s}$ .

#### Définition 1.6. : Processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS)

Un processus stochastique  $(X_t)_{t \in T}$ , est dit un PAIS si  $(X_t)_{t \in T}$  est un PAI et  $(X_t)_{t \in T}$  est un PAS.

### 1.1.4 Processus de Poisson

#### Définition 1.7. : Processus de comptage

Un processus stochastiques  $(N_t)_{t \in T}$  est dit processus de comptage ou processus de dénombrement si

$(N_t)_{t \in T}$  représente le nombre d'événements se produisant dans l'intervalle  $[0, t]$  vérifiant:

i)  $N(t) \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}^+, (T = \mathbb{R}^+)$ ,

ii)  $\forall t > s \in T, N(t) \geq N(s)$ ,

iii)  $N(t) - N(s)$ , représente le nombre d'événements se produisant dans l'intervalle  $[s, t]$ ,  $\forall s < t \in T$ .

#### Définition 1.8. : Processus de Poisson

Un processus de comptage  $(N_t)_{t \in T}$  est dit processus de Poisson de taux  $\lambda > 0$  si:

i)  $N(0) = 0$ ,

ii)  $(N_t)_{t \in T}$  est un PAIS,

iii)  $P[N_{dt} = k] = \begin{cases} o(dt), & k \geq 2, \\ \lambda dt + o(dt), & k = 1, \\ 1 - (\lambda dt + o(dt)), & k = 0. \end{cases}$

**Proposition 1.1.**

$$P[N_t = n] = \exp^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, t \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}.$$

**1.1.5 Processus de Poisson et loi exponentielle**

On considère un processus de Poisson  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  de taux  $\lambda$ .  
Soit  $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$  les instants d'occurrences de ce processus (réalisations d'événements).

On pose

$$\begin{cases} T_0 = \tau_0, \\ T_n = \tau_n - \tau_{n-1}, \end{cases} \quad n \geq 1.$$

**Proposition 1.2.**

Les variables aléatoires  $T_n, n \geq 0$ , sont indépendantes et identiquement distribuées (iid) de loi exponentielle  $\lambda$ .

$$T_n \rightsquigarrow \exp(\lambda), \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Proposition 1.3. (Généralisation)**

La durée qui sépare la nième entrée de la  $(n+k)$ ème entrée est une variable aléatoire

$$S_k = \sum_{i=n+1}^{n+k} T_i = \sum_{i=1}^k T_i$$

qui suit une loi  $\Gamma(k, \lambda)$ .

**1.1.6 Processus de Poisson et loi uniforme**

**Proposition 1.4.**

Soit  $s \in T = \mathbb{R}_+$ , tel que sur  $[0, s]$  on a qu'un seul événement qui s'est réalisé, et soit  $\tau$  l'instant de réalisation de cet événement.

$\tau$  est une variable aléatoire  $\rightsquigarrow U_{[0,s]}$ , uniforme sur l'intervalle  $[0,s]$ .

### 1.1.7 Processus de naissance et de mort

On considère un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  à temps continu ( $T = \mathbb{R}_+$ ), qui consiste à faire évoluer un système entre une infinité dénombrable d'états ( $E = \mathbb{N}$ ).

On suppose que le système vérifie les hypothèses suivantes:

**H1:** A partir d'un état  $n \in E$ , à l'instant  $t$ , le système ne pourra passer à l'instant  $t + dt$  que dans l'un des états  $n + 1$ ,  $n - 1$ , ou  $n$  ( $n \geq 1$ ), c'est à dire dans un laps de temps très court ( $dt$ ), il n'y a qu'une seule réalisation du phénomène.

**H2:** Le processus est un P.A.I.S.

**H3 :** Au plus un événement peut survenir à l'instant  $t$ .

- On appelle "naissance" à la date  $t$ , le passage du système de l'état  $n$  à l'état  $n + 1$ , et on pose

$$P[X_{t+dt} = n + 1 / X_t = n] = \lambda dt + o(dt).$$

- On appelle "mort" à la date  $t$ , le passage de système de l'état  $n$ , à l'état  $n - 1$ , et on pose

$$P[X_{t+dt} = n - 1 / X_t = n] = \mu dt + o(dt).$$

$\lambda_n$  est appelé taux de naissance du système.

$\mu_n$  est appelé taux de mort du système.

$(X_t)_{t \geq 0}$  ainsi défini est appelé processus de naissance et de mort (PNM) de taux  $\lambda_n$  et  $\mu_n > 0$ .

#### Equations régissant le système (Equations de Chapman-Kolmogorov)

On a d'abord

$$\begin{aligned} P[X_{t+dt} = n / X_t = n] &= 1 - P[X_{t+dt} \neq n / X_t = n] \\ &= 1 - (P[X_{t+dt} = n + 1 / X_t = n] + P[X_{t+dt} = n - 1 / X_t = n]) \\ &= 1 - (\lambda_n dt + o(dt) + \mu_n dt + o(dt)) = 1 - (\lambda_n + \mu_n) dt + o(dt) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} p_n(t + dt) &= P[[X_t = n, X_{t+dt} = n] \cup [X_t = n - 1, X_{t+dt} = n] \cup [X_t = n + 1, X_{t+dt} = n]] \\ &= P[X_t = n, X_{t+dt} = n] + P[X_t = n - 1, X_{t+dt} = n] + P[X_t = n + 1, X_{t+dt} = n] \\ &= P[X_{t+dt} = n / X_t = n] \times P[X_t = n] + P[X_{t+dt} = n - 1 / X_t = n] \times P[X_t = n - 1] \\ &\quad + P[X_{t+dt} = n + 1 / X_t = n] \times P[X_t = n + 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - (\lambda_n + \mu_n)dt + o(dt))p_n(t) + (\lambda_{n-1}dt + o(dt))p_{n-1}(t) + (\mu_{n+1}dt + o(dt))p_{n+1}(t) \\
&= p_n(t) - (\lambda_n + \mu_n)dt p_n(t) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(t)dt + \mu_{n+1}p_{n+1}(t)dt + o(dt) \\
&\Rightarrow p_n(t+dt) - p_n(t) = -(\lambda_n + \mu_n)dt p_n(t) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(t)dt + \mu_{n+1}p_{n+1}(t)dt + o(dt) \\
\Rightarrow p'_n(t) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{p_{t+dt} - p_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \mu_n)p_n(t) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(t) + \mu_{n+1}p_{n+1}(t) + \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{o(dt)}{dt}
\end{aligned}$$

Comme  $\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{o(dt)}{dt} = 0$ ,

on obtient donc :

$p'_n(t) = \mu_{n+1}p_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)p_n(t) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(t)$  et les équations dites de Chapman-kolmogorov associées au processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ :

$$(S) \begin{cases} p'_0(t) = \mu_1 p_1(t) - \lambda_0 p_0(t), & n = 0, \\ p'_n(t) = \mu_{n+1} p_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) p_n(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t), & n \geq 1, \\ \sum_{n \geq 0} p_n(t) = 1; p_n(0) = P[X_0 = n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n > 1. \end{cases} \end{cases}$$

Ceci est un système d'équations différentielles et de récurrence (aux différences).

Comme il s'agit d'un système d'équations différentielles et de recurrence, sa résolution analytique se fait avec les fonctions orthogonales de Bassel (c'est le cas transitoire ou non stationnaire).

### Cas stationnaire (stable)

On suppose que quand  $t \rightarrow +\infty$ ,  $P_n(t) \rightarrow P_n$  ( indépendante de t), c'est-à-dire que le régime permanent (stable) ou stationnaire s'établit à partir de  $t > t_0$ ,  $p_n(t) = p_n$ .

Le système d'équations précédent (S) devient:

$$(S') \begin{cases} \mu_1 p_1 - \lambda_0 p_0 = 0, & n = 0, \\ \mu_{n+1} p_{n+1} - (\lambda_n + \mu_n) p_n + \lambda_{n-1} p_{n-1} = 0, & n \geq 1, \\ \sum_{n \geq 0} p_n(t) = 1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S') \begin{cases} \mu_1 p_1 = \lambda_0 p_0, & n = 0, \\ \mu_{n+1} p_{n+1} - \lambda_n p_n = \mu_n p_n - \lambda_{n-1} p_{n-1}, & n \geq 1, \\ \sum_{n \geq 0} p_n(t) = 1. \end{cases}$$

**Résolution de (S') :**

$$n = 0, \quad p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0,$$

$$n = 1, \quad \mu_2 p_2 - \lambda_1 p_1 = \mu_1 p_1 - \lambda_0 p_0,$$

$$\Rightarrow \quad p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0,$$

$$n = 2, \quad \mu_3 p_3 - \lambda_2 p_2 = \mu_2 p_2 - \lambda_1 p_1,$$

$$\Rightarrow \quad p_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \left( \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0 \right).$$

On suppose que  $p_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_1 \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_2 \mu_1} p_0.$

Qu'en est-il de  $n + 1$ ?

$$\mu_{n+1} p_{n+1} - \lambda_n p_n = \mu_n p_n - \lambda_{n-1} p_{n-1}$$

Comme  $p_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \left( \frac{\lambda_{n-2} \lambda_{n-3} \dots \lambda_1 \lambda_0}{\mu_{n-1} \mu_{n-2} \dots \mu_2 \mu_1} \right) p_0$

$$\Rightarrow \quad p_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} p_{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad p_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} p_n = \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} \dots \lambda_1 \lambda_0}{\mu_{n+1} \mu_n \dots \mu_2 \mu_1} p_0.$$

Finalemnt, on obtient:

$$p_n = \left( \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) p_0 = a_n p_0, \quad \forall n \geq 1, \quad \text{avec} \quad a_n = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}.$$

La suite  $(p_n)_{n \geq 0}$  est une loi de probabilité donc

$$\sum_{n \geq 0} p_n = 1 \Rightarrow p_0 + \sum_{n \geq 1} p_n = 1 \Rightarrow p_0 + \sum_{n \geq 1} a_n p_0 = 1 \Rightarrow$$

$$p_0 \left( 1 + \sum_{n \geq 1} a_n \right) = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} a_n}, \text{ qui est défini si } \sum a_n < +\infty.$$

**Conclusion:**

Si  $\sum_{n \geq 1} a_n < +\infty$ , alors  $p_n = \frac{a_n}{1 + \sum_{n \geq 1} a_n}$ ,  $n \geq 1$  et  $p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} a_n}$ , avec  $a_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_1 \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_2 \mu_1}$ .

**Cas particulier:**

$\lambda_n = \lambda$  et  $\mu_n = \mu$   
 $a_n = \frac{\lambda \lambda \dots \lambda \lambda}{\mu \mu \dots \mu \mu} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \rho^n$  où  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$   
 $\lambda$ :taux de naissance (entrée)  
 $\mu$  :taux de mort (sortie)

$\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} \rho^n < +\infty$  si  $\rho < 1 \Leftrightarrow \lambda < \mu$   
 Donc la condition de la stabilité dans ce cas est  $\lambda < \mu$ .

Ainsi la loi est :  $p_n = \frac{\rho^n}{1 + \sum_{n \geq 1} \rho^n} = \frac{\rho^n}{\rho^0 + \sum_{n \geq 1} \rho^n}$ ,

$$\begin{cases} p_n = \frac{\rho^n}{\sum_{n \geq 0} \rho^n} = \frac{\rho}{1-\rho}, & n \geq 1 \\ p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \rho^n} = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \rho^n} = \frac{1}{1-\rho} = 1 - \rho, & n = 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire:

$$p_n = \rho^n(1 - \rho), \quad \forall n \geq 0.$$

**Graphe de transition associé au processus de naissance et de mort:**

$(X_t)$  PNM  $(\lambda_n, \mu_n)$ .

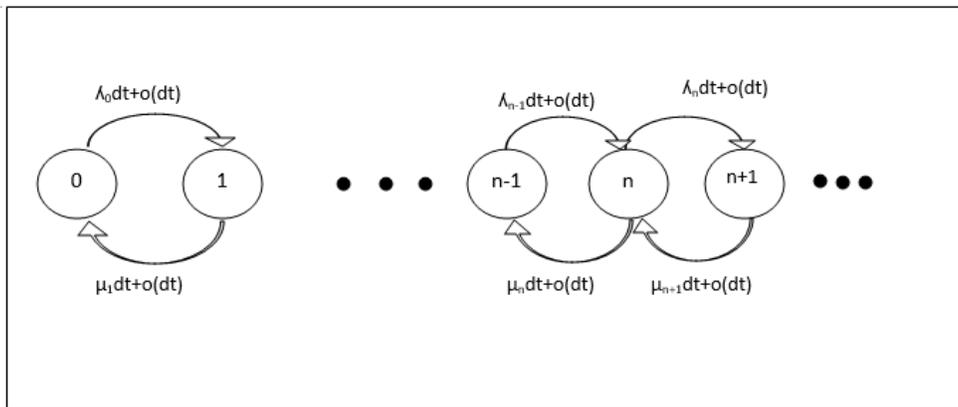


Figure 1.2: Graphe de transition associé au PNM

On a

$$p_{01} = P[X_{t+dt} = 1/X_t = 0] = \lambda_0 dt + o(dt)$$

$$p_{12} = P[X_{t+dt} = 2/X_t = 1] = \lambda_1 dt + o(dt)$$

On peut associer un graphe de transition à tout PNM  $(\lambda_n, \mu_n)$ , où les flèches correspondent aux transitions possibles du système avec des probabilités de transition correspondantes.

### Exemple 1.1.

$N_t$ : nombre de clients dans une file devant un guichet (longueur d'une file) avec  $\lambda_n = \lambda$  (taux d'entrée des clients) et  $\mu_n = \mu$  (taux de sortie des clients), avec  $\lambda < \mu$ .

$(N_t)_{t \geq 0}$ , est un PNM  $(\lambda, \mu)$ , cette loi stationnaire (d'après ce qui précède) est égale à :

$$P_n(t) = P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right), \quad \forall n \geq 0.$$

La longueur moyenne  $\eta$  de la file de clients à la date  $t$  :

$$\begin{aligned} \eta = \mathbb{E}(N_t) &= \sum_{n \geq 0} n P_n = \sum_{n \geq 0} n \rho^n (1 - \rho) = \sum_{n \geq 1} n \rho^n (1 - \rho) \\ &= \rho(1 - \rho) \sum_{n \geq 1} n \rho^{n-1} = \rho(1 - \rho) \left( \sum_{n \geq 0} \rho^n \right)' \end{aligned}$$

Comme  $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ ,  $\sum \rho^n$  est convergente

$$\Rightarrow \eta = \rho(1 - \rho) \left( \frac{1}{1 - \rho} \right)' = \rho(1 - \rho) \frac{1}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\frac{\lambda - \mu}{\mu}} \Rightarrow \eta = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

L'écart type:

$$\sigma = \sqrt{V(N_t)},$$

La variance est égale à :  $V(N_t) = \mathbb{E}(N_t)^2 - \mathbb{E}^2(N_t)$  où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_t^2) &= \sum_{n \geq 0} n^2 P_n = \sum_{n \geq 0} n^2 \rho^n (1 - \rho) = \sum_{n \geq 0} n(n + 1 - 1) \rho^n (1 - \rho) \\ &= \sum_{n \geq 0} [n(n - 1) \rho^n (1 - \rho) + n \rho^n (1 - \rho)] \\ &= \sum_{n \geq 0} [n(n - 1) \rho^n (1 - \rho)] + \sum_{n \geq 0} [n \rho^n (1 - \rho)] \\ \sum_{n \geq 0} [n(n - 1) \rho^n (1 - \rho)] &= \sum_{n \geq 0} [n(n - 1) \rho^{n-2} (1 - \rho) \rho^2] \\ &= \rho^2 (1 - \rho) \sum_{n \geq 2} n(n - 1) \rho^{n-2} = \rho^2 (1 - \rho) \sum_{n \geq 2} (\rho^n)'' \\ &= \rho^2 (1 - \rho) \sum_{n \geq 0} (\rho^n)'' = \rho^2 (1 - \rho) \left( \frac{1}{1 - \rho} \right)'' \\ &= \rho^2 (1 - \rho) \left( \frac{1}{(1 - \rho)^2} \right)' \end{aligned}$$

(Car  $\rho < 1$ ,  $\sum \rho^n$  est convergente et  $\rho \rightarrow \rho^n$  est deux fois dérivable).

$$A = \rho^2(1-\rho) \frac{2(1-\rho)}{(1-\rho)^4} = \frac{2\rho^2}{(1-\rho)^2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(N_t^2) = \frac{2\rho^2}{(1-\rho)^2} + \frac{\rho}{1-\rho}.$$

D'où

$$V(N_t) = \mathbb{E}(N_t^2) - \eta^2 = \frac{2\rho^2}{(1-\rho)^2} + \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2}$$

$$\frac{\rho^2}{(1-\rho)^2} + \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2} + \frac{\rho(1-\rho)}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho^2 + \rho - \rho^2}{(1-\rho)^2}$$

$$= \frac{\rho}{(1-\rho)^2}.$$

Donc

$$\sigma = \frac{\sqrt{\rho}}{1-\rho}$$

Ainsi la longueur de la file à l'instant t est dans  $[\eta - \sigma, \eta + \sigma] = \left[ \frac{\rho - \sqrt{\rho}}{1-\rho}, \frac{\rho + \sqrt{\rho}}{1-\rho} \right]$ .

## Processus de naissance pur et Processus de mort pur

### a. Processus de naissance pur :

C'est un processus de naissance et de mort de taux de naissance  $\lambda_n$ ,  $n \geq 0$ , et de taux de mort  $\mu_n = 0, \forall n \geq 0$ .

Le système (S) d'équations de Chapman s'écrit:

$$(S) \begin{cases} P'_0 = -\lambda_0 P_0(t), & n = 0 \\ P'_n = -\lambda_n P_n(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}, & n \geq 1 \\ \sum_{n \geq 0} P_n = 1, & P_n(0) = \delta_{0n}. \end{cases}$$

### Condition de stabilité:

$\sum_{n \geq 0} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \rightsquigarrow +\infty$ , car  $\forall n \geq 0, \mu_n = 0 \Rightarrow P_0 = 0 \Rightarrow P_n = 0, \forall n \geq 0$  et n'est pas une loi de probabilité.

Donc le système ne se stabilise pas, il faut donc le résoudre dans le cas transitoire (la loi  $p_n$  dépend, tout le temps, de l'instant t).

Si  $\lambda_n = \lambda$  : le système (S) devient :

$$(S') \begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t), & n = 0 \\ p'_n(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}, & n \geq 1 \\ \sum_{n \geq 0} p_n(t) = 1, & p_n(0) = \delta_{0n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

La solution de ce système (S') est :

$$p_n(t) = \exp^{-\lambda t} \times \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad \forall n \geq 0,$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(N_t) = \lambda t, \quad \sigma_t = \sqrt{\lambda t}.$$

Il s'agit donc d'un processus de Poisson de taux  $\lambda$ .

### b. Processus de mort pur :

C'est un processus de naissance et de mort avec  $\lambda_n = 0, \forall n \geq 0$  et on suppose que :

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \mu & \text{si } n = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

où  $N$  est la capacité du système.

C'est-à-dire le processus de mort pur prend ses valeurs dans l'espace des états

$$E = \{0, 1, 2, \dots, N\}$$

Les départs se produisent avec un taux  $\mu$  constant jusqu'à ce que le système soit vide.

