

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère De L'enseignement Supérieur Et De la Recherche  
Scientifique



UNIVERSITE MOULOU D MAMM RI TIZI-OUZOU

FACULTE DU GENIE DE LA CONSRUCTION

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

## Mémoire de Fin d'Etudes

De MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Science et Technologie

Filière : Electromécanique

OPTION : Maintenance Industrielle

## Thème

Détection des défauts dans les structures mécanique par la  
méthode de collocation isogéométrique.

Présenté par :

- ABDENNOUR MASSINISSA
- MOULAI KHALED

Dirigé par Mr :

Mr. BELGAID Hocine  
Mr. SLIMANI Mohand

Année universitaire : (2019/2020)

# *Dédicaces*

*Je remercie Dieu tout puissant de m' avoir aidé pour  
achever ce modeste travail que je dédie :*

*À mes chers parents, ma mère et mon père, pour  
l' éducation qu' ils m' ont prodiguée avec tous les moyens  
et au prix de tous les sacrifices qu' ils ont consentis à  
mon égard, pour leur patience, leur amour et leurs  
encouragements.*

*Que ce travail leur apporte joie et fierté;*

*À Mon frère faiz et à toute ma famille;*

*À tous mes enseignants, particulièrement mon encadreur Dr h.  
belgaid que je ne remercierai jamais assez, vous serez toujours  
en ma mémoire, un symbole de sagesse et de bravoure; À mon  
collègue de travail, Mr M abdenmour, sans oublier mes amis  
qui m' ont aidé, merci à eux , à leur soutien et leur  
compréhension.*

*Khaled*

# *Dédicaces*

*Grace à Dieu le tout puissant, j'ai achevé la réalisation de ce modeste travail que je tien très chaleureusement à le dédier à :*

*Mes très chers parents, pour tous leurs amours, leurs sacrifices et leur soutien tout au long de mes études*

*A mon petit frère Hamid*

*A mon oncle et mes tantes et à toute ma famille et mes proches,*

*Aux mémoires de mes grands-parents et mes grands-mères,*

*A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé et mes camarades*

*A tous ceux qui m'ont aidé de loin ou de près*

*Massinissa*

# Remerciements

Tout d'abord nous rendons grâce à Dieu, lui qui nous a permis d'être bien portant afin d'effectuer ce travail du début jusqu'à la fin. Nous remercions nos parents respectifs pour leurs soutiens et leurs encouragements durant notre parcours de formation. Nos remerciements vont, à notre encadreur de mémoire, le professeur Dr h. Belgaid, qui nous a guidés avec ses orientations, ses conseils et ses critiques tout au long de ce travail de recherche en nous laissant la liberté dont on avait besoin. On ne peut que lui être reconnaissant surtout pour ses qualités intellectuelles et humaines, nous tenons également à remercier notre Co-encadreur Dr M. Slimani pour tout son soutien et son aide.

Nos remerciements vont aussi au membre du jury, pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'évaluer ce travail et de participer à la soutenance. Et enfin, nous sommes reconnaissants envers tous les enseignants de l'Université MOULOUD MANMERA de TAZI-OUZOU (UMM70) pour leur contribution à notre formation, et également à nos camarades, amis pour leurs aides précieuses

## Table des matières

---

Introduction générale .....	1
Chapitre I : Modélisation géométrique avec les fonctions B-SPLINE et NURBS.....	4
I. Modélisation géométrique.....	5
I.1. Introduction.....	5
I.2. Modèle B-SPLINE Rationnel.....	5
I.3. Nœud et vecteur nodal.....	5
I.3.1 Vecteur uniforme.....	5
I.3.2. Vecteur non uniforme.....	6
I.4. Multiplicité des nœuds.....	6
I.5. Fonction de base B-Spline.....	6
I.6. Les différents types des fonctions B-spline.....	8
I.6.1. B-Splines uniformes.....	8
I.6.2. B-Splines non uniformes.....	9
I.7. Propriété des fonctions B-SPLINE.....	9
I.8. Les courbes de B-SPLINE.....	10
I.8.1. Courbes B-Spline polynomiales uniformes.....	10
I.8.2. Propriété des courbes B-Spline polynomiales uniformes.....	11
I.8.3. Surface B-Spline non Rationnel.....	12
I.8.4. Propriété des surfaces B-Spline.....	13
I.9. Modèle B-SPLINE Rationnel non uniforme(NURBS).....	14
I.9.1. Fonction de base NURBS.....	14
I.9.2. Propriété des Fonctions de base NURBS.....	14
I.9.3. Dérives des fonctions NURBS.....	14
I.10. Courbe B-SPLINE rationnel (NURBS).....	20
I.10.1. Définition.....	20
I.10.2. Propriété géométrique des courbes NURBS.....	21
I.10.3. Construction d'une forme complexe par les NURBS.....	21

## Table des matières

---

I.11. Surface NURBS.....	23
I.11.1. Propriété des surfaces NURBS.....	24
I.12. Modélisation et construction des surfaces.....	24
I.12.1. Construction d'une surface d'extrusion.....	24
I.12.2. Construction d'une surface de révolution.....	25
Chapitre2 : méthode de collocation isogéométrique.....	27
II.1 : Méthode de collocation isogéométrique (IGA-C).....	28
II.2 : Méthodes de collocation: principe général et fondement.....	28
II.3 : Principes d'interpolation et de collocation.....	31
II.3.1 : Interpolation.....	31
II.4 : Interpolation polynomiale.....	31
II.5 : Intégration gaussienne et grilles pseudo-spectrales.....	33
II.6 : Points de collocation pour base NURBS.....	34
II.7 : Méthode de collocation isogéométrique.....	34
Chapitre III : Modèle de poutre de Timoshenko.....	36
III.1. Modélisation analytique des structures mécaniques.....	37
III.1.1. Le modèle de poutre Timoshenko.....	37
III.1.2. Équations des poutres de Timoshenko.....	37
III.2. Conditions aux limites.....	40
Chapitre IV. Analyse des vibrations d'une poutre de Timoshenko fissurée.....	41
IV.1. Modélisation de fissures.....	42
IV.2. Discrétisation du problème.....	44

## Table des matières

---

IV.3. Imposer les conditions aux limites.....	45
IV.4. Recalage du modèle.....	46
IV.5. Calibrage de la fonction représentant le défaut.....	46
IV.6. Raffinement local.....	46
IV.7. Tests numériques.....	47
CHAPITRE V Détection des défauts avec le vecteur de force résiduelle.....	53
V. Détection des défauts avec le vecteur des forces modales résiduelle.....	54
V.1. Le vecteur des forces modales résiduelles.....	54
V.2. La méthode du vecteur des forces modales résiduelles virtuelle.....	54
V.3. Test numérique.....	56
V.4. Résultats et discussion.....	59
Conclusion générale.....	61

## Liste des figures

---

Figure 1: fonction de base de l'ordre 0 pour le vecteur uniforme

$$\Xi = [0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1]$$

Figure 2: fonction de base de l'ordre 1 pour le vecteur uniforme

$$\Xi = [0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1]$$

Figure 3: fonction de base de l'ordre 2 pour le vecteur uniforme

$$\Xi = [0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1]$$

Figure (4) : courbe B-SPLINE uniforme d'ordre 2

Figure (5) : courbe B-SPLINE non uniforme d'ordre 3 pour le vecteur uniforme

$$\Xi = [0, 0, 0, 0, 1/9, 1/7, 1/5, 1/2, 1, 1, 1, 1]$$

Figure 6 (a) : courbe B-SPLINE non rationnelle uniforme

Figure 7 (b) : courbe B-SPLINE non rationnelle uniforme

Figure (8) : comparaison entre l'interpolation de Lagrange et B-SPLINE

a)- Interpolation de Lagrange

b)- Interpolation B-SPLINE

Figure (9) : surface B-SPLINE non rationnelle

Figure (10) : surface B-SPLINE non rationnelle

Figure 10 (A) : fonction de base B-SPLINE

Figure 10 (B) : la première dérivée de la fonction de base B-SPLINE

Figure 10 (C) : la deuxième dérivée de la fonction de base B-SPLINE

Figure 10 (D) : fonction de base NURBS

Figure 10 (E) : la première dérivée de fonction de base NURBS

Figure 10 (F) : la deuxième dérivée de fonction de base NURBS

Figure 11 (a) : courbe Non Uniform Rational B-Spline (NURBS)

Figure 11 (b) : courbe Non Uniform Rational B-Spline (NURBS)

Figure (12) : forme complexe courbe NURBS

Figure (13) : surface NURBS de degré 2

Figure (14) : surface d'extrusion NURBS

Figure (15) : définition d'une surface de révolution

Figure (16) : Surface de révolution NURBS

## Liste des figures

---

Figure (17) :  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  solution exacte et  $\mathbf{u}_2$  solution collocation à trois coefficients

Figure (18) : Interpolation polynomiale linéaire, quadratique et de quatrième degré de l'ensemble de points décrits. Notez que l'interpolation linéaire est effectuée à l'aide de deux points  $\{(2,1),(10,2)\}$ , le quadratique avec trois points  $\{(2,1),(6,5),(10,2)\}$ . Enfin, les quatrièmes commandes avec la base de données complète

Figure (19) : Déformation d'une poutre Timoshenko. La normale tournée d'une valeur indépendante de  $V$

Figure (20) : Equilibre statique d'une longueur de poutres  $dx$

Figure (21) : Répartition de la rigidité en flexion selon l'équation (4.1) le long d'une poutre endommagée. La zone fissurée est située en abscisse  $x_e$ .

Figure(22) : base cubique NURBS localement affinée par insertion de nœuds à proximité de la zone endommagée

Figure (23) : Les premières fréquences naturelles normalisées par rapport à la profondeur des dommages  $d$

Figure (24) : première forme à quatre modes de la poutre fissurée de Timoshenko

Figure (25) : Les modes propres d'une poutre endommagée avec le vecteur de force résiduelle

Figure (26) : l'étendue et l'emplacement d'un endommagement.

Figure (28) : l'étendue et l'emplacement d'un endommagement avec  $d= 0.8$  cm

Figure (29) : l'étendue et l'emplacement d'un endommagement avec  $d= 1,6$  cm

## Liste des Tableaux

---

Tableau 1 : les points de contrôle(x,y) ainsi leur poids (w)

Tableau 2 : les conditions aux limites appliquées aux poutres

Tableau 3 : Fréquences propres en (HZ) de l'acier Free-Free sans fissure

Tableau 4 : Fréquences propres en (Hz) de la poutre fissurée libre en acier

Tableau 5 : Fréquences propres en (Hz) de la poutre fissurée libre en acier

Tableau 6 : Fréquences propres en (Hz) de la poutre fissurée libre en acier

Liste des symboles :

$p_i$  : Points de contrôles

t: Paramètre géométrique

u,v :Paramètres curvilignes

W : vecteur poids

H : vecteur nodaux

: Ordre polynomiale

$R_{i,p}$ : Fonction de base NURBS

$G_{ij}$ : Contraintes au voisinage de la pointe de la fissure.

$K_I$ : Facteur d'intensité des contraintes.

R : Rayon.

$K_S$ : Matrice de rigidité de la structure saine.

$\alpha_i$ : Facteur de réduction de raideur en pourcentage.

$K_e$  : Matrice de rigidité de la structure endommagée.

$\lambda_i$  :  $i^{eme}$  valeur propres.

M : Matrice de masse de la structure.

T : Matrice de transformation.

$\Omega$  : Matrice modale ( $\Omega = \text{diag}(w^2)$ ).

N : Nombre des modes mesurées.

A : Section droite de la poutre.

$\rho$ : Masse volumique.

$I$  : Moment d'inertie.

E: Module de Young.

L: Longueur de la poutre.

U : Energie cinétique.

V : Energie potentielle.

P : Effort axial.

## NOMENCLATURE

---

S : Effort tranchant.

M : Moment fléchissant.

G : Module de cisaillement.

S : Section droite.

$L_e$  : Longueur d'un élément.

$L_C$  : Distance entre la position de la fissure et l'extrémité droite de l'élément fissuré.

h: Hauteur.

$\mu$  : Coefficient de poisson.

$\kappa$  : Facteur de correction de cisaillement.

u: Déplacement longitudinal.

W : Déplacement transversal.

$\theta$ : Déplacement de rotation.

U(x) : Amplitude de déplacement longitudinal.

W(x) : Amplitude de déplacement transversal.

$\Theta(x)$  : Amplitude de déplacement de rotation.

K ( $\omega$ ) : Matrice de rigidité dynamique.

Y: Profondeur de la fissure durant le processus.

P(x) : Effort axial.

S(x): Effort tranchant.

M(x): Moment fléchissant

# Introduction Générale

En ingénierie, il ne suffit pas de trouver une solution « qui marche », mais, le développement continu et la recherche de méthodes et de solutions de plus en plus efficaces sont de vigueur en raison du défi de la complexité grandissante des systèmes.

Les besoins des industries de pointe et les progrès effectués dans le domaine de la mécanique, des matériaux et des structures, poussent développement de nouvelles méthodes numériques capables de modéliser et de simuler de tels systèmes.

Ainsi, la méthode des éléments finis est l'un des outils les plus efficaces et les plus répandus à notre époque une évolution importante fait actuellement son avènement celle de l'émergence d'une nouvelle génération d'éléments finis.

Différentes méthodes ont été successivement proposées pour la résolution de EDP (équations aux dérivées partielles), chacune essayant de remédier aux défaillances des précédentes. Dans l'ordre chronologique, on peut citer la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis (MEF), les méthodes de collocation (méthodes pseudo-spectrales), la méthode isogéométrique (IGA) et enfin la méthode de collocation isogéométrique (IGA-C).

Dans notre travail, nous nous intéressons à la méthode de collocation isogéométrique. pour cela, nous avons tout d'abord présenté la modélisation géométrique en utilisant les différentes techniques de modélisation en DAO, tel que les fonctions B-Spline .

La méthode de collocation isogéométrique (l'IGA-C) est une méthode qui utilise NURBS (technologie la plus courante en CAO) comme fonctions de forme.

Dans ce travail, nous proposons la construction d'un modèle numérique de poutre endommagée en utilisant la IGA-C et en se basant sur le modèle analytique de poutre de Timoshenko qui a été développé au début du 20<sup>ème</sup> siècle par Stephen Timoshenko, et encore jusqu'à présent l'un des plus précis. En effet, la poutre de Timochenko prend en compte les effets du cisaillement transversal et d'inertie en rotation qui résultent de la flexion. Nous proposons d'étudier l'applicabilité de cette méthode (méthode de collocation isogéométrique) pour détecter les endommagements dans la poutre de Timochenko endommagées.

L'endommagement entraîne des changements dans le comportement dynamique de la poutre étudiée, et donc des modifications des paramètres modaux de la structure tels que les fréquences propres, les coefficients d'amortissement et les déformées modales.

Une fois les valeurs modales des structures endommagées obtenues, nous les implémentons dans un algorithme de détection des défauts. Dans ce travail, nous utiliserons la méthode des forces modales résiduelles qui prend-on compte le changement des fréquences et des modes propres qui nous permet de savoir l'emplacement ainsi que l'étendue de l'endommagement.

Les résultats obtenus seront par la suite validés par des tests numériques et comparaison aux travaux publiés.

Ce présent mémoire est présenté en cinq chapitres, dont les quatre premiers sont consacrés à l'étude des différents outils qui seront par la suite rassemblés pour la construction du modèle numérique à l'étude et de son implémentation sous matlab. Enfin, les résultats seront présentés et discutés dans le cinquième chapitre qui sera consacré aux applications. Le contenu du chaque chapitre est décrit ci-dessous.

- **Chapitre 1** : Décrit brièvement l'évolution de la modélisation géométrique des Courbes et surfaces du B-Spline puis NURBS.
- **Chapitre 2** : Est destiné à l'étude de la méthode de collocation isogéométrique pour résoudre les problèmes aux valeurs propres.
- **Chapitre 3** : Est consacré à l'étude de la modélisation analytique des éléments de structures mécaniques en dynamique plus précisément le modèle de poutre de Timochenko.
- **Chapitre 4** : C'est dans ce chapitre que nous allons modéliser les endommagements dans les structures mécaniques ou d'un autre terme, c'est l'analyse des vibrations d'une poutre de Timoshenko fissurée
- **Chapitre 5** : C'est avec l'injection de vecteur des forces modales résiduelles Qu'on peut détecter et localiser l'emplacement des dommages.

# **Chapitre I:**

# **Modélisation géométrique**

# **avec les fonctions B-SPLINE et**

# **NURBS**

## I. Modélisation géométrique

### I.1. Introduction

La modélisation géométrique est l'ensemble d'outils mathématiques, numériques et informatiques, qui combinés permettant de construire un modèle virtuel (ou modèle informatique) d'un objet réel. Cet objet peut être plus ou moins complexe, plus ou moins schématisée. Il peut être le fruit de l'imagination, d'une tendance ou plutôt une solution plus ou moins exacte d'un problème physique donné, voire un compromis entre les deux.

La modélisation géométrique sous-entend d'être en mesure de réaliser la construction et l'assemblage de formes élémentaires pour créer des objets de plus en plus complexes en respectant des contraintes topologiques.

Il s'agit d'un modèle permettant de créer des formes du plan et de l'espace à partir de points de contrôle [1].

### I.2 Modèle B-SPLINE non rationnel

#### I.2.1. Introduction

La définition des courbes polynomiales par morceaux (B-SPLINE) permet de répondre aux insuffisances du modèle de Bézier, car celle-ci offre une grande flexibilité et une grande précision. Les B-SPLINE (basis SPLINE) ont été proposées par DeBoor(1972) et utilisées pour la première fois par Riesenfeld dans des applications CAO en 1973 [2].

Il s'agit de construire une courbe sans les inconvénients des courbes de Bézier, la courbe B-SPLINE possède les points de contrôle, simple à manipuler, et les mêmes propriétés que les courbes de Bézier. La modification d'un point de contrôle ne changera pas l'allure de la courbe, et le degré de la courbe n'est pas proportionnel au nombre de points de contrôle. L'idée principale des B-SPLINE est de remplacer les polynômes de BERNSTEIN par des fonctions, ensuite avec les points de contrôles pour obtenir la courbe. Une courbe B-SPLINE ne dépend pas uniquement des points de contrôles mais aussi d'un vecteur nodal [3].

#### I.2.2. Définition

Les courbes B-SPLINE sont définies à partir d'une combinaison linéaire des fonctions et d'une série de coordonnées dans l'espace appelées points de contrôle (fonctions de base) d'une manière analogue à celles de Bézier qui sont définies à base des polynômes de Bernstein [4].

### I.3. Nœuds et vecteur nodal

Soit  $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)$  une suite de valeurs  $m+1$  entiers naturels, telle que cette suite soit non décroissante  $(\xi_{i-1} \leq \xi_i)$ , ces valeurs sont des nœuds, et l'élément  $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m\}$  est appelé vecteur nodal.

Il existe deux familles de vecteurs nodaux.

**I.3.1. Vecteur uniforme:** un vecteur nodal est dit uniforme si l'espace entre ses nœuds est régulier  $\Xi = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]$ .

**I.3.2. Vecteur non uniforme:** un vecteur nodal est dit non uniforme si l'espace entre ses nœuds est non régulier  $\Xi = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2]$ .

**I.4. Multiplicité des nœuds :** La multiplicité d'un nœud est le nombre de fois qu'il apparaît dans une séquence nodal  $\Xi = [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2]$ .

La multiplicité du nœud 0 est égale à 2, et la multiplicité du nœud 1 est égale à 1, et la multiplicité de 2 est égale à 3. [5].

### I.5. Fonction de base B-SPLINE

Les B-SPLINE sont des fonctions polynomiales par morceau qui possèdent une classe de continuité donnée, elles sont construites à partir d'un ensemble de coordonnées dans l'espace paramétrique  $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m\}$  ou:

- $\xi_i \in \mathbb{R}$  est le  $i^{eme}$  nœud.
- $i$  est l'indice,  $i=1,2,\dots, m$
- $m$  est l'ordre de fonction.

