

**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Mouloud MAMMERY, Tizi-Ouzou**



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique  
Département d'Automatique

## MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du diplôme

*de MASTER ACADEMIQUE EN AUTOMATIQUE  
OPTION : COMMANDE DES SYSTEMES*

# Thème

Commande en juste à temps de systèmes de  
production dans le semi-anneau Max-Plus.

Proposé par : Mr. KARA Redouane

Présenté par :

Dirigé par : Mme. NAIT ABDESSELAM Aldjia

AZEB Aziz

AMEUR Hakim

Soutenu le : 23 /09 /2013

*Promotion 2013*

## Résumé

Les systèmes à événements discrets mettant en jeu des phénomènes de synchronisation peuvent être modélisés par des équations linéaires dans l'algèbre de type  $(\max,+)$ . Cette propriété a motivé l'élaboration de ce que l'on appelle communément la théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes. Cette théorie présente de nombreuses analogies avec la théorie conventionnelle des systèmes linéaires continus. Dans ce mémoire, nous abordons des problèmes sur la commande de ces systèmes. Premièrement la commande en boucle ouverte sous le critère du juste à temps dont l'objectif est la poursuite d'une trajectoire connue a priori ou la poursuite d'un modèle de référence. Puis notre intérêt se penche vers la commande en boucle fermée dont le but est à nouveau la poursuite d'un modèle de référence.

**Mots-clés** : graphes d'événements temporisés, dioïdes, commande en juste à temps, synthèse de correcteurs, algèbre  $(\max, +)$ , systèmes de production.

# Remerciements

---

En premier lieu, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nos remerciements les plus sincères à notre promotrice Mme NAIT ABDESSELAM Aldjia, maitre assistante classe A à l'université Mouloud MAMMERY de Tizi-Ouzou, qui a accepté la direction de ce travail en nous guidant avec beaucoup de gentillesse. Nous tenons à la remercier également pour la qualité de son suivie et ses conseils éclairés, et pour sa grande contribution à l'aboutissement de ce présent mémoire.

Nous tenons aussi à exprimer notre profonde gratitude et nos remerciements les plus sincères à Mr. KARA Redouane, maitre de conférences classe A à l'université Mouloud MAMMERY de Tizi-Ouzou, qui nous a offert le privilège de travailler sous sa direction. Ses conseils, son confiance en nous et ses encouragements ont permis de mener à bien ce travail.

Nous remercions les membres du jury qui nous ont fait l'honneur d'examiner ce travail. Nous tenons à remercier tous les enseignants du département Automatique pour leurs aides et leurs conseils tout au long de notre formation, ainsi que pour leurs qualités d'enseignement.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribuées à la réalisation de ce mémoire dans de bonnes conditions, en l'occurrence, HADDAD Sabrina et HAMADOUCHE Meriem.

Pour finir, nous exprimons nos sincères remerciements à nos très chers parents, qui ont mis à notre disposition tous les moyens matériels et financiers nécessaires.

*Merci* 

# Table des matières

# Table des matières

---

Notations	
Liste des figures	
Liste des tableaux	
Introduction	
<b>Chapitre 1-Outils algébriques</b>	<b>4</b>
Introduction	4
1.1 Ensembles ordonnés	4
1.1.1 Relation d'ordre et structures ordonnées	4
1.1.2 Demi-treillis et treillis	6
1.2 Dioïdes et semi-anneaux	7
1.2.1 Calcul matriciel dans les dioïdes	10
1.2.2 Dioïde de séries formelles	11
1.3 Dioïdes et treillis	13
1.4 Applications définies sur les dioïdes	14
1.5 Résolution d'équations dans un dioïde	15
1.5.1 Résolution de $ax \preceq b$ et $xa \preceq b$	15
1.5.2 Extension aux dioïdes de matrices : $AX \preceq B$ et $XA' \preceq B'$	17
1.5.3 Résolution de $x = ax \oplus b$	18
Conclusion	19
<b>Chapitre 2-Modélisation des SED</b>	<b>20</b>
Introduction	20
2.1. Modélisation des systèmes à événements discrets par réseaux de Petri	21
2.1.1 Les réseaux de Petri	21
2.1.2 Définitions et notations	21

## Table des matières

---

2.1.3	Tir des transitions .....	22
2.1.4	Ensemble des marquages accessibles.....	24
2.1.5	Quelques propriétés des RdP.....	24
2.1.6	Sous classes des RdP .....	25
2.1.7	Modélisation des systèmes à événements discrets .....	26
2.2	Les graphes d'événements temporisés : .....	27
2.2.1	Propriétés des graphes d'événements.....	27
2.2.2	Introduction du temps dans les graphes d'événements .....	28
2.3	Représentation d'état des graphes d'événements temporisés.....	28
2.4	Modélisation des (GET) dans l'algèbre des dioïdes .....	29
2.4.1	Equations aux dateurs.....	29
2.4.2	Equations aux compteurs .....	30
2.4.3	Forme explicite "ARMA" .....	33
2.4.4	Forme d'état .....	34
2.4.5	Quelques éléments de théorie spectrale des matrices (max,+) .....	36
2.5	Relation entrée-sortie d'un GET .....	37
2.5.1	Réponse impulsionnelle .....	38
2.6	La transformée en $\gamma$ .....	39
2.6.1	Définition .....	39
2.6.2	Matrice de transfert .....	40
2.7	Transformée en $\delta$ .....	41
2.7.1	Définition .....	41
2.7.2	Matrice de transfert .....	42
2.8	Trajectoires monotones croissantes d'un GET.....	43
2.8.1	Monotonie dans le dioïde $\overline{\mathbb{R}}_{\max} [\gamma]$ .....	43

2.8.2	Monotonie dans le dioïde $\overline{\mathbb{R}}_{\min} [\delta]$ .....	44
2.9	Représentation bi-dimensionnelle : dioïde $\mathcal{M}_n^{ax} [\gamma, \delta]$ .....	44
2.9.1	Manipulation des éléments de $\mathcal{M}_n^{ax} [\gamma, \delta]$ et règles de simplification .....	47
2.9.2	Représentation graphique des opérations sur $\mathcal{M}_n^{ax} [\gamma, \delta]$ .....	48
2.9.3	Exemples de calculs sur des polynômes de $\mathcal{M}_n^{ax} [\gamma, \delta]$ .....	48
2.9.4	Modélisation des graphes d'événements temporisés sur $\mathcal{M}_n^{ax} [\gamma, \delta]$ .....	50
2.10	Réalisabilité, rationalité et périodicité .....	51
2.11	Calculs numériques dans le dioïde $\mathcal{M}_n^{ax} [\gamma, \delta]$ .....	54
	Conclusion .....	54
	<b>Chapitre 3-Commande en juste à temps des SED .....</b>	<b>55</b>
	Introduction .....	55
3.1	Commande en boucle ouverte .....	56
	Illustration .....	57
3.2	Synthèse d'un correcteur de type précompensateur .....	60
	Illustration .....	62
3.3	Commande en boucle fermée : synthèse d'un retour de sortie .....	64
	Illustration .....	65
3.4	Synthèse d'un correcteur de type retour d'état .....	68
	Illustration .....	70
3.5	Synthèse d'un observateur .....	72
	3.5.1 Contrôle de type retour de sortie avec observateur .....	74
	Illustration .....	77
	Conclusion .....	79

## Table des matières

---

Conclusion

Annexes

Bibliographie

# Notations

---

$\oplus$  : Addition dans un dioïde.

$\otimes$  : Multiplication dans un dioïde.

$\varepsilon$  : Élément neutre pour la loi  $\oplus$ .

$e$  : Élément neutre pour la loi  $\otimes$ .

$\oslash$  : Soustraction à gauche dans un dioïde.

$\oslash$  : Soustraction à droite dans un dioïde.

$\top$  : Plus grand élément dans un dioïde.

$\perp$  : Plus petit élément dans un dioïde.

supp : Support d'une série formelle  $S$ .

$A^*$  : Étoile de Kleene de la matrice  $A$  ( $A^* = E \oplus A \oplus A^2 \oplus \dots$ ).

$A^+$  : Dérivée de l'étoile de Kleene  $A^*$  ( $A^+ = A \oplus A^2 \oplus \dots$ ).

$\mathcal{D}$  : Dioïde.

$\mathcal{D}^{n \times n}$  : Dioïde matriciel.

$\mathbb{R}_{\max}$  : Dioïde  $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ , appelé aussi algèbre  $(\max, +)$ .

$\mathbb{R}_{\min}$  : Dioïde  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ , appelé aussi algèbre  $(\min, +)$ .

$\bar{\mathbb{R}}_{\max}$  : Dioïde complet  $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$ , appelé aussi algèbre  $(\max, +)$ .

$\bar{\mathbb{R}}_{\min}$  : Dioïde complet  $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \min, +)$ , appelé aussi algèbre  $(\min, +)$ .

$\bar{\mathbb{R}}_{\max} \llbracket \gamma \rrbracket$  : Dioïde des séries formelles en  $\gamma$  à exposants dans  $\mathbb{R}$  et à coefficients dans  $\mathbb{R}_{\max}$ .

$\bar{\mathbb{R}}_{\min} \llbracket \delta \rrbracket$  : Dioïde des séries formelles en  $\delta$  à exposants dans  $\mathbb{R}$  et à coefficients dans  $\mathbb{R}_{\min}$ .

$\mathbb{B} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$  : Dioïde des séries formelles en  $\gamma$  et  $\delta$  à exposants dans  $\mathbb{R}$  et à coefficients booléens.

$\mathcal{M}_m^{\text{ax}} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$  : Quotient du dioïde  $\mathbb{B} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$  par la relation d'équivalence :

$$\forall A, B \in \mathbb{B} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket, A \equiv B \Leftrightarrow \gamma^* (\delta^{-1})^* A = \gamma^* (\delta^{-1})^* B$$

## Notations

---

$\mathcal{M}_m^{ax+} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$  : Dioïde des éléments causaux de  $\mathcal{M}_m^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$

$L_a$  : Produit à gauche par  $a$ ,  $L_a(x) = a \otimes x$ .

$R_a$  : Produit à droite par  $a$ ,  $R_a(x) = x \otimes a$ .

$L_a^\#$  : Résidué de l'application  $L_a$

$R_a^\#$  : Résidué de l'application  $R_a$

$a \bowtie b$  : Notation utilisée pour représenter  $L_a^\#(b)$

$b \not\bowtie a$  : Notation utilisée pour représenter  $R_a^\#(b)$

$\mathcal{P}$  : Ensemble des places  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ .

$\mathcal{T}$  : Ensemble des transitions  $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ .

$\mathcal{W}$  : Fonction poids associée aux arcs  $\mathcal{W}(\mathcal{P} \times \mathcal{T}) \cup (\mathcal{T} \times \mathcal{P})$ .

$\wedge$  : Borne supérieure dans un dioïde.

$\vee$  : Borne inférieure dans un dioïde.

$\theta_i$  (Ou  $\theta_{i,j}$ ) : Temporisation associée à une place  $\mathcal{P}_i$  (ou  $\mathcal{P}_{i,j}$ ).

$x_i(k)$  : Date de  $k^{\text{ème}}$  tir de la transition  $x_i$ .

$x_i(t)$  : Nombre de tir de la transition  $x_i$  à l'instant  $t$ .

$Y$  : Vecteur de sortie.

$U$  : Vecteur de commande.

$X$  : Vecteur d'état.

$H$  : Matrice de transfert.

# Liste des Figures

---

Figure 2.1 – RdP modélisant le comportement d’un système à ressource partagée .....	22
Figure 2.2 – Évolution du marquage d’un réseau de Petri.....	23
Figure 2.3 – Graphe des marquages atteignables du réseau de Petri de la figure 2.1 .....	24
Figure 2.4 – Sous classes des réseaux de Petri.....	25
Figure 2.5 – Exemple de graphe d’état .....	25
Figure 2.6 – Exemple de graphe d’événements .....	26
Figure 2.7 – Concurrence et synchronisation dans les RdP.....	27
Figure 2.8 – Modèle GET d’une machine.....	28
Figure 2.9 – Principe de la mise en équation d’un graphe d’événements temporisé.....	29
Figure 2.10 – Exemple d’un GET .....	30
Figure 2.11 – Transformation de la figure 2.10 .....	35
Figure 2.12 – Exemple d’RdP représentant un opérateur de décalage "événementiel" .....	39
Figure 2.13 – Opérateur de décalage "événementiel" .....	40
Figure 2.14 – Exemple d’RdP représentant un opérateur de décalage "temporel" .....	41
Figure 2.15 – Opérateur de décalage "temporel" .....	42
Figure 2.16 – Collection de points de $\mathbb{Z}^2$ .....	45
Figure 2.17 – Représentation de “cône Sud-Est“.....	47
Figure 2.18 – Représentation graphique des opérations sur $\mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]$ .....	48
Figure 2.19 – Manipulation de polynômes de $\mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]$ .....	50
Figure 2.20 – Représentation graphique de la série $s = e \oplus \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^5 \oplus \gamma^7\delta^6(\gamma^2\delta^2)^*$ .....	53
Figure 2.21 – Représentation graphique de l’opération de projection $Pr_+$ .....	54
Figure 3.1 – Problématique générale de la commande en boucle ouverte.....	56
Figure 3.2 – Exemple d’atelier d’assemblage.....	58

## Liste des Figures

---

Figure 3.3– Représentation de $H$ .....	59
Figure 3.4 – Représentation de $u_{opt}$ , $z$ et $y$ .....	60
Figure 3.5 – Commande avec modèle de référence : correction d'un système $H$ par un précompensateur $P$ .....	61
Figure 3.6 – Réalisation du précompensateur permettant d'approcher au mieux $G_{ref}$ .....	62
Figure 3.7 – Représentation de $u_{opt}$ et $y$ avec et sans correcteur.....	63
Figure 3.8 – Commande avec modèle de référence : correction d'un système $H$ par un correcteur de type retour de sortie $F$ .....	64
Figure 3.9 – Réalisation du correcteur retour de sortie $F_{opt+}$ .....	67
Figure 3.10 – Représentation de $G_{F_{opt+}}$ , $G_{ref}$ et $H$ .....	68
Figure 3.11 – Commande avec modèle de référence : correction d'un système par un correcteur de type d'état $K$ .....	70
Figure 3.12 – Représentation de $G_{k_{opt+}}$ , $G_{ref}$ et $H$ .....	72
Figure 3.13 – Structure de l'observateur.....	72
Figure 3.14 – Contrôle utilisant l'observateur .....	76
Figure 3.15 – Représentation de $x$ et $\hat{x}$ .....	77
Figure 3.16 – Représentation de $G_{k_{opt+}}$ , $G_{ref}$ et $G_{F_{opt+}}$ .....	78

# Liste des tableaux

---

Tableau 3.1-Tableau correspondant à la consigne désirée .....	59
Tableau 3.2- Tableau correspondant à $y_{opt}$ .....	60
Tableau 3.3- Tableau représentant 3 tirs à l'instant 0 sur chaque entrée .....	63

# Introduction

---

Sous l'appellation Systèmes à Evènements Discrets (SED) sont regroupés des systèmes généralement conçus par l'homme, obéissant à des règles opérationnelles sous forme d'algorithmes, et dont l'état évolue à des instants discrets, en réponse à des événements ponctuels. Ces systèmes regroupent les systèmes de production, les réseaux de transport ou encore les systèmes informatiques. A l'instar des systèmes dits "naturels" qui peuvent être modélisés par des équations différentielles dépendantes du temps, les systèmes à événements discrets doivent bénéficier de modèles aptes à prendre en compte de leurs caractéristiques dynamiques suscitées par divers phénomènes (tâches séquentielles ou simultanées, temporisées ou non, synchronisées ou concurrentes, etc.).

Eléments capitaux dans le fonctionnement des économies modernes, les systèmes de production doivent faire face à la demande de plus en plus croissante et plus exigeante, en particulier vis à vis des délais. Ils sont caractérisés par un changement d'état produit par des événements. Ce sont des systèmes pour lesquels les variables d'état changent seulement à certains instants associés à des événements ponctuels, par exemple début et fin d'usinage d'une pièce. Ils sont composés de ressources (produit brut ou semi fini, etc.) partagées par plusieurs utilisateurs (machines, convoyeurs, etc.); contribuant tous aux mêmes objectifs (usiner, assembler des pièces, etc.). Leur fonctionnement est caractérisé par :

- le parallélisme : de nombreux événements peuvent se dérouler simultanément et indépendamment dans diverses parties du système;
- la synchronisation : c'est un phénomène qui nécessite la disponibilité simultanée de plusieurs ressources ou la vérification simultanée de plusieurs conditions afin d'exécuter une tâche;
- la concurrence : elle apparaît au moment où une machine doit choisir une ressource parmi plusieurs.
- Délai : chaque tâche doit être effectuée sur un laps de temps bien déterminé.

La modélisation de ces systèmes (que ce soit un système de production, un système de transport ou autres) est une transition primordiale entre la réalité et un objet graphique ou mathématique qui le représente.

Le travail présenté dans ce mémoire est consacré aux systèmes à événements discrets faisant apparaître les phénomènes de synchronisation et de délai. En ce qui concerne cette classe de systèmes, il est possible d'obtenir un modèle mathématique sous la forme d'équations de récurrence, dite forme d'état, qui utilise des opérateurs max, min et la somme +, en passant par les Graphes d'Evènements Temporisés (GET) (une sous classe de réseaux de Petri) qui fournissent une représentation graphique de ces systèmes. Sous cette

## Introduction

---

forme, les opérations ne sont pas linéaires, mais une fois, traduites dans une structure algébrique particulière appelée semi-anneau idempotent ou dioïde, la linéarité apparaît. Cette approche est appelée théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes. Cette théorie a vu le jour au début des années 80 (théorie détaillée dans les ouvrages [Gaubert, 1992], [Baccelli, 1992]).

Grâce aux avancées dans ce domaine, il existe aujourd'hui des outils informatiques, tels que la librairie MinMaxGD créée par le groupe de LISA (Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés), [Hardouin, 2006], permettant de représenter ces systèmes linéaires sous forme de séries périodiques ; que nous utilisons pour nos calculs.

Dans le cadre d'étude des systèmes à événements discrets, l'objectif est double. D'une part, à l'instar de l'automatique classique, on souhaite pouvoir aborder des problèmes de commande et ainsi répondre à cette question : quand et en quelle quantité faut-il lancer les ordres de fabrication pour optimiser les performances du système de production ? D'autre part, des indicateurs de performance tels que des temps de cycle, des taux de production, une taille de stock ou encore des temps d'attente, sont également recherchés.

Lorsqu'un système manufacturier peut être décrit par un modèle dit représentation d'état, le problème de pilotage de la production est alors exprimé de la façon suivante : la fonction respectivement  $u(k)$  et  $u(t)$ , décrit respectivement les dates et les quantités, des lancements de produits bruts ou semi-finis en production, et la fonction respectivement  $y(k)$  et  $y(t)$ , décrit respectivement les dates et les quantités, de produits finis (ou semi- finis) disponibles en sortie du système.

Lors de la conception d'une commande d'un système, il est nécessaire de définir un critère à optimiser. Ainsi, lorsque les exigences sur la disponibilité de produits finis en sortie du système sont fixées, le critère choisi et connu sous le nom de critère du juste à temps, permet de trouver la trajectoire  $u(t)$  décrivant le déclenchement le plus tardif des ordres de fabrication en entrée du système. La quantité juste est ainsi disponible au plus tard avant la date fixée par le client.

Par analogie avec l'automatique conventionnelle, une première structure permettant de réaliser une commande selon ce critère du juste à temps, est une commande optimale en boucle ouverte dont l'objectif est la poursuite d'une trajectoire connue a priori. Une autre démarche de commande en boucle ouverte correspond à la recherche d'un précompensateur optimal selon le critère du juste à temps. Il s'agit d'un contrôleur placé en amont du système afin de compenser la dynamique du système représenté par sa fonction de transfert, dans le but de s'approcher au mieux d'un modèle de référence décrivant le comportement entrée/sortie désiré. Ce problème est par exemple traité dans [Lhommeau 2004], [Hardouin 2004], [Hardouin 2008].

Toujours inspiré de l'automatique classique, en partant d'un modèle nominal d'un GET dont on connaît le transfert  $H$  dans  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ , le problème de commande traité consiste, à synthétiser un correcteur de type retour de sortie et retour d'état, tel que le GET muni du

## Introduction

---

correcteur soit aussi proche que possible de celui d'une spécification établie sous forme d'un modèle de référence. Le bouclage de la sortie (ou de l'état interne) sur l'entrée permet de tenir compte de l'évolution du système pour gérer au mieux l'entrée, à nouveau au sens du juste à temps. [Hardouin 2004], [Hardouin 2008], [Lhommeau 2004].

Ce mémoire est structuré en trois chapitres comme suit :

- Dans le premier chapitre nous présentons les outils algébriques nécessaires à la représentation et à la commande des graphes d'événements temporisés. Nous donnons tout d'abord des résultats généraux sur les structures ordonnées et treillis. Une part importante de ce premier chapitre est ensuite consacrée à la présentation des dioïdes et de leurs liens avec les structures ordonnées présentées dans la première partie. La dernière partie de ce chapitre est entièrement dédiée à la théorie de la résiduation.
- Le second chapitre présente la modélisation des graphes d'événements temporisés sur différents dioïdes rencontrés dans la littérature, quelques éléments de théorie spectrale des matrices  $(\max, +)$ . Nous insistons particulièrement sur la présentation du dioïde  $\mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]$ , qui sera le dioïde considéré pour toutes les illustrations présentées dans ce mémoire.
- Dans le troisième chapitre, nous étudions la commande en boucle ouverte et en boucle fermée, vis-à-vis du critère de juste-à-temps, des systèmes à événements discrets, ainsi que la synthèse d'un observateur permettant de fournir une estimation de vecteur d'état du système étudié en fonction des informations disponibles sur ce système (les mesures d'entrée et de sortie et le modèle dynamique du procédé). Un exemple illustratif a été considéré.
- Une annexe présente le script Scilab qui fournit les résultats de calcul pour les exemples proposés tout au long du dernier chapitre. Il s'agit de script utilisant la boîte à outils MinMaxGD.

# CHAPITRE 1

---

## Outils algébriques

### Introduction

Nous rassemblons ici un certain nombre de notions utiles à la compréhension de la structure algébrique que l'on utilisera par la suite, et plus particulièrement la notion d'ordre. Après un bref rappel sur les ensembles ordonnés, on présente cette structure algébrique particulière : les dioïdes, également appelés semi-anneaux idempotents, sont des ensembles naturellement ordonnés par la loi additive, notée  $\oplus$ .

Les applications définies sur un dioïde ne sont pas inversibles. Cependant la théorie de la résiduation fournit une réponse alternative à ce problème d'inversion d'applications. En effet, la structure des dioïdes leur confère la possibilité pour une application isotone  $f$  d'établir la plus grande solution de  $f(x) \preceq b$ , ou la plus petite solution de  $f(x) \succeq b$  pour tout  $b$ . Nous exposerons dans ce chapitre les bases de la théorie de la résiduation. Ce chapitre est rédigé et inspiré de : [Lhommeau, 2003], [Houssin, 2006], [Ouerghi, 2006], [Boutin, 2009], [Gaubert, 1992], [Moller, 1988], [Baccelli, 1992], [Guezzi, 2010], [Menguy, 1997], [Aurélien, 2007], [Cottenceau, 1999], [Euriell, 2011].

### 1.1 Ensembles ordonnés

On rappelle dans cette section certaines définitions et propriétés de base relatives aux ensembles ordonnés et notamment aux treillis. Ces rappels sont tirés de : [Lhommeau, 2003], [Houssin, 2006], [Ouerghi, 2006].

#### 1.1.1 Relation d'ordre et structures ordonnées

Considérons l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$ , on peut définir les deux relations suivantes : soient  $a, b \in \mathbb{N}$

$a \leq b$  : relation d'ordre habituelle

$a | b$  :  $a$  divise  $b$

Ces deux relations présentent des propriétés communes :

*réflexivité*  $a \leq a$  et  $a | a$

*antisymétrie*  $\begin{cases} \text{si } a \leq b \text{ et } b \leq a \text{ alors } a = b \\ \text{si } a | b \text{ et } b | a \text{ alors } a = b \end{cases}$

*transitivité*  $\begin{cases} \text{si } a \leq b \text{ et } b \leq c \text{ alors } a \leq c \\ \text{si } a | b \text{ et } b | c \text{ alors } a | c \end{cases}$

On dit alors que les relations  $a \leq b$  et  $a | b$  sont des relations d'ordre.

**Définition 1.1 (Ensemble ordonné).** Un ensemble ordonné  $E$  est un ensemble fini ou infini, on le note  $(E, \preceq)$ , muni d'une relation d'ordre, notée  $\preceq$ , entre ses éléments c'est-à-dire une relation binaire qui est  $(\forall a, b, c \in E)$  :

- Réflexive, i.e. tout élément est en relation avec lui-même ( $a \preceq a$ ) ;
- Antisymétrique, i.e. si  $a \preceq b$  et  $b \preceq a$ , alors  $a = b$  ;
- Transitive, i.e. si  $a \preceq b$  et  $b \preceq c$ , alors  $a \preceq c$ .

**Remarque 1.1.** L'ensemble  $E$  muni de la relation d'ordre  $\preceq$  forme l'ensemble ordonné  $(E, \preceq)$ . Cet ensemble est dit totalement ordonné si  $\preceq$  est une relation d'ordre totale, c'est-à-dire si deux éléments quelconques  $x$  et  $y$  de  $E$  sont comparables ( $x \preceq y$  ou  $y \preceq x$ ). Dans le cas contraire, l'ordre est partiel et l'ensemble est dit partiellement ordonné. On dira que deux éléments  $x$  et  $y$  de  $E$  sont incomparables, noté  $x || y$ , s'ils vérifient  $x \not\preceq y$  et  $y \not\preceq x$ .

Un ensemble totalement ordonné est aussi appelé une **chaîne** tandis qu'un ensemble composé d'éléments incomparables entre eux est appelé une **antichaîne**.

**Exemple 1.1 (Ensembles ordonnés).** On présente ici quelques exemples d'ensembles munis d'une relation d'ordre.

– L'ensemble  $(\mathbb{N}, \leq)$  est totalement ordonné.

– La relation d'ordre  $|$  définie dans  $\mathbb{N}$  est partielle. En considérant cette relation, on a, par exemple :  $3 || 5$ .

– L'ensemble  $(\mathbb{N}^{2 \times 2}, \leq)$  est partiellement ordonné bien que  $(\mathbb{N}, \leq)$  le soit totalement. On peut aisément le remarquer en considérant les deux éléments suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} || \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Définition 1.2.** Soit  $E$  un ensemble ordonné par  $\preceq$ . On peut définir certains éléments particuliers :

**Majorant :**  $M$  est un majorant de  $A \subset E$  si  $\forall a \in A, a \preceq M$ . On dit alors que  $A$  est une partie majorée de  $E$ .

**Minorant :**  $m$  est un minorant de  $A \subset E$  si  $\forall a \in A, m \preceq a$ .  $A$  est une partie minorée de  $E$ .

**Borne supérieure :**  $S = \sup A$  (également notée  $S = \bigvee A$ ) est la borne supérieure de  $A$  si  $S$  est un majorant de  $A$  et si pour tout majorant  $M$  de  $A$ ,  $S \preceq M$ . La borne supérieure est communément appelée "plus petit majorant".

**Borne inférieure :**  $I = \inf A$  (également notée  $I = \bigwedge A$ ) est la borne inférieure de  $A$  si  $I$  est un minorant de  $A$  et si pour tout minorant  $m$  de  $A$ ,  $m \preceq I$ . La borne inférieure est communément appelée "plus grand minorant".

**Plus grand élément :** On appelle plus grand élément ("Top" en anglais) d'un ensemble  $E$ , un élément noté  $\top_E \in E$  tel que pour tout élément  $x \in E$ , on ait  $x \preceq \top_E$ .

**Plus petit élément :** On appelle plus petit élément ("Bottom" en anglais) d'un ensemble  $E$ , un élément noté  $\perp_E \in E$  tel que pour tout élément  $x \in E$ , on ait  $\perp_E \preceq x$ .

**Remarque 1.2.** Le plus petit élément (resp. plus grand élément), s'il existe, est nécessairement unique.

**Définition 1.3 (Application).** Une application est une relation entre deux ensembles ordonnés  $(A, \preceq)$  et  $(B, \preceq)$  pour laquelle chaque élément de  $A$  (appelé ensemble de départ ou source) est associé à un élément de  $B$ , notée  $f : A \rightarrow B$ .

**1.3.1**  $f$  est injective si  $\forall a, b \in A, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ .

**1.3.2**  $f$  est surjective si  $\forall b \in B, \exists a \in A \mid f(a) = b$ .

**1.3.3**  $f$  est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

### 1.1.2 Demi-treillis et treillis

Parmi les ensembles ordonnés, il y a une classe particulièrement riche de propriétés : les treillis. En effet, les treillis établissent le lien entre les ensembles ordonnés tels qu'on les a présentés précédemment et les structures algébriques. Nous renvoyons le lecteur à [Moller, 1988], [Lhommeau, 2003], [Gaubert, 1992] pour une étude plus approfondie sur les treillis.

**Définition 1.4 (Demi-treillis).** Un demi-treillis supérieur est un ensemble ordonné  $(E, \preceq)$ , non vide, dans lequel tout couple d'éléments  $(a, b) \in E$  admet une borne supérieure (plus petit majorant) notée  $\sup(a, b)$  ou  $a \vee b$ . De même, un demi-treillis inférieur est un ensemble ordonné  $(E, \preceq)$ , non vide, dans lequel tout couple d'éléments  $(a, b) \in E$  admet une borne inférieure (plus grand minorant) notée  $\inf(a, b)$  ou  $a \wedge b$ .

**Définition 1.5 (Treillis).** L'ensemble ordonné  $(E, \preceq)$  est un treillis si c'est à la fois un demi-treillis supérieur et un demi-treillis inférieur. Autrement dit, un treillis est un ensemble ordonné dans lequel tout couple d'éléments admet un plus petit majorant et un plus grand minorant.

**Remarque 1.3.** Pour toute relation d'ordre, notée  $\preceq$ , il existe une relation d'ordre inverse, notée  $\succcurlyeq$ . Par conséquent, si  $(E, \preceq)$  est un demi-treillis supérieur (resp. demi-treillis inférieur) alors  $(E, \succcurlyeq)$  est un demi-treillis inférieur (resp. demi-treillis supérieur). C'est ce qu'on appelle le principe de dualité.

**Définition 1.6 (Demi-treillis complet).** Soient  $(P, \preceq)$  un demi-treillis supérieur et  $(Q, \preceq)$  un demi-treillis inférieur.

- Si  $\bigvee S$  existe pour tout  $S \subseteq P$ , alors  $P$  est un demi-treillis supérieur complet.
- Si  $\bigwedge R$  existe pour tout  $R \subseteq Q$  alors  $Q$  est un demi-treillis inférieur complet.