On a  $p_n(t)$  = probabilité que le système soit à l'état  $n$  à l'instant  $t$

= probabilité que  $N - n$  départs se produisent dans l'intervalle  $[0, t]$ , donc:

$$\begin{cases} p_n(t) = P[N_t = n] = P[Y_t = N - n] = \exp^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{N-n}}{(N-n)!}, & n = \overline{1, N} \\ p_0(t) = 1 - \sum_{n=1}^N P_n(t) = \sum_{j \geq N} \exp^{-\mu t} \frac{(\mu t)^j}{j!}. \end{cases}$$

### 1.1.8 Processus de Markov

#### Définition 1.9.

Soit  $(\Omega, F, P)$ , un espace probabilisé,  $\mathbb{E}$  un ensemble fini ou dénombrable et  $T \subset \mathbb{R}$  un intervalle .

$\mathbb{E}$  : Espace des états,  $T$ : Espace de temps.

Soit  $(X_t)_{t \in T}$  un processus défini sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{E}$ , on dit que  $(X_t)_{t \in T}$  est un processus de Markov si :

$$\forall (s, t, u) \in T, \text{ avec } (u < s < t) \text{ et } \forall i, j, x \in E,$$

on a

$$P[X_t = j / X_s = i, X_u = x] = P[X_t = j / X_s = i] = P_{ij}(t, s) \quad (P)$$

(Propriété d'absence de mémoire ou propriété de Markov).

### Remarque 1.3.

Si dans la propriété (P), on a en plus  $P_{ij}(s, t) = P_{ij}(t - s)$ , on dira que le processus de Markov est homogène.

Dans ce qui suit, on ne considèrera que les processus de Markov homogènes.

On note  $P_{ij}(t) = P[X_{t+s} = j / X_s = i]$ ,  $s, t \in T$ ;  $i, j \in \mathbb{E}$  et  $P(t) = (P_{ij}(t))_{i, j \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}}$  est la matrice de transition du processus de Markov  $(X_t)_{t \in T}$ .

### Proposition 1.5.

Pour  $s, t \in T$  et  $i \in \mathbb{E}$ ;  $P(X_s = i) > 0$ , on a :

$$1) \sum_{j \in \mathbb{E}} P_{ij}(t) = 1, \quad \forall i \in \mathbb{E}.$$

$$2) P_{ik}(t + s) = \sum_{j \in \mathbb{E}} P_{ij}(s) P_{jk}(t).$$

(Equations de Chapman-Kolmogorov associées au processus ).

### Remarque 1.4.

La matrice de transition  $P(t)$  caractérise le processus de Markov  $(X_t)_{t \in T}$ , c'est-à-dire :  
A toute matrice stochastique  $P(t)$ , on peut associer un processus de Markov  $(X_t)_{t \in T}$ , de loi initiale  $(P(X_0 = i), i \in \mathbb{E}) = \Pi_0$  qui va admettre  $P(t)$  comme matrice de transition.

En effet, construire ce processus revient à évaluer juste ses lois fini-dimensionnelles en fonction de  $P(t)$  et  $\Pi_0$ .

C'est-à-dire à évaluer :

$$L = P[X_{t_n} = a_n, X_{t_{n-1}} = a_{n-1}, \dots, X_{t_1} = a_1, X_{t_0} = a_0], \forall t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n \in T, \forall a_i \in \mathbb{E}$$

On a:

$$L = P[X_{t_n} = a_n / X_{t_{n-1}} = a_{n-1}, \dots, X_{t_0} = a_0] \times P[X_{t_{n-1}} = a_{n-1} / X_{t_{n-2}} = a_{n-2}, \dots, X_{t_0} = a_0] \times \dots \times P[X_{t_1} = a_1 / X_{t_0} = a_0] \times P[X_{t_0} = a_0]$$

$$= P[X_{t_n} = a_n / X_{t_{n-1}} = a_{n-1}] \times P[X_{t_{n-1}} = a_{n-1} / X_{t_{n-2}} = a_{n-2}] \times \dots \times P[X_{t_2} = a_2 / X_{t_1} = a_1]$$

$$\begin{aligned} & \times P[X_{t_1} = a_1 / X_{t_0} = a_0] \times P[X_0 = a_0] \\ & = P_{a_{n-1}a_n}(t_n - t_{n-1}) \times P_{a_{n-2}a_{n-1}}(t_{n-1} - t_{n-2}) \times \dots \times P_{a_1a_2}(t_2 - t_1) \times P_{a_0a_1}(t_1 - t_0) \times \Pi_0(a_0) \end{aligned}$$

avec  $\Pi_0 = (P[X_0 = i], i \in \mathbb{E})$ .

On note  $\Pi_t = (P[X_t = i], i \in \mathbb{E})$  la loi t-instantanée du processus  $(X_t)_{t \in T}$ .

On a :

$$\Pi_t = \Pi_0 \times P(t).$$

En effet, pour  $i \in \mathbb{E}$

$$\begin{aligned} \Pi_t(i) &= P[X_t = i] = \sum_{j \in \mathbb{E}} P[X_t = i, X_0 = j] \\ &= \sum_{j \in \mathbb{E}} P[X_t = i / X_0 = j] \times P[X_0 = j] \\ &= \sum_{j \in \mathbb{E}} \Pi_0(j) \times P_{ji}(t) \\ \Rightarrow \quad \Pi_t(i) &= \sum_{j \in \mathbb{E}} \Pi_0(j) \times P_{ij}(t) \\ \Leftrightarrow \quad \Pi(t) &= \Pi(0) \times P(t). \end{aligned}$$

.

### Générateur infinitesimal d'un processus de Markov

On suppose que  $\forall (i, j) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ , la fonction  $P_{ij}(t)$  est continue en 0, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} P_{ij}(t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon } (i \neq j) \end{cases} \\ &= P_{ij}(0). \end{aligned}$$

Soit alors  $i \geq j$ ,

- $i \neq j$ ,  $q_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P_{ij}(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{P_{ij}(t) - P_{ij}(0)}{t - 0} \right) = P'_{ij}(0)$ , (si  $P_{ij}(t)$  est dérivable en 0).
- $i = j$ ,  $q_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{P_{ij}(t) - 1}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{P_{ij}(t) - P_{ij}(0)}{t} \right) = P'_{ii}(0)$ , (si  $P_{ii}(t)$  est dérivable en 0).

On pose  $q_i = -q_{ii} \geq 0$ .

On appelle alors la matrice générateur infinitesimal du processus de Markov la matrice suivante:

$$Q = (q_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}}.$$

On a

$$P_{ij}(t) = q_{ij}t + o(t) \quad i \neq j,$$

$$P_{ij}(t) = 1 + q_{ij}t + o(t) \quad i = j,$$

$$\Rightarrow 1 - P_{ii}(t) = -q_{ii}t + o(t) \quad \Rightarrow 1 - P_{ii}(t) = q_i t + o(t).$$

**Remarque 1.5.**

$$\sum_{j \in \mathbb{E}} q_{ij} = 0, \quad \forall i \in \mathbb{E}.$$

En effet  $\sum_{j \in \mathbb{E}} q_{ij} = \sum_{j \in \mathbb{E}} (P_{ij}(t))' |_{t=0} = (\sum_{j \in \mathbb{E}} P_{ij}(t))' |_{t=0} = (1)' = 0.$

Ainsi  $q_{ii} + \sum_{(j \in \mathbb{E}, i \neq j)} q_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_i = -q_{ii} = \sum_{i \neq j} q_{ij}.$

- $q_{ij}$  est appelé le taux de transition de  $i$  vers  $j$ .
- $q_i$  est appelé le taux de transition à partir de  $i$ .

**Equations de Chapman-Kolmogorov au processus de Markov**

On a  $P_{ik}(s+t) = \sum_{j \in \mathbb{E}} P_{ij}(s) \times P_{jk}(t)$ , donc

$$i) \quad \frac{\partial P_{ik}(s+t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial (\sum_{j \in \mathbb{E}} P_{ij}(s) P_{jk}(t))}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{j \in \mathbb{E}} P_{ij}(s) \times q_{jk}$$

$$\Rightarrow P'_{ik}(s) = \sum_{j \in \mathbb{E}} P_{ij}(s) \times q_{jk}, \quad \forall i, k \in \mathbb{E} \text{ et } \forall s, t \in T.$$

$$ii) \quad \frac{\partial (P_{ik}(s,t))}{\partial s} \Big|_{t=0} = \sum_{j \in \mathbb{E}} q_{ij} P_{jk}(t) \quad \iff \quad P'_k(t) = \sum_{j \in \mathbb{E}} q_{ij} P_{jk}(t), \quad \forall i, k \in \mathbb{E} \text{ et } \forall s, t \in T.$$

On a alors l'écriture matricielle suivante :

$$P'(t) = Q \times P(t).$$

**Proposition 1.6.**

L'équation différentielle matricielle  $\begin{cases} P'(t) = QP(t) \\ P(0) = I_{\mathbb{E} \in \mathbb{E}} \end{cases}$  admet la solution qui s'écrit comme suit:

$$P(t) = \sum_{n \geq 0} \left( \frac{Q^n t^n}{n!} \right) = I_{\mathbb{E} \times \mathbb{E}} + \sum_{n \geq 1} \left( \frac{(Qt)^n}{n!} \right) := \exp^{Qt} \text{ (notation).}$$

### Proposition 1.7.

Si  $\mathbb{E}$  est fini et  $Q$  (qui est donc finie) est diagonalisable (c'est-à-dire  $\exists B$  inversible et  $D$  diagonale telles que  $Q = BDB^{-1}$ ) où

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{avec } \lambda_i, i = \overline{1, n} \text{ sont les valeurs propres de } Q \text{ et } B \text{ la matrice}$$

des vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\lambda_i$ .

Alors

$$P(t) = B\Delta(t)B^{-1}, \text{ avec } \Delta(t) = \exp^{Dt}$$

$$\Delta(t) = \exp^{Dt} = \begin{bmatrix} \exp^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \exp^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \exp^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

### Lois stationnaires d'un processus de Markov

On dit que  $\Pi(t) = \Pi$  est une loi (solution) stationnaire du processus de Markov  $(X_t)_{t \in T}$ , si elle est solution du système d'équations :

$$(S) \begin{cases} \Pi Q = 0, \\ \sum_{j \in \mathbb{E}} \pi_j = 1, \end{cases}$$

avec  $Q$ : générateur infinitésimal de  $(X_t)_{t \in T}$ .

### Ergodicité d'un processus de Markov

Un processus de Markov est dit érgodique s'il admet une seule solution (loi) stationnaire  $\Pi^* = (\pi_i, i \in \mathbb{E})$  vérifiant:

$$\forall i \in \mathbb{E}, \pi_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_{ij}(t), \forall j \in \mathbb{E}.$$

## 1.2 Files d'attente

Les modèles de files d'attente les plus simples et les plus fréquents sont ceux qui ont un processus de Poisson pour les arrivées et un temps de service exponentiellement distribué. Dans ce cas, la taille de la file d'attente est modélisée par un processus de naissance et de mort.

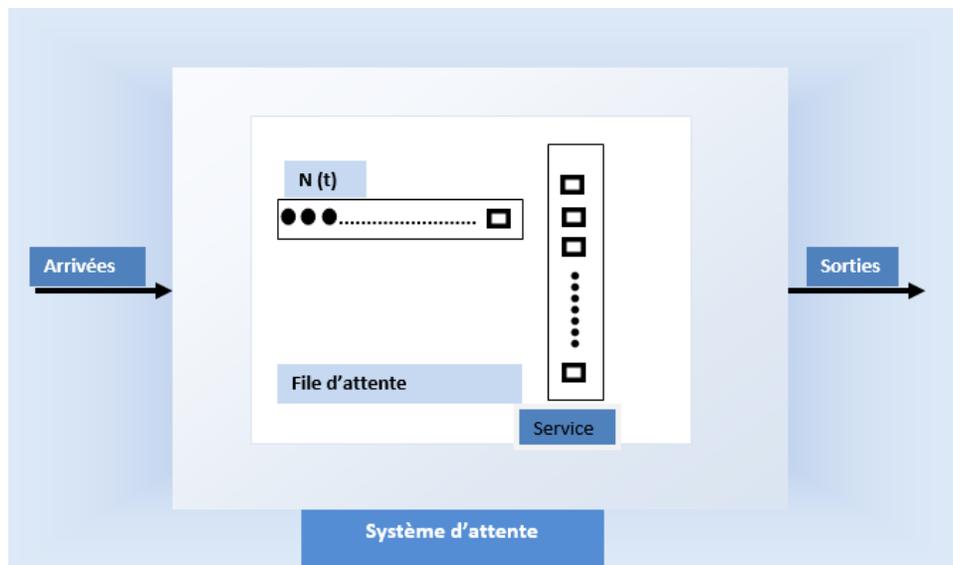


Figure 1.3: Système d'attente.

### 1.2.1 Description

on considère un système destiné à offrir un certain service, celui (personne ou objet) qui vient bénéficier d'un service est dit client et les postes de service sont appelés serveurs.

- File d'attente : "Lieu" où les clients font la queue avant d'être servis.
- Système d'attente : la file d'attente+service en cours.

L'étude de ces files d'attente porte sur la qualité et le rendement du service fourni. Le service fourni sera caractérisé par la description de :

- La file d'attente (longueur, temps d'attente,...)
- Serveurs (nombre de clients servis par période d'activité, durée d'oisiveté (répit),...)

Cette étude peut avoir deux buts:

1. L'amélioration du fonctionnement dans le cadre des structures actives et actuelles du système.
2. L'étude de l'investissement à consentir (augmentation de serveurs ou la capacité du système,...) pour améliorer la qualité et le rendement du service fourni.

## 1.3 Caractéristiques d'un système d'attente

Les caractéristiques d'un système d'attente sont:

- Loi des arrivées des clients dans le système (Poisson, G,...), cette loi sera notée L1,

- Loi des durées de service de chaque serveur (c'est la même loi de service, indépendante des arrivées), notée L2,
- Nombre de serveurs noté  $s$  ( $s \geq 1$ ),
- La capacité du système ou la longueur maximale de la file d'attente permise par le système, notée  $k$ ,
- La discipline de service, c'est à dire la façon dont un client à servir est choisi dans la file d'attente quand un guichet devient libre.

### Exemple 1.2.

- **FIFO (PAPS)** : Premier Arrivé, Premier Servi.
- **LIFO (DAPS)** : Dernier Arrivé, Premier Servi.
- **PS (SP)** : Service avec priorité.
- **RS (SA)** : Service aléatoire.

**Système ouvert [O]** : accepte tous les clients. **Système fermé [F]**: accepte des clients particuliers.

## 1.4 Notation de Kendall

Une file d'attente est la donnée des caractéristiques citées précédemment et elle est notée (L1/L2/s/k/FIFO (ou autre discipline)/[O] ou [F]).

### Remarque 1.6.

*Une file d'attente (L1/L2/s)représente par défaut une file d'attente de type : (L1/L2/s/ $\infty$  /FIFO/[O]).*

### 1.4.1 Étude de la file M/M/1

Une file d'attente M/M/1 peut être définie par le processus stochastique suivant :

$$(N_t)_{t \geq 0}$$

qui compte le nombre de personnes dans le système, il représente ainsi la taille de la file d'attente dans le système.

On rappelle que dans ce cas, les arrivées des clients sont distribués selon un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ , et que les temps de service sont indépendants (et indépendants du processus des arrivées) et suivent la loi exponentielle de paramètre  $\mu$ . L'indépendance des arrivées implique que  $(N_t)$  est un processus de Markov homogène, en particulier c'est un processus de naissance et de mort.

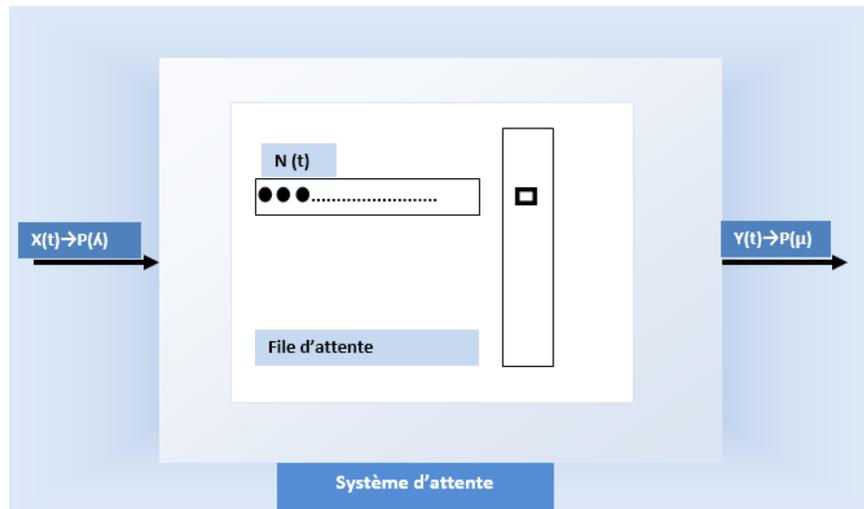


Figure 1.4: Système d'attente M/M/1.

On pose :

$N(t)$  : Nombre de clients dans le système à la date  $t$ .

$M(t)$  : Nombre de clients dans la file à la date  $t$ .

### 1.4.2 Étude du processus $(N_t)_{t \in T}$

C'est un processus de naissance et de mort (PNM) de taux  $\lambda_n$  et  $\mu_n$ ,

$\lambda_n$ : taux de naissance quand le système est à l'état  $n$ .

$\mu_n$ : taux de mort quand le système est à l'état  $n$ .

$\lambda_n$  et  $\mu_n$  sont à déterminer

On a

$$\begin{aligned}
 \lambda_n dt + o(dt) &= P[N_{t+dt} = n + 1 / N_t = n] \\
 &= P[X_{t+dt} = X_t + 1] \\
 &= P[X_{t+dt} - X_t = 1] \\
 &= P[X_{dt} = 1] = \lambda dt + o(dt) \\
 &\Rightarrow \lambda_n = \lambda.
 \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
 \mu_n dt + o(dt) &= P[N_{t+dt} = n - 1 / N_t = n] \\
 &= P[Y_{t+dt} = Y_t + 1] \\
 &= P[Y_{t+dt} - Y_t = 1] \\
 &= P[Y_{dt} = 1] = \mu dt + o(dt) \\
 &\Rightarrow \mu_n = \mu.
 \end{aligned}$$

### 1.4.3 Loi du système en régime permanent (stable)

Lorsque le système se stabilise, sa loi est donnée par :

$$p_n(t) = p_n = \begin{cases} \frac{\prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}{1 + \sum_{n \geq 1} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}, & n \geq 1, \\ \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}, & n = 0. \end{cases}$$

$$p_n(t) = p_n = \begin{cases} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{1 + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}, & n \geq 1, \\ \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}, & n = 0. \end{cases}$$

On pose:  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ .

$$p_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{(1-\rho)}, & n \geq 1, \\ 1 - \rho, & n = 0. \end{cases}$$

Donc  $p_n = \rho^n(1 - \rho)$ ,  $n \geq 0$  si  $\rho < 1$ .

