Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou

Faculté du Génie Electrique et d'Informatique

Département d'Automatique

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Automatique

Option: Automatique des Systèmes Continus et Productique

Présenté par :

M^{lle} OUKACINE Sadia

Thème :

Identification des systèmes non linéaires : Application au cas des systèmes d'ordre non-entier

Soutenu le 31/10 /2012, devant le jury d'examen composé de :

M. DIAF Moussa	**Professeur à l'UMMTO**	**Président**
M. DJENNOUNE Saïd	**Professeur à l'UMMTO**	**Rapporteur**
M. MANSOURI Rachid	**M.C, Classe A à l'UMMTO**	**Examinateur**
M^{me}. DJAMAH Tounsia	**M.C, Classe B à l'UMMTO**	**Examinatrice**
M. GUERMAH Saïd	**M.C, Classe B à l'UMMTO**	**Examinateur**

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP), de l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur *Saïd DJENNOUNE*, Professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, en tant que directeur de thèse, pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteur de ce mémoire et pour sa présence et son aide.

Mes sincères remerciements à Monsieur *Moussa DIAF*, Professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, qui me fait l'honneur de participer à l'examen de ce travail et avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Madame *Tounsia DJAMAH*, Maitre de conférences Classe B à l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, pour sa disponibilité durant tout ce travail et les nombreux conseils qu'elle a su me prodiguer, et pour avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie de jury de ce mémoire.

Je tiens également à remercier Monsieur *Rachid MANSOURI*, Maitre de conférences Classe A à l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, pour ses conseils et son enthousiasme, et pour avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie de ce jury.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur *Saïd GUERMAH*, Maitre de conférences Classe B à l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, pour les conseils qu'il m'a prodigués, et avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie de ce jury.

Merci à tous les collègues que j'ai côtoyés pendant ces années, pour l'ambiance de travail qu'ils ont su faire régner au sein de l'équipe L2CSP.

Enfin, je remercie toute ma famille, en particulier mes parents, et tous mes amis pour leurs encouragements et leur soutien.

Sommaire

Introduction générale……… 1

Chapitre 1…..…..... 4

Identification des systèmes d'ordre entier…… 4

1.1 Introduction……. 4

1.2 Principe de la modélisation mathématique…….. 4

1.3Algorithmes d'identification…….. 6

1.3.1 Algorithmes d'identification discrète…… 6

1.3.2 Algorithmes d'identification continue……8

1.3.2.1 La méthode à erreur d'équation…….. 8

1.3.2.2 L'approche à erreurs de sortie……...9

1.4 Méthodes d'optimisation non linéaire…….... 11

1.5 Conclusion……..…13

Chapitre 2…..…..... 15

Identification des systèmes d'ordre non entier……..……..15

2.1 Introduction……..…….....15

2.2 Calcul fractionnaire…….. 16

2.3 Opérateurs d'ordre fractionnaire…….……....16

2.3.1 Définitions fondamentales……..……..... 16

2.3.1.1 Définition de Riemann-Liouville…….....16

2.3.1.2 Définition de Caputo……..…. 17

2.3.1.3 Définition de Grünwald-Letnikov…….17

2.3.2 Représentation des systèmes d'ordre fractionnaire……..……18

1- Equation différentielle généralisée…….....…18

2- Fonction de transfert fractionnaire…….…….....18

3- Représentation d'état des systèmes fractionnaires…….....19

2.3.3 Commandabilité et observabilité des systèmes fractionnaires…….19

2.3.4 Stabilité des systèmes fractionnaires……....20

2.4 Simulation des systèmes d'ordre fractionnaire……..21

2.4.1 L'approche d'Oustaloup……..…..…....22

2.4.2 L'approche par intégrateur fractionnaire……..23

2.5 Approximation des systèmes d'ordre fractionnaire en représentation d'état……24

2.5.1 Exemple de simulation d'un système d'ordre fractionnaire……26

2.6 Identification des systèmes fractionnaires……28

2.6.1 Identification des modèles d'état fractionnaire……..29

2.6.1.1 Calcul des fonctions de sensibilité…….30

2.6.2 Exemples de simulation……...33

2.7 Conclusion……..…...…….38

Chapitre 3…. 39

Identification des systèmes non linéaires par l'approche multi-modèle…….…....…...39

3.1 Introduction……..……...39

3.2 Origine de l'approche multi-modèle……40

3.3 Obtention d'une structure multi-modèle……..41

3.3.1 Multi-modèle par linéarisation…….....41

3.3.2 Multi-modèle basé sur les secteurs de non-linéarités……42

3.3.3 Multi-modèle par identification…….....43

3.4 Fonction de pondération……..44

3.5 Stabilité des systèmes de Takagi-Sugeno ……..45

3.6 Identification des systèmes non linéaires par multi-modèle……..45

3.6.1 Le choix de la structure du multi-modèle…….45

3.6.1.1 Multi-modèle à états découplés……46

3.6.1.2 Multi-modèle à états couplés (Modèle de type Takagi-Sugeno) ……....47

3.6.2 Le choix de la variable d'indexation ξ des fonctions de pondération……...48

3.6.3 Estimation paramétrique d'un multi-modèle à états couplés (TS) ……...48

3.6.3.1 Cas de multi-modèle entier……....48

a-Estimation paramétrique avec un critère global ……49

b-Estimation paramétrique avec un critère local……50

c-Le critère mixte……...50

d-calcul des fonctions de sensibilité paramétriques……...51

3.6.3. 2 Cas de multi-modèle fractionnaire……..52

3.7 Exemples de simulation…….. 53

3.8 Conclusion……...……..59

Chapitre 4…….....61

Application de l'approche multi-modèle au transfert de chaleur……..61

4.1 Introduction……... 61

4.2 Transfert de chaleur……...…….……62

4.2.1 Etude du transfert de chaleur dans un mur plan……62

4.2.2 Simulation du transfert de chaleur par différences finies……..63

4.3 Identification de transfert de chaleur par l'approche multi-modèle……..64

4.3.1 Identification de l'interface de diffusion du mur……...65

4.3.2 Identification du benchmark Malti [Université Bordeaux I] ……....…70

4.4 Conclusion…….……75

Conclusion générale……...……..…….……..77

Références bibliographiques…… ……..……..…….79

Introduction générale

L'une des théories qui peut être considérée aussi bien ancienne que nouvelle et qui connaît actuellement une grande popularité parmi les chercheurs dans les sciences fondamentales et en ingénierie, est celle du *Calcul Fractionnaire* qui étend l'operateur de dérivation et d'intégration aux ordres fractionnaires. Au début c'était presque un jeu d'esprit pour certains mathématiciens de renommée, qui voulaient généraliser la notion de différentiation d'ordre entier par des opérateurs d'ordre fractionnaire, permettant le calcul de la dérivée d'ordre α réel ou complexe d'une fonction différentiable, soit :

$$D^{\alpha}\{f(t)\} = \frac{d^{\alpha} f(t)}{dt^{\alpha}}$$

Où α serait un réel non nécessairement entier, voir un nombre complexe. Il est clair que jusqu'à une période très récente, une telle notion mathématique n'avait aucune explication réelle ou pratique. Ce n'est qu'au début des années 1950 que Van Der Ziel dans ses recherches sur les spectres de bruit des semi-conducteurs, puis Davidson et Cole en 1951 dans leurs travaux sur la relaxation diélectrique dans certains liquides, ont pu mettre à jour des phénomènes naturels dont les modèles faisaient appel à la dérivée d'ordre fractionnaire.

En effet, Il a été montré qu'un nombre important de systèmes physiques ont un comportement qui peut être mieux décrit en utilisant des modèles mathématiques d'ordre fractionnaire tels que : les processus électro-chimiques [Ichise et al, 71], la polarisation diélectrique [Sun et al, 84] le matériel viscoélastique [Makris et al, 91] , la conduction de chaleur [Battaglia, 02]. Et plus récemment, le développement de systèmes de commande d'ordre fractionnaire [Oustaloup, A, 91]. Ces systèmes sont caractérisés par une mémoire infinie et leur modélisation par des modèles entiers nécessite un nombre de paramètres et un temps de calcul élevés. Cette complexité est encore plus importante dans le cas des systèmes non linéaires fractionnaires; pour y remédier à ce problème nous proposons l'approche multi-modèle généralisée au cas fractionnaire. Cette méthode permet de prendre en considération les différents points de fonctionnement du système non linéaire comme elle permet d'avoir un modèle qui représente au mieux la dynamique du système non linéaire fractionnaire avec un minimum de paramètres.

Objectifs du mémoire

L'objectif du travail présenté dans ce mémoire est d'exploiter la structure multi-modèle connue sous modèle de Takagi-Sugeno, afin d'identifier les systèmes non linéaires fractionnaires. Celle ci s'appuie sur l'utilisation d'un ensemble de sous-modèles de structures simples, chaque sous-modèle décrivant le comportement du système dans une "zone de fonctionnement" particulière. Ces sous-modèles servent alors à la description du comportement dynamique global du système en utilisant des fonctions non linéaires (fonctions poids) définissant la contribution de chaque sous-modèle. La forme multi-modèle réunit les avantages des modèles linéaires du point de vue de la structure, qui sont simples à utiliser, et des modèles non linéaires, qui permettent d'avoir une bonne représentation d'un système réel. La méthode ainsi développée pour l'identification des systèmes non linéaires fractionnaires sera validée par son application à l'identification d'un processus de diffusion.

Présentation du mémoire

Ce mémoire, décomposé en quatre chapitres, est organisé de la façon suivante :

- Le premier chapitre présente les principales méthodes d'identification des systèmes. La méthode d'identification classique des moindres carrés est développée et un aperçu général des méthodes d'identification continue dans le domaine temporel est donné. Deux grandes classes suivant la nature des erreurs de prédiction entre la sortie mesurée et la sortie estimée sont exposées: les méthodes à erreur d'équation sont simples à mettre en œuvre mais imposent une condition restrictive de linéarité du modèle vis à vis des paramètres, et les méthodes à erreur de sortie non restrictives sur l'hypothèse de linéarité et d'application plus générale. L'algorithme de Levenberg-Marquardt est développé.

- Le deuxième chapitre se compose de trois parties. La première partie présente quelques notions de base sur le calcul fractionnaire et les opérations de dérivation et d'intégration non entière. La deuxième partie s'intéresse à l'approximation et la simulation des systèmes d'ordre fractionnaire. L'approximation des modèles d'état d'ordre non entier dans le but de la simulation est basée sur l'operateur d'intégration fractionnaire borné en fréquence. L'objet de la troisième partie est l'utilisation et l'exploitation du concept de la dérivation d'ordre fractionnaire dans un contexte d'identification paramétrique des systèmes fractionnaires. Elle consiste à étendre la méthode du modèle (erreur de sortie) pour l'identification paramétrique des systèmes au même titre que l'ordre de dérivation non entière en utilisant l'algorithme

d'optimisation non linéaire Levenberg Marquardt généralisé aux cas de l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire.

