

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**  
**Université Mouloud MAMMERY, Tizi-Ouzou**



**Faculté de Génie Electrique et d'Informatique**  
**Département d'Automatique**

## **Mémoire de Fin d'Etudes**

En vue de l'obtention du diplôme

*D'Ingénieur d'Etat en Automatique*

# *Thème*

**Commande robuste  $H_{\infty}$   
d'un pendule inversé.**

Proposé par : M<sup>r</sup> DJENNOUNE .S

Présenté par : M<sup>r</sup> TALEB Fahem.

Dirigé par: M<sup>r</sup> DJENNOUNE .S

M<sup>r</sup> SLIMANI Merzouk.

Soutenu le : / 07 /2010

**2009/2010**

# **REMERCIEMENTS**

*Nous remercions en premier lieu le Dieu tout puissant qui nous a donné le courage d'accomplir ce travail.*

*Au terme de ce modeste travail nous tenons à remercier*

*Nos familles pour leurs soutiens durant toutes ces années d'étude.*

*A notre promoteur Mr S.DJENNOUNE qui n'a ménagé aucun effort pour nous apporter ses précieuses aides et orientations.*

*Mme L. AIT MESSAOUD pour son aide et orientation.*

*Les membres du jury pour avoir accepté de juger ce travail.*

*A tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce modeste travail.*

*L'aboutissement à la réalisation d'un travail est le fruit de toutes les années de formation, c'est donc à tous nos enseignants que nous voudrions exprimer nos respects.*

*Je dédie ce modeste travail :*

*A mes très chers parents, pour leur amour, soutint, encouragement et la confiance totale qu'ils m'ont toujours accordé, qu'ils retrouvent ici l'expression de mon profond sentiment.*

*A mes chères sœurs : Ouahiba, Souria, et Tinhinane,*

*A mes chers frères Mouhamed, et Oulhadje.*

*A ma chère grand- mère à qui je souhaite longue vie et santé.*

*A l'esprit de mes grands pères et ma grand- mère.*

*Au merveilleux mari de ma sœur, Smail.*

*A mes chères amis chacun son nom.*

*T. Fahem.*

# *Dédicaces*

*A ma grand-mère*

*A ma petite cousine dyhia*

*A mon père et à ma mère*

*A mes frères et à ma sœur*

*A mes oncles et leurs femmes*

*A mes cousins et cousines*

*A mon oncle maternel et toute sa famille*

*A nos neveux Iddir, Fillali, Ramdhani*

*A mes amis*

*Mezrouk.*

# Principaux symboles

<b>I :</b>	moment d'inertie du pendule.
<b>f :</b>	coefficient de frottement du chariot
<b>K :</b>	coefficient d'amortissement du pendule
<b>m :</b>	masse du pendule
<b>M :</b>	masse du chariot
<b>l :</b>	longueur du pendule
<b><math>\theta</math> :</b>	position angulaire
<b>g :</b>	gravité
<b><math>\lambda_i</math> :</b>	Valeur propre d'une matrice.
<b><math>\sigma_i</math> :</b>	Valeur singulière d'une matrice.
<b><math>\bar{\sigma}_i, \underline{\sigma}_i</math> :</b>	Plus grande (respectivement plus petite) valeur singulière.
<b><math>\rho</math> :</b>	Rayon spectral.
<b><math>P_x</math> :</b>	Taux d'incertitude associé au paramètre $x$ .
<b>s :</b>	Opérateur de Laplace.
<b><math>\varepsilon</math> :</b>	Erreur statique.
<b>r :</b>	signal de référence
<b>y :</b>	signal de sortie
<b>b :</b>	bruit
<b>e :</b>	signal d'entrée
<b>u :</b>	signal de commande
<b>A, B, C, D :</b>	Matrices de la représentation d'état d'un système.
<b><math>I_n</math> :</b>	Matrice identité $n \times n$ .
<b><math>G_{sys}(s)</math> :</b>	Matrice de transfert du système nominal en boucle ouverte.
<b>H(s) :</b>	Matrice de transfert du système en boucle fermée.
<b>P(s), G(s), M(s) :</b>	Matrices des transferts des procédés généralisés.
<b>K(s) :</b>	Matrice de transfert du correcteur.
<b><math>\Delta(s)</math> :</b>	Matrice modélisant les incertitudes.
<b><math>W_i(s)</math> :</b>	Matrice de pondération.
<b>H(s), J(s) :</b>	Matrices hamiltoniennes.
<b><math>w_i(s)</math> :</b>	Fonction de pondération.

$S, T$  : Fonction de sensibilité, fonction de sensibilité complémentaire.

$F_l(P, K), (F_u(P, K))$  : Transformation linéaire fractionnaire inférieure (respectivement supérieure).

$A^T$  : transposé de la matrice A

$A^*$  : transposé conjugué de la matrice A

$\|\cdot\|_2$  : norme 2

$\|\cdot\|_\infty$  : norme infini

### **Acronymes anglophones :**

**LTI** : Linear Time Invariant : système linéaire stationnaire

**LFT** : Linear Fractional Transformation : transformation fractionnelle  
Linéaire.

**SISO** : Single Input Single Output : système à une entrée et une sortie.

**MIMO** : multi Input Multi Output : système à plusieurs entrées et plusieurs sorties.

# Sommaire

---

Introduction générale.....	01
<b>Chapitre I : Introduction a la commande robuste</b>	
<b>I.1</b> Introduction.....	03
<b>I.2</b> Robustesse et commande robuste .....	03
<b>I.2.1</b> Définition de la robustesse.....	04
<b>I.2.2</b> Types de robustesse .....	05
<b>I.2.2.1</b> Robustesse en stabilité .....	05
<b>I.2.2.2</b> Robustesse en performances.....	05
<b>I.3</b> Asservissement multivariables .....	05
<b>I.3.1</b> Équations et Fonctions Caractéristiques.....	06
<b>I.3.2</b> Fonction de sensibilité en sortie .....	08
<b>I.3.3</b> Notion de gain pour les systèmes multivariables .....	09
<b>I.3.3.1</b> Norme Euclidienne .....	09
<b>I.3.3.2</b> Norme $H_2$ .....	09
<b>I.3.3.3</b> Norme $H_\infty$ .....	10
<b>I.3.3.4</b> Propriétés de la norme $H_\infty$ .....	13
<b>I.3.3.5</b> Discussion.....	14
<b>I.4</b> Stabilité nominale .....	14
<b>I.4.1</b> Stabilité BIBO (externe).....	14
<b>I.4.2</b> Stabilité interne .....	14
<b>I.4.3</b> Marge de module .....	15
<b>I.4.4</b> Limite des marges classiques dans le cas MIMO.....	16
<b>I.4.5</b> Théorème du petit gain .....	16

# Sommaire

---

<b>I.5 Performances nominales</b> .....	16
<b>I.6 Modélisation et représentation d'incertitudes</b> .....	17
<b>I.6.1 Incertitudes non structurées ou incertitudes dynamique</b> .....	18
<b>I.6.2 Incertitudes structurées ou paramétriques</b> .....	20
<b>I.7 Stabilité robuste</b> .....	20
<b>I.8 Performances robustes</b> .....	21
<b>I.9 Spécification de performances en domaine fréquentiel</b> .....	22
<b>I.10 Objectifs de performance</b> .....	22
Conclusion.....	23
<b>Chapitre II : Synthèse du correcteur <math>H_\infty</math></b>	
<b>II.1 Introduction</b> .....	25
<b>II.2 Sensibilité mixte</b> .....	25
<b>II.3 Forme standard</b> .....	26
<b>II.4 Problème <math>H_\infty</math> standard</b> .....	27
<b>II.5 Résolution du problème <math>H_\infty</math> standard par équations de Riccati</b> .....	27
<b>II.6 Solution du problème de sensibilité mixte <math>S/KS</math></b> .....	30
<b>II.7 Mise en œuvre</b> .....	34
<b>II.7.1 Mise en forme pour la synthèse</b> .....	34
<b>II.7.2 Objectifs de synthèse</b> .....	35
<b>II.7.3 Mise en œuvre pas l'introduction de fonctions de pondérations</b> .....	36
<b>II.7.4 Mise sous forme standard pondéré</b> .....	38
<b>II.8 Conclusion</b> .....	45

# Sommaire

---

## Chapitre III : Application au pendule inversé

<b>III.1</b>	Introduction .....	46
<b>III.2</b>	Description de la plate-forme .....	46
<b>III.3</b>	Modélisation du système .....	47
<b>III.3.1</b>	Linéarisation autour du point $\theta = \pi$ .....	47
<b>III.3.2</b>	Linéarisation autour du point $\theta = 0$ .....	49
<b>III.4</b>	Représentation du système perturbé en boucle ouverte.....	51
<b>III.4.1</b>	Perturbations sur les paramètres .....	51
<b>III.4.2</b>	Analyse fréquentielle du système perturbé.....	55
<b>III.4.2.1</b>	Interprétation .....	57
<b>III.5</b>	Etude du système en boucle fermée .....	58
<b>III.6</b>	Transformation des incertitudes structurées en incertitudes non structurées .....	59
<b>III.7</b>	Critère de robustesse.....	61
<b>III.7.1</b>	Stabilité et performance nominales .....	61
<b>III.7.2</b>	Stabilité robuste .....	62
<b>III.8</b>	synthèse du correcteur $H_\infty$ .....	62
<b>III.8.1</b>	Objectif .....	62
<b>III.8.2</b>	Problème .....	62
<b>III.8.3</b>	Calcul des fonctions de pondérations .....	63
<b>III.9</b>	Interprétation .....	65
	Conclusion générale .....	66

# Introduction générale

---

La synthèse d'une loi de commande permettant de réaliser l'asservissement d'un processus passe par l'utilisation de modèles mathématiques. Ceux-ci peuvent être issus de la description des phénomènes physiques, ou d'expériences permettant de caractériser son comportement entrée/sortie.

On peut tout de suite noter que ces modèles ne représentent qu'imparfaitement la réalité : il y aura toujours des incertitudes et des erreurs de modélisation, du fait que les phénomènes physiques ne peuvent être qu'imparfaitement traduits par des modèles mathématiques, que les paramètres de ces modèles ne sont connus qu'avec une certaine précision et aussi qu'il ne sert à rien de travailler avec des modèles très précis et donc très complexes. Rappelons aussi que plusieurs systèmes sont exposés aux perturbations extérieures (par exemple : rafale de vent sur un avion en ligne).

Donc, sur la base d'un modèle imparfait, on va concevoir une loi de commande pour assurer stabilité, marge de stabilité, précision, performances dynamiques...

Il existe plusieurs types de commandes, et plusieurs types de correcteurs, dans ce mémoire, et grâce à un retour de sortie, nous nous intéresserons à la conception d'un correcteur appelé « correcteur  $H_\infty$  ».

La synthèse  $H_\infty$  a été initiée par Zames au début des années 80 [Zam81] et développée, en particulier par Doyle, Glover, Khargonekar et Francis [Fra87] [DGK+89]. Cette méthode a connue des applications multiples dans des domaines très variés. Elle est devenue ces dernières années une des méthodes phares de la « commande robuste ». Sa présentation théorique est donnée dans de nombreux ouvrages pédagogiques [BGF+94] [ZDG95] [GL95] [SP96] [Lar96] [Toi98] [DF99] [CAS01].

La synthèse  $H_\infty$  permet de prendre en compte, a priori et explicitement, des spécifications fréquentielles et temporelles du cahier de charges qui simplifieront ainsi la synthèse. Comme c'est une approche fréquentielle, les spécifications fréquentielles sont naturellement prises en considération, les spécifications temporelles classiques (temps de montée, rejet des perturbations, atténuation du bruit,...) peuvent être facilement interprétées dans le domaine fréquentiel.

# Introduction générale

---

Dans ce mémoire, seront brièvement exposés les outils nécessaires à la définition de la norme  $H_\infty$  ainsi que les propriétés importantes de cette norme. Nous exposons principalement la démarche théorique à suivre pour le calcul du correcteur  $H_\infty$  en se basant sur la résolution des équations de Riccati. Plusieurs méthodes performantes de synthèse  $H_\infty$  figurent dans la littérature telle : GLOVER-DOYLE.

Le calcul du correcteur robuste  $H_\infty$  avec la méthode choisie est déjà programmé par les concepteurs du logiciel MATLAB, c'est ce qu'on appelle la conception assistée par ordinateur (CAO), la tâche de l'automaticien sera donc de choisir le critère mathématique qui reflète le mieux le cahier des charges et d'en régler les différents paramètres, et enfin élaborer les programmes utilisant les outils de MATLAB.

Ainsi, le présent mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux outils nécessaires pour l'initiation à la commande robuste, en abordant principalement la notion de robustesse, les fonctions de sensibilités, la représentation des incertitudes...

Le deuxième chapitre illustre la procédure suivie pour la synthèse du correcteur  $H_\infty$ . Il introduit le problème de sensibilité mixte, la mise sous forme standard et la résolution par les équations de Riccati.

Le dernier chapitre est consacré au calcul du correcteur  $H_\infty$  en suivant la démarche vue aux deux premiers chapitres puis l'appliquer sur notre système « pendule inversé ».

On termine notre travail par une conclusion générale sur l'étude menée.

**I.1 Introduction :**

Dans ce chapitre, seront brièvement exposés la notion de robustesse et les outils nécessaires à la définition de la norme  $H_\infty$  ainsi que les propriétés importantes de cette norme. Nous introduisons les incertitudes (structurées et non structurées), les fonctions de sensibilités et nous montrons leurs intérêts dans le calcul d'un correcteur robuste.

Nous décrivons les notations utilisées et nous définissons les valeurs singulières d'une matrice de transfert, afin d'introduire le problème de  $H_\infty$  standard et sa résolution.

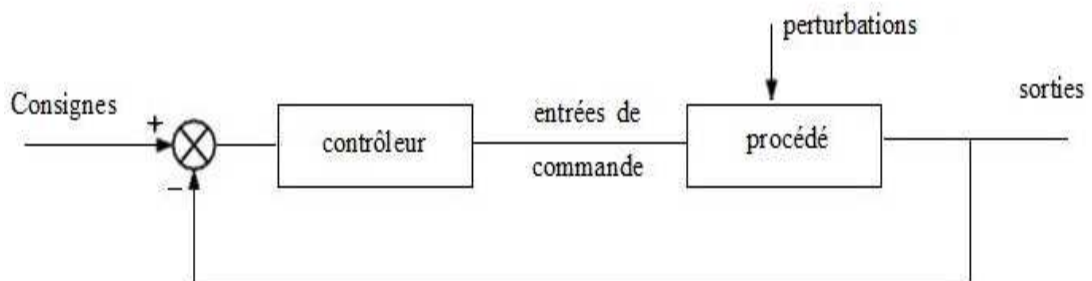
**I.2 Robustesse et commande robuste :**

Figure I.1 Schéma d'asservissement

Comme pour les asservissements monovariables, l'asservissement multivariable consiste à concevoir un contrôleur de telle manière que la sortie atteigne les objectifs fixés sur la consigne.

La conception de cet asservissement s'effectue à partir d'un modèle mathématique qui est une représentation (abstraite) mathématique du procédé

L'obtention d'un modèle peut se faire de deux manières :

- la première (white box) consiste à décrire le comportement du procédé par des équations physiques régissant les phénomènes de ce procédé, ceci conduit à un modèle de connaissance.

-le second (black box) consiste à associer au procédé une structure mathématique et puis de déterminer les paramètres de cette structure par des techniques d'identification afin que le comportement de la structure soit le plus proche possible de celle du procédé pour les excitations considérées.

Dans les deux cas, le modèle obtenu reste toujours imparfait à cause des incertitudes, les sources de ces incertitudes sont très variées, on distingue :

- Les incertitudes dues aux phénomènes non modélisables.
- Les incertitudes dues aux erreurs de mesures.

- Les incertitudes dues aux méthodes de calculs utilisées dans la phase d'identification.

Ces incertitudes sont involontaires et souvent inévitables.

Si pour des besoins d'analyse très fine, par simulation du comportement du procédé, un modèle précis est exigé, ceci n'est pas le cas lorsqu'on veut utiliser le modèle mathématique pour concevoir un contrôleur.

En effet un modèle trop précis conduit souvent à des contrôleurs complexes.

On définit le modèle de commande comme un modèle simplifié, les différentes simplifications (linéarisations, suppression des dynamiques rapides, suppression des retards...) constituent les incertitudes volontaires.

Pour des fins de commande, on définit donc un modèle nominale

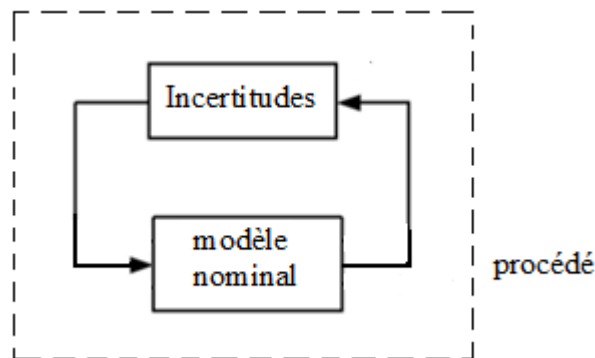


Figure I.2 Représentation du procédé

En plus de ces incertitudes de modélisations, on doit aussi tenir compte de l'effet des signaux incontrôlés qui viennent gêner le système de commande, ce sont les signaux de perturbations et les signaux bruits de mesures.

En tenant compte du fait qu'il est impossible de représenter parfaitement un procédé physique par un modèle, il est judicieux de se demander si le correcteur, calculé sur la base de ce même modèle va assurer les performances nominales (stabilité, précision, rapidité,...) et s'il est apte à garantir ces performances lorsqu'il est appliqué à un procédé réel en présence d'incertitudes, d'où la notion de robustesse :

### I.2.1 Définition de la robustesse :

La robustesse est la capacité d'un système à maintenir ses performances, malgré des changements dans les conditions d'utilisation ou la présence d'incertitudes liées à ses

paramètres ou à ses composants. Autrement dit c'est l'insensibilité ou la quasi-insensibilité de la commande aux variations paramétriques ou aux dynamiques non modélisées du procédé.

### **I.2.2 Types de robustesse :**

Le but de la synthèse robuste est le calcul d'un compensateur qui assure la stabilité du système en boucle fermée et garantit un niveau de performances donné pour le système nominal seul, ou pour l'ensemble des systèmes incertains. Cette distinction sur l'objectif de la compensation conduit à définir deux types de robustesses :

#### **I.2.2.1 Robustesse en stabilité :**

Un système est robuste en stabilité s'il demeure stable en présence d'incertitudes (structurées et non structurées) comme les erreurs de modélisation. A noter que la stabilité d'un système linéaire ne dépend pas des signaux exogènes, elle dépend des éléments de la structure du système.

#### **I.2.2.2 Robustesse en performances :**

Un système est robuste en performances si ses performances sont conservées en dépit des perturbations, telles que les incertitudes structurées et non structurées (les performances peuvent se mesurer en terme de temps de réponse du système, d'amortissements des modes, de découplage perturbation/sorties....)

Ces deux notions de robustesse seront étudiées dans les paragraphes suivants.

### **I.3 Asservissement multivariable :**

Considérons l'asservissement multivariable des systèmes LTI, dont le schéma bloc est illustré en figure(I.3).  $G(s)$  représente la matrice ( $p \times m$ ) fonction de transfert du procédé à asservir et  $K(s)$  la matrice ( $m \times p$ ) fonction de transfert du contrôleur. Avec

- $s$  : variable de Laplace.
- $p$  : le nombre d'entrées.
- $m$  : le nombre de sorties.

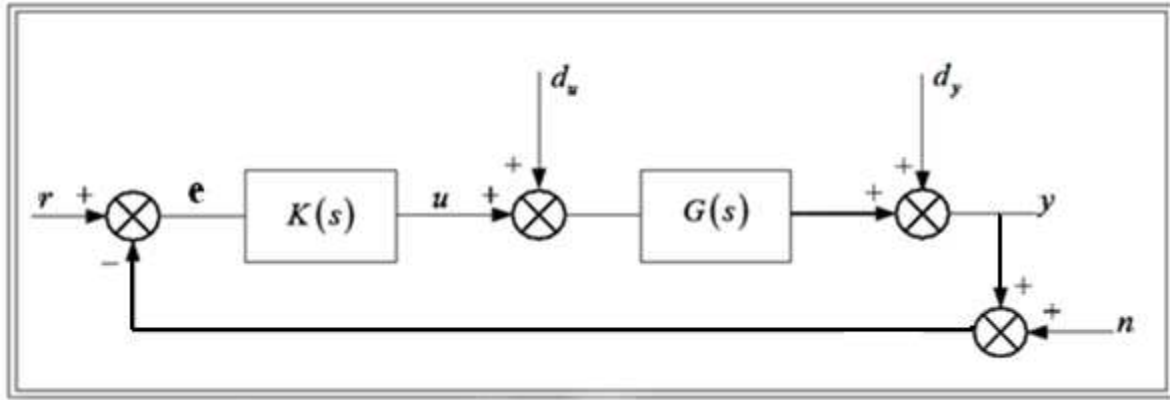


Figure I.3 Schéma représentatif d'une boucle de suivi de consigne

Les différents signaux présents sur la figure I.3 sont :

$r(s)$ : Consigne ou signal de référence.