### 1.4.4 Nombre moyen de clients dans le système à la date t

Le nombre moyen de clients présents dans le système à la date t se traduit mathématiquement par l'espérance qui est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} E(N_t) &= \sum_{n \geq 0} n p_n = (1 - \rho) \sum_{n \geq 0} n \rho^n \\ &= (1 - \rho) \rho \sum_{n \geq 1} n \rho^{n-1} = (1 - \rho) \rho \sum_{n \geq 1} (\rho^n)' \\ &= (1 - \rho) \rho \left( \sum_{n \geq 0} \rho^n \right)' = (1 - \rho) \rho \left( \frac{1}{1 - \rho} \right)' = (1 - \rho) \rho \frac{1}{(1 - \rho)^2} \\ &= \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \end{aligned}$$

d'où:  $\eta = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ .

### 1.4.5 Écart type $\sigma_t$

Afin de préciser un intervalle du nombre de clients exact présents dans le système à un instant donné, la moyenne à elle seule ne suffit pas. D'où le calcul de l'écart type qui est donné par :

$$\sigma_t = \sqrt{V(N_t)} \text{ et } V(N_t) = E(N_t^2) - (E(N_t))^2.$$

$$\begin{aligned} E(N_t)^2 &= \sum_{n \geq 0} n^2 P_n = \sum_{n \geq 0} n^2 \rho^n (1 - \rho) \\ &= \sum_{n \geq 0} n(n+1) \rho^n (1 - \rho) \\ &= \sum_{n \geq 0} (n(n-1) \rho^n (1 - \rho) + n \rho^n (1 - \rho)). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} (n(n-1) \rho^n (1 - \rho)) &= \sum_{n \geq 0} (n(n-1) \rho^{n-2} (1 - \rho) \rho^2) \\ &= (1 - \rho) \rho^2 \sum_{n \geq 0} n(n-1) \rho^{n-2} \\ &= (1 - \rho) \rho^2 \sum_{n \geq 0} (\rho^n)'' = (1 - \rho) \rho^2 \left( \sum_{n \geq 0} \rho^n \right)'' \\ &= (1 - \rho) \rho^2 \left( \frac{1}{(1 - \rho)^2} \right)' = \frac{2\rho^2}{(1 - \rho)^2}. \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} E(N_t)^2 &= \frac{2\rho^2}{(1 - \rho)^2} + \eta = \frac{2\rho^2}{(1 - \rho)^2} + \frac{\rho}{(1 - \rho)}, \\ \Rightarrow V(N_t) &= E(N_t)^2 - (E(N_t))^2 = \frac{2\rho^2}{(1 - \rho)^2} + \frac{\rho}{(1 - \rho)} - \frac{\rho^2}{(1 - \rho)^2} \\ &= \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\sigma_t = \frac{\sqrt{\rho}}{(1 - \rho)} \text{ et } [\eta - \rho, \eta + \rho] = \left[ \frac{\rho - \sqrt{\rho}}{(1 - \rho)}, \frac{\rho + \sqrt{\rho}}{(1 - \rho)} \right].$$

### 1.4.6 Nombre moyen de clients dans la file à la date t

Le nombre moyen de clients en attente dans la file est donné par  $E(M_t)$ ,  $M_t$  est le nombre de clients présents dans la file à la date t.

$$\begin{aligned} E(M_t) &= \sum_{n \geq 0} n P[M_t = n] = \sum_{n \geq 0} n P[N_t = n + 1] \\ &= \sum_{n \geq 0} n p_{n+1} = \sum_{n' \geq 0} (n' - 1) p_{n'} = \sum_{n' \geq 1} n' p_{n'} - \sum_{n' \geq 1} p_{n'} \end{aligned}$$

avec  $n' = n + 1$ .

Donc

$$E(M_t) = E(N_t) - (1 - p_0) = (\eta - \rho).$$

Ainsi  $\eta = E(N_t) = \frac{\rho}{(1-\rho)}$  et  $\eta_q = E(M_t) = \eta - \rho$ .

Ou bien

$$\begin{aligned} N_t &= M_t - X \Rightarrow M_t = N_t + X \\ \Rightarrow E(M_t) &= E(N_t) + E(X) = \eta + (1 - p_0) = \eta - \rho. \end{aligned}$$

Avec  $X = \begin{cases} 1 & \text{si le système est non vide} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  et  $X \rightsquigarrow \text{Bernoulli}(p)$  avec  $p = 1 - p_0 = \rho$ .

### 1.4.7 Formule de Little :

Soit  $\bar{W}$ : Temps moyen d'attente dans le système et  $\bar{W}_q$ : Temps moyen d'attente dans la file, alors :

$$\bar{W} = \frac{\bar{\eta}}{\lambda} = \frac{\text{Nombre moyen de clients dans le système}}{\text{Taux d'entre globale}},$$

$$\bar{W}_q = \frac{\bar{\eta}_q}{\lambda} = \frac{\text{Nombre moyen de clients dans la file}}{\text{Taux d'entre globale}}.$$

**Le taux d'entrée global du système = Le taux de sortie global du système**

**Preuve**

Déterminons d'abord la loi de  $W$ .

$W$ : Nombre de clients dans le système à la date t.

$[W/N(t) = n]$  coïncide avec la somme de  $(n+1)$  v.a "durée de service" notée  $D^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, n+1}$

$$[W/N(t) = n] = \sum_{i=1}^{n+1} D^i = \sum_{i=1}^{n+1} Y_i \text{ avec } Y_i \rightsquigarrow \text{exp}(\mu) = \Gamma(1, \mu).$$

La fonction de densité de la loi Gamma  $(a, \lambda)$  est donné par :

$$f(x) = \left\{ \frac{\lambda^a x^{a-1}}{\Gamma(a)} \exp^{-\lambda x} \right.$$

En posant  $a=1$  on aura:  $f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\Gamma(1)} \exp^{-\lambda x} \\ = \lambda \exp^{-\lambda x} \end{cases}$

Donc  $D^{(i)} \rightsquigarrow \exp(\mu)$

$\implies \sum_{i=1}^{n+1} D^i \rightsquigarrow \Gamma(n+1, \mu)$  car  $D^i$  indépendantes.

Alors

$$f(W \setminus N(t) = n)(t) = \begin{cases} \frac{\mu^{n+1} t^n \exp^{-\mu t}}{\Gamma(n+1)}, & t \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$f_W(t) = \sum_{n \geq 0} f_{W \setminus N_t = n}(t) \times P[N_t = n] = \mu(1 - \rho) \exp^{-\mu(1-\rho)t}$$

En posant  $\theta = \mu - \lambda$ , on aura

$$f_W(t) = \theta \exp^{-\theta t}, \quad t \geq 0.$$

Calculons maintenant  $\bar{W}$

$$W \rightsquigarrow \exp(\mu - \lambda)$$

$$\implies \bar{W} = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{(\mu - \lambda)}$$

$$\implies \bar{W} = \frac{1}{(\mu - \lambda)} = \frac{\bar{\eta}}{\lambda}, \quad (\bar{\eta} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}).$$

On a

$$\bar{W} = \bar{W}_q + \frac{1}{\mu} \implies \bar{W}_q = \bar{W} - \frac{1}{\mu}$$

$$\implies \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} - \frac{1}{\mu} = \frac{\bar{\eta}}{\mu}.$$

D'où

$$\bar{W} = \frac{\bar{\eta}}{\mu}.$$

On a aussi

$$\bar{\eta}_q = \bar{\eta} - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \rho \bar{\eta} \implies \bar{\eta} = \frac{\bar{\eta}_q}{\rho}$$

$$\implies \bar{W}_q = \frac{\bar{\eta}}{\mu} = \frac{\bar{\eta}_q}{\mu} \times \frac{\mu}{\lambda}$$

D'où

$$\bar{W}_q = \frac{\bar{\eta}_q}{\lambda}.$$

Finalement

$$\begin{cases} \bar{W} = \frac{\bar{\eta}}{\mu}, \\ \bar{W}_q = \frac{\bar{\eta}_q}{\lambda}, \end{cases}$$

qui est la formule de Little.

## 1.4.8 Caractéristiques du système liées au serveur

### Durée moyenne d'une période de répit (oisiveté) $\bar{R}$

Soit  $R$  la durée de la période de répit. Une période de répit commence à la fin du service d'un client seul dans le système et se termine lorsqu'un nouveau client arrive ou continue

tant qu'il n'y a aucune arrivée. Donc pour  $s \geq 0, s \in T$

$$P[R > s] = P[X_{t+s} = X_t] = P[X_{t+s} - X_t = 0] \stackrel{PAS}{=} P[X_s = 0] = \exp^{-\lambda s}, \quad s \geq 0,$$

$$\Rightarrow F_R(s) = P[R \leq s] = 1 - P[R > s] = \begin{cases} 1 - \exp^{-\lambda s}, & s \geq 0, \\ 0, & s = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_R(s) = \begin{cases} \lambda \exp^{-\lambda s}, & s \geq 0. \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où R suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

$$\Rightarrow \bar{R} = \frac{1}{\lambda} \text{ et } \sigma_R = \frac{1}{\lambda}.$$

### Nombre moyen de périodes de répit $\bar{A}$ (en régime permanent)

Soit une période de temps T assez longue. Sur cette période, le serveur est oisif pendant une proportion de temps p.

$$p = P[N_t = 0] = p_0 = 1 - \rho = p \text{ car } p_n = \rho^n(1 - \rho).$$

$$\text{On a donc } P \times T = \bar{A} \times \bar{R} \Rightarrow \bar{A} = \frac{(1-\rho)T}{\bar{R}} = \lambda(1 - \rho)T = (\lambda - \frac{\lambda^2}{\mu})T = E(A).$$

### Nombre moyen de périodes d'activité $\bar{B}$ (en régime permanent)

A cause de l'alternance activité-répit, on a  $A=B$  à une unité près, c'est à dire en moyenne.  $\bar{A} = \bar{B}$ .

$\bar{B}$ : Nombre moyen de période d'activités.

$$\text{Ainsi } \bar{B} = (\lambda - \frac{\lambda^2}{\mu})T.$$

### Durée moyenne d'une période d'activité $\bar{C}$

Soit C La durée d'une période d'activité. C est une v.a, et comme précédemment;

$$\bar{C} = E(C) \text{ verifie } \bar{C} \times \bar{B} = (1 - p)T \Rightarrow \bar{C} = \frac{(1-p)T}{\lambda p T} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

### Nombre moyen de clients à servir durant une période d'activité $\bar{N}_0$

$N_0$  est une v.a et en moyenne :

$$\bar{N}_0 = E(N_0) \text{ vérifie } \bar{N}_0 \times \bar{D} = \bar{C}, \quad (D : \text{Durée de service d'un client } (\exp(\mu))),$$

$$\bar{N}_0 \times \bar{D} = \bar{C} \Rightarrow N_0 = \frac{\bar{C}}{\bar{D}} = \frac{\mu}{\mu - \lambda}.$$

### Remarque 1.7.

$\bar{R}, \bar{A}, \bar{C}$  et  $\bar{N}_0$  sont appelés "paramètres ou caractéristiques du système liés au serveur".

## 1.4.9 Étude de la file M/M/1/k

On considère le modèle précédent , en supposant que la capacité du système est finie.

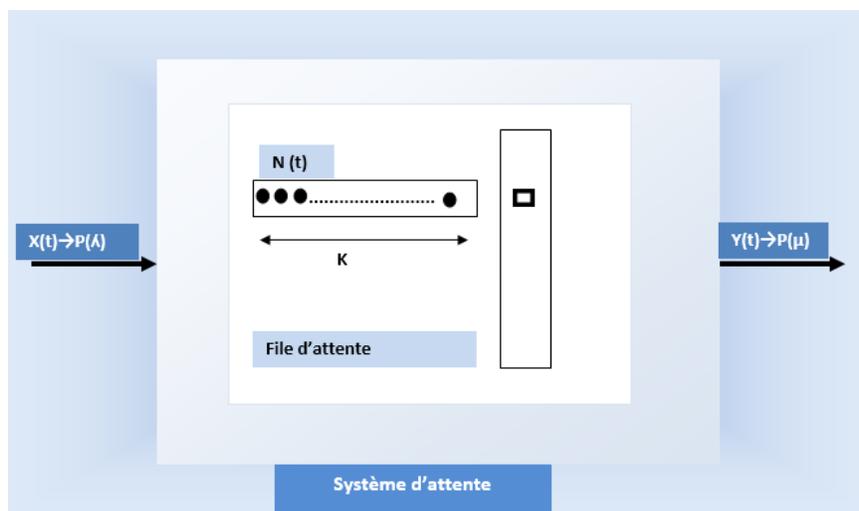


Figure 1.5: Système d'attente M/M/1/k.

Soit  $N(t)$  : Nombre de clients dans le système  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de naissance et de mort de taux  $\lambda_n$  et  $\mu_n$ .  
 Déterminons  $\lambda_n$  :

$$\begin{aligned} \lambda_n(dt) + o(dt) &= P[N_{t+dt} = n + 1 / N_t = n] \\ &= \begin{cases} P[X_{t+dt} - X_t = 1], & 0 \leq n \leq k - 1, \\ 0, & n = k, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \lambda_n(dt) + o(dt), & 0 \leq n \leq k - 1, \\ o(dt), & n = k, \end{cases} \\ \Rightarrow \lambda_n &= \begin{cases} \lambda, & 0 \leq n \leq k - 1, \\ 0, & n = k. \end{cases} \end{aligned}$$

Déterminons  $\mu_n$  :

$$\begin{aligned} \mu_n dt + o(dt) &= P[N_{t+dt} = n - 1 / N_t = n] \\ &= \begin{cases} P[Y_{t+dt} - Y_t = 1], & 1 \leq n \leq k, \\ 0, & n = 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mu_n dt + o(dt), & 1 \leq n \leq k, \\ o(dt), & n = 0, \end{cases} \\ \Rightarrow \mu_n &= \begin{cases} \mu, & 1 \leq n \leq k, \\ 0, & n = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On sait qu'en régime permanent

$$P_n(t) = P_n = \begin{cases} \frac{\prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)}{1 + \sum_{n=1}^k \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)}, & n = \overline{1, k}, \\ \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^k \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)}, & n = 0. \end{cases}$$

Si  $\rho \neq 1$

$$\begin{cases} P_n = \rho^n (1 - \rho) \times \frac{1}{1 - \rho^{k+1}}, & 0 \leq n \leq k, \rho \neq 1, \\ P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^k \rho^n} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}}, & n = 0, \rho \neq 1. \end{cases}$$

Si  $\rho = 1$

$$P_n = P_0 = \frac{1}{k + 1}, \quad 0 \leq n \leq k, \rho = 1.$$

**Remarque 1.8.**

Dans ce cas, le régime permanent s'établit car on a une somme finie, donc  $\forall \rho$  ou  $\lambda$  et  $\mu$ , cette somme existe.

### 1.4.10 Étude de la file M/M/1/k/[F]

Dans ce cas, les clients sont en nombre limité k et encore particuliers.

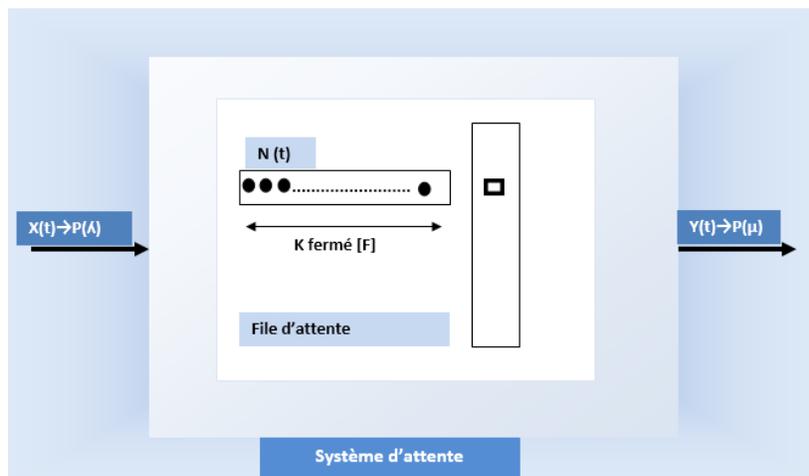


Figure 1.6: Système d'attente M/M/1/k/[F].

Donc  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de naissance et de mort de taux  $\lambda_n$  et  $\mu_n$ , avec

$$\begin{aligned} \lambda_n dt + o(dt) &= P[N_{t+dt} = n+1 / N_t = n] \\ &= C_{k-n}^1 P[X_{t+dt} - X_t = 1] = (k-n)(\lambda dt + o(dt)) \\ &= (k-n)\lambda dt + o(dt) \\ &\Rightarrow \begin{cases} (k-n)\lambda, & n = \overline{0, k-1}, \\ 0, & n = k. \end{cases} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \mu_n dt + o(dt) &= P[N_{t+dt} = n-1 / N_t = n] \\ &= \begin{cases} P[Y_{t+dt} - Y_t = 1], & 1 \leq n \leq k, \\ 0, & n = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_n dt + o(dt), & 1 \leq n \leq k, \\ o(dt), & n = 0, \end{cases} \\ &\Rightarrow \mu_n = \begin{cases} \mu, & 1 \leq n \leq k, \\ 0, & n = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc la loi en régime permanent est:

$$\begin{aligned} p_n &= \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) p_0 = \prod_{i=1}^n \left( \frac{(k-i+1)\lambda}{\mu} \right) p_0 = p_0 \rho^n \frac{k!}{(k-n)!} \\ &= p_0 \rho^n C_k^n n!, \quad \overline{n = 1, k} \end{aligned}$$

et

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^k \rho^n C_k^n n!} = \frac{1}{\sum_{n=0}^k \rho^n C_k^n n!}.$$

Donc, dans un système M/M/1/k/[F], la loi est donnée par:

$$p_n = \begin{cases} p_0 \rho^n C_k^n n!, & n = \overline{1, k}, \\ \frac{1}{\sum_{n=0}^k \rho^n C_k^n n!}, & n = 0. \end{cases}$$

### 1.4.11 Étude de la file M/M/s

#### Description du modèle

C'est un système d'attente qui comporte une seule file et s serveurs (guichets). Les clients arrivent au système suivant un processus de Poisson de taux  $\lambda$ . Le taux de service pour chaque serveur est exponentiel de paramètre  $\mu$  (ces temps sont indépendants entre

eux ainsi que du processus des entrées).

Ce présent modèle, qui est notre point de recherche, sera détaillé dans le chapitre qui suit (Modélisation de files d'attente).

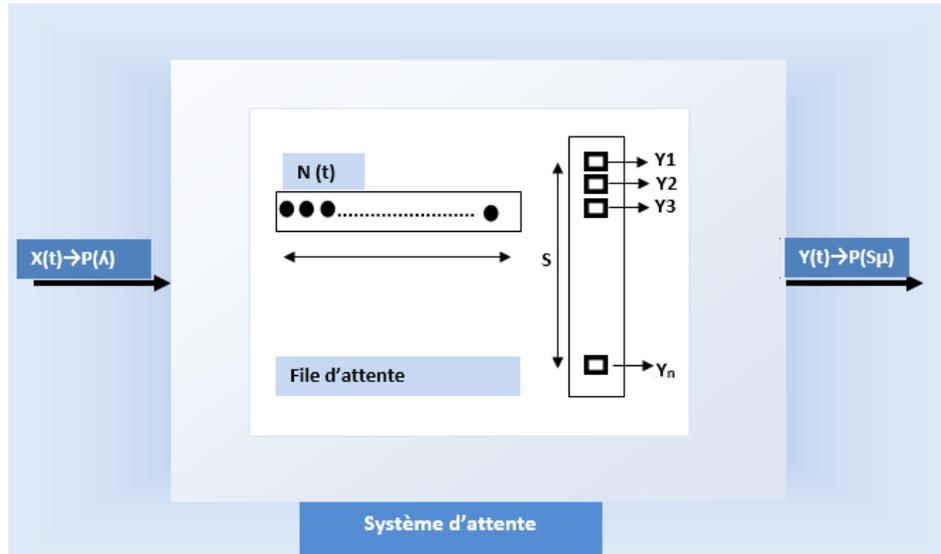


Figure 1.7: Système d'attente M/M/s.