-Le troisième chapitre est réservé à la présentation de l'approche multi-modèle qui est utilisée à présent pour l'identification des systèmes non linéaires. Cette méthode est généralisée pour l'identification des systèmes non linéaires fractionnaires. En représentant un système non linéaire fractionnaire sous forme multi-modèle, le problème de l'identification des systèmes est réduit à l'identification des paramètres des sous-systèmes définis par des modèles locaux linéaires ainsi que l'ordre de dérivation commun pour tous les sous-modèles. Cependant, cette méthode exige la connaissance des données entrées-sorties du système non linéaire autour de différents points de fonctionnement afin de pouvoir caractériser les modèles locaux. Pour cet effet nous avons développé l'algorithme à erreur de sortie associé à l'algorithme de Levenberg-Marquardt. L'approximation des sous-modèles est obtenue grâce à l'approximation de l'operateur d'intégration fractionnaire, ainsi le modèle global s'obtient par agrégation des modèles locaux fractionnaires approximés. A la fin du chapitre la méthode est appliquée sur l'identification d'un système non linéaire fractionnaire pour mettre en évidence la capacité de la méthode développée pour l'identification des systèmes non linéaires factionnaires.

-Le quatrième chapitre est consacré pour la mise en application de l'algorithme développé pour l'identification des systèmes non linéaires fractionnaires en l'occurrence le transfert de chaleur. L'identification du modèle d'un simulateur thermique par différence finie ainsi qu'un système expérimentale : benchmark thermique permet de valider l'approche multi-modèle fractionnaire pour l'approximation des phénomènes de diffusion non linéaire.

Enfin, une conclusion générale résume les principaux résultats obtenus et suggère les perspectives futures pour la suite de ce travail de recherche.

Chapitre 1

Identification des systèmes d'ordre entier

1.1 Introduction

Le développement des modèles mathématiques est un problème majeur pour l'application des techniques avancées de l'analyse, la commande, l'optimisation, la surveillance et le diagnostic des processus. Identifier un système dynamique réel (appelé processus) c'est le représenter par modèle, à partir de la connaissance expérimentale des entrées et sorties, de manière à obtenir une identité de comportement [Povy, 1975].

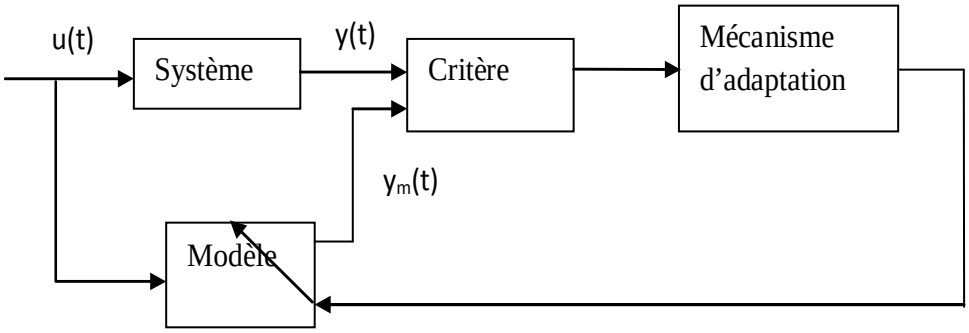


Figure1.1 : Identification d'un système

1.2 Principe de la modélisation mathématique

La modélisation mathématique est une représentation qui traduit le fonctionnement d'un système à travers des relations mathématiques liant les différentes variables du système. Elle peut se faire de deux façons différentes :

-Modélisation théorique : la représentation du système est faite à partir des lois (physiques, chimiques, biologiques, etc.) régissant le fonctionnement du système. Il est donc nécessaire d'avoir une connaissance complète du système. Cette modélisation peut présenter des difficultés lorsqu'elle est appliquée à des systèmes complexes. Les modèles de ce type sont appelés modèles de connaissance ou modèles de type «boîte blanche ».

-Modélisation expérimentale ou identification: la représentation est faite sur la base de données recueillies sur le système à modéliser. Cette représentation ne requiert que quelques connaissances à priori sur le système. Les modèles de ce type sont appelés modèles expérimentaux ou de type « boîte noire ». Ils sont représentés en général sous la forme d'une relation de type « entrée-sortie ». Dans certains cas, les connaissances à priori sur le système permettent de fixer la structure du modèle. La combinaison de ces connaissances à priori et des données expérimentales recueillies permet d'aboutir à une représentation du système communément appelé modèle de type «boîte grise».

L'établissement de la modélisation expérimentale est une procédure itérative comportant cinq phases [Landau, 93] (voir figure 1.2) :

Extraction de données : durant cette phase, des mesures sont effectuées sur les variables sensées caractériser le système, ces variables peuvent être des variables externes qui agissent sur le système, des variables internes qui traduisent l'état du système, ou la réponse du système. Il existe souvent des perturbations non mesurables qui agissent sur le système rendant plus difficile sa modélisation.

Choix de la structure du modèle : il s'agit de définir d'une façon formelle la relation expliquant le fonctionnement du système. Cette relation correspond à une famille de fonctions mathématiques dont une seule correspond au modèle recherché.

Choix du critère d'estimation paramétrique : c'est le choix de la fonction objectif (fonction coût) dont l'optimisation (minimisation) permet de déterminer la structure du modèle de façon unique. Ce critère est fonction de l'écart entre la sortie du système et celle du modèle.

Estimation paramétrique: elle s'agit alors de trouver la valeur des paramètres permettant la satisfaction d'un critère de performance donné (optimisation de la fonction objectif).

Validation du modèle : c'est une procédure qui permet d'évaluer l'exactitude (ou la fidélité) du modèle. Pendant cette phase, le modèle est testé avec des données non utilisées pendant la phase d'identification.

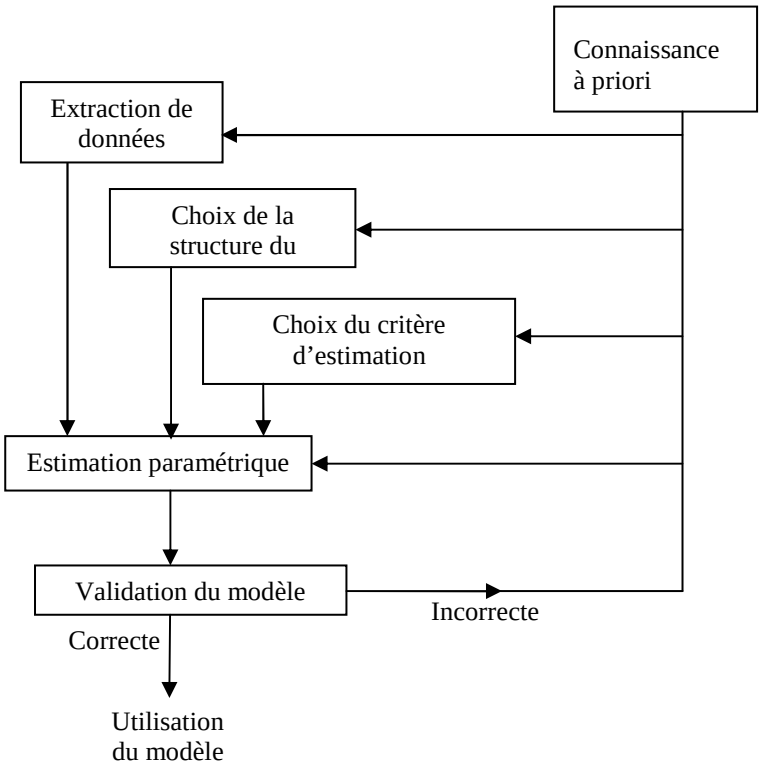


Figure 1.2: procédure d'identification d'un système

La phase d'estimation paramétrique est basée sur des méthodes d'optimisation, dans ce qui suit nous présenterons quelques méthodes les plus utilisées afin d'en extraire les principes d'optimisation les plus aptes à résoudre notre problème.

1.3 Algorithmes d'identification

Pour l'identification des systèmes deux approches d'identification sont utilisées dans la littérature, algorithme d'identification des systèmes discrets et l'algorithme d'identification des systèmes continus. Les modèles à temps continu sont plus proches de la nature physique du système et les paramètres estimés sont fortement liés aux paramètres réels du processus, pour les modèles discrets, les paramètres et la structure dépendent de la période d'échantillonnage choisie et peuvent avoir perdu tout lien avec la réalité physique.

1.3.1 Algorithmes d'identification de modèles discrets

-Identification classique des moindres carrés

La méthode des moindres carrés, introduite par Gauss au début du XIX^{ème} siècle, peut être utilisée afin de déterminer les paramètres optimaux d'une équation linéaire vis-à-vis de ces paramètres, quant on minimise la somme des carrés des écarts entre les valeurs issues d'une mesure et les valeurs obtenues par l'équation(1.1).

Soit le système discret décrit par le modèle ARMAX d'équation aux différences suivante :

$$y_k = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i \; y_{k-i} + \sum_{i=0}^{n_b} b_i \; u_{k-i} + e_k \qquad (1.1)$$

(u_k, y_k) étant les couples d'entrées/sorties associés au système à l'instant k, (a_i, b_i) les paramètres du modèle et e_k représente l'effet du bruit de mesure appelé aussi erreur d'équation, voir Figure 1.3.

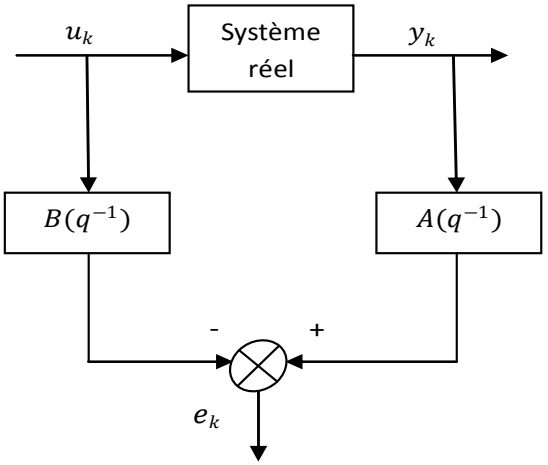


Figure 1.3 : Principe de la méthode des moindres carrés

En utilisant l'opérateur retard q^{-1} tel que $y_{k-1} = q^{-1} y_k$, l'équation (1.1) s'écrit :

$$A(q^{-1})y_k = B(q^{-1})u_k + e_k \qquad (1.2)$$

Soit θ le vecteur de paramètre à estimer $\theta^T = [a_1 \ldots a_{n_a} \; b_0 \ldots b_{n_b}]$ et soit ϕ_k le vecteur de mesures appelé aussi régresseur, défini par

$$\phi_k^T = [-y_{k-1} \ldots -y_{k-n_a} \; u_k \ldots u_{k-n_b}] \qquad (1.3)$$

L'équation (1.1) s'écrit alors sous la forme :

$$y_k = \phi_k^T \theta + e_k \qquad (1.4)$$

Donc la sortie du modèle de prédiction à l'instant k, peut être calculée à partir des mesures disponibles jusqu'à l'instant (k-1). En supposant que les données soient disponibles sur un horizon de mesures de N échantillons :

$$Y_k^T = [y_k \;\; y_{k+1} \ldots \;\; y_{k+N}] \quad \text{et} \quad U_k^T = [u_k \;\; u_{k+1} \ldots \;\; u_{k+N}]$$

L'équation (1.4) s'écrit sous forme matricielle :

$$Y_k^T = R_{k,N}.\,\theta + E_K$$

avec la matrice de mesures

$$R_{k,N} = [\phi_k^T \; \phi_{k+1}^T \ldots . \; \phi_{k+N}^T]^{\mathrm{T}} \quad \text{et} \quad E_k^T = [e_k \; e_{k+1} \ldots \; e_{k+N}]$$

La méthode des moindres carrés consiste à estimer un vecteur de paramètres $\hat{\theta}$ en minimisant un critère quadratique J tel que :

$$J=\sum_{k=1}^{N} \mathcal{E}_k^2 \qquad \mathcal{E}_k = y_k - \hat{y}_k \tag{1.5}$$

Avec $\hat{y}$ est la sortie prédite, $\mathcal{E}_k$ l'erreur de prédiction ou résidu.