$y(s)$ : Signal de sortie ou réponse.

$e(s)$ : Erreur de suivi.

$u(s)$ : Commande.

$d_u(s)$ : Perturbation de la commande.

$d_y(s)$ : Perturbation de la sortie.

$n(s)$ : Bruit de mesure.

### I.3.1 Équations et fonctions caractéristiques :

Les équations fondamentales régissant cet asservissement sont :

$$y = GK(I + GK)^{-1} (r - n) + (I + GK)^{-1}d_y + G(I + KG)^{-1} \quad (\text{I.1})$$

$$e = (I + GK)^{-1}(r - d_y - n)G(I + KG)^{-1}d_u \quad (\text{I.2})$$

$$u = K(I + GK)^{-1}(r - d_y - n)K - G(I + KG)^{-1}d_u \quad (\text{I.3})$$

Il existe de nombreuses variantes du schéma de la (Figure I.3). D'autres configurations équivalentes peuvent être jugées plus commodes ou explicites selon la nature et la fonction de l'asservissement, le schéma simplifié est donné par la figure (I.4).

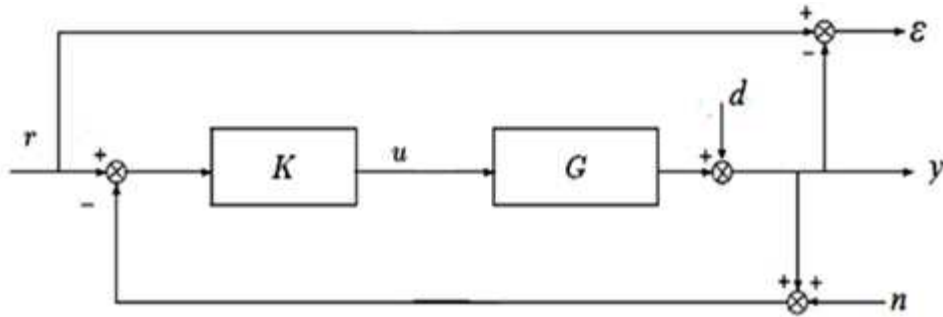


Figure I.4 Système en boucle fermée illustratif

Lorsqu'un tel système est asservi le cahier des charges peut contenir quatre classes de spécifications :

- **Suivi de trajectoires de référence (consignes):** il s'agit d'étudier l'influence du signal de référence  $r(s)$  sur le signal d'erreur  $\varepsilon(s)$ .
- **Rejet/atténuation de signaux de perturbation :** il s'agit d'étudier l'influence du signal de perturbation  $d(s)$  sur le signal d'erreur  $\varepsilon(s)$ .
- **Atténuation des bruits de mesure :** il s'agit d'étudier l'influence des signaux de bruit  $n(s)$  sur le signal de commande  $u(s)$  et sur le signal de sortie  $y(s)$  (en général, le système à commander  $G$  est un système passe-bas, ce qui fait qu'il est plus impératif d'étudier l'influence du bruit  $n(s)$  sur  $u(s)$  que sur  $y(s)$ ).
- **Commande modérée :** il s'agit d'étudier l'influence des signaux de référence  $r(s)$  et du signal de perturbation  $d(s)$  sur le signal de commande  $u(s)$

En se basant sur le schéma de la figure I.4 on met en valeur un certain nombre de fonctions de transfert caractéristiques de la boucle qui vont jouer un rôle important dans l'étude et la synthèse des asservissements robustes. Ces fonctions sont:

**I.3.2 Fonction de sensibilité en sortie :**

La sortie du système s'écrit :

$$y = d + GK(r - y - n) \quad (\text{I.4})$$

On développant cette égalité en obtient :

$$y = (I_p + GK)^{-1}GK r - (I_p + GK)^{-1}GK n + (I_p + GK)^{-1}d \quad (\text{I.5})$$

Soit  $\varepsilon = r - y$  l'erreur d'asservissement. Compte tenu de l'identité :

$$(I_p + GK)^{-1}GK + (I_p + GK)^{-1} = I_p \quad (\text{I.6})$$

On obtient :

$$\varepsilon = (I_p + GK)^{-1} r - (I_p + GK)^{-1} d + (I_p + GK)^{-1}GK n \quad (\text{I.7})$$

Enfin la commande  $u$  sera :

$$u = K(r - y - n) = K(\varepsilon - n) \quad (\text{I.8})$$

Compte tenu de l'identité (I.6), elle s'écrit :

$$u = K(I_p + GK)^{-1}(r - d - n) \quad (\text{I.9})$$

Des relations (I.5) et (I.6) on peut tirer les deux fonctions de transferts suivantes :

- **Matrice de sensibilité (en sortie) :**

$$S_y = (I_p + GK)^{-1} \quad (\text{I.10})$$

- **Matrice de sensibilité complémentaire :**

$$T_y = (I_p + GK)^{-1}GK \quad (\text{I.11})$$

L'identité (I.6) s'écrit en effet :

$$S_y + T_y = I_p \quad (\text{I.12})$$

Ces deux matrices caractérisent le fonctionnement du système bouclé. On voit en effet d'après les relations (I.5) et (I.7) que  $S_y$  représente :

- L'influence des perturbations sur la sortie et l'erreur.
- La matrice de transfert entre la référence (consigne) et l'erreur.

De même  $T_y$  représente :

- L'influence des bruits de mesure sur la sortie et l'erreur.
- La matrice de transfert entre la référence et la sortie.

### Remarque I.1:

- Le produit  $GK$  représente la matrice fonction de transfert en boucle ouverte du système ( $L(s)$ ).
- Pour les systèmes monovariables, la fonction de sensibilité s'écrit :

$$s_y = (1 + GK)^{-1} = \frac{1}{1 + GK} \quad (I.13)$$

$$T_y = GK(1 + GK)^{-1} = \frac{GK}{1 + GK} \quad (I.14)$$

### I.3.3 Notion de gain pour les systèmes multivariables :

En général, le gain d'un système multivariable est donné par la norme infinie.

#### I.3.3.1 Norme Euclidienne:

Soit le vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que :  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

$$\Rightarrow \|x\| = \sqrt{x^T x} = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2} \quad (I.15) \quad \longrightarrow \text{Norme euclidienne.}$$

#### I.3.3.2 Norme $H_2$ :

Soit  $S$  un système stationnaire linéaire de fonction de transfert  $G(s)$ . La norme  $H_2$  de cette fonction de transfert est définie comme suit :

$$\|G\|_2 = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(G^*(j\omega)G(j\omega)) d\omega \right]^{1/2} \quad (I.16)$$

Comme on utilise aussi la norme induite par la norme euclidienne tel que :

Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $x \in \mathbb{C}^n$ .

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (\text{I.17})$$

La norme  $H_2$  nous fournit le **gain** moyen du système.

### I.3.3.3 Norme $H_\infty$ :

On définit la norme  $H_\infty$  de la matrice  $G(s)$  comme suit :

$$\|G\|_\infty = \sup_\omega |G(j\omega)| \quad (\text{I.18})$$

La norme matricielle  $\|G(j\omega)\|$  est égale à la valeur singulière maximale  $\bar{\sigma}(G(j\omega))$  de la matrice  $G(j\omega)$ . D'où :

$$\|G\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}(j\omega) \quad (\text{I.19})$$

(La notion de valeurs singulières est détaillée en annexe A)

- **Interprétation:**

Cette norme est interprétée physiquement de la manière suivante. On sait que si l'on applique à l'entrée du système  $G$  un signal sinusoïdal vectoriel, composé de sinusoïdes de même pulsation mais d'amplitudes et de phases différentes, sa sortie est un signal sinusoïdal vectoriel de même pulsation, mais dont les composantes ont des amplitudes et des phases modifiées par  $G$ . La norme  $H_\infty$  est donc le facteur maximum dont le système amplifie toute entrée sinusoïdale vectorielle.

Dans le cas d'un signal d'entrée d'énergie bornée, par analogie au cas d'un système monovariabiles la norme  $H_\infty$  est donnée par:

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{u \neq 0} \frac{\|y(s)\|_2}{\|u(s)\|_2} \quad (\text{I.20})$$

C'est la norme induite par la norme de fonction de  $H_2$ . Elle mesure le gain maximal de la réponse fréquentielle  $G(j\omega)$ .

De la on peut définir le gain d'un système multivariabiles comme suit :

$$\underline{\sigma}(G(j\omega)) \leq \frac{\|y(s)\|_2}{\|u(s)\|_2} \leq \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (\text{I.21})$$

Ou  $\underline{\sigma}(G(j\omega))$  et  $\bar{\sigma}(G(j\omega))$  représentent respectivement, la valeur singulière minimale et maximale. Les valeurs singulières  $\sigma_i(G(j\omega))$  constituent donc une généralisation aux systèmes multivariables, de la notion de gain. Elles peuvent être représentées dans le plan de Bode. Pour un système multivariables, le “gain“ à une fréquence donnée dépend donc en fait du vecteur complexe E, et sera compris entre les valeurs singulières inférieures et supérieures.

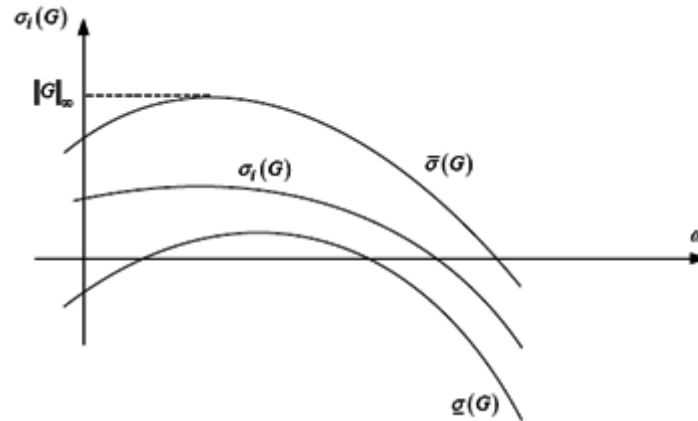


Figure I.3: valeurs singulières et normes  $H_\infty$  d'une matrice fonction de transfert.

**Remarque I.3 :**

Le calcul de la norme  $H_\infty$  est délicat. On peut tracer la fonction  $\omega \rightarrow \sigma_{\max}G(j\omega)$  et déterminer la valeur maximale. Cette méthode présente cependant le risque de manquer un pic étroit. Un algorithme plus sûr est basé sur la caractérisation suivante.

**Théorème I.1 :**

Soit  $(A, B, C, D)$  une réalisation de  $G(s)$  et soit  $\gamma$  un réel positif, tel que  $\gamma > \sigma(D)$ . On aura :  $\|G(s)\| < \gamma$  si et seulement si la matrice  $H_\gamma$  n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire, tel que  $H_\gamma$  est :

$$H_\gamma = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & B \\ C^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma I & D^{-1} \\ D^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B^T \end{pmatrix} \tag{I.22}$$

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} A - BR^{-1}D^TC & -\gamma BR^{-1}B^T \\ \gamma C^TS^{-1}C & -A^T + C^TDR^{-1}B^T \end{bmatrix} \tag{I.23}$$

Avec:

$$R = D^T D - \gamma^2 I \quad (I.24)$$

$$S = D D^T - \gamma^2 I \quad (I.25)$$

De plus si  $j\omega$  est une valeur de  $H_\gamma$ , pour  $\gamma > \sigma_{\max}(D)$ , alors :  $\sigma_{\max}(G(j\omega)) = \gamma$ , ie :

Le gain  $\gamma$  est obtenu à la fréquence  $\omega$ .

La matrice  $H$  est d'une structure particulière dite : 'Hamiltonienne'. Lorsque  $D=0$ , elle s'écrit simplement :

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-1} B B^T \\ -\gamma^{-1} C^T C & -A^T \end{bmatrix} \quad (I.26)$$

Cette caractérisation suggère un simple algorithme de dichotomie pour calculer  $\|G\|_\infty$ , On part d'un encadrement grossier  $[\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$ , de cette norme et on l'améliore itérativement de la façon suivante :

- On calcule le spectre de  $H_\gamma$  pour  $\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_{\min} + \gamma_{\max})$ .
- S'il n'y a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire,  $\gamma$  est trop grand et l'on obtient comme encadrement  $[\gamma_{\min}, \gamma]$
- Si non,  $\gamma$  est trop petit et on obtient le nouvel encadrement  $[\gamma, \gamma_{\max}]$ .

### Exemple I.1:

Considérons le système du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ax(t) + e(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad \text{Tel que } a > 0$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{s+a}$$

On obtient successivement :

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-1} B B^T \\ -\gamma^{-1} C^T C & -A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & \gamma^{-1} \\ -\gamma^{-1} & +a \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - H_\gamma| = (\lambda + a)(\lambda - a) + \gamma^{-2} = \lambda^2 + (\gamma^{-2} - a^2)$$

Et donc  $H_\gamma$  n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire si et seulement si :

$$\gamma^{-2} < a^2 \Leftrightarrow \gamma > \frac{1}{a} \Leftrightarrow \|G(s)\|_\infty = \frac{1}{a}$$

Ce résultat qui peut être aisément confirmé par le tracé du diagramme de Bode de la fonction de transfert  $G(s)$ , dont le module (a) a effectivement pour maximum  $\frac{1}{a}$  en  $\omega=0$ .

Pour  $a = 1$  le diagramme de Bode est représenté par la figure suivante :



Figure I.4 Module de G(S)

### I.3.3.4 Propriétés de la norme $H_\infty$ :

#### Propriété 1:

$$\|F(s)G(s)\|_\infty \leq \|F(s)\|_\infty \|G(s)\|_\infty \tag{I.27}$$

#### Propriété 2

$$\left\| \begin{bmatrix} F(s) \\ G(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty \geq \sup (\|F(s)\|_\infty, \|G(s)\|_\infty) \tag{I.28}$$

#### Propriété 3:

$$\|F(s) \quad G(s)\|_\infty \geq \sup (\|F(s)\|_\infty, \|G(s)\|_\infty) \tag{I.29}$$

### I.3.3.5 Discussion :

On déduit de ce paragraphe que la minimisation d'une norme  $H_\infty$  correspond à la minimisation du plus grand pic de la valeur singulière, tandis que celle d'une norme  $H_2$  minimise la somme des carrés de toutes les valeurs singulières pour toutes les fréquences

possibles. C'est en partie la raison pour laquelle la norme  $H_\infty$  intervient en commande robuste, outre le fait qu'elle est un outil pratique pour la représentation des incertitudes du modèle et qu'elle satisfait la propriété multiplicative. Cette dernière propriété, en revanche, n'est pas vérifiée par la norme  $H_2$ .

#### I.4 Stabilité nominale :

La stabilité est une exigence critique dans la conception d'un asservissement. Une perte de stabilité entraîne au mieux un comportement oscillatoire et donc une incapacité à réguler ou poursuivre; au pire la génération de signaux de grande énergie qui vont endommager ou détruire le système.

Il convient de distinguer la stabilité BIBO (*bounded input/bounded output*) de la stabilité interne.

##### I.4.1 Stabilité BIBO (externe) :

Un système est dit stable de manière externe BIBO (vis-à-vis de la relation entrée /sortie) si pour toute entrée bornée ( $|u(t)| \leq Mx < \infty$ ) alors la sortie reste bornée

$$(|y(t)| \leq My < \infty)$$

Un système LTI est BIBO stable si et seulement si sa fonction de transfert  $G(s)$  ne possède :

- Ni de pôles à l'origine
- Ni de pôles à partie réelle positive
- Les pôles imaginaires purs sont simples

##### I.4.2 Stabilité interne :

Un système est stable de façon interne si la matrice  $A$  de sa représentation d'état est stable, *i.e.* : si toutes ses valeurs propres sont à partie réelle négative. Ceci assure que pour  $u=0$ , l'état  $x(t)$  décroît vers 0 indépendamment de la condition initiale.

En termes de fonctions de transfert caractéristiques, la stabilité externe se traduit par la stabilité de  $T$ . Tandis que la stabilité interne requiert la stabilité des quatre fonctions de transfert  $S$ ,  $T$ ,  $KS$  et  $G(I_m + KG)^{-1}$

La stabilité interne garantit la stabilité BIBO, mais la réciproque est fautive.

### Exemple I.2 :

Soit la représentation d'état d'un système monovariante suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = (1 \quad 1)x \end{cases}$$

Ce système n'est pas stable de façon interne à cause du mode +1 de  $A$ . Pourtant, la fonction de transfert associée est  $G(s) = \frac{1}{s+1}$  qui est BIBO-stable.

### I.4.3 Marge de module :

Il s'agit d'une mesure de la distance entre le point critique  $(-1, 0)$  et le tracé de  $L(s)$ . La marge de module  $\Delta M$  est définie comme étant le rayon du cercle centre  $(-1, 0)$  jusqu'à ce qu'il soit tangent à  $L(s)$ .

Pour une pulsation  $\omega$ , la distance entre le point  $(-1, 0)$  et le point défini par  $L(j\omega)$  est donné par  $|1 + L(j\omega)|$ .

$$\Delta M = \min |1 + L(j\omega)| = \frac{1}{\max \frac{1}{|1+L(j\omega)|}} \quad (I.30)$$

$$\Delta M = \frac{1}{\|S\|_{\infty}} \quad (I.31)$$

Où  $S$  est la fonction de sensibilité.

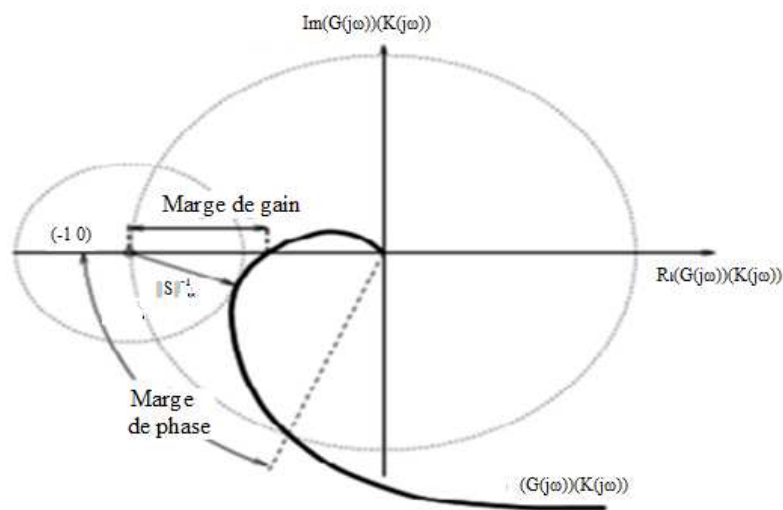


Figure I.5 Tracé de Nyquist de  $L(j\omega)$

**Remarque I.3 :**

*La minimisation de  $\|S\|_\infty$  entrainera l'augmentation de la marge de module.*

**I.4.4 Limite des marges classiques dans le cas MIMO :**

Toutes les spécifications de robustesse classiques examinées jusqu'ici sont plutôt qualitatives. Elles deviennent caduques si le système n'est pas stable en boucle ouverte, et de manière plus évidente pour les systèmes MIMO. La robustesse en stabilité est évaluée de façon plus fine en considérant plus en détail les effets des erreurs de modélisation du procédé sur le lieu de Nyquist.

Plusieurs méthodes sont développées pour l'étude de la stabilité dans le cas multivariables tels que : le théorème du petit gain et Nyquist multivariables, ce dernier est peu utilisé du fait que son calcul est complexe.

**I.4.5 Théorème du petit gain [3]:**

Etant donné un asservissement à retour unitaire stable en boucle ouverte ( $L(s)$  est stable) alors le système en boucle fermée est stable de manière interne si :

$$\|L\|_\infty = \max \bar{\sigma}(L(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega \quad (I.32)$$

Où  $\bar{\sigma}$  est la valeur singulière maximale de  $L(j\omega)$  calculée à la pulsation  $\omega$

**Exemple I.3**

$A = [-1 \ 0 \ -2; \ 0 \ -1 \ 1; \ 0 \ 0 \ -4]; B = [0 \ 0; \ 1 \ 0; \ 0 \ 1]; C = [1 \ 0 \ 1; \ 0 \ 0 \ 1];$

$D = [0 \ 0; \ 0 \ 0]; \text{sys} = \text{ss}(A, B, C, D);$

$\text{hinf} = \text{norm}(\text{sys}, \text{inf})$

$\text{hinf} = 0.3536 < 1$

Le système est stable

**I.5 Performances nominales [4]:**

Un asservissement est performant s'il réagit rapidement, rejette les perturbations et suit avec précision la consigne. Compte tenu de l'interprétation des matrices  $S$  et  $T$ , il est clair que le correcteur  $K$  à synthétiser doit chercher à satisfaire maintes exigences :

- **Atténuation des perturbations en sortie :**

Atténuer les perturbations en sortie revient à minimiser la fonction de sensibilité  $S_y$ , ceci revient à choisir sa norme  $H_\infty$  la plus faible possible. Soit :

$$\bar{\sigma}(S_y) = \bar{\sigma}\left((I_p + GK)^{-1}\right) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I_p + GK)} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(GK)} \quad (I.33)$$

Donc minimiser  $\bar{\sigma}(S_y)$  revient à maximiser  $\underline{\sigma}(GK)$ .