Les fonctions de l'ordre  $m$  données quelconques sont définies récursivement à l'aide de la formule de Cox-DeBoor à partir du vecteur nodal  $\Xi$  [3].

La définition récursive des fonctions B-SPLINE est donnée par la formule suivante:

Pour l'ordre  $m=0$  :

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (I.1)$$

$$N_{i,m}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+m} - \xi_i} \cdot N_{i,m-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+m+1} - \xi}{\xi_{i+m+1} - \xi_i} \cdot N_{i+m,m-1}(\xi) \dots \dots \dots \quad (I.2)$$

Avec :

$$\xi \in [\xi_{i+1}, \xi_{i+m+1}]$$

Si le numérateur et le dénominateur sont nul ensemble ou le dénominateur est nul,

On adopte la convention.

Dans cet exemple :

On va varier l'ordre de la fonction de base pour un vecteur uniforme  $\Xi = [0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1]$

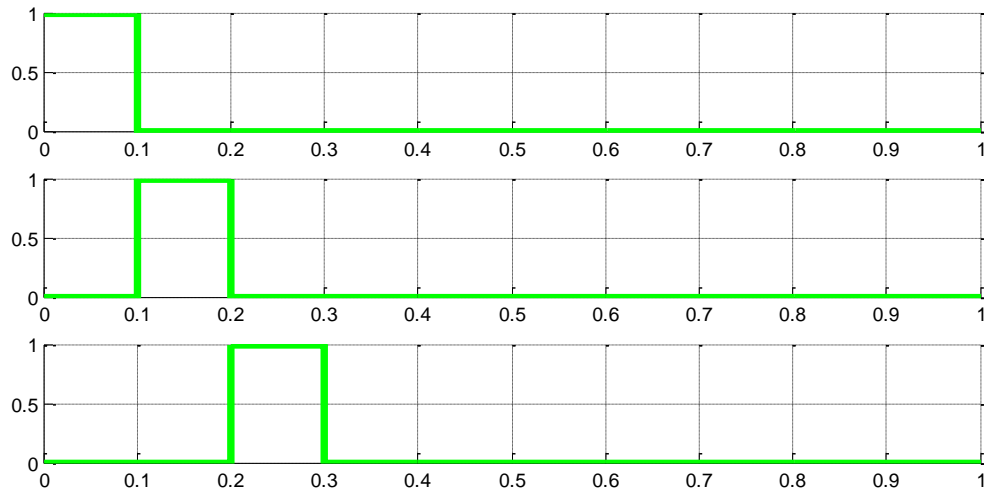


Figure (1): fonction de base de l'ordre 0 pour le vecteur uniforme

$$\Xi = [0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1]$$

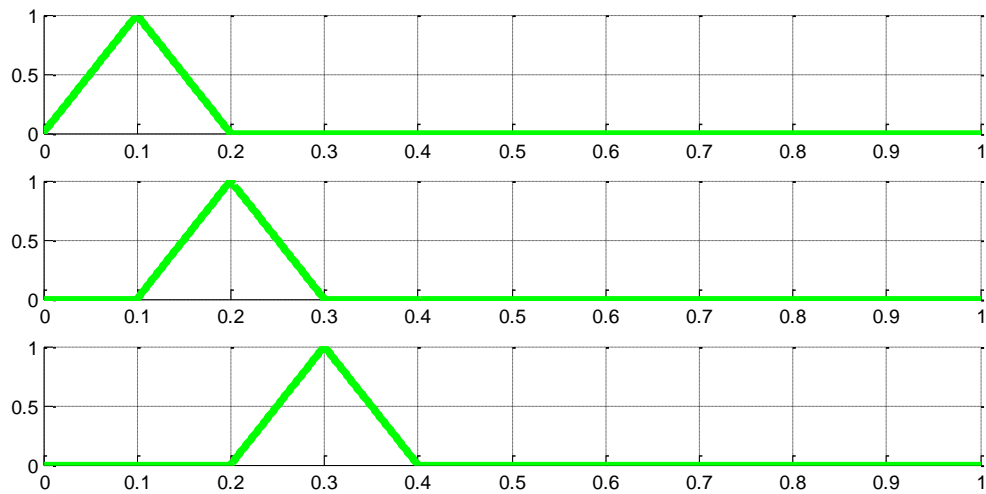


Figure (2) : fonction de base de l'ordre 1 pour le vecteur uniforme

$$\Xi = [0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1]$$

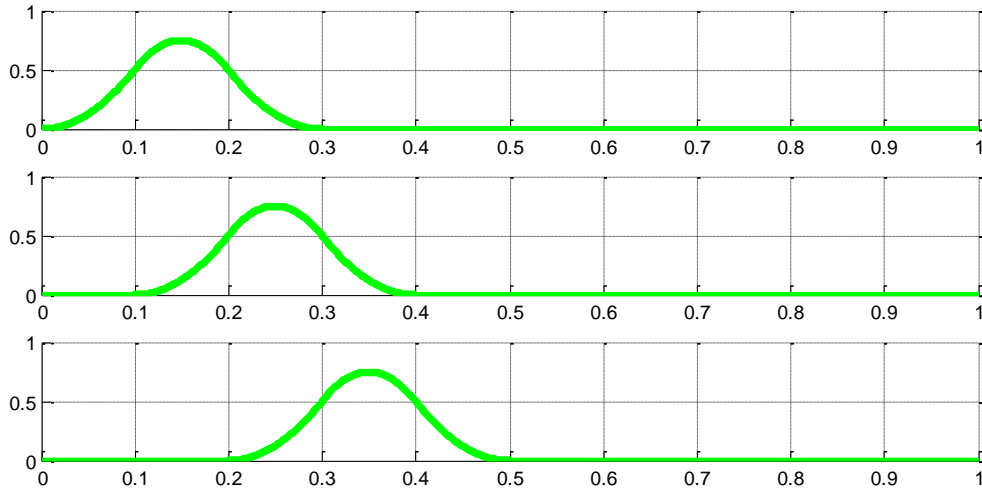


Figure (3) : fonction de base de l'ordre 2 pour le vecteur uniforme

$$\Xi = [0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1]$$

## I.6 Les différents types de fonctions B-SPLINE

### I.6.1. B-Splines uniforme

On appelle B-SPLINE uniforme les fonctions de base dont la courbe est construite à l'aide d'un vecteur nodal où l'intervalle entre deux nœuds est constant.

Exemple sous MATLAB :

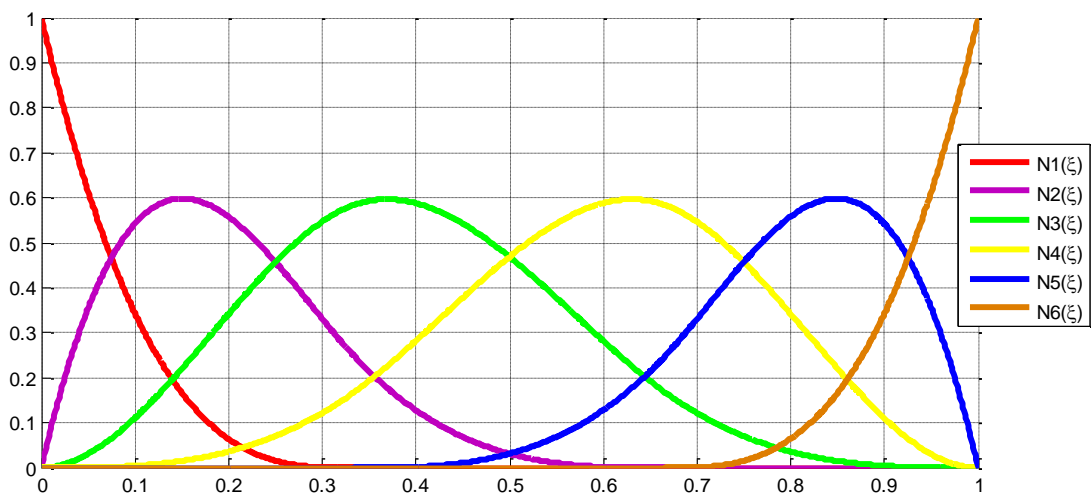


Figure (4) : courbe B-SPLINE uniforme d'ordre 2

### I.6.2. B-Spline non uniforme

On appelle B-Spline non uniforme les fonctions de base dont la courbe est construite à l'aide d'un vecteur nodal où l'intervalle entre deux nœuds successifs n'est pas constant.

Exemple sur MATLAB :

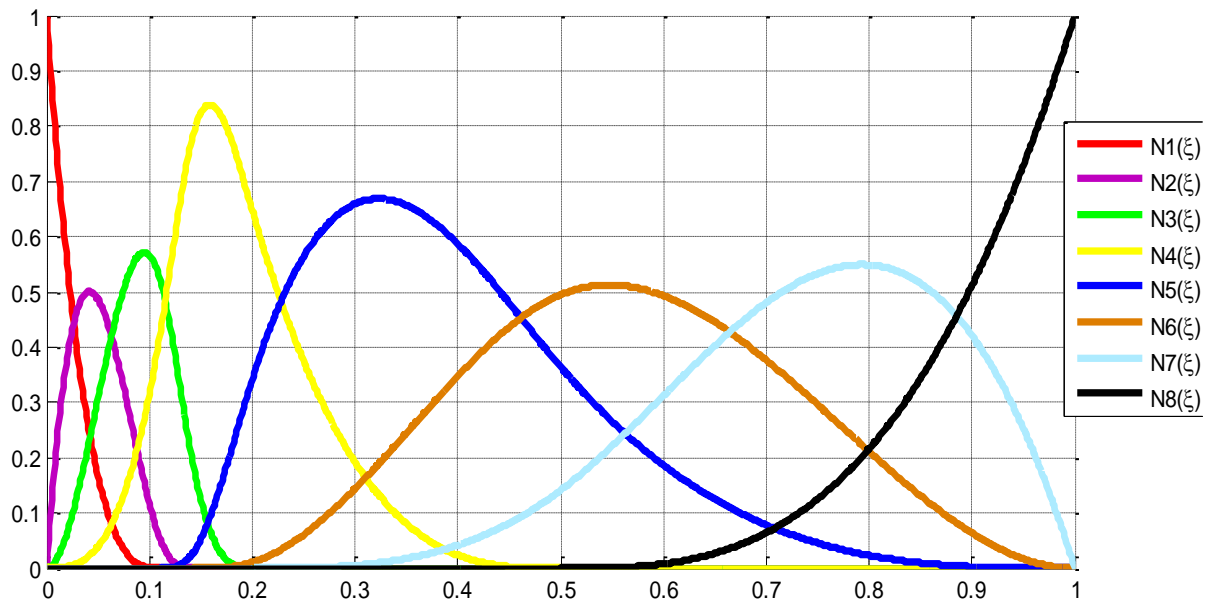


Figure (5) : courbe B-SPLINE non uniforme d'ordre 3 pour le vecteur uniforme

$$\Xi = [0, 0, 0, 0, 1/9, 1/7, 1/5, 1/2, 1, 1, 1, 1]$$

### I.7. Propriétés des fonctions de base

- Le vecteur nodal influe principalement sur la propriété de continuité et de dérivabilité.
- Chaque intervalle  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$  définit la courbe délimité par les points  $(\xi_i)$  et  $(\xi_{i+1})$
- Support local: si les fonctions  $N_{i,m}(\xi)$  s'annulent, il n'y aura aucune influence en dehors de l'intervalle  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ .
- La positivité :  $N_{i,m}(\xi) \geq 0 \quad i=1, 2, 3, \dots, n$ .
- La base constitue une partition unité  $\sum_{i=0}^n N_{i,m}(\xi) = 1 \quad \forall \xi$ .

## I.8. Courbes de B-Spline

### I.8.1. Courbes B-Spline polynomiales uniforme

Pour construire des courbes B-SPLINE, on fait appel aux fonctions B-SPLINE définies précédemment. Le choix d'un vecteur nœud va permettre d'introduire des éléments de discontinuité agissant sur la forme de la courbe.

. La courbe de B-SPLINE est définie à partir de  $n+1$  points  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ , par la formule suivante:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,m}(\xi) \cdot P_i \quad (I.3)$$

$P_i$  : Les pôles du polygone de contrôle

$N_{i,m}(\xi)$ : Fonction de base de degré  $m$

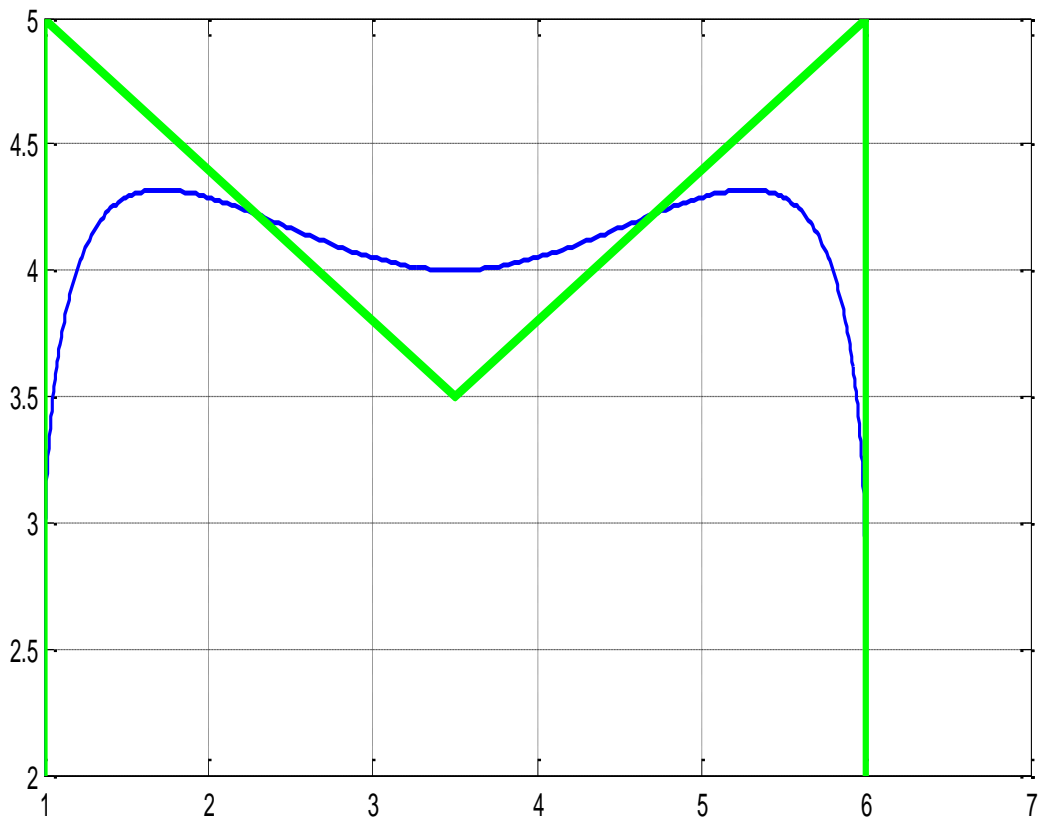


Figure 6 (a): courbe B-SPLINE non rationnelle uniforme

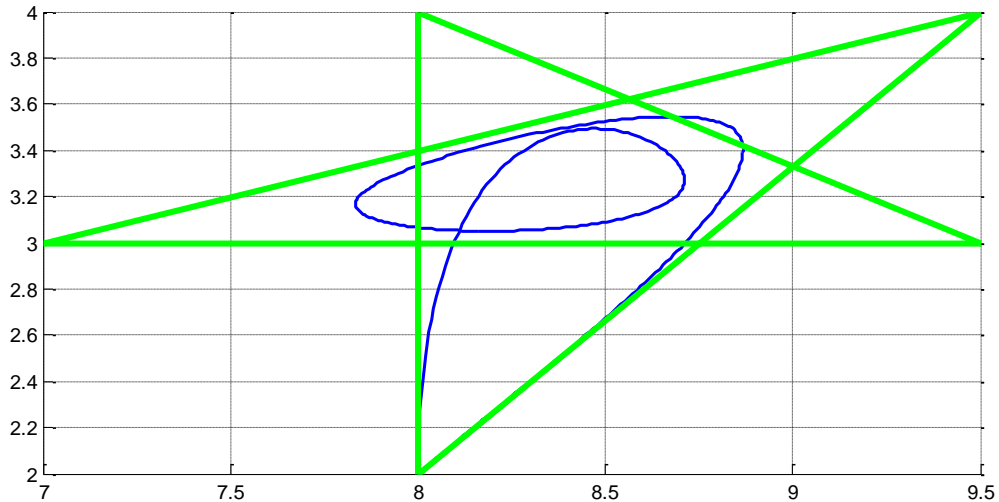


Figure 7 (b): courbe B-SPLINE non rationnelle uniforme

### I.8.2. Propriétés des Courbes B-Spline polynomiales uniforme

Les courbes B-Spline polynomiales uniforme présentent les propriétés suivantes:

- Enveloppe convexe: la courbe est contenue dans une enveloppe convexe des pôles.
- Contrôle local : le déplacement d'un pôle engendre une déformation locale de la courbe.
- Invariance affine : une transformation affine est appliquée à la courbe si elle est appliquée au polygone caractéristique.
- La courbe B-spline non rationnelle coïncide avec son polygone caractéristique au premier et au dernier point de contrôle.
- La courbe B-spline est  $p$  fois continument dérivable ( $p=m-k$ ).

En plus de ces propriétés on trouve une propriété de diminution de variation, cette propriété est particulière en comparaison avec le comportement d'une courbe représenté par les polynômes standards de Lagrange. On prend l'exemple [4] illustré sur la figure (8). On note qu'à mesure que l'ordre augmente l'amplitude des oscillations augmente également, par contre les courbes B-Spline se comportent très différemment. Cette propriété mène les courbes B-spline à avoir une très grande utilité dans l'analyse. [6].

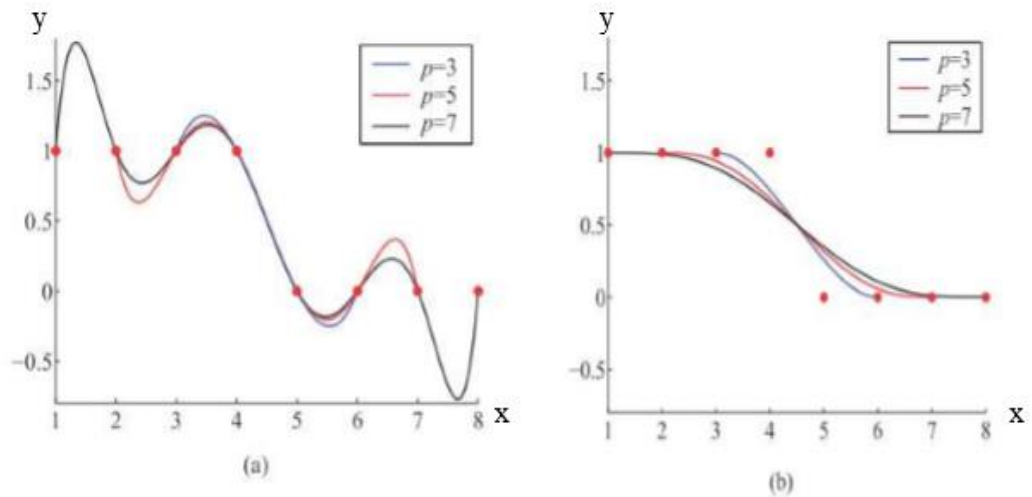


Figure (8) : comparaison entre l'interpolation de Lagrange et B-SPLINE

a)- Interpolation de Lagrange

b)- Interpolation B-SPLINE

### I.8.3. Surface B-SPLINE non rationnelle

La surface est une extension directe des courbes B-SPLINE non rationnelles suivant deux directions u et v.