La solution donnée par l'estimateur moindre carré est la matrice pseudo inverse de la matrice d'observation :

$$\hat{\theta} = \left[R_{k,N}^T \, R_{k,N}\right]^{-1} R_{k,N}^T Y_k \tag{1.6}$$

Celle ci conduit à un optimum unique mais introduit un biais de modélisation et un biais de mesure. Pour éliminer ce dernier, il faut que le régresseur soit non corrélé avec la perturbation et l'erreur de prédiction soit un bruit blanc pour $\hat{\theta} \approx \theta$ [Young, 1981]. Cela a conduit au développement de différentes variantes de la méthode des moindres carrés basées sur le blanchiment de l'erreur de prédiction ou sur la décorrelation entre le vecteur des observations et l'erreur de prédiction [Young, 1981].

1.3.2 Algorithmes d'identification de modèles continus

Pour ces algorithmes nous donnons comme exemple:

-l'approche à erreur d'équation

- l'approche à erreur de sortie (du modèle)

La première exige une transformation linéaire (TL) des données pour utiliser les techniques d'identification classique, alors que pour la deuxième structure à erreur de sortie, cette transformation n'est plus nécessaire.

1.3.2.1 La méthode à erreur d'équation

Ces algorithmes sont basés sur la méthode classique des moindres carrés [Young, 1981], la structure de ces méthodes est représentée en Figure 1.4

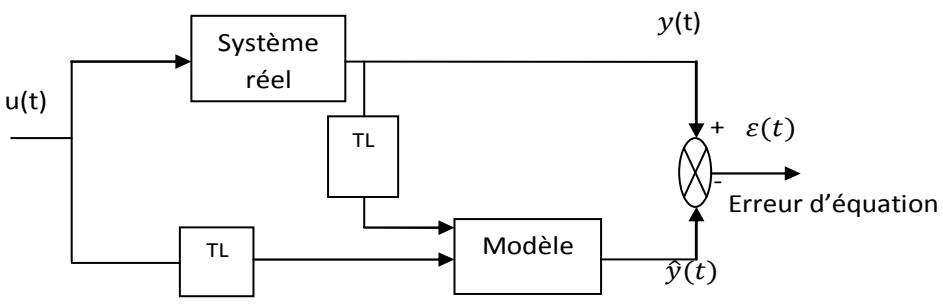


Figure 1.4 : Principe d'identification fondé sur l'erreur d'équation.

Le bloc de transformation linéaire des données (TL) est égal à 1 dans le cas particulier des modèles discrets ; en continu, le système (1.1) est décrit par une équation différentielle telle que:

$$\mathrm{y(t)} + a1\frac{dy(t)}{dt} + \cdots + a_{\mathrm{n}_a}\frac{d^{n_a}y(t)}{dt^{n_a}} = b_0u(t) + \ldots + b_{n_b}\frac{d^{n_b}u(t)}{dt^{n_b}} + e(t) \qquad (1.7)$$

Soit $\theta = [a_1 \ \ldots \ a_{n_a} \ b_0 \ \ldots b_{n_b} \ ]^T$ le vecteur de paramètre à estimer.

le régresseur s'écrit dans ce cas :

$$\phi(t) = \left[-\frac{dy(t)}{dt} \ldots -\frac{d^{n_a}y(t)}{dt^{n_a}} \ u(t) \ldots \frac{d^{n_b}u(t)}{dt^{n_b}}\right]^T \qquad (1.8)$$

L'équation (1.7) peut être écrite sous cette forme :

$$\mathrm{y(t)} = \phi(t)^T\theta + e(t) \qquad (1.9)$$

L'équation (1.9) s'écrit sous une forme similaire à (1.4), Dans ce cas, le régresseur est formé des dérivées successives des entrées/sorties, inutilisables en pratique, et une transformation linéaire couplée à la méthode des moindres carrés permet de résoudre le problème de l'estimation des dérivées des signaux.

Les méthodes de type erreur d'équation présentent l'intérêt d'une solution explicite qui conduit à un optimum unique. Elles ont l'avantage d'être simple à mettre en œuvre mais imposent une condition restrictive de linéarité du modèle vis à vis des paramètres. Leur inconvénient majeur est l'introduction de biais : biais de mesure et biais de modélisation. La réduction du premier peut être effectuée par une méthode du type variable instrumentale [Young, 70], en revanche, le second subsiste toujours.

Ces méthodes restent intéressantes dans un contexte non bruité et sont utilisées pour initialiser les algorithmes à erreurs de sortie.

1.3.2.2 L'approche à erreurs de sortie

La méthode à erreurs de sortie (méthode du modèle) est basée sur la comparaison de la sortie d'un processus et celle d'un modèle mathématique dont on cherche à évaluer les paramètres. Cette méthode s'avère particulièrement efficace lorsque la fonction à identifier est non linéaire. Son fonctionnement est schématisé succinctement par la figure 1.5.

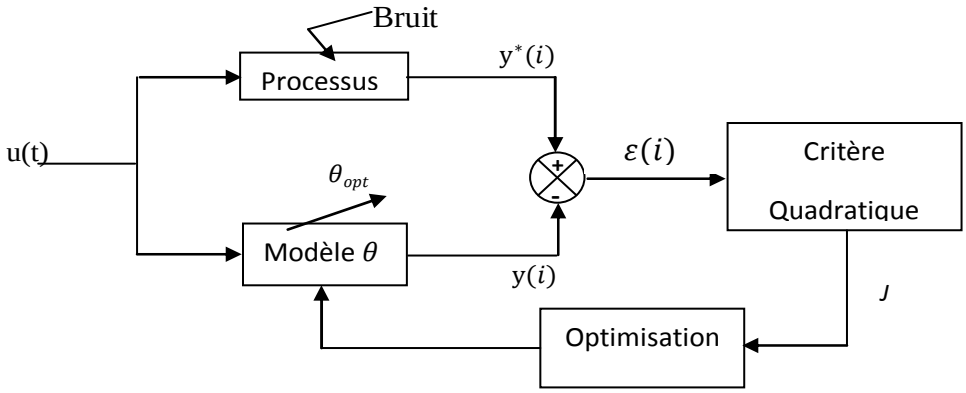


Figure 1.5 : Principe d'identification fondé sur l'erreur de sortie.

Soit le système monovariable dépendant du vecteur θ de paramètres à estimer

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x, \theta, u) \\ y = f(x, \theta, u) \end{cases} \tag{1.10}$$

où y(t) et u(t) sont la sortie et l'entrée du système respectivement. g et f sont des lois issues d'un raisonnement physique, qui en général ne sont pas linéaires.

Considérons un ensemble de K données expérimentales $\{u_k, y_k^*\}$, acquises avec la période d'´echantillonnage T_e, telle que $t = kT_e$; le problème de l'identification est alors d'estimer le modèle qui correspond le mieux aux données, donc de déterminer la valeur des paramètres du vecteur θ.

L'erreur de prédiction notée ε_k entre la sortie réelle ${y^*}_k$ et la sortie simulée y_k est définie par

$$\varepsilon_k = {y^*}_k - y_k \tag{1.11}$$

Le critère que l'on se propose de minimiser est

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^{K} \varepsilon_k^2 = \sum_{k=1}^{K} ({y^*}_k - y_k)^2 \tag{1.12}$$

où y_k^* représente la sorties échantillonnée perturbée par un bruit b_k .

Comme y(t) n'est pas linéaire en θ, la minimisation de ce critère s'effectue par une méthode de Programmation Non Linéaire. Plusieurs méthodes itératives d'optimisation non linéaire peuvent être utilisées:

- Gradient
-Gauss-Newton
-Levenberg-Marquardt

1.4 Méthodes d'optimisation non linéaire

L'estimation des paramètres d'un modèle se fait en optimisant un critère de performance dans le but d'approcher la sortie du système par celle du modèle. Ce critère de performance est une fonction de l'écart (ou résidu) entre la sortie réelle du système et celle du modèle.

Méthode du gradient :

Cette méthode consiste à rechercher le minimum du critère par l'utilisation des dérivées du critère par rapport à chacun des paramètres. La procédure itérative à la recherche du minimum est présentée par l'équation aux récurrences suivante : [Calamai and More, 1987]

$$\theta^{i+1} = \theta^{i} - \lambda_i J'(\theta^{i}) \qquad (1.1\ 3)$$

avec $J'(\theta^{i})$ le gradient à l'itération i et λ_i coefficient correcteur du pas de descente. La méthode du gradient présente l'intérêt d'être simple à mettre en œuvre. Lorsque le point initial est situé loin du point optimum, cette méthode permet de diminuer rapidement la valeur du critère. En contrepartie, la convergence devient de plus en plus lente en se rapprochant du minimum car le vecteur gradient tend à osciller.

Méthode de Gauss-Newton :

Cette méthode consiste à rechercher le minimum du critère par l'utilisation des dérivées premières et secondes du critère par rapport à chacun des paramètres. La procédure itérative à la recherche du minimum est présentée par l'équation récurrente suivante: [Kelley, 99]

$$\theta^{i+1} = \theta^{i} - \lambda_i \left[J''(\theta^{i})\right]^{-1} J'(\theta^{i}) \qquad (1.14)$$

avec $J''(\theta^{i})$ la matrice des dérivées secondes du critère, dite le Hessien. La méthode de Gauss-Newton s'avère particulièrement efficace lorsqu'on se trouve dans le voisinage du minimum, mais se montre fragile dans sa convergence par rapport au choix du vecteur initial.

Méthode de Levenberg-Marquardt

Les deux méthodes précédentes présentent l'inconvénient (que quelques variantes contournent) de ne pas converger lorsque le point initial est loin du minimum recherché.

L'algorithme Levenberg-Marquardt lève cet inconvénient en proposant un compromis entre la méthode du gradient (robuste mais lente à l'approche du minimum) et celle de Newton (peu robuste loin du minimum mais très efficace près). Cette méthode consiste à rechercher le minimum du critère par l'utilisation des dérivées premières et secondes du critère par rapport à chacun des paramètres.

La procédure itérative à la recherche du minimum est présentée par l'équation aux récurrences suivante : [Marquardt, 63]

$$\theta^{i+1} = \theta^i - [J''(\theta^i) + \lambda_i I]^{-1} J'(\theta^i) \tag{1.15}$$

avec λ_i un coefficient strictement positif permettant de contrôler la direction de recherche du minimum de *J* par relaxation mathématique. λ_i est réduit à chaque itération réussie et au contraire λ_i est augmenté à chaque itération non convergente.

Cette méthode conjugue les deux méthodes précédentes, pour les valeurs élevées de λ_i, la méthode est proche du gradient, à contrario, la méthode est proche de Gauss-Newton pour les faibles valeurs de λ_i. Le critère quadratique est calculé à partir de l'écart entre la sortie du processus et la sortie du modèle.