- **Rejet des bruits de mesure :**

Pour réduire l'effet des bruits de mesure, il faut choisir la relation **I.34** la plus faible possible.

$$\bar{\sigma}(T_y) = \bar{\sigma}\left((I_p + (GK)^{-1})^{-1}\right) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I_p + (GK)^{-1})} \quad (I.34)$$

Or :

$$\bar{\sigma}(T_y) = \bar{\sigma}\left((I_p + (GK)^{-1})^{-1}\right) \cong \frac{1}{\underline{\sigma}((GK)^{-1})} = \bar{\sigma}(GK) \quad (I.35)$$

Donc minimiser  $\bar{\sigma}(T_y)$  revient à minimiser  $\bar{\sigma}(GK)$ .

- **Poursuite du signal de référence :**

La poursuite idéale de la référence  $r$  par la sortie  $y$  entraîne  $I - S_y \cong I$ , soit  $\bar{\sigma}(S_y)$  minimale. Cette condition rejoint donc celle du rejet des perturbations en sortie.

- **Limitation de l'énergie de commande :**

Pour éviter la fatigue des actionneurs, le bruit de mesure ne doit pas provoquer des agitations excessives de la commande. Les commandes seront d'autant plus réduites que la norme de la matrice  $KS$  l'est. Or, en pratique,  $T = GKS$  et comme  $G$  est fixé, réduire  $KS$  sera équivalent à réduire  $T$ . On se retrouve alors dans la même condition que celle des rejets de bruits de mesure.

## I.6 Modélisation et représentation d'incertitudes [1]:

Une représentation générale des incertitudes est donnée par la figure (I.6), où  $P(s)$  et  $\Delta(s)$  désignent respectivement la matrice de transfert du système nominal et la matrice de transfert de la perturbation.

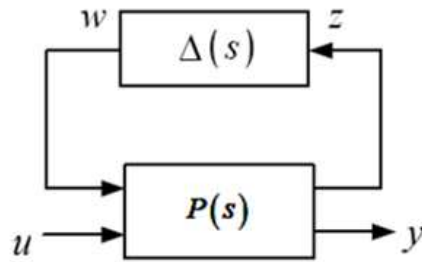


Figure I.6 Représentation standard d'incertitudes.

- $w$  : représente les entrées exogènes du système (entrées à suivre et perturbations à rejeter).
- $z$  : représente les signaux à commander (erreurs entre consignes et sorties du système par exemple)
- $y$  : représente les sorties accessibles à la mesure du système.
- $u$  : représente les signaux de commande du processus.

### I.6.1 Incertitudes non structurées ou incertitudes dynamique :

Ces incertitudes rassemblent les dynamiques négligées dans le modèle, et les bruits des capteurs. On ne dispose en général que d'une borne supérieure sur l'amplitude de ces dynamiques. On doit donc assumer et se prémunir contre le pire des cas dans la limite de cette borne.

Dans ce qui suit  $G(s)$ ,  $Gp(s)$  et  $\Delta(s)$  désignent respectivement la matrice de transfert du système nominal, matrice de transfert du système perturbé et la matrice de transfert du bloc des incertitudes.

- **Incertainces additives** (voir figure I.7) :

Elles représentent, en général, des incertitudes absolues par rapport au modèle nominal. Cette représentation est souvent utilisée pour modéliser des dynamiques ou des non linéarités négligées.

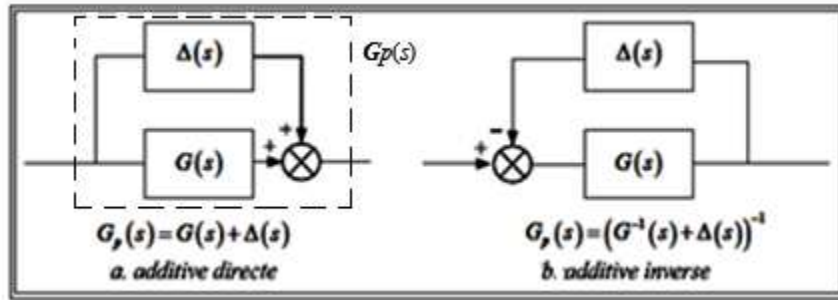


Figure I.7 Représentation additive des incertitudes non structurées

- **Incertitudes multiplicatives (direct et inverse)** (Voir figure I.8 et I.9) :

Elles permettent de définir les écarts en termes de variation par rapport au modèle nominal. Elles peuvent être introduites sous forme multiplicative en entrée ou en sortie. Elles peuvent être prises en considération sous forme directe ou inverse. Les formes multiplicatives en entrée sont généralement utilisées pour prendre en compte les erreurs de modélisation des actionneurs ou du convertisseur alimentant la machine. Les incertitudes multiplicatives en sortie modélisent généralement les défauts des capteurs de mesure.

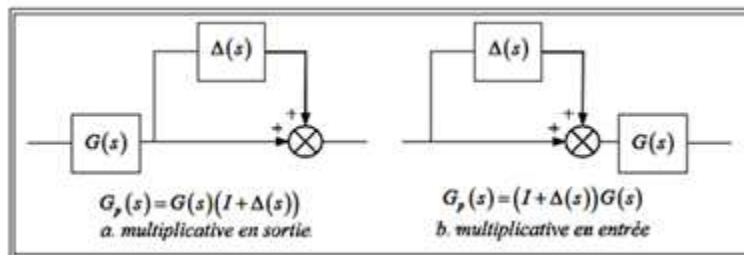


Figure I.8 Représentation multiplicative directe des incertitudes non structurées

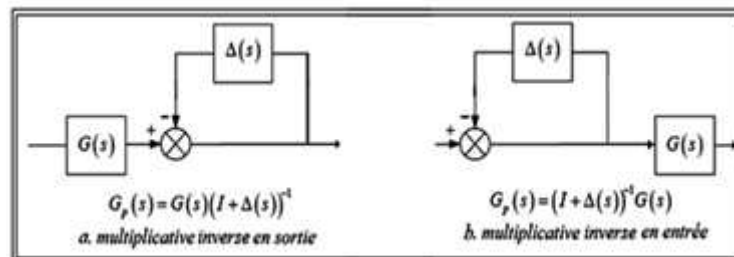


Figure I.9 représentation multiplicative inverse des incertitudes non structurées

**I.6.2 Incertitudes structurées ou paramétriques:**

Ces incertitudes sont liées aux variations ou aux erreurs d'estimation sur certains paramètres physiques du système, ou à des incertitudes de nature dynamique, mais entrant dans la boucle en différents points. L'incertitude paramétrique intervient principalement lorsque le modèle est obtenu à partir des équations de la physique.

Contrairement aux incertitudes non structurées, confinées toutes dans un seul bloc où la seule information disponible est sa norme, les incertitudes structurées permettent, comme le montrent les figures (I.10 et I.11), de tenir compte de chaque type d'incertitude, paramétrique ou autre, aux différents points de notre système.

Dans le cas des incertitudes paramétriques, les blocs  $\Delta_i$  peuvent être mis sous la forme :  $diag(\delta_1 I_1, \dots, \delta_r I_r)$ .

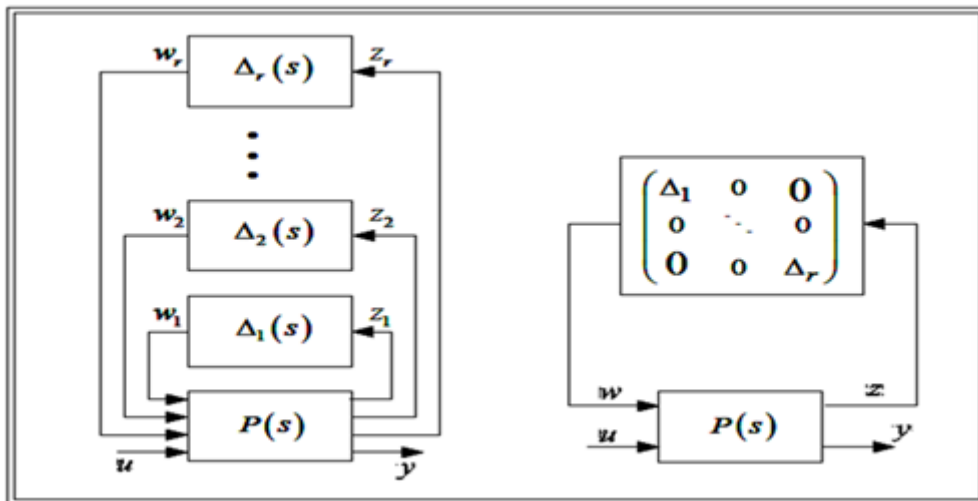


Figure I.10 Représentation des incertitudes  
Structurées par bloc

Figure I.11 Représentation des  
incertitudes structurées

**I.7 Stabilité robuste [4]:**

La stabilité est dite robuste si, en plus de la nominale, la stabilité de tous les systèmes atteignables par les perturbations est garantie.

Sous l'hypothèse de stabilité de  $\Delta(s)$  et  $P(s)$  de la Figure I.7, nous allons donner les conditions de stabilité robuste pour des incertitudes de type additives ou multiplicatives :

- Incertitudes additives :

$$P(s) = -K(I_p + GK)^{-1} = -KS_y \quad (I.36)$$

Le théorème de petit gain nous donne :

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \bar{\sigma}(KS_y) < 1 \quad (I.37)$$

Comme  $\Delta(s)$  est stable alors :

$$\|\Delta\|_\infty < \delta, \text{ soit: } \|KS_y\|_\infty < \frac{1}{\delta} \quad (I.38)$$

- Incertitudes multiplicatives :

	En sortie	En entrée
$P(s) =$	$-GK(I_p + GK)^{-1} = -KT_y$	$-KG(I_m + KG)^{-1} = -KT_u$
Condition de stabilité :	$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \bar{\sigma}(T_y) < 1$	$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \bar{\sigma}(T_u) < 1$
$\ \Delta\ _\infty < \delta$	$\Rightarrow \ T_y\ _\infty < \frac{1}{\delta}$	$\Rightarrow \ T_u\ _\infty < \frac{1}{\delta}$

Tableau I.1 Conditions de stabilité pour les incertitudes multiplicatives

### I.8 Performances robustes [4]:

Un système bouclé satisfait le critère de robustesse en performances si les conditions de performances nominales sont vérifiées pour toute une classe de modèles de procédés caractérisés par des incertitudes structurées ou non.

En notant  $T_{x \rightarrow y}$  la fonction de transfert du signal d'entrée  $x$  vers le signal de sortie  $y$ , il est possible (et conseillé) d'étudier chacune des spécifications indépendamment les unes des autres.

Ceci est pleinement justifié par le *Théorème de Superposition* qui est valable ici car les systèmes que nous étudions sont tous linéaires stationnaires. Ce théorème permet d'affirmer que l'influence de plusieurs signaux d'entrée non nuls sur les signaux de sortie est égale à la somme des influences de chacun des signaux d'entrée pris individuellement.

Chaque spécification peut donc être étudiée en examinant les fonctions de transfert reliant les signaux d'entrée et de sortie concernés comme le montre le tableau I.2:

Spécifications	fonctions de transfert associées	notations usuelles
suivi de trajectoires de référence	$T_{r \rightarrow \epsilon}(p)$	$S(p)$
rejet/atténuation de perturbation	$T_{b \rightarrow \epsilon}(p)$	$G(p)S(p)$
atténuation des bruits sur commande	$T_{n \rightarrow u}(p)$	$-K(p)S(p)$
atténuation des bruits sur sortie	$T_{n \rightarrow \epsilon}(p)$	$T(p)$
commande modérée	$T_{r \rightarrow u}(p), T_{b \rightarrow u}(p)$ et $T_{n \rightarrow u}(p)$	$K(p)S(p)$ et $T(p)$

Tableau I.2 fonctions des différentes spécifications

### I.9 Spécification de performances en domaine fréquentiel :

Il s'agit de mettre en forme (modeler) la réponse en fréquence en boucle ouverte pour satisfaire aux exigences du cahier des charges. Sachant que la perturbation de charge agit en basse fréquence, les bruits de mesures agissent en haute fréquence, il est possible par la spécification d'une fréquence de croisement (fréquence au gain unité) et d'une marge de phase d'imposer les performances temporelles usuelles que sont le temps de réponse, et le coefficient d'amortissement. Voir figure I.12

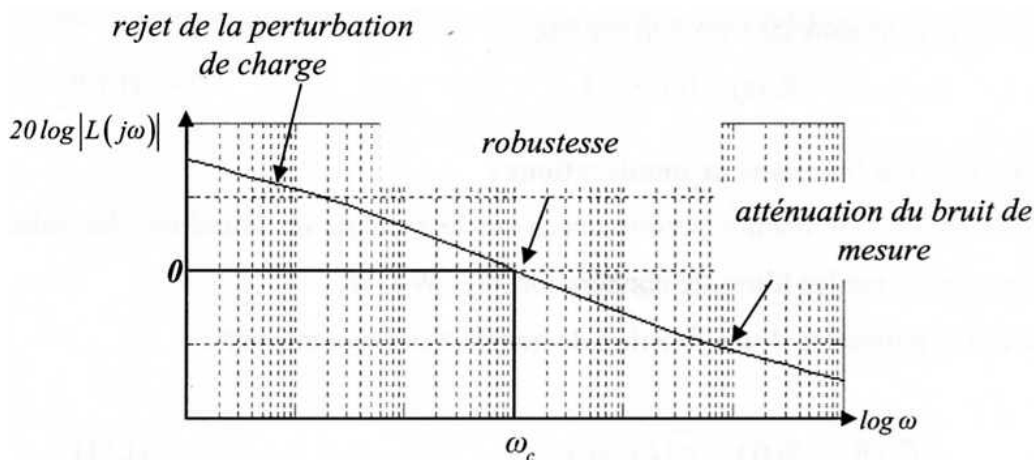


Figure I.12 Les différentes spécifications sur la réponse fréquentielle en boucle ouverte

### I.10 Objectifs de performance :

Compte tenu de l'interprétation que nous avons donnée des matrices  $S$  et  $T$ , il est clair que lorsqu'on effectue la synthèse du correcteur  $K$ , on doit chercher à :

1. Rendre  $S$  le plus faible possible afin de réduire l'influence des perturbations et d'assurer un bon suivi de la référence.
2. Rendre  $KS$  le plus faible possible afin de réduire l'effort de commande.

3. Rendre  $T$  le plus faible possible afin de réduire l'influence des bruits de mesure.

Il est insuffisant d'optimiser l'asservissement par rapport au modèle nominal, Il faut aussi se prémunir contre l'incertitude de modélisation et les aléas externes.

Bien que ces facteurs soient par essence mal connus, on dispose en général d'informations sur leur amplitude maximale ou leur nature statistique. C'est à partir de cette connaissance sommaire qu'on va tenter de "robustifier" l'asservissement.

En se référant à nouveau à la Figure (I.3), il y a essentiellement:

- les perturbations de la commande  $d_u$  et en sortie  $d_y$  qui peuvent provenir respectivement d'erreurs de discrétisation ou de quantification de la commande ou d'actions parasites sur les actionneurs.
- les perturbations en sortie  $d_y$  qui correspondent à des actions extérieures Secondaires ou imprévisibles sur le système; par exemple, le vent pour un avion, un changement de pression atmosphérique pour un réacteur chimique, etc.
- Les bruits de mesure  $n$  au niveau des capteurs qui corrompent l'estimation de la valeur courante de la sortie  $y$ .

### **Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons exposé les principes de la robustesse des systèmes asservis, et les différents points essentiels qu'on devait prendre en compte pour assurer la robustesse et la stabilité de notre système.

La modélisation des incertitudes structurée et non structurée nous a permis de définir et de comprendre toutes les perturbations auxquels le système pouvait être soumis, et ainsi trouver la meilleure solution pour les minimiser, et ceci à travers l'utilisation des propriétés des valeurs singulières sur les fonctions de sensibilité qui nous permettent de connaître l'influence de chaque signal sur notre système.

Pour mieux comprendre la stabilité des asservissements et son importance, on a mis en évidence les quatre (4) propriétés fondamentales intervenant dans l'analyse d'un système bouclé :

- Stabilité nominale
- Robustesse en stabilité

- Performances nominale
- Performances robuste

La synthèse du correcteur par les techniques  $H_\infty$  permet de tenir compte de ces propriétés fondamentales.

## II.1 Introduction :

La synthèse  $H_\infty$  propose un cadre général pour le calcul d'un correcteur, en manipulant des concepts fréquentiels. Elle permet de prendre en compte des objectifs de stabilité, de marges de stabilité et de modelage de différents transferts, voire certains objectifs de robustesse, en retour dynamique de sortie.

Ce chapitre expose tout d'abord la notion de sensibilité mixte, le problème standard et la méthode de résolution par équations de Riccati. Puis la mise en œuvre par l'introduction de pondérations fréquentielles. Le chapitre s'achève par un exemple illustratif.

## II.2 Sensibilité mixte [1]:

L'étude menée au premier chapitre, sur la stabilité et les performances robustes, nous a donnée les trois (3) conditions suivantes :

$$\|W_1 S_y\|_\infty < 1 \quad \|W_2 K S_y\|_\infty < 1 \quad \|W_3 T_y\|_\infty < 1 \quad (\text{II.1})$$

Qui peuvent être regroupées sous une seule condition de la forme :

$$\left\| \begin{array}{c} W_1 S_y \\ W_2 K S_y \\ W_3 T_y \end{array} \right\|_\infty < 1 \quad (\text{II.2})$$

Où  $W_1, W_2, W_3$  sont des fonctions de pondérations que nous allons voir un peu plus en avant.

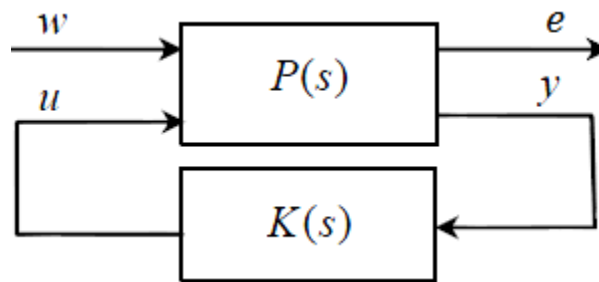
En générale, les expressions  $K S_y$  et  $T_y$  jouent des rôles semblables. La présence de ces deux fonctions dans le critère est donc superflue. On résoudra par la suite l'un des deux problèmes suivants :

$$\left\| \begin{array}{c} W_1 S_y \\ W_3 T_y \end{array} \right\|_\infty < 1 \quad \text{Ou} \quad \left\| \begin{array}{c} W_1 S_y \\ W_2 K S_y \end{array} \right\|_\infty < 1 \quad (\text{II.3})$$

Le second problème s'avère en pratique plus judicieux. Ces deux problèmes sont désignés sous le nom de problème de sensibilité mixte.

### II.3 Forme standard :

La synthèse  $H_{\infty}$  utilise la notion de problème standard, qui est représenté sur la figure II.1, la matrice de transfert  $P(s)$  modélise les interactions dynamiques entre deux ensembles d'entrées et deux ensembles de sorties : le vecteur  $w$  représente des entrées extérieures (entrées exogènes : références, perturbations, bruits), le vecteur  $u$  représente les commandes, les signaux  $e$  sont choisis pour caractériser le bon fonctionnement de l'asservissement (sorties régulées et grandeurs à surveiller), et  $y$  représente les mesures disponibles pour élaborer la commande.



**Figure II.1** Forme standard

$P(s)$  représente le modèle.

$K(s)$  représente le correcteur.

En effectuant une partition de la matrice  $P(s)$  de façon cohérente avec les dimensions de  $w, u, e, y$  sur la figure II.1 :

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{ew}(s) & P_{eu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

La matrice fonction de transfert  $P(s)$  décrit les interconnexions entre  $w, u, e, y$  :

$$\begin{pmatrix} e(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = P(s) \begin{pmatrix} w(s) \\ u(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{ew}(s) & P_{eu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(s) \\ u(s) \end{pmatrix} \quad (\text{II.5})$$

Lorsque ce système est rebouclé sur la commande  $u = K(s)y$ . On calcul aisément la matrice de transfert entre  $w$  et  $e$  du système bouclé, qui est appelé *Transformation Fractionnaire Linéaire* (LFT) inférieure :

$$e(s) = F_l(P(s), K(s))w(s)$$

$$F_l(P(s), K(s)) = P_{ew}(s) + P_{eu}(s)K(s) \left( I - P_{yu}(s)K(s) \right)^{-1} P_{yw}(s) \quad (\text{II.6})$$

**II.4 Problème  $H_\infty$  standard :**

Le problème  $H_\infty$  standard consiste à faire la synthèse d'un correcteur  $K(s)$ , étant donné la valeur  $\gamma > 0$  et  $P(s)$  tel que :

- Le système en boucle fermée  $F_l(P(s), K(s))$  est stable.
- $\|F_l(P(s), K(s))\|_\infty < \gamma$  (II.7)

Les correcteurs assurant la plus petite valeur de  $\gamma$  possible seront dits "optimaux".