Une surface B-SPLINE non rationnelle de degré (p,q) est définie par :

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) P_{i,j} \quad (I.4)$$

$N_{i,p}(\xi)$  et  $N_{j,q}(\eta)$  : Comme fonction de base B-SPLINE

$$\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}\}$$

$$H = \{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{m+q+1}\}$$

$\Xi$  et  $\eta$  sont deux vecteurs nodaux

$$u \in [\xi_0, \xi_{n+p+1}] \text{ et } v \in [\eta_0, \eta_{m+q+1}]$$

On peut même écrire l'expression (1.4) sous forme matricielle :

$$S(\xi, \eta) = [N_{0,p}(\xi), N_{1,p}(\xi), \dots, N_{n,p}(\xi)] \begin{bmatrix} P_{0,0} & \dots & P_{0,m} \\ P_{n,0} & \dots & P_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{0,q}(\eta) \\ N_{m,q}(\eta) \end{bmatrix} \quad (I.5)$$

Exemple:

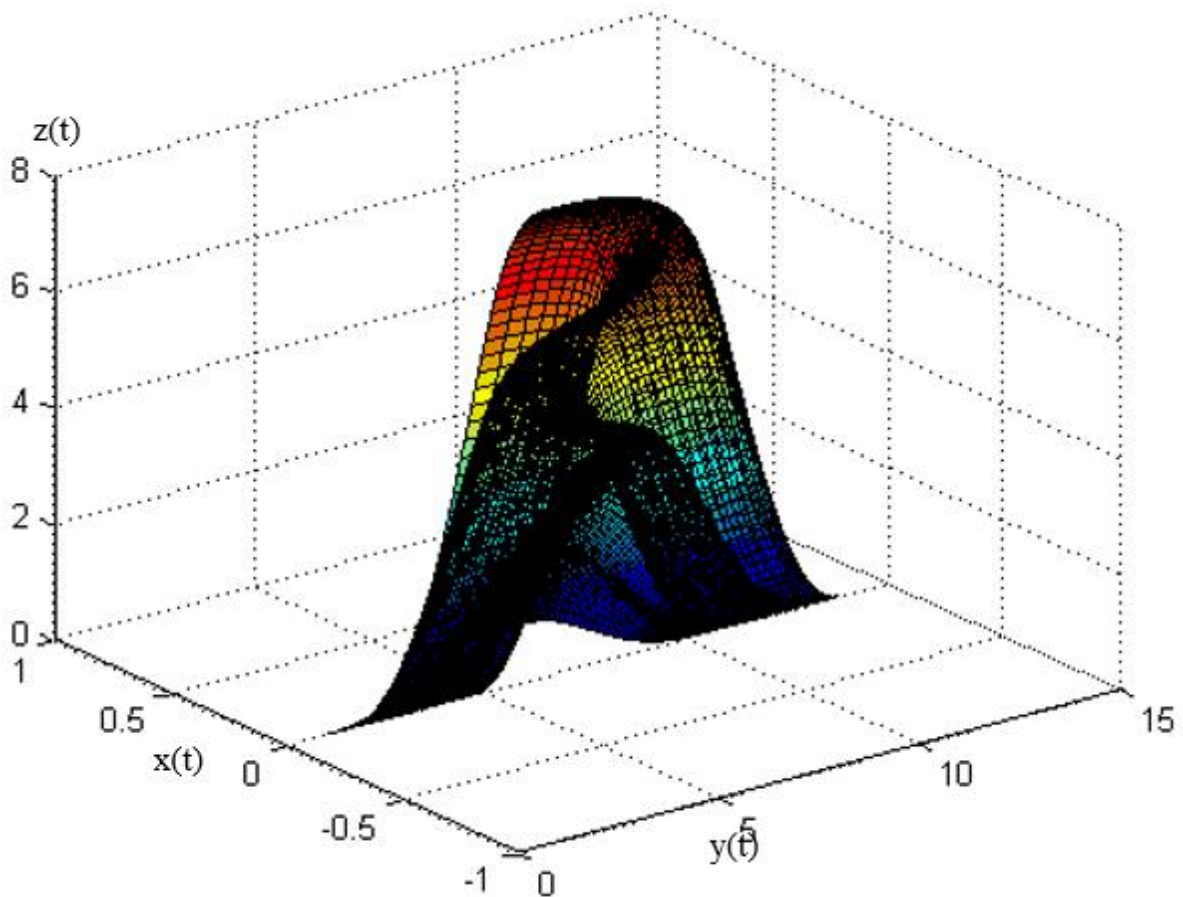


Figure (9) : surface B-SPLINE non rationnelle

#### I.8.4. Propriétés des surfaces B-SPLINES

- Non négativité (la positivité)  $N_{i,n}(\xi)N_{j,m} > 0, \forall i, j, \xi, \eta$
- Partition unité  $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,n}(\xi) N_{j,m}(\eta) = 1 \forall \xi$  et  $\eta$
- Enveloppe convexe: la surface  $S(\xi, \eta)$  est contenue dans l'enveloppe convexe des points de contrôles
- Si  $n > 0$  et  $m > 0$  alors  $N_{i,n}(\xi)N_{j,m}(\eta)$  atteint exactement une seule valeur maximale.
- Modification locale : si on change les coordonnées d'un point  $P_{i,j}$  seulement le rectangle  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}]$  qui sera modifié
- Invariance affine : une transformation affine est appliquée à la surface si elle est appliquée aux pôles.

### I.9. Modèle B-Spline rationnel non uniforme (NURBS)

Le B-SPLINE rationnel non uniforme (NURBS) est actuellement un des modèles mathématiques les plus employés pour la description des surfaces géométriques complexes. Les NURBS ont des propriétés géométriques et analytiques excellentes, et c'est pour cette raison que sont entrés rapidement dans les logiciels de CAO et CFAO.

Les NURBS une généralisation de B-SPLINE. Et comme des courbes et surfaces de type (cercle, ellipse, hyperbole et cône) et les sphères, surfaces de révolutions de peuvent être représentés précisément par les B -SPLINE. Les NURBS répondent et résolvent ces problèmes de géométrie.

#### I.9.1. Fonction de base de NURBS

Par la formule mathématique suivante, on définit la fonction NURBS :

$$R_{i,m}(\xi) = \frac{w_i N_{i,m}(\xi)}{\sum_{i=1}^n w_i N_{i,m}(\xi)} \quad (I.6)$$

Avec :

$N_{i,m}(\xi)$  : fonction de base B-spline

$w_i$  : Les poids

#### I.9.2. Propriétés des fonctions de base NURBS

- Non négativité :  $R_{i,m}(\xi) \geq 0$  pour toutes valeurs de  $i$ ,  $m$  et  $\xi$
- Partition unité :  $\sum_{i=1}^n R_{i,m}(\xi) = 1 \forall \xi \in [\xi_{min}, \xi_{max}]$
- Si tous les poids  $w_i$  sont égaux, les NURBS deviennent des B-Splines.
- Invariance affine.

#### I.9.3. Dérives des fonctions NURBS

$$\frac{d}{dt} R_{i,m}(\xi) = w_i \frac{W(\xi)N'_{i,m}(\xi) - W'(\xi)N_{i,m}(\xi)}{(W(\xi))^2} \quad (I.7)$$

Avec :

$$W(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,m}(\xi) w_i$$

$$W'(\xi) = \sum_{i=1}^n N'_{i,m}(\xi) w_i$$

$$N'_{i,m}(\xi) = \frac{d}{dt} N_{i,m}(\xi) = \frac{m}{t_{i+m} - t_i} N_{i,m-1}(\xi) - \frac{m}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} N_{i+1,m-1}(\xi)$$

D'une manière générale pour k-ème dérivée on a la formule générale suivante :

$$\frac{d^k}{dt^k} R_{i,m}(\xi) = \frac{A_i^{(k)}(\xi) - \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} w^j(\xi) \frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}} R_{i,m}(\xi)}{w(\xi)} \quad (I.8)$$

Avec :

$$W^j(\xi) = \frac{d^k}{dt^k} W(\xi)$$

$$A_i^{(k)}(\xi) = w_i \frac{d^k}{dt^k} N_{i,m}(\xi)$$

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$$

Dérivée k-ème des fonctions de base B-spline est donnée par :

$$\frac{d^k}{dt^k} N_{i,m}(\xi) = \frac{m}{t_{i+m} - t_i} \left( \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} N_{i,m-1}(\xi) \right) - \frac{m}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} \left( \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} N_{i+1,m-1}(\xi) \right) \quad (I.9)$$

Les fonctions de base NURBS sont des fonctions liées aux fonctions de base

B-SPLINE, donc leurs dérivées dépendent des dérivées des fonctions de base B-SPLINE.

Les figures suivantes montrent les fonctions de base B-splines et leur dérivées et les fonctions de base NURBS et leurs dérivées.

Figure 10 (A) : fonction de base B-SPLINE

Figure 10 (B) : la première dérivée de la fonction de base B-SPLINE

Figure 10 (C) : la deuxième dérivée de la fonction de base B-SPLINE

Figure 10 (D) : fonction de base NURBS

Figure 10 (E) : la première dérivée de fonction de base NURBS

Figure 10 (F) : la deuxième dérivée de fonction de base NURBS

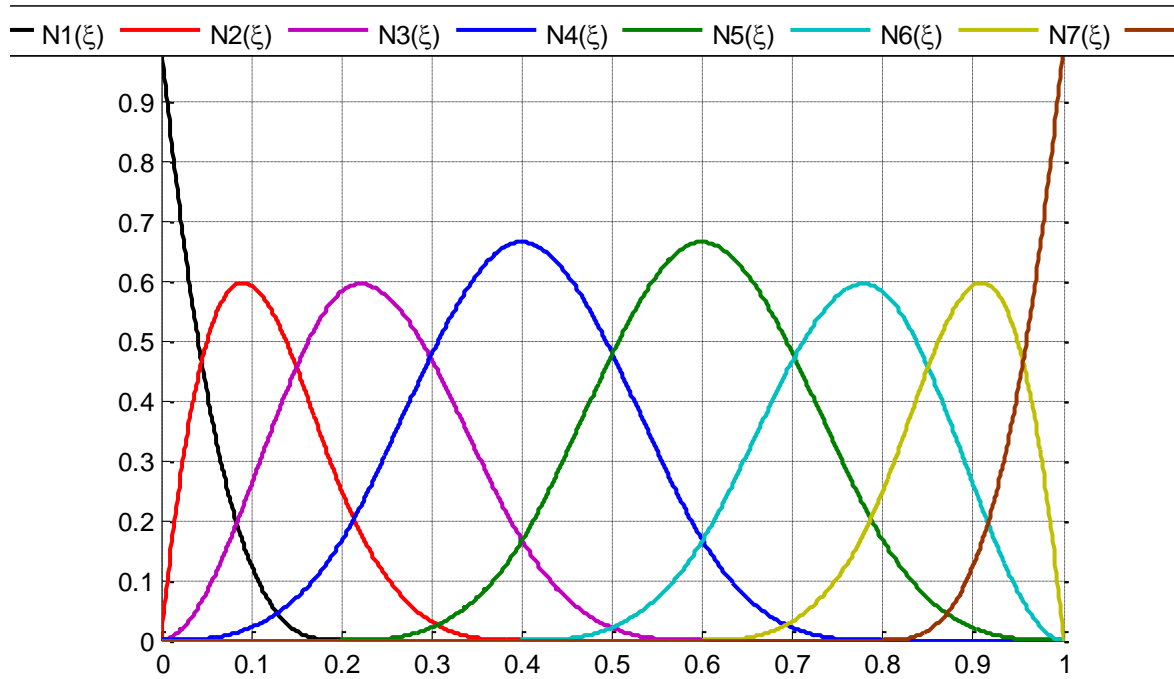


Figure 10 (A) : fonction de base B-SPLINE

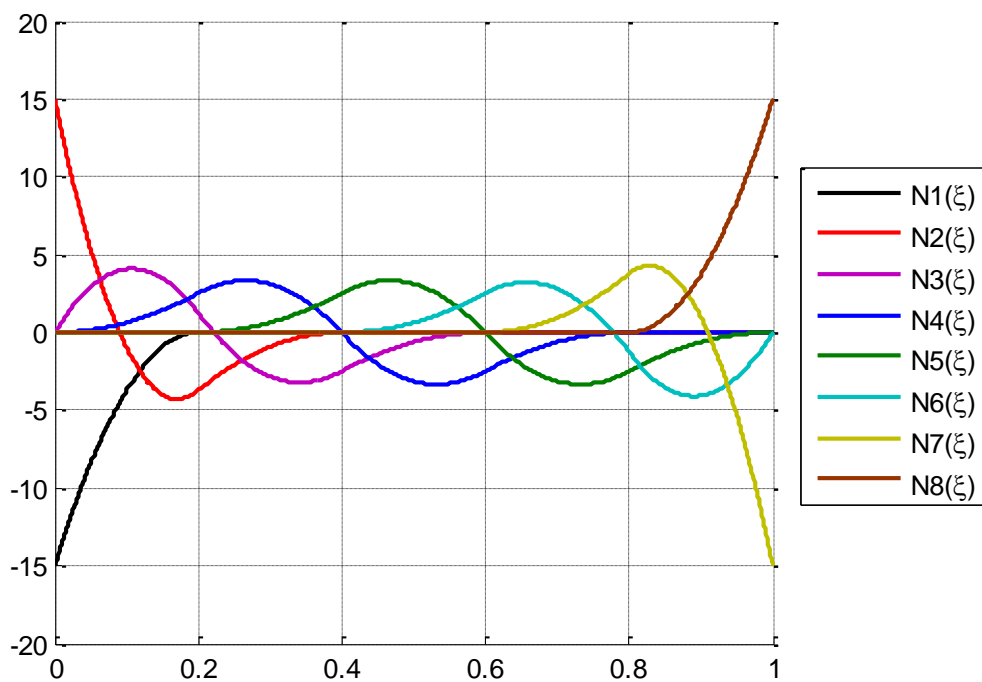


Figure 10(B) : la première dérivée de la fonction de base B-SPLINE

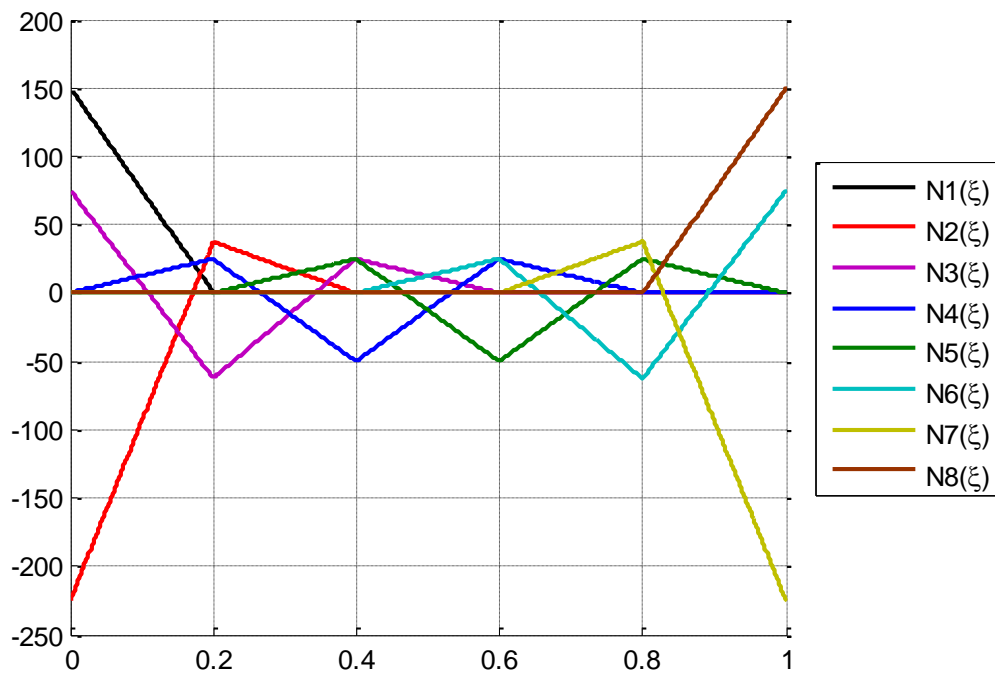


Figure 10 (C) : la deuxième dérivée de la fonction de base B-SPLINE

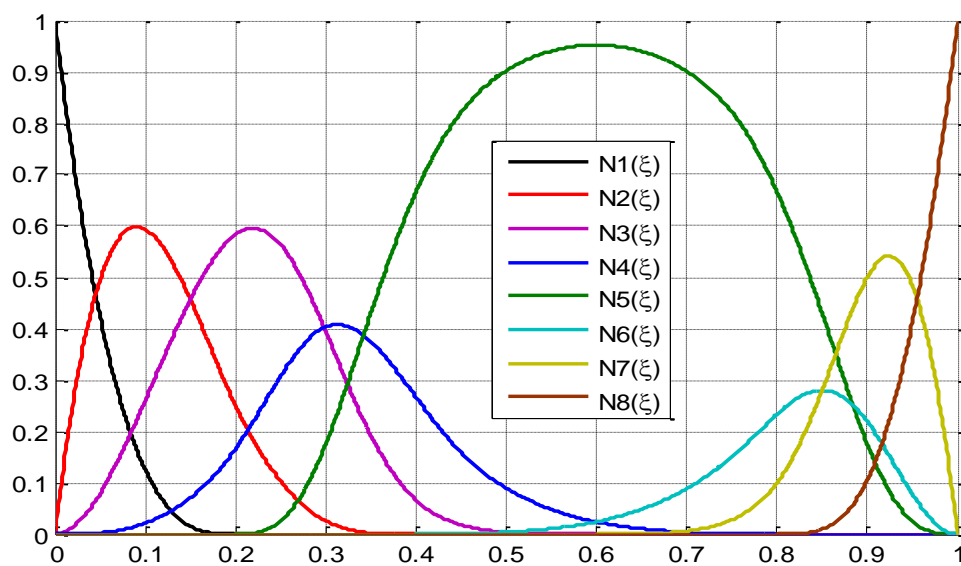


Figure 10 (D) : fonction de base NURBS

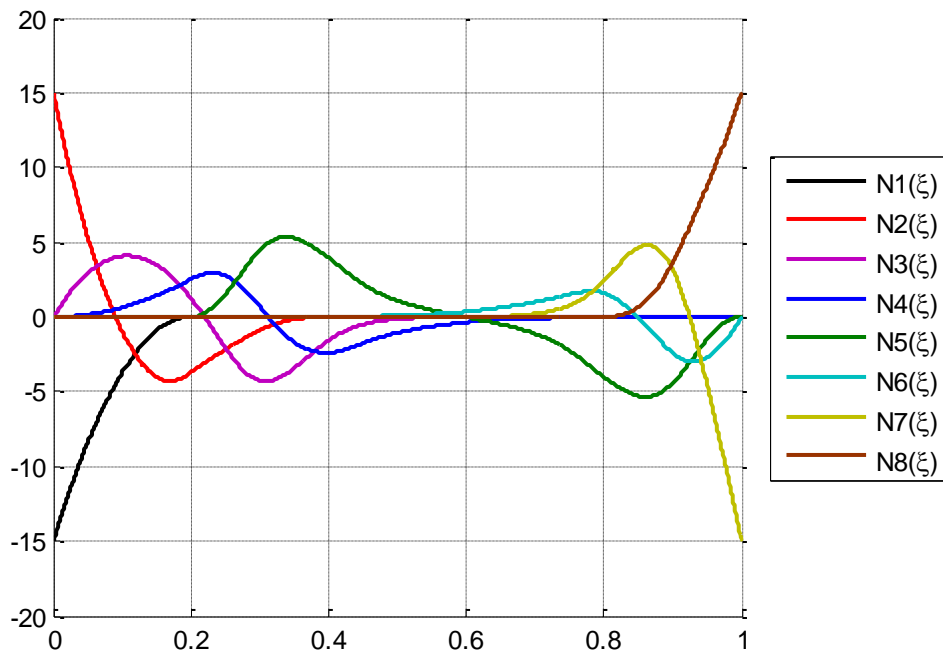


Figure 10 (E) : la première dérivée de fonction de base NURBS

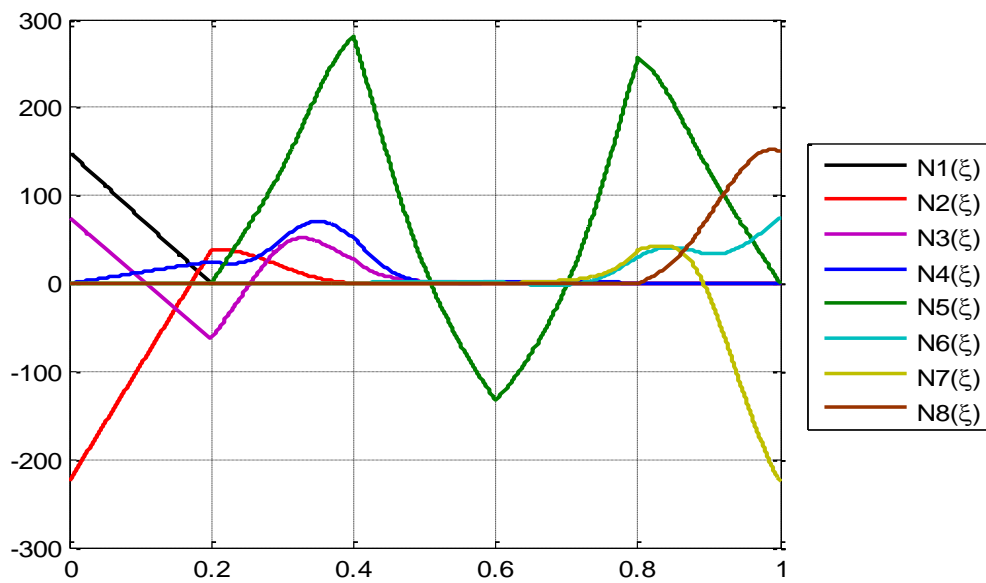


Figure 10 (F) : la deuxième dérivée de fonction de base NURBS

## I.10. Courbe B-Spline Rationnelle (NURBS)

### I.10.1 Définition

Soit  $\Xi$  un vecteur nœud, soit  $p$  un polygone de contrôle dans  $R^n$  et des poids  $w_i$  attachés à chaque point de contrôle et on suppose que les poids ne sont pas tous nul.