Le vecteur gradient correspond à la dérivée du critère vis à vis de chacun des paramètres constituant le modèle. Il s'écrit sous la forme suivante :

$$J'(\theta^i) = \frac{\partial J(\theta^i)}{\partial \theta^i} = -2 \sum_{k=1}^{K} \varepsilon_k \frac{\partial y_k}{\partial \theta^i} \tag{1.16}$$

La dérivée partielle de la sortie du modèle est le vecteur de fonctions de sensibilité par rapport aux paramètres du modèle, on la note :

$$\left[\sigma_{y/\theta}\right]_k = \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \theta} \tag{1.17}$$

Le vecteur gradient peut donc s'écrire :

$$J'(\theta^i) = -2 \sum_{k=1}^{K} \varepsilon_k \left[\sigma_{y/\theta}\right] \tag{1.18}$$

Le Hessien est défini comme étant la dérivée seconde du critère, soit la dérivée du gradient.

Il s'exprime sous la forme :

$$J''(\theta^i) = \frac{\partial J'(\theta^i)}{\partial \theta^i} = 2 \sum_{k=1}^{K} \sigma_{y/\theta} \, \sigma_{y/\theta}^{\,T} \tag{1.19}$$

Le calcul du Gradient et du Hessien est basé sur le calcul des fonctions de sensibilité paramétrique que nous définissons dans le paragraphe suivant.

- **Calcul des fonctions de sensibilité**

Ce sont les indicateurs essentiels du conditionnement de l'identification car elles traduisent l'effet d'une variation d'un paramètre sur la sortie du système. En effet, le développement en série de Taylor du 1er ordre de la sortie y autour de l'espace paramétrique θdonne :

$$y(t, \theta + \delta\theta) - y(t, \theta) \simeq \delta\theta^T . \sigma_{y/\theta} \tag{1.20}$$

Cette expression indique clairement que la variation de la sortie du modèle peut être projetée sur la base des fonctions de sensibilité. En fait, au-delà de leur rôle essentiel dans le calcul, ces fonctions σ sont l'équivalent des composantes ϕ du régresseur dans le cas du modèle linéaire par rapport aux paramètres. Par conséquent, l'identification devient très sensible au calcul de ces coefficients.

Dans le cadre de notre mémoire, le système est décrit par un modèle d'état, cette représentation revêt l'avantage d'être compacte, simple et plus générale. De plus, elle s'avère dans la pratique très bien adaptée à la synthèse d'une loi de commande ou à la conception d'observateurs.

Considérons le cas général d'un système sous forme de représentation d'état (1.21)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) \\ y(t) = C(\theta)x(t) + D(\theta)u(t) \end{cases} \tag{1.21}$$

tel que θ est le vecteur des paramètres des matrice $A, B, C\ et\ D$ à identifier est donné par :

L'application de la dérivation de (1.21) par rapport à θ donne

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j}\dot{x}(t) = \dot{\sigma}x_{/\theta_j} = \frac{\partial A}{\partial\theta_j}x(t) + A\frac{\partial x(t)}{\partial\theta_j} + \frac{\partial B}{\partial\theta_j}u(t) + B\frac{\partial u(t)}{\partial\theta_j} \tag{1.22}$$

La différentiation de la sortie

$$\frac{\partial y(t)}{\partial\theta_j} = \sigma y_{/\theta_j} = \frac{\partial C}{\partial\theta_j}x(t) + C\frac{\partial x(t)}{\partial\theta_j} + \frac{\partial D}{\partial\theta_j}u(t) + D\frac{\partial u(t)}{\partial\theta_j} \tag{1.23}$$

Avec $\frac{\partial u(t)}{\partial\theta_j}$=0, j = 1, ... 3n + 1 avec n est l'ordre du système.

Ces équations (1.22) (1.23) peuvent être simulées sous MATLAB, après avoir calculé analytiquement les dérivées par rapport au vecteur de paramètres θ.

Les méthodes à erreur de sortie présentent l'avantage d'une applicabilité quasi-universelle que ce soit vis-à-vis des types de systèmes ou des domaines d'application, ne nécessite pas d'hypothèse sur la forme du modèle, elle est adapté à la recherche de paramètres physiques si modèle de connaissances (modèle continu), et constituent un outil d'identification puissant.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la méthode des moindres carrés qui est une méthode de base de l'identification des systèmes, cette méthode nécessite un modèle linéaire par rapport aux paramètres. Dans le cas de modèle discret les paramètres et la structure dépendent de la période d'échantillonnage choisie et peuvent avoir perdu tout lien avec la réalité physique.

Comme nous avons présenté les deux classes de l'identification continue : la méthode à erreur d'équation et la méthode à erreur de sortie. La méthode à erreur d'équation nécessitant une

étape intermédiaire de transformation linéaire doit être utilisée en association avec une méthode de variable instrumentale pour rejeter le biais asymptotique, mais un biais de modélisation subsiste toujours. Les méthodes à erreur de sortie non restrictives sur l'hypothèse de linéarité et d'application plus générale, constituent un outil puissant d'identification.

Certains phénomènes physiques caractérisés par une dynamique complexe et la propriété de mémoire longue n'obéissent pas aux lois standards des systèmes entiers, une nouvelle classe de systèmes appelée modèles d'ordre non entier ou fractionnaire est développée, La modélisation et la simulation de cette classe de systèmes font l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Identification des systèmes d'ordre non entier

2.1 Introduction

L'identification des systèmes dynamiques par des modèles d'ordre fractionnaire est l'une des applications de la théorie du calcul fractionnaire qui a connu un grand développement au cours de ces deux dernières décennies. Les phénomènes physiques présentant une mémoire longue et une structure de dimension infinie peuvent être modélisés par l'introduction de la dérivée d'ordre fractionnaire dans les modèles mathématiques du système. En effet, la dérivée fractionnaire d'une fonction tient compte de tout l'historique de la fonction et ne reflète pas uniquement des caractéristiques locales comme dans le cas de la dérivée d'ordre entier.

La première partie de ce chapitre rappelle les notions de base du calcul fractionnaire et les opérations de dérivation et d'intégration non entière.

La deuxième partie s'intéresse à l'approximation et la simulation des systèmes d'ordre fractionnaire. L'opérateur d'intégration fractionnaire borné en fréquence, associé à une représentation d'état permet la simulation des systèmes non entiers à l'aide d'un formalisme d'état conventionnel de dimension élevée mais non infinie.

Quant à la troisième partie, elle est consacrée à l'identification des systèmes fractionnaires à l'aide des représentations d'état fractionnaire, nous exposons le principe de la méthode d'identification utilisée, qui est la méthode du modèle associée à l'algorithme d'optimisation non linéaire Levenberg-Marquardt généralisé pour le cas fractionnaire, Cette méthode fait appel aux fonctions de sensibilités que nous avons développées analytiquement.

2.2 Calcul fractionnaire

La question de la dérivée fractionnaire a été abordée dés 1695 par Leibnitz dans une lettre à L'Hospital, mais lorsque celui-ci lui demande quelle pourrait être la dérivée d'ordre un demi de la fonction x, Leibnitz répond que cela mène à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles conséquences. Plus de 300 ans après, on commence seulement à venir à bout des difficultés. De nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, en particulier Euler (1730), Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847), etc. Différentes approches ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation aux ordres non-entiers dont :

– la limite du taux d'accroissement d'une fonction qui se généralise sous la forme de la formule de Grünwald-Letnikov, très utile numériquement.

– l'intégration, opération inverse, via la formule intégrale de Liouville, qui mène aux formules de Riemann-Liouville et de Caputo.

– les transformations de Fourier et de Laplace qui associent la dérivation fractionnaire à une multiplication par $(i\omega)^{\alpha}$ ou p^{α} avec α non entier.

Ces différentes définitions ont pendant longtemps semblé ne pas donner toujours les mêmes résultats.

2.3 Opérateurs d'ordre fractionnaire

L'opération de dérivation ou d'intégration d'ordre non entier est la généralisation de la dérivation ou intégration classique entière à des ordres quelconques non entiers irrationnels ou complexes.

2.3.1 Définitions fondamentales

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. Les principales définitions utilisées dans la littérature sont les suivantes :

2.3.1.1 Définition de Riemann-Liouville

Cette définition est appelée la définition de Letnikov-Riemann-Liouville [Samko et al, 93], son expression mathématique est donnée par:

$$ {}^{RL}_{t_0}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \qquad (n-1) < \alpha < n \qquad (2.1) $$

Avec $t \in \mathcal{R}$ et $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{\alpha-1} dt$ est la fonction gamma d'Euler

Le symbole ${}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} f(t)$ désigne la dérivée d'ordre non entier α par rapport à t de la fonction $f(t)$ entre t_0 et t selon la définition de Riemann-Liouville.

2.3.1.2 Définition de Caputo

La définition de Caputo requiert que la fonction $f(t)$ ainsi que ses n dérivées successives soient nulles pour $t \leq 0$, ce qui la rend plus restrictive que la définition de Riemann-Liouville qui exige la seule causalité de $f(t)$.

La dérivée d'ordre fractionnaire définie par Caputo est donnée par:

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} f(\mathrm{t}) \triangleq I^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(\mathrm{n}-\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \qquad (2.2) $$

avec *n* est un entier positif vérifiant l'inégalité $(n-1) < \alpha < n$.

$f^{(n)}(\tau)$ étant la dérivée d'ordre entier, par rapport à τ, de la fonction $f(\tau)$.

${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} f(\mathrm{t})$ désigne la dérivée d'ordre non entier α de la fonction $f(t)$ entre t_0 et t selon la définition de Caputo.

2.3.1.3 Définition de Grünwald-Letnikov

La définition de la dérivée non entière d'une fonction, proposée par Grünwald-Letnikov, peut être obtenue de façon plus intuitive à partir de la généralisation de la définition de la dérivée entière usuelle :

La dérivée d'ordre 1 s'écrit :

$$ D^1 f(t) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(t) - f(t-h)}{h} \right) $$

h étant le pas d'échantillonnage.

La généralisation à un ordre de dérivation quelconque (entier, réel) conduit à la définition proposée par Grünwald en 1867, soit:

$$ {}_{t_0}^{GL}D_t^{\alpha} f(\mathrm{t}) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{t-t_0}{h}\right]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - k\,h) \qquad (2.3) $$

$\left[\frac{t-t_0}{h}\right]$ désigne la partie entière et la notation $\binom{\alpha}{k}$ représente le binôme de Newton généralisé à des nombres réels.

avec
$$ \binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\mathrm{k}+1)\Gamma(\alpha-\mathrm{k}+1)} \qquad (2.4) $$

Pour des ordres de dérivations entiers la formule (2.3) se limite à une combinaison linéaire des (n + 1) valeurs de la fonction$f(t - k\,h)$, $k = 0, \ldots, n$ donnant ainsi une caractérisation

locale. Et dans le cas des ordres non entiers, la $D_t^{\alpha} f(t)$ à un instant *t* donné prend en compte toutes les valeurs de cette fonction à tous les instants du passé $k = 0, \dots, \infty$, Cela montre qu'a l'inverse de la dérivation entière, la dérivation non entière donne une caractérisation globale de la fonction.

2.3.2 Représentation des systèmes d'ordre fractionnaire

Un système d'ordre fractionnaire peut être décrit comme dans le cas entier par trois modèles (équation différentielle, représentation d'état, fonction de transfert).

1- Equation différentielle généralisée

L'équation différentielle généralisée représentant un système d'ordre non entier s'écrit sous la forme :

$$y(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i \; D^{\alpha_i} y(t) = \sum_{j=1}^{m} b_j \; D^{\beta_j} u(t) + b_0 \; u(t) \qquad (2.5)$$

Où $u(\mathrm{t}) \in \mathbb{R}$ et $y(t) \in \mathbb{R}$ désigne respectivement l'entrée et la sortie du système,

$a_i, b_j \in \mathbb{R}$; $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}^+$.