**Définition 1.7 (Treillis complet).** L'ensemble ordonné  $(E, \preceq)$  est un treillis complet si c'est à la fois un demi-treillis supérieur complet et un demi-treillis inférieur complet

**Exemple 1.2.** Le treillis  $(\mathbb{N}, \vee, \wedge)$  n'est pas complet.  $(\mathbb{N} \cup \{+\infty, -\infty\}, \vee, \wedge)$  est un treillis complet.

**Remarque 1.4.** Tout treillis fini est complet.

**Théorème 1.1.** [Baccelli, 1992] Un demi-treillis supérieur complet est un treillis complet, s'il contient un plus petit élément.

**Preuve :** La démonstration est donnée par exemple dans [Menguy, 1997].

## 1.2 Diïdes et semi-anneaux

Dans cette section, au préalable nous présentons quelques définitions de base, en suit la structure algébrique de diïde, puis on met en évidence le lien entre cette structure et les ensembles ordonnés. Cette partie est inspirée des ouvrages [Lhommeau, 2003], [Houssin, 2006], [Boutin 2009], [Gaubert, 1992], [Moller, 1988].

**Définition 1.8 (Loi de composition interne).** Etant donné un ensemble  $E$ , une loi de composition interne  $\oplus$  sur  $E$  est une application de  $E \times E$  dans  $E$ . En d'autres termes,

$$\forall a, b \in E, a \oplus b \in E$$

**Définition 1.9 (Elément neutre).** Etant donné un ensemble  $E$  et une loi de composition interne  $\oplus$  sur  $E$ , on dit que  $E$  possède un élément neutre pour  $\oplus$  si,

$$\exists \varepsilon \in E \text{ tel que } \forall a \in E, (a \oplus \varepsilon) = (\varepsilon \oplus a) = a$$

**Définition 1.10 (Associativité).** Etant donné un ensemble  $E$  et une loi de composition interne  $\oplus$  sur  $E$ ,  $\oplus$  est dite associative si,  $\forall a, b, c \in E : (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ .

**Définition 1.11 (Commutativité).** Etant donné un ensemble  $E$  et une loi de composition interne  $\oplus$  sur  $E$ ,  $\oplus$  est dite commutative si  $\forall a, b \in E, a \oplus b = b \oplus a$ .

**Définition 1.12 (Semi-groupe).** Un ensemble  $E$  muni d'une loi de composition interne associative  $\oplus$  est appelé un semi-groupe. On le note  $(E, \oplus)$ .

**Définition 1.13 (Monoïde).** Un monoïde est un semi-groupe  $(E, \oplus)$  possédant un élément neutre  $\varepsilon$ . On le note  $(E, \oplus, \varepsilon)$ .

- Exemples de monoïdes :  $(\mathbb{R}, +, 0), (\mathbb{R}, \times, 1), (\mathbb{N}, +, 0)$ .

**Définition 1.14 (Monoïde commutatif).** Un monoïde commutatif est un monoïde  $(E, \oplus, \varepsilon)$  pour lequel  $\oplus$  est commutative.

**Exemple 1.3.** L'ensemble  $\mathbb{N}$  muni du produit usuel  $\times$  est un monoïde. L'élément neutre de  $(\mathbb{N}, \times)$  est 1. En outre,  $(\mathbb{N}, \times, 1)$  est un monoïde commutatif.

**Définition 1.15 (Monoïde ordonné).** Un monoïde  $(E, \oplus)$  est dit ordonné lorsqu'on peut définir sur  $E$  une relation d'ordre  $\preceq$  compatible avec la loi  $\oplus$ , c'est-à-dire telle que :

$$\forall a, b, c \in E \quad a \preceq b \Rightarrow a \oplus c \preceq b \oplus c$$

**Définition 1.16 (Monoïde idempotent).** Un monoïde  $(E, \oplus)$  est dit idempotent si la loi  $\oplus$  est commutative, associative et idempotente, c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall a \in E \quad a \oplus a = a$$

L'idempotence de la loi pour un monoïde idempotent induit naturellement une relation d'ordre. On dévoile dans le théorème suivant l'existence de cet ordre.

**Théorème 1.2.** Si  $(E, \oplus)$  est un monoïde idempotent, alors une relation d'ordre  $\preceq$  peut être définie par :

$$\forall a, b \in E \quad a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$$

Un monoïde idempotent est donc un monoïde ordonné.

**Preuve :** pour les preuves nous renvoyons le lecteur à [Lhommeau, 2003] page 10.

On définit maintenant les notions de semi-anneau et de dioïde qui sont des structures algébriques définies à partir de monoïdes.

**Définition 1.17 (Semi-anneau).** La structure algébrique  $(D, \oplus, \otimes)$  appelée un semi-anneau, l'ensemble  $D$  muni de deux lois internes  $\oplus$  et  $\otimes$  vérifiant les axiomes suivants :

- $(D, \oplus)$  est un monoïde commutatif dont l'élément neutre  $\varepsilon$  est appelé élément nul.
- $(D, \otimes)$  est un monoïde, son élément neutre est appelé unité et noté  $e$ .
- La multiplication  $\otimes$  est **distributive** relativement (à droite et à gauche) par rapport à la loi  $\oplus$ ,

$$\forall a, b, c \in D, a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

$$\text{et } (a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$$

L'élément nul  $\varepsilon$  est **absorbant** pour la loi  $\otimes$ ,

$$\forall a \in D, a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$$

Si la loi  $\otimes$  est commutative, alors  $(D, \oplus, \otimes)$  est un semi-anneau commutatif.

**Définition 1.18 (Dioïde).** Un dioïde est un semi-anneau  $(D, \oplus, \otimes)$  dont la loi additive  $\oplus$  est idempotente, c'est-à-dire,  $\forall a \in D, a \oplus a = a$

**Remarque 1.5.** Un dioïde est appelé aussi semi-anneau idempotent.

Puisque  $(D, \oplus)$  est un monoïde idempotent, c'est aussi un monoïde ordonné (théorème 1.2). Les mêmes propriétés s'appliquent pour un dioïde : l'idempotence de la loi  $\oplus$  induit un ordre dans le dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$  qui est compatible avec les lois  $\oplus$  et  $\otimes$ .

**Théorème 1.3.** Dans un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$ , une relation d'ordre naturel notée  $\preceq$  est définie par :

$$\forall a, b \in D, a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = b.$$

Cette relation d'ordre est cohérente avec les lois  $\oplus$  et  $\otimes$ , autrement dit,

$$\forall a, b, c \in D \quad a \preceq b \Rightarrow a \oplus c \preceq b \oplus c$$

$$a \otimes c \preceq b \otimes c \text{ et } c \otimes a \preceq c \otimes b$$

**Preuve :** L'essentiel de la preuve d'après [Houssin, 2006] réside dans la démonstration du théorème 1.2 Il reste à démontrer que la relation d'ordre est compatible avec la loi multiplicative. Soient  $a, b \in D$  tels que  $a \preceq b$  et  $c \in D$  on a  $b \otimes c = (a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$ , d'où  $a \otimes c \preceq b \otimes c$  (idem pour la multiplication à gauche).

**Exemples** de semi-anneau idempotent:

- **(Algèbres (max,+))**

Comme exemple de semi-anneaux idempotent, on peut citer, le dioïde commutatif  $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$  pour lequel  $\varepsilon = -\infty$  et  $e = 0$  ce dioïde noté  $\mathbb{R}_{\max}$ , est classiquement

appelé aussi algèbre  $(\max, +)$  ou algèbre Max-Plus. Dans ce dioïde, la loi  $\oplus$  correspond à l'application  $\max$  (maximum)  $\forall a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, a \oplus b \Leftrightarrow \max(a, b)$  (par exemple  $1 \oplus 2 = 2 = \max(1, 2)$ ). La loi  $\otimes$  coïncide à la somme usuelle :  $\forall a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, a \otimes b \Leftrightarrow b + a$  (par exemple  $1 \otimes 2 = 3$ ).

- (Algèbres  $(\min, +)$ )

$(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$  est un dioïde commutatif, appelé  $(\min, +)$  ou algèbre Min-Plus pour lequel  $\mathcal{E} = +\infty$  et  $e = 0$ . Le semi-anneau idempotent, noté  $\mathbb{R}_{\min}$ , la loi  $\oplus$  coïncide à l'application  $\min$  (minimum)  $\forall a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a \oplus b \Leftrightarrow \min(a, b)$  (par exemple  $1 \oplus 2 = 1 = \min(1, 2)$ ). La loi  $\otimes$  concorde à la somme usuelle :  $\forall a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a \otimes b \Leftrightarrow b + a$  (par exemple  $1 \otimes 2 = 3$ ).

**Remarque 1.6.** Généralement, dans une équation, la loi  $\otimes$  est supprimée ou remplacée par un point ( $a \otimes b = ab = a \cdot b$ ).

Pour le dioïde  $\mathbb{R}_{\max}$ , la relation d'ordre  $\preceq$  correspond à la relation d'ordre dans l'algèbre usuelle " $\leq$ ",  $\forall a, b \in \mathbb{R}_{\max}, a \preceq b \Leftrightarrow b = \max(a, b) \Leftrightarrow a \leq b$ . Dans le dioïde  $\mathbb{R}_{\min}$ , l'ordre est le dual de l'ordre naturel défini dans  $\mathbb{R}_{\max}$ , c'est-à-dire,

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_{\min}, a \preceq b \Leftrightarrow b = \min(a, b) \Leftrightarrow a \geq b$$

### 1.2.1 Calcul matriciel dans les dioïdes

Des dioïdes peuvent aussi être formés à partir d'ensembles d'éléments plus complexes que les ensembles de scalaires. Il est en particulier possible de traiter des cas matriciels. [Boutin, 2009], [Lhommeau, 2003].

**Définition 1.19 (Dioïde matriciel).** L'ensemble des matrices carrées de dimension  $n$ , à coefficients dans un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$ , est un dioïde matriciel, noté  $(D^{n \times n}, \oplus, \otimes)$ , où les opérations sont définies, à partir des opérations du dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$  de manière analogue à l'algèbre classique, de la façon suivante:

$$\forall A, B \in D^{n \times n}, A \oplus B = A_{ij} \oplus B_{ij},$$

$$A \otimes B = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj}.$$

L'élément identité de  $D^{n \times n}$  est la matrice, notée  $Id_n$ , composée de  $e$  sur la diagonale et de  $\mathcal{E}$  partout ailleurs. L'élément zéro est la matrice composée exclusivement de  $\mathcal{E}$  et est noté  $\mathcal{E}$ .

Le produit de deux matrices de dimensions compatibles, pas nécessairement carrées, peut être défini de la façon suivante :

$$A \in D^{n \times p}, B \in D^{p \times q} :$$

$$A \otimes B = \bigoplus_{k=1}^p A_{ij} \otimes B_{ij}.$$

**Exemple 1.4.** Nous donnons ici un exemple d'un produit et une somme de deux matrices carrées dans l'algèbre  $(\max, +)$ .

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \\ A \oplus B &= \begin{pmatrix} \max(8, 5) & \max(2, 3) \\ \max(6, 1) & \max(4, 7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \\ A \otimes B &= \begin{pmatrix} \max(8+5, 2+1) & \max(8+3, 2+7) \\ \max(6+5, 4+1) & \max(6+3, 4+7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 11 & 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 1.2.2 Dioïde de séries formelles

Les références de base pour les séries à coefficients dans les dioïdes sont [Houssin, 2006] [Boutin, 2009], et d'après [Boutin, 2009], on doit l'essentiel des résultats dans ce contexte aux travaux de Pierre Moller [Moller, 1988] et de Stéphane Gaubert [Gaubert, 1992].

**Définition 1.20 (Série formelle).** Soit  $(D, \oplus, \otimes)$  un dioïde. Une série formelle en l'indéterminée notée  $z$  et à coefficients dans  $D$ , est l'application  $S$  définie de  $\mathbb{Z}$  dans  $D$  et pour laquelle  $\forall k \in \mathbb{Z}, S(k)$  est le coefficient de  $z^k$ . La série  $S$  peut également être représentée par l'expression suivante :

$$s = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} s(k) z^k = s(0) \oplus s(1)z \oplus s(2)z^2 \oplus \dots \oplus s(k)z^k \oplus \dots$$

Le support d'une série formelle  $S$  est défini par :

$$Supp(s) = \{ k \in \mathbb{Z} \mid s(k) \neq \varepsilon \}$$

Par exemple, la série  $S = 2z^1 \oplus 5z^3 \oplus 1z^4$  a pour support  $Supp(s) = \{1, 3, 4\}$

**Remarque 1.7 (Série formelle en plusieurs indéterminées).** Si la série formelle  $S$  à  $p$  Indéterminées notées  $z_1$  à  $z_p$  (nécessairement commutatives soit  $z_1 z_2 = z_2 z_1$ ), elle est alors représentée par l'expression suivante :

$$S \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \bigoplus_{k \in Z} s(k_1, \dots, k_p) z_1^{k_1} \dots z_p^{k_p},$$

Avec :

$$\text{Supp}(s) = \{(k_1, \dots, k_p) \in Z^p \mid s(k_1, \dots, k_p) \neq \varepsilon\}$$

**Remarque 1.8 (Monôme et polynôme).** Une série formelle à support fini (c'est-à-dire une série avec un nombre fini de coefficients non nuls) est appelée polynôme, par exemple  $S = 2z^1 \oplus 5z^3 \oplus 1z^4$ , alors qu'une série formelle dont le support est un singleton est appelée monôme, par exemple  $S = 2z^1$ .

**Définition 1.21 (Diïde de séries formelles).** L'ensemble des séries formelles à une indéterminée  $z$ , à coefficients dans  $D$ , et munies des opérations suivantes :

$$(I) \quad \begin{cases} s_a \oplus s_b : (s_a \oplus s_b)(k) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} s_a(k) \oplus s_b(k) \\ s_a \otimes s_b : (s_a \otimes s_b)(k) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \bigoplus_{k=k_a+k_b} (s_a(k_a) \otimes s_b(k_b)) \end{cases}$$

Forme le diïde de séries formelles noté  $D[[z]]$ .

Si  $D$  est complet, alors  $D[[z]]$  l'est également.

**Remarque 1.9 (Diïde de séries formelles en plusieurs indéterminées).** L'ensemble des séries formelles à  $p$  indéterminées commutatives  $z_1$  à  $z_p$ , à coefficients dans  $D$  et munies des opérations données par (I), forme le diïde de séries formelles noté  $D[[z_1, \dots, z_p]]$ . Si  $D$  est complet, alors  $D[[z_1, \dots, z_p]]$  l'est également.

**Exemple 1.5 (Série formelle et diïde de série formelles à deux variables).**

Soient  $s$  et  $g$  deux séries formelles à deux variables  $z_1$  et  $z_2$  commutatives à coefficients dans un diïde  $D$  :

$$s \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \bigoplus_{\{k_1, k_2\} \in Z^2} s(k_1, k_2) z_1^{k_1} z_2^{k_2}$$

$$g \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \bigoplus_{\{k_1, k_2\} \in Z^2} g(k_1, k_2) z_1^{k_1} z_2^{k_2}$$

$$(s \oplus g)(k_1, k_2) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} s(k_1, k_2) \oplus g(k_1, k_2)$$

$$(s \otimes g)(k_1, k_2) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \bigoplus_{i_\lambda + j_\lambda = k_\lambda} s(i_1, i_2) \otimes g(j_1, j_2), \lambda \in \{1, 2\}$$

### 1.3 Dioïdes et treillis

On a vu précédemment qu'un dioïde a une structure algébrique de semi-anneau ordonné, nous nous efforçons, dans cette section, de présenter les relations entre dioïdes et treillis.

Le théorème 1.3 nous permet d'affirmer qu'un dioïde a une structure de demi-treillis supérieur du fait de la relation d'ordre induite par la loi additive. Dans un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$  cette borne supérieure, traditionnellement notée  $\vee$ , correspond à la loi additive  $\oplus$  (tout couple  $(a, b) \in D$  admet  $a \oplus b$  comme borne supérieure). De plus, on sait, d'après le théorème 1.1, qu'un demi-treillis supérieur muni d'un plus petit élément possède en fait une structure de treillis. Ce théorème s'applique directement au cas des dioïdes puisqu'ils possèdent en  $\varepsilon$  un plus petit élément. Un dioïde possède donc une structure de treillis. On peut donc appliquer directement aux dioïdes les résultats sur les treillis [Houssin, 2006].

**Définition 1.22 (Dioïde complet).** Un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$  est dit complet si toute somme infinie d'éléments de  $D$  est définie, et si la loi  $\otimes$  est distributive (à gauche et à droite) par rapport à la loi  $\oplus$  et cette distributivité s'étend aux sommes infinies. C'est-à-dire pour tout  $d \in D$  et pour tout  $A \subset D$ , nous avons :

$$\begin{aligned} & \bigoplus_{a \in A} a \in D \\ d \otimes \left( \bigoplus_{a \in A} a \right) &= \bigoplus_{a \in A} (d \otimes a) \\ \left( \bigoplus_{a \in A} a \right) \otimes d &= \bigoplus_{a \in A} (a \otimes d) \end{aligned}$$

**Définition 1.23 (Plus grand élément).** Dans un dioïde complet  $(D, \oplus, \otimes)$ , on définit le plus grand élément, noté  $\top$  en référence aux notations des treillis, comme la borne supérieure de ce dioïde. Ainsi  $\top$  vérifie  $\forall a \in D, \top \oplus a = \top$  soit par extension  $\top = \bigoplus_{a \in D} a$ . Par ailleurs, afin de respecter l'absorption de  $\varepsilon$  pour le produit,  $\top \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes \top = \varepsilon$ .

**Exemple 1.6.** Le dioïde défini précédemment  $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$  n'est pas complet. Nous devons ajouter la borne supérieure  $\top = +\infty$  avec la convention définie précédemment, à savoir  $+\infty \otimes (-\infty) = -\infty$  car l'élément  $\varepsilon = -\infty$  est absorbant. Ce nouveau dioïde complet est noté  $\overline{\mathbb{R}}_{\max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$ .

**Définition 1.24 (Borne inférieure).** On peut définir dans un dioïde complet  $(D, \oplus, \otimes)$  la notion de borne inférieure, notée  $\wedge$ . Cette loi est associative, commutative, idempotente et vérifie :  $a \wedge b = \bigoplus \{x \mid x \preceq a \text{ et } x \preceq b\}$ .

**Définition 1.25 (Sous-dioïde).** Soit un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$ . Un sous-ensemble  $C \subset D$  est qualifié de sous-dioïde de  $(D, \oplus, \otimes)$ . Si et seulement si :

- $\varepsilon, e \in C$
- $C$  est fermé pour les lois  $\otimes$  et  $\oplus$ , c'est-à-dire,  
 $\forall a, b \in C, a \oplus b \in C$  et  $a \otimes b \in C$

## 1.4 Applications définies sur les dioïdes

Dans cette section, on met en évidence certaines propriétés concernant les applications définies sur des ensembles ordonnés et plus précisément sur des dioïdes. [Aurélien, 2007], [houssin, 2006].

**Définition 1.26 (Homomorphisme, isomorphisme).** Une application  $f$  d'un dioïde  $D$  dans un dioïde  $C$  est un homomorphisme si  $\forall a, b \in D$  :

$$\begin{aligned} f(a \oplus b) &= f(a) \oplus f(b) \quad \text{et} \quad f(\varepsilon) = \varepsilon \\ f(a \otimes b) &= f(a) \otimes f(b) \quad \text{et} \quad f(e) = e \end{aligned}$$

Si de plus,  $f$  est bijective (Tout élément de  $C$  admet un et un seul antécédent dans  $D$ ), alors  $f$  est un isomorphisme.

Une application vérifiant seulement la propriété :

$$f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \quad \text{et} \quad f(\varepsilon) = \varepsilon \quad \text{Est dite } \oplus\text{-morphisme.}$$

Une application vérifiant seulement la propriété :

$$f(a \otimes b) = f(a) \otimes f(b) \quad \text{et} \quad f(e) = e \quad \text{Est dite } \otimes\text{-morphisme.}$$

**Définition 1.27 (Isotonie).** Une application  $f$  d'un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$  dans un dioïde  $(C, \oplus, \otimes)$  est dite isotone si  $\forall a, b \in D, a \preceq b \Rightarrow f(a) \preceq f(b)$ .

**Définition 1.28 (Antitone).** Une application  $f$  d'un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$  dans un dioïde  $(C, \oplus, \otimes)$  est dite antitone si  $\forall a, b \in D, a \preceq b \Rightarrow f(a) \succeq f(b)$ .

**Définition 1.29 (Continuité).** Soient  $(A, \oplus, \otimes)$  et  $(B, \oplus, \otimes)$  deux dioïdes complets. Une application  $f$  de  $A$  dans  $B$ .

- $f$  est semi-continue inférieurement (s.c.i) si pour tout sous-ensemble  $C \subset A$ ,  $f\left(\bigoplus_{x \in C} x\right) = \bigoplus_{x \in C} f(x)$
- $f$  est semi-continue supérieurement (s.c.s) si pour tout sous-ensemble  $C \subset A$ ,  $f\left(\bigwedge_{x \in C} x\right) = \bigwedge_{x \in C} f(x)$

- $f$  est dite continue si elle à la fois s.c.i et s.c.s.

**Remarque 1.10.** Une application s.c.i. ou s.c.s est nécessairement isotone puisque

$$a \succcurlyeq b \Leftrightarrow \begin{aligned} a = a \oplus b &\Rightarrow f(a) = f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \Leftrightarrow f(a) \succcurlyeq f(b) \\ b = a \wedge b &\Rightarrow f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \Leftrightarrow f(b) \preccurlyeq f(a) \end{aligned}$$

## 1.5 Résolution d'équations dans un dioïde

Dans la suite de ce rapport, nous sommes amenés à résoudre des équations sous la forme  $f(x) = b$ .

L'application  $f : D \rightarrow C$  n'est pas inversible, car les opérations  $\oplus$  et  $\otimes$  ne le sont pas nécessairement. Pour cela, nous nous sommes rapprochés vers la théorie de la résiduation, qui permet de définir une application « pseudo-inverse » pour des applications isotones et croissantes définies sur des ensembles ordonnés tel que les dioïdes. Plus exactement, cette théorie, fournit la plus grande solution de l'inéquation  $f(x) \preccurlyeq b$ , ou, la plus petite solution de l'inéquation  $f(x) \succcurlyeq b$ .

**Définition 1.30 (Application résiduable et sa résiduée).** Une application isotone  $f : D \rightarrow C$  définie sur des dioïdes complets est dite résiduable si  $\forall b \in C$ , l'équation  $f(x) \preccurlyeq b$  admet une plus grande solution dans  $D$ . L'application qui associe à  $b$  la plus grande solution de  $f(x) \preccurlyeq b$  est notée  $f^\#$  et est appelée application résiduée de  $f$ . Ainsi :

$$f^\#(b) = \oplus\{x \in D \mid f(x) \preccurlyeq b\}$$

**Remarque 1.11.** La théorie de la résiduation permet également de considérer les équations du type  $f(x) \succcurlyeq b$  définies de  $D$  dans  $C$ . Dans ce cas, l'application  $f$  est dite dualement résiduable si  $\forall b \in C, f(x) \succcurlyeq b$  admet une plus petite solution dans  $D$ . L'application qui associe à  $b$  la plus petite solution de  $f(x) \succcurlyeq b$  est notée  $f^b$  et est dite application résiduée duale de  $f$ .

### 1.5.1 Résolution de $ax \preccurlyeq b$ et $xa \preccurlyeq b$

On se propose maintenant d'étudier le caractère résiduable de certaines applications de référence définies sur des dioïdes complets.

Soient  $L_a$  et  $R_a$ , respectivement appelées produit à gauche et produit à droite, les applications suivantes définies sur un dioïde complet  $D$  :

$$\begin{aligned} L_a : x &\rightarrow a \otimes x \\ R_a : x &\rightarrow x \otimes a \end{aligned}$$

D'après la définition 1.22 d'un dioïde complet, le produit distribue à gauche comme à droite sur les sommes infinies. Les applications  $L_a$  et  $R_a$  sont donc semi-continues inférieurement. De plus,  $\varepsilon$  est absorbant pour le produit, ainsi  $L_a(\varepsilon) = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$  et  $R_a(\varepsilon) = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$ . Autrement dite,  $L_a$  et  $R_a$  sont isotones donc résiduables, et leurs applications résiduées sont notées :

$$\begin{aligned} L_a^\# : x &\rightarrow a \bowtie x \\ R_a^\# : x &\rightarrow x \bowtie a \end{aligned}$$

et respectivement appelées quotient à gauche et quotient à droite. Ainsi,  $L_a^\#(b) = a \bowtie b$  et  $R_a^\#(b) = b \bowtie a$  sont les plus grandes solutions des inégalités  $ax \preceq b$  et  $xa \preceq b$  i.e.:

$$\begin{aligned} a \bowtie b &= \bigoplus \{x \mid ax \preceq b\} \\ b \bowtie a &= \bigoplus \{x \mid xa \preceq b\} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} ax \preceq b &\Leftrightarrow x \preceq a \bowtie b \\ xa \preceq b &\Leftrightarrow x \preceq b \bowtie a \end{aligned}$$

**Remarque 1.12.** Lorsque  $D$  est commutatif,  $L_a = R_a$ . Cela implique donc également que  $L_a^\# = R_a^\#$ .

De nombreuses propriétés sont associées à ces quotients  $L_a^\#$  et  $R_a^\#$ . Elles sont rappelées dans le théorème suivant.

**Théorème 1.4.** Les applications  $L_a^\#$  et  $R_a^\#$  vérifient les propriétés suivantes

$\forall x, y, a, b \in D$  avec  $D$  un dioïde complet. Tout d'abord, pour le quotient à gauche  $\bowtie$  :

$$x \preceq y \Rightarrow \begin{cases} a \bowtie x \preceq a \bowtie y & (x \rightarrow a \bowtie x \text{ est isotone}), \\ x \bowtie a \succeq y \bowtie a & (x \rightarrow x \bowtie a \text{ est antitone}), \end{cases}$$

De même pour le quotient à droite  $\bowtie$  :

$$x \preceq y \Rightarrow \begin{cases} x \bowtie a \preceq y \bowtie a & (x \rightarrow x \bowtie a \text{ est isotone}), \\ a \bowtie x \preceq a \bowtie y & (x \rightarrow a \bowtie x \text{ est antitone}), \end{cases}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
 a \bowtie \top &= \top & \top \not\bowtie a &= \top, \\
 a(a \bowtie x) &\preceq x & (x \not\bowtie a)a &\preceq x, \\
 a \bowtie (ax) &\succeq x & (xa) \not\bowtie a &\succeq x, \\
 a(a \bowtie (ax)) &= ax & ((xa) \not\bowtie a)a &= xa, \\
 a \bowtie (a(a \bowtie x)) &= a \bowtie x & ((x \not\bowtie a)a) \not\bowtie a &= x \not\bowtie a, \\
 a \bowtie (x \wedge y) &= a \bowtie x \wedge a \bowtie y & (x \wedge y) \not\bowtie a &= x \not\bowtie a \wedge y \not\bowtie a, \\
 a \bowtie (x \oplus y) &\succeq (a \bowtie x) \oplus (a \bowtie y) & (x \oplus y) \not\bowtie a &\succeq (x \not\bowtie a) \oplus (y \not\bowtie a), \\
 (a \wedge b) \bowtie x &\succeq (a \bowtie x) \oplus (b \bowtie x) & x \not\bowtie (a \wedge b) &\succeq (x \not\bowtie a) \oplus (x \not\bowtie b), \\
 (a \oplus b) \bowtie x &= a \bowtie x \wedge b \bowtie x & x \not\bowtie (a \oplus b) &= x \not\bowtie a \wedge x \not\bowtie b, \\
 (ab) \bowtie x &= b \bowtie (a \bowtie x) & x \not\bowtie (ba) &= (x \not\bowtie a) \not\bowtie b, \\
 (a \bowtie x)b &\preceq a \bowtie (xb) & b(x \not\bowtie a) &\preceq (bx) \not\bowtie a, \\
 b(a \bowtie x) &\preceq (a \not\bowtie b) \bowtie x & (x \not\bowtie a)b &\preceq x \not\bowtie (b \bowtie a),
 \end{aligned}$$

**Preuves :** Les preuves sont données dans [Baccelli, 1992], [Gaubert, 1992] et [Cottenceau, 1999].

### 1.5.2 Extension aux dioides de matrices $AX \preceq B$ et $XA' \preceq B'$

Concernant le cas matriciel, définissons comme suit les applications produit à gauche  $L_A : D^{n \times p} \rightarrow D^{m \times p}$  et produit à droite  $R_{A'} : D^{p \times n} \rightarrow D^{p \times m}$  sur les dioides de matrices à coefficients dans le dioïde complet  $D$  :

$$\begin{aligned}
 L_A : X &\rightarrow A \otimes X, \\
 R_{A'} : X &\rightarrow X \otimes A',
 \end{aligned}$$

Dans ces applications,  $A \in D^{m \times n}$  et  $A' \in D^{n \times m}$ .

Les plus grandes solutions des inéquations  $AX \preceq B$  et  $XA' \preceq B'$ , pour lesquelles  $B \in D^{m \times p}$  et  $B' \in D^{p \times m}$ , sont respectivement la résiduée du produit à gauche notée  $L_A^\#(B) = A \bowtie B$  et la résiduée du produit à droite notée  $R_{A'}^\#(B') = B' \not\bowtie A'$ . Les valeurs de ces matrices sont alors données comme suit :

$$L_A^\#(B) = A \bowtie B = \bigwedge_{k=1}^m A_{ik} \bowtie B_{jk}$$

$$R_{A'}^\#(B') = B' \wp A' = \bigwedge_{k=1}^m B'_{ik} \wp A'_{jk}$$

**Exemple 1.7.** Soient  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \varepsilon & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ , alors :  $A \bowtie B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

### 1.5.3 Résolution de $x = ax \oplus b$

Le cas particulier de l'application implicite  $f(x) = ax \oplus b$  est donné ci-dessous

**Définition 1.31.** Soit  $D$  un dioïde complet et  $a$  un élément de  $D$ , l'**étoile de Kleene** de  $a$ , noté  $a^*$ , est défini comme suit :

$$a^* = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} a^k, \text{ avec } a^0 = e.$$

De même l'étoile de Kleene d'une matrice carrée  $A \in D^{n \times n}$ , notée  $A^*$ , est définie par  $A^* = \bigoplus_{l \in \mathbb{N}} A^l$ , avec  $A^0 = I_n$ .

L'équation au point fixe  $x = ax \oplus b$  définie sur un dioïde complet  $D$  admet  $x = a^*b = \bigoplus_{k \geq 0} a^k b$  comme petite solution.