Différentes méthodes peuvent être envisagées pour résoudre le problème  $H_\infty$  standard. Nous présentons ci-dessous l'approche par équations de Riccati, dans laquelle la valeur optimale de  $\gamma$  est recherchée par dichotomie.

Ces méthodes utilisent une représentation d'état de la matrice d'interconnexion  $P(s)$ , que nous écrivons sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ e(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_e & D_{ew} & D_{eu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

**II.5 Résolution du problème  $H_\infty$  standard par équations de Riccati [3]:**

Cette méthode aussi connue sous le nom d'algorithme de **Glover-Doyle**, est apparue à la fin des années 80, elle reste aujourd'hui la méthode de résolution la plus utilisée.

Soient  $P = P^T$ ,  $Q = Q^T$  des matrices de mêmes dimensions que  $A$ . On note :

$$X = Ric \begin{pmatrix} A & -P \\ -Q & -A^T \end{pmatrix} \quad (\text{II.9})$$

Quand elle existe, la solution symétrique de l'équation de Riccati :

$$XA + A^T X - XPX + Q = 0 \quad (\text{II.10})$$

Telle que toutes les valeurs propres de  $A - PX$  ont une partie réelle strictement négative.

Pour résoudre le problème  $H_\infty$ , on suppose satisfaites les hypothèses suivantes :

1.  $(A, B_u)$  est stabilisable et  $(C_y, A)$  est détectable : elle est nécessaire pour obtenir la stabilité du système.
2.  $\text{rang}(D_{eu}) = n_u$  et  $\text{rang}(D_{yw}) = n_y$  : elle est suffisante pour que la matrice de transfert du correcteur soit propre.
3.  $\forall \omega \in \mathbb{R} \text{ rang} \begin{pmatrix} A - J\omega I_n & B_u \\ C_e & D_{eu} \end{pmatrix} = n + n_u$  : entraîne que  $P_{eu}(s)$  n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire.
4.  $\forall \omega \in \mathbb{R} \text{ rang} \begin{pmatrix} A - J\omega I_n & B_w \\ C_y & D_{yw} \end{pmatrix} = n + n_y$  : entraîne que  $P_{yw}(s)$  n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire.

En appliquant une série de transformations au système de l'équation (II.5), on se ramène au cas où les conditions suivantes sont vérifiées :

$$D_{ew} = 0 \quad D_{eu}^T (C_e \quad D_{eu}) = (0 \quad I_{n_u}) \quad (\text{II.11})$$

$$D_{yu} = 0 \quad \begin{pmatrix} B_w \\ D_{yw} \end{pmatrix} D_{yw}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n_y} \end{pmatrix} \quad (\text{II.12})$$

Le théorème suivant permet de tester la faisabilité du problème standard :

### **Théorème II.1 [3]:**

*Sous les hypothèses (1 à 4) et les conditions (II.8),(II.9) le problème  $H_\infty$  standard a une solution si et seulement si les Cinq (5) conditions suivantes sont remplies :*

- i. La matrice  $H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_w B_w^T - B_u B_u^T \\ -C_e^T C_e & -A^T \end{bmatrix}$  n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire.
- ii. Il existe une matrice  $X_\infty = \text{Ric}(H_\infty) \geq 0$
- iii. La matrice  $J_\infty = \begin{pmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_e^T C_e - C_y^T C_y \\ -B_w B_w^T & -A \end{pmatrix}$  n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire
- iv. Il existe une matrice  $Y_\infty = \text{Ric}(J_\infty) \geq 0$
- v.  $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$  ou  $\rho(\cdot)$  désigne le module de la plus grande valeur propre.

Enfin la solution du problème standard est donnée par le théorème suivant :

**Théorème II.2 [3]:**

Sous les conditions du théorème **II.1**, les correcteurs rationnels  $K(s)$  stabilisant le système et satisfaisant  $\|F_l(P(s), K(s))\|_\infty < \gamma$  sont décrits par la LFT :

$$K(s) = F_l(K_a(s), \Phi(s)) \tag{II.13}$$

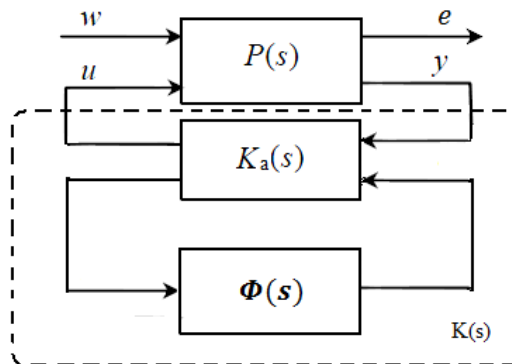
Où  $\Phi(s) \in RH_\infty$  est une matrice de transfert de dimension  $n_u \times n_y$ , arbitraire vérifiant  $\|\Phi(s)\|_\infty < \gamma$  et  $K_a(s)$  est décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a(t) \\ u(t) \\ u_a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & Z_\infty Y_\infty C_y^T & Z_\infty B_u \\ -B_u^T X_\infty & 0 & I_{n_u} \\ -C_y & I_{n_y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(t) \\ y(t) \\ y_a(t) \end{bmatrix} \tag{II.14}$$

$$\hat{A}_\infty = A + \gamma^{-2} B_w B_w^T X_\infty - B_u B_u^T X_\infty - Z_\infty Y_\infty C_y^T C_y \tag{II.15}$$

$$Z_\infty = (I_n - \gamma^{-2} \gamma_\infty X_\infty)^{-1} \tag{II.16}$$

Le schéma principal du problème est donné par la figure **II.2**



**Figure II.2** Schéma synoptique de la paramétrisation de la solution du problème standard

En particulier, le correcteur correspondant à  $\Phi(s) \equiv 0$ , appelé correcteur central, admet la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & Z_\infty Y_\infty C_y^T \\ -B_u^T X_\infty & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \tag{II.17}$$

La mise en œuvre de cette solution consiste donc à utiliser tout d'abord les résultats du théorème (II.1) pour approcher la valeur optimale de  $\gamma$  par dichotomie (procédure appelée

couramment (" $\gamma$  – itération"), on calcule ensuite le correcteur central en appliquant le théorème II.2.

### II.6 Solution du problème de sensibilité mixte $S/KS$ [4]:

Le problème de sensibilité mixte  $S/KS$  est le plus étudié pour formuler un correcteur stabilisant le système. Pour simplifier, nous reprenons le système donné par la figure II.1. Donc pour un  $\gamma$  donné nous devons calculer un correcteur stabilisant le système tel que :

$$\left\| \frac{S_y}{KS_y} \right\|_\infty < \gamma$$

La configuration standard du système est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} I_p & -G \\ 0 & I_m \\ I_p & -G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & -B \\ [C] & [I_p] & [0] \\ C & I_p & 0 \end{bmatrix} \quad (II.18)$$

Il est évident, d'après le théorème 1, que  $\gamma$  doit être supérieur à 1, car la norme 2 de la matrice  $D_{11}$  du système  $P(s)$  est égale à 1. Dans ces conditions, les équations algébriques de Riccati s'écrivent :

$$A^T X + XA - XBB^T X + (1 - \gamma^{-2})^{-1} C^T C = 0 \quad (II.19)$$

$$AY + YA^T - YC^T C Y = 0 \quad (II.20)$$

Le correcteur central sera donné par :

$$K_0 = \left[ \frac{A - BB^T X - (1 - \gamma^{-2})^{-1} ZY C^T C}{B^T X} \mid \frac{ZY C^T}{0} \right] \quad (II.21)$$

$$\text{Avec} \quad Z = (I_n - \gamma^{-2} YX)^{-1} \quad (II.22)$$

Dans le cas général, le correcteur sera donné par :  $K(S) = F_l(M, \Phi)$

Où  $M(S)$  possède la réalisation suivante :

$$M = \left[ \frac{A - BB^T X - (1 - \gamma^{-2})^{-1} ZY C^T C}{B^T X} \mid \frac{ZY C^T}{0} \quad \frac{-ZB}{I_m} \right] \quad (II.23)$$

Dans le cas où  $D_{22} \neq 0$ , ce terme pourra être facilement isolé comme le montre la figure (II.3).

Au départ nous calculons un correcteur en supposant  $D_{22} = 0$ , puis nous déduisons le correcteur général d'après :

$$\hat{K}(s) = K(s)(I + D_{22}K(s))^{-1} \quad (II.24)$$

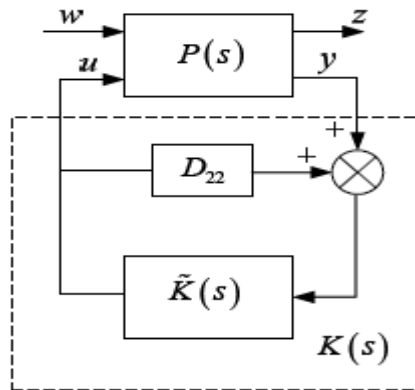


Figure II.3 Cas où  $D_{22} \neq 0$

**Exemple II.1:**

Considérons le système  $G(s) = \frac{1}{s}$ , de la figure II.4 dans lequel on considère un vecteur d'entrée  $w = (b \ v)^T$  composé de deux perturbations et un vecteur de signaux à Controller  $e = (z \ u)^T$  comprenant la sortie à asservir et la commande.

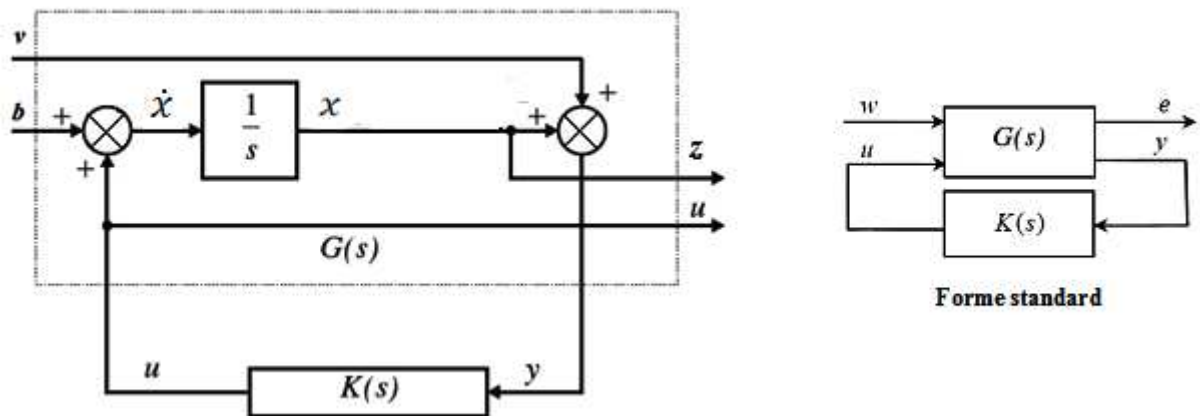


Figure II.4 Schéma fonctionnel et sa forme standard

La représentation de la matrice  $G(s)$  de problème standard correspondant s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (0)x + (1 \ 0) \begin{pmatrix} b \\ v \end{pmatrix} + (1)u \\ \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (1)x + (0 \ 1) \begin{pmatrix} b \\ v \end{pmatrix} + 0 u \end{array} \right. \quad (II.25)$$

Vérification des hypothèses (1 à 4) :

1.  $\text{rang}(B_u) = \text{rang}(1) = 1 \Rightarrow$  Le couple  $(A \ B_u)$  est commandable.  
 $\text{rang}(C_y) = \text{rang}(1) = 1 \Rightarrow$  Le couple  $(C_y \ A)$  est observable.
2.  $\text{rang}(D_{eu}) = \text{rang}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 = n_u$  et  $\text{rang}(D_{yw}) = \text{rang}(0 \ 1) = 1 = n_y$
3.  $\forall \omega \in \mathbb{R} \ \text{rang} \begin{pmatrix} A - j\omega I_n & B_u \\ C_e & D_{eu} \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} -j\omega & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 = n + n_u$
4.  $\forall \omega \in \mathbb{R} \ \text{rang} \begin{pmatrix} A - j\omega I_n & B_w \\ C_y & D_{yw} \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} -j\omega & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 = n + n_y$

Par ailleurs, ce problème vérifie directement les conditions de normalisation :

$$D_{ew} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D_{yu} = 0$$

$$D_{eu}^T (C_e \ D_{eu}) = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \ 1) = (0 \ I_{n_u})$$

$$\begin{pmatrix} B_w \\ D_{yw} \end{pmatrix} D_{yw}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n_y} \end{pmatrix}$$

Testons les conditions du théorème **II.1**. On a pour les conditions **i** et **ii** :

$$H_\infty = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{-2} - 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J_\infty$$

$$\det(\lambda I - J_\infty) = \det(\lambda I - H_\infty) = \lambda^2 + (\gamma^{-2} - 1)$$

Ces deux conditions sont vérifiées pour  $\gamma > 1$ .

Les équations de Riccati des conditions **ii** et **iv** s'écrivent :

$$X_\infty(0) + (0)X_\infty + X_\infty(\gamma^{-2} - 1)X_\infty + 1 = 0$$

$$Y(0) + (0)Y_\infty + Y_\infty(\gamma^{-2} - 1)Y_\infty + 1 = 0$$

Ces 2 conditions sont vérifiées pour  $\gamma > 1$ , et fournissent :

$$X_\infty = Y_\infty = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}} > 0 \quad \text{et} \quad X_\infty Y_\infty = \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}$$

La condition  $\nu$  est vérifiée pour  $\gamma > \sqrt{2}$ . Cette dernière valeur constitue donc la valeur minimale.

Les résultats du théorème II.2 permettent de calculer le correcteur central pour  $\gamma > \sqrt{2}$ . Ainsi la représentation d'état s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = -\frac{2(\gamma^2-1)\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma(\gamma^2-2)}x_c(t) + \frac{\gamma\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma^2-2}y(t) \\ u(t) = -\frac{\gamma\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma^2-2}x_c(t) \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

Qui correspond à la fonction de transfert :

$$K(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = -\frac{\gamma^2}{(\gamma^2-2)s + 2\frac{\gamma^2-1}{\gamma}\sqrt{\gamma^2-1}} \quad (\text{II.27})$$

On voit que lorsque  $\gamma$  tend vers sa valeur optimale  $\sqrt{2}$ , le pôle du correcteur  $K(s)$  tend vers  $-\infty$ .

Lorsque  $\gamma = \sqrt{2}$ , le terme en  $S$  du dénominateur disparaît, et l'ordre du système passe de 1 à 0.

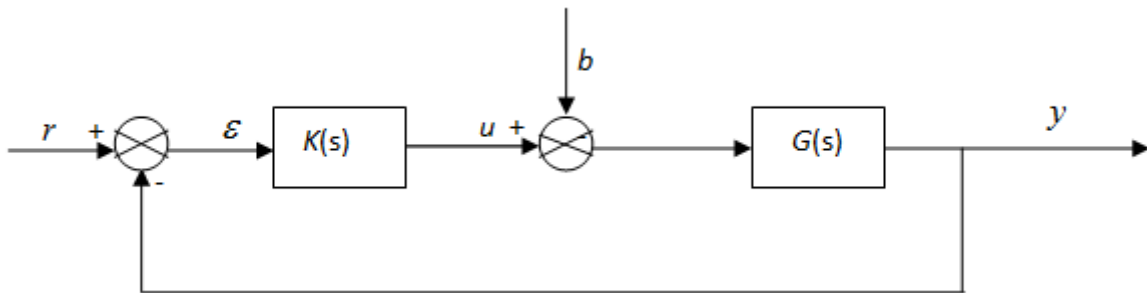
La valeur minimale de  $\gamma$  notée  $\gamma_0$  peut-être approchée par dichotomie, on suit le processus suivant :

- Choix d'un niveau de tolérance  $\eta$  sur le calcul de la valeur  $\gamma_0$  et de deux valeurs  $\gamma_{inf}$  et  $\gamma_{sup}$  telle que pour  $\gamma = \gamma_{sup}$ , le problème  $H_\infty$  standard admet une solution et que pour  $\gamma = \gamma_{inf}$ , le problème  $H_\infty$  standard n'admet pas de solution.
- On teste si pour  $\gamma = \frac{\gamma_{inf} + \gamma_{sup}}{2}$ , le problème  $H_\infty$  standard admet une solution, si oui alors  $\gamma_{sup} = \gamma$  sinon  $\gamma_{inf} = \gamma$ .
- Si  $\gamma_{sup} - \gamma_{inf} > \eta$  alors retourner à l'étape 2 sinon continuer.
- Calcul de la représentation d'état de la loi de commande permettant d'obtenir une norme  $H_\infty$  proche de  $\gamma_{sup}$

**II.7 Mise en œuvre [3]:**

**II.7.1 Mise en forme pour la synthèse :**

Un exemple de mise en œuvre, qui peut être considéré comme l'un des problèmes de base de la synthèse  $H_\infty$ , prenons comme point de départ le schéma de la figure II.5, où  $G(s)$  est un modèle du système à asservir, et  $K(s)$  le correcteur à déterminer, pour asservir la sortie  $z$  sur la référence  $r$ , et le signal  $b$  est une perturbation.



**Figure II.5** structure de commande en boucle fermée.

Calculons la matrice de transfert entre les signaux d'entrée  $r$  et  $b$  d'une part, et l'erreur d'asservissement  $\varepsilon$  et la commande  $u$  d'autre part :

$$y(s) = G(s)(b(s) + u(s)) = G(s)(b(s) + K(s)(r(s) - y(s))) \quad (\text{II.28})$$

$$\varepsilon(s) = r(s) - G(s)(b(s) + K(s)(r(s) - y(s))) = r(s) - G(s)(b(s) + K(s)\varepsilon(s)) \quad (\text{II.29})$$

On a donc :

$$\varepsilon(s) = (I_n + G(s)K(s))^{-1}(r(s) - G(s)b(s)) = S(s)(r(s) - G(s)b(s)) \quad (\text{II.30})$$

Avec  $u(s) = K(s)\varepsilon(s)$  et  $S = (I_n + GK)^{-1}$  et la fonction de sensibilité (définie au chapitre I).

$$\begin{pmatrix} \varepsilon(s) \\ u(s) \end{pmatrix} = P(s) \begin{pmatrix} r(s) \\ b(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(s) & S(s)G(s) \\ K(s)S(s) & K(s)S(s)G(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(s) \\ b(s) \end{pmatrix} \quad (\text{II.31})$$

Et donc, en considérant le cadre standard introduit ci-dessus, un problème intéressant consiste à chercher le nombre  $\gamma > 0$  et un correcteur  $K(s)$  stabilisant le système bouclé, et assurant :

$$\|P\|_\infty = \left\| \begin{matrix} S & SG \\ KS & KSG \end{matrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (\text{II.32})$$

Dans ce problème, on tient compte en effet de deux signaux d'entrée, appliquée à deux endroits différents de l'asservissement, et on surveille l'évolution de l'erreur mais aussi de la commande : on veut en effet que l'erreur reste faible mais au prix de commandes raisonnables. Le problème ci-dessus se présente donc comme la recherche d'un compromis entre l'objectif recherché et les moyens nécessaires.

Toutefois cette formulation s'avère en pratique trop rigide car elle ne laisse aucun élément de choix à l'utilisateur. Pour contourner ce problème on va adopter une démarche qui consiste en l'introduction des fonctions de pondérations dans la mise en œuvre du système bouclé.

### II.7.2 Objectifs de synthèse :

On peut tout d'abord déduire le comportement asymptotique des fonctions de transfert composant  $P(s)$  en faisant des hypothèses sur le gain de la boucle ouverte.

Ainsi :

- Si le gain de la boucle ouverte est grand soit  $|G(j\omega)K(j\omega)| \gg 1$  :

$$P(j\omega) \approx \begin{pmatrix} (G(j\omega)K(j\omega))^{-1} & (K(j\omega))^{-1} \\ (G(j\omega))^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.33})$$

On voit donc que  $K(s)$  agit sur les transferts de  $\mathbf{r}$  vers  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et de  $\mathbf{b}$  vers  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , tandis qu'il est sans effet sur les transferts de  $\mathbf{r}$  vers  $\mathbf{u}$  et de  $\mathbf{b}$  vers  $\mathbf{u}$ .

- Si le gain de la boucle ouverte est faible soit  $|G(j\omega)K(j\omega)| \ll 1$  :

$$P(j\omega) \approx \begin{pmatrix} 1 & (G(j\omega)) \\ (K(j\omega)) & K(j\omega)G(j\omega) \end{pmatrix} \quad (\text{II.34})$$

On voit que  $K(s)$  agit sur les transferts de  $\mathbf{r}$  vers  $\mathbf{u}$  et de  $\mathbf{b}$  vers  $\mathbf{u}$ , tandis qu'il est sans effet sur les transferts de  $\mathbf{r}$  vers  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et de  $\mathbf{b}$  vers  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

On cherche en général à synthétiser un correcteur qui atténue les hautes fréquences, afin d'éviter d'exciter inutilement la commande en dehors de la bande passante de l'asservissement.