Lorsque les ordres de dérivation α_i, β_j sont tous multiples d'un même nombre réel α tel que $\alpha_i = i\alpha, \beta_j = j\alpha$, le système non entier est dit d'ordre commensurable.

2- Fonction de transfert fractionnaire

- Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires

La transformation de Laplace de la dérivée d'ordre α de la fonction causale $f(t)$selon la définition de Riemann-Liouville est donnée par :

$$L\left\{ {}_0D_t^{\alpha} f(t)\right\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=O}^{n-1} s^k \; {}_0D_t^{\alpha-k-1} f(0) \qquad (n-1 \le \alpha < n) \quad (2.6)$$

La transformation de Laplace de la dérivée d'ordre α, par rapport a *t*, de la fonction causale $f(t)$ selon la définition de Caputo est donnée par :

$$L\left\{ {}_0D_t^{\alpha} f(t)\right\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=O}^{n-1} s^{\alpha-k-1} \; {}_0D_t^{k} f(0) \qquad (n-1 \le \alpha < n) \qquad (2.7)$$

On applique la transformation de Laplace définie par Caputo sur l'équation (2.5) on obtient la fonction de transfert non entière suivante :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j s^{\beta_j}}{1 + \sum_{i=1}^{n} a_i s^{\alpha_i}} \tag{2.8}$$

Dans le cas des systèmes commensurables la fonction de transfert s'écrit :

$$G(s) = \frac{b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j s^{j\alpha}}{1 + \sum_{i=1}^{n} a_i s^{i\alpha}} \tag{2.9}$$

3- Représentation d'état des systèmes fractionnaires

Comme dans le cas entier, une représentation d'état d'ordre fractionnaire comporte deux équations :

- une équation d'état d'ordre fractionnaire dans laquelle le vecteur d'état ne fait plus l'objet d'une dérivation unitaire mais d'une dérivation d'ordre fractionnaire réel.

- une équation de sortie analogue à celle du cas entier.

Elle est ainsi définie par le système d'équation :

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{2.10}$$

Avec $x \in \mathbb{R}^{n}$ représente le vecteur d'états, $u \in \mathbb{R}\ et\ y \in \mathbb{R}$ représentent le vecteur d'entrée et du sortie respectivement.

$\alpha \in \mathbb{R}^{+}$est l'ordre de dérivation avec $D^{(\alpha)}x = [D^{\alpha_1}x_1\ D^{\alpha_2}x_2\ \ \ldots\ \ D^{\alpha_n}x_n]^T$.

Dans le cas des systèmes d'ordres fractionnaires commensurables tous les états $x_i(t)$ sont derivé à un même ordre non entier α : $D^{(\alpha)}x = [D^{\alpha}x_1\ D^{\alpha}x_2\ \ \ldots\ \ D^{\alpha}x_n]^T$

2.3.3 Commandabilité et observabilité des systèmes fractionnaires

La définition de la commandabilité des systèmes fractionnaires est la même que celle utilisée dans la théorie des systèmes linéaires entiers [Matignon et al, 96] [Bettayeb et al, 06]…

Le système non entier d'ordre commensurable de l'équation (2.10) est commandable si pour un temps donné t_0 il existe un temps fini $t_1 > t_0$ tel que, quelque soient deux états $x(t_0) = x_0$ et x(t_1)=$x_1$dans l'espace d'état, il existe une entrée de commande $u(t), t \in [t_0\ t_1]$ qui permet de transférer l'état $x(t)$ de x_0 à x_1 en un temps fini t_1.

Le système non entier d'ordre commensurable (2.10) est commandable si le rang de la matrice de commandabilité :

$$C = [B\ AB\ A^2\ B \cdots\ A^{n-1}B] \tag{2.11}$$

est égal à n.

De la même manière la condition d'observabilité des systèmes non entiers commensurables est établie en utilisant la définition d'observalité des systèmes entiers donnée par :

Le système non entier d'ordre commensurable de l'équation (2.10) est observable pendant l'intervalle de temps $[t_0\ t_1], t_1 > 0$, si n'importe quel état x(t_0) peut être déduit à partir des observations de la sortie $y(t)$ et de l'entrée $u(t)$ pendant un temps fini $t \in [t_0\ t_1]$.

Dans ce cas aussi, la condition d'observabilité du système (2.10) est que le rang de la matrice d'observabilité :

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

est égal à n.

2.3.4 Stabilité des systèmes fractionnaires

La définition de la stabilité au sens BIBO (Bounded input, Bounded output), dite aussi stabilité externe, est donnée par la définition suivante [Matignon, 98] :

Un système est dit BIBO stable si, à une entrée bornée il lui correspond une sortie bornée.

Dans le cas des systèmes entiers la condition de stabilité est que l'équation caractéristique du système n'admet aucune racine à partie réelle positive. Pour le cas des systèmes fractionnaires ou d'ordre non entier peuvent avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe et être stables.

La condition de stabilité établie par Matignon pour les systèmes non entiers d'ordre commensurable (2.10) nécessite que :

$$|arg\ (\lambda_i)| > \alpha\frac{\pi}{2}, \qquad (\lambda_i) \in \sigma(A), \qquad i = 1, \cdots, n \tag{2.13}$$

avec $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$

Le domaine de stabilité est représenté en Figure 2.1.

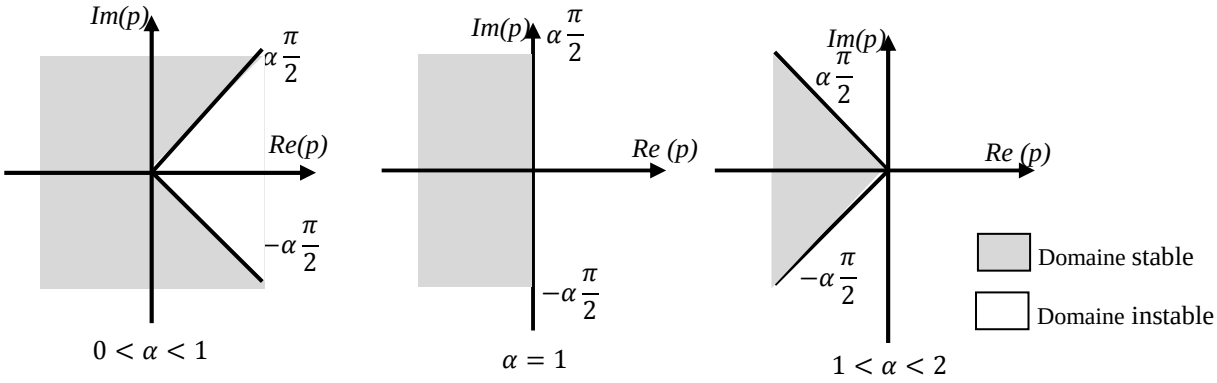


Figure 2.1: Domaine de stabilité des systèmes commensurables dans le plan complexe $p = s^{\alpha}$

La simulation des systèmes d'ordre fractionnaire est basée sur l'approximation de l'operateur de dérivation ou d'intégration d'ordre non entier par un modèle d'ordre entier, celui ci, connu pour son caractère global, induit que la sortie d'un système non entier, à un instant donné, dépend de tout son passé, connaissance souvent indisponible ou difficile à prendre en compte. Pour remédier à ce problème plusieurs méthodes ont été proposées.

2.4 Simulation des systèmes d'ordre fractionnaire

La simulation numérique de ces systèmes fractionnaires est dépendante de la modélisation de l'opérateur de dérivation fractionnaire. Afin de simuler un système d'ordre non entier deux types de méthodes peuvent être considérées. La première, appelée l'approche directe, est basée sur une approximation numérique de l'opérateur de dérivation non entière [Carlson, Matsuda, Euler,…], la plus répandue étant celle issue de la définition de Grünwald-Letnikov : le modèle fractionnaire est alors remplacé par un modèle d'équations aux différences qui a un comportement de type mémoire longue. Bien que ces méthodes soient faciles à mettre en œuvre, elles requièrent pour chaque pas d'échantillonnage le calcul de sommes de dimension croissante, rendant ainsi la simulation difficile et le temps de calcul important, donc inutilisables en simulation en temps réel, La deuxième, appelée la méthode indirecte [Oustaloup, Charef, Trigeassou,..], Cette approche est basée sur une approximation entière continue du système à simuler, à partir de la synthèse d'opérateur de dérivation ou intégration fractionnaire. Ce dernier de dimension infinie peut être approché par des modèles rationnels de dimension finie. La méthode d'approximation de Charef, le système fractal, également appelés Fractional Power Pole (FPP) est approximé par une fonction de singularité constituée

d'une série de paires pôle-zéro dont le nombre et la distribution fréquentielle dépendent, notamment, d'une erreur d'approximation définie au préalable. La méthode d'Oustaloup repose sur une distribution récursive d'une infinité de zéros et de pôles réels négatifs (afin d'assurer un comportement à phase minimale). Dans le cadre d'une synthèse réaliste (pratique) fondée sur un nombre fini de zéros et de pôles, il convient de réduire le comportement différentiel généralisé sur un intervalle fréquentiel borné, choisi selon les besoins de l'application.

2.4.1 L'approche d'Oustaloup

La méthode [Oustaloup, 95] est basée sur l'approximation de la fonction de la forme:

$$\mathrm{H(s)}=s^{\alpha}, \qquad \alpha \in R^{+} \tag{2.14}$$

par la fonction irrationnelle suivante :

$$\frac{1}{s^{\alpha}} \rightarrow I^{\alpha}(s) = C\left(\frac{1+\frac{s}{\omega_b}}{1+\frac{s}{\omega_h}}\right)^{-\alpha} \tag{2.15}$$

Cette approche consiste à remplacer le dérivateur non entier (2.14) par un dérivateur non entier borné en fréquence (2.15), avec $\omega_b$et $\omega_h$étant les fréquences transitionnelles basse et hautes, α l'ordre de dérivation non entier, et C est un coefficient de normalisation.

La synthèse de dérivateur non entier borné en fréquence repose sur une distribution récursive de zéros et de pôles soit :

$$I^{\alpha}(s) \approx \widehat{H}(s) = C\prod_{k=1}^{N}\frac{1+{}^{s}/_{\omega_k}}{1+{}^{s}/_{\omega'_k}} \tag{2.16}$$

L'inconvénient de la méthode d'Oustaloup est qu'elle présente un comportement asymptotique d'ordre zéro en basses et en haute fréquences, même dans le cas d'un dérivateur. Le faite que la fonction de transfert soit une constante en basse fréquence, cela engendre une réponse indicielle finie à la différence de la réponse indicielle de l'intégrateur idéal qui est infinie. Une amélioration de cette approche est proposée par Trigeassou [Trigeassou et al, 99], en définissant un opérateur d'intégration fractionnaire borné en fréquence dont le comportement à l'extérieur de l'intervalle fréquentiel est un comportement d'un intégrateur d'ordre 1.

