République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud Mameri - Tizi Ouzou

Faculté des Sciences
Departement de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER 2

Option
Modélisation mathématique

Thème

Estimation des sommes trigonométriques étendues à des suites d'entiers

Présenté par :
MANSERI Taous

Soutenu le 25/09/2018 devant le jury composé de :

Président	MORSLI Mohand	Professeur	U. Mouloud Mameri
Rapporteur	HOCINI Allaoua	MCB	U. Mouloud Mameri
Examinateur	GOUBI Mouloud	Enseignant	U. Mouloud Mameri

Promotion 2017-2018

Remerciements

Je remercie le Dieu pour le courage, la patience et la volonté qui m'ont été utiles tout au long de mon parcours.

Je tiens à remercier M^r HOCINI Alaoua pour la proposition du thème et l'encadrement de ce travail.

Ses remarques pertinentes m'ont permis de mieux structurer mon travail et de mieux le décrire.

Je remercie également les membres du jury pour avoir accepté d'examiner et d'évaluer mon travail.

Mes sincères remerciements s'adressent enfin à tous ceux qui m'ont soutenu de prés ou de loin.

Dédicaces

Table des matières

Introduction Générale

En théorie analytique des nombres, on étudie souvent la répartition sur l'intervalle $[0, 1[$ de la suite des parties fractionnaires $\{\alpha s\}$ quand s parcourt les termes d'une suite donnée d'entiers naturels où α un nombre réel irrationnel. L'étude consiste à établir des formules asymptotiques qui donnent la quantité des termes $\{\alpha s\}$ vérifiant $0 \leq \{\alpha s\} \leq \delta$ pour $s \leq N$ où N est un entier naturel assez grand et δ un réel tel que $0 < \delta \leq 1$.

Quant à la théorie additive, on étudie l'opération d'addition des termes d'une suite donnée d'entiers naturels. Cette étude décrit les nombres obtenus comme résultat de l'addition d'un nombre fini K de termes de la suite considérée et étudie le cas où on obtient tous les entiers naturels ou tous les entiers naturels assez grand. Si une suite donnée A, par addition de K exemplaires d'elle même, donne tous les entiers naturels, on dit qu'elle est une base d'ordre K. Par exemple la suite des carrés parfaits, d'après Lagrange, est une base d'ordre quatre.

Les sommes trigonométriques étendues à des suites d'entiers naturels représente un outil efficace à la résolution des problèmes de la théorie des nombres cités ci-dessus. Le mathématicien russe I.M Vinogradov a élaboré des méthodes d'estimation non triviale de ces somme, ce qui lui a permis de résoudre beaucoup de problèmes de la théorie des nombres. En effet, à titre d'exemple, il a établi la formule asymptotique suivante :

$$H = \delta \prod(N) + O(NY)$$

avec $Y = \left(\dfrac{1}{q} + \dfrac{q}{N}\right)^{\frac{1}{2}} + N^{-0.2+\xi}$ et $e^{(\log N)^{\xi}} \leq q \leq N\, e^{-(\log N)^{\xi}}$ où H est la quantité des nombres premiers p inférieurs ou égaux à N tels que $0 < \{\alpha p\} \leq \delta$.

En utilisant ces sommes trigonométriques, I.M Vinogradov a donné la solution au problème ternaire de Goldbach et au problème de Warring, il a montré alors que tout entier naturel impair assez grand est somme de trois nombre premiers et que pour tout entier naturel N assez grand on a $N = x_1^n + \cdots + x_k^n$ si k est à l'ordre $n \log n$. Les solutions de ces deux problèmes montrent que la suite des nombres premiers, en considérant un (1) comme un terme de cette suite , est une base d'ordre quatre pour les entiers naturels assez grand et que la suite $\Big((x_l)^n \Big)_{l \in \mathbb{N}}$ des puissances n^{ime} des entiers naturels est une base d'ordre k.

Dans le présent mémoire au chapitre deux on expose l'une des méthodes d'estimation d'I.M.Vinogrdov où on obtient une majoration par la quantité

$$N\left(\log N\right)^2\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}+\frac{1}{U}+\frac{U}{N}}\,,$$

avec $1<U<N\,,\ U'\leq cU$ et c une constante positive, de la somme trigonométrique $\sum\limits_{uv\leq U'}\ \sum\limits_{v\leq Nu^{-1}} e^{2\pi i\alpha\, uv}$ quand chacun des deux facteurs u et v parcourt, indépendamment de l'autre, une suite croissante d'entiers naturels. Au chapitre trois on applique cette méthode, à titre d'exemple, à la somme trigonométrique suivante $\sum\limits_{p\leq N} e^{2\pi i\alpha\, p}$ quand p parcourt les nombres premiers à fin de la majorer par $N^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+\frac{1}{H}\right)$ où $H=e^{0.5\sqrt{\log N}}$ et ε un réel strictement positif.

Chapitre 1

Fonctions arithmétiques

1.1 Généralités

Définition 1.1.

On appelle fonction arithmétique toute fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels non nuls $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Définition 1.2.

Une fonction arithmétique θ est dite multiplicative si elle n'est pas nulle

et si $\theta(ab) = \theta(a)\ \theta(b)$ toutes les fois que a et b sont premiers entre eux.

Remarque : Toute fonction multiplicative θ vérifie $\theta(1) = 1$.

Preuve : θ étant non nulle donc $\exists\ a \in \mathbb{N}^*\ ,\ \theta(a) \neq 0$
$\theta(a) = \theta(a.1) \ =\ \theta(a)\ \theta(1)$
$\theta(a) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta(1) = 1$

Exemple 1.

Soit $s \in \mathbb{C}$, on définit la fonction arithmétique θ comme : $\forall a \in \mathbb{N}^*,\ \theta(a) = a^s$.
Alors θ est multiplicative.

En effet, la fonction θ n'est pas nulle, puisque $\theta(1) = 1^s = 1$ et $\theta(ab) = \theta(a)\,\theta(b)$ pour tout a et b donc en particulier pour a et b premiers entre eux.

Exemple 2.

La fonction θ définie par $\forall a \in \mathbb{N}^*\ ,\ \theta(a) = 1$ est multiplicative.
1/ Puisque $\theta(1) = 1$ donc θ n'est pas nulle,
2/ $\theta(ab) = 1$ et $\theta(a)\ \theta(b) = 1.1 = 1$ donc $\theta(ab) = \theta(a)\ \theta(b)$.

(1) et (2) entraînent que θ est multiplicative.

Proposition 1.

Soient θ une fonction arithmétique multiplicative et $a = p_1^{\alpha_1} \cdots\ p_t^{\alpha_t}$ (décomposition canonique de a), on a alors la formule suivante :

$$\sum_{d\backslash a} \theta(d) = \prod_{i=1}^{t} \left(1 + \theta(p_i) + \cdots + \theta(p_i^{\alpha_i})\right)$$

Démonstration :

Soit $i \in \{0, 1, \ldots, t\}$, on pose $I_{\alpha_i} \in \{0, 1, \ldots, \alpha_i\}$ et on définit l'application φ de produit cartisien $\prod_{i=1}^{t} I_{\alpha_i}$ dans l'ensemble $\mathbb{D}$ des diviseurs de a comme suit :

$$\forall(\beta_1, \ldots, \beta_t) \in \prod_{i=1}^{t} I_{\alpha_i} \ , \ \ \varphi(\beta_1, \ldots, \beta_t) = p_1^{\beta_1}\ p_2^{\beta_2}\ \cdots\ p_t^{\beta_t}$$

L'application φ est injective, en effet soient $(\beta_1 \cdots \beta_t)$ et $(\gamma_1 \cdots \gamma_t)$ dans $\prod_{i=1}^{t} I_{\alpha_i}$ tel que, $\varphi(\beta_1, \ldots, \beta_t) = \varphi(\gamma_1, \ldots, \gamma_t)$, c-à-d $p_1^{\beta_1}\ p_2^{\beta_2}\ \cdots p_t^{\beta_t} = p_1^{\gamma_1}\ p_2^{\gamma_2}\ \cdots\ p_t^{\gamma_t}$.

Soit $j \in \{1, \ldots, t\}$ alors

$$\begin{aligned}
& p_j^{\beta_j}(p_1^{\beta_1} \cdots\ p_{j-1}^{\beta_{j-1}}\ p_{j+1}^{\beta_{j+1}} \cdots\ p_t^{\beta_t}) = p_j^{\gamma_j}(p_1^{\gamma_1} \cdots p_{j-1}^{\gamma_{j-1}}\ p_{j+1}^{\gamma_{j+1}} \cdots\ p_t^{\gamma_t}) \\
\Rightarrow\quad & p_j^{\beta_j} \mid p_j^{\gamma_j}(p_1^{\gamma_1} \cdots p_{j-1}^{\gamma_{j-1}}\ p_{j+1}^{\gamma_{j+1}} \cdots\ p_t^{\gamma_t}) \ \text{ et } \ p_j^{\gamma_j} \mid p_j^{\beta_j}(p_1^{\beta_1} \cdots\ p_{j-1}^{\beta_{j-1}}\ p_{j+1}^{\beta_{j+1}} \cdots\ p_t^{\beta_t}) \\
\Rightarrow\quad & p_j^{\beta_j} \mid p_j^{\gamma_j} \quad \text{et} \quad p_j^{\gamma_j} \mid p_j^{\beta_j} \\
\Rightarrow\quad & p_j^{\beta_j} = p_j^{\gamma_j} \\
\Rightarrow\quad & \beta_j = \gamma_j \ \ \forall j \in \{1, \cdots, t\} \quad \Rightarrow \ \ (\beta_1,\ \ldots\ , \beta_t) = (\gamma_1,\ \ldots\ , \gamma_t)
\end{aligned}$$

D'où φ et injective.

L'application φ est surjective par construction donc elle est bijective.

La multiplication étant distributive par rapport à l'addition donc :

$$(1+\theta(p_1)+\theta(p_1^2)+\cdots+\theta(p_1^{\alpha_1}))\ \cdots\ (1+\theta(p_t)+\cdots+\theta(p_1^{\alpha_t})) = \sum_{0\le\beta_1\le\alpha_1} \cdots \sum_{0\le\beta_t\le\alpha_t} \theta(p_1^{\beta_1})\ \cdots\ \theta(p_t^{\beta_t})$$

Comme θ est multiplicative donc

$$\begin{aligned}
\sum_{0\le\beta_1\le\alpha_1} \cdots \sum_{0\le\beta_t\le\alpha_t} \theta(p_1^{\beta_1})\ \cdots\ \theta(p_t^{\beta_t}) \quad &= \sum_{0\le\beta_1\le\alpha_1} \cdots \sum_{0\le\beta_t\le\alpha_t} \theta(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}\ \cdots\ p_t^{\beta_t}) \\
&= \sum_{(\beta_1,\ldots,\beta_t)\,\in \prod_{i=1}^{t} I_{\alpha_i}} \theta(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_t^{\beta_t})
\end{aligned}$$

L'application φ étant bijective donc

$$\sum_{(\beta_1,\ldots,\beta_t)\,\in \prod_{i=1}^{t} I_{\alpha_i}} \theta(p_1^{\beta_1} \cdots p_t^{\beta_t}) \ = \ \sum_{d\,|\,a} \theta(d)$$

D'où la formule voulue.

Proposition 2.

Soient θ une fonction arithmétique multiplicative et θ_1 une fonction arithmétique définie par :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*,\ \ \theta_1(a) = \sum_{d \backslash a} \theta(d)$$

Alors θ_1 est multiplicative.

Preuve :

1. On a $\theta_1(1) = \sum_{d\,|\,1} \theta(d) = \theta(1) = 1$ donc θ_1 n'est pas nulle.
2. Soient $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}$, $b = q_1^{\beta_1} \cdots q_s^{\beta_s}$ avec $(a, b) = 1$.
   a et b étant premiers entre eux donc $p_1, \ldots, p_t, q_1, \ldots, q_s$ sont deux à deux distincts, par conséquent $ab = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}\ q_1^{\beta_1} \cdots q_s^{\beta_s}$ est la décomposition canonique du produit ab.