La courbe de NURBS de degré  $m$  est définie par la formule suivante :

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n P_i R_{i,m}(\xi) \quad (\text{I.10})$$

Avec :

$$R_{i,m}(\xi) = \frac{w_i N_{i,m}(\xi)}{\sum_{i=1}^n w_i N_{i,m}(\xi)} \quad \text{Représente les Fonction NURBS}$$

$P_i$ : Les points de contrôles

$w_i$ : Les poids associés aux pôles

$m$ : Degré des fonctions NURBS

$N_{i,m}(\xi)$  : Les fonctions de bases B-Spline

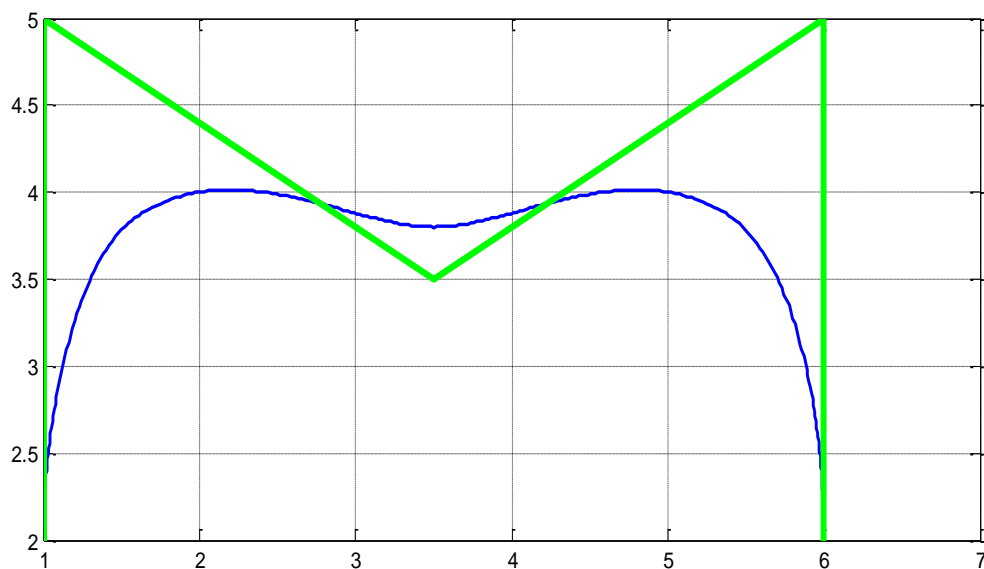


Figure 11 (a) : courbe Non Uniform Rational B-Spline (NURBS)

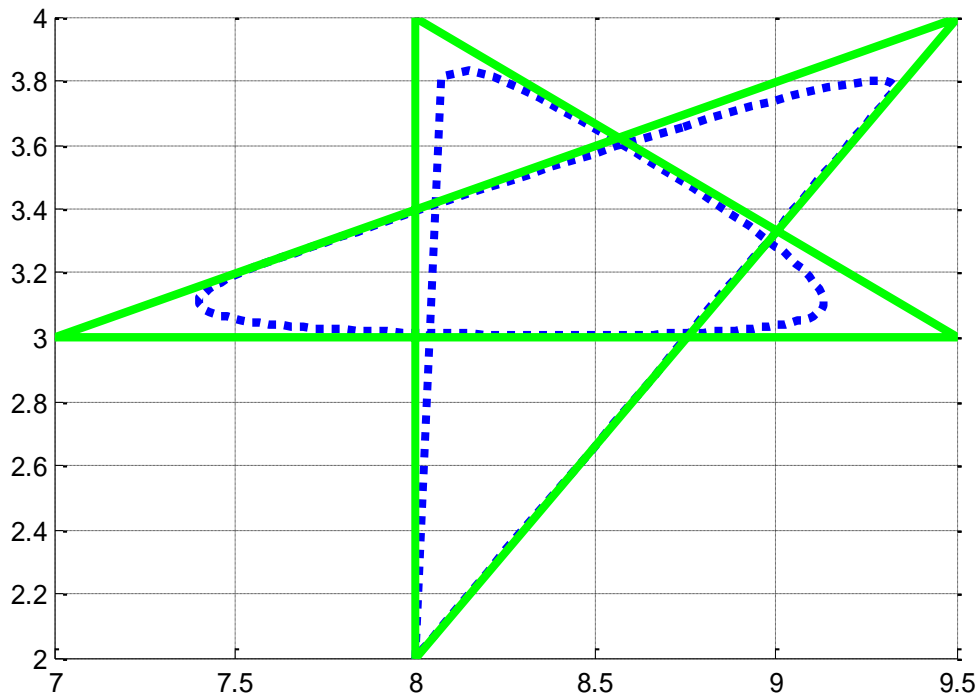


Figure 11 (b) : courbe Non Uniform Rational B-Spline (NURBS)

### I.10.2. Propriétés géométriques des courbes NURBS

- Représentation des coniques : en choisissant correctement les points de contrôle toute forme conique peut être représentée exactement par une NURBS
- Invariance affine : la transformée affine d'une courbe NURBS est la courbe passant par la transformée des points de contrôle
- Invariance projective : contrairement aux courbes B-Spline l'image d'une courbe NURBS par une projection est la courbe NURBS passant par la projection des points. (Les poids doivent être recalculés en fonction de la matrice de projection)
- Dérivation et continuité : pour tout  $\xi$  qui n'est pas une valeur nodale,  $C(\xi)$  est infiniment dérivable, si  $\xi$  est égale à une valeur nodale de multiplicité  $k$  alors  $C(\xi)$  est  $(m-k)$  fois dérivable ( $C(\xi)$  n'est pas nécessairement continue)
- Les courbes NURBS peuvent représenter exactement toutes les formes coniques usuelles de conception

. L'influence de la variation des poids  $w_i$  sur les pôles  $p_j$  est analogue à celle de Bézier rationnelle sauf que la variation dans le cas de NURBS est locale.

### I.10.3. CONSTRUCTION D'UNE FORME COMPLEXE PAR LES NURBS

le tableau ci-dessous représente les points de contrôle  $(x,y)$  ainsi leur poids  $(w)$

X	Y	W
1	1.5	0.5
1	3	0.5
3	3	0.5
4	4	1
6.5	4	2
6.5	3	1
8	3	5
8	1.5	5
6.5	1.5	1
6	2	2
5.5	1.5	2
4	1.5	1
3.5	2	0.5
3	1.5	0.5
1	1.5	0.5

Tableau 1 : les points de contrôle(x,y) ainsi leur poids (w)

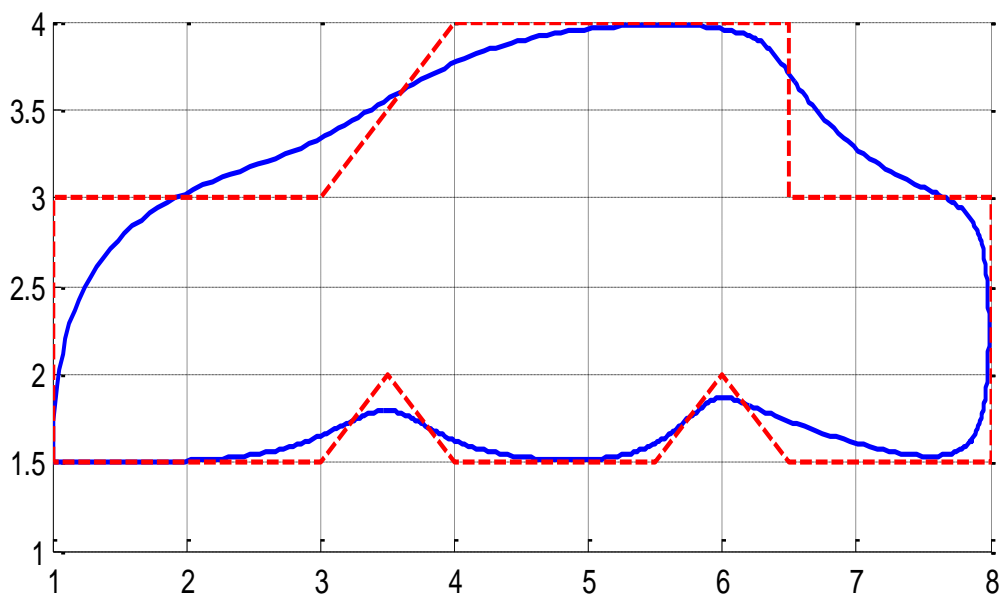


Figure (12) : forme complexe courbe NURBS

### I.11. Surfaces NURBS

une surface NURBS de degré ( p ,q)

$$S(\xi, \eta) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad (\text{I.11})$$

Avec :

$$0 \leq \xi, \eta \leq 1$$

$P_{i,j}$ : Points de contrôles bidirectionnels (réseau des points de contrôle)

$w_{i,j}$ : Les poids

$N_{i,p}(\xi)$  et  $N_{j,q}(\eta)$  : sont les fonctions de base B-Spline

#### Exemple de surface de NURBS

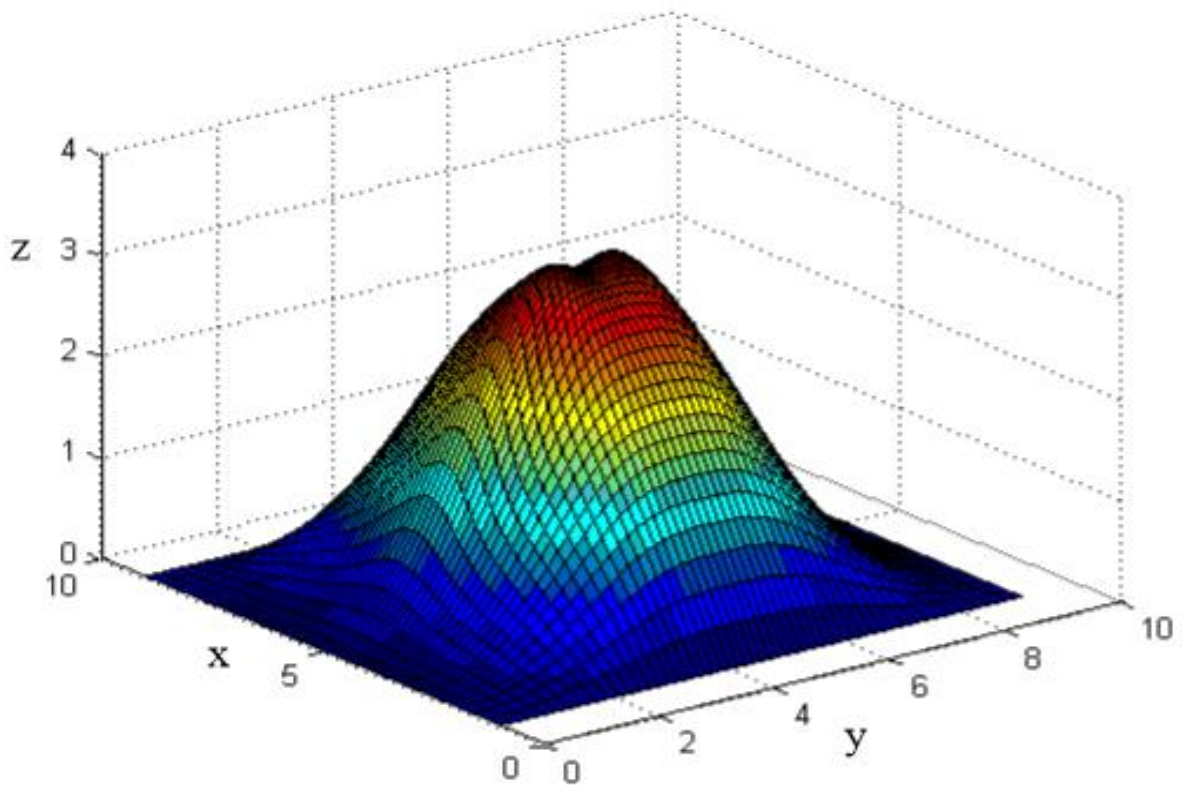


Figure (13) : surface NURBS de degré 2

### I.11.1. Propriété des surfaces NURBS

- Non négativité :  $R_{i,j}(\xi, \eta) \geq 0 \forall i, j, \xi$  et  $\eta$
- Partition unité :  $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) = 1 \forall (\xi, \eta) \in [0,1] * [0,1]$
- Si  $p > 0$  et  $q > 0$  alors  $R_{i,j}(\xi, \eta)$  atteint exactement une seule valeur maximale
- $R_{0,0}(0,0) = R_{n,0}(1,0) = R_{0,m}(0,1) = R_{n,m}(1,1) = 1$
- Invariance affine
- Enveloppe convexe

Modification locale : si on déplace le point  $P_{i,j}$ , ou on change la valeur de  $w_{i,j}$  alors seulement le rectangle  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] * [\eta_j, \eta_{j+q+1}]$  qui sera modifié

### I.12. Modélisation et construction des surfaces particulières par les NURBS [2]

#### I.12.1. Construction d'une surface d'extrusion

Une surface d'extrusion est générée par une courbe généralement plane glissant le long d'une trajectoire rectiligne ou non. Etant donné un vecteur  $\mathbf{B}$  de longueur unité et  $C(\xi) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(\xi) P_i$

une courbe NURBS de degré  $p$  avec le vecteur nœud  $\Xi$  et les poids  $w_i$ . La surface d'extrusion  $S(\xi, \eta)$  est obtenue par translation de la courbe  $C(\xi)$  le long du vecteur  $\mathbf{B}$ .

La surface d'extrusion est obtenue par la formule suivante :

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^1 R_{i,p, \square, 1}(\xi, \eta) P_{i, \square} \quad (I.12)$$

Avec  $R_{i, p, \square, 1}(\xi, \eta) = R_{i, p}(\xi) R_{\square, 1}(\eta)$  : fonction de base NURBS

Et  $P_{i, \square}$  : pôles de réseau caractéristique

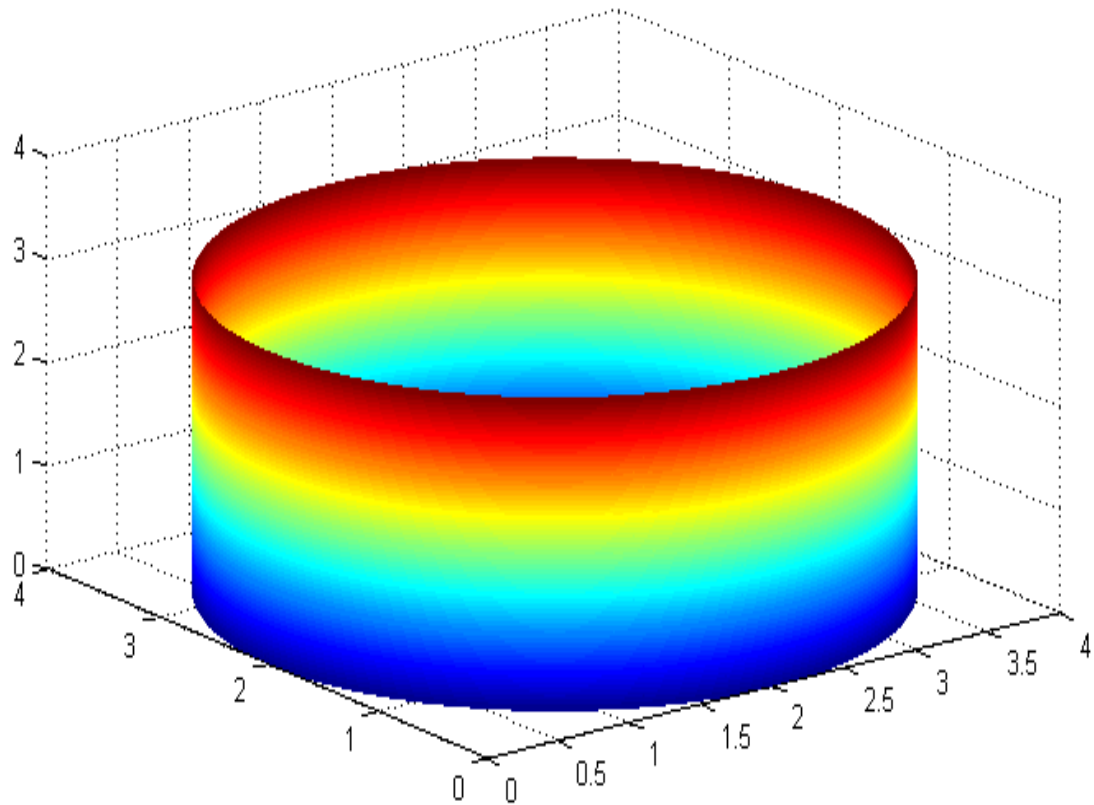


Figure (14) : surface d'extrusion NURBS

### I.12.2. Construction d'une surface de révolution

Une surface de révolution est une surface possédant un axe de symétrie, pour modéliser ce genre d'objets, il suffit de construire un profil  $C(\xi)$  puis de faire tourner ce profil autour d'un axe.