Par ailleurs, pour garantir la robustesse de la stabilité vis-à-vis des dynamiques négligées, on peut imposer un gabarit d'atténuation à  $K(s)S(s)G(s)$  en haute fréquence, on évite ainsi de solliciter des dynamiques mal modélisées

**II.7.3 Mise en œuvre pas l'introduction de fonctions de pondérations :**

En reprenant le schéma bloc de la figure II.5, on peut introduire des pondérations sur les différents signaux qui prendront la forme de filtres permettant, suivant le signal auquel elles s'appliquent de privilégier un domaine de fréquence particulier.

On considère le schéma de la figure II.6 dans lequel l'erreur  $\varepsilon$  est pondérée par le filtre  $w_1(s)$ , la commande  $u$  par  $w_2(s)$ , et l'entrée de perturbation  $b$  est la sortie d'un filtre  $w_3(s)$ . On obtient à présent, en considérant  $r$  et  $d$  comme entrée et  $e_1$  et  $e_2$  comme signaux à surveiller :

$$\begin{pmatrix} e_1(s) \\ e(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1(s)S(s) & w_1(s)S(s)G(s)w_3(s) \\ w_2(s)K(s)S(s) & w_2(s)K(s)S(s)G(s)w_3(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(s) \\ d(s) \end{pmatrix} \tag{II.35}$$

Le problème  $H_\infty$  standard qui en découle est le suivant : déterminer un nombre  $\gamma > 0$ , et le correcteur  $K(s)$  stabilisant le système bouclé et assurant :

$$\left\| \begin{pmatrix} w_1S & w_1SGw_3 \\ w_2KS & w_2KSGw_3 \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma \tag{II.36}$$

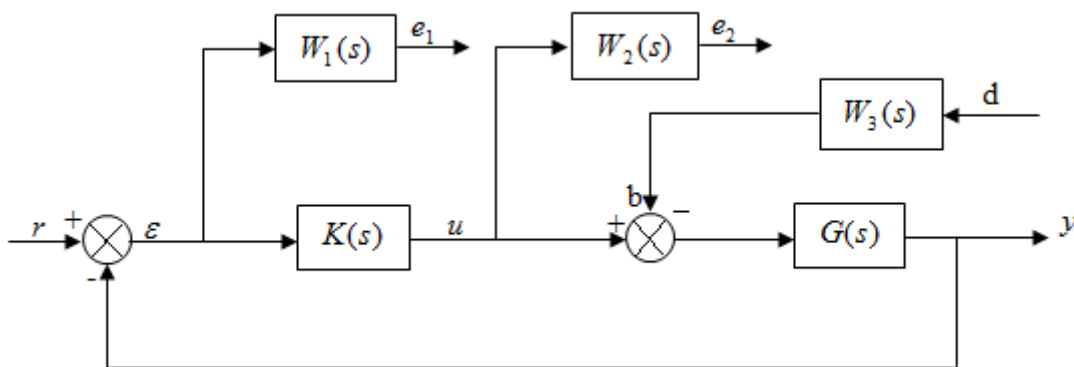


Figure II.6 Mise en place des fonctions de pondérations

L'avantage de considérer ce problème plutôt que le problème (II.29) qui est plus simple, est que les filtres  $w_1(s)$ ,  $w_2(s)$ ,  $w_3(s)$ , permettent de modéliser les différents transferts  $S$ ,  $KS$ ,  $SG$  et  $KSG$  : les propriétés de la norme  $H_\infty$  assurent en effet que la condition (II.32) est vérifiée, alors les quatre (4) conditions suivantes le sont aussi :

$$1. \|w_1 S\|_{\infty} < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} |S(j\omega)| < \frac{\gamma}{|w_1(j\omega)|} \quad (\text{II.37.a})$$

$$2. \|w_2 KS\|_{\infty} < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} |K(j\omega)S(j\omega)| < \frac{\gamma}{|w_2(j\omega)|} \quad (\text{II.37.b})$$

$$3. \|w_1 w_3 SG\|_{\infty} < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} |S(j\omega)G(j\omega)| < \frac{\gamma}{|w_1(j\omega)w_3(j\omega)|} \quad (\text{II.37.c})$$

$$4. \|w_2 w_3 KSG\|_{\infty} < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} |K(j\omega)S(j\omega)G(j\omega)| < \frac{\gamma}{|w_2(j\omega)w_3(j\omega)|} \quad (\text{II.37.d})$$

On voit que la réponse fréquentielle de chacune des fonctions  $S$ ,  $KS$ ,  $SG$  et  $KSG$  est contrainte par un gabarit qui dépend des filtres choisis.

La figure II.7 montre l'allure typique que l'on choisit pour les différents gabarits.

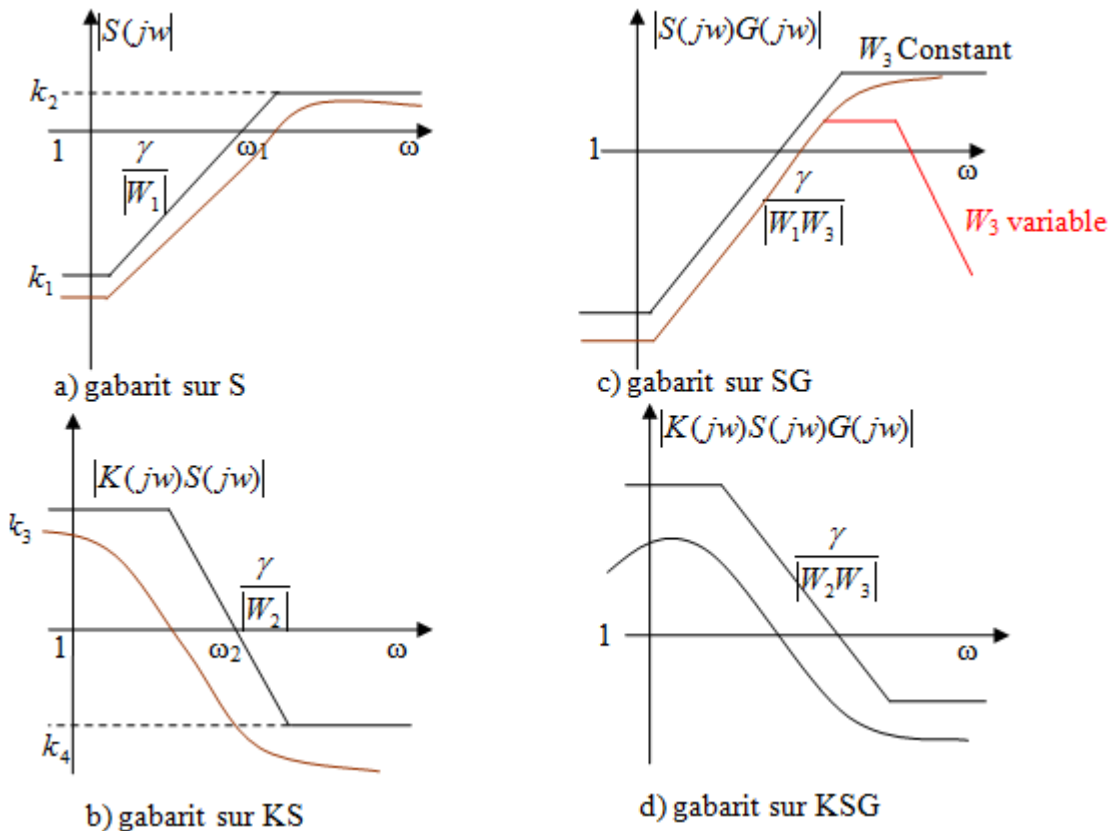


Figure II.7 Diagrammes de Bode des gabarits fréquentiels

- a. Le gabarit sur  $S(s)$  est fixé à une valeur  $k_1$  faible en basses fréquences, pour assurer les objectifs de précision. La pulsation  $\omega_1$  pour laquelle le gabarit coupe l'axe  $0_{dB}$  peut être interprétée comme la bande passante minimale souhaitée pour l'asservissement. La valeur  $k_2$  du gabarit, en hautes fréquences limite le maximum de la réponse fréquentielle

de  $S(s)$ , ce qui impose une marge de module au moins égale à  $1/k_2$ . Enfin aucune contrainte n'est imposée à  $S(s)$  en hautes fréquences.

- b. La valeur  $k_3$  du gabarit sur  $KS(s)$  ne lui impose aucune contrainte en basses fréquences, tandis que la valeur  $k_4$  impose une contrainte en hautes fréquences, au-delà de la bande passante choisie pour l'asservissement, plus ou moins sévère suivant la valeur choisie pour  $\omega_2$ .
- c. Le gabarit sur  $SG(s)$  dépend des deux filtres  $W_1(s)$  et  $W_3(s)$ . Dans certain cas, il suffit de prendre  $W_3(s)$  constant, ce qui permet de régler l'atténuation en basses fréquences. Mais  $W_3(s)$  permet également de modifier le comportement de  $SG$  en moyennes fréquences, ce qui s'avère utile pour obtenir un comportement transitoire correct en réponse à une perturbation.
- d. Enfin le gabarit sur  $KSG(s)$ , si les filtres  $W_1(s)$ ,  $W_2(s)$  et  $W_3(s)$  ont été choisis d'après les considérations précédentes, sont évidemment déterminés. Mais dans certains cas, on peut préférer ajuster par  $W_3(s)$  le gabarit sur  $KSG(s)$  plutôt que le gabarit sur  $SG(s)$ , afin par exemple de satisfaire un gabarit d'atténuation assurant la robustesse de la stabilité aux dynamiques négligées.

#### II.7.4 Mise sous forme standard pondéré :

Une fois choisis les filtres  $w_1(s)$ ,  $w_2(s)$ ,  $w_3(s)$ , il reste à mettre le problème ainsi défini sous forme standard, c'est-à-dire à identifier les schémas-blocs des figures (II.1) et (II.6) Identifions tout d'abord les différents signaux :

- \_ Entrées :  $w$  (de la figure II.1) =  $\begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix}$  (de la figure II.6)
- \_ Signaux surveillés :  $e$  (figure II.1) =  $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$  (de la figure II.6)
- \_ Entrées du correcteur :  $y$  (figure II.1) =  $\varepsilon$  (figure II.6)
- \_ Sortie du correcteur :  $u$  sur les deux figures.

La représentation (II.3) utilisée pour résoudre le problème  $H_\infty$  est obtenue en considérant une représentation d'état pour chaque fonction de transfert  $G(s)$ ,  $w_1(s)$ ,  $w_2(s)$ ,  $w_3(s)$  :

$$G(s) : (\text{entrée } u - b, \text{ sortie } z) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + B(u - b) \\ z = Cx \end{cases} \quad (\text{II.38.a})$$

$$w_1(s), (\text{entrée } \varepsilon, \text{ sortie } e_1) : \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1(r - z) \\ e_1 = C_1x_1 + D_1(r - z) \end{cases} \quad (\text{II.38.b})$$

$$w_2(s), (\text{entrée } u, \text{ sortie } e_2) : \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u \\ e_2 = C_2x_2 + D_2u \end{cases} \quad (\text{II.38.c})$$

$$w_3(s), (\text{entrée } d, \text{ sortie } b) : \begin{cases} \dot{x}_3 = A_3x_3 + B_3d \\ b = C_3x_3 + D_3d \end{cases} \quad (\text{II.38.d})$$

Soit finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -BC_3 \\ -B_1C & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -BD_3 \\ B_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ B_2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -D_1C & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \end{bmatrix} u \\ \varepsilon = [-C \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + [I \quad 0] \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix} + [0]u \end{array} \right. \quad (\text{II.39})$$

L'application de l'algorithme de Glover-Doyle à ce système augmenté, doit particulièrement vérifier les quatre hypothèses de l'étape (1) de l'algorithme.

- Si  $(A, B, C, D)$  est minimal, la partie non commandable du problème est constituée par le filtre  $W_3(s)$ , et la partie non observable est constituée par les filtres  $W_1(s)$  et  $W_2(s)$ .
- L'hypothèse 1 impose donc de choisir les pondérations  $W_1(s)$ ,  $W_2(s)$  et  $W_3(s)$  stables, et l'hypothèse 2 impose de choisir  $W_2(s)$  avec un gain non nul à l'infini.
- On peut enfin noter que l'ordre du correcteur  $K(s)$  est égal à la somme des ordres de  $G(s)$  et des filtres  $W_1(s)$ ,  $W_2(s)$  et  $W_3(s)$ .

L'ensemble des problèmes de commande auxquels répond cette synthèse est le suivant:

- assurer une erreur de poursuite par rapport à un signal d'entrée

- assurer un rejet des perturbations
- limiter l'amplitude des signaux de commande par rapport à la référence et au bruit de mesure.

**Remarque II.1 :**

Sous MATLAB, la recherche d'un correcteur  $H_\infty$  standard admet une solution pour le plus petit  $\gamma$  compris entre  $\gamma_{inf}$  et  $\gamma_{sup}$  est assurée par la fonction **hinfsys** de la mu analysis and synthesis toolbox.

**Exemple II.2 :**

Pour illustrer le choix des fonctions de pondération  $W_1(s)$ ,  $W_2(s)$  et  $W_3(s)$ , considérons l'exemple simple de la figure II.4 où le système à commander est représenté par:

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad (\text{II.40})$$

On veut concevoir un correcteur  $H_\infty$  standard permettant d'assurer les objectifs suivants :

- La fréquence de coupure doit être égale à 1rd/s.
- Suivi de consigne avec une erreur statique inférieure à 1%.
- Temps de réponse de l'ordre de 3s.
- Marge de module au moins égale à 0.5 ( $G_\infty \leq 0.5$ )
- Gain entre la référence et la commande inférieur à 20 dB pour tout  $\omega$ , ( $|KS(j\omega)| < 20dB$ ).
- Erreur statique due à la perturbation doit être inférieure à 1%.

**- Choix de la pondération  $W_1(s)$** 

Les trois premières spécifications du cahier des charges concernent la fonction de sensibilité  $S(s)$ . Elles permettent de fixer respectivement son gain statique ( $G_0 = 0.01$ ), sa pulsation à 0dB ( $\omega_c \approx 1$ ), et son gain maximal ( $G_\infty = 1/0.5$ )

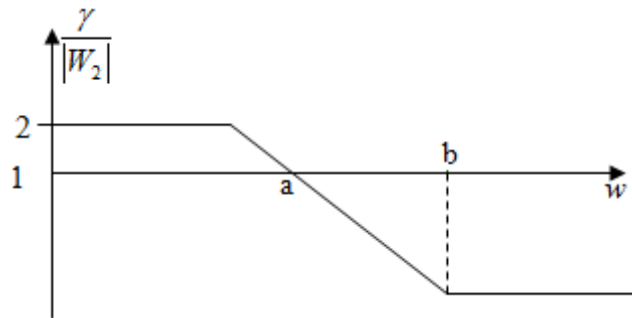
$$W_I(s) = \frac{50s + 86.6}{100s + 0.866} \quad (\text{II.41})$$

### - Choix de la pondération $W_2(s)$

Dans un premier temps,  $W_2(s)$  est choisie constante, afin d'imposer au transfert  $KS(s)$  un gabarit constant égal à 2, soit

$$W_2(s) = 1/2 = 0.5 \quad (\text{II.42})$$

Pour atténuer le gain du correcteur en hautes fréquences, on impose un gabarit à  $K(s)S(s)$  puisque en hautes fréquences  $K(s)S(s) \approx K(s)$ . La figure (II.6) représente l'allure de ce gabarit.



**Fig. II.8** Gabarit imposé à  $KS$

En prenant  $a = 200$  et  $b = 5000$  (suffisamment grand), on aura

$$W_2(s) = \left( \frac{1 + \frac{s}{5000}}{2 - \frac{s}{200}} \right)^{-1} = 0.5 \cdot \frac{1 + \frac{s}{200}}{1 + \frac{s}{5000}} \quad (\text{II.43})$$

### - Choix de la pondération $W_3(s)$

Dans un premier temps  $W_3(s)$  est choisie faible (on ignore la perturbation  $b$ ):  $W_3(s) = 10^{-2}$ . On augmente ensuite progressivement cette valeur, jusqu'à ce qu'un effet significatif apparaisse sur la valeur de  $\gamma$ . On obtient  $\gamma = 1.1235$  pour  $W_3(s) = 0.9$ .

Les fonctions de pondération ainsi choisies doivent normalement contraindre le calcul du régulateur qui permet au système en boucle fermée de respecter le cahier des charges imposé. Pour déterminer le régulateur permettant d'atteindre ces objectifs, on met le système augmenté par les fonctions de pondération  $W_1(s)$ ,  $W_2(s)$  et  $W_3(s)$  sous la forme standard, donnée par les équations II.31 (a, b, c, d) à II.32. La synthèse  $H_{\infty}$  utilisant l'algorithme de Glover-Doyle, pour la valeur  $\gamma = 1.1235$  permet de déterminer le régulateur  $K(s)$  dont le modèle transfert est donné par :

$$K(s) = \frac{2.2305(s + 5000)(s + 1.014)}{(s + 199.7)(s + 15.84)(s + 0.008661)} \quad (\text{II.44})$$

Pour montrer que le régulateur ainsi calculé atteint les objectifs du cahier des charges nous avons effectué des simulations du système en boucle fermée où :

- La référence  $r(t)$  est un échelon d'amplitude 10.
- Le signal de perturbation  $b(t)$  est un échelon d'amplitude 1.5 appliqué en régime permanent de la sortie à l'instant  $t = 2s$ .

Afin de vérifier chacune des caractéristiques du cahier des charges nous présentons également le diagramme de Bode des fonctions de transfert  $S(s)$ ,  $K(s)S(s)$ ,  $SG(s)$  et  $KSG(s)$  caractérisant la boucle fermée ainsi que leurs gabarits respectifs. La réponse indicielle de la sortie est également donnée pour vérifier les caractéristiques dynamiques et statiques du cahier des charges. Tous ces résultats sont illustrés par les figures (II.9), (II.10).

- La figure (II.9.a) représente le diagramme de Bode du module de la fonction de sensibilité

$S(s)$  et celui du gabarit  $\gamma/|W_1|$ . On constate que le diagramme de  $S(s)$  est en dessous de son gabarit, et que le gain en basse fréquence de  $S(s)$  est très faible, ceci garanti une bonne précision de la sortie par rapport à l'entrée de référence.

- La figure (II.9.b) représente le diagramme de Bode du module du transfert  $KS(s) = u(s)/r(s)$  et celui du gabarit  $\gamma/|W_2|$ . Dans ce cas aussi le diagramme de  $KS(s)$  est en dessous de son gabarit, le gain de  $KS(s)$  est faible en haute fréquences, ceci garanti une diminution de l'énergie (amplitude) de commande en réponse à une consigne.

- La figure (II.9.c) représente le diagramme de Bode du module du transfert  $SG(s) = \varepsilon(s)/b(s)$  et celui du gabarit  $\gamma/|W_1W_3|$ . Le diagramme de Bode de  $SG(s)$  est également en dessous du gabarit, cela garanti le rejet de la perturbation.

- La figure (II.9.d) montre que le diagramme de Bode du module  $KSG(s)$  est en dessous du son gabarit  $\gamma/|W_2W_3|$ , cela justifier le bon choix des fonctions de pondération  $W_2(s)$  et  $W_3(s)$ .