**Théorème 1.5.** Dans un dioïde complet, la quantité  $(A^*B)$  est la plus petite solution de l'équation  $X = AX \oplus B$  et de l'inéquation  $X \succcurlyeq AX \oplus B$

**Preuve :** le lecteur trouvera des démonstrations en détail dans [Eureill, 2011].

**Exemple 1.8.** Considérons dans le dioïde  $\mathbb{R}_{\max}$  le système suivant :

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 3 \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}}_A X \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ \varepsilon \\ 5 \end{pmatrix}}_B$$

Le calcul de  $A^*$  donne :

$$A^* = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 3 \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & e & 3 \\ 4 & \varepsilon & e \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

$$X = A^*B = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

## Conclusion

Dans ce premier chapitre nous avons présenté les outils mathématiques utilisés par la suite. Après un bref rappel sur les ensembles ordonnés, plus particulièrement les treillis, leurs relation avec la structure algébrique des diïdes. En fin la théorie de la résiduation a été présentée, cette dernière permet de donner une alternative à la notion d'inverse pour les applications définies sur des ensembles ordonnés, elle sera utilisée pour calculer la commande des systèmes à événements discrets modélisable par un graphe d'événement temporisé. Sachant que tout au long de ce chapitre des exemples ont été considérés comme illustrations.

Le chapitre suivant est consacré à la modélisation de systèmes à événements discrets par des réseaux de Petri et plus particulièrement par une sous-classe des réseaux de Petri : les graphes d'événements temporisés. Ensuite, différentes représentations pour les graphes d'événements temporisés rencontrées dans l'algèbre  $(\max, +)$  (représentation aux dateurs, aux compteurs, par des séries formelles) ont été introduites.

# CHAPITRE 2

---

## Modélisation des SED

### Introduction

L'étude des systèmes à événements discrets (SED) constitue, un domaine de recherche très actif ayant donné lieu à de nombreuses publications. De cette littérature se dégagent de multiples classes de systèmes mettant en jeu des phénomènes de natures différentes : parallélisme, saturation, synchronisation, choix ...etc.

Dans ce mémoire nous considérons les systèmes qui admettent un modèle linéaire dans les structures algébriques introduites dans le chapitre précédent. Il s'agit des systèmes mettant en jeu des phénomènes de synchronisation et de retard que l'on retrouve abondamment dans les systèmes de transport, les systèmes informatiques et les systèmes de production. L'objectif de ce chapitre est de proposer un survol de cette théorie et notamment de rappeler la modélisation des graphes d'événements temporisés dans les dioïdes de séries formelles. Ce chapitre est composé comme suit. Tout d'abord la modélisation de systèmes à événements discrets par Réseaux de Petri (RdP) est présentée. Ce survol est l'occasion de rappeler les définitions des sous-classes des RdP, particulièrement les Graphes d'Événements Temporisés (GET). La suite est dédiée à la modélisation sous forme d'état de GET dans les dioïdes. Puis la description entrée-sortie des GET est abordée, ainsi, quelques éléments de théorie spectrale des matrices  $(\max, +)$ , il est notamment rappelé que la trajectoire de sortie d'un système est le résultat de la sup-convolution de la réponse impulsionnelle du système et la trajectoire d'entrée. Ce chapitre se termine par l'introduction de transformées en  $\gamma$  et  $\delta$  qui jouent un rôle analogue à la transformée en  $z$  des signaux discrets dans l'algèbre conventionnelle. La transformée de la réponse impulsionnelle d'un système linéaire conduit à établir sa matrice de transfert dans un dioïde de séries formelles noté  $\mathcal{M}_m^{ax}[[\gamma, \delta]]$ . Les volumes de références pour cette partie sont : [David et Alla, 1989], [Lhommeau, 2000], [Lhommeau, 2003], [Houssin 2006], [Hardouin, 2008], [Hardouin, 2004], [Boutin, 2009], [Nait-Sidi-Moh ,2003] [Guezzi 2010], [Ouerghi 2006].

## 2.1. Modélisation des systèmes à événements discrets par réseaux de Petri

### 2.1.1 Les réseaux de Petri

Les Réseaux de Petri (RdP) permettent de modéliser des systèmes séquentiels. Ils ont été inventés par Carl Adam Petri (mathématicien Allemand). Il a défini un outil mathématique très général permettant de décrire les relations existantes entre des conditions et des événements et de modéliser le comportement de systèmes dynamiques à événements discrets. Ces RdP datent de 1960-1962. C'est un outil très général, modélisant aussi bien les systèmes de production que des systèmes de communication informatiques. Il est à l'origine du Grafcet (ce dernier étant spécialisé dans la description de la commande de systèmes automatisés). Ces modèles ont fait l'objet de très nombreux travaux de recherche ces dernières années. Citons en particulier les références bibliographiques qui ont servi à la rédaction de cette partie : [David et Alla, 1989] [Lhommeau, 2003], [Ouerghi 2006] [Houssin 2006].

### 2.1.2 Définitions et notations

**Définition 2.1 (Réseaux de Petri).** Un réseau de Petri est un quadruplet  $\mathcal{R} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, \text{Pré}, \text{Post})$ , où

- $\mathcal{P}$  est un ensemble non vide et fini dont les éléments sont appelés places.
- $\mathcal{T}$  est un ensemble non vide et fini dont les éléments sont appelés transitions.
- $\text{Pré} : \mathcal{P} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N}$  une application d'incidence avant :  $\text{Pré}(p_i, t_i)$  contient la valeur entière  $n$  associée à l'arc allant de la place  $p_i$  à la transition  $t_i$ .
- $\text{Post} : \mathcal{P} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N}$  une application d'incidence arrière :  $\text{Post}(p_i, t_i)$  contient la valeur entière  $\omega$  associée à l'arc allant de la transition  $t_i$  à la place  $p_i$ .

Le marquage  $\mathcal{M}$  d'un Réseau de Petri est une application  $\mathcal{M} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$ . La quantité  $\mathcal{M}(p)$  détermine le marquage de la place  $p$ . Un réseau marqué est déterminé par le couple  $\mathcal{N} = (\mathcal{R}, \mathcal{M}_0)$  formé d'un réseau de Petri  $\mathcal{R}$  et d'un marquage initial  $\mathcal{M}_0$ .

Une transition sans place amont est dite transition source et une transition sans place aval est dite transition puits.

On peut représenter un réseau de Petri comme un graphe orienté (il n'y a pas d'arc joignant une place à une autre place, ni d'arc joignant une transition à une autre transition.), dont les sommets sont les places et les transitions du réseau. Un arc relie une place  $p_i$  à une transition  $t_i$  si et seulement si  $\text{Pré}(p_i, t_i) \neq 0$ . Un arc relie une transition  $t_i$  à une place  $p_i$  si et seulement si  $\text{Post}(p_i, t_i) \neq 0$ . Les valeurs non nulles des applications pré et post sont associées aux arcs comme valuations (par défaut on prend la valeur 1). On représente une place par un cercle et une transition par un rectangle. Un marquage  $\mathcal{M}$  est représenté sur le graphe par  $\mathcal{M}(p)$  points ou jetons en chaque place.

**Exemple 2.1.** Le RdP de la figure 2.1 représente un système de production, où 2 tâches requièrent une même ressource renouvelable, (par exemple bras-manipulateur).

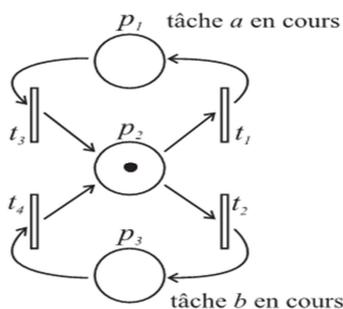


Figure 2.1 – RdP modélisant le comportement d'un système à ressource partagée.

Les places sont ici  $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$  et les transitions  $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ . On a

$$\text{pré}(p_1, t_3) = 1 \quad \text{post}(p_1, t_1) = 1$$

$$\text{pré}(p_2, t_1) = 1 \quad \text{post}(p_3, t_2) = 1$$

$$\text{pré}(p_2, t_2) = 1 \quad \text{post}(p_2, t_3) = 1$$

$$\text{pré}(p_3, t_4) = 1 \quad \text{post}(p_2, t_4) = 1$$

Le marquage  $\mathcal{M}$  représenté ici est  $\mathcal{M}(p_2) = 1, \mathcal{M}(p_1) = \mathcal{M}(p_3) = 0$ .

Un jeton dans la place  $p_2$  signifie que la ressource est disponible (le bras est libre). Un jeton dans la place  $p_1$  signifie que la tâche "a" dispose de la ressource commune. Un jeton dans la place  $p_3$  signifie que la tâche "b" dispose de la ressource commune. Les événements associés aux transitions  $t_1$  et  $t_2$  signifient réservation de la ressource par la tâche "a" ou par la tâche "b", et ceux associés à  $t_3$  et  $t_4$  concernent la restitution de la ressource.

### 2.1.3 Tir des transitions

L'évolution au cours du temps des marques des places dans un réseau de Petri se fait selon le processus de tirage des transitions décrit ci-après. Étant donné un réseau  $\mathcal{R}$  et un marquage  $\mathcal{M}$ , on dit que la transition  $t_i \in \mathcal{T}$  est franchissable pour  $\mathcal{M}$  si l'on a

$$\forall p \in \mathcal{P}, \mathcal{M}(p) \geq \text{pré}(p, t)$$

Lorsque cette condition est satisfaite, le franchissement (le tirage) de la transition  $t_i \in \mathcal{T}$  conduit à un nouveau marquage  $\mathcal{M}'$  défini par :

$$\mathcal{M}'(p) = \mathcal{M}(p) - \text{pré}(p, t) + \text{post}(p, t)$$

Ainsi, par exemple, dans le cas du réseau de Petri de la figure 2.1, en partant du marquage  $\mathcal{M}_0 = (0, 1, 0)$  (où  $\mathcal{M}(p_1) = 0, \mathcal{M}(p_2) = 1, \mathcal{M}(p_3) = 0$ ), on atteint par tirage de la transition  $t_1$  le marquage  $\mathcal{M}_1 = (1, 0, 0)$ , puis à partir de  $\mathcal{M}_1$ , par tirage de la transition  $t_3$  on obtient le marquage  $\mathcal{M}_2 = (0, 1, 0)$  et ainsi de suite, sur la figure 2.2, on peut voir l'évolution du marquage du réseau de Petri.

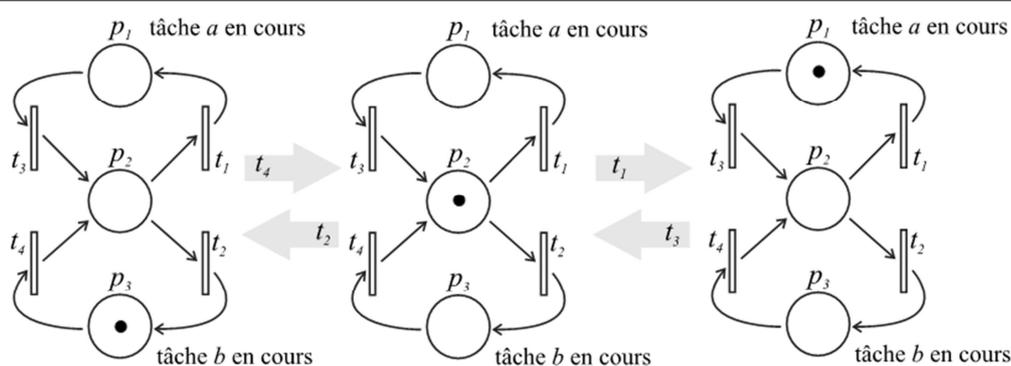


Figure 2.2 – Évolution du marquage d'un réseau de Petri.

Plus généralement, pour un RdP, en posant  $W^- = [\text{pré}(p_i, t_j)]$  (la matrice d'incidence avant),  $W^+ = [\text{post}(p_i, t_j)]$  (la matrice d'incidence arrière),  $W = W^+ - W^-$  (la matrice d'incidence) et en considérant  $S$  une séquence de franchissements réalisable à partir d'un marquage  $\mathcal{M}_i$ , il est alors possible de donner l'équation fondamentale suivante :

$$\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_i + W.S$$

Où  $S$  est le vecteur caractéristique de la séquence de franchissement  $S$ , c'est-à-dire un vecteur dont la dimension est égale au nombre des transitions du réseau de Petri et dont la composante numéro  $j$  correspond au nombre de franchissements de la transition  $t_j$  de la séquence  $S$ . Dans l'exemple précédent où la séquence des deux premiers tirs était " $S = t_1, t_3$ ", le vecteur caractéristique est égal à  $\underline{S} = (1, 0, 1, 0)$ .

### 2.1.4 Ensemble des marquages accessibles

Soit  $\mathcal{N} = (\mathcal{R}, \mathcal{M}_0)$  un réseau de Petri. L'ensemble des marquages accessibles  $A(\mathcal{R}; \mathcal{M}_0)$  d'un réseau de Petri marqué est l'ensemble des marquages que l'on peut atteindre à partir du marquage initial  $\mathcal{M}_0$  par une séquence de franchissement  $S$ , c'est-à-dire :

$$A(\mathcal{R}; \mathcal{M}_0) = \left\{ \mathcal{M}_i, \exists s \mid \mathcal{M}_0 \xrightarrow{s} \mathcal{M}_i \right\}$$

On peut, lorsque cet ensemble est fini, le représenter sous la forme d'un graphe. Les sommets de ce graphe correspondent aux marquages accessibles de  $A(\mathcal{R}; \mathcal{M}_0)$ . Un arc orienté relie deux sommets  $\mathcal{M}_i$  et  $\mathcal{M}_j$  s'il existe une transition  $t_i$  franchissable permettant de passer d'un marquage à un autre :

$$\mathcal{M}_i \xrightarrow{t_i} \mathcal{M}_j.$$

La figure 2.3 représente le graphe des marquages accessibles pour le réseau de Petri de la figure 2.1 avec un marquage initial  $\mathcal{M}_0 = (0, 1, 0)$ .

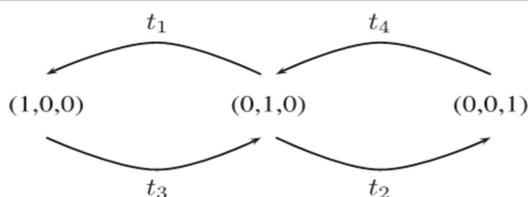


Figure 2.3 – Graphe des marquages atteignables du réseau de Petri de la figure 2.1.

### 2.1.5 Quelques propriétés des RdP

Le graphe des marquages associé à un RdP fournit des indications essentielles sur le fonctionnement du système qu'il représente. Suivant que le graphe des marquages est fini ou infini, qu'il présente ou non des circuits, il reflète certaines des propriétés caractéristiques du système modélisé.

- Rappelons qu'un circuit élémentaire est un chemin qui commence et se termine au même sommet (que ce soit place ou transition).

**Définition 2.2 (Bornitude).** Une place  $p \in \mathcal{P}$  d'un réseau de Petri marqué  $(R, \mathcal{M}_0)$  est  $k$ -bornée ( $k \in \mathbb{N}$ ) si pour tout marquage accessible  $\mathcal{M} \in A(\mathcal{R}; \mathcal{M}_0)$ , le marquage de cette place vérifie  $\mathcal{M}(p) \leq k$ . Dans le cas contraire, nous dirons que  $p$  est non-bornée. Enfin si  $p$  est 1-bornée, on dit que  $p$  est binaire (safe). Comme le Réseau de Petri de la figure 2.1 on voit bien que les places  $p_1$ ;  $p_2$  et  $p_3$  sont binaires (1-bornées) et le réseau est dit sauf.

Lorsqu'un RdP modélise un système manufacturier, certaines places représentent des convoyeurs ou bien des zones de stockages intermédiaires. La bornitude du marquage du modèle est alors synonyme de limitation de la taille des stocks internes du système. La bornitude du RdP reflète alors en quelque sorte une propriété de "stabilité" du système de production modélisé.

**Définition 2.3 (Vivacité).** Étant donné un réseau de Petri  $\mathcal{R}$  et un marquage initial  $\mathcal{M}_0$ , une transition  $t_i$  est vivante pour le réseau marqué  $(\mathcal{R}; \mathcal{M}_0)$  si pour tout marquage  $\mathcal{M}$  accessible depuis  $\mathcal{M}_0$ , il existe une suite de transitions (séquence)  $s$ , comportant au moins une fois la transition  $t_i$ .

Un réseau de Petri marqué  $(\mathcal{R}; \mathcal{M}_0)$  est dit vivant si toutes ses transitions sont vivantes.

### 2.1.6 Sous classes des RdP

Dans l'étude des systèmes dynamiques à événements discrets, on rencontre fréquemment des phénomènes de types concurrence et synchronisation, qui sont modélisés par différentes sous-classes de RdP que nous décrivons maintenant. [Guezzi, 2009].

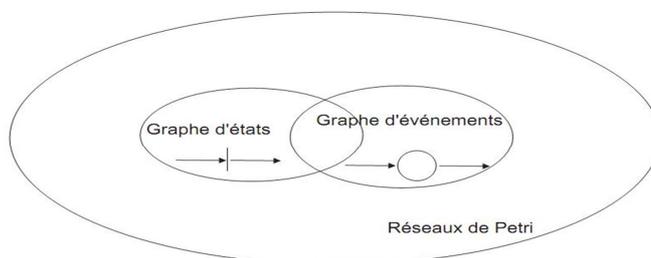


Figure 2.4 – Sous classes des réseaux de Petri.

- **Grappe d'états** : Un RdP ordinaire est un graphe d'états, si et seulement si, toute transition a exactement une place d'entrée et une place de sortie, par exemple :

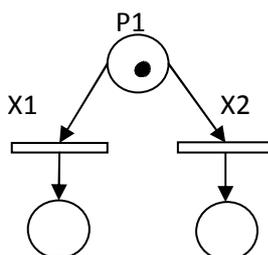


Figure 2.5 – Exemple de graphe d'état

- **Graphe d'événements** : La définition d'un graphe d'événements est duale de celle d'un graphe d'états. Un RdP est un graphe d'événements si, et seulement si, toute place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie (nous nous intéressons en particulier à ce type de graphe).

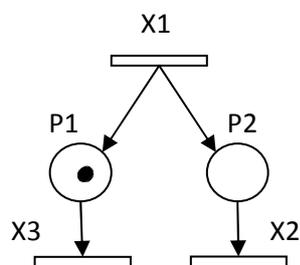


Figure 2.6 – Exemple de graphe d'événements

### 2.1.7 Modélisation des systèmes à événements discrets

Le formalisme des réseaux de Petri est très puissant, il permet de représenter une grande variété de comportement des systèmes réels mettant en jeu des phénomènes de concurrence et de synchronisation [Lhommeau, 2003].

Sur la figure 2.7, nous avons représenté quatre structures de réseaux de Petri permettant de décrire ces phénomènes.

- la figure 2.7. (a) représente une structure de choix. La place  $p_1$  a deux transitions en aval, notées  $t_1$  et  $t_2$ . Le tir de  $t_1$  ou de  $t_2$  consommera le jeton de la place  $p_1$  et exclura donc le tir de l'autre. Une telle configuration permet de modéliser un phénomène de concurrence à la consommation comme par exemple le partage d'un processeur entre tâches concurrentes dans un système informatique.
- la configuration de la figure 2.7. (b) permet de représenter une concurrence à l'apport de jetons dans une place,  $p_1$  peut représenter un stock.
- la configuration de la figure 2.7.(c) permet de modéliser un phénomène de synchronisation. La transition  $t_1$  n'est franchissable que lorsque les places  $p_1$  et  $p_2$  contiennent toutes les deux au moins un jeton.
- dans la structure de la figure 2.7. (d), l'apport de jetons dans les places  $p_1$  et  $p_2$  est synchronisé par le tir de la transition  $t_1$ .

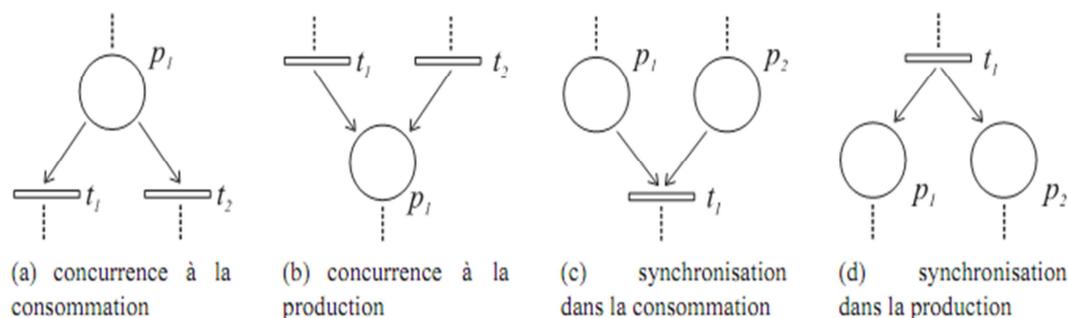


Figure 2.7 – Concurrency et synchronisation dans les RdP.

## 2.2 Les graphes d'événements temporisés

Notre intérêt va maintenant se porter sur une sous-classe des réseaux de Petri : les graphes d'événements temporisés.

Les systèmes à événements discrets qui donnent lieu à des phénomènes de synchronisation peuvent être modélisés par des Graphes d'Événements Temporisés (GET). Les graphes d'événements (GE), comme nous les avons définis précédemment, sont une sous-classe des Réseaux de Petri, dans lesquels chaque place  $p \in \mathcal{P}$  a exactement une transition amont et une transition aval. De plus chaque arc reliant une transition à une place (et vice-versa) a un poids de 1 [David et Alla, 1989].

Ainsi, les graphes d'événements peuvent modéliser la synchronisation mais pas la concurrence. Un GET est un graphe d'événements dont le fonctionnement dépend du temps. Le temps peut être associé soit aux transitions, soit aux places du graphe. Sachant que l'on peut passer d'une représentation à l'autre, on choisira ici d'associer le temps aux places.

### 2.2.1 Propriétés des graphes d'événements

Nous rappelons brièvement quelques caractéristiques des graphes d'événements. Ces rappels sont tirés de [David et Alla, 1989].

- Rappelons qu'un circuit élémentaire est un chemin qui commence et se termine au même sommet (que ce soit place ou transition).
- Dans un graphe d'événements, le nombre de jetons d'un circuit élémentaire est constant.
- Soit  $\mathcal{R}$  un graphe d'événements et  $\mathcal{M}_0$  son marquage initial, alors  $(\mathcal{R}, \mathcal{M}_0)$  est vivant si et seulement si tout circuit élémentaire contient une place initialement marquée.

**Remarque 2.1.** Les graphes d'événements considérés dorénavant seront systématiquement vivants.

## 2.2.2 Introduction du temps dans les graphes d'événements

Les modèles de systèmes à événements discrets étudiés par la suite sont temporisés. Un graphe d'événements est dit temporisé (GET) si à chaque place  $p \in \mathcal{P}$  est associé un temps  $\theta(p)$ , où  $\theta: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$  est l'application, qui à toute place  $p \in \mathcal{P}$ , associe sa temporisation. Un temps  $\theta(p)$  est interprété comme la durée minimale de séjour d'un jeton dans la place  $p$ ; par exemple pour le graphe d'événements temporisé de la figure 2.8, le marquage initial de la place située entre les transitions  $x_1$  et  $x_2$  étant nul, si la transition  $x_1$  est franchie à la date  $t_0$ , la transition  $x_2$  n'est pas franchissable avant la date  $t_0 + 3$ . De même, à chaque transition  $t_2 \in \mathcal{T}$  il est possible d'associer un temps  $\theta(t)$  représentant la durée minimale d'activation de la transition.

**Exemple 2.2.** Le graphe d'événements temporisé de la figure 2.8 peut représenter une cellule de production fonctionnant comme suit : deux machines sont disponibles (les 2 jetons dans la place  $p_2$  signifient que les 2 machines sont libres) pour usiner des pièces. Les pièces sont amenées à l'une ou l'autre des deux machines travaillant en parallèle (place  $p_3$ ), le traitement d'une pièce prend au moins 3 unités de temps. A l'issue du traitement, la pièce finie est déposée dans un stock  $p_4$  (supposé de capacité infinie) et la machine ayant traité la pièce redevient disponible (1 jeton revient dans  $p_2$ ), en attendant une nouvelle pièce.

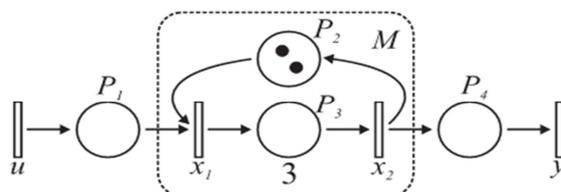


Figure 2.8 – Modèle GET d'une machine.

**Remarque 2.2.** Notons qu'au plus deux pièces peuvent être simultanément traitées. Sur cet exemple, le régime permanent est périodique : deux pièces sont traitées toutes les 3 unités de temps, ce qui conduit à un taux de production de  $\frac{2}{3}$ .

## 2.3 Représentation d'état des graphes d'événements temporisés

Le comportement dynamique d'un système à événement discret peut se représenter, classiquement, en considérant la variation du marquage d'un réseau de Petri, notée  $\Delta\mathcal{M}$ , définie comme l'expression du produit d'une matrice  $W$ , appelée matrice d'incidence, par un vecteur de tirs de transitions, noté  $\underline{S}$ . [Lhommeau, 2003].

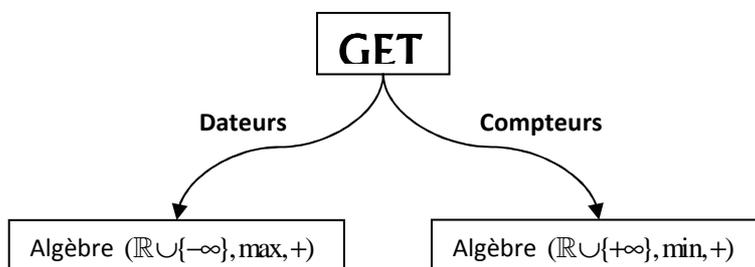
L'évolution du marquage est représentée par une équation de la forme

$$\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_0 + \Delta\mathcal{M}.$$

Si on prend l'exemple de la figure 2.7. Une telle représentation, traduit une seule caractéristique concernant l'état de la machine  $M$  (au sens logique) : machine libre ou occupée.

## 2.4 Modélisation des (GET) dans l'algèbre des diïodes

Dans cette partie, nous présentons le principe de la mise en équation du fonctionnement des graphes d'événements temporisés et leur comportement à l'aide d'équations linéaires dans les diïodes. [Lhommeau, 2003].



Pour introduire la mise en équation d'un graphe d'événements temporisé, on considère l'exemple de la figure 2.9, constitué de trois transitions  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  et de deux places  $p_1$  et  $p_2$  temporisées avec  $\theta(p_1) = 1$  et  $\theta(p_2) = 3$ .

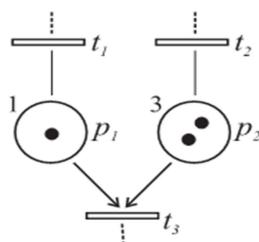


Figure 2.9 – Principe de la mise en équation d'un graphe d'événements temporisé

### 2.4.1 Equations aux dateurs

Une façon naturelle de procéder consiste à associer à chaque transition  $t_i$ , un dateur  $x_i$ , qui est une application croissante  $x_i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$  où, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $x_i(k) \in \mathbb{R}_{\max}$  désigne la date à laquelle se produit la  $k^{\text{ième}}$  activation de la transition  $t_i$  [Lhommeau, 2003].

Dans la figure 2.9, la date au plus tôt de la  $k^{ième}$  activation de  $t_3$  ( $x_3(k)$ ) est supérieure ou égale à la date au plus tôt de la  $(k-1)^{ième}$  activation de  $t_1$  ( $x_1(k-1)$ ) (car un jeton est présent initialement dans  $p_1$ ) tout en lui additionnant 1 ( $1+x_1(k-1)$ ) (car  $p_1$  est temporisée d'une unité de temps), également, elle est supérieure ou égale à la date au plus tôt de la  $(k-2)^{ième}$  activation de  $t_2$  ( $x_2(k-2)$ ) (car deux jetons sont présents initialement dans  $p_2$ ) tout en lui additionnant le nombre 3 ( $3+x_2(k-2)$ ) (car  $p_2$  est temporisée de 3 unités de temps). Alors, l'inéquation pour  $x_3(k)$  peut s'écrire.

$$x_3(k) \geq \max(1+x_1(k-1), 3+x_2(k-2))$$

### 2.4.2 Equations aux compteurs

En associant à chaque transition  $t_i$  un compteur  $\theta_i(t)$  (nombre de tir de la transition  $t_i$  jusqu'à l'instant "t"), on peut écrire le système d'inéquation linéaire dans (min, +).