   Donc d'après la *proposition 1,* on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \theta_1(ab) &= \sum_{d\,|\,ab} \theta(d) \\ &= \prod_{i=1}^{t} \Big(1 + \theta(p_i) + \cdots + \theta(p_i^{\alpha_i})\Big) \ \prod_{j=1}^{s} \Big(1 + \theta(q_j) + \cdots + \theta(q_j^{\beta_j})\Big) \\ &= \Big(\sum_{d\,|\,a} \theta(d)\Big) \ \Big(\sum_{d\,|\,b} \theta(d)\Big) \\ &= \theta_1(a)\ \theta_1(b) \end{aligned}$$

   D'où la multiplicativité de θ_1.

1.2 La fonction τ de nombre de diviseurs

Définition :

La fonction τ est la fonction arithmétiques définie par

$$\tau(a) = \sum_{d\,|\,a} 1$$

Remarque : D'après la formule, $\tau(a)$ désigne le nombre de diviseurs de a .

Corollaire.

La fonction τ est multiplicative.

Preuve :

1. $\tau(1) = \sum_{d\,|\,1} 1 = 1 \neq 0$ donc τ n'est pas nulle.
2. On considère la fonction multiplicative θ définie par $\theta(a) = 1\ \forall\, a \in \mathbb{N}^*$ (exemple 2 de 1.1), on a alors $\tau(a) = \sum_{d\,|\,a} 1 = \sum_{d\,|\,a} \theta(a)$. Donc d'après la *proposition 2,* τ est multiplicative.

Proposition 1.

Soit $a \in \mathbb{N}^*$ dont la décomposition canonique est $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}$, on a alors la formule suivante :

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_t + 1)$$

Preuve :

On a :
$$\begin{aligned} \tau(a) &= \sum_{d \backslash a} \theta(a) \quad \text{où} \quad \theta(a) = 1 \ \ \forall\, a \in \mathbb{N}^* \\ &= \prod_{i=1}^{t} \Big(1 + \theta(p_i) + \cdots + \theta(p_i^{\alpha_i})\Big) \\ &= \prod_{i=1}^{t} (1 + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\alpha_i \text{ fois}}) \\ &= \prod_{i=1}^{t} (1 + \alpha_i) \end{aligned}$$

Théorème 1.1.

Pour tout couple (a, b) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on a l'inégalité suivante :

$$\tau(a\, b) \leq \tau(a)\ \tau(b)$$

Démonstration :

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t} \quad , \quad b = q_1^{\beta_1} \cdots q_s^{\beta_s}$$

Si $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$ alors $\tau(a)\,\tau(b) = \tau(ab)$ puisque τ est multiplicative.

Si $\operatorname{pgcd}(a, b) = p_1^{\gamma_1} \cdots p_r^{\gamma_r} = q_1^{\gamma_1} \cdots q_r^{\gamma_r}$ où $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$

alors $a\, b = p_1^{\alpha_1+\beta_1} \cdots p_r^{\alpha_r+\beta_r}\ p_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \cdots p_t^{\alpha_t}\ q_{r+1}^{\beta_{r+1}} \cdots q_s^{\beta_s}$

$$\tau(a\, b) = \prod_{i=1}^{r} (1 + \alpha_i + \beta_i) \prod_{i=r+1}^{t} (1 + \alpha_i) \prod_{i=r+1}^{s} (1 + \beta_i)$$

$$\begin{aligned} \tau(a)\,\tau(b) &= \prod_{i=1}^{r} (1 + \alpha_i)\,(1 + \beta_i) \prod_{i=r+1}^{t} (1 + \alpha_i) \prod_{i=r+1}^{s} (1 + \beta_i) \\ &= \prod_{i=1}^{r} (1 + \alpha_i + \beta_i + \alpha_i\,\beta_i) \prod_{i=r+1}^{t} (1 + \alpha_i) \prod_{i=r+1}^{s} (1 + \beta_i) \end{aligned}$$

On a $(1 + \alpha_i + \beta_i + \alpha_i\,\beta_i) \geq (1 + \alpha_i + \beta_i)$

D'où $\tau(a\, b) \leq \tau(a)\ \tau(b)$.

1.3 La fonction μ de Möbius

Définition :

La fonction arithmétique μ de Möbius est définie comme suit :

$$\mu(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \text{ est divisible par un carré parfait} \\ (-1)^k & \text{si } a = p_1 \cdots p_k \ \text{ tel que } \ i \neq j \Rightarrow p_i \neq p_j \\ 1 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

Proposition 1.

La fonction μ est multiplicative.

Preuve :

1. $\mu(1) = 1 \ \Rightarrow \ \mu$ n'est pas nulle.
2. Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux alors si l'un d'eux est divisible par un carré le produit ab l'est aussi donc $\mu(ab) = \mu(a)\,\mu(b) = 0$.

   Si a est produit de t facteurs premiers deux à deux distincts et b est produit de s facteurs premiers deux à deux distincts alors ab est produit de $t+s$ facteurs premiers deux à deux distincts donc $\mu(ab) = (-1)^{t+s} = (-1)^t\,(-1)^s = \mu(a)\,\mu(b)$.

De (1) et (2) on obtient la multiplicativité de μ.

Proposition 2.

On a la formule suivante :

$$\sum_{d\,|\,a} \mu(d) = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

Preuve :

Si $a > 1$ avec $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}$ est la décomposition canonique de a,

$$\text{alors} \qquad \sum_{d\,|\,a} \mu(d) = \prod_{i=1}^{t} \Big(1 + \mu(p_i) + \underbrace{\mu(p_i^2) + \cdots + \mu(p_i^{\alpha_i})}_{=0}\Big)$$

$$= \prod_{i=1}^{t} \Big(1 + \mu(p_i)\Big)$$

Or $\mu(p_i) = (-1)^1 = -1$ donc $\forall\, i \in \{1, \cdots, t\}$, $1 + \mu(p_i) = 0$

$$\text{D'où} \qquad \prod_{i=1}^{t} \Big(1 + \mu(p_i)\Big) = 0\,.$$

Si $a = 1$ alors

$$\sum_{d\,|\,1} \mu(d) = \mu(1) = 1\,.$$

Théorème 1.2.

Soient $\delta_1, \cdots, \delta_n$ n entiers naturels non nécessairement distincts, et $f_1, \cdots, f_n$ n nombres complexes. On considère l'ensemble $D = \left\{ d \in \mathbb{N}^* \,/\, \exists\, i \in \{1, \cdots, n\}\,,\ d \,|\, \delta_i \right\}$ des entiers naturels non nuls dont chacun d'eux divise au moins un δ_i avec $1 \leq i \leq n$.

On pose $S' = \sum\limits_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \delta_i = 1}} f_i$ et pour $d \in D$, $S_d = \sum\limits_{\substack{1 \leq i \leq n \\ d \,|\, \delta_i}} f_i$

On a alors la formule suivante :

$$S' = \sum_{d \in D} \mu(d)\, S_d$$

Démonstration :

D'après la *proposition 2,* on a pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$f_i \sum_{d \,|\, \delta_i} \mu(d) = \begin{cases} f_i & \text{si } \delta_i = 1 \\ 0 & \text{si } \delta_i \neq 1 \end{cases}$$

Ce qui permet alors d'écrire

$$S' = f_1 \sum_{\substack{d \,|\, \delta_1 \\ d \in D}} \mu(d) + f_2 \sum_{\substack{d \,|\, \delta_2 \\ d \in D}} \mu(d) + \cdots + f_n \sum_{\substack{d \,|\, \delta_n \\ d \in D}} \mu(d)$$

Soit $j \in \{1, \cdots, n\}$, on considère l'ensemble $\{\, d_{1\,j}\,, d_{2\,j}\,, \cdots, d_{s_j\,j}\,\}$ de diviseurs de δ_j et l'ensemble $E = \bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j$ où $I_j = \{(1, j), (2, j), \cdots, (s_j, j)\}$,

on a $j_1 \neq j_2 \Rightarrow I_{j_1} \cap I_{j_2} = \varnothing$ donc la famille $\{I_1, \cdots, I_n\}$ est une partition de E par conséquent

$$\begin{aligned} S' &= \sum_{i=1}^{s_1} \mu(d_{i\,1})\, f_1 + \cdots + \sum_{i=1}^{s_n} \mu(d_{i\,n})\, f_n \\ &= \sum_{(i,j) \in I_1} \mu(d_{ij})\, f_j + \cdots + \sum_{(i,j) \in I_n} \mu(d_{ij})\, f_j \\ &= \sum_{(i,j) \in E} \mu(d_{ij})\, f_j. \end{aligned}$$

On définit sur E une relation binaire R comme suit

$$\forall\, (i, j) \in E\ ,\ (i', j') \in E\ ,\ \ (i, j)\, R\, (i', j') \ \Leftrightarrow\ d_{i\,j} = d_{i'\,j'}$$

alors R est une relation d'équivalence.

Soit l'ensemble ${}^{E}/_{R} = \{D_1, D_2, \cdots, D_m\}$ de classes d'équivalence modulus R.

${}^{E}/_{R}$ étant une partition de E donc :

$$S' = \sum_{(i,j) \in D_1} \mu(d_{ij})\, f_j + \sum_{(i,j) \in D_2} \mu(d_{ij})\, f_j + \cdots + \sum_{(i,j) \in D_m} \mu(d_{ij})\, f_j$$

Soit $1 \leq k \leq m$, alors $\forall\,(i,j) \in D_k\,,\ \forall\,(i',j') \in D_k\,,\ \ d_{i\,j} = d_{i'\,j'} = d_k$

Donc

$$\begin{aligned} S' &= \sum_{(i,j)\,\in\, D_1} \mu(d_1)\, f_j \ + \cdots + \sum_{(i,j)\,\in\, D_m} \mu(d_m)\, f_j \\ &= \sum_{d_{ij}=d_1} \mu(d_1)\, f_j \ + \cdots + \sum_{d_{ij}=d_m} \mu(d_m)\, f_j \\ &= \mu(d_1) \sum_{d_{ij}\,=\,d_1} f_j \ + \cdots + \mu(d_m) \sum_{d_{ij}\,=\,d_m} f_j \\ &= \mu(d_1)\, S_{d_1} \ + \cdots + \mu(d_m)\, S_{d_m} \\ &= \sum_{d\,\in\, D} \mu(d)\ S_d \end{aligned}$$

Chapitre 2

Méthode de Vinogradov d'estimation des sommes trigonométriques

2.1 Définition et exemples

f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs respectivement dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^+$.
On écrit $f(x) = O\big(g(x)\big) \quad \big(\text{ou } f(x) \ll g(x)\big)$ si

$$\exists\, M > 0\,, \quad |\, f(x)\,| \le M\, g(x) \qquad x \mapsto +\infty$$

Exemple 1 :

$$f(x) = i\, x \sin x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}\, x$$

On a $\quad f(x) \ll g(x) \quad \Big(\, f(x) = O\big(g(x)\big) \text{ quand } x \mapsto +\infty\,\Big)$

En effet $\quad \Big|\, f(x)\,\Big| = |\, i\, x\, \sin x\,| = x\,|\sin x\,| \le x = 2\, g(x)$

Donc $\quad f(x) \ll g(x) \quad \Big(\text{ou } f(x) = O\big(g(x)\big) \text{ quand } x \mapsto +\infty\,\Big)$

Exemple 2 :

Soit $\varepsilon > 0$, alors $\log x \ll x^{\varepsilon}$ quand $x \mapsto +\infty$

En effet $\quad \log x^{\varepsilon} \le x^{\varepsilon} \;\Rightarrow\; \varepsilon \log x \le x^{\varepsilon} \;\Rightarrow\; \log x \le \frac{1}{\varepsilon}\, x^{\varepsilon}$

Donc $\quad \exists\, M = \frac{1}{\varepsilon}\,, \;\; \log x \le M\, x^{\varepsilon}$ d'où $\log x \ll x^{\varepsilon}$

Remarque :

1. Si $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ alors $f(x) \ll g(x) \quad \big(\, g(x) \ge 0\,\big)$

   En effet, pour $\varepsilon > 0\,, \;\; \exists\, A > 0\,, \;\; x > A \;\Rightarrow\; \left|\, \dfrac{f(x)}{g(x)}\,\right| < \varepsilon$

   $\left|\, \dfrac{f(x)}{g(x)}\,\right| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |\, f(x)\,| \le \varepsilon\, g(x)$ donc $f(x) \ll g(x)$.