La figure suivante montre le principe :

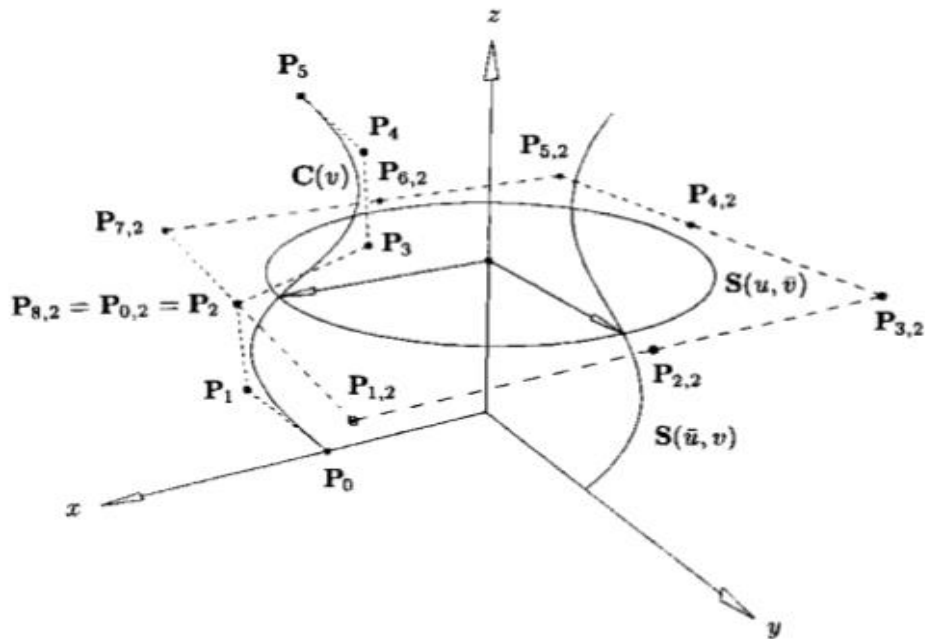


Figure 15: définition d'une surface de révolution

$C(\xi) = \sum_{i=1}^n P_i R_{i,m}(\xi)$  , est la courbes NURBS de degré  $m$   $C(\xi)$  est appelée génératrice. Cependant, la courbe  $C(\xi)$  se trouve dans le plan XZ et que nous tournons cette courbe de  $360^\circ$  autour de l'axe Z, la surface  $S(\xi, \eta)$  et telle que représentée sur la figure suivante :

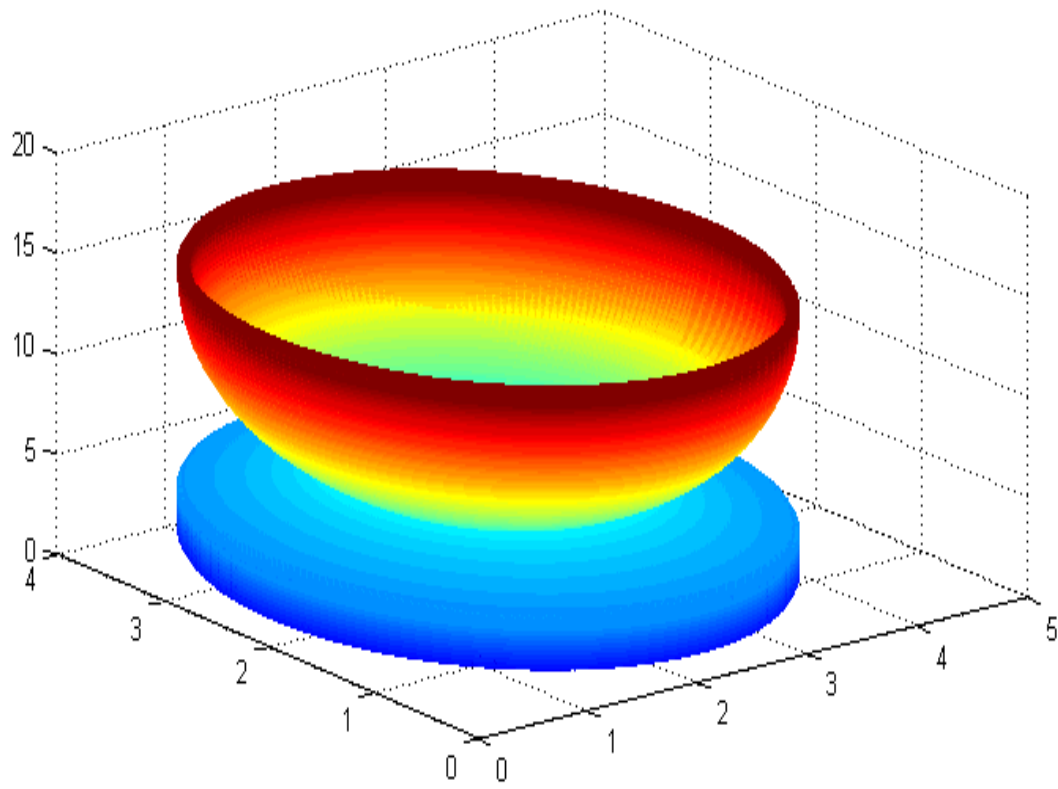


Figure (16) : Surface de révolution NURBS

# **Chapitre II: méthode de collocation isogéométrique**

### II.1. Méthode de collocation isogéométrique (IGA-C)

Le but de ce chapitre est de présenter la méthode de collocation isogéométrique pour résoudre les équations aux dérivées partielles et plus précisément les problèmes aux valeurs propres modélisant le comportement dynamique des structures.

Comme indiqué dans l'introduction, l'IGA-C est une méthode de collocation qui utilise NURBS comme fonctions de forme. En conséquence, nous présentons tout d'abord les bases théoriques des méthodes de collocation (méthodes pseudo-spectrales). Ensuite, nous présentons l'IGA-C.

### II.2. Méthodes de collocation: principe général et fondement

L'idée de base est de supposer que l'inconnu  $u(x)$  peut être approché par une somme de  $N + 1$  «fonctions de base»  $R_n(x)$  et  $N + 1$  coefficients d'expansion  $u_i$  comme dans (II.1)

$$u(x) \approx u^p(x) = \sum_{i=0}^n u_i R_i(x_j) \quad (\text{II.1})$$

Lorsque cette série est substituée dans l'équation (II.2).

$$Lu = f \quad (\text{II.2})$$

Tel que :

$L$  : est l'opérateur de l'équation différentielle ou intégrale, le résultat défini par (II.3) est appelé «fonction résiduelle»

$$(\; a_0, a_1, \dots, a_N) = Lu - fx \quad (\text{II.3})$$

Lorsque  $R(x; a_n)$  est égal zéro, la solution est exacte. Le défi consiste à choisir les coefficients de la série de manière à minimiser la fonction résiduelle. Les différentes méthodes spectrales et pseudo-spectrales diffèrent principalement par leurs stratégies de minimisation [7].

#### Exemple:

Pour mieux expliquer le concept de méthode de collocation, prenons le cas d'un problème simple tel que la PDE linéaire unidimensionnelle (2.4).

$$\begin{cases} u_{xx} - (x^6 + 3x^2)u = 0 \\ u(-1) = u(1) = 1 \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

La solution exacte de (2.4) est (2.5). (Voir [14])

$$u(x) = e^{\left(\frac{x^4-1}{4}\right)} \quad (\text{II.5})$$

Comme les approximations polynomiales sont recommandées pour la plupart des problèmes, nous choisissons une solution spectrale (II.6). Afin de satisfaire les conditions aux limites indépendamment des coefficients spectraux inconnus, il convient d'écrire l'approximation comme dans (II.6).

$$u_2 = 1 + (1 - x^2) (a_2 + a_1 x + a_2 x^2) \quad (\text{II.6})$$

La décision de ne garder que trois degrés de liberté est arbitraire.

La substitution de la solution (II.6) dans l'équation (II.4) donne (II.7).

$$R(x; a_0, a_1, \dots, a_N) = u_{2,xx} - (x^6 + 3x^2)u_2 \quad (\text{II.7})$$

Le résidu  $R(x, a_0, a_1, a_2)$  est donné en (2.8).

$$R = 2a_2 + 2a_0 - 6a_1x - (3 + 3a_0 + 12a_0)x^2 - 3a_1x^3 + 3(a_0 - a_2)x^4 + 3a_1x^5 + (-1 - a_0 + 3a_2)x^6 - a_1x^7 + (a_0 - a_2)x^8 + a_1x^9 + 10a_2x^{10} \quad (\text{II.8})$$

On choisit de rendre le résidu nul en un ensemble de points en nombre égal à celui des coefficients inconnus dans  $u_2(x)$ . C'est ce qu'on appelle la méthode de «collocation» ou «pseudo-spectrale».

Si nous choisissons arbitrairement les points  $x_i = \{-1/2; 0; 1/2\}$ , cela donne les trois équations (II.9)

$$\begin{cases} \frac{-659}{256}a_0 + \frac{1683}{512}a_1 - \frac{1171}{1024}a_2 - \frac{49}{64} = 0 \\ -\frac{659}{256}a_0 - \frac{1683}{512}a_1 - \frac{1171}{1024}a_2 - \frac{49}{64} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Les coefficients (2.10) sont ensuite déterminés par résolution (2.9).

$$a_0 = -\frac{784}{3807}, a_1 = 0, a_2 = a_0 \quad (\text{II.10})$$

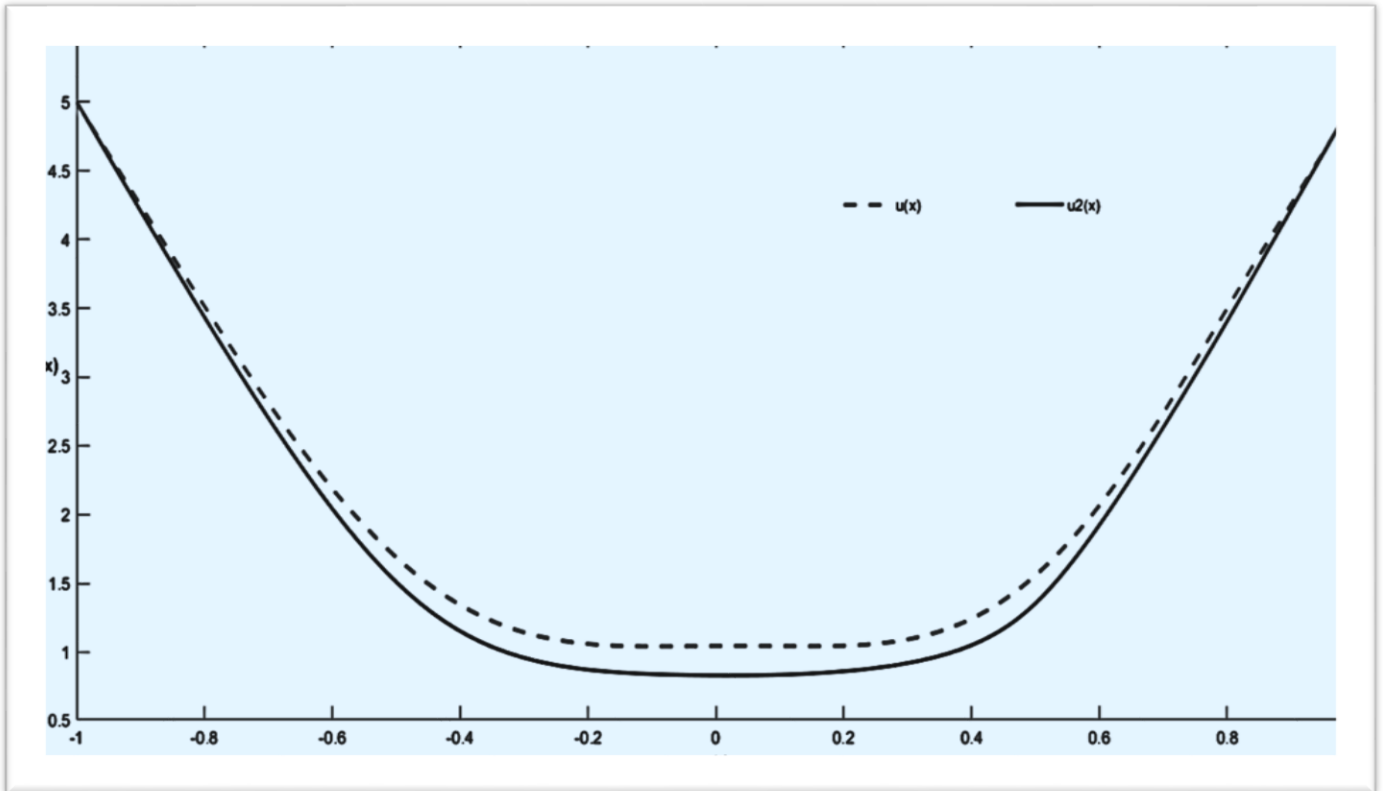


Figure (17) :  $u(x)$  solution exacte et  $u_2$  solution collocation à trois coefficients

**Remarque :**

Le choix des puissances de  $x$  comme base est en fait plutôt dangereux à moins que  $N$ , le nombre de degrés de liberté, soit petit ou que les calculs soient effectués en arithmétique exacte. Dans ce qui suit, nous décrivons les bons choix.

Les équations algébriques obtenues (3.9) pourraient être écrites sous forme matricielle pour être implémentée dans un programme informatique tel que Matlab, FORTRAN ou C...

Les méthodes de collocation ne sont pas purement numériques. Lorsque  $N$  est suffisamment petit, les méthodes de Chebyshev et de Fourier donnent une réponse analytique; c'est pourquoi on l'appelle parfois une méthode semi-analytique.

### II.3. Principes d'interpolation et de collocation

La famille d'algorithmes de collocation (pseudo-spectrale) est étroitement liée à la méthode de Galerkin. Pour le montrer et pour comprendre la mécanique des méthodes pseudo-spectrales, il est nécessaire de passer en revue quelques analyses numériques classiques: interpolation polynomiale, interpolation trigonométrique et intégration gaussienne.

#### II.3.1. Interpolation

L'interpolation d'une fonction  $f(x)$  consiste en une expression  $P_{N-1}(x)$  (2.11), généralement un polynôme ordinaire ou trigonométrique, dont  $N$  degrés de liberté sont déterminés par l'exigence que l'interpolant soit d'accord avec  $f(x)$  à chaque d'un ensemble de  $N$  points d'interpolation (2.11).

$$p_{N-1}(x_i) = f(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{II.11})$$

Dans ce qui suit, nous discuterons du choix des points d'interpolation et des méthodes de calcul de l'interpolant.

Il convient de noter que les expressions « points d'interpolation » et les « points de collocation » se rapportent de manière identique à l'ensemble des points où la fonction est évaluée dans l'approximation. Cependant, « interpolation » a la connotation que  $f(x)$ , la fonction qui est approchée par un polynôme, est déjà une fonction connue. « Collocation » et « pseudo-spectrale » sont appliquées aux méthodes interrogatoires de résolution d'équations différentielles pour une fonction inconnue  $f(x)$ .

#### II.4. Interpolation polynomiale

L'interpolation linéaire consiste à tracer une ligne droite entre deux valeurs connues de  $f(x)$  situées aux abscisses  $x_0$  et  $x_1$  qui encadrent le  $x$  désiré. La valeur de la fonction linéaire en  $x$  est alors considérée comme l'approximation de  $f(x)$  voir la figure 21. Cette opération peut être représentée algébriquement par l'équation (2.12).

$$p_1(x) \approx \frac{(x-x_1)}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f(x_1) \quad (\text{II.12})$$

$$p_1(x_0) = f(x_0), p_1(x_1) = f(x_1) \quad (\text{II.13})$$

L'interpolation linéaire n'est pas très précise à moins que les points tabulés ne soient très proches les uns des autres, mais on peut étendre cette idée à des ordres supérieurs. La figure 18 illustre l'interpolation quadratique. Une parabole est spécifiée de manière unique

en lui attribuant trois points. Ainsi, on peut alternativement approximer  $f(x)$  par le polynôme quadratique  $P_2(x)$  (2.14) qui satisfait les trois conditions d'interpolation (2.15).

$$p_2(x) \approx \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_2)(x_1-x_0)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2) \quad (\text{II.14})$$

$$p_2(x_0) = f(x_0), p_2(x_1) = f(x_1), p_2(x_2) = f(x_2) \quad (\text{II.15})$$

En général, on peut ajuster n'importe quel  $N + 1$  points par un polynôme de Nième degré via la formule d'interpolation de Lagrange (2.16)

$$p_N(x) = \sum_{i=0}^N f(x_i)c_i(x) \quad (\text{II.16})$$

Où les  $C_i(x)$ , les «fonctions cardinales», sont des polynômes de degré  $N$  qui satisfont aux conditions (2.17).

$$c_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (\text{II.17})$$

Où  $\delta_{ij}$  est la fonction de Kronecker  $\delta$ . Les fonctions cardinales sont définies dans (II.18)

$$c_i(x_j) = \prod_{j=0, j \neq i}^N \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \quad (\text{II.18})$$

Les  $N$  facteurs de  $(x-x_i)$  assurent que  $C_i(x)$  disparaît à tous les points d'interpolation sauf  $x_i$ . (Notez que nous omettons le facteur  $j = i$  pour que  $C_i(x)$  soit un polynôme de degré  $N$ , et non  $(N + 1)$ ) Le dénominateur force  $C_i(x)$  à évaluer 1 au point d'interpolation  $x = x_i$ ; à ce stade, chaque facteur du produit est  $(x_i-x_j) / (x_i-x_j) = 1$ . Les fonctions cardinales sont aussi appelées «polynômes fondamentaux pour l'interpolation ponctuelle», «éléments de la base cardinale», «base de Lagrange» ou «fonctions de forme».

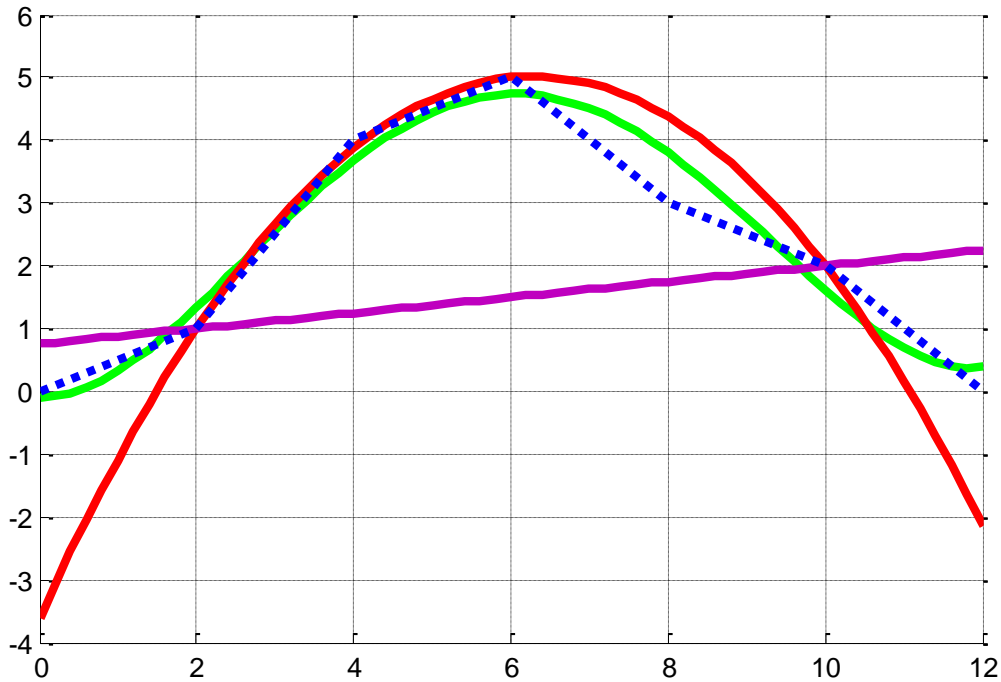


Figure (18) : Interpolation polynomiale linéaire, quadratique et de quatrième degré de l'ensemble de points décrits. Notez que l'interpolation linéaire est effectuée à l'aide de deux points  $\{(2,1),(10,2)\}$ , le quadratique avec trois points  $\{(2,1),(6,5),(10,2)\}$ . Enfin, les quatrièmes commandes avec la base de données complète

### II.5. Intégration gaussienne et grilles pseudo-spectrales

La raison pour laquelle les méthodes de «collocation» sont alternativement appelées «pseudo-spectrales» est que le choix optimal des points d'interpolation rend les méthodes de collocation identiques à la méthode de Galerkin si les produits internes sont évalués par un type de quadrature numérique dite «intégration gaussienne».