-La figure (II.10) enfin représente la réponse indicielle de la sortie (trait continu) soumise à un échelon de référence de 10 et un échelon de perturbation d'amplitude 1.5 appliqué à l'instant  $t=2$  s. La valeur finale de la sortie est égal à  $y(\infty) = 10$ . Ceci montre que la précision imposé est respectée  $\varepsilon_{01} = 0.002$  (le temps du régime transitoire est d'environ  $t_r = 0.625s$ ). Ces valeurs montrent que les objectifs du cahier des charges sont atteints. De plus, lorsqu'on applique la perturbation, celle-ci est rejetée au bout de  $t= 2s$  et la sortie revient à sa valeur de référence avec une précision  $\varepsilon_{01} = 0.002$

**Condition de sensibilité mixte :**

$$\left\| \frac{W_1 S}{W_2 K S} \right\|_{\infty} = 0.5638 < 1.1235$$

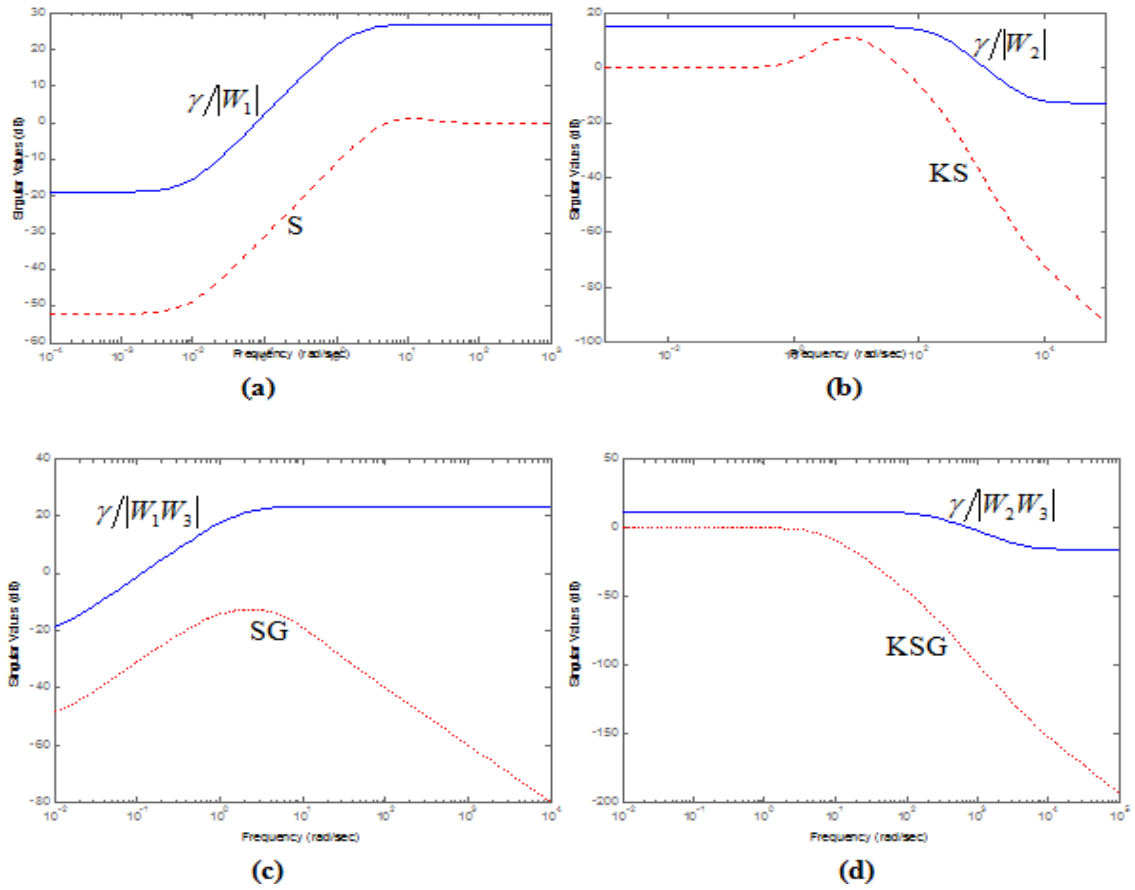


Fig. II.9 Diagramme de Bode des transferts  $S$ ,  $KS$ ,  $SG$ ,  $KSG$  et leurs gabarits respectif.

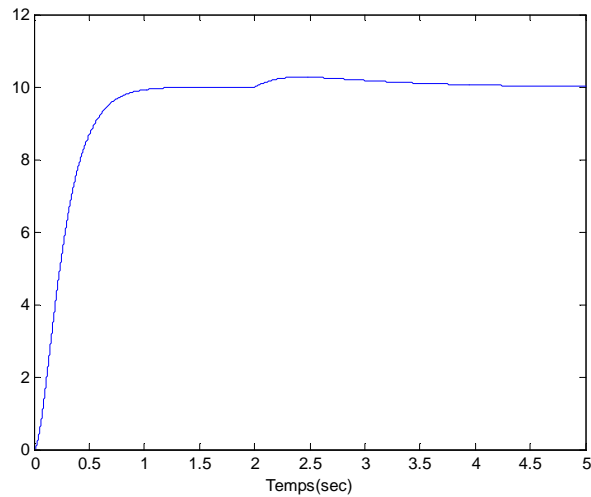


Fig. II.10 Réponse indicielle de la sortie du système en boucle fermée.

**II.8 Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons introduit en premier lieu le problème de sensibilité mixte et la forme standard pour aborder le problème  $H_\infty$  standard.

Afin résoudre le problème des incertitudes, le critère  $H_\infty$  a été mis en œuvre. Nous avons explicité une formulation basée sur le choix des fonctions de pondérations pour la recherche d'un correcteur robuste.

La résolution de ce problème se fait par plusieurs méthodes, on a opté pour la résolution par les équations de Riccati (qui est la méthode la plus fiable numériquement), cette méthode se résout par un algorithme très fiable qui consiste à synthétiser un correcteur  $K(s)$  assurant la stabilité asymptotique du système en boucle fermée et minimisant la norme  $H_\infty$  de la fonction de transfert entre les entrées et les signaux d'erreurs.

### III.1 Introduction :

Dans ce chapitre nous utiliserons les différents théorèmes vus dans les chapitres précédents ainsi que la méthode de calcul du correcteur  $H_\infty$  et les appliquer pour commander un pendule inversé, puis grâce au logiciel de programmation MATLAB, simuler et interpréter les différents résultats obtenus.

Un pendule inversé est un pendule simple monté sur un chariot. Le mouvement du chariot doit maintenir le pendule dans sa position d'équilibre stable (masse dirigée vers le haut).

### III.2 Description de la plate-forme :

Cette plate forme est constituée d'un chariot mobile sur un rail d'un mètre (1m). Les deux pendules sont fixés au chariot en son centre et peuvent tourner librement autour du chariot. Le mobile (chariot et pendule) est entraîné par un moteur à courant continu piloté par le bloc de commande. Pour éviter une détérioration du matériel, deux capteurs de fin de courses permettent d'arrêter le mobile et de repérer les butées gauche et droite du rail. Les signaux électriques sont transmis du mobile au bloc de commande pour être récupéré par la PCI 1711 et visualisé sur l'ordinateur.

Les encodeurs présents sur la maquette permettent de récupérer la position du chariot ainsi que l'angle du pendule. Ces deux variables sont initialisées au chargement du programme dans la carte PCI 1711, c'est pourquoi on a dû placer le mobile à l'endroit où l'on veut prendre la référence de position, par exemple au centre du rail. Les signaux de la plate forme sont récupérés sur le bloc commande et connectés à la carte PCI 1711. Les différents signaux de la plate forme (les butées gauche/droite, la position du mobile, l'angle du pendule) sont récupérés par les entrées numériques de la carte puis ils sont envoyés au bloc de commande pour commander le mobile.

Le schéma en figure III.1 représente un schéma du matériel utilisé.

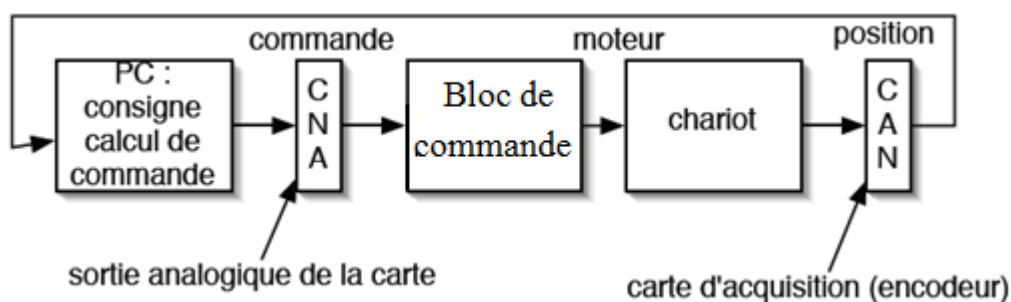


Figure III.1 schéma de câblage du pendule.

## III.3 Modélisation du système :

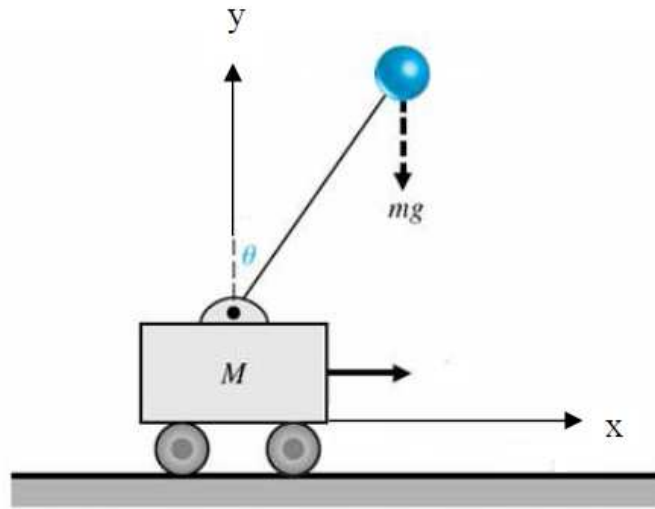


Figure III.2 Schéma du système chariot-pendule

La dynamique de ce système peut être obtenue en utilisant le formalisme Euler-Lagrange et décrite par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + f\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos\theta - ml\dot{\theta}^2 \sin\theta = F(t) \\ +ml \cos\theta \ddot{x} + (I + ml^2)\ddot{\theta} + k\dot{\theta} - mgl \sin\theta = 0 \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

En prenant comme vecteur d'état  $x = \begin{pmatrix} x \\ \frac{dx}{dt} \\ \theta \\ \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix}$ , on établit la représentation d'état du système

sous la forme  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ .

La commande envoyée est une tension et non une force, d'où  $F = u \cdot \text{coefficient}$ .

Le système admet deux points d'équilibre pour  $\theta = 0$  et pour  $\theta = \pi$  par rapport à l'axe Y

III.3.1 Linéarisation autour du point  $\theta = \pi$  :

Pour  $\theta = \pi$ , le pendule est en position d'équilibre stable :

$$\begin{cases} \cos\theta \cong -1 \\ \sin\theta \cong -\theta \\ \dot{\theta}^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

En remplaçant ces linéarisations dans les équations du système d'état (III.1) on obtient:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + f\dot{x} - ml\ddot{\theta} = F(t) \\ -ml\ddot{x} + (I + ml^2)\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + mgl\theta = 0 \end{cases} \quad (III.3)$$

Pour le vecteur d'état  $X$  nous avons choisi :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{dx}{dt} \\ \theta \\ \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} \quad (III.4)$$

En nous référant à la linéarisation des équations d'état pour le pendule en position basse, ce changement de variables nous mène à la définition des variables :

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_4$$

Les expressions  $\frac{dx_2}{dt}$  et  $\frac{dx_4}{dt}$  sont trouvées par substitution ou par élimination dans l'équation

**(III.3)**

La représentation d'état du système linéarité autour de  $\theta = \pi$  est :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-f(1+ml^2)}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{-(ml)^2g}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{-kml}{I(M+m)+Mml^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlf}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{-ml(M+m)g}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{-(M+m)k}{I(M+m)+Mml^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(1+ml^2)}{I(M+m)+Mml^2} \\ 0 \\ \frac{ml}{I(M+m)+Mml^2} \end{pmatrix} u(t) \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (III.5)$$

Les variables qui nous intéressent sont la position du chariot ( $x$ ) et l'angle du pendule ( $\theta$ ).

**III.3.2 Linéarisation autour du point  $\theta = 0$  :**

Pour  $\theta = 0$  , le pendule est en position d'équilibre instable

$$\begin{cases} \cos \theta \cong 1 \\ \sin \theta \cong \theta \\ \dot{\theta}^2 = 0 \end{cases} \quad \text{(III.6)}$$

En remplaçant ces linéarisations dans les équations du système d'état (III.1) on obtient :

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + f\dot{x} + ml\ddot{\theta} = F(t) \\ ml\ddot{x} + (I + ml^2)\ddot{\theta} + k\dot{\theta} - mgl\theta = 0 \end{cases} \quad \text{(III.7)}$$

La représentation d'état du système est :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-f(1+ml^2)}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{-(ml)^2g}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{0}{I(M+m)+Mml^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{+mlf}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{+ml(M+m)g}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{-(M+m)k}{I(M+m)+Mml^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(1+ml^2)}{I(M+m)+Mml^2} \\ 0 \\ \frac{-ml}{I(M+m)+Mml^2} \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{(III.8)}$$

Pour compléter le model d'état du système trouvé par les équations précédentes, nous devons introduire les valeurs de tout les paramètres, le tableau suivant résume ces valeurs.

Paramètre	valeur
<b>g</b> – gravité	9.81m/s <sup>2</sup>
<b>l</b> - longueur du pendule	0.38m
<b>M</b> - masse du chariot	2.4kg
<b>m</b> - masse du pendule	0.23kg
<b>I</b> -moment d'inertie du pendule	0.099 kg*m <sup>2</sup>
<b>f</b> - coefficient de frottement du chariot	0.05 Ns/m
<b>k</b> - coefficient d'amortissement du pendule	0.005 Nms/rad

Tableau III.1 Paramètres du pendule

En remplaçant les valeurs des paramètres du tableau **III.1** dans la représentation d'état **III.8** on trouve :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0194 & -0.2203 & 0.0013 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.0128 & 6.6307 & -0.0387 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3888 \\ 0 \\ -0.2570 \end{pmatrix} u(t) \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

La matrice fonction de transfert correspondant au système **(III.9)** est :

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.3888 S^2 + 0.0147 S - 2.521}{S^4 + 0.5811 * 10^{-1} S^3 - 6.63 S^2 - 0.1261 S} \\ \frac{-0.257 S^2 + 1.9 * 10^{-19} S}{S^4 + 0.5811 * 10^{-1} S^3 - 6.63 S^2 - 0.1261 S} \end{bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

La représentation de la réponse du système à un échelon, est donnée par la figure suivante :

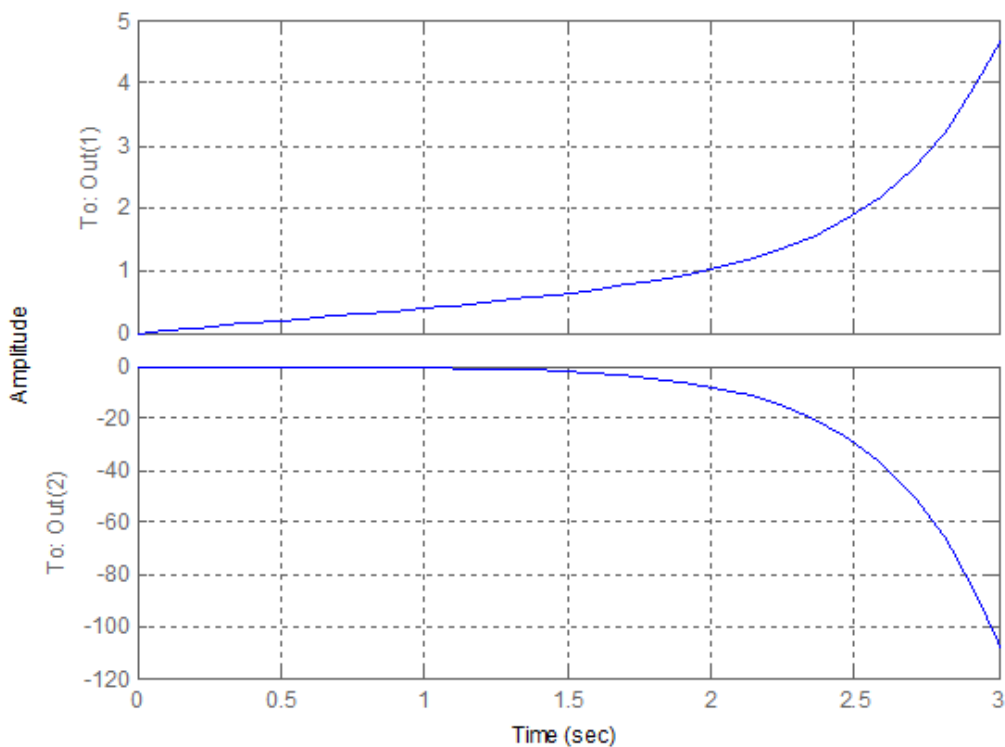


Figure **III.3** Réponse à un échelon

Si on applique une tension négative sur le moteur le tracé reste le même mais dans le sens inverse pour les deux sorties.

Le sens positif de la position du chariot est choisit de gauche à droite et le sens positif de  $\theta$  est choisit dans le sens des aiguilles d'une montre.

### **Interprétation :**

Si on applique une tension a notre système, le chariot se déplace dans un sens, et le pendule oscille dans le sens opposé.

Il est très important de noter que dans notre cas, ce modèle n'est valable que pour des petites variations de  $\theta$  autour de 0, (-0.2 rad et +0.2 rad), équivalence en degré à (-12° et +12°).

Partant de ce principe, l'interprétation des résultats de simulation trouvés pour le modèle nominale en boucle ouverte est la suivante :

- les tracés de la position du chariot et de la position angulaire du pendule tendent vers l'infini, ce qui justifie amplement que le système est instable. Bien qu'il soit conditionné par la position du chariot qui varie entre [-0.5m et 0.5m] et l'angle du pendule qui est restreint dans un intervalle très petit autour de 0, les résultats obtenus en dehors de ces deux dernières conditions ne correspondent pas aux résultats réels, du fait qu'on ne connaît pas le modèle correspondant lorsque ces condition ne sont ne sont pas respectées.

## **III.4 Représentation du système perturbé en boucle ouverte:**

### **III.4.1 Perturbations sur les paramètres :**

Dans la réalité, les paramètres de notre système ne sont pas connus avec exactitude, il existe une possibilité de les avoir pris avec une erreur relative autour de leurs valeurs nominales. Dans ce cas on a faire à des incertitudes structurées.

Pour ce qui est du pendule inversé, les paramètres pris en compte sont uniquement le coefficient de frottement du chariot ( $f$ ) et le coefficient d'amortissement du pendule ( $k$ ), ils sont représentés comme suit :

$$f = \bar{f}(1 + p_f \delta_f) \tag{III.11}$$

$$k = \bar{k}(1 + p_k \delta_k) \tag{III.12}$$

Où :  $\bar{f}$  et  $\bar{k}$  représentent respectivement les valeurs nominales de  $f$  et  $k$

$p_f$  et  $p_k$  sont l'incertitude prise en pourcentage

$\delta_f$  et  $\delta_k$  sont des nombres réels définis comme suit :

$$-1 \leq \delta_f, \delta_k \leq 1$$

Pour  $\begin{cases} \bar{f} = 0.05 \\ \bar{k} = 0.005 \end{cases}$  et  $\begin{cases} p_f = 10\% = 0.10 \\ p_k = 15\% = 0.15 \end{cases}$  les relations (III.11) et (III.12) donnent :

$$f = 0.05(1 + 0.1\delta_f) \tag{III.13}$$

$$k = 0.005(1 + 0.15\delta_k) \tag{III.14}$$

Le comportement incertain du modèle nominal peut être décrit par une LFT supérieure telle que :

$$v = F_u(M, \delta)x \tag{III.15}$$

Comme le montre la figure suivante :

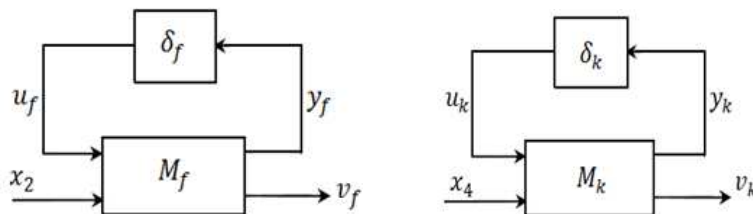


Figure III.4 Représentation des incertitudes paramétriques

Sous forme LFT supérieurs

Les expressions matricielles correspondant aux LFT précédentes sont :

$$\begin{bmatrix} y_f \\ v_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{f} \\ p_f & \bar{f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_f \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{III.16}$$

$$\begin{bmatrix} y_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k} \\ p_k & \bar{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (\text{III.17})$$

De (III.16) on a :

$$y_f = \bar{f}x_2 \quad (\text{III.16.a})$$

$$v_f = p_f u_f + \bar{f}x_2 \quad (\text{III.16.b})$$

$$u_f = \delta_f y_f \quad (\text{III.16.c})$$

De (III.17) on a :

$$y_k = \bar{k}x_4 \quad (\text{III.17.a})$$

$$v_k = p_k u_k + \bar{k}x_4 \quad (\text{III.17.b})$$

$$u_k = \delta_k y_k \quad (\text{III.17.c})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u_f \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_f & 0 \\ 0 & \delta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_f \\ y_k \end{bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

Le modèle incertain peut être représenté par le schéma bloc suivant:

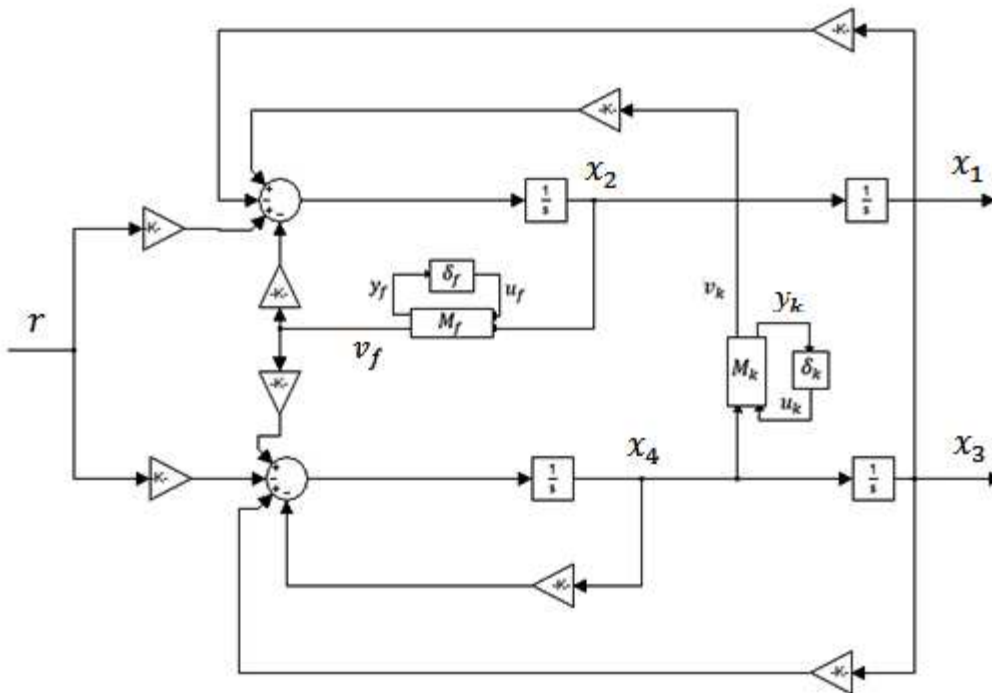


Figure III.5 Schéma du système pendule inversé avec paramètres incertains

Par substitution des variables  $v_f$  et  $v_k$ , les équations régissant le comportement dynamique du système sont données par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ y_f \\ y_k \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0194 & -0.2203 & 0.0013 & -0.0583 & 0.0385 & 0.03888 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0128 & 6.6307 & -0.0387 & 0.0257 & -0.7734 & -0.2570 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.005 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u_f \\ u_k \\ r \end{bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

La représentation (III.19) est sous la forme:

$$G = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ e(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_e & D_{ew} & D_{eu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

Soit  $G$  la fonction de transfert du système pendule inversé, qui prend en compte l'incertitude des paramètres comme le montre la figure (III.7).