Soit  $N(t)$  : Nombre de clients dans le système (la file et les guichets), sous les hypothèses précédentes.

$N(t)$  est un processus de naissance et de mort de taux  $\lambda_n$  et  $\mu_n$ .

Sa loi en régime permanent ( $\lambda < s\mu$ ) est donnée par

$$p_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{\rho}{s-\rho}}, & 0 \leq n < s, \\ \frac{\frac{\rho^s}{s!} (\frac{\rho}{s})^{n-s}}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{\rho}{s-\rho}}, & n \geq s, \\ p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)}}. \end{cases}$$

où  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ .

#### 1.4.12 Étude de la file M/M/ $\infty$

Dans ce cas, le nombre de serveurs n'est pas fini.

$N(t)$  : Nombre de clients dans le système ;  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un P.N.M de taux  $\lambda_n$  et  $\mu_n$  à déterminer.

On a le taux de naissance  $\lambda_n$  qui vérifie

$$\lambda_n(dt) + o(dt) = P[N_{t+dt} = n+1 | N_t = n]$$

$$P[N_{t+dt} = n+1 | N_t = n] = P[X_{t+dt} = X_t + 1] = P[X_{t+dt} - X_t = 1]$$

$$= P[X_{dt} = 1] = \lambda(dt) + o(dt)$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \lambda, \quad \forall n \geq 0.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \mu_n dt + o(dt) &= P[N_{t+dt} = n-1 / N_t = n] \\ P[N_{t+dt} = n-1 / N_t = n] &= nP[Y_{t+dt} - Y_t = 1] \\ &= np[Y_{dt} = 1] = n\mu dt + o(dt) \\ &\Rightarrow \mu_n = n\mu, \quad \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

**Loi de  $(N_t)_{t \geq 0}$  en régime stationnaire**

$$\begin{cases} p_n = \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) p_0, & n \geq 1, \\ p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right)}, & n = 0. \end{cases}$$

Le régime stationnaire s'établit si  $\sum a_n < +\infty$  où  $a_n = \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right)$ .

On a  $\sum_{n \geq 1} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{\rho^n}{n!} < \sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!} = \exp \rho < +\infty$ .

Donc le régime permanent s'établit toujours.

Ainsi

$$\begin{cases} p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 = \frac{\rho^n}{n!} \exp^{-\rho}, & n \geq 1, \\ p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\rho^n}{n!}}, & n = 0. \end{cases}$$

**Nombre de clients dans le système**

$$\bar{\eta} = E(N_t) = \sum_{n \geq 0} np_n = \sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!} \exp^{-\rho} = \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

**Temps moyen d'attente d'un client dans le système  $\bar{W}$**

$$\bar{W} = \frac{\bar{\eta}}{\lambda} = \frac{1}{\mu}.$$

# Chapitre 2

## Modélisation de files d'attente

### 2.1 Introduction

La modélisation est le procédé par lequel on utilise des expressions mathématiques pour décrire une situation quantitative réelle d'un système, prédire son évolution dans le futur, et optimiser ses performances. Modéliser consiste donc à écrire en notations mathématiques ce qui est exprimé d'abord en mots, en faisant intervenir des variables au besoin. Dans notre cas, nous allons étudier l'organisation des pistes d'atterrissage dans un aéroport.

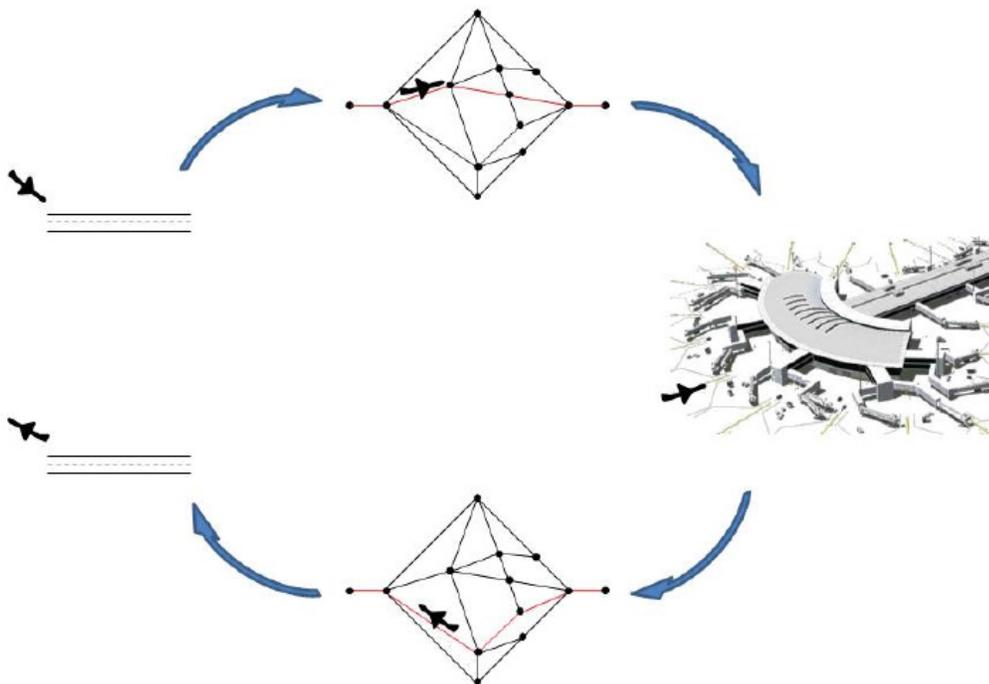


Figure 2.1: Rotation des Avions.

## 2.2 Modélisation de systèmes

La modélisation consiste à définir les points suivants:

- **Le système :** existant (ou pas) auquel se réfère le modèle.
- **Le modèle:** représentation abstraite du système (simplifié).
- **L'objectif:** le(s) but(s) pour lequel le modèle a été élaboré.
- **Critère de rentabilité:** un critère économique qui justifie l'utilisation du modèle.

## 2.3 Etude de cas

Suite à une conversation avec l'un des cadres du Centre National de Coordination Opérationnelle (CCO) sur la gestion des pistes d'atterrissage de l'aérodrome d'Alger. On est parvenu à avoir plus de détails sur ce dernier :

- Le hall d'entrée des avions possède 12 pistes.
- Les arrivées des avions sont poissonniennes du taux  $\lambda$ , et les durées des services sont exponentielles de paramètre  $\mu$ .

L'équipe du Centre National de Coordination Opérationnelle est confronté à un problème de saturation dans l'aérodrome engendrant des temps d'attente élevés dans l'orbite, et par conséquent des retards aériens. C'est là qu'intervient notre étude.

En effet, notre objectif est d'éviter le risque de saturation dans l'aérodrome et ainsi minimiser le temps de séjour des avions dans l'orbite.

## 2.4 Position du problème

Il s'agit d'un problème de modélisation de fins d'atterrissage des avions dans un aérodrome. Celle-là peut être modélisée par deux paramètres A et B.

**A:** indique le flux d'atterrissage des avions, il sera modélisé au moyen d'une suite de variables aléatoires  $(\tau_n)_{n \geq 0}$  vérifiant:

1.  $\tau_0 = 0$

2.  $\forall n \geq 1, \tau_n \leq \tau_{n+1}$

Où  $\tau_n$  est l'instant d'atterrissage du nième avion. Notre étude sera centrée plus particulièrement sur le cas où la suite  $(T_n = \tau_{n+1} - \tau_n)_{n \geq 0}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

$T_n$  sont les inter-arrivées qui sont exponentielles de paramètre  $\lambda$ .

**B:** représente la durée d'occupation d'un avion d'une piste d'atterrissage.

Elle peut être déterministe ou aléatoire. Dans le cas aléatoire, il est nécessaire de distinguer la loi de ces variables et la façon dont elles dépendent les unes des autres.

On suppose que ces durées d'occupation (qui sont les durées de service ou inter-sorties) sont exponentielles de paramètre  $\mu$ . La sortie étant le décollage de l'avion.

## 2.5 Détermination des lois

### 2.5.1 Loi des arrivées

Au premier abord, nous intéressons aux arrivées des avions. Dans ce contexte nous supposons que les avions se présentent dans l'aérodrome aléatoirement et indépendamment les unes des autres selon un processus de poisson du taux  $\lambda$ .

En effet, en raison d'absence de mémoires des lois exponentielles, nous fixons un réel  $\lambda \geq 0$ , et supposons de modéliser la loi commune des temps d'inter-arrivées  $(T_n)_{n \geq 1}$  par une loi exponentielle de paramètre  $\lambda \geq 0$ .

Dans ce contexte, le paramètre  $\lambda$  représente l'inverse du temps moyen séparant deux arrivées consécutives d'avions. Supposant que la taille de la file d'attente n'est pas limitée, le nombre d'avions entrés (sans prendre en compte les sorties) à un instant  $t \geq 0$  est donné par la relation:

$$N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{[0,t]}(T_n), \quad t \geq 0. \quad (2.1)$$

On rappelle que le processus  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson du taux  $\lambda$ . En particulier, il s'agit d'un processus continu dont les accroissements  $(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ , pour une suite  $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$  donnée, sont indépendants et suivent la loi de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda t_1$ ,  $\lambda(t_2 - t_1)$ , ...,  $\lambda(t_n - t_{n-1})$ .

### 2.5.2 Loi de service

Si on considère les intervalles de temps qui s'écoulent entre les évènements successifs d'une loi de Poisson du taux  $\lambda > 0$ , on s'aperçoit qu'ils suivent une loi exponentielle du taux  $\lambda$ , où  $\lambda$  est le nombre d'avions (clients) servis par unité de temps. Il se trouve que la modélisation des services (fins d'atterrissages) passe également par une loi exponentielle.

On retrouve la même formule que dans le cas des arrivées mais avec des paramètres différents:  $U(x) = \mu \exp^{-\mu x}$  est la densité des inter-sorties ou des durées d'occupations  $D$  de la piste.

$D$  : désigne durée de temps séparant deux évènements consécutifs (décollages consécutifs).

$\mu$  : désigne le nombre d'avion servis par unité de temps.

## 2.6 Analyse mathématiques de la file M/M/s

La notation mathématique de la file d'attente M/M/S signifie:

- **M**: Arrivées Poissonniennes (Markovienne).
- **M**: Service exponentielle (Markovien).
- **s**: Nombre de pistes d'atterrissage dans l'aérodrome.

### 2.6.1 Étude du processus $(N_t)_{t \geq 0}$

Soit  $N_t$  : le nombre d'avions dans le système (pistes et orbite).

On a le taux de naissance  $\lambda_n$  qui vérifie

$$\begin{aligned} \lambda_n dt + o(dt) &= P[N_{t+dt} = n + 1 / N_t = n] \\ P[N_{t+dt} = n + 1 / N_t = n] &= P[\text{d'avoir une entrée de plus pendant un laps de temps } dt] \\ &= P[X_{t+dt} = X_t + 1] = P[X_{t+dt} - X_t = 1] \\ &= P[X_{dt} = 1] = \lambda(dt) + o(dt) \\ &\Rightarrow \lambda_n(t) = \lambda, \quad \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Le taux de mort  $\mu_n$  est vérifié

$$\begin{aligned} \mu_n dt + o(dt) &= P[N_{t+dt} = n - 1 / N_t = n] \\ P[N_{t+dt} = n - 1 / N_t = n] &= P[\text{d'avoir une sortie de plus pendant un laps de temps } dt] \\ &= \begin{cases} 0, & n = 0, \\ A, & 1 \leq n \leq s, \\ B, & n \geq s. \end{cases} \end{aligned}$$

**Cas 1:**  $1 \leq n \leq s$

$$\begin{aligned} A &= P[\text{d'avoir une sortie parmi les } n \text{ avions en pistes}] \\ &= C_n^1 P[\text{d'avoir une sortie donnée}] \\ &= C_n^1 P[Y_{i_0}(t + dt) = Y_{i_0}(t) + 1]. \end{aligned}$$

On a  $Y_i \rightsquigarrow P(\mu)$ ,  $\forall i = \overline{1, s}$ , donc

$$\begin{aligned} A &= nP[Y_{i_0}(dt) = 1] = n(\mu dt + o(dt)) = n\mu dt + o(dt) \\ &\Rightarrow \mu_n = n\mu. \end{aligned}$$

**Cas 2:**  $n \geq s$

$$\begin{aligned} B &= P[\text{d'avoir une sortie parmi les } s \text{ avions en pistes}] \\ &= C_s^1 P[\text{d'avoir une sortie donnée}] \\ &= C_s^1 P[Y_j(t + dt) = Y_j(t) + 1] = sP[Y(dt) = 1] \end{aligned}$$

$$= s(\mu dt + o(dt)) = s\mu dt + o(dt)$$

$$\Rightarrow \mu_n = s\mu.$$

Finalement

$$\mu_n = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ n\mu, & 1 \leq n \leq s, \\ s\mu, & n \geq s. \end{cases}$$

Ainsi:  $\mu_n = (n \wedge s)\mu, \quad \forall n \geq 0.$

Donc  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de naissance et de mort de taux  $\lambda_n = \lambda$  et  $\mu_n(t) = (n \wedge s)\mu, \quad \forall n \geq 0.$

Déterminons maintenant Loi de  $(N_t)_{t \geq 0}$  en régime permanent (quand il existe).

On a

$$p_n(t) = p_n = \begin{cases} \frac{\prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right)}{1 + \sum_{n \geq 1} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right)}, & n \geq 1, \\ \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right)}, & n = 0. \end{cases}$$

**Cas 1:**  $1 \leq n \leq s$

$$p_n = \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) p_0 = \frac{\lambda}{1\mu} \frac{\lambda}{2\mu} \frac{\lambda}{3\mu} \dots \frac{\lambda}{n\mu} p_0$$

$$= \frac{\rho^n}{n!} p_0, \quad \forall n = \overline{1, s}.$$

**Cas 2:**  $n > s$

$$p_n = \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) p_0$$

$$= \prod_{i=1}^s \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) p_0 \times \prod_{i=s+1}^n \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) p_0$$

$$= \left( \frac{\lambda}{1\mu} \frac{\lambda}{2\mu} \frac{\lambda}{3\mu} \dots \frac{\lambda}{s\mu} p_0 \right) \times \left( \frac{\lambda}{s\mu} \frac{\lambda}{s\mu} \frac{\lambda}{s\mu} \dots \frac{\lambda}{s\mu} p_0 \right)$$

$$= \frac{\lambda^s}{s! \mu^s} \frac{\lambda^{n-s}}{s^{n-s} \mu^{n-s}} p_0 = \frac{\lambda^n}{\mu^n} \frac{1}{s! s^{n-s}} p_0$$

$$= \rho^n \frac{1}{s! s^{n-s}} p_0 = \frac{\rho^s}{s!} \left( \frac{\rho}{s} \right)^{n-s} p_0, \quad n > s.$$

On aura donc la stabilité si :

$$\sum_{n \geq 1} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^s \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) + \sum_{n \geq s+1} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) < +\infty.$$

Il est clair que  $\sum_{n=1}^s \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right)$  est une somme finie.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq s+1} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) &= \sum_{n \geq s+1} \prod_{i=1}^s \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) \prod_{i=s+1}^n \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) \\
&= \sum_{n \geq s+1} \frac{\rho^s}{s!} \left( \frac{\rho}{s} \right)^{n-s} = \frac{\rho^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{+\infty} \left( \frac{\rho}{s} \right)^{n-s} \\
&= \frac{\rho^s}{s!} \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{\rho}{s} \right)^k, \quad k = n - s, \\
&= \frac{\rho^s}{s!} \sum_{k \geq 1} (\widehat{\rho})^k, \quad \widehat{\rho} = \frac{\rho}{s}.
\end{aligned}$$

On sait que

$$\sum_{k \geq 1} (\widehat{\rho})^k < +\infty \quad \text{si } \widehat{\rho} < 1 \quad \text{i.e } \rho < s \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\mu} < s \Leftrightarrow \lambda < \mu s \text{ et donc}$$

$$\frac{\rho^s}{s!} \sum_{k \geq 1} (\widehat{\rho})^k = \frac{\rho^s}{s!} \widehat{\rho} \frac{1}{1-\widehat{\rho}} = \frac{\rho^{s+1}}{s!s} \frac{s}{1-\rho} = \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)}.$$

Ainsi si  $\lambda < s\mu$ , le regime permanent s'établit et  $p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right)}$  et

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 1} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) &= \sum_{n=1}^s \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) + \sum_{n \geq s+1} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) \\
&= \sum_{n=1}^s \frac{\lambda}{1\mu} \frac{\lambda}{2\mu} \cdots \frac{\lambda}{n\mu} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)} \\
&= \sum_{n=1}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)} \\
\Rightarrow p_0 &= \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)}}.
\end{aligned}$$

Donc, dans un système M/M/s, la loi est donnée par :

$$p_n = \begin{cases} \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{\rho}{s-\rho}}, & 0 \leq n \leq s, \\ \frac{\frac{\rho^s}{s!} \left( \frac{\rho}{s} \right)^{n-s}}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{\rho}{s-\rho}}, & n \geq s. \end{cases}$$

#### Remarque 4

Pour  $n \geq s$ , on a  $p_n = p_0 \frac{\rho^s}{s!} \left( \frac{\rho}{s} \right)^{n-s}$ .

Si on pose  $n = s + i$ ,  $i=0,1,2,\dots$

$$p_n = p_{s+i} = \frac{\rho^s}{s!} \frac{\left( \frac{\rho}{s} \right)^i}{\sum_{k=0}^s \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{s+i}}{s!(s-\rho)}} \quad i=0,1,2,\dots \text{ avec } \lambda < \mu s \text{ ( ou } \rho < s).$$

## 2.6.2 Carractéristiques ou performances du système liées aux avions

### 2.6.2.1 Risque de saturation

C'est la probabilité que toutes les pistes d'atterrissage soient occupées, autrement dit, le nombre d'avions qui arrivent est supérieur ou égal au nombre de pistes d'atterrissage. Soit  $\pi(\rho, s)$  la probabilité qu'un avion qui arrive attende en orbite;

$$\begin{aligned}\pi(\rho, s) &= P[N_t \geq s] = \sum_{i \geq 0} P[N_t = s + i] = \sum_{i \geq 0} p_{s+i} \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} p_0 \frac{\rho^s}{s!} \left(\frac{\rho}{s}\right)^i = p_0 \frac{\rho^s}{s!} \sum_{i=0}^{+\infty} (\widehat{\rho})^i, \quad \widehat{\rho} = \frac{\rho}{s} \\ &= p_0 \frac{\rho^s}{s!} \frac{1}{1 - \widehat{\rho}} \\ \Rightarrow \pi(\rho, s) &= p_0 \frac{\rho^s}{s!} \frac{s}{s - \rho}.\end{aligned}$$

### 2.6.2.2 Nombre moyen d'avions en orbite ( $\eta_q$ )

Lorsque les pistes d'atterrissage sont pleinement occupées, autrement dit, le nombre d'avions dans l'aérodrome égale au nombre de pistes d'atterrissage, l'arrivée de tout nouvel avion rejoint l'orbite.