L'intégration numérique et l'interpolation lagrangienne sont très étroitement liées car une méthode évidente d'intégration consiste à adapter un polynôme à l'intégrande  $f(x)$  puis à l'intégral  $P_N(x)$ . Puisque l'interpolant peut être intégré exactement, l'erreur provient entièrement de la différence entre  $f(x)$  et  $P_N(x)$  (II.19).

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^N w_i f(x_i) \quad (\text{II.19})$$

Les fonctions de poids en quadrature  $w_i$  sont données par (II.20)

$$w_i = \int_a^b C_i(x) dx \quad (\text{II.20})$$

Où les  $C_i(x)$  sont les fonctions cardinales sur l'ensemble des points de fixation tels que définis par (II.18) ci-dessus.

### II.6. Points de collocation pour base NURBS

La sélection de points garantissant une interpolation stable est un enjeu fondamental pour un schéma de collocation [8] .

Dans la littérature sur la collocation basée sur NURBS, les abscisses dites de Greville ont été largement adoptées comme choix par défaut, étant donné leur définition simple et leurs bons résultats d'un point de vue pratique dans pratiquement toutes les situations.

Les abscisses de Greville sont définies à partir du vecteur de nœud  $\Xi$  comme des moyennes de nœuds consécutifs comme dans (II.21). Les abscisses de Greville sont les maxima des fonctions de base.

$$\xi_j = \frac{\xi_{j+1} + \xi_{j+2} + \dots + \xi_{j+p}}{p} \quad (\text{II.21})$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

Notez que :

$\xi_j$  : Représente des éléments du vecteur de nœud défini dans la section précédente.

$p$ : Point de vecteur nœud.

### II.7. Méthode de collocation isogéométrique. [9]

Les limites des méthodes de collocation se révèlent être celles des fonctions de forme utilisées pour approcher les solutions.

La première étape est donc d'écrire les solutions approximant la fonction  $u(x)$  et ses dérivées comme combinaison linéaire de  $n$  fonctions de base NURBS et de  $n$  variables de contrôle comme (II.22) et (II.23.a.b).

$L$  est la longueur physique de l'espace à interpoler (par exemple la longueur de la poutre) et  $x \in [0, L]$ .

$\xi$  est la variable paramétrique définie par:  $\xi = x/L \in [0, 1]$ .

Par la suite, un système algébrique est construit en écrivant l'expression de la solution sur un ensemble de points de collocation ( $\xi_j$ ) dans (II.22).

$$u(x_j) \approx u(\xi_j) = \sum_{i=1}^n u_i R_i(\xi_j) \begin{bmatrix} R_1(\xi_1) & R_2(\xi_1) & \cdots & R_n(\xi_1) \\ R_1(\xi_2) & R_2(\xi_2) & \cdots & R_n(\xi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(\xi_j) & R_2(\xi_j) & \cdots & R_n(\xi_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = [R]\{u\} \quad (\text{II. 22})$$

De même, on obtient l'expression des dérivées successives avec  $R'$ ,  $R''$  comme décrit dans (II.23..a.b)

$$u'(x_j) \approx \frac{1}{L} u'(\xi_j) = \frac{1}{L} [R']\{u\} \quad (\text{II. 23. a})$$

$$u''(x_j) \approx \frac{1}{L^2} u''(\xi_j) = \frac{1}{L^2} [R'']\{u\} \quad (\text{II. 23. b})$$

Où 'représente la différenciation par rapport à  $\xi$ .

La substitution des solutions approchées (II.22) et (II.23.a.b) dans la PDE considérée donne (II.24).

$$\frac{1}{L^2} [R'']\{u\} - (x_j^6 + 3x_j^2)[R]\{u\} = \{0_{N \times 1}\}$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{1}{L^2} [R''] - (x_j^6 + 3x_j^2)[R] \right) \{u\} = \{0_{N \times 1}\} \quad (\text{II. 24})$$

L'équation (II.24) doit être écrite sous forme compacte (II.25).

$$[H]\{u\} = \{0_{N \times 1}\} \quad (\text{II. 25})$$

Avec  $\{A\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$

# **Chapitre III :**

# **Modèle de poutre de**

# **Timoshenko**

### III.1. Modélisation analytique des structures mécaniques

#### III.1.1. Le modèle de poutre de Timoshenko [9]

Par rapport au modèle classique Euler-Bernoulli, celui de Timoshenko a l'avantage de prendre en compte les effets du cisaillement transversal et d'inertie en rotation qui résultent de la flexion de la poutre. Ces avantages offrent des résultats plus précis et un comportement plus réaliste dans les cas des poutres épaisses et des composites, comme dans le cas d'une analyse de vibrations à hautes fréquences des poutres lorsque les effets d'inertie deviennent considérables.

Le modèle de poutre de Timoshenko a été développé au début de 20<sup>ème</sup> siècle par Stephen Timoshenko, et jusqu'à présent est l'un des plus précis.

Certaines difficultés surviennent lorsque le modèle de poutres de Timoshenko est utilisé pour des situations de poutres minces en raison de l'influence excessive des termes du cisaillement transversal.

Le phénomène du blocage en cisaillement (shear locking) n'est pas directement lié à la théorie de Timoshenko, mais à la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations. L'élimination du verrouillage de cisaillement est possible via le choix d'une méthode numérique adéquate.

#### III.1.2. Équation des poutres de Timoshenko

La théorie des poutres de Timoshenko suppose que les sections droites déformées restent planes mais non normales à l'axe médian (fig.19).

Le champ de déplacement pour cette théorie des poutres est défini comme suit (III.1) :

$$U(x,z,t) = -z\Theta(x,t) , \quad V(x,z,t) = V(x,t) \quad (\text{III.1})$$

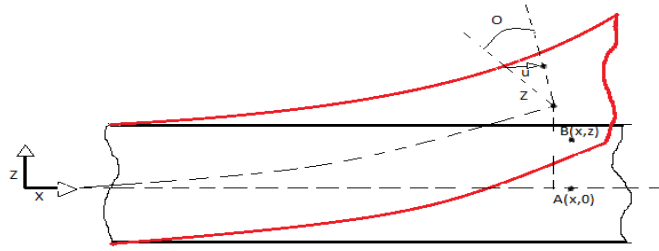


Figure (19) : Déformation d'une poutre de Timoshenko. La normale tournée d'une valeur indépendante de  $V$

Les déformations relatives sont données dans (III.2)

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\delta u}{\delta x} = -y \frac{\delta \theta}{\delta x} \\ \gamma_{xy} = \frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta v}{\delta x} = -\theta + \frac{\delta v}{\delta x} \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Tel que  $\varepsilon_{xx}, \gamma_{xy}$ , sont les relations contrainte / déformation sont :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = -Ey \frac{\delta \theta}{\delta x} \\ \sigma_{xz} = G a \gamma_{xz} = G a \left( \frac{\delta v}{\delta x} - \theta \right) \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Tel que  $\sigma_{xx}, \sigma_{xz}$ , l'intégration des contraintes donne les efforts (III.4).

$$\begin{cases} N = \int_A \sigma_{xx} dA = E \varepsilon_{xx} = \int_A -Ez \frac{\delta \theta}{\delta x} dA = 0 \text{ (Ef fort normal)} \\ T = \int_A \sigma_{xz} dA = G A a \left( \frac{\delta v}{\delta x} - \theta \right) \text{ (Ef fort tranchant)} \\ M = \int_A -y \sigma_{xx} dA = E \frac{\delta \theta}{\delta x} \int_A z^2 dA = EI \frac{\delta \theta}{\delta x} \text{ (moment flé chissant)} \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

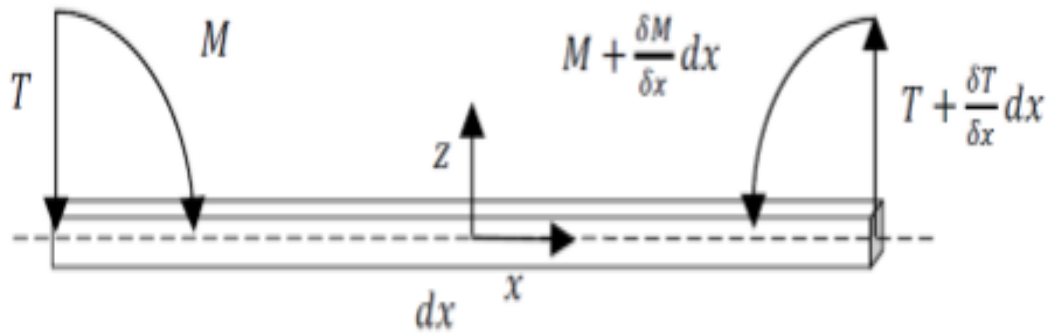


Figure (20) : Equilibre statique d'une longueur de poutre dx

L'équilibre dynamique d'un élément de poutre de longueur dx est donné (III.5) :

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial x} + T = \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial T}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

Ou :

$V=V(x,t)$  est le déplacement transversal.

$\Theta=\Theta(x, t)$  la rotation de la section transversale par rapport à l'axe Y.

$\rho$  :Est la densité massique du matériau de la poutre.

$h$  :L'épaisseur des poutres.

$I$  : Le moment d'inertie.

$M=M(x, t)$  le moment fléchissant.

$M$  et  $T$  sont donnés par (III.6).

$$\begin{cases} M = EI \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ T = aGh \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \theta \right) \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Ou :

$E$  : Le module de Young.

$G$  : Le module de cisaillement.

$a$  : Le facteur de correction de cisaillement.

La méthode de la séparation des variables de Fourier est utilisée pour trouver des fonctions satisfaction système (III.5).

On suppose que les fonctions  $V(x, t)$  et  $\Theta(x, t)$  peuvent être représentées sous la forme d'un produit d'une fonction dépendante de la coordonnée spatiale  $x$  et une fonction dépendante de la variable temporelle  $t$  (III.7).

$$\begin{cases} \Theta(x, t) = \theta(x) \cos(\omega t) \\ V(x, t) = v(x) \cos(\omega t) \end{cases} \quad (III.7)$$

En substituant (III.6) et (III.7) dans (III.5) donne (III.8)

$$\begin{cases} EI \frac{d^2 \theta}{dx^2} + ahG \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \theta \right) = -\omega^2 \rho I \theta \\ -ahG \frac{d\theta}{dx} + ahG \frac{d^2 v}{dx^2} = -\omega^2 \rho h v \end{cases} \quad (III.8)$$

L'équation (III.8) est un problème aux valeurs propres. Sa résolution revient à trouver les valeurs propres  $\omega_j$  et leurs modes propres associés.

### III.2. Conditions aux limites

Les conditions aux limites classiques généralement appliquées aux poutres sont indiquées dans le tableau 1 : Ils permettent de modéliser les cas d'appui que subissent les structures les plus fréquentes.

Conditions aux limites	Effets de condition aux limites
Encastré (c)	$W=0$ $\Theta=0$
Libre (L)	$M=0$ $T=0$
Glissant (g)	$\Theta=0$ $T=0$
Pivot (p)	$w=0$ $M=0$

Tableau 2 : les conditions aux limites appliquées aux poutres

# **Chapitre IV :**

## **Analyse vibratoire d'une poutre de Timoshenko fissurée**

### IV.1. Modélisation de fissures

Afin de modéliser les effets de la concentration de contraintes à proximité de l'emplacement de la fissure, Christides et Barr [10] ont considéré que la rigidité en flexion ( $EI$ ) à proximité de l'emplacement de la fissure diminue selon une fonction exponentielle; ils ont établi cette fonction et l'ont calibrée à l'aide de résultats expérimentaux. Pendant ce temps, J. K. SINHA et Al [11], considèrent que la rigidité en flexion diminue linéairement à proximité de l'emplacement de la fissure. Les deux travaux mentionnés précédemment ont considéré la poutre d'Euler-Bernoulli et ont développé des modèles d'éléments finis de poutres fissurées. Mais, lorsque le modèle de poutre de Timoshenko est utilisé, la rigidité de cisaillement  $AG$  intervient, la variation de ce dernier à proximité de l'emplacement de la fissure doit être déduite de la rigidité en flexion comme indiqué en (IV.1) et (IV.2).

Dans ce travail, l'effet de fissure sur la rigidité de la poutre est approché par une variation linéaire de la rigidité en flexion ( $EI$ ) (IV.1) et de la rigidité en cisaillement ( $GA$ ) (IV.2) une longueur de la poutre.

Écrivons une fonction de distribution de la rigidité en flexion le long de la poutre comme décrit dans (IV.1). Cette fonction assure la diminution de la rigidité à proximité de la zone fissurée comme indiqué sur la figure 21. Il présente également l'avantage d'être calibré à l'aide de la variable.

$$EI(x) = \begin{cases} EI - (E(I - I_C)) \frac{x - (x_c - I_C)}{I_C} & x \in [0; x_c] \\ EI - (E(I - I_C)) \frac{(x_c + I_C) - x}{I_C} & x \in [x_c; L] \end{cases} \quad (IV.1)$$

Où :

$$I = bh^3/12$$

$$I_C = b(h - d)^3 / 12$$

$x_c$  c'est l'abscisse de la fissure

$I_C$  est une constante relative à l'épaisseur  $h$  de la poutre, sa valeur est déterminée à partir des résultats expérimentaux par l'utilisation d'un processus d'optimisation.

Ensuite, on en déduit simplement la fonction de distribution de la rigidité en cisaillement avec les relations (IV.2).

$$\begin{cases} I = \frac{bh^3}{12} = bh \frac{h^2}{12} = A \frac{h^2}{12} \Rightarrow AG(x) = \frac{6}{h^2(1+\nu)} EI(x) \\ E = G2(1 + \nu) \end{cases} \quad (IV.2)$$

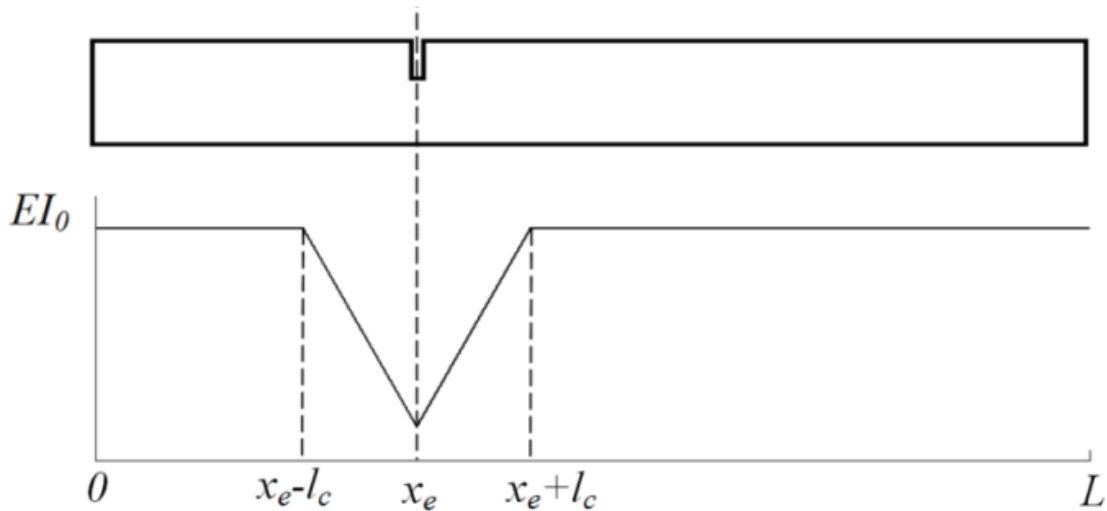


Fig. (21) Répartition de la rigidité en flexion selon l'équation (IV.1) le long d'une poutre endommagée. La zone fissurée est située en abscisse  $x_e$ .

Maintenant, les relations contrainte-déformation  $M(x)$  et  $T(x)$  doivent être écrites comme dans (4.3) telles que la rigidité en fonction de  $x$ .

$$\begin{cases} M(x) = EI(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ T(x) = \alpha GA(x) \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \theta \right) \end{cases} \quad (IV.3)$$

La substitution de (IV.3) dans l'équation de poutre de Timoshenko décrite en (IV.1) donne l'équation (IV.4) représentant un modèle mathématique de poutre fissurée.

$$\begin{cases} -\alpha GA\theta + EI'\theta' + EI\theta'' + \alpha GA v' = -w^2 \rho I \theta \\ -\alpha GA'\theta - \alpha GA\theta' + \alpha GA'v' + \alpha GA v'' = -w^2 \rho A v \end{cases} \quad (IV.4)$$

## IV.2. Discrétisation du problème

La première étape consiste donc à écrire les solutions approximant les fonctions  $w(x)$  et  $\theta(x)$  et leurs dérivées comme combinaison linéaire de  $n$  fonctions de base et de  $n$  variables de contrôle comme dans (IV.5).

$$\begin{aligned}
 w(x) &\approx w_n(\xi) = \sum_{i=0}^n w_i R_i(\xi) \quad \theta(x) \approx \theta_n(\xi) = \sum_{i=0}^n \theta_i R_i(\xi) \\
 w'(x) &\approx \frac{1}{L} w'_n(\xi) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^n w_i R'_i(\xi) \quad \theta'(x) \approx \frac{1}{L} \theta'_n(\xi) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^n \theta_i R'_i(\xi) \\
 w''(x) &\approx \frac{1}{L^2} w''_n(\xi) = \frac{1}{L^2} \sum_{i=0}^n w_i R''_i(\xi) \quad \theta''(x) \approx \frac{1}{L^2} \theta''_n(\xi) = \frac{1}{L^2} \sum_{i=0}^n \theta_i R''_i(\xi)
 \end{aligned} \tag{IV.5}$$

$L$  est la longueur du champ d'investigation et  $x \in [0, L]$ .

$\xi$  est la variable paramétrique définie par:  $\xi = \frac{x}{L} \in [0,1]$ .

Par la suite, un système algébrique est construit en écrivant l'expression de la solution sur un ensemble de points de colocation de  $n$  Greville.

Substituer les solutions approchées (IV.5) dans le problème considéré (IV.4) donne (IV.6).

$$\begin{cases}
 \left( -\alpha GA [R] + \frac{EI'}{L''} [R'] + \frac{EI}{L''} [R''] \right) \{\theta\} + \frac{\alpha GA}{L} [R'] \{W\} = -W^2 \rho I [R] \{\theta\} \\
 \left( -\frac{\alpha GA'}{L} [R] - \frac{\alpha GA}{L} [R'] \right) \{\theta\} + \left( \frac{\alpha GA'}{L''} [R'] + \frac{\alpha GA}{L''} [R''] \right) \{w\} = -w^2 \rho A [R] \{W\}
 \end{cases} \tag{IV.6}$$

Le système (4.6) pourrait être réécrit sous forme matricielle (4.7).

$$\begin{bmatrix}
 \left( -\alpha GA [R] + \frac{EI'}{L''} [R'] + \frac{EI}{L''} [R''] \right) & \frac{\alpha GA}{L} [R'] \\
 \left( -\frac{\alpha GA'}{L} [R] - \frac{\alpha GA}{L} [R'] \right) & \left( \frac{\alpha GA'}{L''} [R'] + \frac{\alpha GA}{L''} [R''] \right)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \{\theta\} \\
 \{W\}
 \end{bmatrix}
 = -w^2
 \begin{bmatrix}
 \rho I [R] & 0 \\
 0 & \rho h [R]
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \{\theta\} \\
 \{w\}
 \end{bmatrix} \tag{IV.7}$$

L'équation (IV.7) pourrait être écrite sous forme compacte comme dans (IV.8).

$$[H]\{A\} = W^2[S]\{A\}$$

Avec :

$$\{A\} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, W_1, W_2, \dots, W_n\}$$

### IV.3. Imposer les conditions aux limites

Réécrivons d'abord l'expression (IV.8) comme dans (IV.9).

$$[H_r]\{A_r\} + [H^+]\{A^+\} = W^2([S_r]\{A_r\} + [S^+]\{A^+\}) \quad (IV.9)$$

Où :

$$\{A_r\} = \{\theta_2 \theta_3 \dots \theta_{n-1} W W_3 \dots W_{n-1}\}^T$$

$$\{A^+\} = \{\theta_1 \theta_n W_1 W_n\}^T$$

La taille de  $[H]$  est  $2(n-2) \times 2(n-2)$  tandis que celle de  $[H^+]$  est  $2n \times 4$ .