2.4.2 L'approche par intégrateur fractionnaire

Cette approche à été proposée par Trigeassou et Lin [Trigeassou et al, 99]. Elle nécessite à définir un opérateur d'intégration fractionnaire borné en fréquence dont le comportement à l'extérieur de l'intervalle fréquentiel est d'ordre 1.

$$\frac{1}{s^{\alpha}} \rightarrow I^{\alpha}(s) = \frac{G_{\alpha}}{s}\left(\frac{1+\frac{s}{\omega_b}}{1+\frac{s}{\omega_h}}\right)^{1-\alpha} \tag{2.17}$$

La synthèse de cet opérateur repose sur une approximation par une distribution récursive de pôles et zéros, qui conduit à l'opérateur d'intégration fractionnaire décrit par l'expression suivante :

$$\tilde{I}^{\alpha}(s) = \frac{G_{\alpha}}{s}\prod_{j=1}^{N}\frac{1+{}^{s}/_{\omega'_j}}{1+{}^{s}/_{\omega_j}} \tag{2.18}$$

G_{α} est un coefficient tel que l'intégrateur fractionnaire idéal et son approximation $\tilde{I}^{\alpha}$ aient le même gain pour la pulsation $\omega_u = 1\,rd/s$. Les fréquences transitionnelles ω'_j et ω_j sont définies par les relations récurrentes suivantes [Oustaloup, 95]:

- $\omega_j = \delta\omega'_j$ avec $\delta > 1$
- $\omega'_{j+1} = \eta\omega_j$ avec $\eta > 1$
- $\alpha = 1 - \frac{log\,(\delta)}{log\,(\delta\eta)}$

Les coefficients δ et η sont les facteurs récursifs dépendants du nombre de cellules *N*.

Le schéma synoptique de l'opérateur d'intégration synthétisé est donné par la figure2.2 :

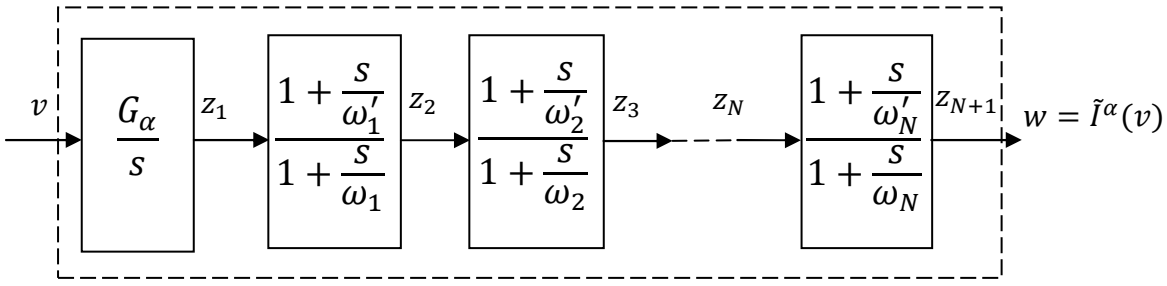


Figure2.2 : Schéma bloc de $\tilde{I}^{\alpha}(s)$

Le modèle d'état correspondant est donné par

$$\begin{cases} \dot{z} = \mathrm{a}_I z + \mathrm{b}_I v \\ w = \mathrm{c}_I z \end{cases} \tag{20.19}$$

avec :

$$\begin{cases} \mathrm{a}_I = M_I^{-1} A_I \\ \mathrm{b}_I = M_I^{-1} B_I \end{cases} \tag{2.20}$$

$z = [\, z_1 \cdots z_j \cdots z_{N+1}]^T$

$$M_I = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -\alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\alpha & 1 \end{bmatrix} A_I = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ \omega_1 & -\omega_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \omega_N & -\omega_N \end{bmatrix} B_I = \begin{bmatrix} Gn \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{c}_I = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}^T$$

z représente le vecteur d'état micro de l'intégrateur, avec $v(t)$ est l'entrée de $\tilde{I}^{\alpha}(s)$

La figure 2.3 représente le diagramme de Bode d'un intégrateur borné en fréquence, cette figure montre une amplitude de l'intégrateur fractionnaire de -20α dB/décade et une phase de$-\alpha\frac{\pi}{2}$, en effet celui-ci présente un comportement fractionnaire dans une bande de fréquence limité [w_b w_h], et agit comme un intégrateur entier à l'extérieur de cette bande.

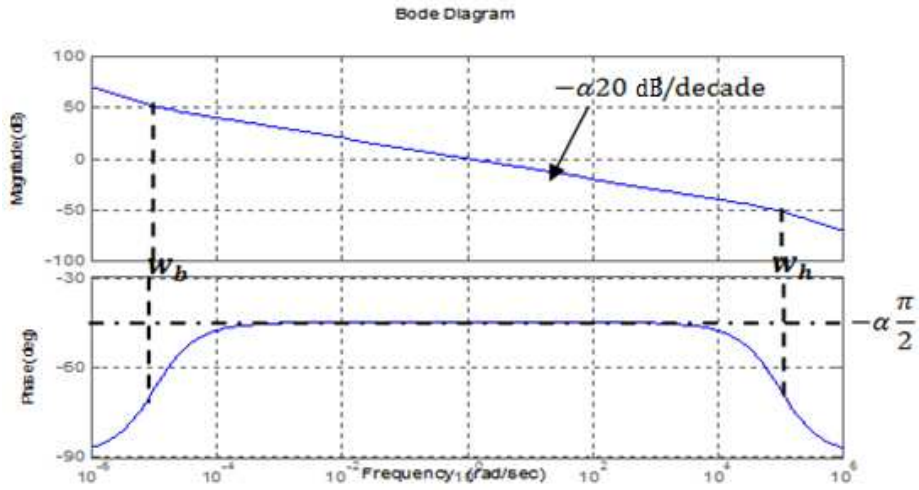


Figure 2.3: Diagramme de Bode d'un intégrateur borné en fréquence $\tilde{I}^{\alpha}$

Par la suite de notre travail la simulation de l'operateur I^{α} se base sur l'operateur d'intégration borné en fréquence défini par Trigeassou.

2.5 Approximation des systèmes d'ordre fractionnaire en représentation d'état

Soit le modèle d'état d'un système fractionnaire dont les conditions initiales sont supposées égales à zéro :

$$\begin{cases} D^{(\alpha)}x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{2.21}$$

$$D^{(\alpha)}x = [D^{\alpha}x_1 \;\; D^{\alpha}x_2 \ldots D^{\alpha}x_n]^T \tag{2.22}$$

Avec $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\ et\ \alpha \in \mathbb{R}^+$

Le schéma synoptique du modèle d'état (2.21) est donné en figure 2.4

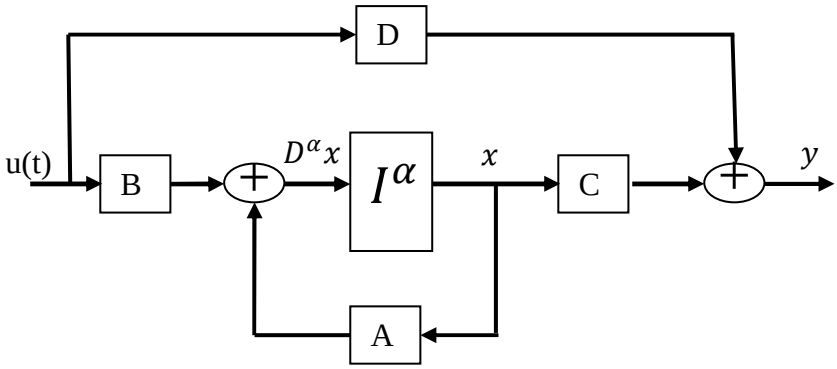
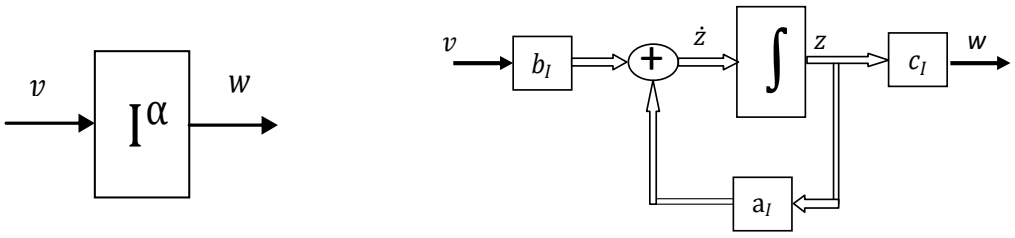


Figure 2.4: Schéma synoptique du modèle d'état fractionnaire

L'approximation des systèmes non entiers par des modèles d'ordre entier, consiste à développer un modèle d'état d'ordre entier qui approxime le système fractionnaire dans une bande de fréquences donnée, Pour ce faire, on se base sur le schéma de simulation de la figure2.5 dans lequel l'intégrateur non entier $I^\alpha(s)$ (Figure 2.5(a)) est remplacé par son approximation entière (Figure 2.5 (b)). La formulation du modèle d'état est développée par la suite pour le cas des systèmes commensurables monovariables.

$$\tilde{I}_\alpha(s) = \frac{G_\alpha}{s} \prod_{j=1}^{N} \frac{1+{}^{s}/_{\omega'_j}}{1+{}^{s}/_{\omega_j}} \tag{2.23}$$



(a)-Intégrateur d'ordre α (b)-Approximation entière du l'intégrateur

Figure 2.5: Approximation de I^α par un modèle d'état entier

L'intégrateur fractionnaire (2.23) peut être remplacé par son approximation entière de modèle d'état (a_I, b_I, c_I) de (2.24)

$$\begin{cases} \dot{z} = a_I z + b_I v \\ w = c_I z \end{cases} \tag{2.24}$$

Le modèle (2.24) peut être écrit sous le modèle d'état suivant:

$$\begin{cases} \dot{Z} = \mathrm{A}_d Z + \mathrm{B}_d (D^{\alpha} x) \\ w = \mathrm{C}_d Z \end{cases} \tag{2.25}$$

avec

$$A_d = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{I_1} & & 0 \\ & \mathrm{a}_{I_2} & \\ 0 & & \mathrm{a}_{I_n} \end{bmatrix} \quad B_d = \begin{bmatrix} b_{I_1} & & 0 \\ & b_{I_2} & \\ 0 & & b_{I_n} \end{bmatrix} \quad C_d = \begin{bmatrix} c_{I_1} & & 0 \\ & c_{I_2} & \\ 0 & & c_{I_n} \end{bmatrix}$$

La substitution de l'expression de $D^{(\alpha)}x$ dans (2.25) donne la macro représentation d'état entière qui approxime le système d'ordre fractionnaire dans le cas général: [Djamah et al, 07], [Mansouri,08]

$$\begin{cases} \dot{Z} = (\mathrm{A}_d + \mathrm{B}_d A\, C_d) Z + (\, B_d B)\, u \\ y = (C \mathrm{C}_d) Z + Du \end{cases} \tag{2.26}$$

On pose :

$A_g = \mathrm{A}_d + \mathrm{B}_d A\ C_d$
$B_g = \ B_d B$
$C_g = C \mathrm{C}_d$
$D_g = D$

On obtient :

$$\begin{cases} \dot{Z} = A_g Z + B_g\, u \\ y = C_g Z + D_g u \end{cases} \tag{2.27}$$

L'approximation ainsi obtenue est un système entier de grande dimension peut être utilisé pour l'analyse, la réalisation et la simulation du système non entier.

2.5.1 Exemple de simulation d'un système d'ordre fractionnaire

Des exemples de simulation sont présentés afin de mètre en évidence quelques propriétés des systèmes fractionnaires.