On a  $N(t) = M(t) + s$ , dans le cas de saturation, avec

**N(t)**: Nombre d'avions dans le système.

**M(t)**: Nombre d'avions en orbite.

**s**: nombre de pistes d'atterrissage (donc d'avions sur ces pistes).

Ainsi

$$\begin{aligned}\overline{\eta_q} &= EM(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} k P[M_t = k] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k P[N_t = k + s] = \sum_{k \geq 0} k p_{k+s} = \sum_{i \geq 0} i p_{i+s} \\ &= \sum_{i \geq 0} i \frac{\rho^{s+i}}{s! s^i} p_0 = \frac{\rho^{s+1}}{s! s} p_0 \sum_{i \geq 1} i \frac{\rho^{i-1}}{s^{i-1}} \\ &= p_0 \frac{\rho^{s+1}}{s! s} \left( \sum_{i \geq 1} i (\widehat{\rho})^{i-1} \right) \text{ avec } \widehat{\rho} = \frac{\rho}{s} \\ &= p_0 \frac{\rho^{s+1}}{s! s} \sum_{i \geq 0} (\widehat{\rho}^i)' = p_0 \frac{\rho^{s+1}}{s! s} \left( \frac{1}{1 - \widehat{\rho}} \right)' \\ &= p_0 \frac{\rho^{s+1}}{s! s} \frac{1}{(1 - \widehat{\rho})^2} = p_0 \frac{\rho^s}{s!} \frac{s}{s - \rho} \frac{\rho}{s - \rho}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{\eta}_q = \pi(\rho, s) \frac{\rho}{s - \rho}.$$

### 2.6.2.3 Temps moyen d'attente d'un avion dans l'orbite ( $\bar{W}_q$ )

Le temps de séjour d'un avion en orbite  $W_q$  est l'intervalle de temps aléatoire qui sépare l'arrivée en orbite et l'atterrissage de celui-ci, ce temps de séjour en orbite a pour moyen:

$$\bar{W}_q = \frac{1}{s\mu - \lambda}.$$

**Preuve:**

On note par:

$W$  : temps de séjour dans l'aérodrome.

$W_q$  : temps de séjour dans l'orbite.

$W_q = W/\text{saturation } [N_t \geq s]$

$$F_{W_q}(t) = P[W < t / N_t \geq s] = \frac{P[W < t / N_t \geq s]}{p[N_t \geq s]} = \sum_{i \geq 0} \frac{P[W < t, N_t = s+i]}{\pi(\rho, s)} = \frac{A}{\pi(\rho, s)}$$

$$A = \sum_{i \geq 0} P[W < t / N_t = s+i] P[N_t = s+i] = \sum_{i \geq 0} F_{W/N_t = s+i}(t) p_{s+i}$$

$$\Rightarrow f_{W_q}(t) = F'_{W_q}(t) = \frac{\sum_{i \geq 0} f_{(W/N_t = s+i)} p_{s+i}}{\pi(\rho, s)}$$

$f_{W/N_t = s+i}(t)$  : loi de  $W/[N_t = s+i]$  est le temps d'attente d'un avion dans le système sachant qu'il y a déjà  $s+i$  avions dans le système, donc

$W/[N_t = s+i]$  est une somme de  $i+1$  variables qui sont les inter-sorties globales. Ainsi

$W/N_t = s+i \rightsquigarrow \Gamma(i+1, s\mu)$ ,

$$\Rightarrow f_{W/N_t = s+i}(t) = \begin{cases} \frac{(s\mu)^{i+1}}{i!} \exp(-s\mu t) t^i, & t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc

$$f_{W_q}(t) = \frac{\sum_{i \geq 0} \left(\frac{s\mu}{i!}\right)^{i+1} \exp(-s\mu t) t^i \frac{\rho^{s+i}}{s^i s!} p_0}{\Pi}$$

$$= \frac{\frac{s\mu \exp(-s\mu t)}{s!} \rho^s p_0 \sum_{i \geq 0} \frac{(s\mu + \rho)^i}{i!} t^i}{\Pi}$$

$$= \frac{\frac{s\mu \rho^s p_0}{s!} \exp(\lambda - s\mu)t}{\pi(\rho, s)} = \frac{\frac{s\mu \rho^s p_0}{s!} \exp^{-(s\mu - \lambda)t}}{\frac{\rho^s s}{s!(s-\rho)} p_0}$$

$$= \begin{cases} (s\mu - \lambda) \exp^{-(s\mu - \lambda)t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$\Rightarrow W_q \rightsquigarrow \exp(s\mu - \lambda)$

D'où; le temps d'attente moyen est

$$\overline{W}_q = \frac{1}{s\mu - \lambda}.$$

#### 2.6.2.4 Temps moyen de séjour d'un avion dans l'aérodrome ( $\overline{W}$ )

Le temps de séjour  $W$  d'un avion dans l'aérodrome, est l'intervalle de temps aléatoire qui sépare son arrivée dans l'orbite et sa sortie de l'aérodrome, le temps moyen de séjour dans l'aérodrome est obtenu directement en utilisant la formule de Little.

On a:

$$\overline{W} = \frac{\overline{\eta}}{\Lambda} = \frac{\overline{\eta}}{\lambda}$$

car  $\Lambda = \sum_{i \geq 0} \lambda_i p_i = \lambda \sum_{i \geq 0} p_i = \lambda$ .

$$\Rightarrow \overline{W} = \frac{\overline{\eta}_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \overline{W}_q + \frac{1}{\mu}.$$

### 2.6.3 Caractéristiques liées aux serveurs

#### 2.6.3.1 Nombre moyen de pistes occupées ( $\overline{N}_0$ )

Soit  $N_0$  ce nombre et soit une période de temps d'activité globale  $T$ . En régime stable (permanent), durant cette période, le système voit entrer, servir et sortir, en moyenne  $\lambda T$  avions (car le processus des entrées est poissonnien de taux  $\lambda$ ), c-à-d  $X_T \rightsquigarrow \rho(\lambda T)$ , donc sa moyenne est son paramètre  $\lambda T$ . Et durant cette période  $T$ , la durée de service moyenne disponible est égale à  $sT$ , mais dont les avions n'utilisent que  $\lambda T \frac{1}{\mu} = \rho T$ .

Donc  $\overline{N}_0 T$  est le temps réellement passé, c-à-d

$$\overline{N}_0 T = \rho T \Rightarrow \overline{N}_0 = \rho.$$

#### 2.6.3.2 Durée moyenne d'une période de répit (oisiveté) $\overline{R}$

Soit  $R$ : v.a durée d'une période de répit. Cette période de répit commence à la fin de service d'un avion seul dans l'aérodrome et s'achève lorsqu'un nouvel avion arrive dans l'aérodrome, ou continue tant qu'aucun avion n'arrive.

Alors étant donné que le processus des arrivées est poissonnien de taux  $\lambda$ , donc la probabilité qu'il n'ait aucune arrivée pendant un laps de temps  $s$ ,  $s \in T$  est égale à:

$$\begin{aligned} P[R > s] &= P[X_{t+s} = X_t] = P[X_{t+s} - X_t = 0] = \\ &= P[X_s = 0] = \exp^{-\lambda s}, \quad s \geq 0. \end{aligned}$$

Donc

$$F_R(s) = P[R \leq s] = 1 - P[R > s] = \begin{cases} 0, & s < 0 \\ 1 - \exp^{-\lambda s}, & s \geq 0. \end{cases} \Rightarrow f_R(s) = \begin{cases} \lambda \exp^{-\lambda s}, & s \geq 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où R suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

Alors le temps de répit moyen est

$$\bar{R} = \frac{1}{\lambda}.$$

Ceci est valable en régime permanent et transitoire.

### 2.6.3.3 Nombre moyen de périodes de répit $\bar{A}$ (en régime permanent)

Soit  $A$  ce nombre de période de répits,  $T$  la période d'activité globale. Sur cette période  $T$ , la piste sera inoccupée pendant une proportion de temps  $p$  qui égale à

$$p = P[N_t = 0] = p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)}}.$$

Ainsi le nombre moyen de période de répits est égale à

$$\bar{A} = \mathbb{E}(A) = \frac{pT}{\bar{R}} = \frac{\frac{1}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)}} T}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda T}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)}},$$

(car  $\bar{R} \bar{A} = pT$ ).

### 2.6.3.4 Nombre moyen de périodes d'activité $\bar{B}$

À cause de l'internance répit-activité, il y a en moyenne un nombre de périodes de répit égale (à une unité près), au nombre de périodes d'activité ( $A=B$ ), c'est à dire en moyenne  $\bar{A} = \bar{B}$ .

$\bar{B}$  : Nombre moyen de période d'activités.

Ainsi

$$\bar{B} = \frac{\lambda T}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)}}.$$

### 2.6.3.5 Durée moyenne d'une période d'activité $\bar{C}$

Si la piste est inoccupée pendant une proportion de temps,

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)}},$$

elle sera active pendant une proportion

$$1 - p_0 = \frac{\sum_{n=1}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)}}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)}}, \text{ du temps } T.$$

Soit  $C$  la durée d'une période d'activité.  $C$  est une v.a et comme précédemment;  
 $\bar{C} = \mathbb{E}(C)$ , vérifie

$$\bar{C} = \frac{(1-p_0)T}{\bar{B}} = \frac{\sum_{n=1}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)} T}{\frac{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)}}{\lambda T}} = \frac{\sum_{n=1}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)}}{\lambda}.$$

### 2.6.3.6 Nombre moyen des avions servis par période d'activité $\bar{F}$

Soit  $F$  le nombre d'avions servis par période d'activité et  $D$  la durée d'occupation d'une piste par un avion, alors

$$\bar{F} \times \bar{D} = \bar{F} \times \left(\frac{1}{\mu}\right) = \bar{C}$$

$$\Rightarrow \bar{F} = \mathbb{E}(F) = \mu \bar{C} = \frac{\sum_{n=1}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)}}{\lambda} \times \mu = \frac{\sum_{n=1}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)}}{\rho}.$$

#### Remarque 2.1.

*Dans ce chapitre, nous avons fait une modélisation de la file d'attente dans le cas de gestion des avions dans un aéroport et le calcul de ses divers performances liées aux avions et celles liées aux serveurs. Dans le but d'étudier au mieux ce système, nous allons implémenter des algorithmes dans le chapitre suivant pour avoir des illustrations numériques et graphiques de ses performances.*

# Chapitre 3

## Simulation de files d'attente

### Introduction

La simulation est une méthode de mesure et d'étude consistant à remplacer un système par un modèle plus simple dans l'objectif d'étudier son comportement, estimer ses caractéristiques, et décrire son évolution en utilisant comme moyen l'ordinateur.

Dans notre cas, on souhaite minimiser le risque de saturation et le temps d'attente des avions en orbite, à cet effet nous avons opté pour une simulation permettant d'éclairer le fonctionnement du système dans son état et d'en tirer des constats.

Pour ce faire, nous avons opté pour les méthodes de générations et de la simulation déjà évoquées dans le chapitre précédent. En utilisant comme outil le logiciel Matlab.

Pour bien décrire cette simulation de files d'attente, nous avons structuré ce présent chapitre en deux sections:

- Section 1: Simulation et implémentation de files d'attente.
- Section 2: Illustrations numériques et graphiques.

Cette première section présentera la simulation de files d'attente; simulation de la loi des arrivées, simulation du nombre moyen d'avions en orbite, simulation de temps moyen d'attente en orbite, simulation du risque de saturation.

### 3.1 Simulation et implémentation

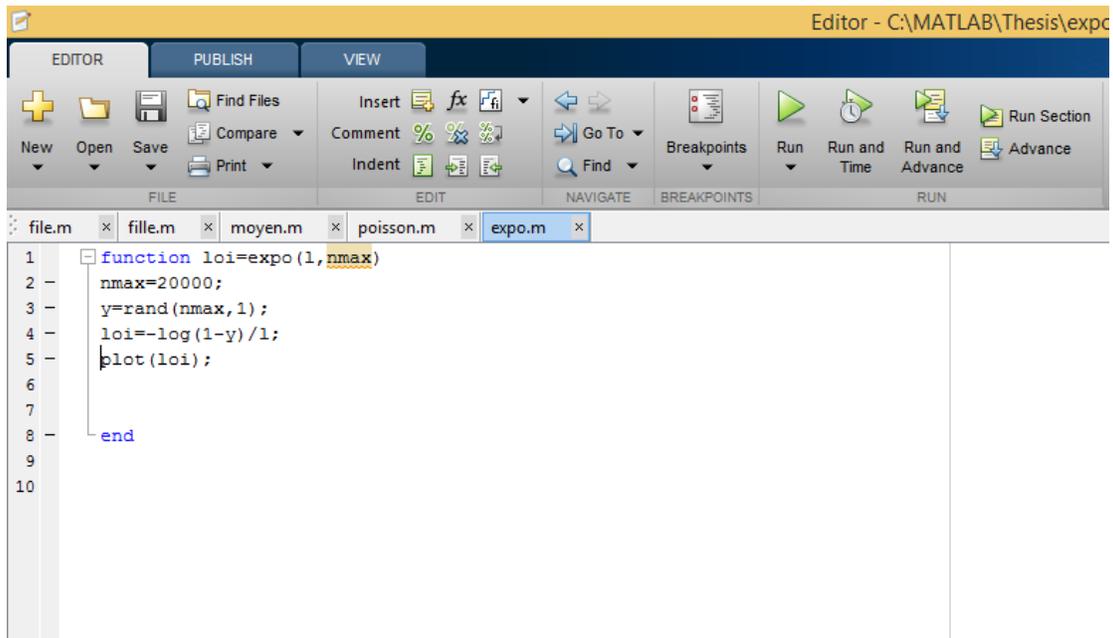
#### 3.1.1 Simulation de la loi des arrivées

Pour réaliser le générateur de poisson, il faut passer par le générateur de loi exponentielle. Nous créons en premier temps la fonction exponentielle, puis la fonction qui génère les instants d'arrivées.

D'après le chapitre précédent (2.1)

$$N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{[0,t]}(T_n), \quad t \geq 0.$$

## 1. Générateur de la loi exponentielle

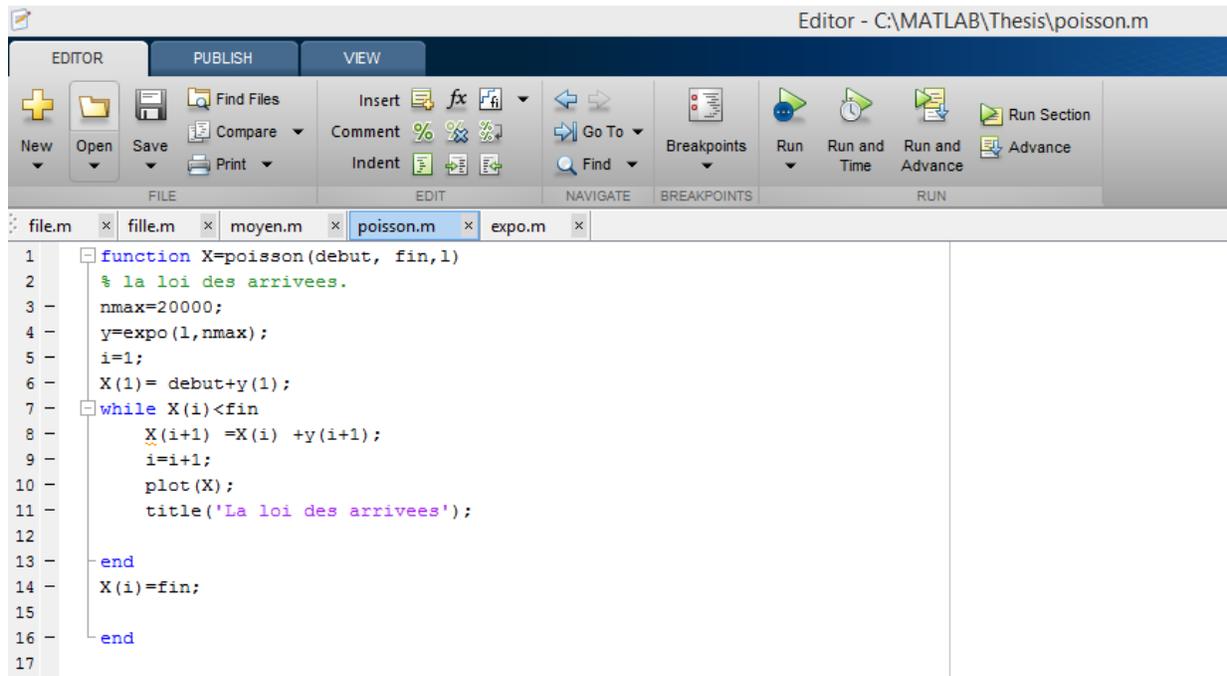


The screenshot shows the MATLAB Editor interface with the following code in the 'expo.m' file:

```
1 function loi=expo(1,nmax)
2     nmax=20000;
3     y=rand(nmax,1);
4     loi=-log(1-y)/1;
5     plot(lois);
6
7
8 end
9
10
```

Figure 3.1: Générateur de la loi exponentielle.

## 2. La loi des arrivées



The screenshot shows the MATLAB Editor interface with the following code in the 'poisson.m' file:

```
1 function X=poisson(debut, fin,1)
2     % la loi des arrivées.
3     nmax=20000;
4     y=expo(1,nmax);
5     i=1;
6     X(1)= debut+y(1);
7     while X(i)<fin
8         X(i+1)=X(i) +y(i+1);
9         i=i+1;
10        plot(X);
11        title('La loi des arrivées');
12
13    end
14    X(i)=fin;
15
16 end
17
```

Figure 3.2: Loi des arrivées.

Regardons maintenant le résultat de la simulation avec:

$\lambda = 9$ ,

instant de départ = 0,

instant de fin = 50.

Le résultat apparait dans la figure suivante:

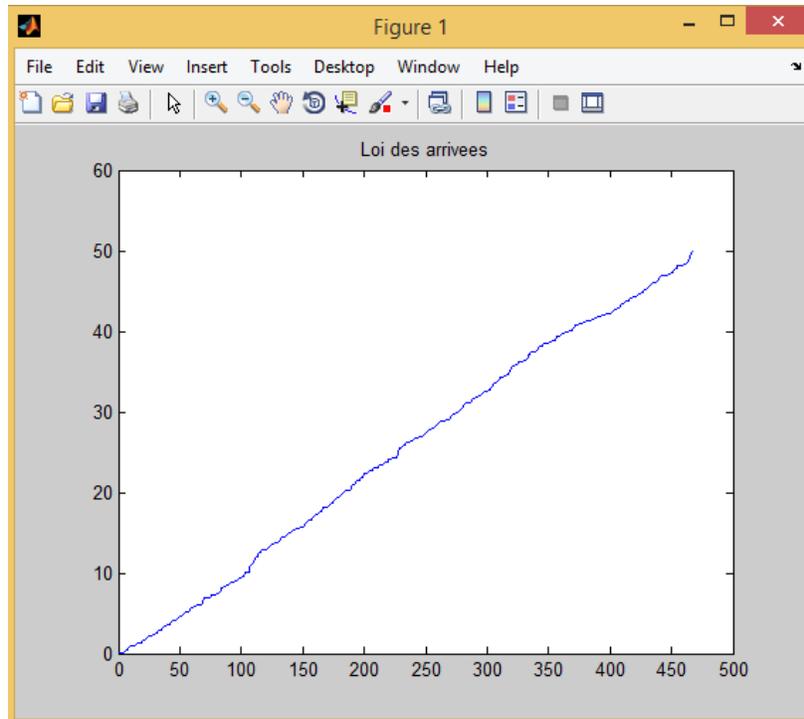


Figure 3.3: Loi des arrivées.