Dans la figure 2.9, le nombre d'activation de  $t_3$  à l'instant "t" ( $\theta_3(t)$ ) est inférieur ou égal au nombre activation de  $t_1$  à l'instant "(t-1)" ( $\theta_1(t-1)$ ) (car  $p_1$  est temporisée d'une unité de temps) tout en lui additionnant 1 ( $1+\theta_1(t-1)$ ) (car initialement un jeton est présent dans  $p_1$ ), également, il est inférieur ou égal au nombre d'activation de  $t_2$  à l'instant "(t-3)" ( $\theta_2(t-3)$ ) (car  $p_2$  temporisée de 3 unités de temps) tout en lui additionnant 2 ( $2+\theta_2(t-3)$ ) (car initialement deux jetons sont présents dans  $p_2$ ). Alors, l'inéquation pour  $\theta_3(k)$  peut alors s'écrire.

$$\theta_3(t) \leq \min(1+\theta_1(t-1), 2+\theta_2(t-3))$$

Pour bien expliciter ce principe, nous considérons maintenant l'exemple de la figure 2.10 suivante :

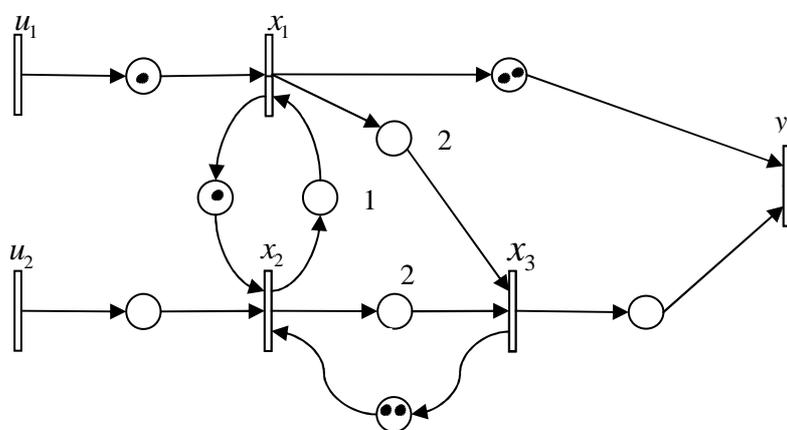


Figure 2.10 – Exemple d'un GET

• **Equations aux dateurs :**

Les dateurs vérifient les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} x_1(k) \geq \max(1 + x_2(k), u_1(k-1)) \\ x_2(k) \geq \max(x_1(k-1), x_3(k-2), u_2(k)) \\ x_3(k) \geq \max(2 + x_1(k), 2 + x_2(k)) \\ y(k) \geq \max(x_1(k-2), x_3(k)) \end{cases}$$

Dans le dioïde  $\mathbb{R}_{\max}$  où  $a \oplus b = \max(a, b)$  et  $a \otimes b = a + b$ ,  $\varepsilon = -\infty$ ,  $e = 0$ , le système précédent se met sous la forme

$$\begin{cases} x_1(k) \succcurlyeq 1 \otimes x_2(k) \oplus u_1(k-1) \\ x_2(k) \succcurlyeq x_1(k-1) \oplus x_3(k-2) \oplus u_2(k) \\ x_3(k) \succcurlyeq 2 \otimes x_1(k) \oplus 2 \otimes x_2(k) \\ y(k) \succcurlyeq x_1(k-2) \oplus x_3(k) \end{cases}$$

Ou encore, matriciellement, cela s'écrit

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \succcurlyeq \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 2 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ x_3(k-1) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k-2) \\ x_2(k-2) \\ x_3(k-2) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-1) \\ u_2(k-1) \end{bmatrix}$$

$$y(k) \succcurlyeq [\varepsilon \quad \varepsilon \quad e] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Soit un système d'inégalités de la forme

$$\begin{aligned} x(k) &\succcurlyeq A_0 \otimes x(k) \oplus A_1 \otimes x(k-1) \oplus A_2 \otimes x(k-2) \oplus B_0 \otimes u(k) \oplus B_1 \otimes u(k-1) \\ y(k) &\succcurlyeq C_0 \otimes x(k) \oplus C_1 \otimes x(k-1) \oplus C_2 \otimes x(k-2) \end{aligned}$$

En notant  $\mathcal{M}_0(p_i)$  le marquage initial pour toute place  $p_i \in \mathcal{P}$  et en posant  $M = \max_{p_i \in \mathcal{P}}(\mathcal{M}_0(p_i))$ , on obtient d'une manière générale un système de la forme dite forme implicite:

$$\begin{aligned} x(k) &\succcurlyeq \bigoplus_{i=0}^M A_i x(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^M B_j u(k-j) \\ y(k) &\succcurlyeq \bigoplus_{l=0}^M C_l x(k-l) \end{aligned}$$

- Pour les équations aux compteurs on procédant de la même manière

$$\begin{cases} \theta_1(t) \leq \min(\theta_2(t-1), 1 + u_1(t)) \\ \theta_2(t) \leq \min(1 + \theta_1(t), 2 + \theta_3(t), u_2(t)) \\ \theta_3(t) \leq \min(\theta_1(t-2), \theta_2(t-2)) \\ y(t) \leq \min(2 + \theta_1(t), \theta_3(t)) \end{cases}$$

Dans le dioïde  $\mathbb{R}_{\min}$  où  $a \oplus b = \min(a, b)$  et  $a \otimes b = a + b, \varepsilon = +\infty, e = 0$ , le système précédent se met sous la forme (l'ordre dans  $\mathbb{R}_{\min}$  il inverse de l'ordre naturelle, c'est-à-dire  $a \succ b \Leftrightarrow a \oplus b = a \Leftrightarrow a \leq b$ )

$$\begin{cases} \theta_1(t) \succ \theta_2(t-1) \oplus 1 \otimes u_1(t) \\ \theta_2(t) \succ 1 \otimes \theta_1(t) \oplus 2 \otimes \theta_3(t), u_2(t) \\ \theta_3(t) \succ \theta_1(t-2) \oplus \theta_2(t-2) \\ y(t) \succ 2 \otimes \theta_1(t) \oplus \theta_3(t) \end{cases}$$

Ou encore, matriciellement, cela s'écrit

$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \theta_3(t) \end{bmatrix} \succ \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \theta_3(t) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1(t-1) \\ \theta_2(t-1) \\ \theta_3(t-1) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & e & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1(t-2) \\ \theta_2(t-2) \\ \theta_3(t-2) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) \succ [2 \quad \varepsilon \quad e] \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \theta_3(t) \end{bmatrix}$$

Soit un système d'inégalités de la forme

$$\begin{aligned} \theta(t) &\succ A_0 \otimes \theta(t) \oplus A_1 \otimes \theta(t-1) \oplus A_2 \otimes \theta(t-2) \oplus B \otimes u(t) \\ y(t) &\succ C_0 \otimes \theta(t) \end{aligned}$$

Ou encore, En notant  $\theta(p_i)$  les temporisations pour toute place  $p_i \in \mathcal{P}$  et en posant  $M = \max_{p_i \in \mathcal{P}}(\theta(p_i))$ , on obtient un système de la forme dite forme implicite

$$\begin{aligned} \theta(t) &\succ \bigoplus_{i=0}^M A_i \theta(t-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^M B_j u(t-j) \\ y(t) &\succ \bigoplus_{l=0}^M C_l \theta(t-l) \end{aligned}$$

### 2.4.3 Forme explicite "ARMA"

L'étude du fonctionnement "au plus tôt" (les transitions sont franchies dès qu'elles sont franchissables) ; des graphes d'événements temporisés est équivalente à l'étude des solutions minimales dans le dioïde  $\mathbb{R}_{\max}$  du système implicite d'inéquations aux dateurs de la forme. [Lhommeau, 2003].

$$x(k) \succcurlyeq \bigoplus_{i=0}^M A_i x(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^M B_j u(k-j) \dots \dots (2,1a)$$

$$y(k) \succcurlyeq \bigoplus_{l=0}^M C_l x(k-l) \dots \dots \dots (2,1b)$$

Pour résoudre ce système d'inéquations, on utilise les résultats du (Théorème 1.5 chapitre précédent) sur la résolution de systèmes du type  $x \succcurlyeq Ax \oplus B$ , la plus petite solution de (2,1a) étant donnée par :

$$x(k) = \bigoplus_{i=1}^M \overline{A}_i x(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^M \overline{B}_j u(k-j) \dots \dots \dots (2,2)$$

Où  $\overline{A}_1 = A_0^* A_1, \overline{A}_2 = A_0^* A_2, \dots, \overline{B}_0 = A_0^* B_0, \dots$ , avec,  $x(k)$  et  $u(k)$  sont des vecteurs d'état et d'entrée.

Cette équation (2,2) (appelée forme explicite "ARMA") définit l'ensemble des dates au plus tôt pour le fonctionnement du système. Ainsi, à partir d'un vecteur de commande  $u(1), u(2) \dots$  et des états précédents, l'équation (2,2) permet de déterminer toutes les valeurs  $x(1), x(2) \dots$  du vecteur d'état. ARMA signifie (Auto-Régressif à Moyenne Ajustée (Auto Regressive-Moving Average en anglais))

$$x(k) = \underbrace{\bigoplus_{i=1}^M \overline{A}_i x(k-i)}_{AR} \oplus \underbrace{\bigoplus_{j=0}^M \overline{B}_j u(k-j)}_{MA}$$

Si on se réfère à l'exemple précédent (figure 2.10), on obtient en suivant cette démarche pour le cas d'équations aux dateurs :

$$A_0 \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 2 & \varepsilon \end{bmatrix}, A_1 \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, A_2 \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, B_0 \begin{bmatrix} \varepsilon \varepsilon \\ \varepsilon e \\ \varepsilon \varepsilon \end{bmatrix}, B_1 \begin{bmatrix} 1 \varepsilon \\ \varepsilon \varepsilon \\ \varepsilon \varepsilon \end{bmatrix}.$$

$$A_0^2 = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 2 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 2 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_0^3 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 2 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_0^* = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 2 & \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ 2 & 3 & e \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_1 = A_0^* A_1 = \begin{bmatrix} e & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ 2 & 3 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_2 = A_0^* A_2 = \begin{bmatrix} e & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ 2 & 3 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_0 = A_0^* B_0 = \begin{bmatrix} e & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ 2 & 3 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \varepsilon \\ \varepsilon e \\ \varepsilon \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon 1 \\ \varepsilon e \\ \varepsilon 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_1 = A_0^* B_1 = \begin{bmatrix} e & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ 2 & 3 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \varepsilon \\ \varepsilon \varepsilon \\ \varepsilon \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \varepsilon \\ \varepsilon \varepsilon \\ 3 \varepsilon \end{bmatrix}$$

Finalement la forme explicite :

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ x_3(k-1) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k-2) \\ x_2(k-2) \\ x_3(k-2) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon 1 \\ \varepsilon e \\ \varepsilon 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \varepsilon \\ \varepsilon \varepsilon \\ 3 \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-1) \\ u_2(k-1) \end{bmatrix}$$

- Pour le cas de compteur on suit la même démarche mais dans le dioïde  $\mathbb{R}_{\min}$

### 2.4.4 Forme d'état

Il est toujours possible par des manipulations tout à fait classique, de ramener un système ARMA à la forme suivante dite forme d'état :

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k) \dots\dots\dots(2,3a)$$

$$y(k) = Cx(k) \dots\dots\dots(2,3b)$$

Pour cela, il faut exprimer un graphe d'événements temporisé tel que les matrices  $A_i$  soient nulles pour  $i \neq 1$  et tel que les matrices  $B_j, C_j$  soient nulles pour  $i, j > 0$ . En d'autre termes il n'y aura pas de retard au niveau de la partie "AR" et de sortie ; le retard au niveau de la partie "MA" est exactement de 1. Pour le graphe d'événements temporisé cela signifie :

- toute place située entre deux transitions internes doit contenir exactement un jeton.
- toutes les places situées entre une transition source et une transition interne doivent être sans jeton.

- toutes les places situées entre une transition interne et une transition puits doivent être sans jeton.

Ce qui revient à augmenter le vecteur d'état du système. [Ouerghi, 2006], [Lhommeau, 2003].

L'équation (2.3a) est appelée l'équation d'état, l'équation (2.3b) est l'équation d'observation (ou de sortie),  $x(.) \in \mathbb{R}_{\max}^n$  est le vecteur d'état,  $u(.) \in \mathbb{R}_{\max}^p$  est le vecteur d'entrée ou de commande et  $y(.) \in \mathbb{R}_{\max}^q$  est le vecteur de sortie ou d'observation.

De même on appelle  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  la matrice d'état ou matrice dynamique,  $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times p}$  la matrice d'entrée ou de commande,  $C \in \mathbb{R}_{\max}^{q \times n}$  la matrice de sortie ou d'observation.

Pour le cas de notre exemple (figure 2.10) sa va donner les résultats suivants (figure 2.11):

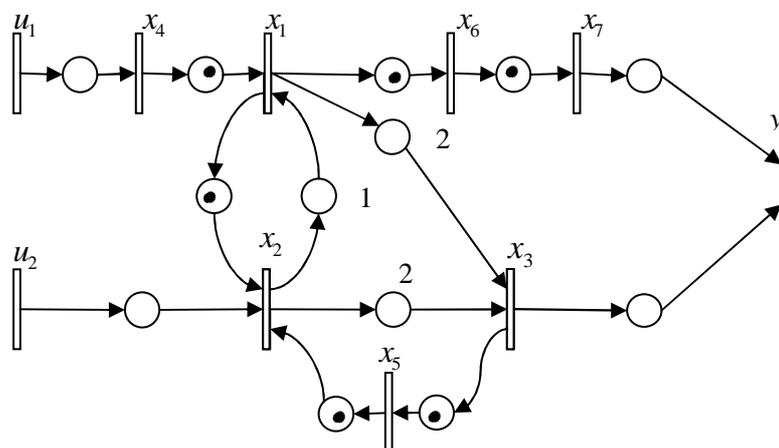


Figure 2.11 – Transformation de la figure 2.10

- La forme d'état des équations aux dateurs est donnée par :

$$x(k) = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon & e & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon & 2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix} x(k-1) \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & 3 \\ e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad e \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad e] x(k)$$

**Remarque 2.3.** En suivant la même démarche que pour les dateurs, les équations aux compteurs peuvent être écrites sous la forme d'état, mais cette fois dans le dioïde  $\mathbb{R}_{\min}$ , ainsi, il faut exprimer un graphe d'événements temporisé tel que :

- toute place située entre deux transitions internes doit contenir exactement une unité de temps.
- toutes les places situées entre une transition source et une transition interne doivent être sans temporisation.
- toutes les places situées entre une transition interne et une transition puits doivent être sans temporisation.

### 2.4.5 Quelques éléments de théorie spectrale des matrices (max, +)

Dans cette partie, on rappelle certaines propriétés des matrices carrées à coefficients dans un dioïde. Un des résultats essentiels est, pour une matrice  $A$  irréductible, l'existence d'une propriété de cyclicité de la forme  $A^{n+c} = \lambda^c \otimes A^n$ , pour  $n$  assez grand, et où  $\lambda$  est l'unique valeur propre de la matrice  $A$ .

Nous verrons que pour un GET en régime autonome, la cyclicité de la matrice  $A$  permet d'établir que celui-ci atteint un régime périodique après un régime transitoire. L'analyse spectrale de la matrice  $A$  vise donc à fournir un critère de performance sur le système modélisé. Les résultats de la théorie spectrale des matrices (max, +) permettent donc d'aborder l'évaluation de performance des GET d'un point de vue algébrique. [Lhommeau, 2003], [Ouerghi 2006], [Gaubert, 1992].

Considérons le système autonome (l'entrée n'influence pas la dynamique du système) suivant:

$$\begin{aligned} x(k) &= Ax(k-1) \\ &= A^2x(k-2) \\ &= \dots \\ &= A^kx(0) \end{aligned}$$

Le problème de recherche de valeurs propres et de vecteurs propres de la matrice carrée  $A$  s'exprime comme la recherche de couples  $(\lambda, v)$  où  $v$  (avec  $v \neq \varepsilon$ ) est appelé vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\lambda$ , tels que :

$$A \otimes v = \lambda \otimes v$$

Pour l'évolution de l'état du système autonome, si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  et si  $x(0)$  le vecteur d'état initial est vecteur propre de  $A$  alors :

$$x(k) = \lambda x(k-1) = \lambda^k x(0)$$

Pour chacune des transitions  $i$  du GET

$$x_i(k) = \lambda + x_i(k-1) \tag{2,4}$$

autrement dit, toutes les variables d'état sont incrémentées de  $\lambda$  lorsque  $k$  est incrémenté de 1, l'interprétation physique de (2,4) pour un GET représentant un système de production (figure 2.8) serait de dire qu'une pièce est produite toutes les  $\lambda$  unités de temps,  $\lambda$  est donc l'inverse du taux de production, c'est-à-dire le temps de cycle du GET. Pour ce cas particulier où  $x(0)$  est un vecteur propre de  $A$ , le régime permanent est atteint, sans passer par une phase de régime transitoire.

**Théorème 2.1.** [Gaubert, 1992], Une matrice  $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$  irréductible admet une unique valeur propre  $\lambda$  égale au rayon spectral

$$\lambda = \rho(A) = \bigoplus_{k=1}^n \text{tr}(A^k)^{1/k}$$

Où  $\text{tr}(A^k)$  désigne la trace de la matrice  $A^k$ , c'est-à-dire la somme (au sens de  $\oplus$ ) de ses éléments diagonaux. ( $n$  est l'ordre de la matrice).

**Remarque 2.4 (Cas réductible).** Les résultats énoncés dans le cas réductible s'appuient sur une décomposition du graphe de précedence de  $A$  en composantes fortement connexes, et une étude séparée de chacune des composantes. Ce qui se dégage de cette étude est qu'il n'y a plus nécessairement unicité de la valeur propre lorsque  $A$  est réductible.

Le théorème qui suit montre qu'il est également possible de caractériser le taux de production directement à partir du graphe d'événements temporisé.

**Théorème 2.2.** [Gaubert, 1992], Le taux de production  $\lambda$  d'un graphe d'événements temporisé est caractérisé par

$$\lambda = \min_{\text{circuits élémentaires}} \frac{N(c_i)}{T(c_i)}$$

Où  $N(c_i)$  dénote le nombre total de jetons du circuit  $i$  et  $T(c_i)$  la somme des temporisations des places du circuit  $i$ .

**Exemple 2.5.** Pour le GET de la figure 2.8, on a  $\lambda = \frac{2}{3}$

**Remarque 2.19.** Cette méthode de calcul consistant à énumérer les circuits du graphe et à calculer leur poids moyen n'est praticable que pour des petits graphes.

**Théorème 2.3.** [Gaubert, 1992], Pour une matrice irréductible  $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$  de valeur propre  $\lambda$ , il existe deux entiers  $K$  et  $C$  tels que  $\forall k \geq K, \quad A^{k+c} = \lambda^c \otimes A^k$   
L'entier  $C$  est appelé cyclicité de  $A$ .

Dans l'arithmétique traditionnelle, le théorème précédent signifie que, après un régime transitoire de longueur  $K$ , le régime devient périodique, c'est-à-dire que

$$\forall i, \quad x_i(k+c) = x_i(k) + c\lambda$$

## 2.5 Relation entrée-sortie d'un GET

Dans cette partie, nous allons présenter les différentes représentations, les plus régulièrement rencontrées dans les chapitres suivants, concernant la commande. [Lhommeau, 2003].

## 2.5.1 Réponse impulsionnelle

Considérons le système suivant :

$$\begin{aligned}x(k) &= Ax(k-1) \oplus Bu(k) \\y(k) &= Cx(k)\end{aligned}$$

Le développement par récurrence donne :

$$\begin{aligned}\forall p \in \mathbb{N} \quad y(k) &= Cx(k) \\&= CAx(k-1) \oplus CBu(k) \\&= CA^2x(k-2) \oplus CABu(k-1) \oplus CBu(k) \\&= \dots \\&= CA^p x(k-p) \oplus \bigoplus_{i=0}^{p-1} CA^i Bu(k-i)\end{aligned}$$

En adoptant des conditions initiales nulles, c'est-à-dire,  $x(k) = \varepsilon$  et  $u(k) = \varepsilon$  pour  $k < 0$ . Aussi, pour un  $k$  donné, et en considérant un  $p$  assez grand, c'est-à-dire  $p \geq k$ , on peut réécrire le comportement entrée-sortie du GET

$$y(k) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} h(i) \otimes u(k-i)$$

Avec

$$h(i) \begin{cases} \varepsilon & \text{si } i < 0 \\ CA^i B & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est possible de donner une interprétation des termes de la matrice  $h \in (\mathbb{R}_{\max})^{q \times p}$  où  $q$  représente le nombre de sorties et  $p$  le nombre d'entrées. L'élément  $h_{ij}(k)$  est simplement la date du  $k^{i\text{-ième}}$  tir de la sortie  $y_i(\cdot)$  dépendant de l'entrée  $u_j(\cdot)$  du type

$$u_j(k) \begin{cases} \varepsilon & \text{si } k < 0 \\ e & \text{sinon} \end{cases}$$

Toutes les autres entrées étant  $u_l(k) = \varepsilon, \forall l \neq j \in \mathbb{Z}$ .

Une telle entrée  $u_j(\cdot)$  qui correspond au tir d'une infinité de jetons à la date 0, peut être interprétée comme l'équivalent d'une "impulsion" appliquée à l'entrée  $u_j$  du GET et l'élément  $h_{ij}(k)$  est alors la réponse impulsionnelle correspondante.

En considérant un GET mono-entrée mono-sortie, la plus petite solution du système est donnée par :

$$y(k) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} h(i) \otimes u(k-i) = \max_{i=0, \dots, k} (h(i) + u(k-i))$$

L'expression  $\max_{i=0, \dots, k} (h(i) + u(k-i))$  ou encore  $\sup_{i=0, \dots, k} (h(i) + u(k-i))$  s'appelle sup-convolution. Cette dénomination est justifiée par l'analogie avec le produit usuel de convolution

$$f * v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

$$\max_{i=0, \dots, k} (h(i) + u(k - i)) \stackrel{def}{=} (h * u)(k)$$

## 2.6 La transformée en $\gamma$

Les techniques de transformation jouent un rôle primordial dans l'étude des systèmes linéaires invariants. C'est le cas de la transformée de Laplace pour les systèmes en temps continu ou la transformée en  $z$  pour les systèmes en temps discret (systèmes échantillonnés). Elles permettent l'échange du produit de convolution par un produit simple dans le domaine transformé [Lhommeau, 2003].

La transformée en  $\gamma$  joue un rôle analogue à la transformée en  $z$ . En effet, elle va permettre de transformer les sup-convolutions (présentées précédemment) en des produits de séries formelles. La structure algébrique à utiliser pour une telle représentation est celle d'un dioïde de séries formelles (présenté dans la Définition 1.20 chapitre précédent).

### 2.6.1 Définition

Pour un dateur  $\{d(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , application croissante  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$ , la transformée en  $\gamma$ , notée  $D(\gamma)$  est définie comme la série formelle

$$D(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} d(k) \gamma^k$$

Supposons le GET suivant :

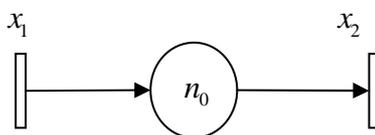


Figure 2.12 – Exemple d'RdP représentant un opérateur de décalage "événementiel"

Cela correspond à deux dateurs reliés par l'égalité  $x_2(k) = x_1(k - n_0)$ , c'est-à-dire, deux transitions séparées par une place contenant  $n_0$  jetons.

L'interprétation en  $\gamma$  est donnée par :

$$\begin{aligned} X_2(\gamma) &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_2(k) \gamma^k \\ &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_1(k - n_0) \gamma^k \\ &= \gamma^{n_0} \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_1(k - n_0) \gamma^{(k - n_0)} \\ &= \gamma^{n_0} X_1(\gamma) \end{aligned}$$

Il est donc possible d'interpréter l'opérateur  $\gamma^{n_0}$  comme opérateur de décalage "événementiel", ce que l'on écrit parfois  $\gamma x(k) = x(k-1)$ . Ceci est illustré par la figure 2.13.

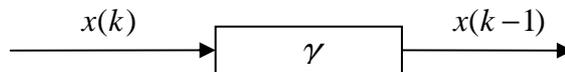


Figure 2.13 – Opérateur de décalage "événementiel"

- **Remarque 2.6.** Rappelons que  $\bar{\mathbb{R}}_{\max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \oplus, \otimes)$  est un dioïde complet où la loi  $\oplus$  représente l'opérateur  $\max$  et la loi  $\otimes$  représente l'addition usuelle.

(Dioïde  $\bar{\mathbb{R}}_{\max}[[\gamma]]$ ). Comme il a été rappelé dans Définition 1.30 chapitre précédent, un ensemble de séries formelles à coefficients sur un dioïde complet peut également être muni d'une structure de dioïde complet dont la loi  $\oplus$  est la somme de séries formelles et la loi  $\otimes$  le produit de séries formelles. La transformée en  $\gamma$  des dateurs peut donc être considérée comme appartenant à un dioïde de séries formelles en  $\gamma$ .

**Définition 2.4 (Dioïde  $\bar{\mathbb{R}}_{\max}[[\gamma]]$ ).** le dioïde complet des séries formelles en  $\gamma$  à coefficients dans  $\bar{\mathbb{R}}_{\max}$  et exposants dans  $\mathbb{Z}$ . L'élément neutre de l'addition de  $\bar{\mathbb{R}}_{\max}[[\gamma]]$  est la série  $\varepsilon(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon \gamma^k$  (où  $\varepsilon = -\infty$  est l'élément neutre de l'addition dans  $\bar{\mathbb{R}}_{\max}$ ) et l'élément neutre de la multiplication est la série  $e(\gamma) = e \gamma^0$  (où  $e = 0$  est l'élément neutre de la multiplication de  $\bar{\mathbb{R}}_{\max}$ ). Dont la somme et le produit de séries formelles sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} D_1(\gamma) \oplus D_2(\gamma) &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (d_1(k) \oplus d_2(k)) \gamma^k \\ D_1(\gamma) \otimes D_2(\gamma) &= \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (d_1(j) \oplus d_2(k-j)) \gamma^k \end{aligned}$$

## 2.6.2 Matrice de transfert

Nous avons vu auparavant que nous pouvons représenter un GET par une représentation dite forme d'état.

$$\begin{aligned} x(k) &= Ax(k-1) \oplus Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

Si nous considérons la transformée en  $\gamma$  des dateurs  $u(\cdot), x(\cdot)$  et  $y(\cdot)$  ; on aura :

$$\begin{aligned} X(\gamma) &= \gamma AX(\gamma) \oplus BU(\gamma) \\ Y(\gamma) &= CX(\gamma) \end{aligned}$$

D'après le théorème 1.5 (chapitre précédent) la plus petite solution de l'équation d'état est donnée par :

$$X(\gamma) = (\gamma A)^* B U(\gamma)$$

En remplaçant cette solution dans l'équation de sortie, on obtient

$$Y(\gamma) = C(\gamma A)^* B U(\gamma) = H(\gamma) U(\gamma) \quad \text{avec} \quad H(\gamma) = C(\gamma A)^* B$$

Cette équation exprime le comportement entrée-sortie du système. La série formelle :

$$H(\gamma) = C(\gamma A)^* B \in (\overline{\mathbb{R}}_{\max} \llbracket \gamma \rrbracket)^{q \times p}$$

est appelée matrice de transfert du système. On peut noter que  $H(\gamma)$  correspond à la transformée en  $\gamma$  de la réponse impulsionnelle ( $h(i)$ ) et aussi la sup-convolution  $y(k) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} h(i) \otimes u(k-i)$  a été transformée en un produit des séries formelles  $C(\gamma A)^* B$  et  $U(\gamma)$ .

**Exemple 2.4.** Pour l'exemple de la figure 2.8, on obtient la représentation suivante:

$$\begin{cases} X(\gamma) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \gamma^2 \\ e & \varepsilon \end{pmatrix} X(\gamma) \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \end{pmatrix} U(\gamma) \\ Y(\gamma) = (\varepsilon \quad e) X(\gamma) \end{cases}$$

Le calcul de la matrice de transfert  $H(\gamma) = C(\gamma A)^* B$  donne  $H(\gamma) = (3\gamma^2)^* 3$

## 2.7 Transformée en $\delta$

La situation est complètement duale:

### 2.7.1 Définition

Une variable compteur  $\{c(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$  application croissante  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$ , la transformée en  $\delta$ , notée  $C(\delta)$  est définie comme la série formelle  $C(\delta) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} c(t) \delta^t$

Supposons le GET suivant :

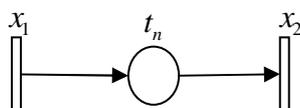


Figure 2.14 – Exemple d'RdP représentant un opérateur de décalage "temporel"

---

Soit  $c_1(t)$  le compteur correspondant à la transition  $x_1$  en amont de  $c_2(t)$  correspondant à la transition  $x_2$ , séparée par une unique place de marquage nul et admettant une temporisation de  $t_n$  unités de temps.

Alors

$$\begin{aligned}
 C_2(\delta) &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} c_2(t) \delta^t \\
 &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} c_1(t - t_n) \delta^t \\
 &= \delta^{t_n} \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} c_1(t - t_n) \delta^{(t - t_n)} \\
 &= \delta^{t_n} C_1(\delta)
 \end{aligned}$$

L'opérateur  $\delta^{t_n}$  peut donc être vu comme un opérateur de décalage temporel. Abusivement, on écrira :  $\delta c(t) = c(t - 1)$ . Ceci est illustré par la figure 2.15.

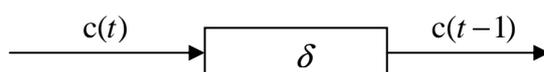


Figure 2.15 – Opérateur de décalage "temporel"

**Remarque 2.7.** Rappelons que  $\bar{\mathbb{R}}_{\min} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \oplus, \otimes)$  est un dioïde complet où la loi  $\oplus$  représente l'opérateur  $\min$  et la loi  $\otimes$  représente l'addition usuelle.

**Définition 2.5 (Dioïde  $\bar{\mathbb{R}}_{\min}[[\delta]]$ ).** L'ensemble des séries formelles en  $\delta$  à exposant dans  $\mathbb{Z}$  et coefficients dans  $\bar{\mathbb{R}}_{\min}$  a une structure de dioïde. L'élément neutre de l'addition est la série  $\varepsilon = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \varepsilon \delta^i$  (où  $\varepsilon = +\infty$  est l'élément neutre de l'addition dans  $\bar{\mathbb{R}}_{\min}$ ). L'élément neutre de la multiplication est la série  $e(\delta) = e \delta^0$  (où  $e = 0$  est l'élément neutre de la multiplication de  $\bar{\mathbb{R}}_{\min}$ ). La somme et le produit de séries formelles sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
 C_1(\delta) \oplus C_2(\delta) &= \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} (c_1(t) \oplus c_2(t)) \delta^t \\
 C_1(\delta) \otimes C_2(\delta) &= \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (c_1(j) \oplus c_2(t - j)) \delta^t
 \end{aligned}$$

## 2.7.2 Matrice de transfert

De même façon que pour la transformée  $\gamma$  si on a la forme d'état suivante :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= Ax(t-1) \oplus Bu(t) \\
 y(t) &= Cx(t)
 \end{aligned}$$

La transformée en  $\delta$  des dateurs  $u(\cdot), x(\cdot)$  et  $y(\cdot)$  ; on aura :

$$\begin{aligned} X(\delta) &= \delta AX(\delta) \oplus BU(\delta) \\ Y(\delta) &= CX(\delta) \end{aligned}$$

Et d'après la théorie de la résiduation on aura :

$$X(\delta) = (\delta A)^* BU(\delta)$$

En remplaçant cette solution dans l'équation de sortie, on obtient

$$Y(\delta) = C(\delta A)^* BU(\delta) = H(\delta)U(\delta) \quad \text{avec} \quad H(\delta) = C(\delta A)^* B$$

**Exemple 2.5.** Pour l'exemple de la figure 2.8, on obtient la représentation suivante :

$$\begin{cases} X(\delta) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 \\ \delta^3 & \varepsilon \end{pmatrix} X(\delta) \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \end{pmatrix} U(\delta) \\ Y(\delta) = (\varepsilon \quad e) X(\delta) \end{cases}$$

Le calcul de la matrice de transfert  $H(\delta) = C(\delta A)^* B$  donne  $H(\delta) = (2\delta^3)^* \delta^3$

## 2.8 Trajectoires monotones croissantes d'un GET

Les dioïdes de séries formelles permettent de coder tout type de trajectoire, monotone ou non. Cependant, par définition, une trajectoire issue d'un GET est nécessairement monotone croissante : la date de tir de la transition numérotée  $k+1$  est obligatoirement supérieure à celle de la transition numérotée  $k$  de même que le nombre de franchissements d'une transition à l'instant  $t+1$  est nécessairement plus grand que celui à l'instant  $t$ . Par conséquent, le modèle mathématique utilisé afin de représenter le comportement d'un GET doit tenir compte de ce caractère particulier. [Hardouin, 2004].