2. La réciproque n'est pas toujours vraie, c'est-à-dire $f(x) \ll g(x) \;\not\Rightarrow\; \displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$

   Par exemple $\;ix \sin x \ll \dfrac{1}{2}\, x\;$ cependant $\;\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{ix \sin x}{\frac{1}{2}\, x}\;$ n'existe pas.

2.2 La fonction de la partie fractionnaire

Soit x un réel. On appelle partie entière de x l'entier relatif qu'on note $[x]$, tel que

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

On définit la fonction de la partie fractionnaire $\{\cdot\}$ comme suit

$$\text{Pour tout réel } x,\ \{x\} = x - [x]$$

Exemple : $[\,5.2\,] = 5 \quad \text{et} \quad \{5.2\} = 5.2 - [\,5.2\,] = 5.2 - 5 = 0.2$

$$[-6.1] = -7 \quad \text{et} \quad \{-6.1\} = -6.1 - (-7) = -6.1 + 7 = 0.9$$

La fonction $\{\cdot\}$ définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0\,,\,1[$ est périodique de période 1,

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad \{x + 1\} = \{x\}$$

On a donc pour tout entier m et x dans $\mathbb{R}$, $\{x + m\} = \{x\}$.

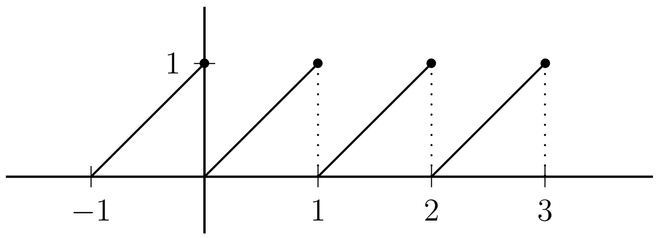


FIGURE 2.1 – Graphe de la fonction $\{\cdot\}$

2.3 La fonction de plus proche entier

On définit la fonction de plus proche entier qu'on note $\|\cdot\|$ comme suit

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: \quad & \mathbb{R} \to \left[0\,,\,\frac{1}{2}\right] \\ & x \mapsto \|\,x\,\| = \min\Big(\{x\}\,,\,1 - \{x\}\Big) \end{aligned}$$

On a donc
$$\|\,x\,\| = \begin{cases} \{x\} & \text{Si } 0 \leq \{x\} \leq \dfrac{1}{2} \\ 1 - \{x\} & \text{Si } \dfrac{1}{2} < \{x\} < 1 \end{cases}$$

$\|x\|$ est la distance entre x et le plus proche entier relatif.

Exemple : $\|\,5.2\,\| = \min(\,0.2\,,\,1 - 0.2\,) = \min(\,0.2\,,\,0.8\,) = 0.2$

$$\|\,-6.1\,\| = \min(\,0.9\,,\,1 - 0.9\,) = \min(\,0.9\,,\,0.1\,) = 0.1$$

Propriétés de la fonction $\|\cdot\|$:

1. $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ 0 \leq \|\, x\, \| \leq \dfrac{1}{2}$ et $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right],\ \|\, x\, \| = |\, x\,|$.
2. La fonction $\|\cdot\|$ est périodique de période 1.
3. Pour tout entier m, la fonction $\|\cdot\|$ est symétrique par rapport à $x = m - \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[m-1\,,\,m]$ et par rapport à $x = m$ sur $\left[m - \frac{1}{2}\,,\, m + \frac{1}{2}\right]$.

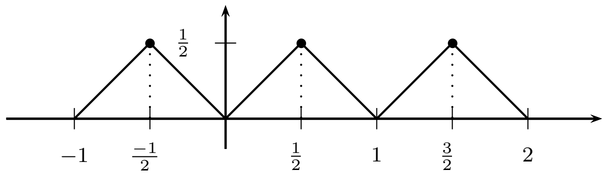


FIGURE 2.2 – Graphe de la fonction $\|\cdot\|$

2.4 Approximation d'un réel à un rationnel

Les estimations qu'on obtient par la méthode de I.M. Vinogradov sont en fonction de l'entier naturel q défini dans le théorème de Dirichlet suivant :

Proposition. *(Théorème de Dirichlet)*
Soit α un nombre réel. Il existe deux entiers a et q avec $(a, q) = 1$, un réel θ tel que $|\,\theta\,| \leq 1$ et $\alpha = \dfrac{a}{q} + \dfrac{\theta}{q^2}$.

Démonstration : La démonstration se base sur le principe des tiroirs

Quand on met $(t+1)$ objets dans t caisses $(t \geq 1)$ alors l'une au moins de ces caisses doit contenir au moins deux objets.

Soit t un entier naturel non nul. On considère les t intervalles suivants $\left[0, \frac{1}{t}\right[, \left[\frac{1}{t}, \frac{2}{t}\right[, \cdots, \left[\frac{t-1}{t}, 1\right[$ on a donc $[\,0\,,1\,[\, = \bigcup\limits_{k=1}^{t} \left[\dfrac{k-1}{t}, \dfrac{k}{t}\right[$.

On a $\forall x \in \{0, \cdots, t\}\,,\ \{\alpha\, x\} \in \bigcup\limits_{k=1}^{t} \left[\dfrac{k-1}{t}, \dfrac{k}{t}\right[$ donc il existe un intervalle $\left[\dfrac{k-1}{t}, \dfrac{k}{t}\right[$ qui contient deux réels $\{\alpha\, x_1\}$ et $\{\alpha\, x_2\}$ parmi les $t+1$ réels $0,\ \alpha,\ 2\alpha, \cdots,\ t\alpha$.

On a donc
$$\frac{k-1}{t} \leq \{\alpha\, x_1\} < \frac{k}{t} \quad \text{et} \quad \frac{k-1}{t} \leq \{\alpha\, x_2\} < \frac{k}{t}$$

Donc $\quad -\dfrac{1}{t} < \{\alpha\, x_1\} - \{\alpha\, x_2\} < \dfrac{1}{t}$

Or
$$\begin{aligned}\{\alpha\, x_1\} - \{\alpha\, x_2\} &= \Big(\alpha\, x_1 - [\,\alpha\, x_1\,]\Big) - \Big(\alpha\, x_2 - [\,\alpha\, x_2\,]\Big)\\ &= \alpha\,(x_1 - x_2) - \Big([\,\alpha\, x_1\,] - [\,\alpha\, x_2\,]\Big)\\ &= \alpha\, q - a \quad \text{où } q = (x_1 - x_2) \text{ et } a = [\,\alpha\, x_1\,] - [\,\alpha\, x_2\,]\end{aligned}$$

Donc $\quad -\dfrac{1}{t} < \alpha\, q - a < \dfrac{1}{t} \quad \Rightarrow\ -\dfrac{1}{q\,t} < \alpha\, - \dfrac{a}{q} < \dfrac{1}{q\,t}$

Donc pour tout $t = q$ on a $\quad -\dfrac{1}{q^2} < \alpha\, - \dfrac{a}{q} < \dfrac{1}{q^2}$

$\Rightarrow \left|\alpha - \dfrac{a}{q}\right| < \dfrac{1}{q^2} \ \Rightarrow\ \alpha - \dfrac{a}{q} = \dfrac{\theta}{q^2}$ avec $|\,\theta\,| \leq 1$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{a}{q} + \dfrac{\theta}{q^2}$

Théorème 2.1.

Soient α un réel et U un entier tel que $U > 1$, on a alors l'inégalité suivante :

$$\left|\sum_{u=1}^{\mathrm{U}} e^{2\pi i\alpha\, u}\right| \leq \min\left(\mathrm{U}\,,\ \frac{1}{2\,\|\,\alpha\,\|}\right)$$

Démonstration :

Si α est entier alors $\|\,\alpha\,\| = 0\,,$ donc $\min\left(\mathrm{U}\,,\ \dfrac{1}{\|\,\alpha\,\|}\right) = U$ par conséquent

$\left|\displaystyle\sum_{u=1}^{\mathrm{U}} e^{2\pi i\alpha\, u}\right| \leq U = \min\left(\mathrm{U}\,,\ \dfrac{1}{\|\,\alpha\,\|}\right).$

Regardons maintenant le cas où α n'est pas entier :

$S = \sum\limits_{u=1}^{\mathrm{U}} e^{2\pi i\alpha u}$ est la somme de U termes d'une suite géométrique dont le premier terme est $e^{2\pi i\alpha}$ et le $\mathrm{U}^{\text{ième}}$ terme est $e^{2\pi i\alpha \mathrm{U}}$ de raison $e^{2\pi i\alpha}$, on a donc

$$\begin{aligned}\left|\sum_{u=1}^{\mathrm{U}} e^{2\pi i\alpha u}\right| &= \left|\frac{e^{2\pi i\alpha} - e^{2\pi i\alpha\,(U+1)}}{1 - e^{2\pi i\alpha}}\right| = \frac{|\,e^{2\pi i\alpha} - e^{2\pi i\alpha\,(U+1)}\,|}{|1 - e^{2\pi i\alpha}|}\\ &\leq \frac{2}{|\,1 - e^{2\pi i\alpha}\,|}\end{aligned}$$

On a
$$\begin{aligned}|\,1 - e^{2\pi i\alpha}\,| &= |\,1 - (\cos 2\pi\alpha + i \sin 2\pi\alpha)\,|\\ &= |\,1 - \cos^2\pi\alpha + \sin^2\pi\alpha + i\ 2\sin\pi\alpha\ \cos\pi\alpha\,|\\ &= |\,2\sin^2\pi\alpha + 2\,i\ \sin\pi\alpha\ \cos\pi\alpha\,|\\ &= |\,2\sin\pi\alpha\,|\ |\cos\pi\alpha + i\ \sin\pi\alpha\,|\\ &= 2\,|\sin\pi\alpha\,|\,.\,1\\ &= 2\,|\sin\pi\alpha\,|\end{aligned}$$

Donc $\quad \left|\displaystyle\sum_{u=1}^{\mathrm{U}} e^{2\pi i\alpha u}\right| \leq \dfrac{1}{|\sin\pi\alpha\,|}$

La fonction réelle $\dfrac{t}{\sin t}$ définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ étant croissante donc pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $\dfrac{t}{\sin t} \leq \dfrac{\frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2}$

Donc pour α non entier, on a $0 < \| \alpha \| \leq \dfrac{1}{2}$ ou encore $0 < \| \alpha \| \pi \leq \dfrac{\pi}{2}$ il s'ensuit alors $\dfrac{\| \alpha \| \cancel{\pi}}{\sin\| \alpha \| \pi} \leq \dfrac{\cancel{\pi}}{2}$ ce qui entraîne l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{\sin\| \alpha \| \pi} \leq \frac{1}{2 \| \alpha \|}$$

Il reste à montrer l'égalité $|\sin \pi \alpha| = \left| \sin \|\alpha\| \pi \right|$

On a

$$\| \alpha \| = \begin{cases} \{\alpha\} & \text{si } \{\alpha\} \leq \dfrac{1}{2} \\ 1 - \{\alpha\} & \text{si } \{\alpha\} > \dfrac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} \alpha - [\alpha] & \text{si } \{\alpha\} \leq \dfrac{1}{2} \\ 1 - \alpha + [\alpha] & \text{si } \{\alpha\} > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $\sin \| \alpha \| \pi = \begin{cases} \sin \Big(\pi\alpha - \pi[\alpha] \Big) & \text{si } \{\alpha\} \leq \dfrac{1}{2} \\ \sin \Big(- \pi\alpha + (1 + [\alpha])\, \pi \Big) & \text{si } \{\alpha\} > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$= \begin{cases} \pm \sin \pi\alpha \\ + \sin \pi\alpha \end{cases} = \pm \sin \pi\alpha$$

D'où $\left| \sin \| \alpha \| \pi \right| = | \sin \pi \alpha |$

Conclusion $\left| \sum\limits_{u=1}^{\mathrm{U}} e^{2\pi i\alpha u} \right| \leq \dfrac{1}{|\sin \pi\alpha|} = \dfrac{1}{\left| \sin \| \alpha \| \pi \right|} \leq \dfrac{1}{2 \| \alpha \|}$

Théorème 2.2.