- Cette figure nous décrit la variation de la loi des arrivées en fonction de temps (t), le nombre d'avions ne cesse pas d'augmenter entre 0 et 50.

### 3.1.2 Simulation du risque de saturation

Les arrivées des avions sont Poissoniennes de taux  $\lambda = 10$ . Nous cherchons la valeur de  $s$ , nombre de pistes pour que la probabilité qu'un avion attende moins de 5 minutes soit supérieure à 0.9, soit la probabilité qu'un avion attende plus de 5 minutes soit inférieure à 0.1. Son programme et les résultats de simulation pour  $\lambda = 10$ , débit= 2 (nombre moyen de requêtes traitées par unité de temps) et  $X= 0.22$  (durée de service exponentielle de moyenne 0.22) sont:

```

7 function nbpiste = piste( debut, fin, debit, x )
8     lambda = 10;
9     arrivees = poisson( debut, fin, lambda );
10    for nb= 2: 14
11        pistess = zeros(1,nb);
12        quantites = expo(x,size(arrivees,2));
13        tempsTraitement = quantites / debit;
14        sorties = zeros(1,size(arrivees,2));
15        for i= 1 : size(sorties,2)
16            [val,indice] = min(pistess);
17            if ( val >= arrivees(i)
18                sorties(i) = val + tempsTraitement(i);
19            else
20                sorties(i) = arrivees(i) + tempsTraitement(i);
21            end
22            pistes(indice)=sorties(i);
23        end
24        tempsAttente = sorties(i) - arrivees(i) - tempsTraitement(i);
25        j = 0;
26        for i = 1:size(tempsAttente,2)
27            if (tempsAttente(i) > 5/60)
28                j = j + 1;
29            end; end
30            if ((j/size(tempsAttente,2)) <= 0.1)
31                nbpiste = nb;
32                return;
33            end; end
34            nbpistes=0;
35        end
36    end

```

Figure 3.4: Risque de saturation.

```

MATLAB R2013a
HOME PLOTS APPS Search Docu...
New Script New Open Compare Import Data Save Workspace New Variable Open Variable Clear Workspace
C:\Program Files\MATLAB\R2013a\bin
Current Folder
Name
m3registry
registry
Simulating
util
win32
ahmed.m
celia.m
deploytool.bat
insttype.ini
lcdata.xml
lcdata.xsd
lcdata_utf8.xml
matlab.bat
matlab.exe
Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Examples, or read Getting Started.
>> piste(0,50,2,0.22)

nbpiste =

     2

ans =

     2

fx >> |

```

Figure 3.5: Risque de saturation.

### 3.1.3 Simulation du nombre moyen d'avions en orbite

Le codage sous matlab est le suivant:

```

3  %%%%%%%%%
4  function nbrmoyavion = sisi( debut, fin )
5  -   debit = 2;
6  -   lamda = 10;
7  -   arrivees = poisson( debut, fin, lamda );
8  -   for nb= 2 : 50
9  -     serveurs = zeros(1,nb);
10 -    quantites = expo(0.22,size(arrivees,2));
11 -    tempsTraitement = quantites / debit;
12 -    sorties = zeros(1,size(arrivees,2));
13 -    for i= 1 : size(sorties,2)
14 -      [val,indice] = min(serveurs);
15 -      if ( val >= arrivees(i)
16 -        sorties(i) = val + tempsTraitement(i);
17 -      else
18 -        sorties(i) = arrivees(i) + tempsTraitement(i);
19 -      end
20 -      serveurs(indice)=sorties(i);
21 -    end
22 -
23 -    tempsAttente = sorties(i)- arrivees(i) - tempsTraitement(i);
24 -    tempsAttMoy(1,nb) =mean(tempsAttente);
25 -    nbrmoyavion=tempsAttMoy*lamda;
26 -  end
27 -   %plot(tempsAttMoy)
28 -   plot(nbrmoyavion)
29 -   title('le nombre d''avions en orbite en fonction du nombre de seveurs')
30 - end
31

```

Figure 3.6: Nombre moyen d'avions en orbite.

Le programme précédent nous a calculé toutes les valeurs du nombre moyen d'avions en orbite en fonction du nombre de pistes  $s$ , certaines valeurs d'entre elles sont présentées dans le tableau comme suit:

serveurs	N. moyen d'avions en orbite/ (1.0e+03)
2	0
3	4.9599
5	2.1565
7	1.083
13	0.4006
17	0.2205
21	0.0427
25	0.0058
50	0

Figure 3.7: Nombre moyen d'avions en orbite.

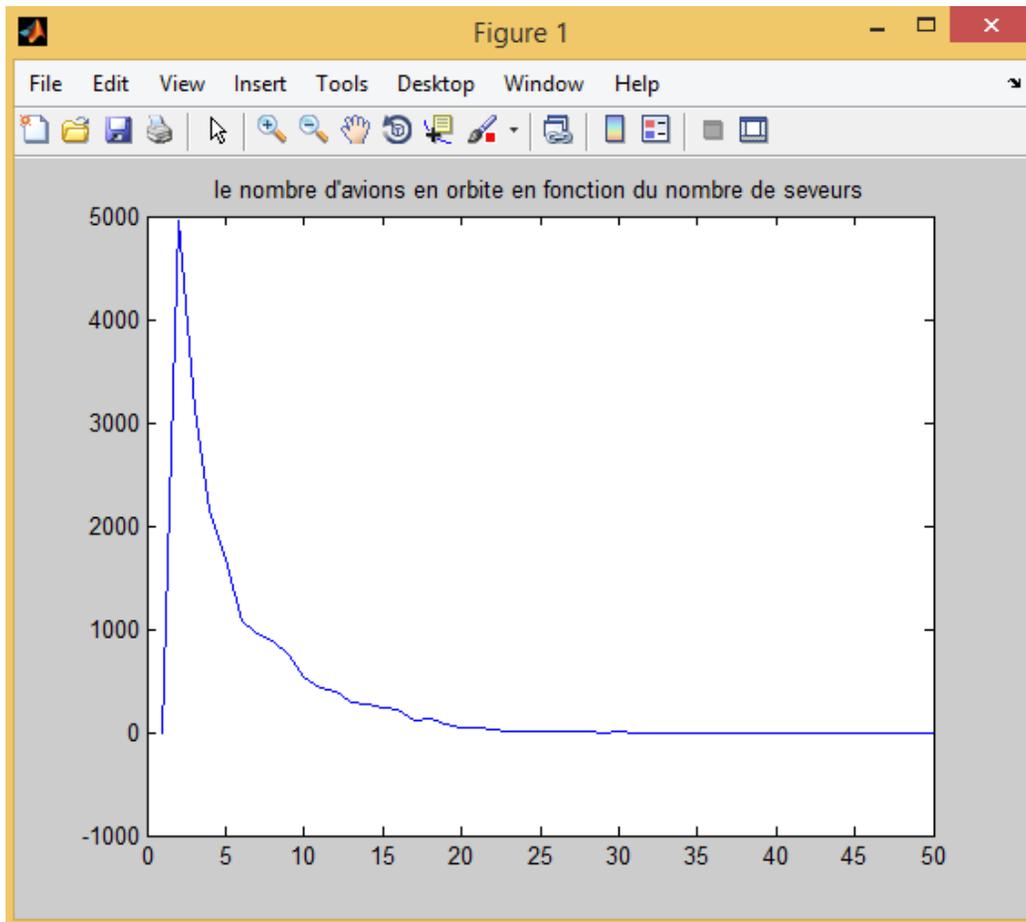


Figure 3.8: Nombre moyen d'avions en orbite.

- La croissance la plus importante à été observée de 2 à 3.
- La décroissance la plus importante à été observée de 3 à 25, tandis que de 25 à 50, la diminution est un peu moins accentuée.

On remarque qu'à chaque fois que le nombre de pistes augmente, le nombre d'avions en orbite diminue.

### 3.1.4 Simulation du temps d'attente en orbite

Ce modèle est réalisé avec  $s$  pistes. Si  $\lambda = 10$ ,  $d = 2$  (nombre moyen de requête traiter par unités de temps),  $X=0.22$  (une quantité de service est exponentielle de moyenne 0.22) D'après le chapitre précédent, pour qu'il soit stable, il faut que

$$\lambda < s\mu = s \frac{d}{X}$$

ou

$$s > \frac{\lambda X}{d} = \frac{10 \cdot 0.22}{2} = 1.1.$$

Cela veut dire qu'il faut au minimum 2 pistes pour que ce soit stable.  
 Nous nous intéresserons au temps d'attente moyen en fonction du nombre de pistes.  
 Nous allons faire une simulation pour donner une courbe de ce temps moyen en fonction du nombre de pistes.

```

Editor - C:\MATLAB\Thesis\piste
EDITOR PUBLISH VIEW
New Open Save Find Files Compare Print Insert Comment Indent Go To Breakpoints Run Run and Time Run and Advance Advance
FILE EDIT NAVIGATE BREAKPOINTS RUN
file.m x file.m x moyen.m x Ntt.m x NN.m x Nt.m x Pi.m x piste.m x pistes.m x
1 %%%%%%%%%%%%% Temps d'attente en orbite
2 function tempsAttMoy = pistes( debut, fin )
3 debit = 2;
4 lamda = 10;
5 arrivees = poisson( debut, fin, lamda );
6 for nbpistes= 2 : 50
7     pistes = zeros(1,nbpistes);
8     quantites = expo(0.22,size(arrivees,2));
9     tempsTraitement = quantites / debit;
10    sorties = zeros(1,size(arrivees,2));
11    for i= 1 : size(sorties,2)
12        [val,indice] = min(pistes);
13        if ( val >= arrivees(i) )
14            sorties(i) = val + tempsTraitement(i);
15        else
16            sorties(i) = arrivees(i) + tempsTraitement(i);
17        end
18        pistes(indice)=sorties(i);
19    end
20    tempsAttente = sorties(i)- arrivees(i) - tempsTraitement(i);
21    tempsAttMoy(1,nbpistes) =mean(tempsAttente);
22    end
23 plot(tempsAttMoy)
24 title('les temps d'attente moyens en fonction du nombre de pistes')
25 end
    
```

Figure 3.9: Temps d'attente moyen en fonction du nombre de pistes.

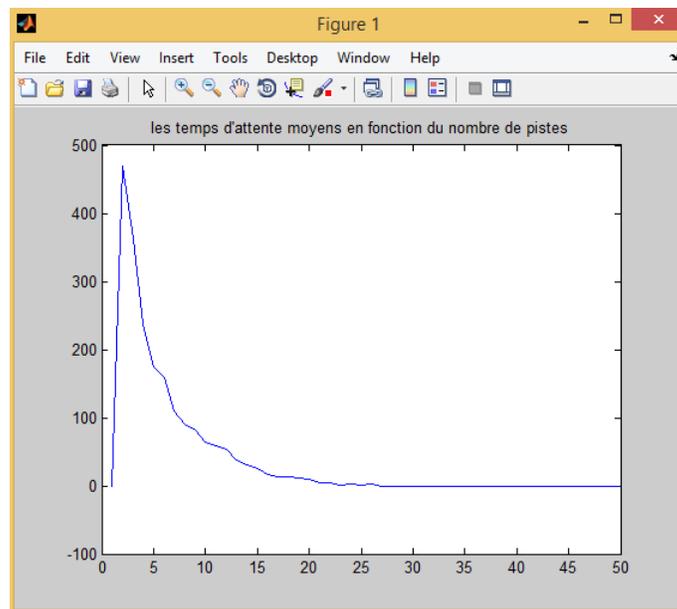


Figure 3.10: Temps d'attente moyen en fonction du nombre de pistes.

On remarque que le temps d'attente moyen en orbite dépend fortement du nombre de pistes, chaque fois que ce dernier augmente le temps d'attente en orbite diminue. Comme montre la figure suivante.

- La croissance la plus importante à été observée de 2 à 3.
- La décroissance la plus importante à été observée de 3 à 25, tandis que de 25 à 50, la diminution est un peu moins accentuée.

## 3.2 Illustrations numériques et graphiques

### 3.2.1 Loi de $N(t)$

#### Cas 1

Dans cette partie, nous allons décrire comment varie la loi du nombre d'avions dans l'aérodrome  $(N(t))_{t \geq 0}$  en fonction du taux d'arrivées des avions  $\lambda$ .

#### Données

$$\mu = 10, s = 12.$$

#### Résultats

a) pour  $n=0$ :

Lambda	Loi de $N(t)$ [ $n=0$ ]
0	1
5	0.60653
7	0.49659
10	0.36788
13	0.27253
17	0.18268
19	0.14957
21	0.12246
25	0.082085
27	0.067205
30	0.049787
33	0.036883
41	0.016572
43	0.013567
50	0.006735

Figure 3.11: Loi de  $N(t)$ .

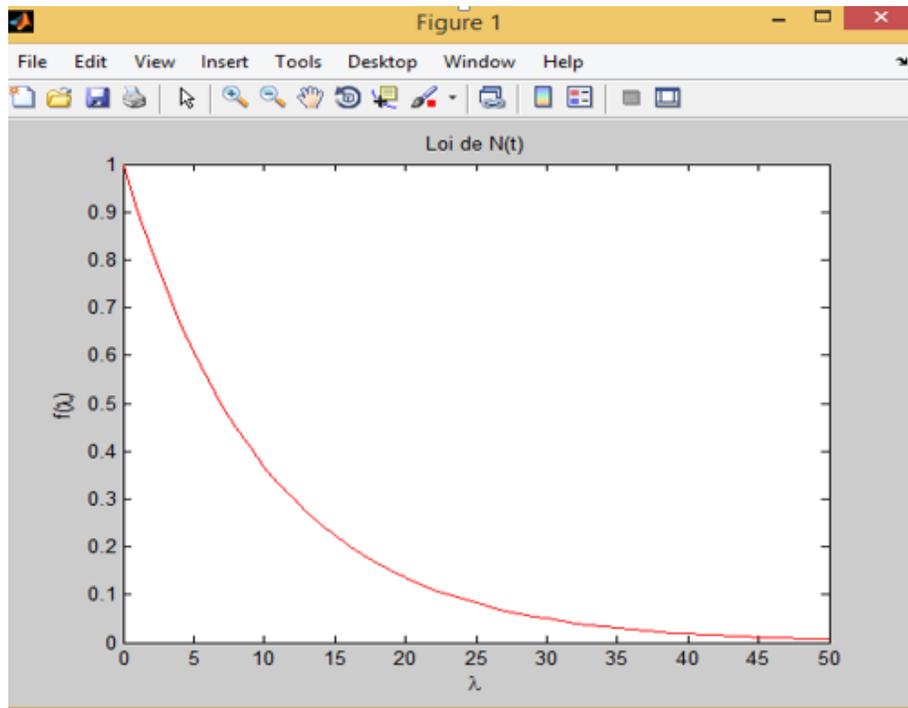


Figure 3.12: Loi de N(t).

- De 0 à 50, il y a eu une décroissance de N(t). La décroissance la plus importante a été observée de 0 à 20 (N(t) décroît de 0.632 avions par unité de temps), tandis que de 20 à 50 la diminution est un peu moins accentuée.

b) Pour  $n=4 \leq s$ :

Lambda	Loi de N(t) [4=n<=s]
0	0
5	0.0016
7	0.005
10	0.0153
13	0.0324
17	0.0636
19	0.0812
21	0.0992
25	0.1336
27	0.1488
30	0.168
33	0.1823
41	0.1951
43	0.1933
50	0.1754

Figure 3.13: Loi de N(t).

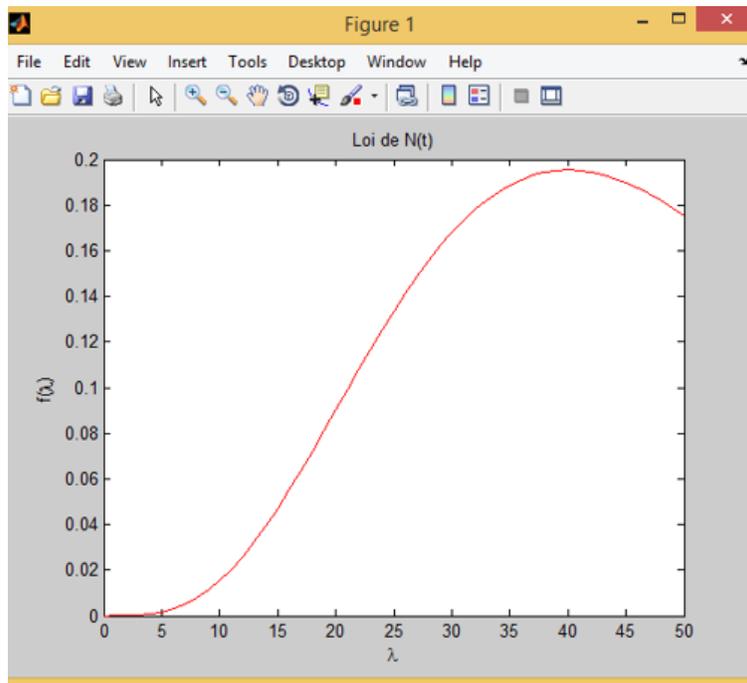


Figure 3.14: Loi de N(t).

- De 0 à 3 le nombre d'avions est constant, soit 0 avions par unité de temps. De 5 à 10 il y a eu une augmentation de nombre d'avions dans l'aérodrome.
- La croissance la plus importante a été observée de 10 à 41, soit 0.18 avion par unité de temps.
- De 41 à 50 le nombre d'avions dans l'aérodrome a diminué, soit 0.0197 avions par unité de temps.

c) Pour  $n=13 > s$

Lambda	Loi de N(t) [13=n>s]
0	0
5	0
7	0
10	0
13	0
17	0
19	0
21	0
25	0
27	0
30	0
33	0
41	0.0003
43	0.0004
50	0.0014

Figure 3.15: Loi de N(t).

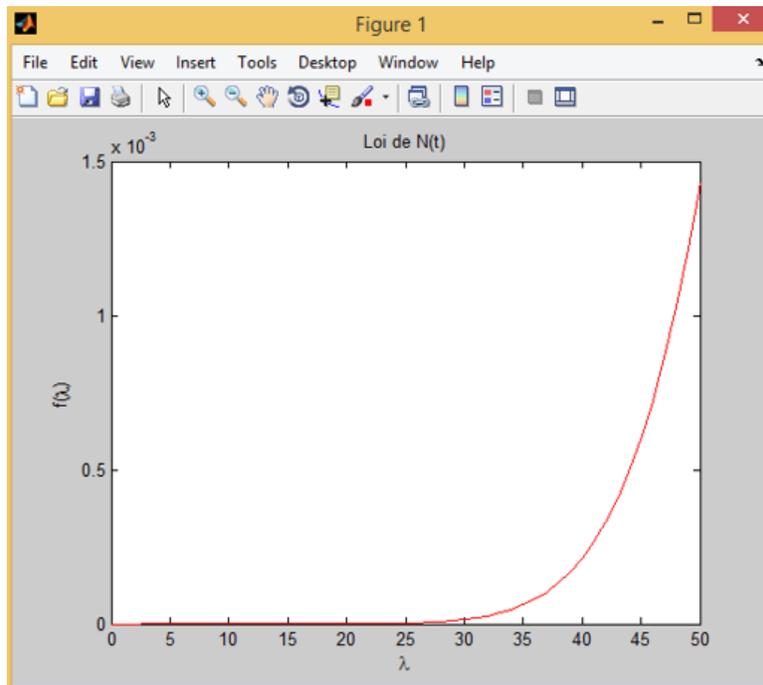


Figure 3.16: Loi de  $N(t)$ .