$G$  a trois entrées, quatre sorties et quatre états.

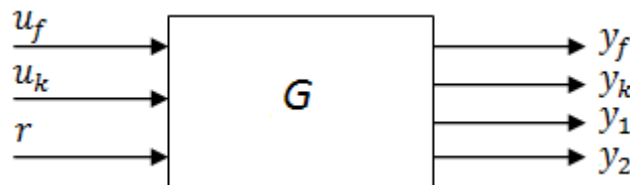


Figure III.6 Entrées/sorties du pendule inversé

Le comportement incertain du modèle nominal peut être décrit par une LFT supérieure comme le montre la figure suivante :

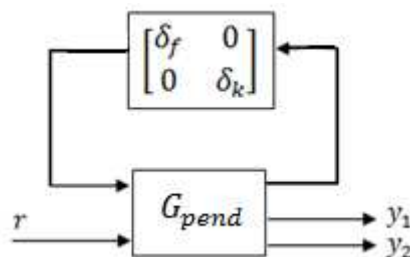


Figure III.7 Représentation LFT du pendule inversé avec incertitudes.

La matrice d'incertitudes est diagonale, et l'expression de la sortie du système pendule inversé soumis aux perturbations paramétriques peut être représenté par une LFT supérieur comme suit :

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = F_u(G_{pend}, \Delta)r \quad (\text{III.20})$$

### III.4.2 Analyse fréquentielle du système perturbé :

La réponse en fréquence du système perturbé en boucle ouverte peut être calculée en utilisant la commande **starp** pour des petites variations sur les paramètres perturbés  $\delta_k, \delta_f$ .

Dans le programme suivant, cinq (5) valeurs de chaque perturbation sont choisies, à partir de celles-ci, il génère la matrice fonction de transfert en boucle ouverte correspondante, les réponses fréquentielles et les tracés.

```
clear
clc
%représentation de la matrice augmentée
m = 0.23;M = 2.4;l = 0.38;g = 9.81;I = 0.099;k = 0.005;f = 0.05;
p_k=0.15;p_f=0.1;
den=M*m*l^2+(M+m)*I;
a42=(f*m*l)/den;a43=(g*m*l*(m+M))/den;
a44=(k*(m+M))/den;b4=(m*l)/den;a22=(f*(I+m*l^2))/den;
a23=((m*l)^2*g)/den;a24=(k*m*l)/den;b2=(I+m*l^2)/den
A=[0 1 0 0;0 -a22 -a23 a24;0 0 0 1;0 a42 a43 -a44];
Bw=[0 0;-0.15*(I+m*l^2)/den 0.15*(m*l)/den;0 0;
(0.1*m*l)/den -0.1*(M+m)/den];Bu=[0;b2;0;-b4];
Ce=[0 0.05 0 0;0 0 0 0.005];Cy=[1 0 0 0;0 0 1 0];
Dew=zeros(2,2);Deu=[0;0];Dyw=zeros(2,2);Dyu=[0;0];
P=pck(A,[Bw,Bu],[Ce;Cy],[Dew,Deu;Dyw,Dyu])
% interconnexion de la matrice augmentée avec les variables
mat_f=[0 f;p_f f];mat_k=[0 k;p_k k];
int1=nd2sys([1],[1 0]);
int2=nd2sys([1],[1 0]);
```

```

int3=nd2sys([1],[1 0]);
int4=nd2sys([1],[1 0]);
systemnames='mat_f mat_k int1 int2 int3 int4';
inputvar='[uf;uk;u]';
outputvar='[mat_f(1);mat_k(1);int2;int4]';
input_to_mat_f='[uf;int1]';
input_to_mat_k='[uk;int3]';
input_to_int1='[0.3888*u-0.388*mat_f(2)+0.26*mat_k(2)-0.2203*int4]';
input_to_int2='[int1]';
input_to_int3='[-0.2570*u+0.256*mat_f(2)-7.74*mat_k(2)+6.6307*int4]';
input_to_int4='[int3]';
sysoutname='G';
cleanupsysic='yes';
sysic
% représentation du système perturbé
omega=logspace(-6,2,100);
[delta1,delta2]=ndgrid([-1,-0.5,0,0.5,1],[-1,-0.5,0,0.5,1])
for j=1:16
    delta=diag([delta1(j),delta2(j)])
    olp=starp(delta,G)
    olp_ic=sel(olp, :, :)
    olp_g=frsp(olp_ic,omega)
    figure(1)
    vplot('bode',olp_g,'B-')
    subplot(2,1,1)
    hold on
    subplot(2,1,2)
    hold on
end

```

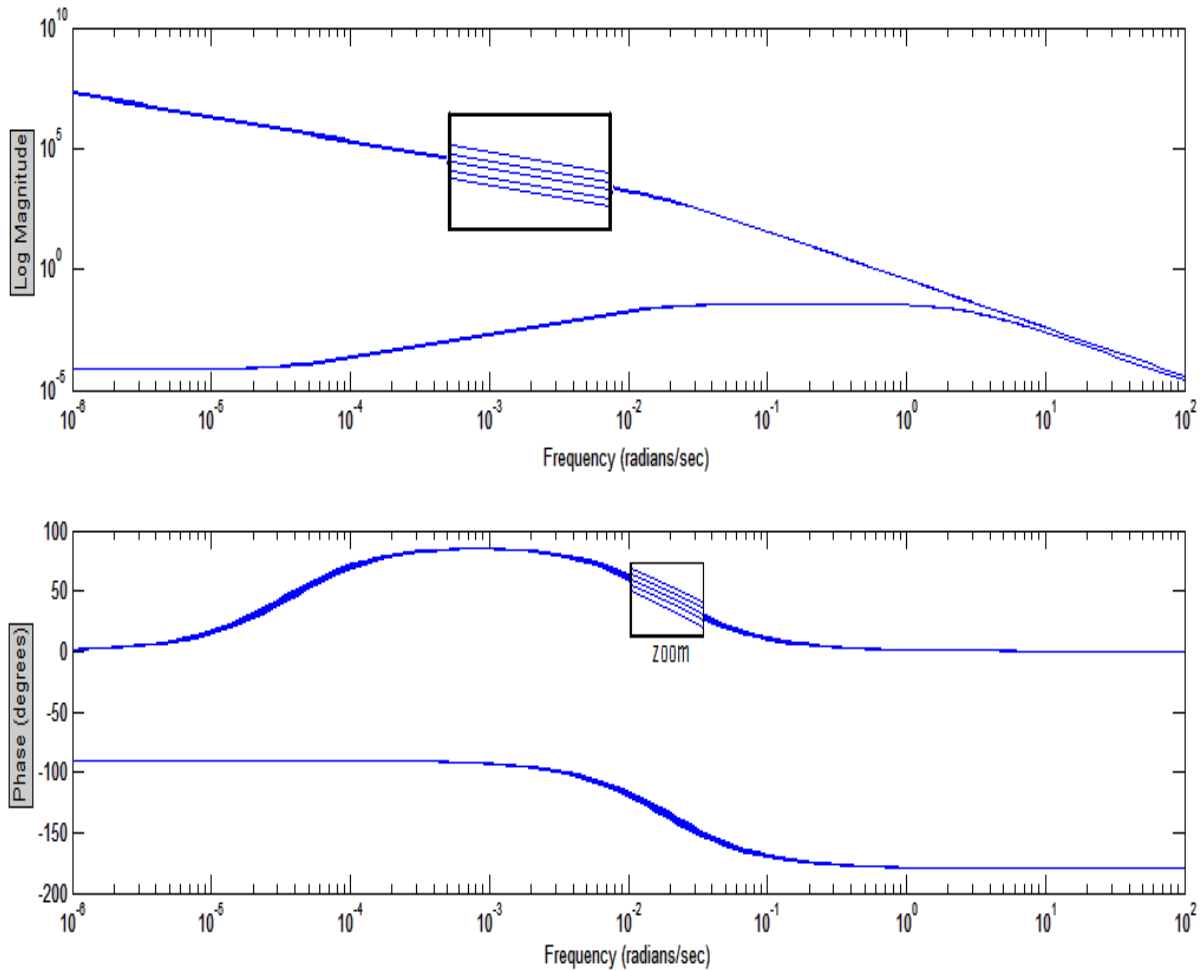


Figure III.8 Diagramme de Bode du système perturbé en boucle ouverte

#### III.4.2.1 Interprétation :

Le tracé de Bode ci-dessus correspond aux réponses du modèle du système pendule inversé soumis à des incertitudes de mesures sur les paramètres  $f$  et  $k$ , chaque tracé correspond à une valeur précise de perturbation pour  $j$  allant de 1 jusqu'à 5. Le système réel correspond à un seul de ces tracés.

## III.5 Etude du système en boucle fermée :

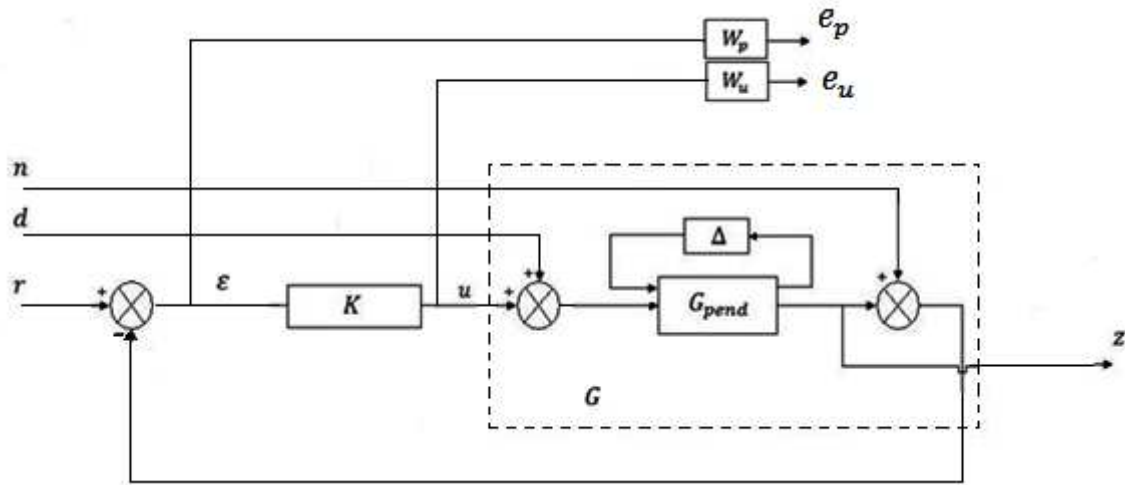


Figure III.9 schéma bloc du pendule inversé en boucle fermée

Où

$G_{pend}$  Représente la matrice fonction de transfert pour le modèle nominale du pendule inversé.

$G$  Représente la matrice fonction de transfert pour le modèle du pendule inversé avec perturbation structurées et non structurées.

$r, d, n$  Représentent respectivement : la consigne, bruit de commande, et les bruits de mesure sur les deux capteurs des deux sorties.

$z, u, \varepsilon$  Représentent respectivement sorties du système, la commande, et l'erreur.

$y$  Représente la sortie du système (entrée du correcteur) entaché du bruit de mesure.

Le schéma représentatif du système en boucle fermée, qui comprend le modèle du pendule inversé, la structure d'évaluation et le contrôleur, ainsi que les éléments qui reflètent l'incertitude du modèle et les objectifs de performance, est représentée à la figure (III.9)

Le schéma d'asservissement du système en boucle fermée du modèle nominale est donné par la figure suivante (III.10).

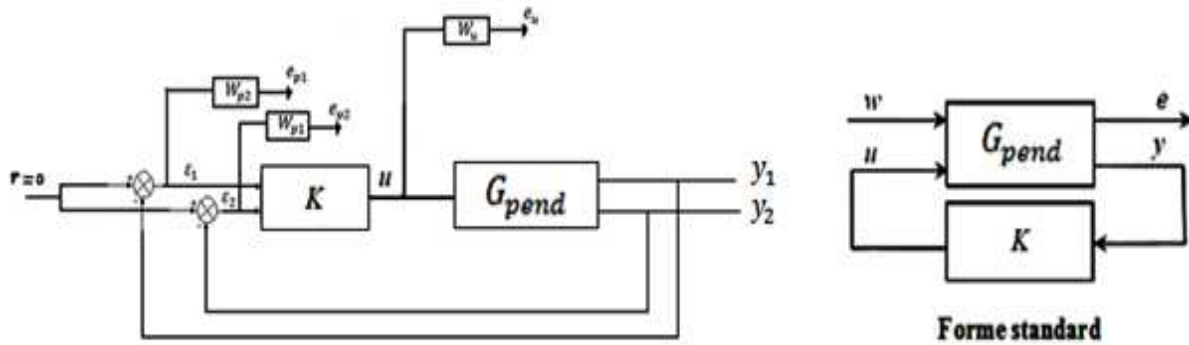


Figure III.10 Représentation du système en boucle fermée.

La synthèse du correcteur à déterminer se fera en se référant au schéma d’asservissement donné par la figure (III.10).

Tel que :

$$e = \begin{pmatrix} e_{p1} \\ e_{p2} \\ e_u \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{III.21}$$

$$w = r \quad u = u \tag{III.22}$$

L’objectif de l’étude du système en boucle fermée est de trouver un retour de sortie linéaire de rétroaction

$$u(s) = K(s) \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} \tag{III.23}$$

Qui garantit les propriétés définies au paragraphe (III.7)

**III.6 Transformation des incertitudes structurées en incertitudes non structurées :**

$$\text{On a : } f = \bar{f}(1 + p_f \delta_f) \quad k = \bar{k}(1 + p_k \delta_k) \tag{III.24}$$

Pour une incertitude maximale sur les paramètres  $f$  et  $k$  on a  $\delta_f = \delta_k = 1$  (respectivement  $\delta_f = \delta_k = -1$ ). La représentation du système incertain pour le premier cas sera donnée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0194 & -0.2203 & 0.0013 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.0128 & 6.6307 & -0.0387 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00194 & 0 & 1.95 * 10^{-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.28 * 10^{-3} & 0 & -5.805 * 10^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3888 \\ 0 \\ -0.2570 \end{pmatrix} u(t) \\ \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (III. 25)$$

Si on prend la matrice  $E$  comme étant la matrice d'incertitude sur les paramètres tel que :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00194 & 0 & 1.95 * 10^{-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.28 * 10^{-3} & 0 & -5.805 * 10^{-3} \end{pmatrix}$$

et  $A$  la matrice d'évolution du modèle nominale tel que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0194 & -0.2203 & 0.0013 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.0128 & 6.6307 & -0.0387 \end{pmatrix}$$

La matrice d'évolution du modèle incertain est :

$$A + E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0214 & -0.2203 & 0.0015 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.0141 & 6.6307 & -0.0445 \end{pmatrix} \quad (III. 26)$$

De cette représentation, la matrice fonction de transfert du système incertain est :

$$G = \begin{bmatrix} G_{1p} \\ G_{2p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.388 s^2 + 16.91 * 10^{-3} - 2.521}{s^4 + 65.85 * 10^{-3} s^3 - 6.63 s^2 - 0.1386 s} \\ -0.257 s^2 \\ \frac{-0.257 s^2}{s^4 + 65.85 * 10^{-3} s^3 - 6.63 s^2 - 0.1386 s} \end{bmatrix} \quad (III. 27)$$

❖ **Calcul de la matrice fonction de transfert des perturbations:**

On a:  $G(s) = G_{pend}(s) + \Delta(s)$

$\Delta(s) = G(s) - G_{pend}(s)$

Donc la matrice fonction de transfert des incertitudes est :

$$\Delta(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.8044 \cdot 10^{-3} s^5 + 6.13 \cdot 10^{-5} s^4 - 9.785 \cdot 10^{-3} s^3 - 3.978 \cdot 10^{-4} s^2 + 0.0317 s}{s^8 + 0.124 s^7 - 13.26 s^6 - 1.087 s^5 + 43.94 s^4 + 1.755 s^3 + 0.01748 s^2} \\ \frac{-1.99 \cdot 10^{-3} s^5 - 4.999 \cdot 10^{-5} s^4 + 3.227 \cdot 10^{-3} s^3}{s^8 + 0.124 s^7 - 13.26 s^6 - 1.087 s^5 + 43.94 s^4 + 1.755 s^3 + 0.01748 s^2} \end{bmatrix}$$

(III.28)

Le schéma représentatif des incertitudes non structurées est donné comme suit :

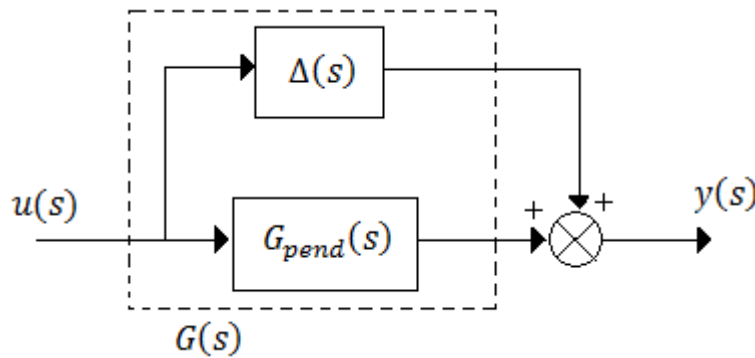


Figure III.12 Incertitude additive direct

**III.7 critères de robustesse :**

**III.7.1 Stabilité et performance nominales :**

Le correcteur à concevoir doit garantir la stabilité interne du système. En outre les performances du système en boucle fermée requises doivent être atteintes pour le modèle nominale du système  $G_{pend}$ .

Dans ce cas, les critères de performance et de stabilité nominales pour le système en boucle fermée sont assurés par les fonctions de sensibilité  $S$  et  $KS$  tel que :

$$\left\| \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u KS \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1 \tag{III.29}$$

Où

$S$  est la fonction de sensibilité en sortie du système.  $W_p$  Et  $W_u$  sont des fonctions de pondérations choisies pour représenter les caractéristiques fréquentielles de certaines perturbations externes et exiger un niveau de performances élevé.

La satisfaction de l'inégalité ci-dessus indique que le système en boucle fermée permet de réduire avec succès l'effet des perturbations à un niveau acceptable, et atteint les performances requises.

Il convient également de noter que la fonction de sensibilité  $S$  désigne la fonction de transfert de référence (erreur de trainage).

### III.7.2 Stabilité robuste :

La stabilité du système en boucle fermée est dite robuste si, en plus de la nominale, la stabilité de tous les systèmes atteignables par les perturbations est garantie.

$$G = F_u(G_{pend}, \Delta)$$

La stabilité robuste du système en boucle fermée est assurée par la stabilité nominale.