Soient ρ un réel tel que $0 < \rho \leq \dfrac{1}{2}$ et $x_0, x_1, \cdots, x_K$ une suite de $(K+1)$ réels tels que

$$\|x_k - x'_k\| \geq \rho \text{ pour tout } k \text{ et } k' \text{ tels que } 0 \leq k \neq k' \leq K$$

$$\text{et} \quad \|x_0\| \leq \min\Big(\|x_1\|, \cdots, \|x_K\| \Big)$$

On a alors

$$(1) \quad \forall\, k \in \{1, \cdots, K\},\ \| x_k \| \neq 0$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\|x_k\|} \ll \rho^{-1} \log (K+1)$$

Démonstration :

On peut supposer, sans restreindre la généralité, que pour tout k , $|x_k| \leq \dfrac{1}{2}$ donc $\|x_k\| = |x_k|$ pour tout k.

On ordonne les réels x_i comme suit :

$$x_{i_{-K_2}} < \cdots < x_{i_{-2}} < x_{i_{-1}} < x_0 < y_{i_1} < x_{i_2} < \cdots < x_{i_{K_1}}$$
$$y_{-K_2} < \cdots < y_{-2} < y_{-1} < y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{K_1}$$
$$(\, x_{i_j} = y_j \text{ et } x_{i_{-j}} = y_{-j}\,)$$

où $K_1 + K_2 = K$.

(1) Pour tout k et k' $(k \neq k')$, $\|\, y_k - y'_k \,\| \geq \rho$, en effet

Si $\quad |\, y_k - y'_k \,| \leq \dfrac{1}{2} \quad$ alors $\quad |\, y_k - y'_k \,| = \|\, y_k - y'_k \,\| \geq \rho$

Si $\quad |\, y_k - y'_k \,| > \dfrac{1}{2} \quad$ alors $\quad |\, y_k - y'_k \,| > \|\, y_k - y'_k \,\| \geq \rho$

On a donc $|\, y_1 - y_0 \,| \geq \rho$ par conséquent $|\, y_1 \,| + |\, y_0 \,| \geq \rho$

Comme $\|\, x_0 \,\| = \|\, y_0 \,\| \leq \min\Big(\|x_1\| \,, \cdots, \|x_K\|\Big)$ donc

$$2\,|\, y_1 \,| \geq |\, y_1 \,| + |\, y_0 \,| \geq \rho \;\Rightarrow\; |\, y_1 \,| \geq \frac{\rho}{2} > 0$$

D'où $|\, y_1 \,| = \|\, y_1 \,\| \neq 0$ et $|\, y_k \,| \neq 0$ avec $k \in \{1, \cdots, K\}$

De la même manière, on démontre $|\, y_{-1} \,| \neq 0$ donc $|\, y_{-k} \,| \neq 0 \quad \forall\, k = 1, \cdots, K_2$.

(2) $$\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\|\, x_k \,\|} = \sum_{k=-K_2}^{-1} \frac{1}{\|\, y_k \,\|} + \sum_{k=1}^{K_1} \frac{1}{\|\, y_k \,\|} = \sum_{k=-K_2}^{-1} \frac{1}{|\, y_k \,|} + \sum_{k=1}^{K_1} \frac{1}{|\, y_k \,|}$$

L'estimation de $\displaystyle\sum_{k=1}^{K_1} \frac{1}{|\, y_k \,|}$:

$\forall\, k \in \{1, \cdots, K_1\}\,,\; 0 < y_k \leq \dfrac{1}{2}$ donc $\forall\, i \in \{1, \cdots, K_1\}\,,\; |\, y_{i+1} - y_i \,| = \|\, y_{i+1} - y_i \,\|$

On a $[\,0, y_k[\, = [\,0, y_1[\, \cup \left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k-1} [\, y_i, y_{i+1}[\,\right)$ et l'intersection deux à deux des intervalles $[y_i, y_{i+1}[$ est vide donc

$$|\, y_k \,| = |\, y_1 \,| + \sum_{i=1}^{k-1} |\, y_{i+1} - y_i \,| \geq \frac{\rho}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} \rho = \frac{\rho}{2} + (k-1)\,\rho = \rho\left(k - \frac{1}{2}\right)$$

Donc $$\sum_{k=1}^{K_1} \frac{1}{|\, y_k \,|} \leq \sum_{k=1}^{K_1} \frac{1}{\rho\left(k - \frac{1}{2}\right)} = \rho^{-1} \sum_{k=1}^{K_1} \frac{2}{2k-1}$$

On considère la fonction réelle f définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}, \quad f(x) = \frac{2}{2x-1}$$

on aura alors
$$\sum_{k=1}^{K_1} \frac{2}{2k-1} \;\leq\; f(1) + \int_1^K \frac{2}{2x-1}\,\mathrm{d}x \;=\; f(1) + \log|\,2x-1\,|\,\Big|_1^{K_1}$$
$$= \; 2 + \log(2K_1 - 1) \;\leq\; 2 + \log\, 2K_1$$
$$= \; 2 + \log 2 + \log\, K_1 \;\leq\; 3\,\log\, K_1 \;\ll\; \log(K+1)$$

De la même façon, on obtient

$$\sum_{k=-K_2}^{-1} \frac{2}{2\,|\,k\,|-1} \;\ll\; \log(K+1)$$

D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\|\,x_k\,\|} \;\ll\; \rho^{-1}\log(K+1)$

Corollaire.

$$\text{On a} \quad \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\|\,x_k\,\|} \;\ll\; \rho^{-1}\log\,\rho^{-1}$$

Preuve :

On a $\quad \forall\, k \in \{1, \cdots, K\}, \quad |\,y_k\,| \geq \rho\left(k - \dfrac{1}{2}\right)$

Donc $\quad \rho^{-1} \;\geq\; k - \dfrac{1}{2} \quad$ d'où $\;\rho^{-1} > K\;$ et $\;\log(K+1) \ll \rho^{-1}$

Théorème 2.3.

Soient α, U, β trois réels tels que $\alpha = \dfrac{a}{q} + \dfrac{\theta}{q^2}$ où α et q deux entiers tels que $pgcd\,(a,q) = 1$, $|\,\theta\,| \leq 1$ et $U > 0$.

Alors pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{K} \min\left(U, \frac{1}{\|\,\alpha\,k + \beta\,\|}\right) \;\ll\; \left(K\,q^{-1} + 1\right)\left(U + q\,\log q\right)$$

Démonstration :

Si $q \leq 3$,
$$\min\left(U, \frac{1}{\|\,\alpha\,k + \beta\,\|}\right) \;\leq\; U \;\leq\; U + q\,\log q$$
$$\leq\; 3\,\frac{K}{3}\left(U + q\,\log q\right)$$
$$\leq\; 3\left(\frac{K}{3} + 1\right)\left(U + q\,\log q\right)$$

$$\leq\ 3\left(\frac{K}{q}+1\right)\left(U+q\,\log q\right)$$
$$\ll\ \left(\frac{K}{q}+1\right)\left(U+q\,\log q\right).$$

Si $q\geq 4$, on aura

$$\sum_{1\leq k\leq K}\min\left(U,\ \frac{1}{\|\,\alpha\,k+\beta\,\|}\right)\ \leq\ \sum_{1\leq k\leq \frac{q}{2}}\min\left(U,\ \frac{1}{\|\,\alpha\,k+\beta\,\|}\right)$$
$$+\sum_{\frac{q}{2}<k\leq 2\,\frac{q}{2}}\min\left(U,\ \frac{1}{\|\,\alpha\,k+\beta\,\|}\right)+\cdots+\sum_{(m-1)\,\frac{q}{2}<k\leq m\,\frac{q}{2}}\min\left(U,\ \frac{1}{\|\,\alpha\,k+\beta\,\|}\right)$$

Où m un entier défini par $(m-1)\,\dfrac{q}{2}\ <\ K\ \leq\ m\,\dfrac{q}{2}$.

Soit s un entier tel que $2\leq s\leq m$, alors l'estimation de la somme A_s s'obtient de la même manière que $\displaystyle\sum_{1\leq k\leq\frac{q}{2}}\min\left(U,\ \frac{1}{\|\,\alpha\,k+\beta\,\|}\right)$

Où $A_s=\displaystyle\sum_{(s-1)\,\frac{q}{2}<k\leq s\,\frac{q}{2}}\min\left(U,\ \frac{1}{\|\,\alpha\,k+\beta\,\|}\right)$.

En effet, posons $k'=k-\left[(s-1)\,\dfrac{q}{2}\right]$

Si $k=\left[(s-1)\,\dfrac{q}{2}\right]+1$ alors $k'=1$

Si $k=\left[s\,\dfrac{q}{2}\right]$ alors $k'=\left[s\,\dfrac{q}{2}\right]-\left[(s-1)\,\dfrac{q}{2}\right]\ =\ \left[\dfrac{q}{2}\right]$

$$\left[s\,\frac{q}{2}\right]-\left[(s-1)\,\frac{q}{2}\right]\ =\ \frac{s\,q}{2}\ -\ \left\{\frac{s\,q}{2}\right\}\ -\ (s-1)\,\frac{q}{2}\ +\ \left\{(s-1)\,\frac{q}{2}\right\}$$
$$=\ \frac{\cancel{s\,q}}{\cancel{2}}\ -\ \left\{\frac{s\,q}{2}\right\}\ -\ \frac{\cancel{s\,q}}{\cancel{2}}\ +\ \frac{q}{2}\ +\ \left\{(s-1)\,\frac{q}{2}\right\}$$
$$=\ \frac{q}{2}\ +\ \left\{(s-1)\,\frac{q}{2}\right\}\ -\ \left\{\frac{s\,q}{2}\right\}$$

Si q est pair alors $\left\{(s-1)\,\dfrac{q}{2}\right\}\ =\ \left\{\dfrac{s\,q}{2}\right\}\ =\ 0$

Si q est impair alors $\left\{(s-1)\,\dfrac{q}{2}\right\}\ =\ \dfrac{q}{2}$ et $\left\{\dfrac{s\,q}{2}\right\}\ =\ 0$

ou $\left\{(s-1)\,\dfrac{q}{2}\right\}=0$ et $\left\{\dfrac{s\,q}{2}\right\}\ =\ \left\{\dfrac{q}{2}\right\}$

Donc

$$\left[s\,\frac{q}{2}\right]-\left[(s-1)\,\frac{q}{2}\right]\ =\ \frac{q}{2}\ -\ \left\{\frac{q}{2}\right\}\ =\ \left[\frac{q}{2}\right]$$

On a

$$\begin{aligned}\|\,\alpha\, k+\beta\,\| &= \left\|\alpha\left(k'+(s-1)\,\frac{q}{2}\right)+\beta\right\| \\ &= \left\|\alpha\, k'+\alpha\left[(s-1)\,\frac{q}{2}\right]+\beta\right\| \\ &= \|\,\alpha\, k'+\beta_1\,\|\end{aligned}$$

où $\beta_1=\alpha\left[(s-1)\,\frac{q}{2}\right]+\beta$

Donc $A_s=\sum_{1\le k\le \frac{q}{2}}\min\left(U,\ \frac{1}{\|\,\alpha\, k+\beta_1\,\|}\right)$

Estimation de la somme $\sum_{1\le k\le \frac{q}{2}}\min\left(U,\ \frac{1}{\|\,\alpha\, k+\beta_1\,\|}\right)$:

On considère la suite $z_k=\alpha\, k+\beta_1$ où $1\le k\le\left[\frac{q}{2}\right]$

et on pose $x_0=z_{i_0}\ ,\ x_1=z_{i_1}\ ,\ \cdots\ ,\ x_K=z_{i_K}$ où $K=\left[\frac{q}{2}\right]-1$

tel que $\|\,x_0\,\|\ \le\ \min\left(\|\,x_1\,\|,\ \cdots\ ,\ \|\,x_K\,\|\right)$.