- De 0 à 33 le nombre d'avions dans l'aérodrome est constant. De 33 à 43 il y a eu une croissance de nombre d'avions dans l'aérodrome.
- La croissance la plus importante a été observée de 43 à 50, soit 0.0010 avions par unité de temps.

## Cas 2

Dans cette partie, nous allons décrire comment varie la loi du nombre d'avions dans l'aérodrome  $(N(t))_{t \geq 0}$  en fonction du taux de décollage des avions  $\mu$ .

### Données

$\lambda = 10, s = 12$ .

### Résultats

a) pour  $n=0$ :

$\mu$	Loi de N(t) [n=0]
0	NaN
5	0.1353
7	0.2397
10	0.3679
13	0.4634
17	0.5553
19	0.5908
21	0.6211
25	0.6703
27	0.6905
30	0.7165
33	0.7386
41	0.7836
43	0.7925
50	0.8187

Figure 3.17: Loi de N(t).

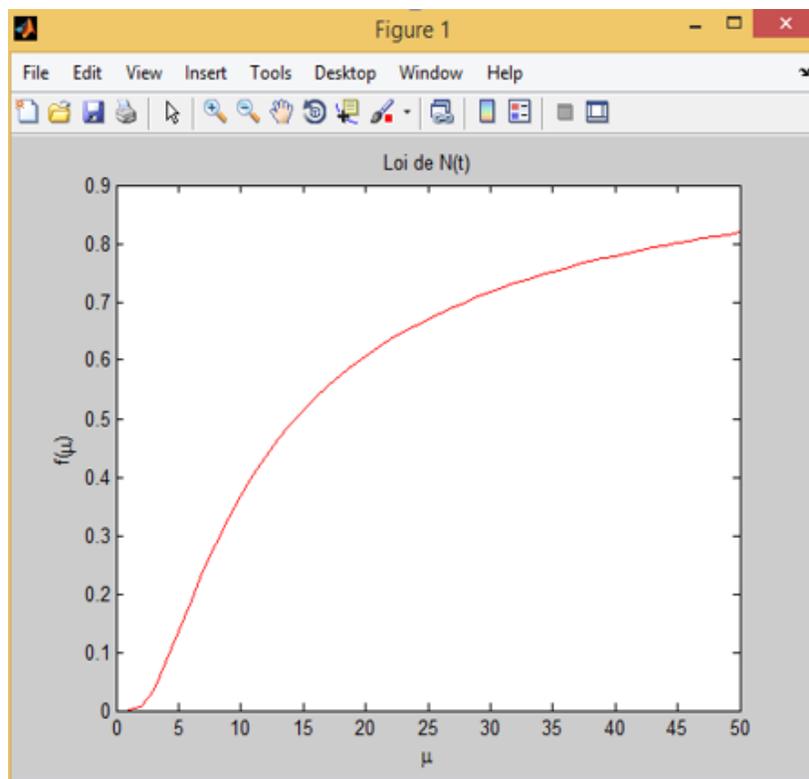


Figure 3.18: Loi de N(t).

- La croissance la plus importante a été observée de 5 à 50, soit 0.6834 avions par unité de temps.

b) pour  $n=2 \leq s$ :

$\mu$	Loi de N(t) [ $2=n \leq s$ ]
0	
5	0.2707
7	0.2445
10	0.1839
13	0.1371
17	0.0961
19	0.0818
21	0.0704
25	0.0536
27	0.0474
30	0.0398
33	0.0339
41	0.0233
43	0.0214
50	0.0164

Figure 3.19: Loi de N(t).

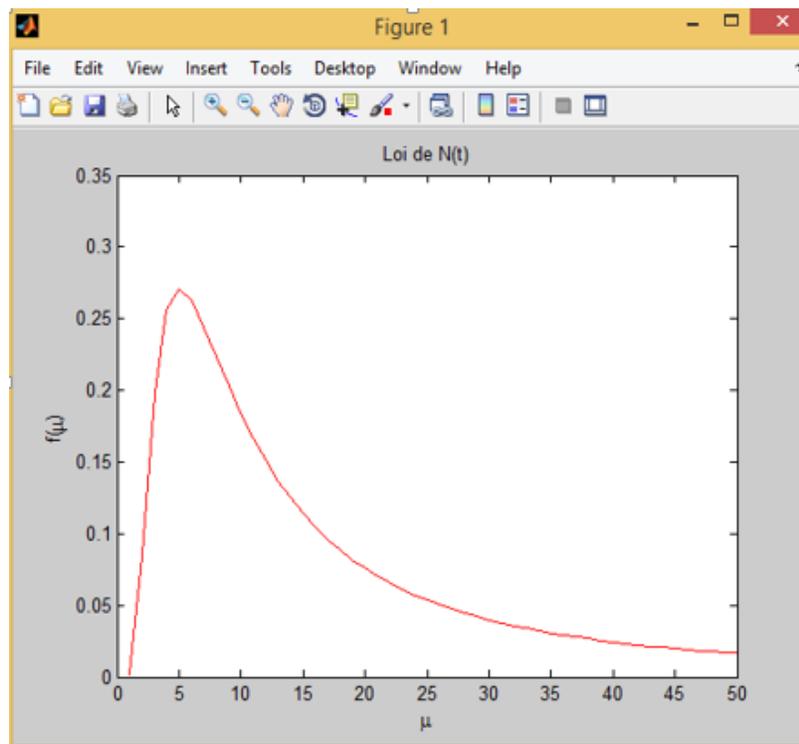


Figure 3.20: Loi de N(t).

- La croissance la plus importante a été observée de 1 à 5, soit 0.2707 avions par unité de temps.
- La décroissance la plus importante a été observée de 5 à 33, soit 0.2368 avions par unité de temps.
- De 33 à 50, il y a eu une décroissance d'avions dans l'aérodrome.

c) pour  $n=13 \geq s$ :

$\mu$	Loi de N(t) [13=n>s]
0	NaN
5	0
7	0
10	0
13	0
17	0
19	0
21	0
25	0
27	0
30	0
33	0
41	0
43	0
50	0

Figure 3.21: Loi de N(t).

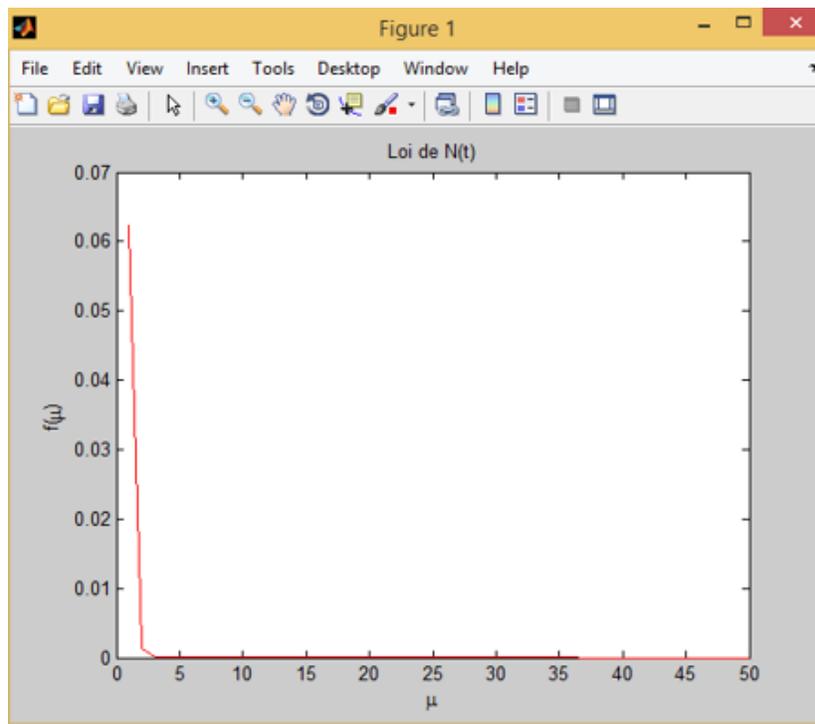


Figure 3.22: Loi de N(t).

- La décroissance la plus importante a été observée de 1 à 3.
- De 3 à 50, nous avons une décroissance d'avions dans l'aérodrome.

### 3.2.2 Risque de saturation

Dans cette partie, nous allons décrire comment varie le risque de saturation dans l'aérodrome ( $P[N_t \geq s]$ ) en fonction du taux d'arrivées des avions  $\lambda$ .

**Données:**

$$\mu = 7, s = 6.$$

**Résultats:**

lambda	Risque de Saturation
0	0
3	0
7	0.0006
9	0.0022
12	0.0089
15	0.0245
17	0.042
21	0.0991
25	0.191
28	0.2848
31	0.4003
33	0.4893
37	0.6948
39	0.8107
40	0.8718

Figure 3.23: Risque de saturation.

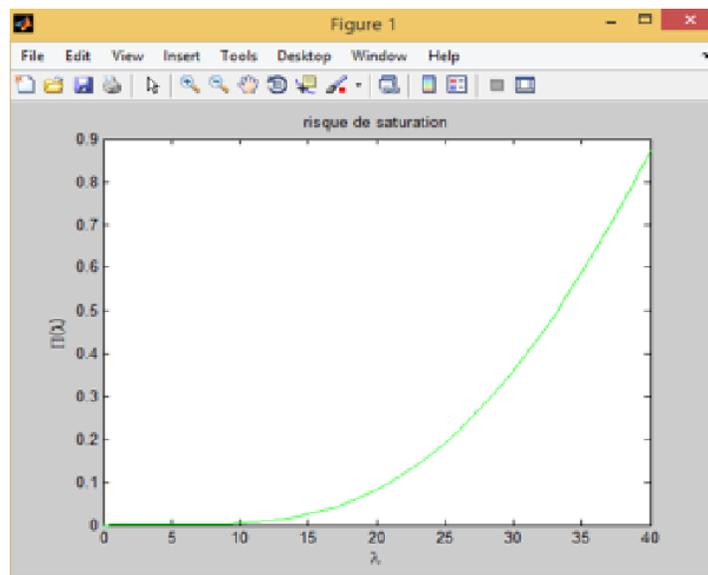


Figure 3.24: Risque de saturation.

- De 0 à 7 toutes les pistes sont libres.
- De 7 à 21 le risque de saturation augmente avec le nombre d'avions qui arrivent dans l'aérodrome.
- La croissance la plus importante a été observée de 21 à 40, et qui a causé la saturation de certaines pistes, soit 0.7727 avions par unité de temps.

### 3.2.3 Nombre moyen d'avions en orbite

Dans cette partie, nous allons décrire comment varie le nombre moyen d'avions dans l'aérodrome en fonction du nombre de pistes d'atterrissage (s).

#### Données

$$\lambda = 9, \mu = 7.$$

#### Résultats

serveurs	N. moyen clients ds la file en fonction de s
2	0.9056
5	0.0044
7	0.0001
9	0
13	0
17	0
22	0
25	0
28	0
31	0
33	0
35	0
37	0
39	0
40	0

Figure 3.25: Nombre moyen d'avions dans l'orbite.

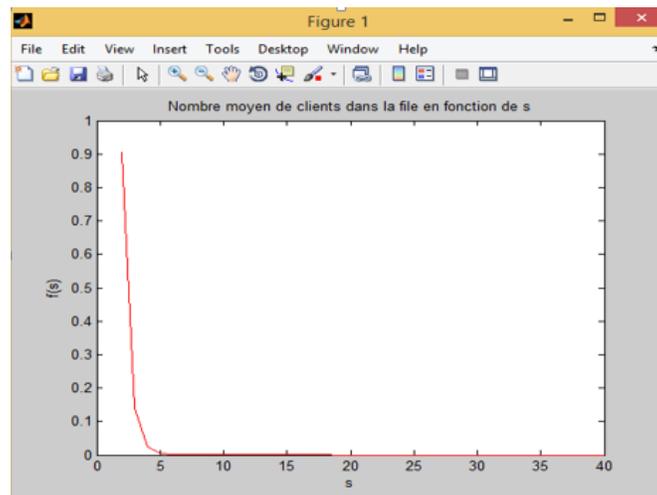


Figure 3.26: Nombre moyen d'avions dans l'orbite.

- De 0 à 40 il y a eu décroissance. La décroissance la plus importante a été observée de 0 à 5, tandis que de 5 à 40, le nombre moyen d'avions en orbite est nul.

### 3.2.4 Temps moyen d'attente en orbite

Dans cette partie, nous allons décrire comment varie le temps moyen d'attente d'un avion en orbite en fonction du nombre de pistes.

#### Données

$$\lambda = 9, \mu = 7.$$

#### Résultats

serveurs 'S'	temps d'attente moyen de séjour en orbite
2	0.2
5	0.0385
7	0.025
9	0.0185
13	0.0122
17	0.0091
22	0.0069
25	0.006
28	0.0053
31	0.0048
33	0.0045
35	0.0042
37	0.004
39	0.0038
40	0.0037

Figure 3.27: Temps moyen d'attente en orbite.

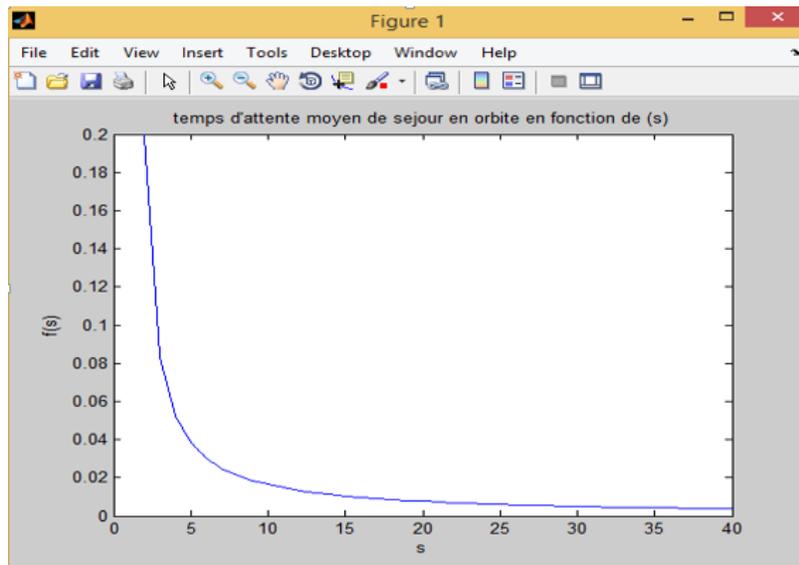


Figure 3.28: Temps moyen d'attente en orbite.

- De 0 à 40 il y a eu une décroissance. La décroissance la plus importante a été observée de 0 à 5, tandis que de 5 à 40, la diminution est un peu moins accentuée.

# Chapitre 4

## Optimisation dans les systèmes d'attente

Dans ce chapitre d'optimisation, nous nous intéressons à optimiser le nombre de pistes d'atterrissage, pour éviter le risque de saturation dans l'aérodrome et ainsi minimiser le temps du séjour des avions dans l'orbite.

Dans cette perspective nous cherchons à trouver le nombre de pistes d'atterrissage  $s$  de sorte que le risque de saturation  $\pi(\rho, s)$  soit inférieur à un seuil donné. Sans utiliser des méthodes de programmation mathématique (stochastique), ce problème sera résolu et programmable au sens informatique, en utilisant comme outil le logiciel Matlab.

Nous concevons deux programmes, le premier se basera sur des itérations, nous allons fixer  $\lambda$  et  $\mu$  et voir comment varie le risque de saturation en fonction du nombre de pistes d'atterrissage, cela va nous permettre d'illustrer graphiquement le risque de saturation en fonction de  $s$ . Tandis que le second cherche le nombre minimum de pistes d'atterrissage pour que  $\pi(\rho, s)$  soit inférieur à un seuil donné  $\alpha$  petit.

Nous supposons que:

- (1) L'unité de temps est l'heure,
- (2)  $\lambda = 9$  arrivées par heure,
- (3)  $\frac{1}{10}$  heure est le temps moyen d'occupation de la piste par un avion.

Nous rappelons d'abord la formule de risque de saturation qui est donnée par:

$$\pi(\rho, s) = p_0 \frac{\rho^s}{s!} \frac{s}{s - \rho},$$

avec

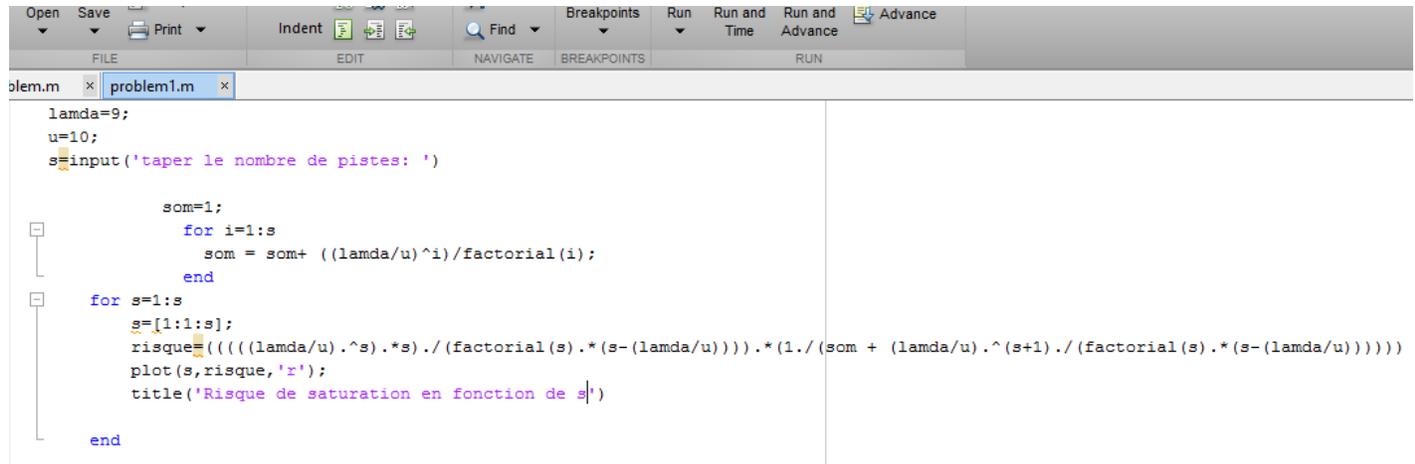
$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^s \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)}}.$$

Nous cherchons à trouver  $s$  (nombre de piste d'atterrissage) tel que

$$\begin{cases} \min_s \{ \pi(\rho, s), W_q \} \\ \lambda < s\mu \\ s \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

## 4.1 Evaluation du risque de saturation

Ce script sous Matlab permet de donner la variation du risque de saturation en fonction de  $s$  (nombre de pistes d'atterrissage) et d'illustrer graphiquement ce dernier pour chaque valeur de  $s$ .



```
lamda=9;
u=10;
s=input('taper le nombre de pistes: ')

    som=1;
    for i=1:s
        som = som+ ((lamda/u)^i)/factorial(i);
    end
for s=1:s
    s=[1:1:s];
    risque=(((lamda/u).^s).*s)/(factorial(s).*(s-(lamda/u))).*(1./(som + (lamda/u).^(s+1)/(factorial(s).*(s-(lamda/u))))))
    plot(s,risque,'r');
    title('Risque de saturation en fonction de s|')
end
```

Figure 4.1: Programme donnant le risque de saturation en fonction de  $s$ .

serveurs	Risque de saturation $\pi(\rho, s)$
1	0.8523
2	0.2638
3	0.0691
4	0.0143
5	0.0024
6	0.0004
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0

Figure 4.2: Tableau donnant le risque de saturation en fonction de  $s$ .