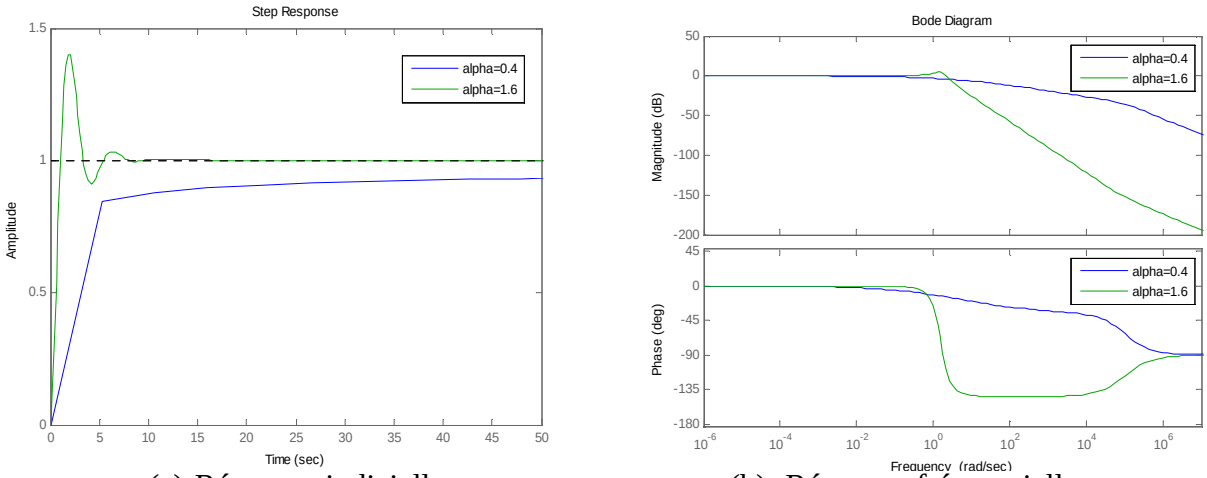
Exemple 1 :

Cet exemple est un système de dimension 1 avec différents ordres de dérivation $\alpha = 0.4, 1.6$

$$H(s) = \frac{2}{2 + s^{\alpha}}$$

L'operateur d'intégration est simulé sur la bande de fréquence [10^{-5} 10^{5}] rad/s avec un nombre de cellules égal à 30. Le but de cet exemple est de montrer les différentes dynamiques que peut représenter un système de dimension un avec différents ordres de dérivation.

La figure 2.6(a) représente les réponses indicielles du système 1. Pour 0<α < 1 le système à un comportement apériodique, et pour α > 1 le comportement est oscillatoire.



(a)-Réponses indicielles (b) -Réponses fréquentielles

Figure 2.6 : système de dimension 1, avec différents ordres de dérivation

Les réponses fréquentielles (figure 2.6(b)) pour $\alpha = 0.4$ et $\alpha = 1.6$ montrent une amplitude de -20 α dB/décade et une phase de $-\alpha\frac{\pi}{2}$ rad sur le domaine de validité de l'opérateur d'intégration fractionnaire, à l'extérieur de cet intervalle, le système se comporte comme un système entier.

Cette exemple montre qu'un système fractionnaire de dimension 1 peut modéliser différentes dynamiques sur le domaine de validité de l'operateur d'intégration pour différentes valeurs de α .

Exemple 2 :

Soit un système de dimension 1, avec un ordre de dérivation $\alpha = 1.6$.

$$H(s) = \frac{2}{2 + s^{1.6}}$$

L'objectif de cet exemple est de monter que le comportement fractionnaire du système se limite à la bande de fréquence de l'operateur d'intégration fractionnaire.

L'operateur d'intégration est simulé sur une bande de fréquence [10^{-5} 10^{5}] rad/s avec un nombre de cellule égale à 30, puis sur une bande de fréquence [10^{-3} 10^{3}] rad/s avec un nombre de cellule égale à 20.

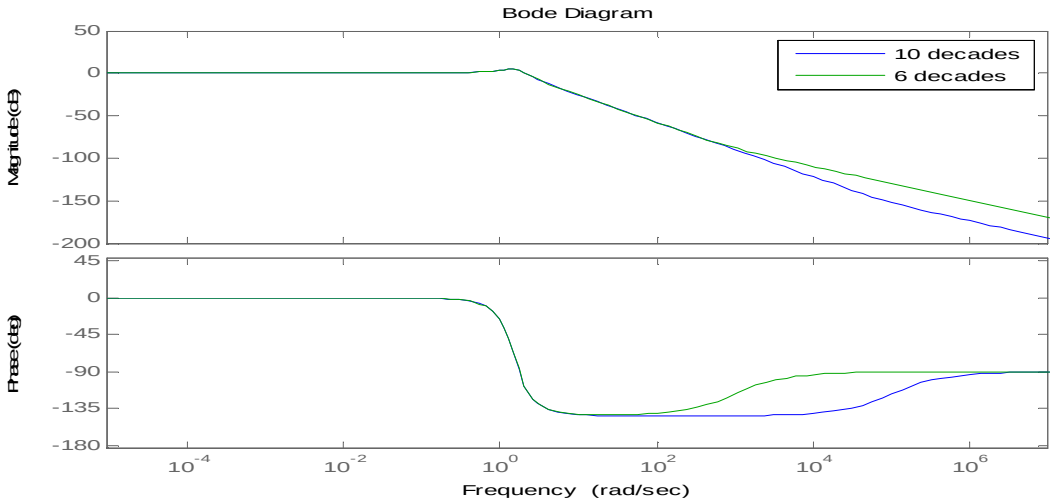


Figure 2.7 : Réponse fréquentielle du système avec différente bande de fréquence

La figure 2.7 montre une amplitude de -20α dB/décade et une phase de -$\alpha\frac{\pi}{2}$rad sur le domaine de validité de l'opérateur d'intégration fractionnaire [10^{-5} 10^{5}] rad/s (10 décades), et lorsque on diminue l'intervalle de validité de l'opérateur d'intégration le comportement fractionnaire se limite à cette bande de fréquence [10^{-3} 10^{3}] rad/s (6 décades), à l'extérieur de cette bande le système se comporte comme un système entier.

2.6 Identification des systèmes fractionnaires

Dans la littérature deux approches d'identification temporelle sont distinguées[Le Lay, 98] [Cois et al, 02] [Djamah ,09] :

- La première, à erreur d'équation suppose les ordres de dérivation connus à priori, et seule l'estimation paramétrique est effectuée, et récemment, certaines méthodes telle que la méthode de la variable instrumentale a été adaptée pour l'estimation de l'ordre fractionnaire.
- La seconde à erreur de sortie, estime les ordres au même titre que les paramètres, et nécessite une technique d'optimisation non linéaire.

Les paramètres sont estimés à partir d'un modèle d'état commensurable, en optimisant les paramètres des matrices du modèle d'état, l'ordre de dérivation doit être estimé au même temps que les paramètres. Dans notre cas nous avons choisi la méthode à erreur de sortie

associée à l'algorithme d'optimisation non linéaire Levenberg-Marquardt généralisé au cas fractionnaire [Djamah et al, 08].

2.6.1 Identification des modèles d'état fractionnaire

L'objectif de cette identification est l'estimation des paramètres des matrices d'un modèle d'état ainsi que l'ordre de dérivation non entier α.

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{2.28}$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$ u et $y \in \mathbb{R}$

Dans le but de réduire le nombre de paramètres à identifier du modèle (2.28) et sans perte de généralité le modèle sera écrit sous la forme canonique commandable (2.29).

$$\begin{bmatrix} D^{\alpha}\, x_1 \\ \vdots \\ D^{\alpha}\, x_{n-1} \\ D^{\alpha}\, x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{2.29}$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \qquad c_n]x + [d]u$$

Le vecteur des paramètres à identifier $\tilde{\theta}$ est donné par :

$$\tilde{\theta} = [\theta \quad \alpha] = [-a_1 \ldots -a_n \; c_1 \ldots c_n \; d \; \alpha \;] \tag{2.30}$$

L'estimation paramétrique se base sur la minimisation de l'erreur quadratique moyenne.

$$J(\tilde{\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{K} \varepsilon_k^2 \quad avec \quad \varepsilon_k = y_k^* - y_k \tag{2 .31}$$

Avec $y^*{}_i$ est la sortie du système, y_i la sortie du modèle.

L'estimation paramétrique du modèle, est basée sur une procédure itérative de minimisation du critère J à l'aide de l'algorithme de Levenberg-Marquardt :

$$\tilde{\theta}^{i+1} = \tilde{\theta}^{i} - [J''(\tilde{\theta}^{i}) + \lambda_i I]^{-1} J'(\tilde{\theta}^{i}) \tag{2.32}$$

Avec :

- $\tilde{\theta}^{i}$ vecteur de paramètres à une itération particulière
- $\tilde{\theta}^{i+1}$ vecteur de paramètres à l'itération suivante
- $J'(\tilde{\theta}^{i}) = -\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{K} \varepsilon_k \frac{\partial y}{\partial \theta}$ le vecteur gradient

- $J''(\tilde{\theta}^i) = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \theta^T}$ la matrice Hessienne
- λ_i paramètre de contrôle

Le calcul des fonctions de sensibilité $\frac{\partial y}{\partial \theta}$ de la sortie du modèle par rapport aux paramètres $\tilde{\theta}$ est nécessaire pour le calcul du vecteur *gradient* J' et la matrice *hessienne* J''.

2.6.1.1 Calcul des fonctions de sensibilité

Les fonctions de sensibilité traduisent l'effet de variation d'un paramètre sur la sortie du modèle. Le calcul des fonctions de sensibilité consiste à dériver le modèle d'état (2.29) par rapport aux paramètres $\tilde{\theta}$ (2.30).

La dérivation du système (2.29) par rapport à θ donne :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j}\left[D^{(\alpha)}x\right] = \frac{\partial A}{\partial \theta_j}x + A\frac{\partial x}{\partial \theta_j} + \frac{\partial B}{\partial \theta_j}u + B\frac{\partial u}{\partial \theta_j}$$

$$D^{(\alpha)}\left[\frac{\partial x}{\partial \theta_j}\right] = \frac{\partial A}{\partial \theta_j}x + \left[\frac{\partial A}{\partial \theta_j} \quad \frac{\partial B}{\partial \theta_j}\right]\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix}$$

$$D^{(\alpha)}\left[\sigma_{x/\theta_j}\right] = \mathrm{A}\sigma_{x/\theta_j} + \left[\frac{\partial A}{\partial \theta_j} \quad \frac{\partial B}{\partial \theta_j}\right]\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix}$$

La différentiation de la sortie

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_j} = \frac{\partial C}{\partial \theta_j}x + C\frac{\partial x}{\partial \theta_j} + \frac{\partial D}{\partial \theta_j}u + D\frac{\partial u}{\partial \theta_j}$$

$$\sigma_{y/\theta_j} = \mathrm{C}\sigma_{x/\theta_j} + \left[\frac{\partial C}{\partial \theta_j} \quad \frac{\partial D}{\partial \theta_j}\right]\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix}$$

Des deux formules précédentes on peut définir un modèle d'état de fonctions de sensibilités

$$\begin{cases} D^{(\alpha)}\left[\sigma_{x/\theta_j}\right] = A\sigma_{x/\theta_j} + \left[\frac{\partial A}{\partial \theta_j} \quad \frac{\partial B}{\partial \theta_j}\right]\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix} \\ \sigma_{y/\theta_j} = C\sigma_{x/\theta_j} + \left[\frac{\partial C}{\partial \theta_j} \quad \frac{\partial D}{\partial \theta_j}\right]\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix} \end{cases} \tag{2.34}$$