Montrons que $\|\,x_k-x_{k'}\,\|\ \ge\ \frac{1}{2\,q}$ pour $0\le k'<k\le K$

c-à-d $\|\,z_k-z_{k'}\,\|\ \ge\ \frac{1}{2\,q}$ pour $1\le k'<k\le\frac{q}{2}$

On a $z_k-z_{k'}=(\,\alpha\, k+\beta_1)-(\,\alpha\, k'+\beta_1)=\frac{a}{q}\,k''+\frac{\theta}{q^2}\,k''$ avec $1\le k''\le\frac{q}{2}$

Effectuons la division euclidienne de ak'' par q on obtient alors $ak''=b\,q+r$ avec $1\le r\le q-1$ (parce que $(a,q)=1$)

Donc

$$\left\|\frac{a}{q}\,k''+\frac{\theta}{q^2}\,k''\right\| = \left\|b+\frac{r}{q}+\frac{\theta}{q^2}\,k''\right\| = \left\|\frac{r}{q}+\frac{\theta}{q^2}\,k''\right\|$$

Or $\left\|\frac{r}{q}+\frac{\theta}{q^2}\,k''\right\| = \frac{r}{q}+\frac{\theta}{q^2}\,k''$ si $\frac{r}{q}+\frac{\theta}{q^2}\,k''\le\frac{1}{2}$

et $\left\|\frac{r}{q}+\frac{\theta}{q^2}\,k''\right\| = 1-\frac{r}{q}+\frac{\theta}{q^2}\,k''$ si $\frac{1}{2}\le\frac{r}{q}+\frac{\theta}{q^2}\,k''<1$

Dans le premier cas on a $\left\|\frac{r}{q}+\frac{\theta}{q^2}\,k''\right\|=\left|\frac{r}{q}+\frac{\theta}{q^2}\,k''\right|$

et on a

$$\left|\frac{r}{q}+\frac{\theta}{q^2}\,k''\right|\ge\left|\frac{r}{q}\right|-\left|\frac{\theta}{q^2}\,k''\right|\ge\frac{r}{q}-\frac{k''}{q^2}\ge\frac{r}{q}-\frac{1}{2\,q}\ge\frac{1}{q}-\frac{1}{2\,q}=\frac{1}{2\,q}$$

Dans le deuxième cas on a $\left\|\frac{r}{q}+\frac{\theta}{q^2}\,k''\right\|=1-\frac{r}{q}+\frac{\theta}{q^2}\,k''=\frac{q^2-q\,r-\theta\,k''}{q^2}$

$$\ge\frac{q^2-q\,(q-1)-q/2}{q^2}=\frac{q^2-q^2+q-q/2}{q^2}=\frac{q}{2}$$

On a
$$\sum_{1\le k\le \frac{q}{2}} \min\left(U,\ \frac{1}{\|\,\alpha\,k+\beta_1\,\|}\right) = \sum_{k=0}^{[\frac{q}{2}]-1} \min\left(U,\ \frac{1}{\|\,x_k\,\|}\right)$$
$$= \min\left(U,\ \frac{1}{\|\,x_0\,\|}\right) + \sum_{k=1}^{[\frac{q}{2}]-1} \min\left(U,\ \frac{1}{\|\,x_k\,\|}\right)$$
$$\le U + \sum_{k=1}^{[\frac{q}{2}]-1} \min\left(U,\ \frac{1}{\|\,x_k\,\|}\right)$$

À la somme $\sum_{k=1}^{[\frac{q}{2}]-1} \min\left(U,\ \frac{1}{\|\,x_k\,\|}\right)$ on applique le théorème 2.2 avec $K=\left[\frac{q}{2}\right]-1$ et $\rho=\frac{1}{2\,q}$, on obtient alors
$$\sum_{k=1}^{[\frac{q}{2}]-1} \min\left(U,\ \frac{1}{\|\,x_k\,\|}\right) \ll \rho^{-1}\,\log\,(K+1) \ll q\,\log q$$

D'où
$$\sum_{1\le k\le \frac{q}{2}} \min\left(U,\ \frac{1}{\|\,\alpha\,k+\beta_1\,\|}\right) \ll U+q\,\log q$$

Conclusion
$$\sum_{k=1}^{K} \min\left(U,\ \frac{1}{\|\,\alpha\,k+\beta_1\,\|}\right) \ll \left(\frac{K}{q}+1\right)\left(U+q\,\log q\right)$$

Corollaire 2.1. (généralisation)
Soit K_0 un entier tel que $K_0\ge 1$ alors
$$\sum_{k=K_0+1}^{K_0+K} \min\left(U,\ \frac{1}{\|\,\alpha\,k+\beta\,\|}\right) \ll \left(\frac{K}{q}+1\right)\left(U+q\,\log q\right)$$

Preuve :
On fait le changement de variables suivant
$$k=k'+K_0$$
alors $k=K_0+1 \;\Rightarrow\; k'=1$
$k=K_0+K \;\Rightarrow\; k'=K$

On aura donc
$$\sum_{k=K_0+1}^{K_0+K} \min\left(U,\ \frac{1}{\|\,\alpha\,k+\beta\,\|}\right) = \sum_{k'=1}^{K} \min\left(U,\ \frac{1}{\|\,\alpha\,k'+\gamma\,\|}\right)$$
.

avec $\gamma=\alpha\,K_0+\beta$

Corollaire 2.2.
On considère le réel α défini ci-dessus. On a alors

$$\sum_{1\le k\le \frac{q}{2}} \frac{1}{\|\alpha k\|} \ll q\log q$$

Preuve :
Prenons $U = 2q$, $x_k = \alpha k$ et $K = \left[\frac{q}{2}\right]$ alors $\| x_k - x_{k'}\| \ge \frac{1}{2q}$
Donc

$$\sum_{1\le k\le \frac{q}{2}} \frac{1}{\|\alpha k\|} \le \sum_{1\le k\le \frac{q}{2}} \min\left(2q\,,\ \frac{1}{\|\alpha k\|}\right)$$

puisque $\|\alpha k\| \ge \frac{1}{2q}$ c-à-d $\frac{1}{\|\alpha k\|} \le 2q$

Or $\sum_{1\le k\le \frac{q}{2}} \min\left(2q\,,\ \frac{1}{\|\alpha k\|}\right) \ll 2q + q\log q$

On a $2q \le q\log q$ (puisque $q\ge 4$)
Donc

$$\sum_{1\le k\le \frac{q}{2}} \min\left(2q\,,\ \frac{1}{\|\alpha k\|}\right) \ll q\log q + q\log q$$

$$\ll q\log q$$

Corollaire 2.3.
Soient $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $u > 0$ deux réels et $K \ge 2$ un entier. On a l'estimation suivante

$$\sum_{k=1}^{K} \min\left(\frac{U}{k}\,,\ \frac{1}{\|\alpha k\|}\right) \ll q\log q + \frac{U}{q}\log K + K\log q$$

Preuve :
Soit s_0 un entier tel que $\left(s_0 - \frac{1}{2}\right) q < K \le \left(s_0 + \frac{1}{2}\right) q$
On a alors

$$\sum_{k=1}^{K} \min\left(\frac{U}{k}\,,\ \frac{1}{\|\alpha k\|}\right) \le \sum_{1\le k\le \frac{q}{2}} \min\left(\frac{U}{k}\,,\ \frac{1}{\|\alpha k\|}\right) + \sum_{\frac{q}{2}\le k\le \frac{3q}{2}} \min\left(\frac{U}{k}\,,\ \frac{1}{\|\alpha k\|}\right)$$
$$+ \cdots + \sum_{\left(s_0-\frac{1}{2}\right) q\le k\le \left(s_0+\frac{1}{2}\right) q} \min\left(\frac{U}{k}\,,\ \frac{1}{\|\alpha k\|}\right)$$

On a $\sum_{1\le k\le \frac{q}{2}} \min\left(\frac{U}{k}\,,\ \frac{1}{\|\alpha k\|}\right) \le \sum_{1\le k\le \frac{q}{2}} \min\left(U,\ \frac{1}{\|\alpha k\|}\right)$

et $$\sum_{\left(s_0-\frac{1}{2}\right) q \le k \le \left(s_0+\frac{1}{2} q\right)} \min\left(\frac{U}{k}\,,\ \frac{1}{\|\,\alpha\, k\,\|}\right) \le \sum_{\left(s_0-\frac{1}{2}\right) q \le k \le \left(s_0+\frac{1}{2} q\right)} \min\left(\frac{U}{q}\,,\ \frac{1}{\|\,\alpha\, k\,\|}\right)$$

À la somme $\sum_{1\le k\le \frac{q}{2}} \min\left(U,\ \frac{1}{\|\,\alpha\, k\,\|}\right)$ on applique le corollaire 2.2

et à la somme $\sum_{\left(s_0-\frac{1}{2}\right) q \le k \le \left(s_0+\frac{1}{2} q\right)} \min\left(\frac{U}{q}\,,\ \frac{1}{\|\,\alpha\, k\,\|}\right)$ le corollaire 2.1,

on obtient alors l'estimation voulue.

Lemme :

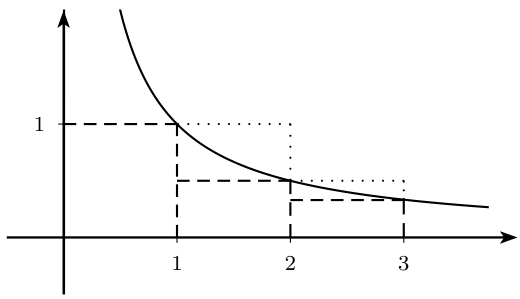
$$\sum_{1\le k\le x} \frac{1}{k} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

où $\gamma = 0.5772$ (constante d'Euler).

Démonstration :

On a

$$\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} < \frac{1}{k}$$



Donc $$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} > \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} > 0$$

La série $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ étant convergente donc la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ est convergente vers un réel γ.

$$\gamma = \left(1 - \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}\right) + \left(\frac{1}{2} - \int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \int_N^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right) + \cdots$$

On a $$\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right) \le \sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{N+1}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\gamma &= \left(1 - \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}\right) + \left(\frac{1}{2} - \int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \int_N^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right) + O\left(\frac{1}{N}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_N^{N+1}\frac{\mathrm{d}t}{t} + O\left(\frac{1}{N}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \log N + O\left(\frac{1}{N}\right)
\end{aligned}$$

puisque $\int_N^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \le \frac{1}{N}$.

Donc

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N} \;=\; \log N \,+\, \gamma \,+\, O\Big(\frac{1}{N}\Big)$$

$$\sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k} \;=\; \log N \,+\, \gamma \,+\, O\Big(\frac{1}{N}\Big)$$

Soit x un réel tel que $x \ge 1$, $[\,x\,] = x-\theta$ où $[\,x\,]$ est la partie entière de x et $0 \le \theta < 1$ alors

$$\log[\,x\,] = \log(x-\theta) \;=\; \log\, x\Big(1-\frac{\theta}{x}\Big) \;=\; \log x + \log\Big(1-\frac{\theta}{x}\Big)$$

Comme $\log\Big(1-\dfrac{\theta}{x}\Big) \le 0$ donc $\log\Big(1-\dfrac{\theta}{x}\Big) \ll \dfrac{1}{x}$

c-à-d $\log\Big(1-\dfrac{\theta}{x}\Big) = O\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$

Donc

$$\sum_{1\le k\le x}\frac{1}{k} \;=\; \sum_{1\le k\le [\,x\,]}\frac{1}{k} \;=\; \log[\,x\,] \,+\, \gamma \,+\, O\bigg(\frac{1}{[\,x\,]}\bigg)$$

$$=\; \log x + O\Big(\frac{1}{x}\Big) + \gamma \,+\, O\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

$$=\; \log x + \gamma \,+\, O\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

où $\gamma = \lim\limits_{N\mapsto+\infty}\Big(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{N} \;-\; \log N\Big) = 0.5772$

Théorème 2.4.

$$\sum_{n\le N}\tau(n) \;=\; N\,\log N + (\,2\,C-1\,)\,N \,+\, O\big(\sqrt{N}\big)$$

démonstration :

Un point d'un plan rapporté à un repère orthonormé est dit point entier si ses coordonnées sont des entiers.

Le nombre $\sum\limits_{n\le N}\tau(n)$ est le nombre $S(N)$ des points entiers compris entre l'axe $\overrightarrow{Ox}$ et le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{N}{x}$ avec $1 \le x \le N$.