### 2.8.1 Monotonie dans le dioïde $\bar{\mathbb{R}}_{\max} \llbracket \gamma \rrbracket$

Dans le domaine temporel, la monotonie des trajectoires d'un GET est décrite par l'équivalence suivante :  $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} d(k) \geq d(k-1) &\Leftrightarrow d(k) \succcurlyeq d(k-1) \Leftrightarrow d(k) = d(k) \oplus d(k-1) \\ &\Leftrightarrow D(\gamma) = D(\gamma) \oplus \gamma D(\gamma) \Leftrightarrow D(\gamma) = \gamma^* D(\gamma) \end{aligned}$$

Autrement dit, afin de prendre en compte les propriétés de monotonie croissante des dateurs, seules les séries formelles de  $\bar{\mathbb{R}}_{\max} \llbracket \gamma \rrbracket$  invariantes à la multiplication par  $\gamma^*$  doivent être considérées. L'ensemble de ces séries monotones croissantes forme le dioïde  $\gamma^* \bar{\mathbb{R}}_{\max} \llbracket \gamma \rrbracket$ .

Les éléments neutres de ce dioïde correspondent aux séries suivantes, avec  $\varepsilon = -\infty$ , élément neutre pour la loi  $\oplus$  dans  $\bar{\mathbb{R}}_{\max}$  :

- pour la loi  $\oplus : \varepsilon(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon \gamma^k$
- pour la loi  $\otimes : e(\gamma) = \gamma^*$

Cette multiplication par  $\gamma^*$  constitue une sorte de filtrage des trajectoires impliquant la règle de simplification suivante :

$$\gamma^n \oplus \gamma^{n'} = \gamma^{\min(n, n')}$$

## 2.8.2 Monotonie dans le dioïde $\bar{\mathbb{R}}_{\min} \llbracket \delta \rrbracket$

Dans le domaine évènementiel, la monotonie des trajectoires d'un GET est décrite par l'équivalence suivante :  $\forall t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} c(t+1) \geq c(t) &\Leftrightarrow c(t+1) \preceq (t) &&\Leftrightarrow c(t) = c(t) \oplus c(t+1) \\ &\Leftrightarrow C(\delta) = C(\delta) \oplus \delta^{-1} C(\delta) &&\Leftrightarrow C(\delta) = (\delta^{-1})^* C(\delta) \end{aligned}$$

Afin de satisfaire la monotonie croissante des compteurs, seules les séries formelles de  $\bar{\mathbb{R}}_{\min} \llbracket \delta \rrbracket$  invariantes à la multiplication par  $(\delta^{-1})^*$  doivent être considérées. Ainsi, l'ensemble de ces séries monotones croissantes forme le dioïde  $(\delta^{-1})^* \bar{\mathbb{R}}_{\min} \llbracket \delta \rrbracket$ .

Les éléments neutres de ce dioïde correspondent aux séries suivantes, avec  $\varepsilon = +\infty$ , élément neutre pour la loi  $\oplus$  dans  $\bar{\mathbb{R}}_{\min}$  :

- pour la loi  $\oplus : \varepsilon(\delta) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon \delta^k$
- pour la loi  $\otimes : e(\delta) = (\delta^{-1})^*$

La règle de calcul associée à cette multiplication par  $(\delta^{-1})^*$  est dans ce cas la suivante :

$$\delta^t \oplus \delta^{t'} = \delta^{\max(t, t')}$$

## 2.9 Représentation bi-dimensionnelle : dioïde $\mathcal{M}_n^{\text{ax}} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$

Jusqu'à présent, la modélisation d'un GET par l'algèbre des dioïdes n'est possible que sous deux aspects différents : les dates des tirs des transitions et le nombre de leurs réalisations.

Nous nous permettons de réunir ces deux points de vue en un seul. Grâce au terme  $\gamma^*(\delta^{-1})^*$  (assurant la condition de trajectoires monotones croissantes d'un GET) et un nouveau dioïde noté  $\mathbb{B} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$ , on forme le dioïde  $\mathcal{M}_n^{\text{ax}} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$  donnant la possibilité de considérer les deux représentations dateurs et compteurs en établissant une représentation bi-dimensionnelle qui consiste à coder les trajectoires de tir d'un GET par des séries formelles en deux variables commutatives,  $\gamma$  et  $\delta$ . [Hardouin, 2004], [Lhommeau, 2003].

**Définition 2.6 (Dioïde  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ ).** On appelle  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  le dioïde des séries formelles commutatives à coefficients booléens en deux indéterminées  $\gamma$  et  $\delta$  et à exposants dans  $\mathbb{Z}$ . Une série formelle de  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  s'écrira de manière unique

$$s = \bigoplus_{n,t \in \mathbb{Z}} s(n,t) \gamma^n \delta^t$$

avec  $s(n,t) = e$  ou  $\varepsilon$ ,  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  est un dioïde complet.

Le support d'une série  $s$  est la partie de  $\mathbb{Z}^2$  suivante

$$\text{Supp}(s) = \{(n,t) \in \mathbb{Z}^2 \mid s(n,t) \neq \varepsilon\}$$

$\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  est un dioïde d'élément neutre  $e(\gamma, \delta) = \gamma^0 \delta^0$  et d'élément absorbant  $\varepsilon(\gamma, \delta)$  qui correspond à la série dont tous les éléments sont égaux à  $\varepsilon$ .

Graphiquement, un élément de  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  est représenté par une collection de points de  $\mathbb{Z}^2$ , autrement dit pour un élément  $s \in \mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ , on représente dans le plan  $\mathbb{Z}^2$  l'ensemble  $\text{Supp}(s)$ . [Hardouin, 2004], par exemple figure 2.16.

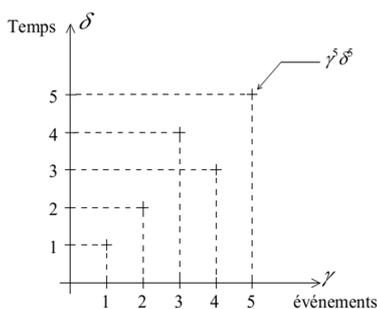


Figure 2.16 – Collection de points de  $\mathbb{Z}^2$

Nous rappelons tout d'abord formellement que la prise en compte de la monotonie des trajectoires de tir est primordiale.

“Filtrage des trajectoires monotones“  $d(k)$  et  $c(t)$  représente les transitions GET, comme nous l'avons expliqué précédemment, donc la propriété d'une trajectoire de dateur  $d(k)$  ou de compteur  $c(t)$  est d'être monotone cela se traduit par :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z}, & \quad \{d(k) \geq d(k-1)\} \Leftrightarrow \{d(k) = d(k) \oplus d(k-1)\}, \\ \forall t \in \mathbb{Z}, & \quad \{c(t) \geq c(t-1)\} \Leftrightarrow \{c(t-1) = c(t-1) \oplus c(t)\}, \end{aligned}$$

En notant que l'ordre naturel de dioïde est inversé  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$  et  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ . En passant aux transformées en  $\gamma$  et  $\delta$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \{D(\gamma) = D(\gamma) \oplus \gamma D(\gamma)\} & \Leftrightarrow \{D(\gamma) = \gamma^* D(\gamma)\}, \\ \{C(\delta) = C(\delta) \oplus \delta^{-1} C(\delta)\} & \Leftrightarrow \{C(\delta) = (\delta^{-1})^* C(\delta)\}. \end{aligned}$$

Pour un élément  $X(\gamma, \delta)$  de  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ , doit donc satisfaire

$$\begin{aligned} X(\gamma, \delta) & \succcurlyeq \gamma X(\gamma, \delta), \\ X(\gamma, \delta) & \succcurlyeq \delta^{-1} X(\gamma, \delta), \end{aligned}$$

Ce qui engendre :

$$X(\gamma, \delta) \succcurlyeq \gamma X(\gamma, \delta) \oplus \delta^{-1} X(\gamma, \delta)$$

Ou encore

$$X(\gamma, \delta) \succcurlyeq (\gamma \oplus \delta^{-1}) X(\gamma, \delta)$$

Et finalement, on aura :

$$X(\gamma, \delta) = (\gamma \oplus \delta^{-1})^* X(\gamma, \delta)$$

Le dioïde  $(\gamma \oplus \delta^{-1})^* \mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  est noté  $\mathcal{M}_n^{ax} [[\gamma, \delta]]$ .

**Définition 2.7 (Dioïde  $\mathcal{M}_n^{ax} [[\gamma, \delta]]$ ).** Nous appelons  $\mathcal{M}_n^{ax} [[\gamma, \delta]]$  le dioïde  $(\gamma \oplus \delta^{-1})^* \mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ .

Graphiquement, on ne considère plus un point de coordonnées  $(n, t)$  mais un “cône Sud-Est” de sommet  $(n, t)$  (figure 2.17). Cette transformation a pour effet de ne conserver que les séries monotones non décroissantes. [Lhommeau, 2003].

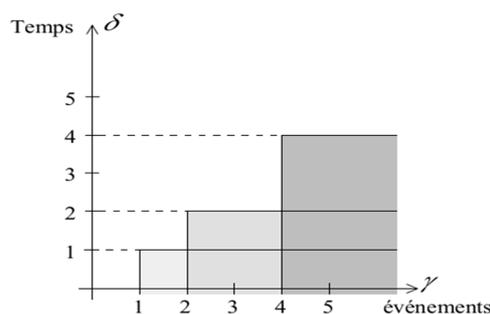


Figure 2.17 – Représentation de “cône Sud-Est”

Avant de présenter  $\mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]$  comme outil de modélisation, nous rappelons quelques caractéristiques de ce dioïde.

### 2.9.1 Manipulation des éléments de $\mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]$ et règles de simplification

La somme et le produit des classes de  $\mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]$  étant indépendants des représentants de  $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$  choisis, un élément de  $\mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]$  sera désigné par un représentant quelconque dans  $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ . La manipulation des éléments de  $\mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]$  se fait donc avec les règles de somme et de produit du dioïde  $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$  auxquelles on ajoute les règles de simplifications suivantes :

$$\begin{aligned}\gamma^n \delta^t \oplus \gamma^{n'} \delta^{t'} &= \gamma^{\min(n, n')} \delta^t \\ \gamma^n \delta^t \oplus \gamma^n \delta^{t'} &= \gamma^n \delta^{\max(t, t')}\end{aligned}$$

Rappelons les principales caractéristiques de ce dioïde.  $\mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]$  est un dioïde complet d'élément neutre  $\varepsilon = \varepsilon(\gamma, \delta)$  (la série nulle de  $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ ) pour la loi  $\oplus$  et d'élément maximum  $\top = (\gamma^{-1})^*(\delta)^*$ .

**Remarque 2.8.** On utilisera parfois abusivement les notations suivantes pour le plus petit et le plus grand élément de  $\mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]$  :  $\varepsilon = \gamma^{+\infty} \delta^{-\infty}$  et  $\top = \gamma^{-\infty} \delta^{+\infty}$

Il est possible de donner plusieurs expressions de l'élément neutre  $e$  pour la multiplication  $e = \gamma^*(\delta^{-1})^* = \gamma^* = (\delta^{-1})^* = \gamma^0 = \delta^0 = \gamma^0 \delta^0$

L'ordre naturel  $\preceq$  défini sur  $\mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]$  à partir de la loi  $\oplus$  permet d'établir l'équivalence suivante

$$\gamma^n \delta^t \preceq \gamma^{n'} \delta^{t'} \Leftrightarrow n \geq n' \text{ et } t \leq t'$$

Enfin, puisque  $\mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]$  est complet, tout couple  $a, b \in \mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]$  admet un plus grand minorant noté  $a \wedge b$ . Dans le cas où  $a$  et  $b$  sont des monômes, on obtient la relation

$$\gamma^n \delta^t \wedge \gamma^{n'} \delta^{t'} = \gamma^{\max(n, n')} \delta^{\min(t, t')}$$

qui permet d'établir la borne *inf* de deux monômes de  $\mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]$ .

## 2.9.2 Représentation graphique des opérations sur $\mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]$

1. la somme de deux monômes  $\gamma^n \delta^t$  et  $\gamma^{n'} \delta^{t'}$  est représentée graphiquement par l'union des cônes sud-est de sommets respectifs  $\gamma^n \delta^t$  et  $\gamma^{n'} \delta^{t'}$ .

2. le produit de deux monômes  $\gamma^n \delta^t$  et  $\gamma^{n'} \delta^{t'}$  est représenté par le cône de sommet  $(n+n', t+t')$  (ce qui correspond au cône dont le sommet est la somme vectorielle des sommets  $(n, t)$  et  $(n', t')$ ).

3. l'*inf* de deux monômes  $\gamma^n \delta^t$  et  $\gamma^{n'} \delta^{t'}$  est représentée par l'intersection des cônes sud-est de sommets respectifs  $(n, t)$  et  $(n', t')$ .

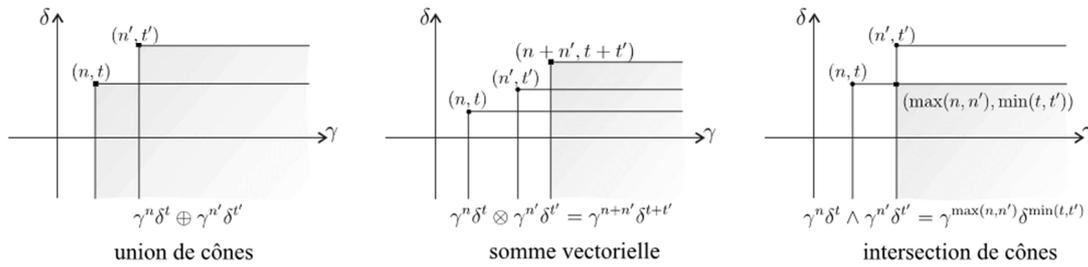


Figure 2.18 – Représentation graphique des opérations sur  $\mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]$

## 2.9.3 Exemples de calculs sur des polynômes de $\mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]$

On notera  $\mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]$  l'ensemble des polynômes de  $\mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]$ , c'est-à-dire l'ensemble des éléments à support fini. On propose ici quelques calculs sur des polynômes de manière à se familiariser avec cette structure algébrique, les résultats sont illustrés par la Figure 2.19.

Soit  $a, b \in \mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]$ ,  $a = \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^3 \delta^4$  et  $b = \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^5$ .

La somme:

$$a \oplus b = \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^4 \oplus \gamma^5 \delta^5 \text{ (On remarque en effet que } \gamma^4 \delta^3 \preceq \gamma^3 \delta^4 \text{)}.$$

Le produit :

$$a \otimes b = (\gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^3 \delta^4) \otimes (\gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^5) = \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^4 \oplus \gamma^6 \delta^6 \oplus \gamma^5 \delta^6 \oplus \gamma^7 \delta^7 \oplus \gamma^8 \delta^9.$$

En remarquant que  $\gamma^5 \delta^4 \oplus \gamma^6 \delta^6 \preceq \gamma^5 \delta^6$ , on obtient alors :

$$a \otimes b = \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^6 \oplus \gamma^7 \delta^7 \oplus \gamma^8 \delta^9.$$

Enfin, on obtient la borne *inf* de ces éléments

$$a \wedge b = \gamma^2 \delta^1 \oplus \gamma^3 \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^4.$$

Nous terminons cette présentation en évoquant le moyen pratique de calculer la résiduée  $a \bowtie b$ .

Les monômes  $\gamma^n \delta^t$  de  $\mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]$  sont inversibles :  $(\gamma^n \delta^t)^{-1} = \gamma^{-n} \delta^{-t}$ . La résiduée d'un élément quelconque  $b$  par un monôme  $\gamma^n \delta^t$  est donc obtenue par

$$\gamma^n \delta^t \bowtie b = \gamma^{-n} \delta^{-t} \otimes b.$$

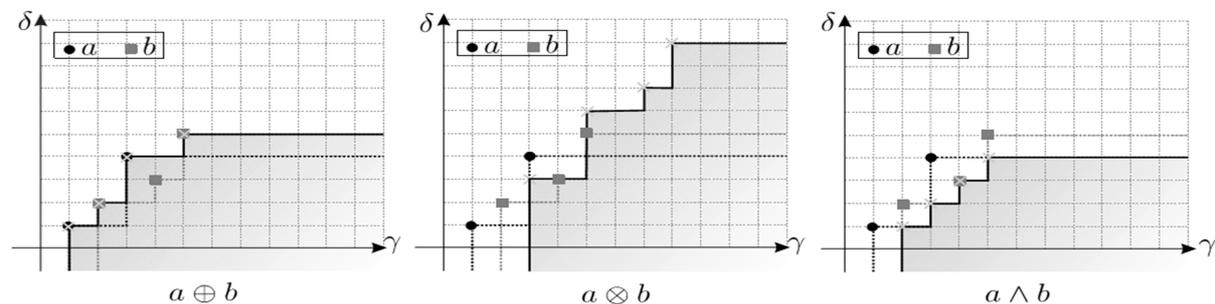
D'autre part, puisque un élément  $a$  de  $\mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]$  s'écrit comme une somme de monômes (finie ou infinie), soit  $a = \bigoplus_{i \in I} \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$ , on peut écrire explicitement

$$a \bowtie b = \left( \bigoplus_{i \in I} \gamma^{n_i} \delta^{t_i} \right) \bowtie b = \bigwedge_{i \in I} \gamma^{-n_i} \delta^{-t_i} b = \gamma^{-n_1} \delta^{-t_1} b \wedge \gamma^{-n_2} \delta^{-t_2} b \wedge \dots$$

Lorsque  $a$  et  $b$  sont des polynômes, le calcul  $a \bowtie b$  revient à calculer la borne *inf* d'un nombre fini de polynômes.

Avec  $a = \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^3 \delta^4$  et  $b = \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^5$  on obtient

$$\begin{aligned} a \bowtie b &= \gamma^{-1} \delta^{-1} b \wedge \gamma^{-3} \delta^{-4} b \\ &= (\gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^3 \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^4) \wedge (\gamma^{-1} \delta^{-2} \oplus \gamma^1 \delta^{-1} \oplus \gamma^2 \delta^1) \\ &= \gamma^1 \delta^{-1} \oplus \gamma^2 \delta^1. \end{aligned}$$


 Figure 2.19 – Manipulation de polynômes de  $\mathcal{M}_m^{ax}[[\gamma, \delta]]$ .

### 2.9.4 Modélisation des graphes d'événements temporisés sur $\mathcal{M}_m^{ax}[[\gamma, \delta]]$

La démarche, similaire à celle adoptée précédemment, est la suivante :

1. les trajectoires de tir des transitions du GET sont codées par des éléments de  $\mathcal{M}_m^{ax}[[\gamma, \delta]]$ .
2. d'un point de vue dynamique, le GET peut alors être vu comme un système induisant des décalages (événementiels et temporels) sur ces trajectoires, les opérateurs permettant de caractériser ces décalages étant l'opérateur  $\gamma$  dans le domaine événementiel et l'opérateur  $\delta$  dans le domaine temporel.

On rappelle tout d'abord comment coder les trajectoires de tir d'un GET par des éléments de  $\mathcal{M}_m^{ax}[[\gamma, \delta]]$ .

Soit  $x(\gamma, \delta)$  un élément de  $\mathcal{M}_m^{ax}[[\gamma, \delta]]$  associé à une transition  $x$  d'un GET. L'information élémentaire associée au monôme  $\gamma^{n_i} \delta^{t_i}$  est : le tir numéro  $n_i$  de la transition  $x$  a lieu au plus tôt à la date  $t_i$ . [Lhommeau, 2003].

**Exemple 2.6.** Nous formulons ici la représentation d'état du GET de la figure 2.8. On utilise la même notation pour désigner les transitions et les éléments de  $\mathcal{M}_m^{ax}[[\gamma, \delta]]$  codant leurs tirs. Les trajectoires sont reliées par les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma^2 x_2 \oplus u \\ x_2 &= \delta^3 x_1 \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

Ou encore sous forme matricielle

$$\begin{cases} X = \begin{pmatrix} \varepsilon & \gamma^2 \\ \delta^3 & \varepsilon \end{pmatrix} X \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \end{pmatrix} U \\ Y = (\varepsilon \ e) X \end{cases}$$

Pour le calcul de la matrice de transfert, on peut procéder très simplement ; en effet on peut reporter  $x_1$  dans l'équation  $x_2$ , on obtient alors  $x_2 = \delta^3 (\gamma^2 x_2 \oplus u) = \delta^3 \gamma^2 x_2 \oplus \delta^3 u$  ; en appliquant **l'étoile de Kleene**, on peut résoudre cette équation implicite, on a alors  $x_2 = (\gamma^2 \delta^3)^* \delta^3 u$ . Finalement en reportant  $x_2$  dans l'équation de sortie, on obtient comme matrice de transfert  $H = CA^*B = \delta^3 (\gamma^2 \delta^3)^*$ .

**Remarque 2.9.** On souligne ici le lien qui apparaît entre les résultats fournis par la théorie spectrale et l'expression du transfert du GET de la figure 2.8.

Puisque les transitions internes  $(x_1, x_2)$  appartiennent à une même composante fortement connexe, il y a un temps de cycle unique pour l'ensemble du graphe de la figure 2.8. Le rayon spectral  $\rho(A)$  fournit alors le temps de cycle de ce circuit critique (c'est ici le seul circuit), soit  $\rho(A) = \frac{2}{3}$ , ce qui correspond à un taux de production de 2 jetons toutes les 3 unités de temps.

On peut noter que l'expression du transfert donnée dans l'exemple précédent met également en évidence ce résultat. En effet, la forme du transfert du GET de la figure 2.8 fait apparaître le caractère ultimement périodique de la réponse impulsionnelle : cette période ultime est décrite par la présence d'une seule étoile de monôme, ici  $(\gamma^2 \delta^3)^*$ .

**Exemple 2.7.** si on se réfère sur l'exemple de figure 2.10 on obtient la forme suivante

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \delta & \varepsilon \\ \gamma & \varepsilon & \gamma^2 \\ \delta^2 & \delta^2 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \gamma & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} \gamma^2 & \varepsilon & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

## 2.10 Réalisabilité, rationalité et périodicité

L'objet de la dernière partie de ce chapitre est de rappeler que tout transfert de GET peut se représenter par une matrice constituée de séries périodiques de  $\mathcal{M}_m^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$ .

Les définitions sont ici fournies dans le dioïde  $\mathcal{M}_m^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$ . [Lhommeau, 2003].

**Définition 2.8 (Polynômes).** Un polynôme  $p$  de  $\mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]$  est une somme finie de monômes telle que :

$$p = \bigoplus_{i=1}^k \gamma^{n_i} \delta^{t_i} = \gamma^{n_1} \delta^{t_1} \oplus \dots \oplus \gamma^{n_k} \delta^{t_k} \text{ avec } n_1 < n_2 < \dots < n_k \text{ et } t_1 < \dots < t_k$$

**Définition 2.9 (Causalité).** Une série  $s \in \mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]$  est dite causale si  $s = \varepsilon$  (la série est nulle) ou si son représentant minimal est à exposants dans  $\mathbb{N}$ . Une matrice est dite causale si toutes ses composantes sont causales.

**Remarque 2.10.** Un élément de  $\mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]$  est causal si les sommets de son représentant graphique appartiennent au cadran Nord-Est du plan  $\mathbb{Z}^2$ .

**Notation 2.1.** ( $\mathcal{M}_m^{ax+}[\gamma, \delta]$ ). L'ensemble des séries causales de  $\mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]$  est stable pour la somme et le produit de  $\mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]$ . Cet ensemble forme un sous-dioïde complet de  $\mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]$  noté  $\mathcal{M}_m^{ax+}[\gamma, \delta]$ . Notons que l'élément maximum de  $\mathcal{M}_m^{ax+}[\gamma, \delta]$  est  $\delta^*$ .

**Définition 2.10 (Rationalité).** Un élément  $s \in \mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]$  est dit rationnel si l'un de ses représentants au moins peut être obtenu par un nombre fini d'opérations  $\oplus, \otimes$  et  $*$  à partir de l'ensemble  $\{\varepsilon, e, \gamma, \delta\}$ . On dira qu'une matrice à coefficients dans  $\mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]$  est rationnelle si tous ses coefficients sont rationnels.

**Remarque 2.11.** Par définition, un élément rationnel est également causal.

**Définition 2.11 (Réalisation).** Un élément  $s \in \mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]$  est réalisable s'il existe un GET mono entrée/mono-sortie dont cet élément est la fonction de transfert, ou plus précisément, s'il existe trois matrices  $C, A, B$  de tailles respectivement  $q \times n, n \times n$  et  $p \times n$  à coefficients dans l'ensemble  $\{\varepsilon, e\}$  tel que cet élément puisse s'écrire  $CA^*B$ .

**Définition 2.12 (Périodicité).** Un élément  $s$  de  $\mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]$  est périodique s'il existe deux polynômes  $p$  et  $q$  de  $\mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]$

$$p = \bigoplus_{i=0}^{\alpha} \gamma^{n_i} \delta^{t_i} \text{ et } q = \bigoplus_{j=0}^{\beta} \gamma^{n_j} \delta^{t_j}$$

et un monôme causal  $r = \gamma^\nu \delta^T$  tels que :

$$s = p \oplus qr^*.$$

Une matrice est périodique si tous ses coefficients sont périodiques.

**Remarque 2.12.** Cette notion est illustrée sur la figure 2.20. De plus, notons que cette définition de la périodicité n'impose pas la causalité de la série.

**Théorème 2.4.** Soit  $H \in \mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]^{p \times m}$ . Sont équivalents

- (i)  $H$  est réalisable
- (ii)  $H$  est rationnelle
- (iii)  $H$  est périodique et causale

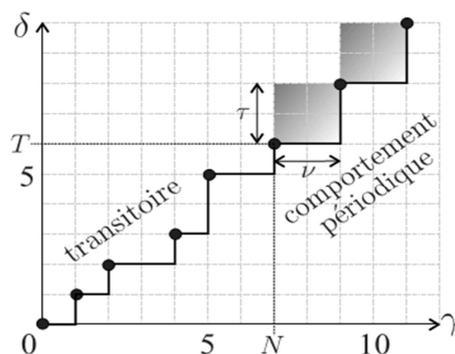


Figure 2.20 – Représentation graphique de la série

$$s = e \oplus \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^5 \oplus \gamma^7\delta^6(\gamma^2\delta^2)^*.$$

**Proposition.** Calcule de  $Pr_+$

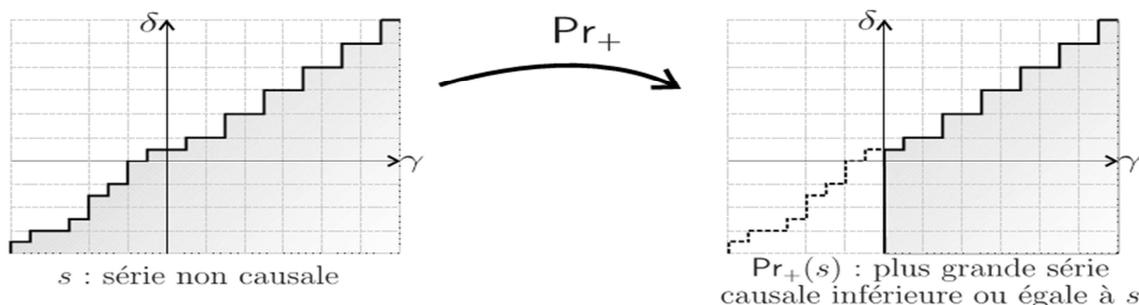
$Pr_+$  sert à éliminer la partie non causale d'une série. Soit  $s \in \mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]$  que l'on écrit

$$s = \bigoplus_{i \in I} s(n_i, t_i) \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$$

$Pr_+(s)$  S'obtient simplement en "annulant" dans  $s$  les monômes non causaux, c'est-à-dire à exposants strictement négatifs, soit

$$Pr_+(s) = s_+(n_i, t_i) = \begin{cases} s(n_i, t_i) \text{ et } (n_i, t_i) \geq (0, 0) \\ \mathcal{E} \text{ sinon} \end{cases}$$

Graphiquement, le représentant de  $Pr_+(s)$  ne conserve que les sommets du représentant de  $s$  contenus dans le cadran Nord-Est du plan  $\mathbb{Z}^2$  (voir figure 2.21). Nous revoyons le lecteur à [Lhommeau, 2003] pour plus de démonstrations.

Figure 2.21 – Représentation graphique de l'opération de projection  $Pr_+$ .

## 2.11 Calculs numériques dans le dioïde $\mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]$

Il est à noter que nous disposons aujourd'hui d'une boîte à outils (MinMaxGD), disponible librement sur [www.istia.univ-angers.fr/~hardouin/outils.html](http://www.istia.univ-angers.fr/~hardouin/outils.html), pour Le logiciel Scilab disponible à l'adresse: [www.scilab.org](http://www.scilab.org). Nous allons utiliser cette librairie pour nos calculs. Nous allons la présenter par la suite dans les Annexes. Plus récemment un site dédié à l'algèbre Max Plus a été développé par l'équipe Max Plus de l'INRIA : [www.maxplus.org](http://www.maxplus.org), le lecteur trouvera de nombreuses informations (cours, articles, logiciels, ...).

### Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté différents dioïdes permettant la représentation du comportement des GET. Une part importante des résultats présentés concerne la représentation d'état de système  $(\max, +)$ -linéaire ainsi que la présentation du dioïde  $\mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]$ .

Nous avons également introduit les caractéristiques périodiques de la réponse impulsionnelle d'un graphe d'événements temporisé. En particulier, le calcul du transfert des GET se ramène à la manipulation de séries rationnelles pour lesquelles il existe des logiciels permettant leur manipulation.

## Commande en juste à temps des SED

### Introduction

De manière analogue aux systèmes continus, on entend par commande de systèmes à événements discrets le pilotage d'un système par le contrôle de ses entrées afin d'atteindre des performances spécifiées au préalable. Compte tenu de leur nature, le contrôle des entrées d'un GET consiste à retarder le plus possible l'entrée de jetons tout en respectant les performances imposées par une spécification, ce qui correspond à la problématique de commande en juste à temps {Juste à temps est une traduction littérale du terme anglais "Just-in-time". On doit interpréter ce terme comme la "quantité juste" au "temps voulu". Dans les milieux industriels, on parle de méthode de production en juste à temps (ou encore en flux tendus), cela consiste à produire la quantité juste nécessaire (de façon à minimiser les stocks internes) au moment où on en a besoin (satisfaction du client)}.

Dans ce contexte, nous proposons dans ce chapitre un survol sur différentes stratégies de contrôle et la synthèse de correcteurs linéaires, en vue de poursuivre une trajectoire ou un modèle de référence. En se référant sur différents travaux [Hardouin, 2004], [Hardouin, 2008], [Lhommeau, 2000], [Lhommeau, 2003], cette partie est organisée de la manière suivante :

- **La commande optimale en boucle ouverte**, historiquement introduite en 1989, parmi les premiers travaux sur la commande de GET, par une approche  $(\max,+)$ . L'objectif de commande est un problème de poursuite d'une trajectoire connue a priori. Il s'agit de calculer la plus grande commande d'entrée telle que la réponse en sortie soit inférieure ou égale à une consigne définie au préalable, autrement dit, la réponse en sortie "suit au mieux" une trajectoire de consigne, notée  $z$ , correspondant au comportement désiré (demande du client). Cette commande est donc optimale vis-à-vis du critère de juste à temps

- **la synthèse d'un précompensateur optimal**. La trajectoire est ici a priori inconnue, mais nous supposons disposer d'un modèle de référence décrivant le comportement entrée/sortie

désiré. Le précompensateur placé en amont du système nominal, a pour objectif de contrôler le système afin que son comportement s'approche au mieux de cette spécification. Il s'agit d'un problème de poursuite de modèle de référence. Le correcteur recherché est le plus grand, ce qui lui confère un caractère optimal vis-à-vis du critère de juste à temps.