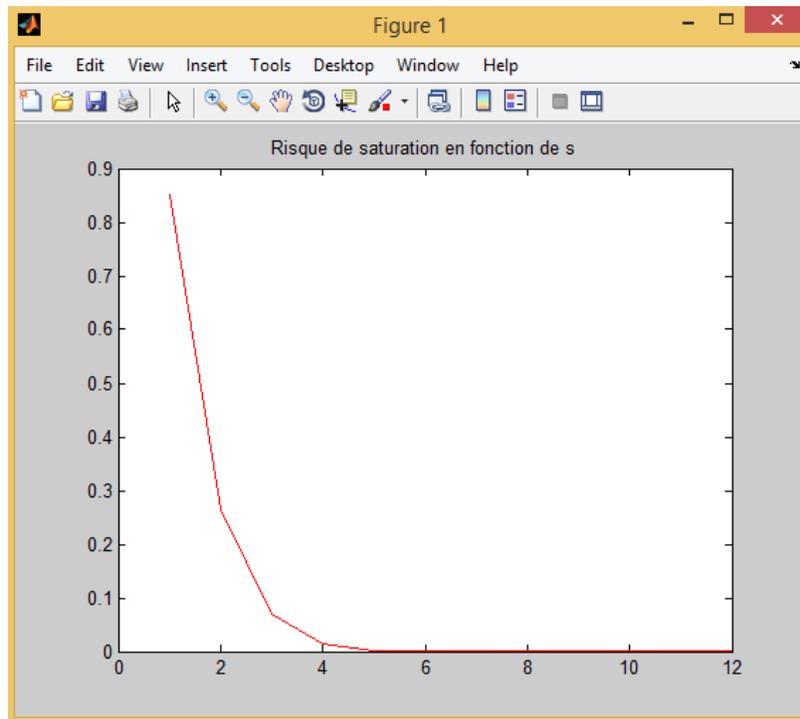


Figure 4.3: Graphe donnant le risque de saturation en fonction de  $s$ .

Dans cette partie, nous allons décrire comment varie le risque de saturation  $\pi(\rho, s)$  en fonction de  $\mu$ .

### Données

- $\lambda = 9$ ,
- $s = 4$ .

```

sm.m  x  problem1.m  x  plemMu.m*  x
%%% risque / a mu

u=[3:1:20];
lamda=9;
s=4;

    som=1;
    for i=1:s
        som = som + ((lamda./u).^i)/factorial(i);
    end

risque=(((lamda./u).^s)*s)/(factorial(s).*(s-(lamda./u)))*1./(som + (lamda./u).^(s+1)./(factorial(s).*(s-(lamda./u)))));
plot(u,risque,'r');
title('Risque de saturation en fonction de u')
xlabel('\mu')
ylabel('\pi')

```

Figure 4.4: Programme donnant le risque de saturation en fonction de  $\mu$ .

$\mu$	Risque de saturation ( $\pi$ )
3	0.5094
5	0.1285
7	0.0462
9	0.0204
11	0.0104
13	0.0058
15	0.0035
17	0.0022
19	0.0015
20	0.0012

Figure 4.5: Tableau donnant le risque de saturation en fonction de  $\mu$ .

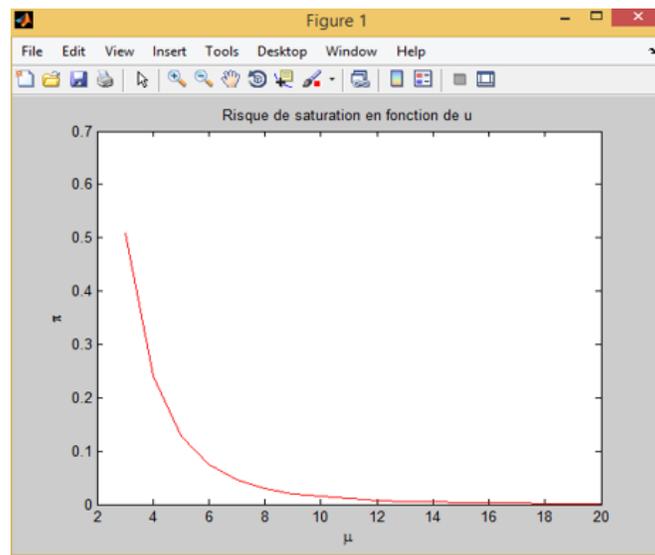


Figure 4.6: Graphe donnant le risque de saturation en fonction de  $\mu$ .

## Résultats

- De 2 à 20, il y a eu une décroissance. La décroissance la plus importante a été observée de 4 à 10, tandis que de 10 à 20, la diminution est un peu moins accentuée.

Dans cette partie, nous allons décrire comment varie le risque de saturation  $\pi(\rho, s)$  en fonction de  $\lambda$ .

## Données

- $\mu = 10$ ,
- $s = 4$ .

```

%%% risque / a lambda

lamda=[1:1:40];
u=10;
s=4;

som=1;
for i=1:s
    som = som + ((lamda./u).^i)/factorial(i);
end

risque=(((lamda./u).^s)*s)/(factorial(s)*(s-(lamda./u)))*1./((som + (lamda./u).^(s+1))/(factorial(s)*(s-(lamda./u)))));
plot(lamda,risque,'r');
title('Risque de saturation en fonction de \lambda')
xlabel('\lambda')
ylabel('\pi')

```

Figure 4.7: Programme donnant le risque de saturation en fonction de  $\lambda$ .

## Résultats

$\lambda$	Risque de saturation ( $\pi$ )
1	0
4	0.0008
9	0.0143
11	0.0279
21	0.1994
25	0.3199
29	0.4682
31	0.5522
37	0.839
39	0.9451

Figure 4.8: Tableau donnant le risque de saturation en fonction de  $\lambda$ .

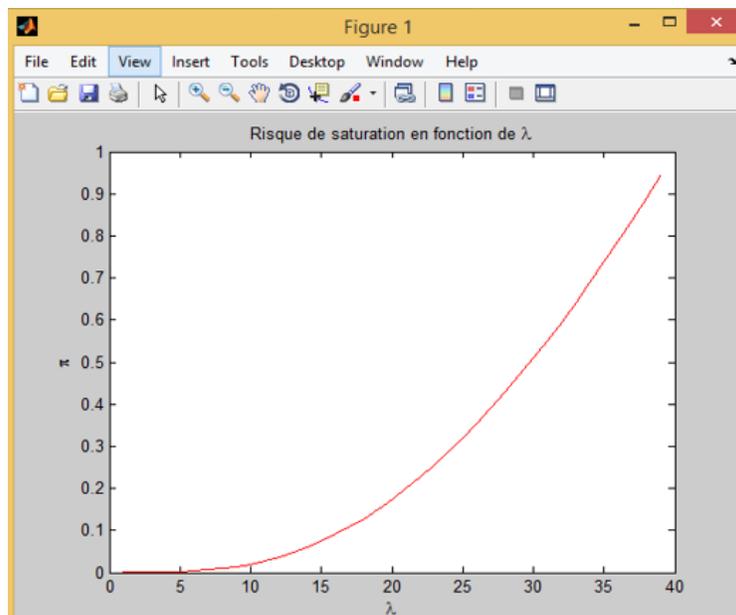


Figure 4.9: Graphe donnant le risque de saturation en fonction de  $\lambda$ .

- De 0 à 40 il y a eu une croissance. La croissance la plus importante a été observée de 10 à 39.

## 4.2 Optimisation du risque de saturation

Ce deuxième programme permet de donner le nombre minimum de pistes d'atterrissage pour que  $\pi(\rho, s)$  soit inférieur à un seuil  $\alpha$  donné.

```
function risquedesaturation=test(alpha)
u=10;
lamda=9;
som=1;
s=1; % Inintialisation du nombre de pistes.

while (s<=12)
    if (s==1)
        for i=1:s
            som = som+ ((lamda/u)^i)/factorial(i);
        end
        risquedesaturation=((((lamda/u).^s)./(factorial(s).*(s-(lamda/u))))*(1./(som + (lamda/u).^(s+1)./(factorial(s).*(s-(lamda/u))))));
        if (risquedesaturation <= alpha)
            disp(['le nombre de pistes pour que le risque de saturation est inférieur à ' num2str(alpha) ' est s=' num2str(s) '])
        else
            while ( risquedesaturation >= alpha)
                s=s+1;
                som=1;
                for i=1:s
                    som = som+ ((lamda/u)^i)/factorial(i);
                end
                risquedesaturation=((((lamda/u).^s)./(factorial(s).*(s-(lamda/u))))*(1./(som + (lamda/u).^(s+1)./(factorial(s).*(s-(lamda/u))))));
                if(risquedesaturation <= alpha )
                    disp(['le nombre de pistes pour que le risque de saturation est inférieur à ' num2str(alpha) ' est s=' num2str(s) '])
                end
            end
        end
        s=s+1;
    end
end
end
```

Figure 4.10: Programme donnant le nombre minimum de pistes pour un seuil donné  $\alpha$ .

Le tableau suivant nous donne le nombre minimum de pistes pour que le risque de saturation soit inférieur à un seuil donné.

seuil (alpha)	Nbre de serveurs (s)	Risque de saturation	T.moyen d'attente en orbite
0.1	3	0.855	0.047
0.5	2	0.865	0.091
0.7	2	0.865	0.091
0.9	1	0.9	1
0.001	6	0.8523	0.0197
0.007	5	0.8524	0.024
0.025	4	0.8528	0.032

Figure 4.11: Tableau donnant le nombre minimum de pistes pour un seuil donné  $\alpha$ , le risque de saturation et temps moyen d'attente en orbite.

Le tableau précédent nous a permis d'illustrer graphiquement (risque de saturation en fonction de seuil  $\alpha$ , nombre minimum de pistes  $s^*$  en fonction de seuil  $\alpha$  et le nombre moyen d'attente en orbite en fonction de  $s$ ).

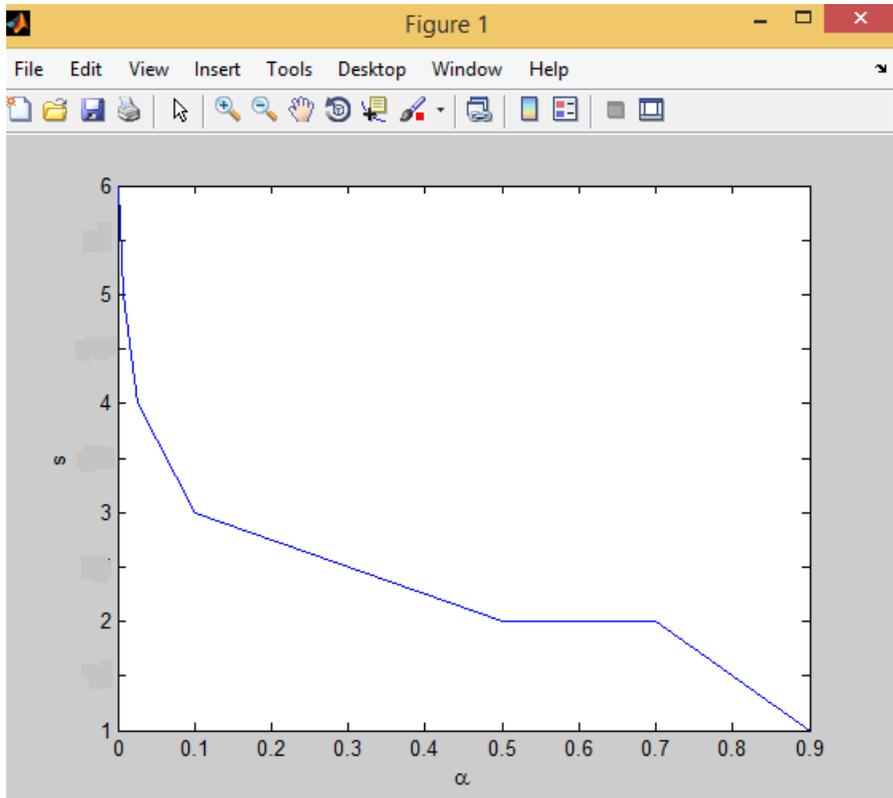


Figure 4.12: Nombre minimum de pistes en fonction de  $\alpha$ .

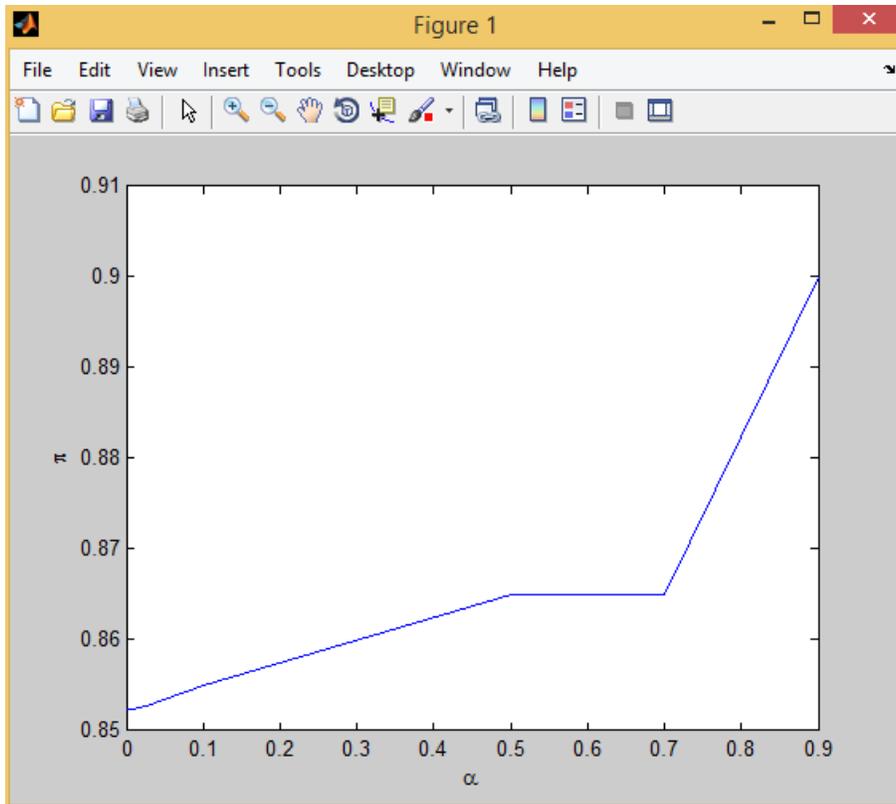


Figure 4.13: Risque de saturation en fonction de  $\alpha$ .

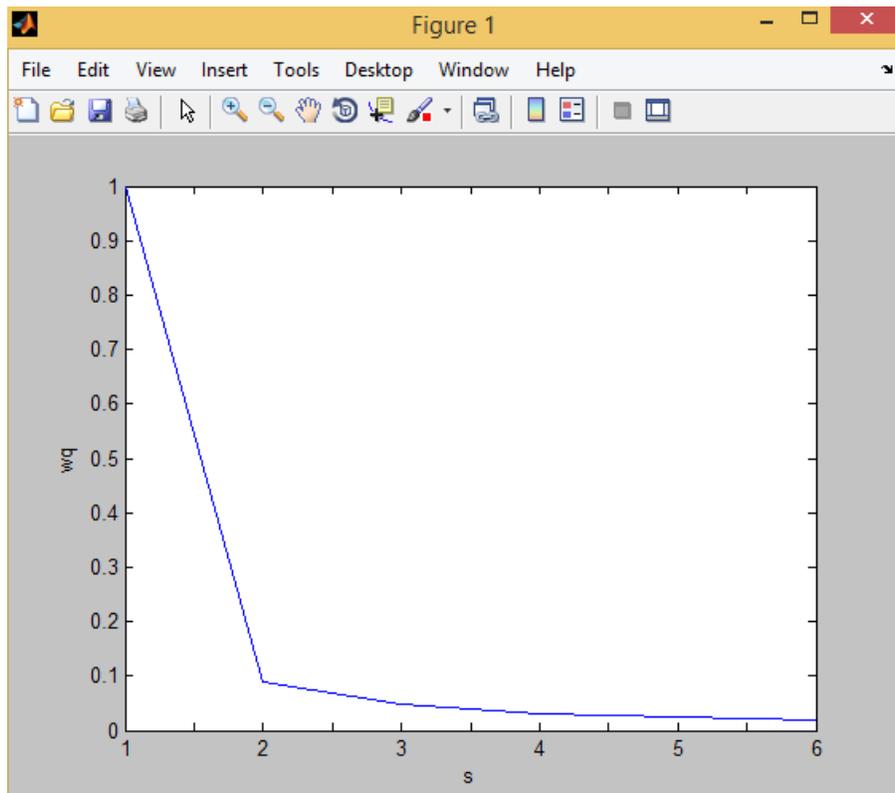


Figure 4.14: Temps moyen d'attente en fonction de  $s$ .

# Conclusion générale

La théorie des files d'attente propose des approches mathématiques permettant d'analyser les services de masse. Utilisée d'abord dans l'étude des systèmes téléphoniques automatiques réalisée au début du XXe siècle par le mathématicien et ingénieur Danois en télécommunications, A. K. Erlang, ensuite elle s'est généralisée à divers types de problèmes de gestion de services de masse et de congestion.

Dans ce présent mémoire, nous avons montré, dans un premier temps, l'intérêt et les applications des systèmes d'attente classiques. Ensuite, Nous nous sommes intéressés au modèle  $M/M/s$  en se basant sur le cas de "gestion des avions dans un aéroport". Puis, nous avons entrepris la modélisation et la simulation de ce dernier. Enfin, nous avons pu déterminer la structure optimale des pistes d'atterrissage visant à minimiser le temps d'attente des avions en orbite et le risque de saturation dans l'aéroport.

Ce modeste travail nous a permis d'enrichir nos connaissances et surtout d'appréhender le comportement des systèmes des files d'attente, la simulation de ces derniers et leur optimisation.

# Bibliographie

- |1| Cours de Master I RO: Processus stochastiques, M. HAMADOUCHE.
- |2| Cours de Master II RO: Files d'attente, M. HAMADOUCHE.
- |3| ALEM Lala Maghnia (2015), Inegalites Stochastiques des Systemes de Files d'attente avec Rappels a Communication Bidirectionnelle, These de Magister en Mathematiques Appliquees, Universite de Bejaia.
- |4| Sonjay K.Base (December 2001), An introduction to Queuing systems.
- |5| Leonardo Kleinrock (1974), Queuing systems.