On a $S\,(N) = \sum\limits_{k=1}^{N}\Big[\dfrac{N}{k}\Big]$

$$=\; 2\sum_{1\le k\le\sqrt{N}}\Big[\frac{N}{k}\Big] \,-\, \Big(\big[\sqrt{N}\,\big]\Big)^2$$

On a $\left[\sqrt{N}\right] = \sqrt{N} - \theta$ avec $0 \leq \theta < 1$

Donc

$$\begin{aligned}\left(\left[\sqrt{N}\right]\right)^2 &= \left(\sqrt{N} - \theta\right)^2 = N - 2\theta\sqrt{N} + \theta^2 \\ &= N + O\left(\sqrt{N}\right)\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}S(N) &= 2 \sum_{1 \leq k \leq \sqrt{N}} \frac{N}{k} - N + O\left(\sqrt{N}\right) \\ &= 2N \sum_{1 \leq k \leq \sqrt{N}} \frac{1}{k} - N + O\left(\sqrt{N}\right) \\ &= 2N\left(\log\sqrt{N} + c + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right) - N + O\left(\sqrt{N}\right) \\ &= N\log N + 2Nc - N + O\left(\sqrt{N}\right) \\ &= N\log N + (2c-1)N + O\left(\sqrt{N}\right)\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\sum_{n \leq N} \tau(n) = N\log N + (2c-1)N + O\left(\sqrt{N}\right).$

Corollaire.

On a $\displaystyle\sum_{n \leq N} \tau(n) \ll N\log N$

Théorème 2.5.

Soient $N \geq 2$, et l un entier naturel, on a alors :

$$\sum_{0<a\leq N} \left(\tau(a)\right)^l \ll N(\log N)^{2^l-1}$$

Démonstration :

En premier lieu on démontre par récurrence sur l l'estimation suivante :

$$\sum_{0<a\leq N} \frac{(\tau(a))^l}{a} \ll \left(\log N\right)^{2^l}$$

1) $l = 1$

$$\sum_{0<a\leq N} \frac{(\tau(a))^l}{a} \ll \left(\log N\right)^{2^l} \ ?$$

On considère les suites suites suivantes :

La première suite $\quad 1\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{5}\,,\ \frac{1}{6}\,,\ \cdots\,,\ \frac{1}{n}$

La $s^{\text{ième}}$ suite $\quad \frac{1}{s}\,,\ \frac{1}{2\,s}\,,\ \frac{1}{3\,s}\,,\ \cdots\,,\ \frac{1}{n\,s}\,,\ \cdots$

obtenue en multipliant les termes de la première suite par $\frac{1}{s}$.

$1^{\text{ière}}$ suite	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\cdots$
$2^{\text{ième}}$ suite		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{8}$	$\cdots$
$3^{\text{ième}}$ suite			$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{6}$			$\cdots$
$4^{\text{ième}}$ suite				$\frac{1}{4}$				$\frac{1}{8}$	$\cdots$

On s'intéresse à la somme A de tous les termes de ces suites dont les dénominateurs inférieurs ou égaux à N.

Chaque fraction $\frac{1}{a}$ est un terme de $\tau(a)$ suites donc :

$$A = \sum_{0<a\leq N} \frac{\tau(a)}{a}$$

D'autre part

$$A = \Big(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\tfrac{1}{N}\Big)+\Big(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\cdots+\tfrac{1}{2\,N_2}\Big)+\cdots+\Big(\tfrac{1}{s}+\tfrac{1}{2s}+\cdots+\tfrac{1}{s\,N_s}\Big)+\cdots$$

avec $s\,N_s \leq N$ et $1\leq s\leq N$.

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{\substack{1\leq s\leq N\\ s\,N_s\leq N}} \left(\frac{1}{s}+\frac{1}{2s}+\cdots+\frac{1}{s\,N_s}\right)\\
&= \sum_{\substack{1\leq s\leq N\\ s\,N_s\leq N}} \frac{1}{s}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N_s}\right)\\
&\leq \sum_{1\leq s\leq N} \frac{1}{s}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N_s}\right)\\
&= \sum_{1\leq s\leq N} \frac{1}{s} \sum_{1\leq k\leq N} \frac{1}{k}\\
&= \Big(\sum_{1\leq s\leq N} \frac{1}{s}\Big)^2 \leq \Big(\log N\Big)^2
\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle \sum_{1\leq a\leq N} \frac{\tau(a)}{a} \leq \Big(\log N\Big)^2 \ll \Big(\log N\Big)^2$.

La propriété est vérifiée pour $l=1$.

2) Hypothèse de récurrence :

Supposons $\displaystyle\sum_{0<a\leq N} \frac{\big(\tau(a)\big)^l}{a} \ll \big(\log N\big)^{2^l}$

3) On démontre la propriété pour $l+1$

On considère les suites suivantes :

La première suite $\frac{(\tau(1))^l}{1}\,,\ \frac{(\tau(2))^l}{2}\,,\ \frac{(\tau(3))^l}{3}\,,\ \frac{(\tau(4))^l}{4}\,,\ \ldots$

La $s^{\text{ième}}$ suite $\frac{(\tau(s))^l}{s}\frac{(\tau(1))^l}{1}\,,\ \frac{(\tau(s))^l}{s}\frac{(\tau(2))^l}{2}\,,\ \frac{(\tau(s))^l}{s}\frac{(\tau(3))^l}{3}\,,\ \ldots$

obtenue en multipliant les termes de la première suite par $\frac{(\tau(s))^l}{s}$.

Comme τ est multiplicative donc les termes de la $s^{\text{ième}}$ suite sont

$\frac{(\tau(s))^l}{s}\,,\ \frac{(\tau(2\,s))^l}{2\,s}\,,\ \frac{(\tau(3\,s))^l}{3\,s}\,,\ \ldots$

$1^{\text{ième}}$ suite	$\frac{(\tau(1))^l}{1}$	$\frac{(\tau(2))^l}{2}$	$\frac{(\tau(3))^l}{3}$	$\frac{(\tau(4))^l}{4}$	$\ldots$	
$2^{\text{ième}}$ suite		$\frac{(\tau(2))^l}{2}$		$\frac{(\tau(4))^l}{4}$	$\frac{(\tau(6))^l}{6}$	$\ldots$
$3^{\text{ième}}$ suite			$\frac{(\tau(3))^l}{3}$		$\frac{(\tau(6))^l}{6}$	$\ldots$

Soit B la somme de tous les termes de ces suites dont les dénominateurs inférieurs ou égaux à N.

Chaque fraction $\dfrac{(\tau(a))^l}{a}$ est un terme de $\tau(a)$ suites donc :

$$B = \sum_{0<a\leq N} \tau(a)\,\frac{\big(\tau(a)\big)^l}{a} = \sum_{0<a\leq N} \frac{\big(\tau(a)\big)^{l+1}}{a}$$

D'autre part, on a :

$$B = \sum_{\substack{1\leq s\leq N\\ s\,N_s\leq N}} \left(\frac{\big(\tau(s)\big)^l}{s} + \frac{\big(\tau(2\,s)\big)^l}{2\,s} + \frac{\big(\tau(3\,s)\big)^l}{3\,s} + \cdots + \frac{\big(\tau(N_s\,s)\big)^l}{N_s\,s}\right)$$

comme $\tau(s\,t) \leq \tau(s)\,\tau(t)$

Donc

$$\begin{aligned}
B &\leq \sum_{\substack{1 \leq s \leq N \\ s\,N_s \leq N}} \frac{\big(\tau(s)\big)^l}{s} \left(\frac{\big(\tau(1)\big)^l}{1} + \frac{\big(\tau(2)\big)^l}{2} + \cdots + \frac{\big(\tau(N_s)\big)^l}{N_s} \right) \\
&\leq \sum_{1 \leq s \leq N} \frac{\big(\tau(s)\big)^l}{s} \left(\frac{\big(\tau(1)\big)^l}{1} + \frac{\big(\tau(2)\big)^l}{2} + \cdots + \frac{\big(\tau(N)\big)^l}{N} \right) \\
&\leq \sum_{1 \leq s \leq N} \frac{\big(\tau(s)\big)^l}{s} \cdot \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{\big(\tau(k)\big)^l}{k} \\
&= \left(\sum_{1 \leq s \leq N} \frac{\big(\tau(s)\big)^l}{s} \right)^2
\end{aligned}$$

Or par hypothèse de récurrence on a :

$$\sum_{1 \leq a \leq N} \Big(\tau(a)\Big)^l \ll \Big(\log N\Big)^{2^l}$$

Donc

$$B \ll \left(\Big(\log N\Big)^{2^l} \right)^2 = \Big(\log N\Big)^{2^l . 2} = \Big(\log N\Big)^{2^{l+1}}$$

Donc la propriété est vérifiée pour $l+1$.

D'après (1), (2) et (3) la propriété est vérifiée pour tout entier l.

On démontre maintenant par récurrence sur l l'estimation suivante :

$$\sum_{0 < a \leq N} \Big(\tau(a)\Big)^l = N \Big(\log N\Big)^{2^l - 1}$$

1) $l = 1$

D'après le corollaire du *théorème* 2.4 on a :

$$\sum_{0 < a \leq N} \tau(a) \ll N \log N = N \Big(\log N\Big)^{2^1 - 1}$$

Donc la propriété est vérifiée pour $l = 1$.

2) Hypothèse de récurrence : supposons que la propriété est vérifiée pour l

c-à-d $\displaystyle\sum_{0 < a \leq N} \Big(\tau(a)\Big)^l = N \Big(\log N\Big)^{2^l - 1}$

3) On démontre que la propriété est vérifiée pour $l+1$.

On considère de nouveau les suites suivantes :

La première suite $\quad \Big(\tau(1)\Big)^l\,,\ \Big(\tau(2)\Big)^l\,,\ \Big(\tau(3)\Big)^l\,,\ \Big(\tau(4)\Big)^l\,,\ \cdots$

La $s^{\text{ième}}$ suite $\quad \Big(\tau(s)\Big)^l\Big(\tau(1)\Big)^l\,,\ \Big(\tau(s)\Big)^l\Big(\tau(2)\Big)^l\,,\ \Big(\tau(s)\Big)^l\Big(\tau(3)\Big)^l\,,\ \cdots$

Comme τ est multiplicative donc les termes de la $s^{\text{ième}}$ suite sont : $\Big(\tau(s)\Big)^l\,,\ \Big(\tau(2\,s)\Big)^l\,,\ \Big(\tau(3\,s)\Big)^l\,,\ \Big(\tau(4\,s)\Big)^l\,,\ \cdots$

Soit C la somme de tous les termes de ces suites dont les dénominateurs inférieurs ou égaux à N.

L'entier $\Big(\tau(a)\Big)^l$ est un terme de $\tau(a)$ suites donc :

$$\sum_{0<a\leq N}\tau(a)\Big(\tau(a)\Big)^l=\sum_{0<a\leq N}\Big(\tau(a)\Big)^{l+1}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
C&=\sum_{\substack{1\leq s\leq N\\ N_s\,s\leq N}}\bigg(\Big(\tau(s)\Big)^l+\Big(\tau(2\,s)\Big)^l+\cdots+\Big(\tau(N_s\,s)\Big)^l\bigg)\\
&\leq\sum_{\substack{1\leq s\leq N\\ N_s\,s\leq N}}\Big(\tau(s)\Big)^l\bigg(\Big(\tau(1)\Big)^l+\Big(\tau(2)\Big)^l+\cdots+\Big(\tau(N_s)\Big)^l\bigg)\\
&\leq\sum_{1\leq s\leq N}\Big(\tau(s)\Big)^l\Bigg(\Big(\tau(1)\Big)^l+\Big(\tau(2)\Big)^l+\cdots+\bigg(\tau\Big(\Big[\tfrac{N}{s}\Big]\Big)\bigg)^l\Bigg)
\end{aligned}$$

Or par hypothèse de récurrence on a :

$$\Big(\tau(1)\Big)^l+\Big(\tau(2)\Big)^l+\cdots+\Big(\tau\Big[\tfrac{N}{s}\Big]\Big)^l\ll\frac{N}{s}\Big(\log\tfrac{N}{s}\Big)^{2^l-1}\ll\frac{N}{s}\Big(\log N\Big)^{2^l-1}$$

Donc

$$\begin{aligned}
C&\ll\sum_{1<s\leq N}\frac{\Big(\tau(s)\Big)^l}{s}\,N\Big(\log N\Big)^{2^l-1}=N\Big(\log N\Big)^{2^l-1}\sum_{1<s\leq N}\frac{\Big(\tau(s)\Big)^l}{s}\\
&\ll\Big(\log N\Big)^{2^l-1}\cdot\Big(\log N\Big)^{2^l}=N\Big(\log N\Big)^{2.2^l-1}\\
&=N\Big(\log N\Big)^{2^{l+1}-1}
\end{aligned}$$

La propriété est donc vérifiée pour $l+1$.