- **la synthèse de correcteurs de type retour de sortie et retour d'état** introduite dans [Cottenceau, 1999], [Cottenceau et al, 2001]. Comme en automatique classique, l'objectif de la commande en boucle fermée est de prélever de l'information du système afin de piloter au mieux celui-ci. Il s'agit cette fois de synthétiser un contrôleur de type retour de sortie ou retour d'état, permettant au système en boucle fermée d'atteindre au mieux le modèle de référence. Là encore, le correcteur recherché est le plus grand. Il est également optimal par rapport au critère de juste à temps.

- **la synthèse d'un observateur.** Il s'agit d'un résultat inspiré et proposé pour la première fois par [Hardouin, 2004]. L'idée est de reconstruire l'état du système à partir d'un modèle, des entrées et des sorties mesurées du système.

Puis enfin, un contrôle de type retour de sortie avec observateur, dans le but de s'approcher au mieux du comportement d'un modèle de référence, a été aussi évoqué. De plus, un exemple (figure 3.2) est considéré comme application pour illustrer chaque type de contrôle. Les calculs, donnés dans cette partie, sont les résultats du script Scilab exposé dans l'annexe.

### 3.1 Commande en boucle ouverte

Ce paragraphe présente la commande optimale en boucle ouverte pour les GET. Précisément, comme le signale la figure 3.1, le problème de commande en boucle ouverte résolu est le suivant : On dispose d'un système sous sa représentation d'état (un GET avec  $p$  entrées et  $q$  sorties) dont on connaît les matrices  $A \in \mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times n}$ ,  $B \in \mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times p}$  et  $C \in \mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]^{q \times n}$ , ainsi que la matrice de transfert  $H \in \mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]^{q \times p}$ . On désire, à l'aide des entrées  $u \in \mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]^p$ , faire en sorte que les sorties du système suivent au mieux des trajectoires déterminées dites de consignes (la demande du client)  $z \in \mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]^q$ . il est montré que ce problème a une solution optimale, c'est-à-dire qu'il existe une plus grande commande d'entrée  $u_{opt} \in \mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]^p$  telle que la sortie résultant de cette entrée ( $y_{opt} = Hu_{opt}$ ) soit inférieure ou égale à la sortie désirée  $z$ . La commande  $u_{opt}$  est alors optimale vis-à-vis du critère de juste à temps (la sortie  $y_{opt}$  est en juste à temps).

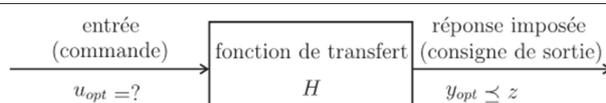


Figure 3.1 – Problématique générale de la commande en boucle ouverte.

Formellement, soit  $L_H : \mathcal{M}_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket^p \rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket^q, u \mapsto H \otimes u$ , une application définie sur des dioïdes complets.

Déterminer la plus grande commande revient à s'intéresser à l'ensemble

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{M}_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket^p \mid L_H(u) \preceq z\}$$

et plus précisément à sa borne supérieure (notée  $u_{opt}$ ) qui nous donnera la plus grande commande vérifiant la condition  $L_H(u_{opt}) \preceq z$ . On peut déjà remarquer que cet ensemble n'est pas vide puisque  $u = \mathcal{E}$  est solution, c.-à-d.  $L_H(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \preceq z$ .

En fait, le calcul de cette commande est un problème d'inversion d'application définie sur des dioïdes.

La théorie de la résiduation (présentée dans le premier chapitre) permet de résoudre ce problème directement.

La commande optimale  $u_{opt}$  existe et est donnée par :

$$u_{opt} = \sup \{u \in \mathcal{M}_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket^p \mid L_H(u) \preceq z\} = L_H^\#(z) = H \bowtie z.$$

**Remarque 3.1.** La commande optimale pour un GET correspond à la commande faisant entrer les jetons le plus tardivement possible dans le système; ces jetons peuvent représentés les pièces à usiner ou la matière première.

## Illustration

Considérons le modèle d'un atelier d'assemblage représenté sur la Figure 3.2. Cet atelier est constitué de trois machines  $M_1, M_2$  et  $M_3$ . Les pièces sont traitées en parallèle sur  $M_1$  et  $M_2$  puis assemblées par la machine  $M_3$ . Notons que les machines  $M_1, M_2$  et  $M_3$  ont clairement des temps de cycle différents : la première peut traiter une pièce toutes les deux unités de temps tandis que la seconde, quant à elle, peut traiter une pièce toutes les 5 unités de temps. La machine  $M_3$ , chargée de l'assemblage des pièces, peut traiter trois pièces toutes les deux unités de temps.

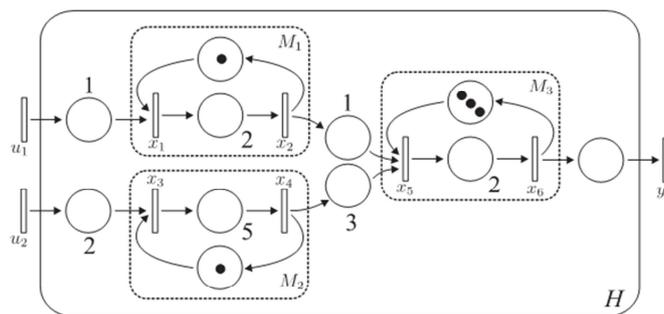


Figure 3.2 – Exemple d'atelier d'assemblage.

En suivant la démarche de modélisation, le fonctionnement de ce graphe d'événements temporisé peut être décrit par les équations suivantes dans le dioïde  $\mathcal{M}_m^{ax}[[\gamma, \delta]]$

$$\begin{cases} x = Ax \oplus Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

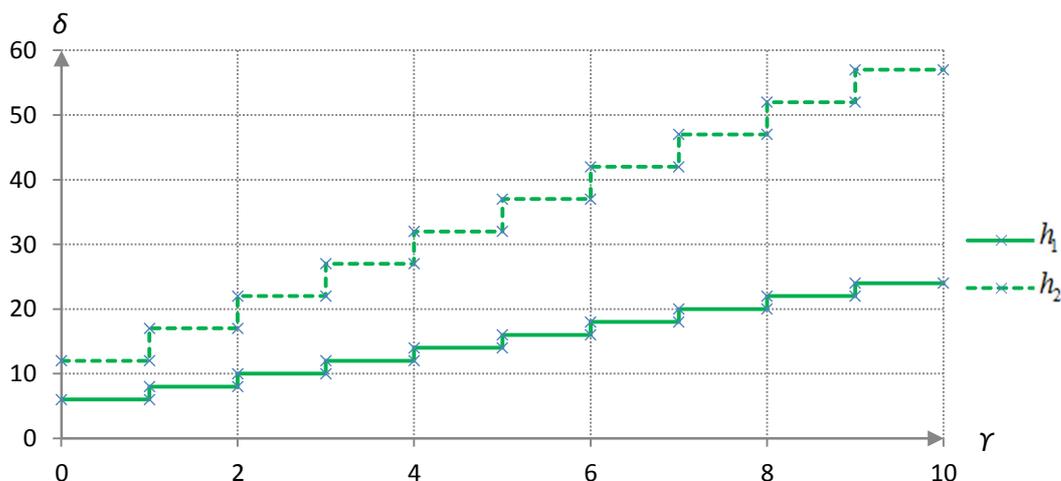
Où

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \gamma & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta & \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \gamma^3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \delta & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^2 \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$C = (\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon)$$

On obtient alors comme expression pour la matrice de transfert :

$$H = CA^*B = (\delta^6(\gamma\delta^2)^* \quad \delta^{12}(\gamma\delta^5)^*) = (h_1 \quad h_2)$$


 Figure 3.3– Représentation de  $H$ 

La consigne (la demande d'un client) est supposée être donnée par le tableau suivant:

numéro de pièces ( $k$ )	0	1	4	5
dates désirées	12	27	32	$+\infty$

Tableau 3.1- tableau correspondant à la consigne désirée

La trajectoire  $z$  peut naturellement se coder dans  $\mathcal{M}_m^{ax}[\gamma, \delta]$  :

$$z = \gamma^0 \delta^{12} \oplus \gamma^1 \delta^{27} \oplus \gamma^4 \delta^{32} \oplus \gamma^5 \delta^{+\infty}$$

Cette trajectoire doit être interprétée comme suit : on souhaite que la pièce 0 soit disponible au plus tard à l'instant 12, la pièce 1 au plus tard à l'instant 27, et les pièces 2,3 et 4 au plus tard à l'instant 32. Le terme  $\gamma^5 \delta^{+\infty}$ , signifie que la pièce 4 est la dernière pièce pour cet ordre de production, puisque la date de production de la pièce 5 est  $+\infty$ .

Le calcul de la commande optimale donne :

$$u_{opt} = \left( \begin{array}{l} \gamma^0 \delta^6 \oplus \gamma^1 \delta^{17} \oplus \gamma^2 \delta^{19} \oplus \gamma^3 \delta^{21} \oplus \gamma^4 \delta^{26} \oplus \gamma^5 \delta^{+\infty} \\ \gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^5 \oplus \gamma^2 \delta^{10} \oplus \gamma^3 \delta^{15} \oplus \gamma^4 \delta^{20} \oplus \gamma^5 \delta^{+\infty} \end{array} \right)$$

Et la sortie correspondante vaut :

$$y_{opt} = \gamma^0 \delta^{12} \oplus \gamma^1 \delta^{23} \oplus \gamma^2 \delta^{25} \oplus \gamma^3 \delta^{27} \oplus \gamma^4 \delta^{32} \oplus \gamma^5 \delta^{+\infty}$$

Le tableau correspondant, à une telle sortie, est donné comme suit :

numéro de pièces ( $k$ )	0	1	2	3	4	5
dates optimales de sortie	12	23	25	27	32	$+\infty$

Tableau 3.2- tableau correspondant à  $y_{opt}$

**Remarque 3.2.** La sortie satisfait bien la consigne désirée (demande du client). On donne aussi sur la figure 3.4.(a) une représentation de la trajectoire  $u_{opt}$ . On peut vérifier (figure 3.4.(b)) que cette commande optimale  $u_{opt}$  respecte bien la spécification, c'est-à-dire que la sortie  $y_{opt} = Hu_{opt}$  est bien inférieure ou égale à la consigne  $z$ .

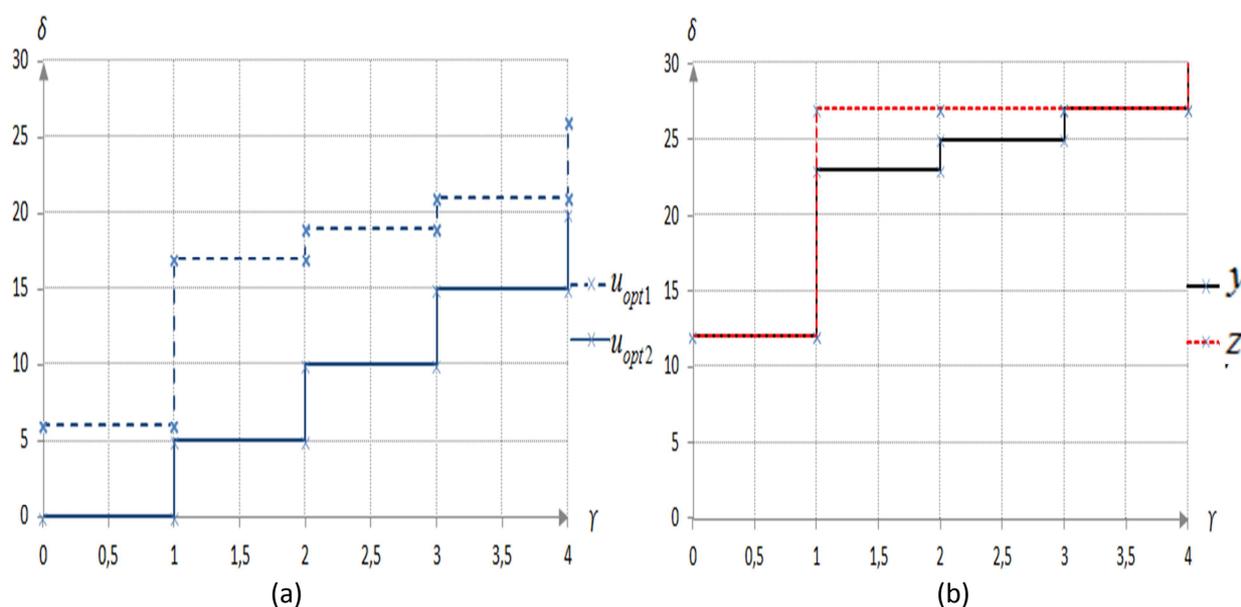


Figure 3.4 – Représentation de  $u_{opt}$ ,  $z$  et  $y$

### 3.2 Synthèse d'un correcteur de type précompensateur

La correction de la dynamique d'un système  $H \in \mathcal{M}_{in}^{ax} [[\gamma, \delta]]^{q \times p}$  (correspondant à un GET) se fait ici par l'action d'un précompensateur  $P \in \mathcal{M}_{in}^{ax} [[\gamma, \delta]]^{p \times p}$  (situé entre la consigne  $v$  et la commande  $u$ ). Il s'agit de modifier de manière structurelle le comportement du système.

L'objectif de commande peut se présenter de la manière suivante : considérons un modèle de référence  $G_{ref} \in \mathcal{M}_{in}^{ax} [[\gamma, \delta]]^{q \times p}$ , un système  $H \in \mathcal{M}_{in}^{ax} [[\gamma, \delta]]^{q \times p}$  (matrice de transfert du système à commander) et un ensemble de précompensateurs  $\mathcal{P} \in \mathcal{M}_{in}^{ax} [[\gamma, \delta]]^{p \times p}$ . Le problème de commande consiste simplement à choisir un précompensateur  $P \in \mathcal{P}$  de telle

sorte que le système contrôlé  $G_p \in \mathcal{M}_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket^{q \times p}$  possède la dynamique décrite par le modèle de référence  $G_{ref} \in \mathcal{M}_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket^{q \times p}$  spécifié sous forme de matrice de transfert. Ce modèle caractérise le comportement structurel voulu pour le système; Le choix du modèle de référence peut se faire de manière à homogénéiser le comportement périodique des composants (machines), qui sont en parallèles dans une chaîne de production. Pour cela, par exemple, on choisit comme modèle de référence dont les composants ont le même taux de production. La figure 3.5 présente le schéma bloc du système nominal, du système précompensé et du modèle de référence.

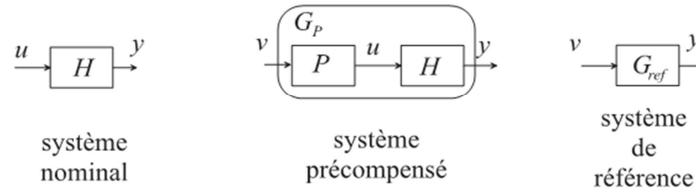


Figure 3.5 – Commande avec modèle de référence : correction d'un système  $H$  par un précompensateur  $P$ .

D'après la figure 3.5, le système précompensé vérifie

$$\begin{cases} u = Pv \\ y = Hu \end{cases}$$

L'équation entrée-sortie s'écrit

$$y = HPv = G_p v$$

D'un point de vue algébrique, ce problème nécessite l'étude de l'application

$N_H(P) : \mathcal{M}_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket^{p \times p} \rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket^{q \times p}$ ,  $P \mapsto HP$ , Formellement, ce problème consiste à chercher la borne supérieure de l'ensemble des correcteurs

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathcal{M}_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket^{p \times p} \mid N_H(P) \preceq G_{ref}\}$$

La solution optimale est immédiate, puisque  $N_H$  est résiduable :

$$P_{opt} = \sup\{P \mid HP \preceq G_{ref}\} = H \bowtie G_{ref}$$

**Remarque 3.3 (Correcteur Neutre).** Notons qu'un modèle de référence intéressant d'un point de vue pratique est  $G_{ref} = H$ . Cette stratégie conduit au précompensateur  $P_{opt} = H \bowtie H$ ,

qualifié de neutre. Il exprime simplement le fait que l'on peut toujours "filtrer" le flux d'entrée d'un système  $H$  par un précompensateur sans dégrader les performances initiales.

### Illustration

On reprend l'exemple de l'atelier traité précédemment (figure 3.2). On rappelle le transfert du système en boucle ouverte :

$$H = (\delta^6 (\gamma \delta^2)^* \quad \delta^{12} (\gamma \delta^5)^*)$$

Nous choisissons ici, comme modèle de référence :

$$G_{ref} = H = (\delta^6 (\gamma \delta^2)^* \quad \delta^{12} (\gamma \delta^5)^*)$$

L'objectif est donc ici de laisser le comportement entrée/sortie du système inchangé, tout en retardant au plus les entrées dans le système. Donc le but de cette illustration est de montrer comment filtrer les entrées du système avec un correcteur neutre.

Le précompensateur optimal tel que  $N_H(P) \preceq G_{ref}$  est donné par le calcul de

$$\begin{aligned} P_{opt} &= H \oslash G_{ref} = H \oslash H \\ &= \begin{pmatrix} (\gamma \delta^2)^* & \delta^6 (\gamma \delta^5)^* \\ \varepsilon & (\gamma \delta^5)^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Une réalisation du système précompensé est donnée sur la figure 3.6.

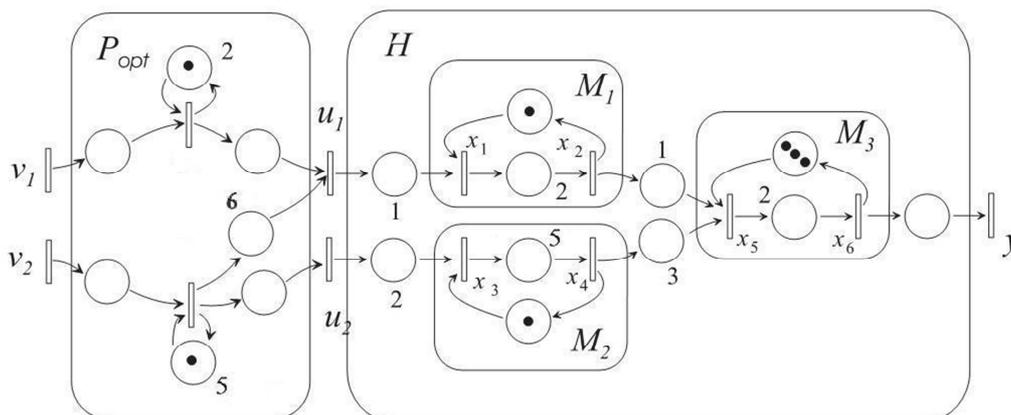


Figure 3.6 – Réalisation du précompensateur permettant d'approcher au mieux  $G_{ref}$ .

Pour évaluer l'impact de ce précompensateur, la commande suivante est appliquée (3 tirs à l'instant 0 sur chaque entrée) :

Numéro de pièce ( $k$ )	0	1	2	3
Dates de tir ( $v_1(k)$ )	0	0	0	$+\infty$
Dates de tir ( $v_2(k)$ )	0	0	0	$+\infty$

Tableau 3.3-Tableau représentant 3 tirs à l'instant 0 sur chaque entrée

Nous pouvons coder ces trajectoires dans le dioïde  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  comme suit :

$$v_1(\gamma, \delta) = e \oplus \gamma \oplus \gamma^2 \oplus \gamma^3 \delta^{+\infty}$$

$$v_2(\gamma, \delta) = e \oplus \gamma \oplus \gamma^2 \oplus \gamma^3 \delta^{+\infty}$$

En l'absence de correcteur, on a :

$$u = v$$

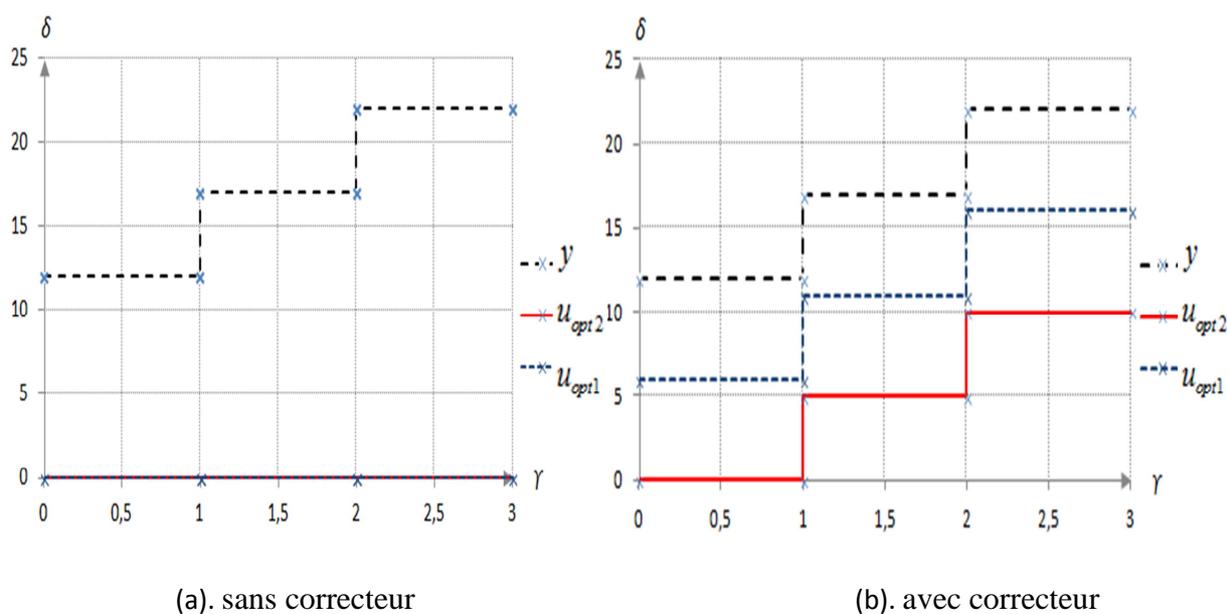
$$y = Hu = \delta^{12} \oplus \gamma \delta^{17} \oplus \gamma^2 \delta^{22} \oplus \gamma^3 \delta^{+\infty}$$

Avec le correcteur nous obtenons :

$$u = P_{opt} v = \begin{pmatrix} \delta^6 \oplus \gamma \delta^{11} \oplus \gamma^2 \delta^{16} \oplus \gamma^3 \delta^{+\infty} \\ e \oplus \gamma \delta^5 \oplus \gamma^2 \delta^{10} \oplus \gamma^3 \delta^{+\infty} \end{pmatrix}$$

$$y = Hu = \delta^{12} \oplus \gamma \delta^{17} \oplus \gamma^2 \delta^{22} \oplus \gamma^3 \delta^{+\infty}$$

Les résultats sont illustrés sur la figure qui suit. Clairement la commande en présence du correcteur est plus grande (plus tardive) et la sortie identique. Tandis que sans le correcteur la commande se fait juste à l'instant 0.



### 3.3 Commande en boucle fermée : synthèse d'un retour de sortie

Dans ce passage, nous allons étudier la synthèse d'un correcteur en boucle fermée pour les graphes d'événements temporisés.

Un des objectifs de la commande en boucle fermée va être d'uniformiser les vitesses des différents chemins dans le GET, en vue d'atténuer (voire de supprimer) une instabilité; par exemple l'accumulation des jetons dans une place.

Outre le contrôle de performances entrée-sortie du système, le contrôleur va permettre de diminuer le temps de séjour des jetons dans le GET, comme pour la commande optimale en boucle ouverte.

Il s'agit ici de modifier la dynamique d'un système  $H \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{q \times p}$  par l'ajout d'un retour de sortie  $F \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{p \times q}$  (situé entre la sortie  $y \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^q$  et l'entrée  $u \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^p$ ). La dynamique du système en boucle fermée est alors modifiée par la dynamique du retour de sortie.

L'objectif de commande peut se présenter de la manière suivante : considérons un modèle de référence  $G_{ref} \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{q \times p}$ , un système  $H \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{q \times p}$  et un ensemble de retours de sortie  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{p \times q}$ . Il faut alors choisir un élément  $F \in \mathcal{F}$  et l'appliquer à  $H$  de façon à ce que, pour les mêmes entrées, les deux systèmes  $G_{ref}$  (le modèle de référence) et  $G_F$  (le système en boucle fermée) aient les mêmes sorties. La figure 3.8 présente le schéma bloc du système nominal, du système en boucle fermée et du modèle de référence.

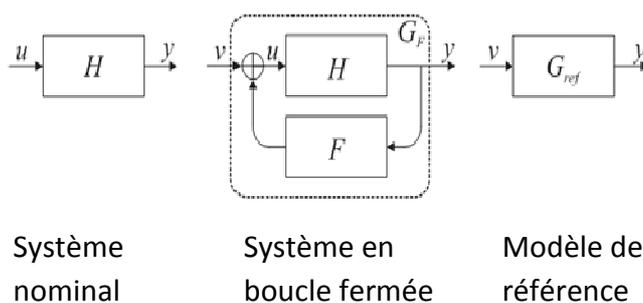


Figure 3.8 – Commande avec modèle de référence : correction d'un système  $H$  par un correcteur de type retour de sortie  $F$ .

D'après la figure 3.8, le système en boucle fermée vérifie

$$\begin{cases} u = v \oplus Fy \\ y = Hu \end{cases}$$

On remplaçant  $y$  dans  $u$  on obtient  $u = v \oplus FHu$ . En accord avec le théorème 1.5,  $u = (FH)^* v$  et l'équation entrée-sortie s'écrira :

$$y = H(FH)^* v = G_F v$$

D'autre part, le modèle de référence nous donne :

$$y = G_{ref} v$$

D'un point de vue algébrique, ce problème nécessite l'étude de l'application  $M_H(F) : \mathcal{M}_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket^{p \times q} \rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket^{q \times p}$ ,  $F \mapsto H(FH)^*$  définie sur des dioïdes complets.

Formellement, ce problème de commande en boucle fermée consiste à chercher la borne supérieure de l'ensemble des correcteurs

$$\mathcal{F} = \{ F \in \mathcal{M}_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket^{p \times q} \mid M_H(F) \preceq G_{ref} \}$$

La borne supérieure de cet ensemble  $\mathcal{F}$  correspond au plus grand correcteur  $F$  qui fournit la plus grande trajectoire de commande de type  $u = Fy \oplus v$  tel que le comportement entrée/sortie soit inférieur à un modèle de référence  $G_{ref}$ . Pour un graphe d'événements temporisé, les trajectoires de la commande  $u = Fy \oplus v$  correspondent aux entrées effectives des jetons. En conséquence, obtenir le plus grand retour de sortie  $F$  permet de retarder le plus possible l'entrée des jetons, tout en garantissant qu'ils sortiront du GET avant  $y = G_{ref} v$ .

La borne supérieure existe est donnée par :

$$F_{opt} = \sup \{ F \in \mathcal{M}_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket^{p \times q} \mid H(FH)^* \preceq G_{ref} \} = H \searrow G_{ref} \not\prec H.$$

### Démonstration

$$\begin{aligned} H(FH)^* \preceq G_{ref} &\Leftrightarrow (FH)^* \preceq G_{ref} \not\prec H \\ &\Leftrightarrow FH \preceq G_{ref} \not\prec H \quad (\text{voir A.1}) \\ &\Leftrightarrow F \preceq H \searrow G_{ref} \not\prec H = F_{opt} \end{aligned}$$

### Illustration

Comme illustration on peut toujours reprendre l'exemple précédent (figure 3.2). On rappelle le transfert du système en boucle ouverte:

$$H = (\delta^6 (\gamma \delta^2)^* \quad \delta^{12} (\gamma \delta^5)^*)$$

Nous choisissons ici, comme modèle de référence :

$$G_{ref} = (\delta^6 (\gamma \delta^5)^* \quad \delta^{12} (\gamma \delta^5)^*) = (g_{ref1} \quad g_{ref2})$$

Le modèle de référence est choisi ici, de manière à ce que les vitesses de fonctionnement des branches du GET ( $u_1 \rightarrow y$  et  $u_2 \rightarrow y$ ) aient le même taux de production ; il s'agit donc ici d'homogénéiser les flux des deux éléments de la matrice de transfert nominal  $H$ .

Le correcteur de type retour de sortie optimal tel que  $H(FH)^* \preceq G_{ref}$  est donné par calcul

$$\begin{aligned} F_{opt} &= H \backslash G_{ref} \oslash H \\ &= \begin{pmatrix} \delta^{-6} (\gamma \delta^5)^* \\ \delta^{-12} (\gamma \delta^5)^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour ce retour de sortie on obtient les commandes suivantes ( $u = v \oplus Fy$ ) :

$$\begin{aligned} u_1 &= \delta^{-6} (\gamma \delta^5)^* y \oplus v_1 \\ u_2 &= \delta^{-12} (\gamma \delta^5)^* y \oplus v_2 \end{aligned}$$

Les formes implicites de ces commandes sont les suivantes :

$$\begin{aligned} u_1 &= \gamma \delta^5 u_1 \oplus \delta^{-6} y \oplus v_1 \\ u_2 &= \gamma \delta^5 u_2 \oplus \delta^{-12} y \oplus v_2 \end{aligned}$$

ce qui conduit en représentation compteur sur le dioïde  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$  aux récurrences suivantes :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 1u_1(t-5) \oplus y(t+6) \oplus v_1(t) \\ u_2(t) &= 1u_2(t-5) \oplus y(t+12) \oplus v_2(t) \end{aligned}$$

Il est clair que sous cette forme, l'élaboration de la commande  $u(t)$  (par le correcteur) nécessite de connaître le futur de la sortie  $y$ , par exemple : le nombre de pièces injectées dans la première entrée  $u_1$  à l'instant  $(t)$  est dépendant du nombre de pièces en sortie  $y$  à l'instant  $(t+6)$ . Cette nécessité de prédire le futur pour pouvoir élaborer la loi de commande est due au fait que le correcteur  $F_{opt}$  n'est pas causal et est donc non réalisable (voir définition 2.11).