Le nombre complet de facteurs inconnus dans  $\{A\}$  et  $\{A^+\}$  est  $n$  tandis que le nombre d'équations est  $n-4$ . Les quatre équations restantes sont obtenues avec les conditions aux limites.

#### Conditions aux limites libres - libres

Considérons le cas des conditions aux limites libres - libres qui se caractérisent par l'absence d'efforts externes (4.10).

$$\begin{cases} T(0) = M(0) = 0 \\ T(L) = M(L) = 0 \end{cases} \quad (IV.10)$$

En utilisant les expressions (IV.3) et (IV.5), on peut exprimer des efforts aux nœuds extrêmes comme dans (IV.11).

$$\begin{aligned} T(0) &= \frac{aGA(0)}{L} \sum_{i=1}^n R'_i(0) v_i - aGA(0) \sum_{i=1}^n R_i(0) \theta_i, \quad M(0) = \frac{EI(0)}{L} \sum_{i=1}^n R'_i(0) \theta_i \\ T(L) &= \frac{aGA(L)}{L} \sum_{i=1}^n R'_i(1) v_i - aGA(0) \sum_{i=1}^n R_i(1) \theta_i, \quad M(L) = \frac{EI(L)}{L} \sum_{i=1}^n R'_i(1) \theta_i \end{aligned} \quad (IV.11)$$

Les équations (4.11) peuvent être réarrangées sous forme matricielle (4.12).

$$[V]\{A_r\} + [U]\{A^+\} = \{0\} \quad (IV.12)$$

Alors, l'expression de  $\{A^+\}$  est dérivée de (IV.12) et injectée dans le système initial (IV.9) pour donner (IV.13)

$$([H_r] - [H][U]^{-1}[V])\{A_r\} = -\omega^2([S_r] - [S^+][U]^{-1}[V])\{A_r\} \quad (IV.13)$$

Le problème des valeurs propres (IV.13) décrit le comportement dynamique d'une poutre mixte acier-béton dans des conditions aux limites libres.

#### IV.4. Recalage du modèle

A partir de la valeur nominale  $E_0$  donnée de la poutre non fissurée, la valeur optimale du module d'Young est évaluée en résolvant le problème minimum (IV.14).

$$\text{Pour trouver } E \text{ tel que } A = \min_{0.8 E_0 < E \leq 1.2 E_0} F(E) \quad (\text{IV.14})$$

où:

$$F(\mu, k) = \sum_{i=1}^4 \sqrt{\left(\frac{f_i - f_{\text{exp } i}}{f_{\text{exp } i}}\right)^2}$$

$f$  et  $f_{\text{exp}}$  sont respectivement les valeurs analytiques et expérimentales des fréquences propres,  $i$  étant le numéro de mode.

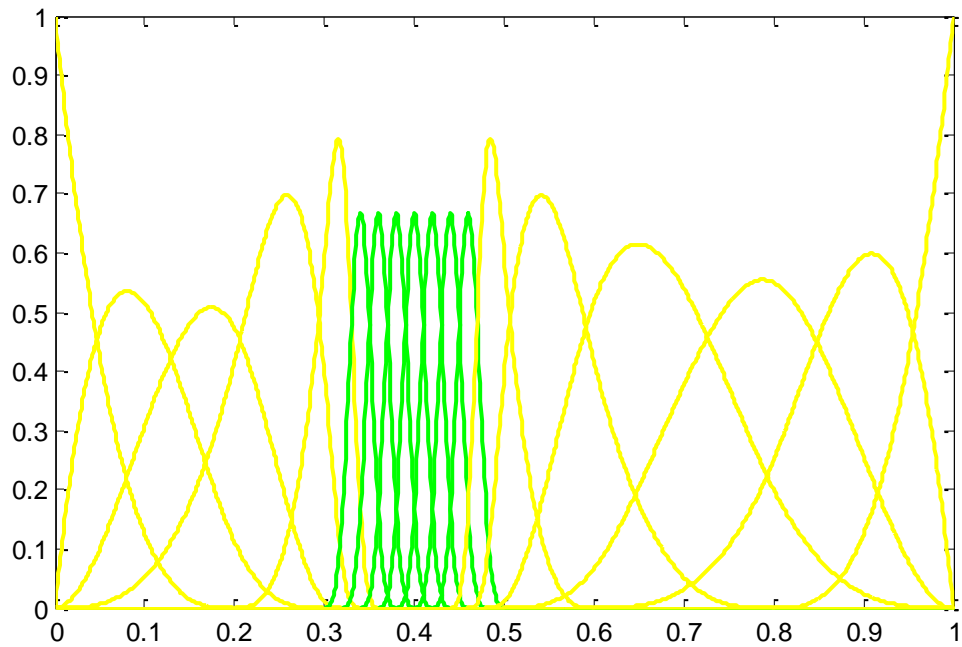
#### IV.5. Calibrage de la fonction représentant le défaut :

En ce qui concerne la mise à jour du modèle, Il est proposée d'évaluer la valeur de  $I_C$  en minimisant la fonction d'erreur  $F$  pour différents cas de dommages (IV.15) .[ 9]

$$F(I_C) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^4 \sqrt{\left(\frac{((f_i)_j - (f_{\text{exp } i})_j)}{(f_{\text{exp } i})_j}\right)^2} \quad (\text{IV.15})$$

#### IV.6. Raffinement local

Une bonne approximation de la distribution de la rigidité sur une petite partie de la poutre nécessite un raffinement fin. En effet, les résultats se dégradent considérablement lorsque le modèle n'est pas suffisamment affiné; néanmoins, le raffinement de l'ensemble du modèle augmente le coût de calcul. Dans ce travail, nous proposons d'affiner localement le modèle de poutre en agissant sur le vecteur nœud défini au chapitre 1 ; on procède en insérant des nœuds près de la zone endommagée; ceux-ci agissent directement en insérant de nouvelles fonctions de base et de nouveaux points de colocations.



Figure(22) : base cubique NURBS localement affinée par insertion de nœuds à proximité de la zone endommagée

#### IV.7. Tests numériques

Les fréquences propres des poutres fissurées en acier étudiées dans les références [10] sont évaluées à l'aide du modèle IGA-C développé. Les paramètres des poutres sont tirés de la référence [10] et rapportés dans le tableau 3.

Paramètres de la poutre	
Matériel	Acier
Module de Young E	203,91 GN / m <sup>2</sup>
Masse volumique	$\rho$ 7800 kg / m <sup>3</sup>
Coefficient de Poisson $\nu$	0,33
Longueur du faisceau L	1330 millimètre
Largeur du faisceau b	25,30 millimètre
Profondeur du faisceau h	25,30 millimètre

Tableau 3 : Paramètres des poutres en acier tirés de la référence [11].

Les quatre premières fréquences propres des échantillons de faisceaux étudiés sont données dans les (Tableaux 4 à 7) et les erreurs sont évaluées pour chaque fréquence. Les résultats sont comparés aux résultats publiés expérimentaux et analytiques de la référence [11].

Dans le tableau 4, les quatre premières fréquences propres de la poutre en acier étudiée sans fissure sont présentées et comparées à celles de référence [11]. Les résultats sont en bon accord avec ceux de référence [11] obtenus expérimentalement et des calculs de la méthode des éléments finis.

Les tableaux 5, 6 et 7 montrent les quatre premières fréquences propres de la poutre en acier étudiée avec des profondeurs de fissures respectives de 4, 8 et 12 mm. Toutes les fissures sont situées en abscisse  $x_c = 430$  mm. Les résultats sont en bon accord avec ceux de référence [11] obtenus par expérience et méthode des éléments finis.

Il est à noter que l'échelle de précision de ces résultats expérimentaux les rend impropres à la comparaison de l'exactitude des deux méthodes numériques.

La figure 23 montre la diminution des quatre premières valeurs propres de la poutre étudiée par rapport à la profondeur de la fissure. On observe que l'influence de la profondeur de fissure est différente d'une fréquence à l'autre. Cela pourrait s'expliquer par l'emplacement de la fissure. En effet, on remarque sur la figure 24 que la zone endommagée subit un déplacement plus important en vibrant dans les premier et second modes. Le déplacement

est cependant moins important lorsqu'il vibre dans le quatrième mode. La zone endommagée est située à proximité d'un nœud de troisième mode (déplacement nul), ce qui explique le fait que la fréquence de ce dernier réagit très peu.

Ce dernier résultat montre l'importance d'utiliser le maximum de modes vibratoires pour la localisation et la caractérisation dommages dans les structures

Mode	Poutre saine (sans fissure)				
	Expérience	référence [35]	Erreur %	IGA-C	Erreur %
1	75,279	75.171	0.143	75.558	0.370
2	206,491	207.212	0.349	207.265	0.375
3	403,162	406.225	0.759	404.673	0.374
4	663,224	671.536	1.25	665.708	0.374

Tableau 4 : Fréquences propres en (HZ) de l'acier Free-Free sans fissures

Mode	d= 4 mm x= 430 mm				
	Expérience	Ref1	Erreur %	IGA-C	Erreur%
1	74,858	74.406	0.604	75.031	0.231
2	204,666	204.183	0.235	205.410	0.363
3	402,677	405.368	0.668	404.154	0.365
4	661,065	668.429	1.11	663.705	0.399

Tableau 5 : Fréquences propres en (Hz) de la poutre fissurée libre en acier

Mode	d = 8 mm x=430 mm				
	Expérience	Référence 1	Erreur %	IGA-C	Erreur %
1	74,242	73.628	0.827	74.260	0,265
2	202,166	201.283	0.436	202.913	0,369
3	402,037	404.557	0.626	403.456	0,352
4	658,078	665.356	1.10	661.095	0,458

Tableau 6: Fréquences propres en (Hz) de la poutre fissurée libre en acier

Mode	D= 12 mm x=430				
	Expérience	Ref 1	Erreur %	IGA-C	Erreur %
1	73,216	72,958	0,352	72,898	0,434
2	198,456	198,928	0,237	197,958	0,250
3	401,136	403,916	0,693	402,049	0,227
4	653,644	662,874	1,412	655,552	0,291

Tableau 7 : Fréquences propres en (Hz) de la poutre fissurée libre en acier

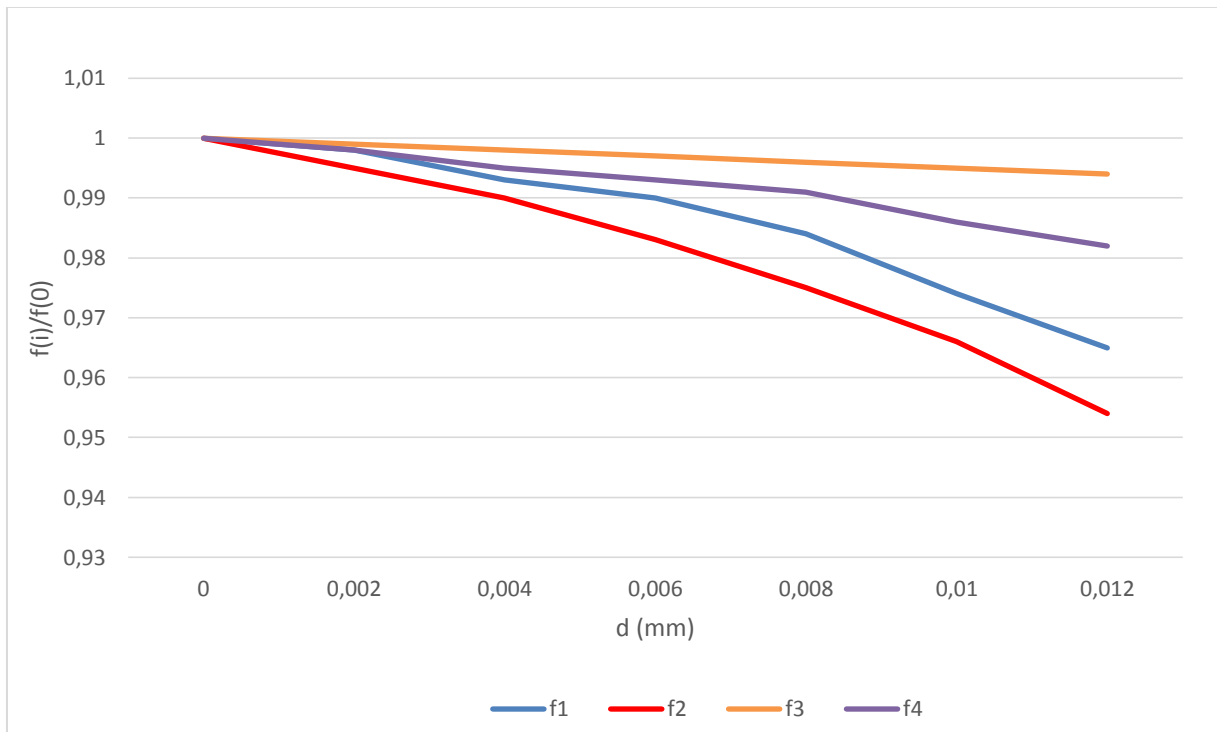


Figure (23): Les premières fréquences naturelles normalisées par rapport à la profondeur des dommages d

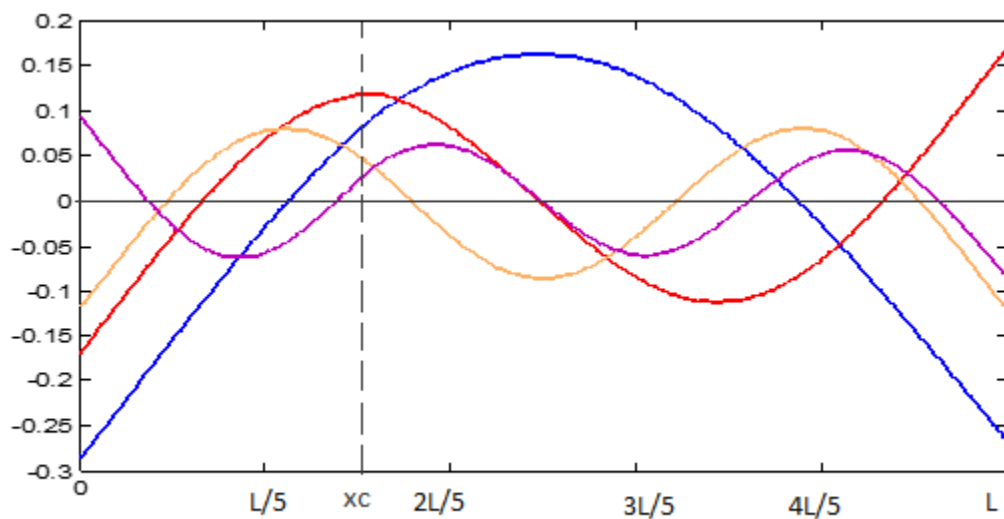


Figure (24) : La première forme à quatre modes de la poutre fissurée de Timoshenko

# **CHAPITRE V :**

## **Détection des défauts avec le vecteur des forces modales résiduelles**

## V. Détection des défauts avec le vecteur de forces modales résiduelles

### V.1. Le vecteur des forces modales résiduelles

Le vecteur des forces modales résiduelles est un algorithme qui permet de détecter et localiser l'emplacement et l'étendue de l'endommagement. Il permet par ailleurs le recalage du modèle, ce qui augmente l'efficacité du calcul et améliorer également la précision.

L'idée principale de la méthode d'identification des endommagements basée sur les vibrations est que les paramètres modaux ou les caractéristiques de vibration (la fréquence propre, la forme du mode, l'amortissement modal) sont liés aux propriétés physiques structurelles (masse, amortissement et rigidité) ,Par conséquent, les endommagements structurels modifient les propriétés physiques et les changements dans les propriétés physiques ont des influences évidentes sur les caractéristiques modales ou les réponses dynamiques de la structure.

### V.2. La méthode du vecteur des forces modales résiduelles virtuelles

L'équation du mouvement dynamique d'une poutre élastique linéaire non endommagée peut être exprimée comme suit :

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F(t) \quad (V.1)$$

Ou :

K : Matrice globale de raideur.

M : Matrice de masse.

C : Matrice d'amortissement.

$\ddot{u}$  : Vecteur accélération.

$\dot{u}$  : Vecteur vitesse.

$u$  : Vecteur déplacement.

$F(t)$  : Vecteur de forces appliquées.

En négligeant le terme d'amortissement et la force d'excitation externe égale à zéro. L'équation (V.1) conduira à l'équation de vibrations libres non amorties :

$$M\ddot{u} + Ku=0 \quad (V.2)$$

L'équation (V.2) permet d'obtenir le problème aux valeurs propres (V.3) et cela en appliquant la méthode de séparation des variables.

$$K\phi_i = \lambda_i M\phi_i \quad (\text{V.3})$$

Où :

$\lambda_i$  : Est la valeur propre du ième mode

$\phi_i$  : Est le vecteur propre de vibration du ième mode.

Dans le cas de la détection d'endommagements, on suppose généralement qu'il y a une perturbation de l'élasticité (de la raideur) alors que le paramètre de masse reste inchangé. Par conséquent, les équations (V.1) et (V.2) peuvent être exprimées comme suit:

$$M\ddot{u} + C_d\dot{u} + K_d u = F(t) \quad (\text{V.4})$$

$$K_d \phi_{dj} = \lambda_{dj} M \phi_{dj} \quad (\text{V.5})$$

Où :

$K_d$  : La matrice de raideur de la structure endommagée.

$C_d$  : La matrice d'amortissement globale.

$\lambda_{dj}$  : La j ème valeur propre de la structure endommagée.

$\phi_{dj}$  : Le vecteur propre correspondant.

La variation de la matrice de raideur K introduit par l'endommagement peut être modélisée par une perturbation de la raideur comme dans (V.6) :

$$K_d = K - \Delta K \quad (\text{V.6})$$

En substituant l'équation (V.6) dans l'équation (V.5), nous avons :

$$(K - \lambda_{dj} M)\phi_{dj} = \Delta K \phi_{dj} \quad (\text{V.7})$$

Le vecteur de force résiduelle du jème mode de la structure endommagée est défini comme

$$f_j = \Delta K \phi_{dj} = (K - \lambda_{dj} M)\phi_{dj} \quad (\text{V.8})$$

Et l'équation (V.8) peut également être exprimée suit :

$$\begin{pmatrix} f_{1j} \\ f_{2j} \\ \vdots \\ f_{nj} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta K_1^T \\ \Delta K_2^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta K_n^T \end{bmatrix} \phi_{dj} \quad (\text{V.9})$$

Où :

$\Delta K_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) est le changement de raideur du  $i$ ème d.f.

$n$  est le nombre de système d.f.

$\Delta K_i$  N'est différent de zéro que si l'élément correspondant est endommagé. Ainsi, le vecteur des forces modales résiduelles  $f_j$  de l'équation (8) n'aura des valeurs non nulles que dans les éléments endommagés. De plus, nous pouvons identifier les éléments endommagés en fonction de la relation entre le numéro d'élément et le d.f. numéro.

### v.3. Test numérique

Afin de détecter et de localiser l'endommagement dans la poutre en étude, Nous procédons par les étapes suivantes :

1. Programmation des fonctions de base NURBS.
2. Programmation des paramètres géométriques et matériaux.
3. Programmation de la fonction de distribution des raideurs (endommagements).
4. Application des conditions aux limites.
5. Calcul des fréquences et modes propres pour le cas d'une structure saine et le cas d'une structure endommagée.
6. Evaluation du vecteur des forces modales résiduelles.