De (1), (2) et (3) on obtient l'estimation :

$$\sum_{1\leq a\leq N}\Big(\tau(a)\Big)^l\ll N\Big(\log N\Big)^{2^{l+1}-1}\qquad\text{pour tout } l\,.$$

Théorème 2.6. *(Sommes doubles)*

Soit u un produit de deux facteurs dont chacun d'eux indépendemment de l'autre parcourt une suite croissante d'entiers positifs. v parcourt une suite croissante d'entiers positifs.

Soient N un entier naturel, U et U' des entiers tels que $1 < U < N$ et $u < U' \ll U$. $\Big(U' \leq MU, \quad M \text{ constante positive}\Big)$

$\alpha = \dfrac{a}{q} + \dfrac{\theta}{q^2}$, $(a, q) = 1$, $1 < q < N$

$$S = \sum_{U<u\leq U'} \sum_{v\leq Nu^{-1}} e^{2\pi i\, \alpha\, u\, v}$$

On a l'estimation suivante :

$$S \ll N \Big(\log N\Big)^2 \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N} + \frac{1}{U} + \frac{U}{N}}$$

Démonstration :

On a
$$\begin{aligned} |\,S\,| &\leq \Big| \sum_{U<u\leq U'} \sum_{v\leq Nu^{-1}} e^{2\pi i\, \alpha\, u\, v} \Big| \\ &\leq \sum_{U<u\leq U'} \Big| \sum_{v\leq Nz^{-1}} e^{2\pi i\, \alpha\, u\, v} \Big| \end{aligned}$$

Comme le nombre de solutions de l'équation diophantienne $u_1\, u_2 = z$ est le nombre $\tau(z)$ de diviseurs de z donc

$$|\,S\,| \leq \sum_{U<z\leq U'} \tau\,(z) \Big| \sum_{v\leq Nu^{-1}} e^{2\pi i\, \alpha\, z\, v} \Big|$$

Au membre droit de cette dernière inégalité on applique l'inégalité de Cauchy, on aura alors

$$\begin{aligned} |\,S\,|^2 &\leq \left(\sum_{U<z\leq U'} \tau\,(z) \Big| \sum_{v\leq Nu^{-1}} e^{2\pi i\, \alpha\, z\, v} \Big| \right)^2 \\ &\leq \sum_{U<z\leq U'} \Big(\tau\,(z)\Big)^2 \sum_{U<z\leq U'} \Big| \sum_{v\leq Nu^{-1}} e^{2\pi i\, \alpha\, z\, v} \Big|^2 \end{aligned}$$

or $\displaystyle\sum_{U<z\leq U'} \Big(\tau\,(z)\Big)^2 \ll U \Big(\log N\Big)^3$

et
$$\begin{aligned} \sum_{U<z\leq U'} \Big| \sum_{v\leq Nu^{-1}} e^{2\pi i\, \alpha\, z\, v} \Big|^2 &= \sum_{U<z\leq U'} \Big(\sum_{v\leq Nz^{-1}} e^{2\pi i\, \alpha\, z\, v'} \Big) \Big(\overline{\sum_{v\leq Nz^{-1}} e^{2\pi i\, \alpha\, z\, v}} \Big) \\ &= \sum_{U<z\leq U'} \sum_{v\leq Nu^{-1}} \sum_{v'\leq Nu^{-1}} e^{2\pi i\, \alpha\, z\,(v'-v)} \end{aligned}$$

$z > U$ donc chacune des deux suites v et v' parcourt les entiers inférieurs ou égaux à $\dfrac{N}{U}$ et $U < z \leq \min\left(U', \dfrac{N}{v'}, \dfrac{N}{v}\right)$ donc

$$\begin{aligned}
|\,S\,|^2 &\leq U\left(\log N\right)^3 \sum_{U<z\leq U'} \sum_{v\leq Nz^{-1}} \sum_{v'\leq Nz^{-1}} e^{2\pi i\,\alpha\,z\,(v'-v)} \\
&\leq U\left(\log N\right)^3 \sum_{v\leq Nz^{-1}} \sum_{v'\leq Nz^{-1}} \sum_{U<z\leq \min\left(U', \frac{N}{v'}, \frac{N}{v}\right)} e^{2\pi i\,\alpha\,z\,(v'-v)} \\
&\ll U\left(\log N\right)^3 \sum_{v\leq \frac{N}{U}} \sum_{v'\leq \frac{N}{U}} \min\left(U\,,\, \frac{1}{2\,\|\,\alpha\,(v'-v)\,\|}\right) \\
&\ll U\left(\log N\right)^3 \sum_{v\leq \frac{N}{U}} \left(\frac{N}{U\,q}+1\right)\left(U+q\,\log q\right) \\
&\ll U\left(\log N\right)^3 \frac{N}{U}\left(\frac{N}{U\,q}+1\right)\left(U+q\,\log q\right) \\
&\ll N^2\left(\log N\right)^3 \left(\frac{1}{U\,q}+\frac{1}{N}\right)\left(\frac{U}{N}+\frac{q\,\log q}{N}\right) \\
&\ll N^2\left(\log N\right)^3 \left(\frac{1}{q\,N}+\frac{\log q}{U\,N}+\frac{U}{N^2}+\frac{q\,\log q}{N}\right) \\
&\ll N^2\left(\log N\right)^4 \left(\frac{1}{q}+\frac{q}{N}+\frac{1}{U}+\frac{U}{N}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$|\,S\,| \ll N\left(\log N\right)^2 \sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}+\frac{1}{U}+\frac{U}{N}}\;.$$

Chapitre 3

Une somme trigonométrique étendue à la suite des nombres premiers

Théorème.

On considère la somme trigonométrique suivante :

$$S = \sum_{p \leq N} e^{2\pi\, i\, \alpha\, p}$$

où p parcourt les nombres premiers, N un entier naturel non nul et α un nombre irrationnel tel que $\alpha = \dfrac{a}{q} + \dfrac{\theta}{q^2}$ avec $1 < q < N$, $(a, q) = 1$.

Alors pour $H = e^{0.5\sqrt{\log N}}$ on a l'estimation suivante :

$$S \ll N(\log N)^{4.5} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + \frac{1}{H}\right)$$

Démonstration :

On pose $P = \prod_{p \leq \sqrt{N}} p$, $\delta_n = \text{pgcd}\ (n, P) \quad 1 \leq n \leq N$ et $f_n = e^{2\pi\, i\, \alpha\, n}$

Soit $S' = \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ \delta_n = 1}} f_n = \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ \delta_n = 1}} e^{2\pi\, i\, \alpha\, n}$

On a $\delta_n = 1 \;\Leftrightarrow\;$ pgcd $(n, P) = 1 \;\Leftrightarrow\; n = 1$ ou $n = p$ avec $\sqrt{N} \leq p \leq N$

Donc

$$S' = e^{2\pi i \alpha} + \sum_{\sqrt{N} \leq p \leq N} e^{2\pi\, i\, \alpha\, p}$$

D'autre part, d'après le *théorème* 1.2 on a :

$$S' = \sum_{d\, \in\, \mathbb{D}} \mu(d)\ S_d$$

où $\mathbb{D}$ est l'ensemble des entiers divisant au moins un δ_n $(1 \leq n \leq N)$

et $S_d = \sum\limits_{\substack{n=md \\ 1\leq n\leq N}} e^{2\pi\, i\, \alpha\, n}$

Or

$$\begin{aligned} d \in \mathbb{D} &\Leftrightarrow d \mid \text{pgcd}\ (n, P), \quad 1 \leq n \leq N \\ &\Leftrightarrow d \mid P \ \text{ et } \ n = md \end{aligned}$$

Donc

$$S' = \sum_{d\backslash P} \mu(d) \sum_{1\leq md\leq N} e^{2\pi\, i\, \alpha\, md}$$

Revenons maintenant à la somme S.

On a

$$S = \sum_{p\leq\sqrt{N}} e^{2\pi\, i\, \alpha\, p} + \sum_{\sqrt{N}\leq p\leq N} e^{2\pi\, i\, \alpha\, p}$$

et

$$\Big| \sum_{p\leq\sqrt{N}} e^{2\pi\, i\, \alpha\, p} \Big| \leq \sum_{p\leq\sqrt{N}} 1 \leq \sqrt{N}$$

Donc

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\sqrt{N}\leq p\leq N} e^{2\pi\, i\, \alpha\, p} + O(\sqrt{N}) \\ &= S' - e^{2\pi\, i\, \alpha} + O(\sqrt{N}) \end{aligned}$$

Comme $\sqrt{N} \geq 1$ donc $|e^{2\pi\, i\, \alpha}| \leq \sqrt{N}$

Par conséquent

$$S = S' + O(\sqrt{N})$$

On a

$$\begin{aligned} S' &= \sum_{\substack{d\backslash P \\ \mu(d)=1}} \sum_{1\leq md\leq N} e^{2\pi\, i\, \alpha\, md} - \sum_{\substack{d\backslash P \\ \mu(d)=-1}} \sum_{1\leq md\leq N} e^{2\pi\, i\, \alpha\, md} \\ &= S_1 - S_2 \end{aligned}$$

où $S_1 = \sum\limits_{d_1} \sum\limits_{0<m\leq \frac{N}{d_1}} e^{2\pi\, i\, \alpha\, md_1}$

et d_1 parcourt les diviseurs de P inférieurs ou égaux à N et vérifiant $\mu(d_1) = 1$ et $0 < m \leq N$

$S_2 = \sum\limits_{d_2} \sum\limits_{0<m\leq \frac{N}{d_2}} e^{2\pi\, i\, \alpha\, md_2}$

et d_2 parcourt les diviseurs de P inférieurs ou égaux à N et vérifiant $\mu(d_2) = -1$

et $0 < m \leq N$

on a donc

$$S \ll |\, S' \,| + |\, S'' \,| + O(\sqrt{N})$$

Les deux sommes S' et S'' ont les mêmes estimations et s'obtiennent de la même façon donc il suffit d'estimer S'.

Estimation de S' :

On partage l'intervalle $0 < m \leq N$ en $\ll \log N$ intervalles de type $M < m \leq M'$ avec $M' \leq 2M$, puis on pose :

$$S'(M) = \sum_{d_1} \sum_{\substack{M<m\leq M' \\ md_1 \leq N}} e^{2\pi\, i\, \alpha\, md_1}$$

Donc

$$S' \ll (\,\log N)\ |\, S'(M) \,|$$

Si $M \geq H$ on pose $M(d_1) = \min\Big(M', \dfrac{N}{d_1}\Big)$, on aura donc

$$S'(M) = \sum_{d_1 \leq \frac{N}{M}} \sum_{M<m\leq M(d_1)} e^{2\pi\, i\, \alpha\, md_1}$$

et

$$|\, S'(M) \,| = \sum_{d_1 \leq \frac{N}{M}} \Big| \sum_{M<m\leq M(d_1)} e^{2\pi\, i\, \alpha\, md_1} \Big|$$

or d'après le *corollaire* 2.3,

$$\Big| \sum_{M<m\leq M(d_1)} e^{2\pi\, i\, \alpha\, md_1} \Big| \ \leq\ \min\left(\frac{N}{d_1} \ ,\ \frac{1}{2\|\alpha\, d_1\|} \right)$$

Donc

$$|\, S'(M) \,| \leq \sum_{d_1 \leq \frac{N}{M}} \min\left(\frac{N}{d_1} \ ,\ \frac{1}{2\|\alpha\, d_1\|} \right)$$

On applique le *théorème* 2.4 on obtient

$$\begin{aligned} S'(M) \ &\ll \left(\frac{N}{H} + q + \frac{N}{q} \right) \log N \ll N \log N \left(\frac{1}{q} + \frac{q}{N} + \frac{1}{H} \right) \\ &\ll N \log N \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + \frac{1}{H} \right) \end{aligned}$$

On passe au cas $M < H$.

Dans ce cas l_k désigne tout diviseur d_1 de P inférieur ou égal à N ayant exactement k facteurs premiers supérieurs à H^2 et vérifiant $\mu(d_1) = 1$.