On doit alors considérer l'opérateur de projection  $Pr_+ : \mathcal{M}_m^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket \rightarrow \mathcal{M}_m^{ax+} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket$ . En appliquant l'opérateur de projection sur  $F_{opt+}$ , on obtient

$$F_{opt+} = Pr_+(F_{opt}) = \begin{pmatrix} \gamma^2 \delta^4 (\gamma \delta^5)^* \\ \gamma^3 \delta^3 (\gamma \delta^5)^* \end{pmatrix},$$

où  $F_{opt+}$  est le plus grand retour de sortie causal (et réalisable). On peut voir une réalisation de ce correcteur sur la figure 3.9

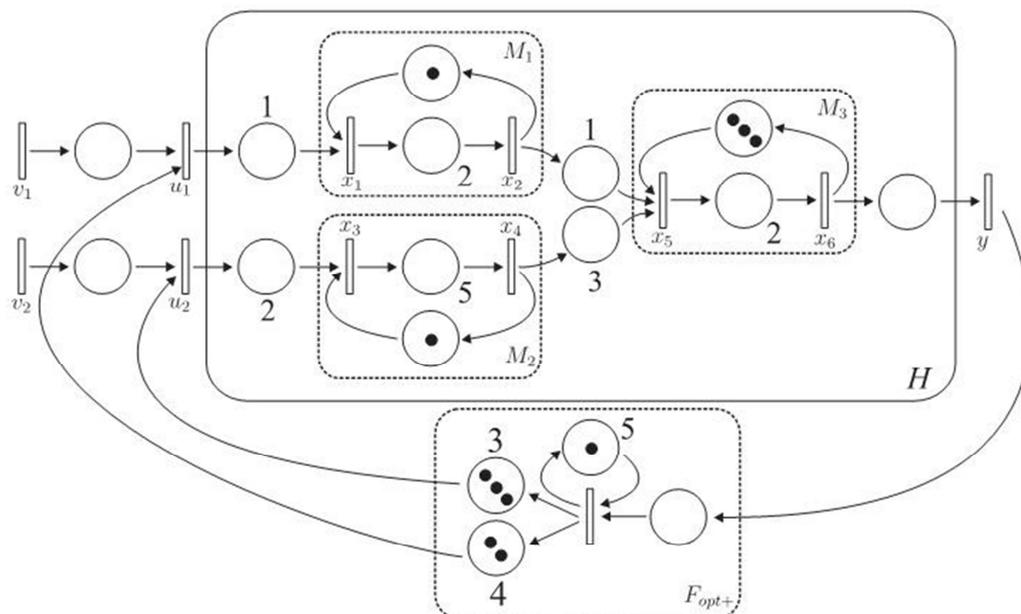


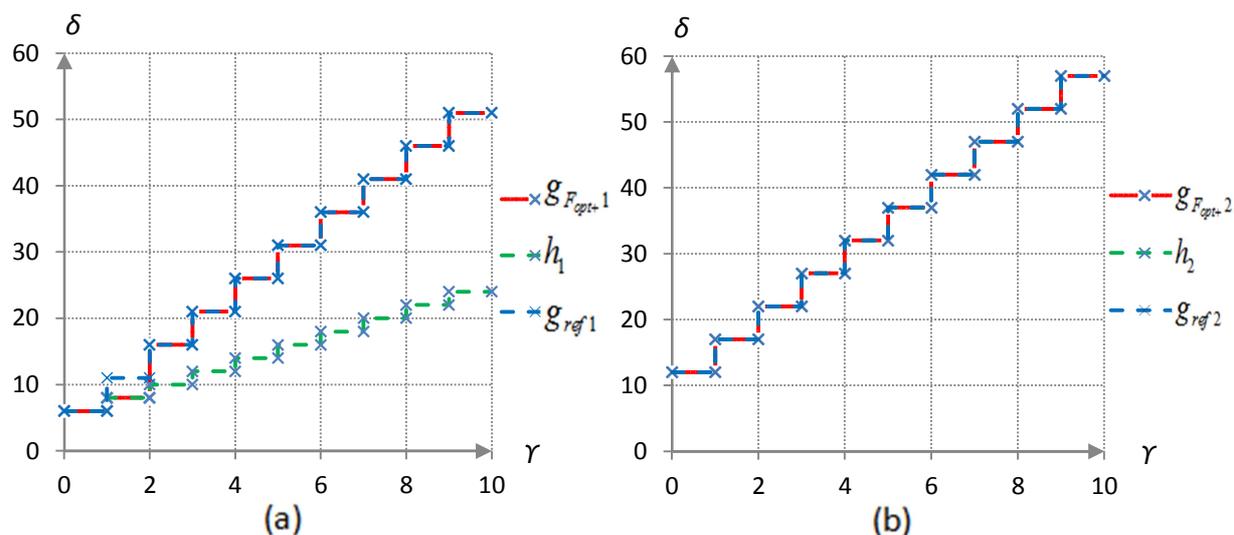
Figure 3.9 – Réalisation du correcteur retour de sortie  $F_{opt+}$

On obtient les transferts suivants :

$$u = (F_{opt+}H)^* v = \begin{pmatrix} e \oplus (\gamma^2 \delta^{10})(\gamma \delta^5)^* & (\gamma^2 \delta^{16})(\gamma \delta^5)^* \\ (\gamma^3 \delta^9)(\gamma \delta^5)^* & e \oplus (\gamma^3 \delta^{15})(\gamma \delta^5)^* \end{pmatrix} v$$

$$y = H(F_{opt+}H)^* v = \left( \gamma^0 \delta^6 \oplus \gamma^1 \delta^8 \oplus (\gamma^2 \delta^{16})(\gamma \delta^5)^* \quad \delta^{12} (\gamma \delta^5)^* \right) v \preccurlyeq G_{ref} v$$

La figure 3.10 représente le modèle de référence  $G_{ref}$ , le transfert nominal  $H$  et le transfert en boucle fermée  $G_{F_{opt+}}$ . On vérifie bien que  $G_{F_{opt+}} = H(F_{opt+}H)^* \preccurlyeq G_{ref}$ . Sur cette figure, on voit aussi le rôle du correcteur, c'est de rapprocher le transfert en boucle fermée  $G_{F_{opt+}}$ , précisément (figure 3.10 (a)) le correcteur a permis à la composante  $g_{F_{opt+}}$  d'atteindre le régime périodique exigé par le transfert du modèle de référence  $g_{ref1}$  juste à l'instant 16. Ce qui nous fait dire que nous avons atteint notre objectif.


 Figure 3.10 – Représentation de  $G_{F_{opt+}}$ ,  $G_{ref}$  et  $H$ 

### 3.4 Synthèse d'un correcteur de type retour d'état

Nous allons exposer dans cette partie la synthèse de correcteurs de type de retour d'état, la structure est donnée sur la figure 3.11.

On rappelle qu'il est toujours possible d'obtenir la représentation d'état d'un GET sous la forme

$$\begin{cases} x = Ax \oplus Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

avec  $A \in \mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times n}$ ,  $B \in \mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times p}$  et  $C \in \mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]^{q \times n}$ .  $n$  le nombre d'états,  $p$  le nombre d'entrées et  $q$  le nombre de sorties. L'objectif de commande peut se présenter de la manière suivante : considérons un modèle de référence  $G_{ref} \in \mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]^{q \times p}$ , un système et un ensemble de retours d'états  $\mathcal{K} \in \mathcal{M}_n^{ax}[\gamma, \delta]^{p \times n}$ . Il faut alors choisir un élément  $K \in \mathcal{K}$  de façon à ce que, pour les mêmes entrées, les deux systèmes  $G_{ref}$  (le modèle de référence) et  $G_K$  (le système munit de son correcteur) aient les mêmes sorties, comme le montre la figure 3.11.

La commande est donnée par l'expression suivante :

$$u = Kx \oplus v$$

avec  $K \in \mathcal{M}_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket^{p \times n}$ . La représentation du système corrigé par  $K$  devient donc

$$\begin{cases} x = Ax \oplus B(Kx \oplus v) \\ y = Cx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (A \oplus BK)x \oplus Bv \\ y = Cx \end{cases}$$

$x = (A \oplus BK)x \oplus Bv$ , en accord avec le théorème 1.5,  $x = (A \oplus BK)^* Bv$ .

Finalement, le transfert entrée-sortie du système muni du correcteur  $K$  devient

$$\begin{aligned} y &= C(A \oplus BK)^* Bv \\ &= C(A^* BK)^* A^* Bv \quad (\text{voir A.6}) \\ &= CA^* B(KA^* B)^* v \quad (\text{voir A.5}) \\ &= H(KA^* B)^* v = G_K v \end{aligned}$$

D'autre part, le modèle de référence nous donne :

$$y = G_{ref} v$$

L'objectif est de synthétiser le plus grand correcteur  $K \in \mathcal{K}$ , tel que  $G_K \preceq G_{ref}$ .

D'un point de vue algébrique, ce problème nécessite l'étude de l'application

$\mathcal{Q}_H(K) : \mathcal{M}_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket^{p \times n} \rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket^{q \times p}$ ,  $K \mapsto H(KA^* B)^*$ , Formellement, ce problème consiste à chercher la borne supérieure de l'ensemble des correcteurs

$$\mathcal{K} = \left\{ K \in \mathcal{M}_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket^{p \times n} \mid \mathcal{Q}_H(K) \preceq G_{ref} \right\}$$

Ce correcteur optimal existe, il est donné par:

$$K_{opt} = H \oslash G_{ref} \oslash A^* B$$

### Démonstration

$$\begin{aligned} H(KA^* B)^* \preceq G_{ref} &\Leftrightarrow (KA^* B)^* \preceq H \oslash G_{ref} \\ &\Leftrightarrow KA^* B \preceq H \oslash G_{ref} \quad (\text{voir A.1}) \\ &\Leftrightarrow K \preceq H \oslash G_{ref} \oslash A^* B = K_{opt} \end{aligned}$$

**Remarque 3.4.** Il est à noter que les correcteurs de type retour de sortie et de type retour d'état sont liés par la relation suivante :

$$F_{opt} = K_{opt} \oslash C$$

**Remarque 3.5.** L'utilisation d'un correcteur de type retour d'état améliore les performances mieux qu'un correcteur de type retour de sortie, c'est-à-dire engendre une commande plus grande et un système corrigé plus proche du modèle de référence.

**Preuve :**

$$\begin{aligned}
 F_{opt} = K_{opt} \oslash C &\Rightarrow F_{opt} C \preceq K_{opt} \Rightarrow F_{opt} CA^* \preceq K_{opt} A^* \\
 &\Rightarrow F_{opt} CA^* B \preceq K_{opt} A^* B \quad \text{avec } H = CA^* B \\
 &\Rightarrow (F_{opt} H)^* \preceq (K_{opt} A^* B)^* \quad (\text{voir A.14}) \\
 &\Rightarrow H (F_{opt} H)^* \preceq H (K_{opt} A^* B)^* \Leftrightarrow G_{F_{opt}} \preceq G_{K_{opt}}
 \end{aligned}$$

De plus que  $G_{F_{opt}} \preceq G_{ref}$  et  $G_{K_{opt}} \preceq G_{ref}$ , on a aussi  $G_{F_{opt}} \preceq G_{K_{opt}}$ , ceci nous permet d'affirmer que le système corrigé par correcteur de type retour d'état sera plus proche du modèle de référence.

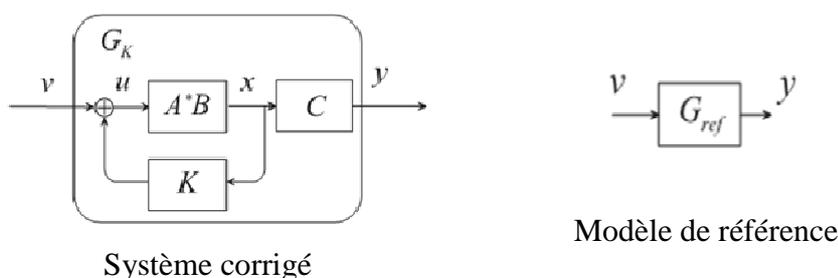


Figure 3.11 – Commande avec modèle de référence : correction d'un système par un correcteur de type retour d'état  $K$ .

**Illustration :**

Si on reprend notre exemple de la figure 3.2 :

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \gamma & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta & \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \gamma^3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \delta & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^2 \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$C = (\varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon)$$

La matrice de transfert :

$$H = CA^* B = (\delta^6 (\gamma \delta^2)^* \quad \delta^{12} (\gamma \delta^5)^*)$$

Le modèle de référence sera toujours

$$G_{ref} = (\delta^6 (\gamma \delta^5)^* \quad \delta^{12} (\gamma \delta^5)^*)$$

Le calcul du retour d'état nous donne :

$$K_{opt} = H \backslash G_{ref} \backslash A^* B$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma^0 \delta^{-1} (\gamma \delta^5)^* & \gamma^0 \delta^{-3} (\gamma \delta^5)^* & \gamma^0 \delta^4 (\gamma \delta^5)^* & \gamma^0 \delta^{-1} (\gamma \delta^5)^* & \gamma^0 \delta^{-4} (\gamma \delta^5)^* & \gamma^0 \delta^{-6} (\gamma \delta^5)^* \\ \gamma^0 \delta^{-7} (\gamma \delta^5)^* & \gamma^0 \delta^{-9} (\gamma \delta^5)^* & \gamma^0 \delta^{-2} (\gamma \delta^5)^* & \gamma^0 \delta^{-7} (\gamma \delta^5)^* & \gamma^0 \delta^{-10} (\gamma \delta^5)^* & \gamma^0 \delta^{-12} (\gamma \delta^5)^* \end{pmatrix}$$

On voit bien que le correcteur  $K_{opt}$  n'est pas causal, à cause des valeurs négatives, et est donc non réalisable. On doit alors considérer l'opérateur de projection  $Pr_+ : \mathcal{M}_m^{ax} [\gamma, \delta] \rightarrow \mathcal{M}_m^{ax+} [\gamma, \delta]$ . En appliquant l'opérateur de projection sur  $K_{opt+}$ , on obtient

$$K_{opt+} = Pr_+ (K_{opt})$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma^1 \delta^4 (\gamma \delta^5)^* & \gamma^1 \delta^2 (\gamma \delta^5)^* & \gamma^0 \delta^4 (\gamma \delta^5)^* & \gamma^1 \delta^4 (\gamma \delta^5)^* & \gamma^1 \delta^1 (\gamma \delta^5)^* & \gamma^2 \delta^4 (\gamma \delta^5)^* \\ \gamma^2 \delta^3 (\gamma \delta^5)^* & \gamma^2 \delta^1 (\gamma \delta^5)^* & \gamma^1 \delta^3 (\gamma \delta^5)^* & \gamma^2 \delta^3 (\gamma \delta^5)^* & \gamma^2 \delta^0 (\gamma \delta^5)^* & \gamma^3 \delta^3 (\gamma \delta^5)^* \end{pmatrix}$$

Ces calculs ci-dessous vérifient que les deux correcteurs sont liés, de plus le système corrigé par correcteur de type retour d'état sera plus proche du modèle de référence, que le système corrigé par correcteur de type retour de sortie :

$$K_{opt+} \backslash C = \begin{pmatrix} \gamma^2 \delta^4 (\gamma \delta^5)^* \\ \gamma^3 \delta^3 (\gamma \delta^5)^* \end{pmatrix} = F_{opt+}$$

$$G_{F_{opt+}} = H (F_{opt+} H)^* = (\gamma^0 \delta^6 \oplus \gamma^1 \delta^8 \oplus (\gamma^2 \delta^{16}) (\gamma \delta^5)^* \quad \delta^{12} (\gamma \delta^5)^*) \preceq G_{ref}$$

$$G_{K_{opt+}} = H (K_{opt+} A^* B)^* = (\delta^6 (\gamma \delta^5)^* \quad \delta^{12} (\gamma \delta^5)^*) = G_{ref}$$

La figure 3.12 représente le modèle de référence  $G_{ref}$ , le transfert nominal  $H$  et le transfert en boucle fermée  $G_{K_{opt+}}$ .  $G_{ref}$  et  $G_{K_{opt+}}$  sont parfaitement confondus, le système corrigé  $G_{K_{opt+}}$  a atteint la spécification dès le départ, c'est-à-dire les régimes périodiques spécifiés par le modèle de référence. Ce qui nous laisse conformer que le système corrigé par correcteur de type retour d'état est plus proche du modèle de référence, que le système corrigé par correcteur de type retour de sortie.

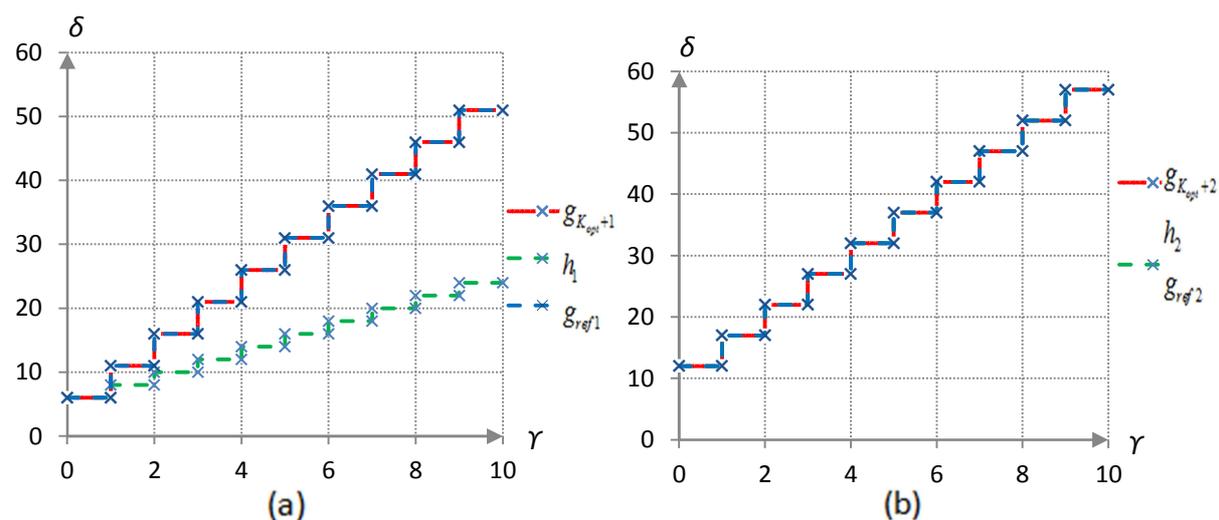


Figure 3.12 – Représentation de  $G_{k_{opt+}}$ ,  $G_{ref}$  et  $H$

### 3.5 Synthèse d'un observateur

Le paragraphe précédent (remarque 3.5) a montré qu'un correcteur de type retour d'état permettait d'améliorer les performances du système corrigé. L'hypothèse était que l'état était accessible à la mesure. Afin de lever cette hypothèse on propose ici un reconstruteur d'état. La démarche adoptée correspond à celle suggérée lors de la synthèse d'observateur pour les systèmes continus classiques. La figure 3.13 présente la structure considérée.[Hardouin, 2004].

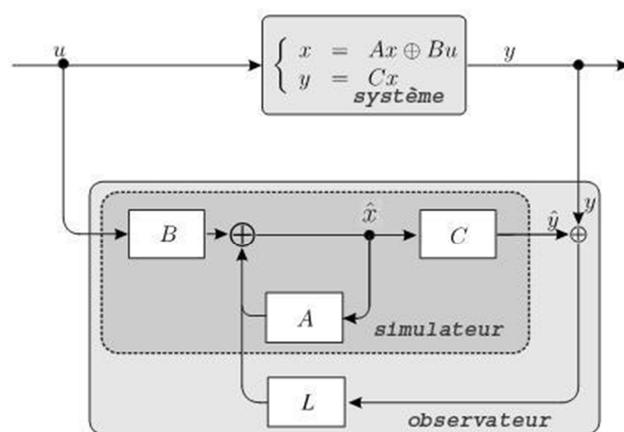


Figure 3.13 – Structure de l'observateur.

Nous supposons disposer de la représentation d'état du système:

$$\begin{cases} x = Ax \oplus Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Et l'équation de l'observateur :

$$\begin{cases} \hat{x} = A\hat{x} \oplus Bu \oplus L(\hat{y} \oplus y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Avec  $A \in \mathcal{M}_m^{ax} [[\gamma, \delta]]^{n \times n}$ ,  $B \in \mathcal{M}_m^{ax} [[\gamma, \delta]]^{n \times p}$  et  $C \in \mathcal{M}_m^{ax} [[\gamma, \delta]]^{q \times n}$ .  $n$  Le nombre d'états,  $p$  le nombre d'entrées,  $q$  le nombre de sorties,  $\hat{x}$  l'état estimée et  $\hat{y}$  la sortie estimée. L'objectif peut se présenter de la manière suivante : considérons un système et un ensemble de matrices d'observation  $\mathcal{L} \in \mathcal{M}_m^{ax} [[\gamma, \delta]]^{q \times n}$ .

En accommodement avec le Théorème 1.5 on aura :

$$\begin{cases} x = A^*Bu \\ y = CA^*Bu = Hu \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{x} = A^*Bu \oplus A^*L(\hat{y} \oplus y) \\ \hat{y} = CA^*Bu \oplus CA^*L(\hat{y} \oplus y) \end{cases}$$

Notre objectif est de calculer la matrice  $L \in \mathcal{L}$  d'observation pour assurer que l'état estimée  $\hat{x}$  soit aussi proche que possible de l'état réelle  $x$ , formellement la condition est la suivante:

$$\hat{x} \preceq x \Rightarrow \hat{x} \preceq A^*Bu$$

Le développement de l'équation de l'observateur conduit à:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= A\hat{x} \oplus Bu \oplus L(\hat{y} \oplus y) \\ &= A\hat{x} \oplus Bu \oplus LC\hat{x} \oplus LCx \\ &= (A \oplus LC)\hat{x} \oplus Bu \oplus LCA^*Bu \\ &= (A \oplus LC)^*Bu \oplus (A \oplus LC)^*LCA^*Bu \\ &= A^*(LCA^*)^*Bu \oplus A^*(LCA^*)^*LCA^*Bu \quad (\text{voir A.6}) \\ \hat{x} &= A^*(LCA^*)^*Bu \oplus A^*(LCA^*)^+Bu \end{aligned}$$

D'après (A.2), voir annexe A, nous avons  $(LCA^*)^+ \preceq (LCA^*)^*$ , directement nous pouvons déduire que  $A^*(LCA^*)^+Bu \preceq A^*(LCA^*)^*Bu$ , ce qui conduit à  $\hat{x} = A^*(LCA^*)^*Bu$

En remplaçant  $\hat{x}$  dans la condition, celle-ci doit être respectée  $\forall u$  :

$$A^*(LCA^*)^*Bu \preceq A^*Bu \Leftrightarrow (A \oplus LC)^*Bu \preceq A^*Bu$$

Ou encore  $(A \oplus LC)^*B \preceq A^*B$

La plus grande matrice  $L$  qui satisfait cette condition est donnée par:

$$L_{opt} = A^*B \not\prec (CA^*B) = A^*B \not\prec H$$

### Démonstration :

Pour la démonstration il suffit de montrer que  $L_{opt}$  est la plus grande solution de l'inégalité :

$$(A \oplus LC)^*B \preceq A^*B$$

En effet, nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (A \oplus LC)^*B \preceq A^*B &\Leftrightarrow (A^*LC)^*A^*B \preceq A^*B && \text{(voir A.6)} \\ &\Leftrightarrow (A^*LC)^* \preceq A^*B \not\prec A^*B \\ &\Leftrightarrow (A^*LC) \preceq A^*B \not\prec A^*B && \text{(voir A.1)} \\ &\Leftrightarrow LC \preceq A^* \not\prec A^*B \not\prec A^*B \\ &\Leftrightarrow LC \preceq A^*B \not\prec A^*B && \text{(voir A.18)} \\ &\Leftrightarrow L \preceq A^*B \not\prec A^*B \not\prec C \\ &\Leftrightarrow L \preceq A^*B \not\prec CA^*B = L_{opt} && \text{(voir A.22)} \\ &\Leftrightarrow L \preceq A^*B \not\prec H = L_{opt} \end{aligned}$$

### 3.5.1 Contrôle de type retour de sortie avec observateur

Nous avons vu que le contrôle de type retour d'état est plus performant qu'un contrôle de type retour de sortie. Bien que sur certains systèmes, seules les sorties sont accessibles à la mesure. Ici un observateur est utilisé pour estimer l'état nécessaire à la mise en place d'un correcteur de type retour d'état, de manière à ce que le système en boucle fermée possède une dynamique inférieure ou égale à celle d'un modèle de référence  $G_{ref} \in \mathcal{M}_{in}^{ax} \llbracket \gamma, \delta \rrbracket^{q \times p}$ . Nous allons illustrer dans cette partie qu'une telle manœuvre est possible et plus performante qu'un simple contrôle de type retour de sortie tel qu'il est proposé précédemment. La stratégie de contrôle est décrite par la figure 3.14. Nous avons démontrés précédemment dans la synthèse de l'observateur que  $\hat{x} = (A \oplus LC)^*Bu$ , de plus on a  $x = A^*Bu$ .

La loi de commande est donnée par :

$$u = K \hat{x} \oplus v$$

La commande s'écrit donc :

$$\begin{aligned} u &= K(A \oplus LC)^* Bu \oplus v \\ &= \left( K(A \oplus LC)^* B \right)^* v \end{aligned}$$

En remplaçant cette expression de la commande dans l'équation de l'état estimé, on aboutit à :

$$\hat{x} = (A \oplus LC)^* B \left( K(A \oplus LC)^* B \right)^* v$$

Ainsi que, L'état du système devient :

$$\begin{aligned} x &= A^* Bu \\ &= A^* B \left( K(A \oplus LC)^* B \right)^* v \end{aligned}$$

Enfin, on retrouve le transfert en boucle fermée du système :

$$\begin{aligned} y &= Cx \\ &= CA^* B \left( K(A \oplus LC)^* B \right)^* v \end{aligned}$$

La démarche est ainsi, au préalable on doit calculer  $L_{opt} = A^* B \not\propto H$  la matrice d'observation, puis le plus grand correcteur  $K_{opt}$  tel que le transfert en boucle fermée soit inférieur ou égal à  $G_{ref}$ . Ce correcteur s'exprime :

$$K_{opt} = H \not\propto G_{ref} \not\propto \left( (A \oplus L_{opt} C)^* B \right)$$

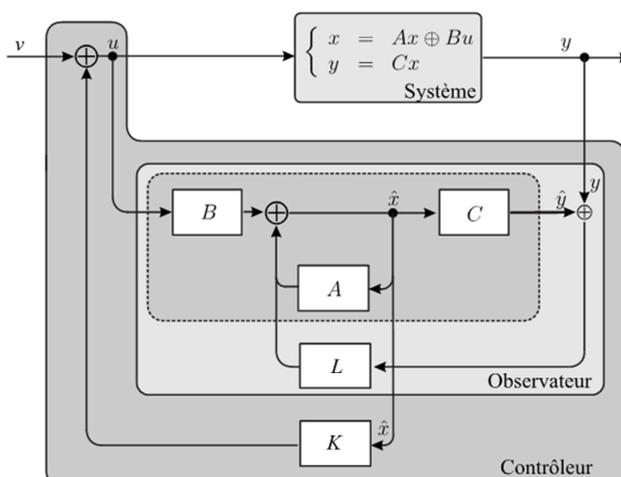


Figure 3.14 – Contrôle utilisant l'observateur

### Démonstration

On recherche le plus grand  $K$  tel que

$$CA^*B \left( K \left( A \oplus L_{opt} C \right)^* B \right)^* \preceq G_{ref}$$

Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & CA^*B \left( K \left( A \oplus L_{opt} C \right)^* B \right)^* \preceq G_{ref} \\ \Leftrightarrow & \left( K \left( A \oplus L_{opt} C \right)^* B \right)^* \preceq (CA^*B) \bowtie G_{ref} \\ \Leftrightarrow & K \left( A \oplus L_{opt} C \right)^* B \preceq (CA^*B) \bowtie G_{ref} \quad (\text{voire A.1}) \\ \Leftrightarrow & K \preceq (CA^*B) \bowtie G_{ref} \not\prec \left( \left( A \oplus L_{opt} C \right)^* B \right) = K_{opt} \end{aligned}$$

Pour résumer, nous avons l'expression du régulateur :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \left( A \oplus L_{opt} C \oplus BK_{opt} \right) \hat{x} \oplus Bv \oplus L_{opt} y \\ u &= K_{opt} \hat{x} \oplus v \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} L_{opt} &= A^* B \not\prec CA^* B = A^* B \not\prec H \\ K_{opt} &= H \bowtie G_{ref} \not\prec \left( \left( A \oplus L_{opt} C \right)^* B \right) \end{aligned}$$

### Illustration

Nous reprenons l'exemple de la figure 3.2, avec les mêmes objectifs que ceux adoptés précédemment. Nous rappelons le modèle entrée/sortie du système :

$$H = (\delta^6 (\gamma \delta^2)^* \quad \delta^{12} (\gamma \delta^5)^*)$$

Et le modèle de référence choisi :

$$G_{ref} = (\delta^6 (\gamma \delta^5)^* \quad \delta^{12} (\gamma \delta^5)^*)$$

Le calcul nous donne :

$$L_{opt+} = Pr_+ (A^* B \neq CA^* B)$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \gamma(\gamma\delta^2)^* \\ (\gamma\delta^2)^* \end{pmatrix}$$

La figure suivante représente l'état du système et l'état estimé qui sont parfaitement confondus. Ce qui prouve la bonne observation.