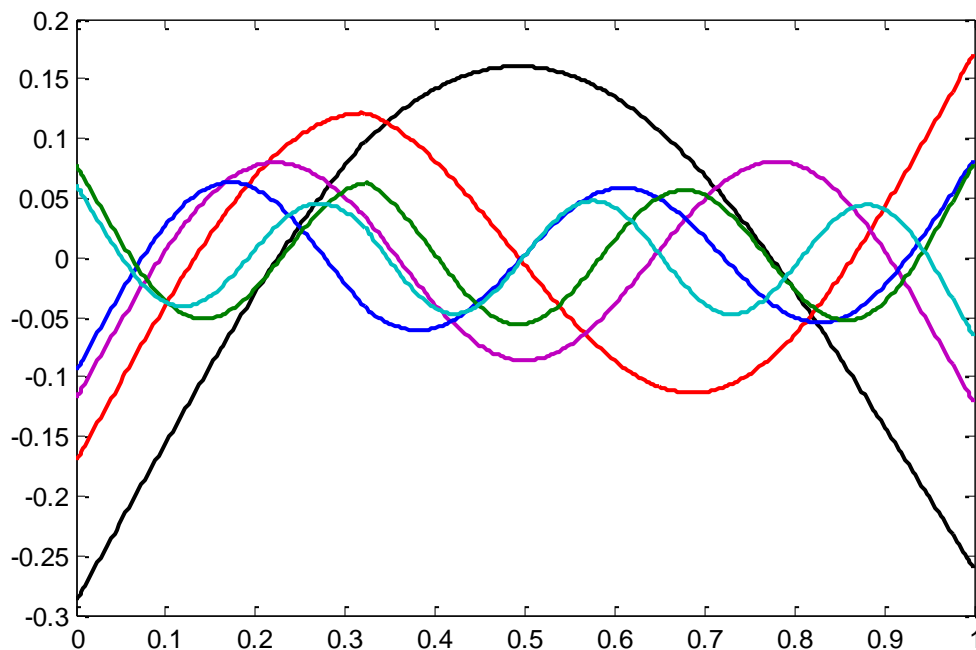


Figure (25) : Les modes propres d'une poutre endommagée avec le vecteur de force résiduelle

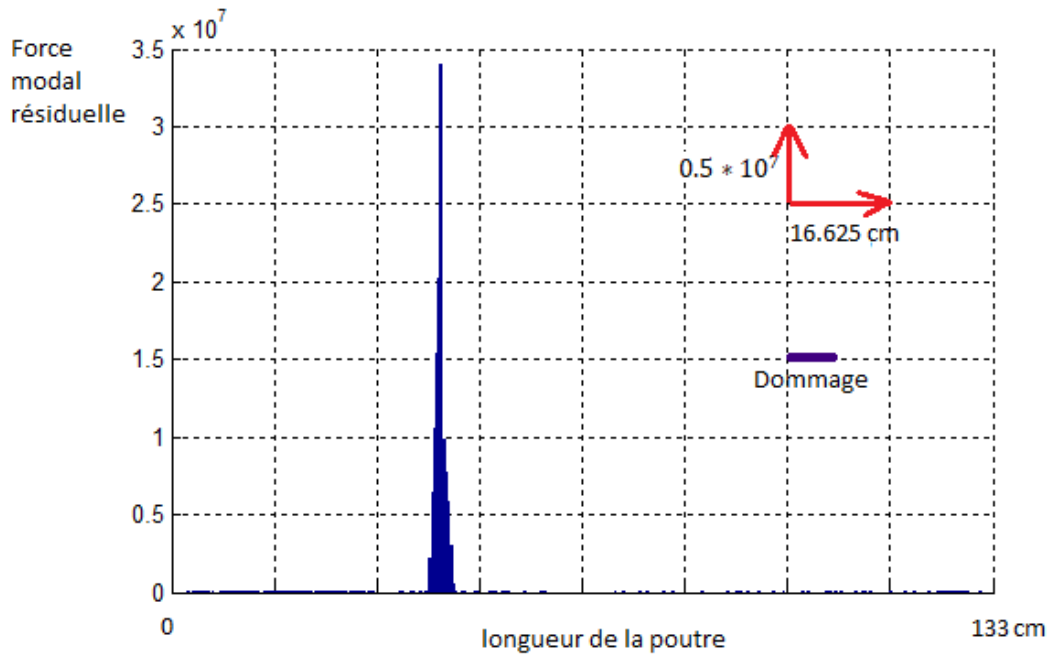


Figure (26) : l'étendue et l'emplacement d'un endommagement.

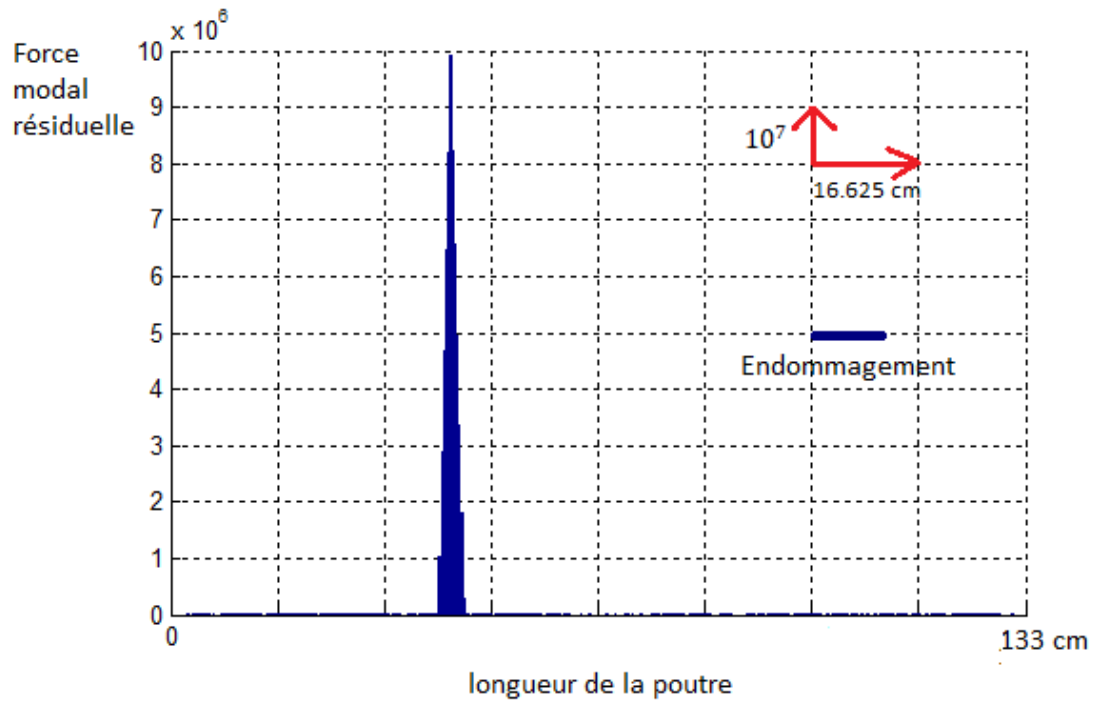


Figure (27) : l'étendue et l'emplacement d'un endommagement avec  $d = 0.4$  cm

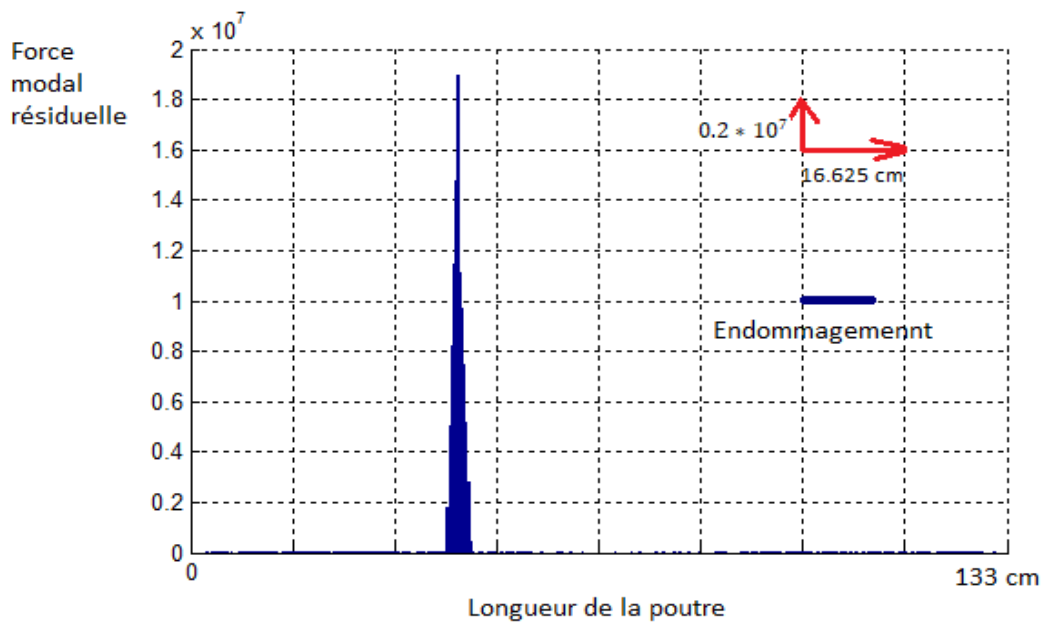


Figure (28) : l'étendue et l'emplacement d'un endommagement avec  $d = 0.8$  cm

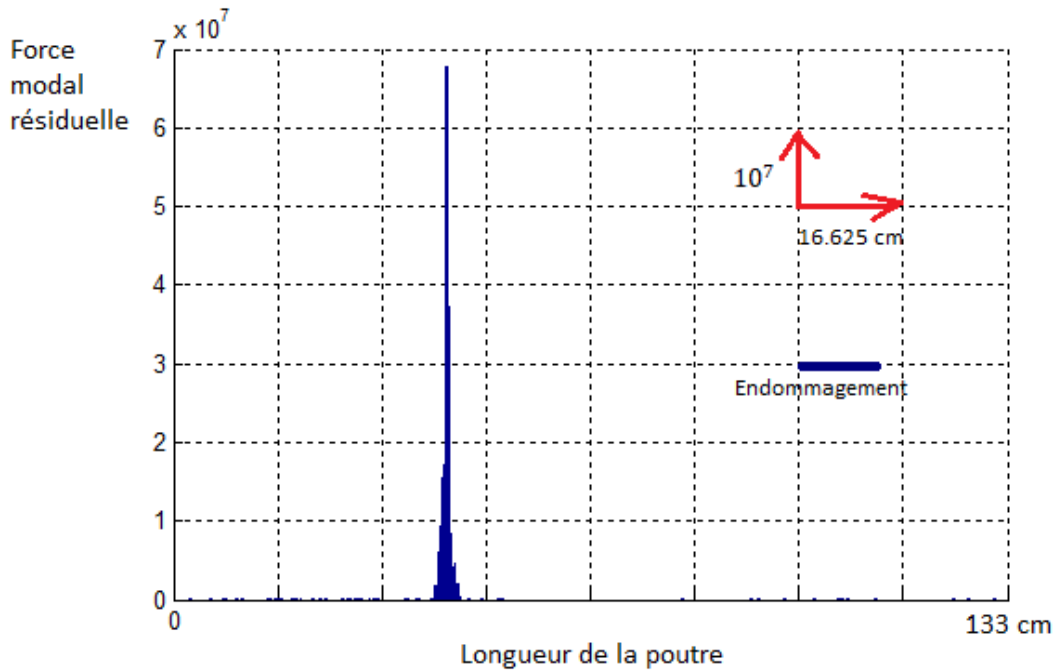


Figure (29) : l'étendue et l'emplacement d'un endommagement avec  $d = 1,6$  cm

#### v.4. Résultats et discussions

La Figure (25) montre les six premiers modes propres d'une poutre endommagée.

La figure (26) montre l'étendue et l'emplacement d'un endommagement.

(L'emplacement de l'endommagement :  $X_c = 43$  cm)

- On constate que la valeur des forces modales résiduelles est proportionnelle à la profondeur de l'endommagement, Une valeur nulle est obtenue en zone saine.

Les figures 27, 28 et 29 montrent l'étendue et l'emplacement d'un endommagement avec des profondeurs de fissures correspondent à 0.4, 0.8 et 1.6 cm. La fissure est située à abscisse  $X_c = 43$  cm.

- Un changement dans l'emplacement de l'endommagement dans la poutre sera détecté et localisé par le vecteur des forces modales résiduelles.

Le vecteur des forces modales résiduelles permet de donner des résultats plus précis et satisfaisants.

# Conclusion générale

Ce mémoire vise, dans un premier temps, l'étude de la méthode de collocation isogéométrique en tant qu'outil de modélisation des endommagements dans les structures mécaniques et dans un second temps, la conception d'une application de détection des endommagements est réalisée et cela en implémentant l'algorithme développé sous matlab. Les résultats obtenus sont ensuite validés par comparaison aux données issues de publications scientifiques récentes.

Les outils nécessaires pour le traitement de la problématique sont présentés et étudiés dans les quatre premiers chapitres comme suit :

- Le premier chapitre traite la modélisation géométrique par les fonctions B-Splines et NURBS. Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord présenté les fonctions de base, les courbes ainsi que les surfaces B-Spline polynomiales. Ensuite, nous avons présenté les fonctions de base B-spline rationnelles non uniformes (NURBS) suivi de plusieurs exemples de courbes et surfaces. Le but de cette partie du travail est de maîtriser les modèles précédemment cités en vue de les utiliser comme fonctions de forme pour la méthode de collocation isogéométrique.  
La base NURBS s'avère être le modèle le plus performant pour la représentation des géométries complexes. Ce qui fait de lui, le meilleur candidat pour la représentation des champs de solution d'équations aux dérivées partielles en tant que fonction de forme.
- Dans Le deuxième chapitre, nous avons étudié les fondamentaux des méthodes de collocation 'méthodes pseudo-spectrales'. Nous avons présenté tout d'abord les bases théoriques des méthodes de collocation. Par la suite, nous avons présenté la méthode de collocation isogéométrique qui est utilisée dans la modélisation du comportement dynamique des structures mécaniques.
- Dans le troisième chapitre, nous avons étudié la modélisation analytique des éléments de structures mécaniques en dynamique, plus précisément de la poutre de Timoshenko.  
Ce chapitre traite le développement d'un problème aux valeurs propres à base de l'équation de Timoshenko en vue de calculer les fréquences et les modes de résonance la poutre.
- Dans le quatrième chapitre, nous développons le modèle numérique du problème aux valeurs propres. Nous présentons par ailleurs la méthode d'injection des conditions aux limites tirées de la référence [13].
- Dans le cinquième chapitre, nous présentons un l'algorithme de détection des défauts par le vecteur des forces modales résiduelles, celui-ci, nous permet d'identifier et de localiser des endommagements. Cette méthode est principalement

basée sur les variations des modes propres induits par l'endommagement. Chaque application est accompagnée de résultats et explications :

- ❖ Un test de validation est effectué, celui-ci consiste à calculer les fréquences et les modes propres d'une poutre saine (sans endommagements). Les paramètres géométriques, matériaux ainsi que les conditions aux limites ont été choisis de manière à se conformer aux publications dans le domaine afin de permettre la comparaison. Le premier test nous a permis de valider le modèle numérique construit.
- ❖ Le second test consiste à appliquer un endommagement progressif à une poutre et à observer l'évolution des fréquences de résonance de celle-ci. La méthode de modélisation de l'endommagement est tirée de la référence [9] celle-ci consiste à soumettre l'équation du mouvement à une fonction de distribution des raideurs ; un endommagement se manifeste par une diminution de la raideur à proximité de sa zone. Les résultats sont en bon accord avec ceux de publications scientifiques récentes.
- ❖ le dernier chapitre est dédié à l'application des résultats obtenus par un algorithme de détection et de localisation des endommagements par la méthode des forces modales résiduelles. Les résultats sont présentés sous forme graphique et comparés à ceux publiés.

La méthode de collocation isogéométrique présente bien des avantages. Elle permet notamment de modéliser des formes géométriques complexes, de briser les barrières entre les logiciels de CAO et de simulation numérique par l'utilisation d'un même modèle géométrique. Cela permet d'économiser environ 80% du temps de calcul (voir la réf [5]), d'éliminer l'erreur d'interpolation de la géométrie et d'assurer la convergence.

La IGA-C offre une possibilité de raffinement par insertion de nœuds et/ou d'élévation de l'ordre d'approximation indépendamment. Par ailleurs, elle offre la possibilité de contrôler la continuité de la solution par multiplication des nœuds.

Bien que cette méthode présente des avantages importants, elle reste tout de même complexe à appréhender. Par ailleurs, la IGA-C reste au stade de développement. A ce jour peu de logiciels de simulation numérique l'utilisent.

Notre projet de fin d'études nous a offert l'opportunité de maîtriser la modélisation et la dynamique des structures mécaniques et de nous initier à l'utilisation des méthodes numériques

avancées, à la programmation informatique et aux méthodes vibratoires de modélisation, de détection et de localisation des endommagements.

Nous proposons comme perspective, la réalisation d'études similaires sur des géométries plus complexes afin d'enrichir le programme développé et de généraliser l'algorithme de détection des endommagements pour le cas de structures bi et tridimensionnelles.

- [1]. Modélisation géométrique, [licence Creative Commons attribution](#), Wikipédia.
- [2]. **Les piegl Wayne Tiller**, The NURBS book 2nd Edition, 1996].
- [3]. **Prof. Dr. Eleni Chatzi**, the Finite Element Method for the Analysis of, Non- Linear and Dynamic Systems, 24September, 2010].
- [4]. **J-C FIOROT P JEANNIN**, courbe et surface rationnelle (application en CFAO) .Edition MASSON 1989].
- [5]. **J. Austin Cottrell , Thomas J. R. Hughes and Yuri Bazilevs**, ISOGOMETRIC ANALYSIS, TOWARD INTEGRATION OF CAD AND FEA. A John Wiley and Sons, Ltd. Publication.2009
- [6]. **A.Wall, MoritzA.Frenzel**, ChristianCyron Isogeometric structurals hape optimization Comput.MethodsAppl.Mech.Engrg.197
- [7] **Ismahène Sehili**, Méthodes spectrales pour les problèmes aux Limites, UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA,(2018)
- [8] **J.P. Boyd**. Chebyshev& Fourier Spectral Methods, Lecture Notes in Engineering, Vol. 49, Springer, Berlin, (1989).
- [9] **Hocine BELGAID.**, CALCUL PRÉVISIONNEL DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES STRUCTURES MÉCANIQUES, UMMTO. (2018)
- [10] **S. CHRISTIDES and A. D. S. BARR**, ONE-DIMENSIONAL THEORY OF CRACKED BERNOULLI-EULER BEAMS, Int. J. Mech. Sci.Vol. 26, No. 11/12, pp. 639-648, 1984.
- [11] **J. K. SINHA, M.I.FRISWELL AND S. EDWARDS**, SIMPLIFIED MODELS FOR THE LOCATION OF CRACKSIN BEAM STRUCTURES USING MEASUREDVIBRATION DATA, Journal of Sound and Vibration (2002) 251(1), 13 38.
- [12]. **Hao Li, Zhongrong Lu and Jike Liu**,Structural damage identification based on residual force vector and response sensitivity analysis, Journal of Vibration and Control 1–12 ! The Author(s) 2014.
- [13] **Hocine Belgaid , Amar Bouazzouni** ,Vibration analysis of mechanical structures with a new formulation of the isogeometric collocation method, Laboratoire de Mécanique, Structures et Energétique, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, BP17 RP, Tizi-Ouzou 15000, Algeria
- [14] **R.E. Scraton** (1965). The solution of linear differential equations in Chebyshev series, Comput, J, 8, P. 57.