### III.8 synthèse du correcteur $H_\infty$ :

Le calcul des régulateurs se font toujours selon un cahier des charges donné, qui doit tenir compte de la stabilité du système en boucle fermée, de la durée du régime transitoire, de l'erreur statique de la sortie vis-à-vis de la consigne, ainsi qu'un bon rejet de perturbations. Un objectif supplémentaire, c'est d'assurer la robustesse du système vis-à-vis des variations des paramètres du procédé.

#### III.8.1 Objectif :

Assurer le suivi de consigne d'un procédé, en assurant à priori les objectifs de performance énoncés dans le cahier des charges.

#### III.8.2 Problème :

Considérons la représentation d'état nominale du pendule inversé suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0194 & -0.2203 & 0.0013 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.0128 & 6.6307 & -0.0387 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3888 \\ 0 \\ -0.2570 \end{pmatrix} u \\ y = \theta = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + (0) u \end{array} \right. \quad (\text{III.30})$$

Du fait que le modèle de notre système ne satisfait pas certaines hypothèses de l'algorithme de Glover-Doyle (existence d'un zéro très proche de l'axe imaginaire), donc on ne peut pas lui garantir les critères de performances, on va juste garantir la stabilité (suivi de référence) en boucle fermée. Ainsi le cahier des charges s'énonce comme suit :

- Suivi de consigne avec une erreur statique inférieure à 1%.
- Marge de module au moins égale à 0.5 ( $G_\infty \leq 0.5$ )
- Gain entre la référence et la commande inférieur à 20 dB pour tout  $\omega$ , ( $|KS(j\omega)| < 20dB$ ).

Pour la synthèse du correcteur  $H_\infty$  adéquat, il faut mettre le problème sous forme standard Figure (III.11), en considérant les pondérations fréquentielles. Telles que les fonctions de transfert en boucle fermée  $S(j\omega), T(j\omega)$  soient de modules bornés respectivement par les modules de  $\frac{1}{w_1(j\omega)}$  et  $\frac{1}{w_2(j\omega)}$ .

### III.8.3 choix des fonctions de pondérations :

Après quelques essais sur le logiciel de programmation MATLAB, les fonctions de pondérations  $W_1(s)$  et  $W_2(s)$  que nous avons obtenues sont :

$$W_1(s) = \frac{12.405 * (s + 0.86)}{150 * s + 0.8} \quad (\text{III. 31})$$

$$W_2 = 0.03 \quad (\text{III. 32})$$

En exécutant le programme correspondant au calcul du correcteur  $K(s)$ , tout en utilisant les fonctions de pondérations (III.31) et (III.32), on trouve :

$$\gamma = 13.13$$

$$K(s) = \frac{-575.6 s^3 - 1497 s^2 - 10.35 s - 0.01441}{s^4 + 10.67 s^3 + 49.46 s^2 - 0.4203 s - 0.0003646}$$

Les figures ainsi trouvées sont :

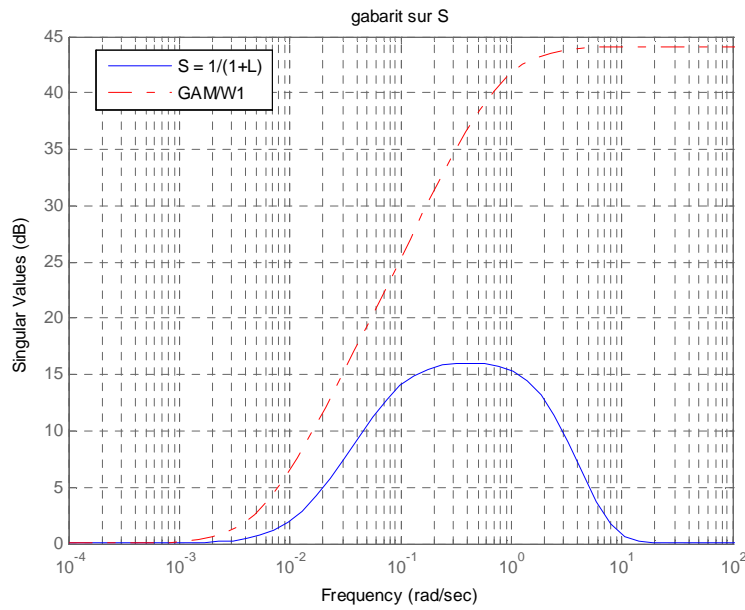


Figure III.13 gabarit sur S

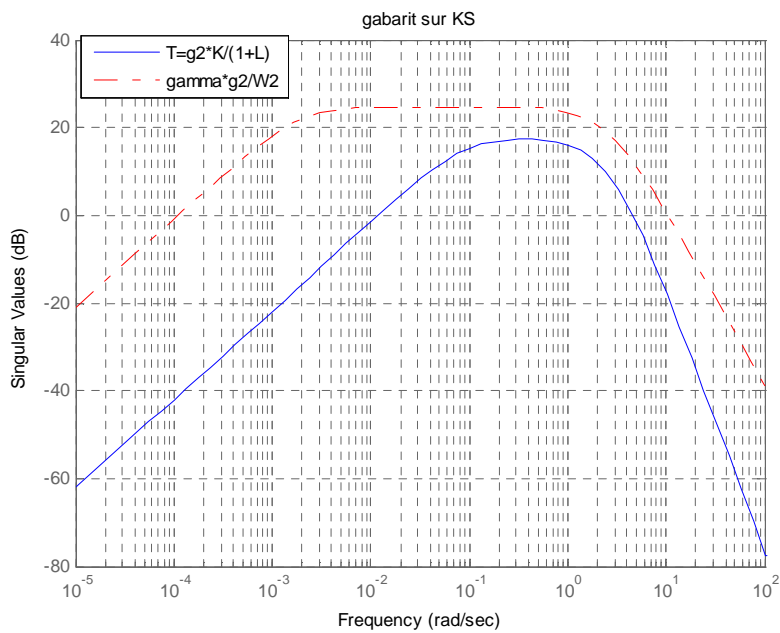


Figure III.14 gabarit sur KS

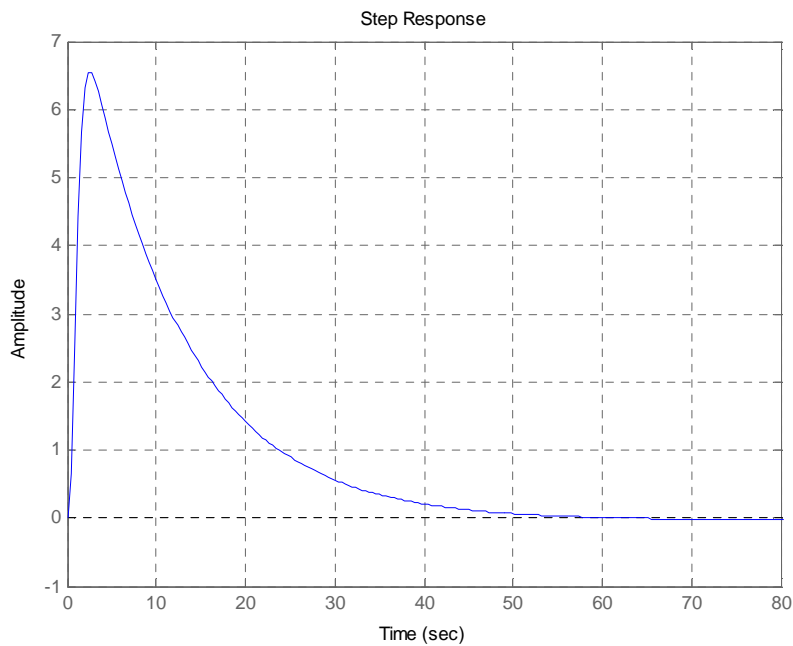


Figure III.15 suivi de référence

### II.9 Interprétation :

- La figure (III.13) représente le diagramme de Bode du module de la fonction de sensibilité  $S(s)$  et celui du gabarit  $\gamma/|W_1|$ . On constate que le diagramme de  $S(s)$  est en dessous de son gabarit, et que le gain en basse fréquence de  $S(s)$  est très faible, ceci garanti une bonne précision de la sortie par rapport à l'entrée de référence.
- La figure(III.14) représente le diagramme de Bode du module du transfert  $KS(s) = u(s)/r(s)$  et celui du gabarit  $\gamma/|W_2|$ . Dans ce cas aussi le diagramme de  $KS(s)$  est en dessous de son gabarit, le gain de  $KS(s)$  est faible en haute fréquences, ceci garanti une diminution de l'énergie (amplitude) de commande en réponse à une consigne.
- Le système en boucle fermée tend vers la référence comme le montre la figure (III.15) au bout d'environ 50 secondes.

## Conclusion générale

---

Le projet que nous avons réalisé a porté sur l'étude de la commande robuste de type  $H_\infty$  avec une application à la commande d'un pendule inversé.

Après avoir étudié les fondements de la commande  $H_\infty$ , nous avons appliqué cette méthode sur un exemple numérique en utilisant la boîte *robust toolbox*.

Ensuite nous avons appliqué cette commande au pendule inversé qui est un système non linéaire, la commande a été développée sur un modèle linéaire obtenu par linéarisation autour d'un point d'équilibre.

Les résultats de simulation obtenus sont jugés satisfaisants par rapport aux gabarits construits pour satisfaire les spécifications fixées dans le cahier des charges : suivi de consignes, stabilité...

Nous avons rencontré quelques difficultés par rapport à la nature du modèle dont une fonction de transfert présente un zéro sur l'axe imaginaire. Dans ce cas, la résolution du problème  $H_\infty$  par la méthode des équations de Riccati (algorithme de Glover-Doyle) est délicate en raison de quelques hypothèses non satisfaites.

On peut éviter ces difficultés en résolvant le problème de commande  $H_\infty$  par d'autres techniques comme :

- Technique des inégalités matricielles affines (LMI).
- Technique de  $\mu$  synthèse.

Ce projet nous a permis de nous confronter aux techniques de commande avancées des systèmes multivariables.

Notre travail reste à compléter, comme perspectives nous envisageons :

- Appliquer le correcteur  $H_\infty$  linéaire au modèle non linéaire.
- Implémenter pratiquement cette commande sur un banc d'essai expérimental.

## ANNEXE A

**Valeurs singulières et normes :**

**Décomposition en valeurs singulières d'une matrice complexe :**

Soit  $A$  une matrice complexe de dimension  $m \times n$

La matrice  $A$  est définie comme étant le produit de trois matrices :

$$A = V \Sigma W^*$$

Tel que :  $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$  et  $W \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

Avec  $VV^* = I_m$  et  $WW^* = I_n$

Et  $\Sigma$  s'écrit comme suit :

- Si  $m = n$  :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_n \end{bmatrix}$$

- Si  $m > n$  :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_n \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- Si  $m < n$  :

$$\Sigma = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right]$$

Les quantités notées  $\sigma_i$ , sont appelées les valeurs singulières de la matrice  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Ceux sont les racines carrées des valeurs propres de  $A^*A$  si  $m > n$ , si non de  $AA^*$ :

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^*A)} = \sqrt{\lambda_i(AA^*)}$$

Généralement elles sont ordonnées comme suit :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_q \quad \text{tel que : } q = \min(m, n).$$

Elles sont des quantités réelles positives ou nulles. Le nombre de valeurs singulières non nulles est égal au rang de la matrice  $A$ .

Les colonnes de  $V$  et  $W$  sont respectivement les vecteurs propres de  $A^*A$  et  $AA^*$ . On les appelle vecteurs singuliers (respectivement à gauche et à droite) de  $A$ .

### Valeurs singulières d'une matrice de transfert :

Considérant un système linéaire invariant avec un vecteur d'entrées  $e(t)$  et un vecteur de sortie  $s(t)$  de dimension respectives  $m$  et  $n$ . soit  $G(s)$  sa matrice de transfert. En réponse à une excitation harmonique  $e(t) = Ee^{j\omega t}$ ,  $E \in \mathbb{C}^m$ , la sortie du système s'écrit :

$$S(t) = G(j\omega)Ee^{j\omega t}$$

Pour un système monovariables, on définit à partir de cette relation le gain du système à la pulsation  $\omega$  par le module  $|G(j\omega)|$ . Dans le cas multivariables, on utilise la notion de valeurs singulières, définies comme les racines carrées des valeurs propres de  $G(j\omega)$  multipliée par sa transconjuguée :

$$\sigma_i(j\omega) = \sqrt{\lambda_i(G(j\omega)G(-j\omega)^T)} = \sqrt{\lambda_i(G(-j\omega)^T G(j\omega)G)}$$

$i = 1, \min(m, n)$ .

Les valeurs singulières étant des nombres réels positifs ou nuls, elles peuvent être classées.

On notera  $\bar{\sigma}(G)$  la plus grande valeur singulière et  $\underline{\sigma}$  la plus petite :

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)) = \sigma_1(G(j\omega)) \geq \sigma_2(G(j\omega)) \geq \dots \geq \sigma_q(G(j\omega)) = \underline{\sigma}(G(j\omega))$$

**Remarque :**

*Pour un système monovariabiles, il n'existe qu'une seule valeur singulière, qui est tel que :*

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)) = \underline{\sigma}(G(j\omega)) = \|G(j\omega)\|$$

**Propriétés des valeurs singulières :**

Soient  $A, B, E \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ,  $x \in \mathbb{C}^n$ , et  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

**Propriété 1 :**

$$\bar{\sigma}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

**Propriété 2 :**

$$\underline{\sigma}(A) = \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

**Propriété 3 :**

- $\bar{\sigma}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- $\sigma(\alpha A) = |\alpha| \sigma(A)$
- $\bar{\sigma}(A + B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B)$
- $\bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A) \bar{\sigma}(B)$
- $\sigma(AB) \geq \sigma(A) \sigma(B)$

**Propriété 4 :**

Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  une matrice carrée, alors :  $A$  est inversible  $\Leftrightarrow \underline{\sigma}(A) \neq 0$

De plus si  $A$  est inversible  $\Rightarrow \underline{\sigma}(A) \bar{\sigma}(A^{-1}) = \underline{\sigma}(A^{-1}) \bar{\sigma}(A)$

### Propriété 5 :

$\forall i=1, \dots, \min(m, n)$ .

$$\sigma_i(A) - \bar{\sigma}(E) \leq \sigma_i(A + E) \leq \sigma_i(A) + \bar{\sigma}(E)$$

Ce résultat signifie que si une perturbation  $E$  change la matrice  $A$  en  $(A+B)$ , ses valeurs singulières sont perturbées d'au plus en  $\bar{\sigma}(E)$  (soit la norme de la perturbation).

Nous voyons ici apparaître l'intérêt des valeurs singulières pour ce type de problème.

### Propriété 6 :

Soient deux matrices carrées  $A, E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , alors :

$$\det(A + E) = 0 \Rightarrow \bar{\sigma}(E) \geq \underline{\sigma}(A)$$

Par contraposé :

$$\sigma(E) \leq \sigma(A) \Rightarrow \det(A + E) \neq 0$$

Les relations (I.16) et (I.17) nous permettent d'écrire :

$$\underline{\sigma}(G(j\omega)) \leq \frac{\|G(j\omega)Ee^{j\omega t}\|_2}{\|Ee^{j\omega t}\|_2} \leq \bar{\sigma}(G(j\omega))$$

Les valeurs singulières  $\sigma_i(G(j\omega))$  constituent donc une généralisation aux systèmes multivariables, de la notion de gain. Elles peuvent être représentées dans le plan de Bode. Pour un système multivariables, le "gain" à une fréquence donnée dépend donc en fait du vecteur complexe  $E$ , et sera compris entre les valeurs singulières inférieures et supérieures.

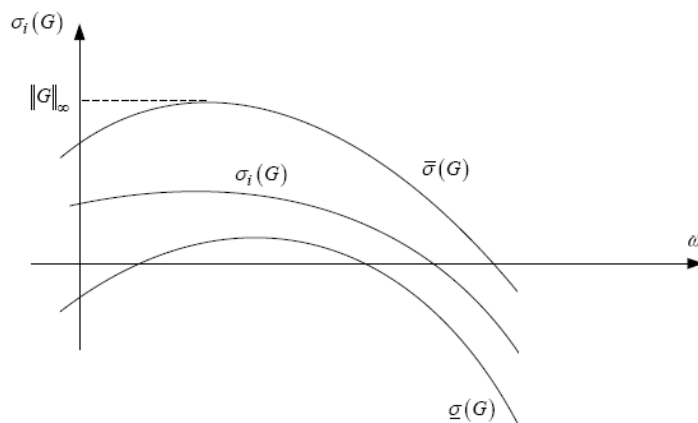


Figure: valeurs singulières et normes  $H_\infty$  d'une matrice fonction de transfert.

## Annexe B

### Transformation Linéaire Fractionnaire (LFT) :

Les LFT (en anglais *Linear Fractional Transformations*) sont des objets génériques qui apparaissent dans de nombreux problèmes de modélisation et de commande pour les systèmes dynamiques. En particulier,

- la formulation du problème  $H_\infty$  mais aussi du problème  $H_2$  se fait à travers la forme standard qui n'est autre qu'une expression de type LFT entre le système augmenté et le compensateur.
- les incertitudes dynamiques ou paramétriques apparaissent dans le schéma de commande à travers une expression LFT.
- l'universalité des LFT se justifie par le fait que toute expression rationnelle peut se réécrire en termes de LFT. De plus, la combinaison de ces objets donne à son tour naissance à des objets LFT.

Nous examinons dans cette section les propriétés principales des LFT qui sont susceptibles d'être utiles dans la pratique de la commande robuste et en modélisation.

### Définitions :

La notation LFT se définit comme suit. Pour des matrices de dimensions appropriées

Ket  $P = \begin{pmatrix} P_{ew} & P_{eu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{pmatrix}$  et en supposant que les inverses existent, les LFT inférieures  $F_l(\cdot, \cdot)$  et supérieures  $F_u(\cdot, \cdot)$  sont définies par:

$$F_u(P, K) = P_{yu} + P_{yw}K(I - P_{ew}K)^{-1}P_{eu}$$

$$F_l(P, K) = P_{ew} + P_{eu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw}$$

### Calcul de la LFT inférieure :

On a :  $\begin{pmatrix} e(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = P(s) \begin{pmatrix} w(s) \\ u(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{ew} & P_{eu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(s) \\ u(s) \end{pmatrix}$  et  $u(s) = K y(s)$

$$\Rightarrow \begin{cases} e(s) = P_{ew} w + P_{eu} u & (1) \\ y(s) = P_{yw} w + P_{yu} u & (2) \end{cases}$$

$$y = P_{yw}w + P_{yu} K y(s) \Rightarrow (I_p - P_{yu}K)y(s) = P_{yw}w$$

$$\Rightarrow y(s) = (I_p - P_{yu}K)^{-1}P_{yw}w$$

En remplaçant dans (1) :

$$e(s) = P_{ew}w + P_{eu}K y(s) = P_{ew}w + P_{eu}K(I_p - P_{yu}K)^{-1}P_{yw} w$$

On obtient :

$$F_l(P, K) = \frac{e(s)}{w(s)} = P_{ew} + P_{eu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw}$$

## Bibliographie

- [1] Scorletti G., Fromion V, *Introduction à la commande multivariable des systèmes : méthodes de synthèses fréquentielles  $H_\infty$* . Polycopié université/ENSI Caen disponible sur :  
[http: //www.greyc.ensicaen.fr/EquipeAuto/Gerard\\_S/ENSI\\_comrob.html](http://www.greyc.ensicaen.fr/EquipeAuto/Gerard_S/ENSI_comrob.html) 2005.
- [2] PIERRE APKARIAN, *éléments de la théorie de la commande robuste*
- [3] Gilles Duc et Stéphane Font, *commande  $H_\infty$  et  $\mu$  analysé des outils pour la robustesse*.  
Edition Hermès science paris 1999
- [4] Georges SALLOUM, *contribution à la commande robuste de la machine asynchrone à double alimentation*.  
Thèse de doctorat à L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE  
2007
- [5] Adlane Abdelkader BENLATRECHE, *Contribution à la commande robuste  $H_\infty$  de systèmes à grande échelle d'enroulement de bandes flexibles*.  
Thèse de doctorat à l'Université Louis Pasteur – Strasbourg I, Discipline : Electronique,  
Electrotechnique, Automatique  
(Spécialité : Automatique)
- [6] MOUSSOUAMI Gauthier & AUPOIX Paul, *étude du pendule inversé*.  
Rapport de projet Université de Caen Basse-Normandie, UFR de Sciences 2007
- [7] Ad Damen and Siep Weiland, *Robust Control*.  
Measurement and Control Group. Department of Electrical Engineering. Eindhoven  
University of Technology. 2001
- [8] D.-W. Gu, P.Hr. Petkov and M. M. Konstantinov, *Robust Control Design with MATLAB*

## Résumé de quelques commandes utiles sous MATLAB

hinfscn      % calcul du correcteur  $H_\infty$  et de la valeur de gamma.

ssysic      % fais l'interconnexion entre des variables et un système de matrice.

nd2sys      % met une fonction de transfert sous forme d'un système de matrice.

ss2tf      % calcul de la fonction de transfert à partir de sa représentation d'état.

unpck      % met un système matriciel sous sa forme d'état (A, B, C, D).