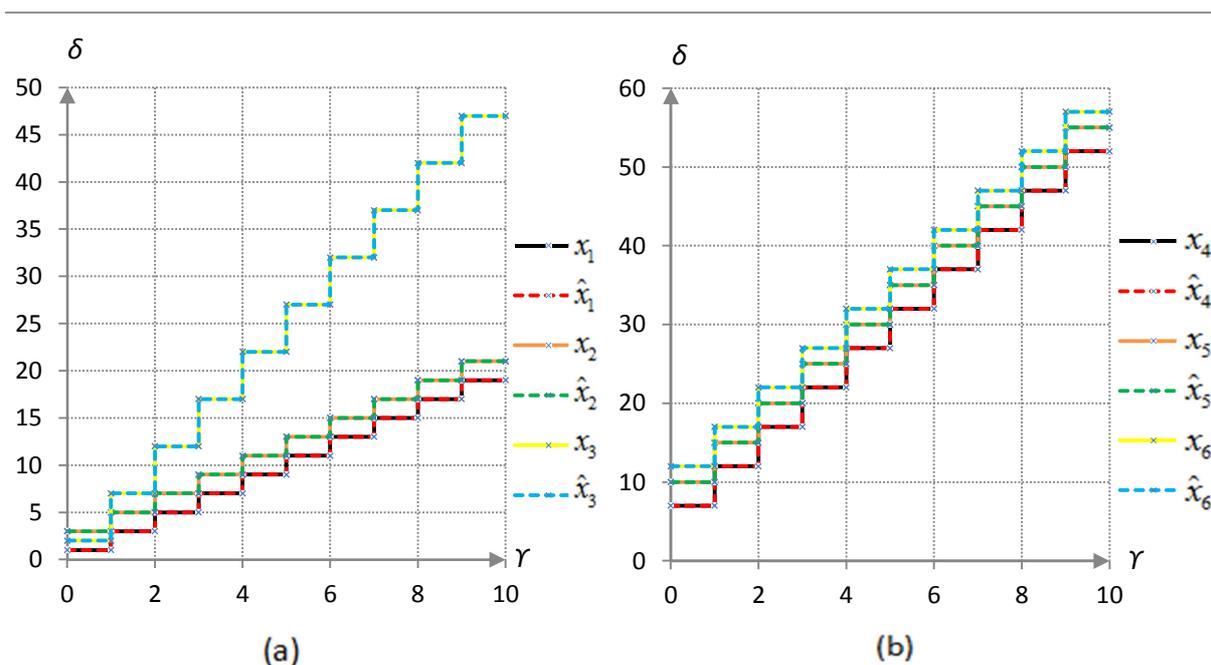


Figure 3.15 – Représentation de  $x$  et  $\hat{x}$

et en appliquant les résultats, nous avons le correcteur type retour d'état :

$$K_{opt} = Pr_+ \left( H \searrow G_{ref} \neq \left( (A \oplus L_{opt} C)^* B \right) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma\delta^4(\gamma\delta^5)^* & \gamma^1\delta^2(\gamma\delta^5)^* & \delta^4(\gamma\delta^5)^* & \gamma\delta^4(\gamma\delta^5)^* & \gamma\delta(\gamma\delta^5)^* & \gamma^2\delta^4(\gamma\delta^5)^* \\ \gamma^2\delta^3(\gamma\delta^5)^* & \gamma^2\delta^1(\gamma\delta^5)^* & \gamma\delta^3(\gamma\delta^5)^* & \gamma^2\delta^3(\gamma\delta^5)^* & \gamma^2(\gamma\delta^5)^* & \gamma^3\delta^3(\gamma\delta^5)^* \end{pmatrix}$$

qui donne les transferts suivants :

$$u = \left( K_{opt} (A \oplus L_{opt} C)^* B \right)^* v$$

$$= \begin{pmatrix} (\gamma \delta^5)^* & \delta^6 (\gamma \delta^5)^* \\ \gamma^2 \delta^4 (\gamma \delta^5)^* & (\gamma \delta^5)^* \end{pmatrix} v$$

$$y = CA^* B \left( K_{opt} (A \oplus L_{opt} C)^* B \right)^* v$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma \delta^{11} (\gamma \delta^5)^* & \delta^{12} (\gamma \delta^5)^* \end{pmatrix} v \preceq G_{ref} v$$

La figure suivante montre bien que ce type contrôle est plus performant qu'un retour de sortie, puisque le transfert en boucle fermée  $G_{K_{opt+}}$  rattrape le modèle de référence  $G_{ref}$  plus rapidement. Ceci ce vois au niveau de la figure 3.16(a) puisque pour ce type contrôle le transfert  $g_{K_{opt+1}}$  a atteint le régime périodique exigé par le transfert du modèle de référence  $g_{ref1}$  juste à l'instant 11. Par contre, le transfert du au contrôle retour de sortie  $g_{F_{opt+1}}$  c'est à l'instant 16 qu'il rattrape ce régime.

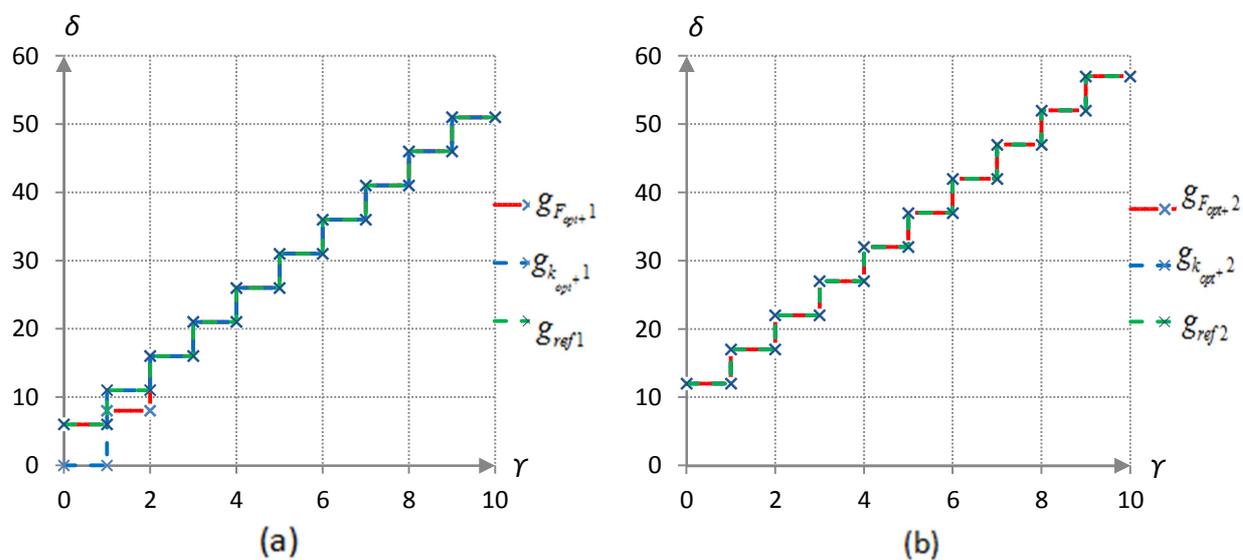


Figure 3.16 – Représentation de  $G_{k_{opt+}}$ ,  $G_{ref}$  et  $G_{F_{opt+}}$

## Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté des méthodes sur la commande de graphes d'événements temporisés dans l'algèbre des diïdes. Les deux structures considérées sont la commande optimale en boucle ouverte où l'objectif est de poursuivre une trajectoire ou d'un modèle, en ajoutant au système un précompensateur, puis la commande en boucle fermée par retour de sortie ou retour d'état dans le même objectif, c'est-à-dire la poursuite d'un modèle. Puis enfin, un contrôle de type retour de sortie avec observateur, dans le but de s'approcher au mieux du comportement d'un modèle de référence, a été aussi évoqué. Sachant que tout au long de cette partie un exemple a été considéré comme application pour illustrer notre travail.

# Conclusion

---

Dans ce mémoire, Nous avons présenté les travaux et des résultats relatifs à la modélisation et la commande des systèmes à événements discrets dans l'algèbre des dioïdes. Il s'agit des systèmes mettant en jeu des phénomènes de synchronisation que l'on retrouve abondamment dans les systèmes de production. L'évolution de l'état est représentable par des équations récurrentes linéaires, telles que l'algèbre  $(\max;+)$  ou l'algèbre  $(\min;+)$ . Depuis l'introduction de cette théorie, de gros efforts ont été entrepris afin d'adapter les concepts et les résultats de la théorie conventionnelle des systèmes linéaires dans cette structure.

Dans un premier lieu, nous avons présenté les outils algébriques nécessaires à la représentation et à la commande des graphes d'événements temporisés. Après un bref rappel sur les ensembles ordonnés et les treillis, une partie importante est consacrée à la théorie de la résiduation. Ainsi que l'application étoile de Kleene qui joue un rôle clé dans le problème de synthèse de lois de commande.

Le chapitre suivant est consacré à la modélisation de systèmes à événements discrets par des réseaux de Petri et plus particulièrement par une sous-classe des réseaux de Petri : les graphes d'événements temporisés. Ensuite, les différentes représentations des graphes d'événements temporisés dans l'algèbre des dioïdes (représentation aux dateurs, aux compteurs, par des séries formelles) ont été introduites.

Puis enfin le troisième et dernier chapitre, nous avons présenté deux structures de commande optimale vis-à-vis du critère juste à temps. La première est la commande en boucle ouverte où l'objectif est de poursuivre une trajectoire ou un modèle, en ajoutant au système un précompensateur. La seconde est la commande en boucle fermée par retour d'état ou retour de sortie avec ou sans observateur dans le même objectif, c'est-à-dire la poursuite d'un modèle. Nous avons vu aussi que le contrôle avec retour d'état et le contrôle de type retour de sortie avec observateur sont plus performant qu'un contrôle avec retour de sortie simple.

De telles structures de commande présentent un intérêt notamment dans le domaine de la gestion de production où le rôle des correcteurs synthétisés consiste à améliorer la gestion des flux d'entrée d'un système de production, ou d'apporter des modifications à certains systèmes.

Contrairement aux systèmes classiques, les systèmes à événements discrets ne peuvent pas être modélisés par des équations différentielles dépendantes du temps, d'un point de vue théorique, ce mémoire propose une solution alternative à ce problème, nous avons présenté en celui-ci un ensemble d'étapes primordiales pour synthétiser des lois de commande sous le critère juste à temps pour ces systèmes. Il serait intéressant d'explorer le comportement des commandes proposées ici dans le cadre des systèmes incertains et d'analyser la robustesse des correcteurs synthétisés en dernier chapitre semble opportune.

# **Annexes**

Nous présentons ici un ensemble de propriétés et des définitions (voir [Houssin, 2006], [Hardouin, 2008], [Lhommeau, 2003], [Gaubert, 1992] et [Cottenceau, 1999] pour les preuves).

## A.1 Propriétés de l'opérateur \*

Ci-dessous nous rappelons quelques propriétés des fonctions  $S : x \mapsto x^* = \bigoplus_{k \geq 0} x^k$  et  $P : x \mapsto x^+ = \bigoplus_{k \geq 1} x^k$ . Soit  $\mathcal{D}$  un dioïde complet.  $\forall a, b \in \mathcal{D}$

$$a \preceq a^* \quad (\text{A.1})$$

$$a^+ \preceq a^* \quad (\text{A.2})$$

$$(a^*)^* = a^* \quad (\text{A.3})$$

$$(a^+)^* = a^* \quad (\text{A.4})$$

$$a(ba)^* = (ab)^* a \quad (\text{A.5})$$

$$(a \oplus b)^* = (a^* b)^* a^* = b^* (ab^*)^* = (a \oplus b)^* a^* = b^* (a \oplus b)^* \quad (\text{A.6})$$

$$a^* a^* = a^* \quad (\text{A.7})$$

$$(a^*)^+ = a^* \quad (\text{A.8})$$

$$(a^+)^+ = a^+ \quad (\text{A.9})$$

$$(ab^*)^+ = a(a \oplus b)^* \quad (\text{A.10})$$

$$(ab^*)^* = e \oplus a(a \oplus b)^* \quad (\text{A.11})$$

$$(a \oplus b)^* = (a^* \oplus b)^* = (a \oplus b^*)^* = (a^* b^*)^* = (a^* \oplus b^*)^* \quad (\text{A.12})$$

En outre, lorsque  $\mathcal{D}$  est commutatif

$$(a \oplus b)^* = a^* b^* \quad (\text{A.13})$$

Soit  $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$  une matrice partitionnée en quatre blocs :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

La matrice  $A^*$  s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} a_{11}^* \oplus a_{11}^* a_{12} (a_{21} a_{11}^* a_{12} \oplus a_{22})^* a_{21} a_{11}^* & a_{11}^* a_{12} (a_{21} a_{11}^* a_{12} \oplus a_{22})^* \\ (a_{21} a_{11}^* a_{12} \oplus a_{22})^* a_{21} a_{11}^* & (a_{21} a_{11}^* a_{12} \oplus a_{22})^* \end{pmatrix}$$

**Théorème.** Pour commencer, la relation d'ordre du dioïde complet  $\mathcal{D}$  détermine la propriété d'isotonie suivante  $\forall a, b \in \mathcal{D} : a \preceq b \Rightarrow a^* \preceq b^*$  (A.14)

## A.2 Propriétés des résiduées des applications $L_A$ et $R_A$

**Propriété 1** Soit un dioïde complet.

$$a^* \bowtie x = a^* \bowtie (a^* \bowtie x) \quad (\text{A.15})$$

$$a^* x = a^* \bowtie (a^* x) \quad (\text{A.16})$$

$$a^* \bowtie x = a^* (a^* \bowtie x) \quad (\text{A.17})$$

$$a^* \bowtie a^* x = a^* x \quad (\text{A.18})$$

$$x \not\bowtie a^* = (x \not\bowtie a^*) \not\bowtie a^* \quad (\text{A.19})$$

$$x a^* = (x a^*) \not\bowtie a^* \quad (\text{A.20})$$

$$x \not\bowtie a^* = (x \not\bowtie a^*) a^* \quad (\text{A.21})$$

$$x \not\bowtie a \not\bowtie b = x \not\bowtie (ba) \quad (\text{A.22})$$

**Propriété 2** Soient  $\mathcal{D}$  un dioïde complet et  $A \in \mathcal{D}^{p \times n}$  et  $B \in \mathcal{D}^{n \times p}$  deux matrices. Alors  $A \bowtie A$  et  $B \not\bowtie B$  sont des matrices dans  $\mathcal{D}^{n \times n}$  vérifiant

$$\begin{aligned} A \bowtie A &= (A \bowtie A)^* \\ B \not\bowtie B &= (B \not\bowtie B)^* \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

**Propriété 3** Soient  $\mathcal{D}$  un dioïde complet,  $A \in \mathcal{D}^{p \times n}$ ,  $M \in \mathcal{D}^{p \times p}$  et  $N \in \mathcal{D}^{n \times n}$  trois matrices. Alors  $A \bowtie (M^* A)$  et  $(AN^*) \not\bowtie A$  sont des matrices dans  $\mathcal{D}^{n \times n}$  vérifiant

$$\begin{aligned} A \bowtie (M^* A) &= (M^* A) \bowtie (M^* A) = (A \bowtie (M^* A))^* \\ (AN^*) \not\bowtie A &= (AN^*) \not\bowtie (AN^*) = ((AN^*) \not\bowtie A)^* \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

## B.1 Notions sur la théorie des graphes

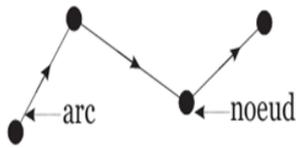


Figure. B.1 : Un chemin.

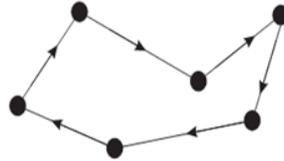


Figure. B.2 : Un circuit élémentaire.

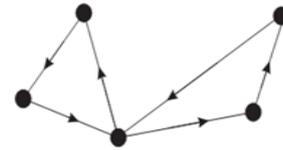


Figure. B.3 : Composante fortement connexe.

Nous rappelons ici quelques définitions issues de la théorie des graphes. Nous donnons également l'interprétation, en termes de chemins d'un graphe, des puissances de matrices carrées calculées dans les algèbres  $(\max, +)$  et  $(\min, +)$  [Hardouin, 2008].

### B.1.1 Définitions générales

**Graphe orienté** Un graphe orienté est un couple  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  où  $\mathcal{V}$  est un ensemble de sommets et  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  est un ensemble d'arcs orientés.

**Graphe valué** Un graphe orienté pour lequel tout arc  $(j, i) \in \mathcal{E}$  est muni d'un poids noté  $a_{ij}$  est appelé graphe valué.

**Représentation graphique** On représente généralement les sommets par des points et les arcs orientés par des flèches. Le poids des arcs figure sur chaque arc.

**Graphe connexe** Un graphe orienté est dit connexe si pour deux nœuds  $i$  et  $j$  quelconques du graphe, il existe une séquence  $(i_1, i_2, \dots, i_p)$  telle que pour tout  $j = 1, \dots, p-1$  soit  $(i_j, i_{j+1}) \in \mathcal{E}$ ,  $(i_{j+1}, i_j) \in \mathcal{E}$ .

**Graphe fortement connexe** Un graphe est dit fortement connexe si pour deux nœuds  $i$  et  $j$  quelconques  $i \rightsquigarrow j$ .

### B.1.2 Graphes et matrices $(\max, +)$

Nous rappelons ici quelques aspects du lien entre cheminements dans un graphe et calcul matriciel dans  $(\max, +)$  ou  $(\min, +)$ .

On rappelle que le dioïde  $\mathbb{R}_{\max}$  correspond à l'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  muni de l'opérateur  $\max$  pour la loi additive  $\oplus$  et l'addition classique  $+$  pour la loi multiplicative.

**Graphe de précédence d'une matrice**  $(\max, +)$  Soit  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ . Le graphe orienté valué, composé de  $n$  sommets et tel qu'il existe un arc  $(i, j)$  de poids  $A_{ij}$  si  $A_{ij} \neq \varepsilon$ , est noté  $\mathcal{G}(A)$  et appelé graphe de précédence associé à la matrice  $A$ .

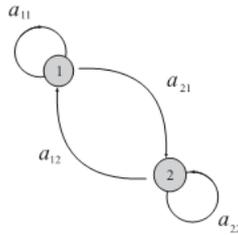


Figure. B.4 : Graphe associé à une matrice.

**Matrice irréductible** Une matrice  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  est dite irréductible si  $\mathcal{G}(A)$  est fortement connexe, sinon,  $A$  est dite réductible.

### Interprétation de $A^k$ en termes de chemins de $\mathcal{G}(A)$

L'élément  $A_{ij}$  doit être interprété sur  $\mathcal{G}(A)$  comme le poids d'un chemin de longueur 1 allant du nœud  $j$  au nœud  $i$ .

Ecrivons  $(A^2)_{ij}$  dans le dioïde  $\mathbb{R}_{\max}$  :

$$(A^2)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes A_{kj}$$

L'interprétation dans l'algèbre usuelle de cette même expression est

$$(A^2)_{ij} = \text{Max}_{k=1}^n (A_{ik} + A_{kj})$$

L'élément  $(i, j)$  de la matrice  $A^2$  (calculée dans  $\mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ ) correspond donc au poids maximal des chemins de longueur 2 allant du nœud  $j$  au nœud  $i$ .

De façon générale, soit  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ .

$(A^k)_{ij}$  = poids maximum de tous les chemins de longueur  $k$  allant de  $j$  à  $i$  dans  $\mathcal{G}(A)$ .

Naturellement, l'expression des exposants  $A^k$  d'une matrice carrée de  $\mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$  devient :

$(A^k)_{ij}$  = poids minimum des chemins de longueur  $k$  allant de  $j$  à  $i$  dans  $\mathcal{G}(A)$ .

Poids moyen maximal des circuits de longueur  $k$  et lien avec le rayon spectral Partant de l'interprétation précédente, pour une matrice  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ ,

$(A^k)_{ii}$  = poids maximum de tous les circuits de longueur  $k$  passant par le nœud  $i$  :

En conséquence,

$\bigoplus_{i=1}^n (A^k)_{ii}$  poids maximum de tous les circuits de longueur  $k$  du graphe  $\mathcal{G}(A)$  :

Cette expression est simplement la trace de la matrice  $A^k$  et est notée  $\text{tr}(A^k)$ .

le poids moyen maximal des circuits de longueur  $k$  s'obtient en divisant, dans l'algèbre usuelle,  $\text{tr}(A^k)$  par la longueur de ces circuits, c'est-à-dire  $k$ . Ceci se réécrit dans le dioïde  $\mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$

$\text{tr}(A^k)^{\frac{1}{k}}$  = poids moyen maximal de tous les circuits de  $\mathcal{G}(A)$  de longueur  $k$  :

Lorsque  $A$  est irréductible, on peut donc faire une interprétation du rayon spectral  $\rho(A)$  défini par

$$\rho(A) = \bigoplus_{k=1}^n \text{tr}(A^k)^{\frac{1}{k}}$$

Si  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  est irréductible, le graphe de précedence de  $A$  est fortement connexe et ne peut donc pas avoir de circuit élémentaire de longueur plus grande que  $n$ . Le rayon spectral de  $A$  fournit alors le poids moyen maximum de tous les circuits du graphe  $\mathcal{G}(A)$ .

**Remarque** Dans le cadre de la modélisation des GET sur le dioïde  $\mathbb{R}_{\max}$ , on a en régime

autonome  $X(k) = AX(k-1)$ . La valeur de  $\text{tr}(A^k)^{\frac{1}{k}}$  correspond alors pratiquement au temps de cycle maximum de tous les circuits de longueur  $k$  du GET. Aussi, lorsque le GET est fortement connexe, c'est le circuit le plus lent qui impose (en raison de la synchronisation avec tous les autres circuits) son temps de cycle.

Dans ce cas, le rayon spectral de  $A$  fournit le maximum des temps de cycle de l'ensemble des circuits du GET, et donc également le temps de cycle général du graphe.

## C. MinMaxGD : librairie de Calcul dans le dioïde $\mathcal{M}_m^{\alpha, \gamma, \delta}$

### C.1 Introduction

La librairie MinMaxGD (Disponible librement à l'adresse [www.istia.univ-angers.fr/~hardouin/outils.html](http://www.istia.univ-angers.fr/~hardouin/outils.html)) [Hardouin, 2008] se présente comme un ensemble de routines écrites en C++, liées au logiciel Scilab (Le logiciel Scilab est disponible à l'adresse : [www.scilab.org](http://www.scilab.org)). Cette librairie permet de manipuler des séries rationnelles dans le dioïde  $\mathcal{M}_m^{\alpha, \gamma, \delta}$ .

Notons également que le groupe Max Plus de l'INRIA a également développé une librairie pour Scilab, permettant le calcul dans le dioïde  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ . (Cette librairie est disponible librement à l'adresse [www.scilab.org/contributions](http://www.scilab.org/contributions). Plus récemment un site dédié à l'algèbre Max Plus a été développé par l'équipe Max Plus de l'INRIA : [www.maxplus.org](http://www.maxplus.org), le lecteur trouvera de nombreuses informations (cours, articles, logiciels,...) concernant l'algèbre Max Plus sur ce site)

Dans la suite de cette annexe, on trouvera l'ensemble des scripts Scilab utilisés pour effectuer les calculs des différents exemples de ce mémoire.

MinMaxGD reconnaît les types élémentaires suivants : type série (noté séries) et le type matrice (noté smatrix) correspondant au dioïde  $\mathcal{M}_m^{\alpha, \gamma, \delta}$ . MinMaxGD reconnaît les opérations algébriques de base suivantes (pour deux éléments  $a, b \in \mathcal{M}_m^{\alpha, \gamma, \delta}$ ).

opération	Syntaxe
$\oplus$ (somme)	a+b
$\otimes$ (produit)	a*b
$\oslash$ (résiduation à droite)	a /b
$\oslash$ (résiduation à gauche)	a\b
*	stargd(a)
$\text{Pr}_+$ (projection dans les causaux)	prcaus(a)
$\wedge$ (inf)	a ^ b

## Script scilab

```
clc
```

```
//initialisation des matrices
```

```
A = smatrix(6,6);
```

```
B = smatrix(6,2);
```

```
C = smatrix(1,6);
```

```
v=smatrix(2,1);
```

```
i=smatrix(2,1);
```

```
//affectation des valeurs des matrices
```

```
A(1,2)=series(eps,[1 0],e);
```

```
A(2,1)=series(eps,[0 2],e);
```

```
A(3,4)=series(eps,[1 0],e);
```

```
A(4,3)=series(eps,[0 5],e);
```

```
A(5,2)=series(eps,[0 1],e);
```

```
A(5,4)=series(eps,[0 3],e);
```

```
A(5,6)=series(eps,[3 0],e);
```

```
A(6,5)=series(eps,[0 2],e);
```

```
B(1,1)=series(eps,[0 1],e);
```

```
B(3,2)=series(eps,[0 2],e);
```

```
C(1,6)=series(eps,[0 0],e);
```

```
i(1,1)=series(eps,[0 0],e);
```

```
i(2,1)=series(eps,[0 0],e);
```

```
v(1,1)=series(eps,[0 0 ; 1 0 ; 2 0 ; 3 %inf],[0 %inf]);
```

## Annexe C

---

```
v(2,1)=series(eps,[0 0 ; 1 0 ; 2 0 ; 3 %inf],[0 %inf]);
```

```
z = series(eps,[0 12 ; 1 27 ; 4 32 ; 5 %inf],[0 %inf])
```

```
// Calcule du transfert
```

```
H = C*stargd(A)*B
```

```
//Commande en boucle ouverte
```

```
u_opt = H\z
```

```
y = H*u_opt
```

```
//Synthèse d'un correcteur de type précompensateur
```

```
Gref=H
```

```
P_opt = H\Gref
```

```
y=H*v
```

```
u=P_opt*v
```

```
y=H*u
```

```
// Le mode de référence
```

```
Gref = [series(eps,[0 6],[1 5]) series(eps,[0 12],[1 5])]
```

```
//Commande en boucle fermée retour de sortie
```

```
F = H\Gref/H
```

```
F_opt = prcaus(F)
```

```
// le transfert en boucle fermée
```

```
G_F_opt=H*stargd(F_opt*H)
```

## Annexe C

---

//Commande en boucle fermée retour d'état

$$K = H \backslash \text{Gref} / (\text{stargd}(A) * B)$$

$$K_{\text{opt}} = \text{prcaus}(K)$$

// Vérification si les correcteurs sont reliés

$$F_{\text{opt}} = K_{\text{opt}} / C$$

// Le transfert en boucle fermée

$$G_{K_{\text{opt}}} = H * \text{stargd}(K_{\text{opt}} * \text{stargd}(A) * B)$$

//commande en boucle fermée avec observateur

// L'état du système la consigne est une impulsion

$$x = (\text{stargd}(A) * B) * i$$

// gain d'observation

$$L = (\text{stargd}(A) * B) / H$$

$$L_{\text{opt}} = \text{prcaus}(L)$$

//l'etat estime

$$xx = \text{stargd}(A + (L_{\text{opt}} * C)) * B * i$$

// Le correcteur avec l'observateur

$$K = H \backslash \text{Gref} / ((\text{stargd}(A + L_{\text{opt}} * C)) * B)$$

$$K_{\text{opt}} = \text{prcaus}(K)$$

// Transfert en boucle fermée avec observateur

$$G_{K_{\text{opt}}} = H * (K_{\text{opt}} * ((\text{stargd}(A + L_{\text{opt}} * C)) * B))$$

# **Bibliographie**

# Bibliographie

---

- [Aurélien corréia, 2004] Aurélien corréia, (2004). Etude des graphes d'événements temporisés dans l'algèbre des dioïdes, synthèse d'un modèle de référence avec contrainte de temps critique, Mémoire de DEA, LISA - Université d'Angers, Thèse de doctorat.
- [Aurélien corréia, 2007] Aurélien corréia, (2007). Modélisation de conflits dans l'algèbre des dioïdes, Application à la régulation de trafic dans les carrefours, Thèse de doctorat, Université de technologie de Belfort-Montbéliard.
- [Baccelli, 1992] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder et J.P. Quadrat. Synchronization and linearity. An algebra for Discrete Event Systems. Wiley, New York, 1992.
- [Boutin, 2009] O. Boutin, Modélisation de conflits et calcul de bornes dans les systèmes de production par la théorie des dioïdes, Thèse de Doctorat, École Centrale de Nantes.
- [Bourcerie, 2007] Bourcerie, la modélisation des systèmes de production et le séquençement par réseaux de pétri, cours de master recherche, systèmes dynamiques et signaux.
- [Cohen, 1995] Cohen, G. (1995). Théorie algébrique des systèmes à événements discrets. Polycopié de cours de l'École des Mines de Paris.
- [Cottenceau, 1999] Cottenceau, B. (1999). Contribution à la commande de systèmes à événements discrets : synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes. Thèse, LISA - Université d'Angers.
- [Cottenceau et al., 2001] Cottenceau, B., Hardouin, L., Boimond, J.-L., and Ferrier, J.-L. (2001). Model reference control for timed event graphs in dioids. Automatica, 37 :1451–1458.
- [David and Alla, 1989] David, R. and Alla, H. (1989). Du grafctet aux réseaux de Petri. Hermès, Paris, France.
- [Euriell, 2011] Euriell, Modèles et calculs garantis pour les systèmes  $(\min,+)$  linéaires, Thèse de doctorat, l'ISTIA, École d'Ingénieur de l'Université d'Angers.
- [Ferrier, Boimond ,2004] jean-louis ferrier, jean-louis boimond, systèmes dynamiques a événements discrets : du modèle à la commande, ISTIA -Université d'Angers.
- [Gaubert, 1992] Gaubert, S. (1992). Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioïdes. Thèse, École des Mines de Paris.
- [Gaubert, 1999] Gaubert, introduction aux systèmes dynamiques a événements discrets, ENSMP, Option Automatique & DEA ATS Orsay, INRIA Rocquencourt Domaine de

Voluceau, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France, Mel : [Stephane.Gaubert@inria.fr](mailto:Stephane.Gaubert@inria.fr),  
Toile: [http : //amadeus.inria.fr/Gaubert](http://amadeus.inria.fr/Gaubert) ,12 février 1999

[Guezzi, 2010] Guezzi, Modélisation, analyse de performance et commande des systèmes à événements discrets. École doctorale STIM sciences et technologies de l'information et de mathématique, le : 24 septembre 2010.

[Hardouin, 2004] Hardouin, L. Sur la commande des systèmes (max, +) linéaires. Cours de D ISTIA - Université d'Angers. [http://www.istia.univ-angers.fr/~hardouin/cours\\_dea.pdf](http://www.istia.univ-angers.fr/~hardouin/cours_dea.pdf) .

[Hardouin, 2008] Hardouin, L. *Sur la commande des systèmes (max, +) Linéaires*. Polycopié de cours donné à Angers.

[Houssin, Lahaye, Boimond, 2005] Houssin, L. Lahaye, S., and Boimond, J. L. (2005). *Commande en juste-à-temps sous contraintes de système (max;+)-linéaires*. Journal Européen des Systèmes Automatisés, Actes de MSR 2005.

[Houssin, 2006] Laurent Houssin : Contribution à la commande des systèmes (max, +)-linéaires. Applications aux réseaux de transport. Thèse de doctorat, ISTIA – Université d'Angers, décembre 2006.

[Lhommeau, 2000] Lhommeau, M. (2000). Sur l'analyse de la robustesse de correcteurs dans les dioïdes. DEA, LISA - Université d'Angers - France.

[Lhommeau, 2003] Lhommeau, M. (2003). Etude de systèmes à événements discrets dans l'algèbre (max, +): - Synthèse de correcteurs robustes dans un dioïde d'intervalles. - Synthèse de correcteurs en présence de perturbations. Thèse de doctorat, ISTIA - Université d'Angers.

[Menguy, 1997] Menguy, E. (1997). Contribution à la commande des systèmes linéaires dans les dioïdes. Thèse, LISA - Université d'Angers.

[Moller, 1988] Moller, P. (1988). Théorie algébrique des Systèmes à Événements Discrets. Thèse, École des Mines de Paris.

[Nait-Sidi-Moh ,2003] Nait-Sidi-Moh, A. (2003). *Contribution à la modélisation, à l'analyse et à la commande des systèmes de transport public par les réseaux de Petri et l'algèbre (Max, plus)*. Thèse de doctorat, Université de technologie de Belfort-Montbéliard.

[Ouerghi, 2006] I. Ouerghi. Etude de systèmes (max, +)-linéaires soumis à des contraintes, application à la commande des graphes d'événements P-temporel : Thèse de doctorat, ISTIA - Université d'Angers.

[Saïd Amari, 2005] Saïd Amari(2005), commande des graphes d'événements temporisés sous contraintes temporelles, Université de Nantes.