Soit $k_0 = \text{Max}\,\{k \quad / \, l_k = d_1 \backslash \text{P}$ et ayant k facteurs premiers$\}$

alors

$$S'(M) = \sum_{1 \le k \le k_0} S_k(M)$$

où $\quad S_k(M) = \sum_{M<m\le M'} \sum_{l_k \le \frac{N}{m}} e^{2\pi\, i\, \alpha\, m\, l_k}$

Pour $k = 0$ (l_k n'ayant aucun facteur $> H^2$) on a

$$\begin{aligned} S_0(M) &= \sum_{M<m\le M'} \sum_{l_0 \le \frac{N}{m}} e^{2\pi\, i\, \alpha\, m\, l_0} \\ &= \sum_{M<m\le M'} \left(\sum_{l_0 \le \frac{N}{MH}} e^{2\pi\, i\, \alpha\, l_0\, m} + \sum_{\frac{N}{MH} < l_0 \le \frac{N}{m}} e^{2\pi\, i\, \alpha\, l_0\, m} \right) \\ &= \sum_{M<m\le M'} \sum_{l_0 \le \frac{N}{MH}} e^{2\pi\, i\, \alpha\, l_0\, m} + \sum_{M<m\le M'} \sum_{\frac{N}{MH} < l_0 \le \frac{N}{m}} e^{2\pi\, i\, \alpha\, l_0\, m} \end{aligned}$$

Donc

$$|\, S_0(M)\,| \le \sum_{M<m\le M'} \sum_{l_0 \le \frac{N}{MH}} 1 + \sum_{M<m\le M'} \sum_{\frac{N}{MH} < l_0 \le \frac{N}{m}} 1$$

où

$$\sum_{M<m\le M'} \sum_{l_0 \le \frac{N}{MH}} 1 \ll \sum_{M<m\le M'} \frac{N}{M\,H} \ll M\,\frac{N}{M\,H} \ll \frac{N}{H}$$

L'estimation de $\sum_{M<m\le M'} \sum_{\frac{N}{MH} < l_0 \le \frac{N}{m}} 1$:

Soit a le nombre de diviseurs premiers de l_0, comme ces diviseurs sont inférieurs ou égaux à H^2 donc $\left(H^2\right)^a > \dfrac{N}{MH} > \dfrac{N}{H^2}$ puisque $H > M$

$$\begin{aligned} H^{2\,a} > \frac{N}{H^2} \quad &\Rightarrow \quad (\,2\,a + 2\,)\, \log H \; > \; \log N \\ &\Rightarrow \quad (\,2\,a + 2\,)\; 0.5\, \sqrt{\log N} \; > \; \log N \\ &\Rightarrow \quad (\,a + 1\,) \; > \; \sqrt{\log N} \\ &\Rightarrow \quad a \; > \; \sqrt{\log N} - 1 \end{aligned}$$

Soit $K = \{\, p_{i_1}, \cdots p_{i_a}\,\}$ ensemble des a diviseurs premiers de l_0 alors il existe une application bijective de $P(K)$ (ensemble des sous-ensembles de K) dans l'ensemble des diviseurs de l_0 donc $\tau(l_0) = 2^{\,a} = \text{card}\Big(P(K)\Big)$.

$$2^{a} > 2^{\sqrt{\log N}-1} \Rightarrow \tau(l_0) > 2^{\sqrt{\log N}-1} \Rightarrow \frac{\tau(l_0)}{2^{\sqrt{\log N}-1}} > 1$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{M<m\leq M'} \sum_{\frac{N}{MH}<l_0\leq \frac{N}{m}} 1 &\leq \sum_{M<m\leq M'} \sum_{\frac{N}{MH}<l_0\leq \frac{N}{m}} \frac{\tau(l_0)}{2^{\sqrt{\log N}-1}} \\
&= \frac{2}{2^{\sqrt{\log N}-1}} \sum_{M<m\leq M'} \sum_{\frac{N}{MH}<l_0\leq \frac{N}{m}} \tau(l_0) \\
&\leq \frac{2}{H} \sum_{M<m\leq M'} \sum_{l_0\leq \frac{N}{m}} \tau(l_0) \\
&\ll \frac{1}{H} \cdot M \cdot \frac{N}{M} \log N \\
&= \frac{N}{H} \log N
\end{aligned}$$

Donc

$$S_0(M) \ll \frac{N}{H} + \frac{N}{H} \log N \ll \frac{N}{H} \log N$$

Pour le cas $k > 0$ on introduit la somme T_k qu'on compare avec $S_k(M)$ et qui est définie par

$$T_k = \sum_{M<m\leq M'} \sum_{pt\leq \frac{N}{m}} e^{2\pi i \alpha p t m}$$

où p parcourt les nombres premiers P vérifiant $H^2 < p \leq \sqrt{N}$
et t parcourt les produits de $k-1$ facteurs premiers supérieurs à H^2.

Si $k = 1$ alors $S_1(M) = T_1$

Regardons le cas $k > 1$:
Pour tout produit pt on a $(p,t) = p$ ou $(p,t) = 1$ alors si $(p,t) = p$, $pt = p^2 t'$ avec $(p,t') = 1$.

La somme partielle étendue aux produits pt tel que $(p,t) = p$ est :

$$\begin{aligned}
T_k &\ll \sum_{M<m\leq M'} \sum_{\substack{p^2t'\leq \frac{N}{m} \\ H^2<p\leq\sqrt{N}}} e^{2\pi i \alpha p^2 t' m} \\
&\ll \sum_{M<m\leq M'} \sum_{\substack{p^2t'\leq \frac{N}{m} \\ H^2<p\leq\sqrt{N}}} 1 \\
&\ll \sum_{M<m\leq M'} \sum_{\substack{t'\leq \frac{N}{m p^2} \\ H^2<p\leq\sqrt{N}}} 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\ll \sum_{M<m\leq M'} \sum_{H^2<p\leq\sqrt{N}} \frac{N}{m\,p^2} \\
&\ll \sum_{M<m\leq M'} \sum_{H^2<p\leq\sqrt{N}} \frac{N}{MH}\,\frac{1}{p} \\
&\ll \sum_{M<m\leq M'} \frac{N}{MH} \sum_{H^2<p\leq\sqrt{N}} \frac{1}{p} \\
&\ll M\,\frac{N}{MH} \sum_{n\leq\sqrt{N}} \frac{1}{n} \\
&\ll \frac{N}{H}\,\log N
\end{aligned}
$$

La somme partielle étendue sur pt tel que $(p,t)=1$ contient tous les termes de $S_k(M)$ chacun d'eux est répété k fois.

Donc

$$S_k(M) = \frac{1}{k}\,T_k + O\left(\frac{N\,\log N}{H}\right)$$

Donc l'estimation de T_k nous donne celle de $S_k(M)$.

On a

$$T_k = \sum_{M<m\leq M'} \sum_{pt\leq Nm^{-1}} e^{2\pi\, i\,\alpha\, pt\, m}$$

On partage l'intervalle $H^2 < p \leq \sqrt{N}$ en $\ll \log N$ intervalles de type $Q < p \leq Q'$ avec $Q' \leq 2\,Q$ et on pose

$$T_k(Q) = \sum_{M<m\leq M'} \sum_{Q<p\leq Q'} \sum_{m\,pt\leq N} e^{2\pi\, i\,\alpha\, m\, pt}$$

On applique le *théorème* 2.6 *(sommes doubles)* en posant $u = m\,p$, $v = t$ on aura donc :

$$
\begin{aligned}
T_k(Q) \quad &\ll N(\log N)^2 \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N} + \frac{1}{H^2} + \frac{M\sqrt{N}}{N}} \\
&\ll N(\log N)^2 \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + \frac{1}{H}\right)
\end{aligned}
$$

Donc

$$S_k(M) \ll \frac{1}{k}\,N\Big(\log N\Big)^3 \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + \frac{1}{H}\right) + \frac{N}{H}\,\log N$$

Donc

$$\begin{aligned}
S'(M) &\ll \sum_{1\leq k\leq k_0} \left(\frac{1}{k} N\Big(\log N\Big)^3 \left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+\frac{1}{H}\right) + \frac{N}{H}\log N \right) \\
&\ll N\Big(\log N\Big)^3 \left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+\frac{1}{H}\right) \sum_{1\leq k\leq k_0} \frac{1}{k} + \frac{N}{H}\log N \sum_{1\leq k\leq k_0} 1 \\
&\ll N\Big(\log N\Big)^3 \left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+\frac{1}{H}\right) \int_1^{k_0} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{k_0\,N}{H}\log N \\
&\ll N\Big(\log N\Big)^3 \left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+\frac{1}{H}\right) \log k_0 + k_0\frac{N}{H}\log N \\
&\ll N\Big(\log N\Big)^3 \left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+\frac{1}{H}\right) \log\log N + \Big(\log N\Big)^2 \frac{N}{H}
\end{aligned}$$

Or $\log\log N \ll \sqrt{\log N}$ donc

$$\begin{aligned}
S'(M) &\ll N\Big(\log N\Big)^{3.5} \left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+\frac{1}{H}\right) + \frac{N}{H}\Big(\log N\Big)^2 \\
&\ll N\Big(\log N\Big)^{3.5} \left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+\frac{1}{H}\right)
\end{aligned}$$

Comme $S' \ll \Big(\log N\Big)\, S'(M)$ donc

$$S' \ll N\Big(\log N\Big)^{4.5} \left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+\frac{1}{H}\right)$$

De la même manière on obtient

$$S'' \ll N\Big(\log N\Big)^{4.5} \left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+\frac{1}{H}\right)$$

D'où

$$S \ll N\Big(\log N\Big)^{4.5} \left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+\frac{1}{H}\right)$$

Corollaire.

Suivant les notations du théorème on a

$$S \ll N^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+\frac{1}{H}\right)$$

Preuve :

On a pour tout naturel positif m et $\varepsilon > 0$,

$\Big(\log N\Big)^m \ll N^{\varepsilon}$ d'où l'estimation voulue.

Bibliographie

I.M. VINOGRADOV. *Éléments de théorie des nombres.* NAYKA, 8ème édition, Moscou, 1972.

I.M. VINOGRADOV. *Méthode des sommes trigonométriques en théorie des nombres.* NAYKA, 1971.

I.M. VINOGRADOV. *Selected works.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo.

PAN Chengdong & PAN Chengbiao. *Goldbach conjecture.* Science press, Beijing, China, 1992.

A. GELFOND & Y. LINNIK. Traduit par Myriam & Jean-Luc VERLEY. *Méthodes élémentaires dans la théorie analytique des nombres.* Gauthier-Villars éditeur, Paris, 1965.

Résumer

Les sommes trigonométriques étendues à des suites d'entiers naturels jouent un grand rôle en théorie analytique et théorie additive des nombres. Le mathématicien russe ***I.M VINOGRADOV*** a élaboré des méthode d'estimation non triviale de ces sommes trigonométriques, ce qui lui a permis de résoudre beaucoup de problème de théorie des nombres, on cite à titre d'exemple le problème de **Goldbach**, le problème de **Waring**, le problème **de localisation des zéros de la fonction zêta** et la répartition sur l'intervalle]0 ,1] de la suite des parties fractionnaires de αs où α un nombre irrationnel et s parcourt une suite donnée d'entiers naturels .

Dans ce modeste travail, au chapitre un on donne les propriétés de la fonction Τ de nombre de diviseurs et la fonction μ de Möbius. Au chapitre deux on expose une méthode de I.M Vinogradov d'estimation de ces sommes trigonométriques où on majore par :

$N(\log N)^2\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}+\frac{1}{U}+\frac{U}{N}}$ la somme double $\sum_{U<u\le U'}\ \sum_{v\le Nv^{-1}} e^{2\pi i\alpha uv}$

où chacun des deux facteurs u et v indépendamment de l'autre parcourt une suite croissante d'entiers naturels et $1<U\le U'\le cU\le N$

Au final nous vous proposons Un exemple d'application de cette méthode on obtient alors l'estimation suivante

$$\sum_{p\le N} e^{2\pi i\alpha p} << N^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+\frac{1}{H}\right)$$

où $H=e^{0.5\sqrt{\log N}}$ et p parcourt les nombres premiers

les mots clé :

π : le nombre des nombres premiers de 2 à n avec n<N .

{αs} : la partie fractionnaire .

II . II : la fonction de plus proche entier .