Par simplification d'écriture nous écrirons (2.34) sous forme :

$$\begin{cases} D^{(\alpha)}X_s = A_sX_s + B_sU_s \\ Y_s = C_sX_s + D_sU_s \end{cases} \tag{2.35}$$

avec

$X_s = \sigma_{x/\tilde{\theta}} = [\sigma x_{/\theta_1}\ \sigma x_{/\theta_2}\ \dots \sigma x_{/\theta_{2n+1}}]^T$

$Y_s = [\sigma y_{/\theta_1}\ \sigma y_{/\theta_2}\ \dots \sigma y_{/\theta_{2n+1}}]^T$

$U_S = [x_1 x_2 \dots x_n\ u]^T$

$Xs \in R^{n(2n+1)} \times \mathrm{R}$, $U_S \in R^{(n+1)} \times \mathrm{R}$, $Ys \in R^{(2n+1)} \times \mathrm{R}$.

$$A_s = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & 0 & & 0 \\ 0 & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & A \end{bmatrix} \quad C_s = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C & 0 & & 0 \\ 0 & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & C \end{bmatrix} \quad B_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial \theta_1} & \frac{\partial A}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial A}{\partial \theta_{2n+1}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T \text{ avec } \frac{\partial B}{\partial \theta_i} = 0$$

$$D_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial C}{\partial \theta_1} & \frac{\partial C}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial C}{\partial \theta_{2n+1}} \\ \frac{\partial D}{\partial \theta_1} & \frac{\partial D}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial D}{\partial \theta_{2n+1}} \end{bmatrix}^T$$

Le modèle d'état non entier des fonctions de sensibilité (2.35) est un modèle multivariable ayant pour entrées les états et l'entrée du modèle fractionnaire à identifier (2.29), et pour sorties les sensibilités de la sortie par rapport à θ. Les valeurs propres de la matrice As, de (2.35) sont les valeurs propres de A de (2.29), et la stabilité du modèle est donc assurée.

La représentation d'état (2.29) ne donne pas accès au calcul des sensibilités par rapport à α (puisqu'il se trouve en exposant de la dérivée), le calcul peut être effectué par l'approximation numérique de la dérivée [Djamah, 09] tel que:

$$y(t, \alpha + \Delta\alpha) - y(t, \alpha) \approx \Delta\alpha \frac{\delta y}{\delta \alpha} = \Delta\alpha \sigma y_{/\alpha}$$

$$\sigma y_{/\alpha} = \frac{y(t,\alpha+\Delta\alpha) - y(t,\alpha)}{\Delta\alpha} \qquad (2.36)$$

2.6.1.2 Conditions et tests d'arrêt

La méthode à erreur de sortie est basée sur une convergence itérative et un modèle défini de telle sorte qu'il représente au mieux le processus. Il est improbable que l'erreur entre la sortie du processus et celle du modèle soit nulle et un test d'arrêt du processus itératif sur l'annulation de l'erreur est souhaitable, mais insuffisant. Plutôt qu'un test portant directement

sur l'erreur, nous avons choisi de définir le premier test d'arrêt sur l'annulation du critère $J(\theta^i)$ (2.31).

- Arrêt de l'identification si $J(\theta^i) < \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 0$

Dans certaines situations, la valeur de décrémentation de λ est telle que la vitesse de convergence devient très faible prés de l'optimum, ce qui se traduit par une oscillation autour de ce dernier, donc le processus d'identification risque de durer indéfiniment. Dans ce cas, un test d'arrêt basé sur le nombre d'itérations s'avère nécessaire.

Arrêt de l'identification si $J(\theta^i) \geq \begin{cases} J(\theta^{i-1}) \\ J(\theta^{i-2}) \\ \dots \\ J(\theta^{i-n}) \end{cases}$

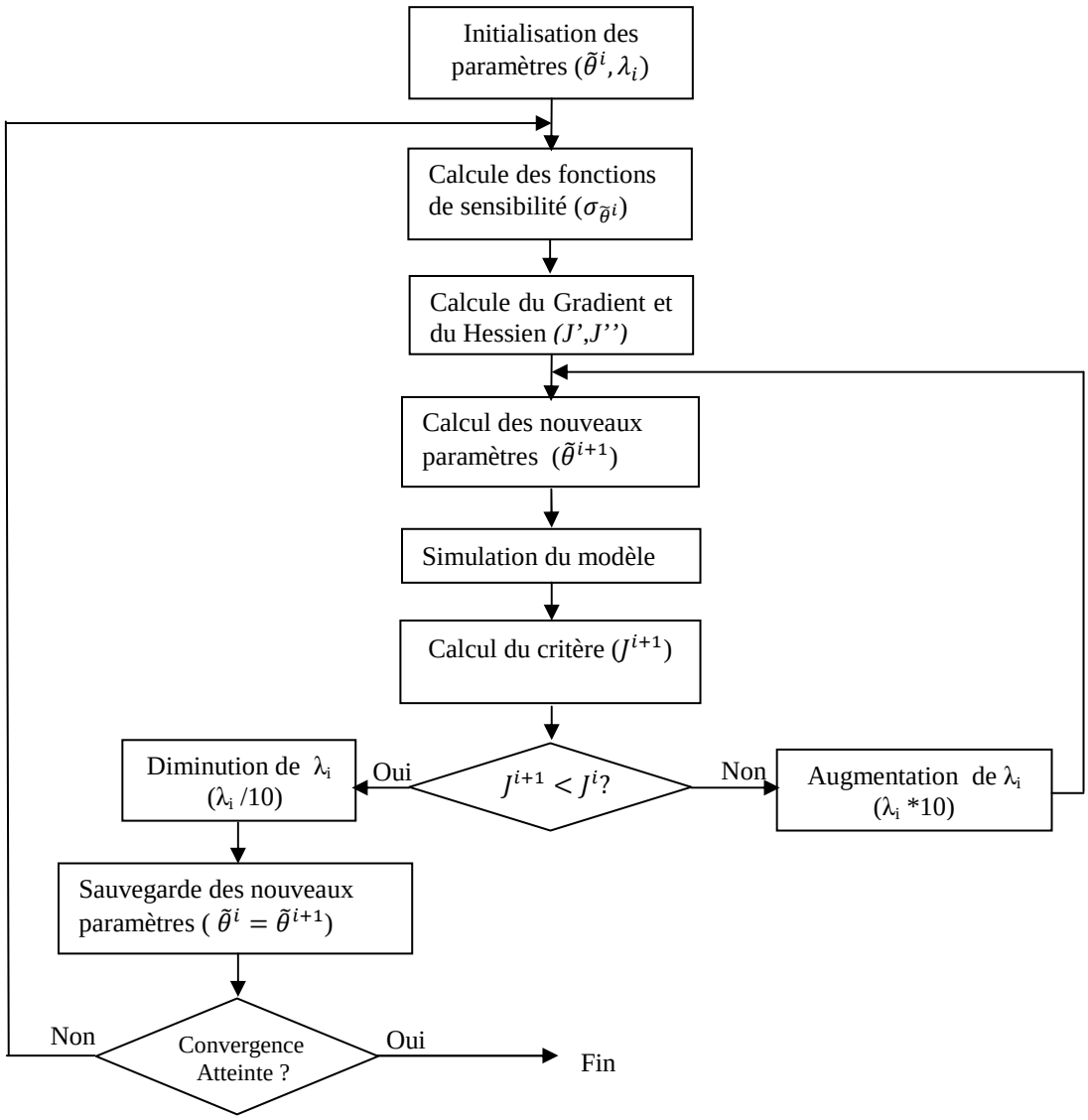


Figure 2.8: Organigramme de l'algorithme d'optimisation non linéaire: Levenberg-Marquardt

2.6.2 Exemples de simulation

Afin de tester les performances de la méthode à erreur de sortie généralisée pour l'identification des systèmes fractionnaires, nous avons effectué quelques simulations d'identification des modèles d'état fractionnaires de différentes dimensions, dans le cas sans bruit et en présence de bruit (SNR).

SNR: Le rapport signal sur bruit est un indicateur de la qualité de la transmission d'une information. C'est le rapport des variances entre le signal de sortie et le signal du bruit :

$$SNR = \frac{\sigma^2 y}{\sigma^2 b}$$

Exemple 1

Le système à estimer est de dimension 1 avec un ordre de dérivation α= 1.6, correspond au modèle d'état suivant

$$\begin{cases} D^{1.6}x(t) = -2x(t) + u(t) \\ y(t) = 2x(t) \end{cases}$$

L'entrée est une séquence binaire pseudo-aléatoire, L'opérateur d'intégration est simulé sur la bande de fréquence ω=[10^{-5} 10^{5}] rad/s avec un nombre de cellules égal à 30.

Le tableau 2.1 donne les résultats de simulation de l'exemple 1 pour différente SNR. Les Figures 2.9, 2.10 montrent respectivement les réponses temporelles et l'erreur de prédiction de la sortie en absence de bruit. Les Figures 2.11, 2.12 montrent respectivement les réponses temporelles et fréquentielles des sorties mesurée et estimée pour différents SNR.

Paramètres		a	c	α	J
Paramètres réels	/	-2	2	1.6	/
Paramètres initiaux	/	0	0	/	/
Paramètres estimés	Cas sans bruit	-2	2	1.6	5.33e-31
	SNR=8 dB	-1.997	2.006	1.605	0.0590
	SNR=16 dB	-2.004	1.989	1.607	0.0295

Table 2.1 : résultats des simulations de l'exemple 1

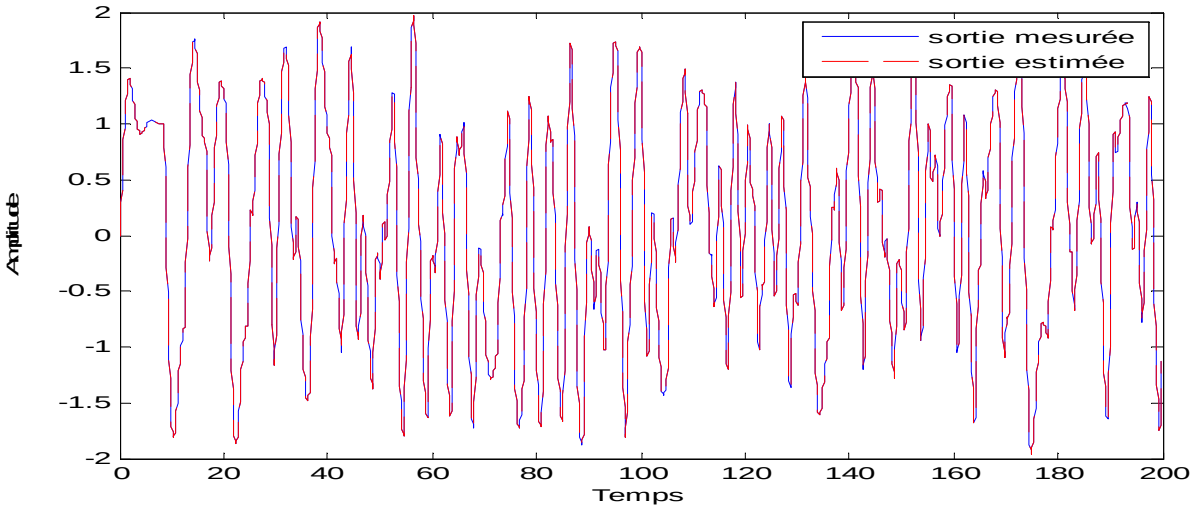


Figure 2.9 : Résultat de simulation de l'exemple 1

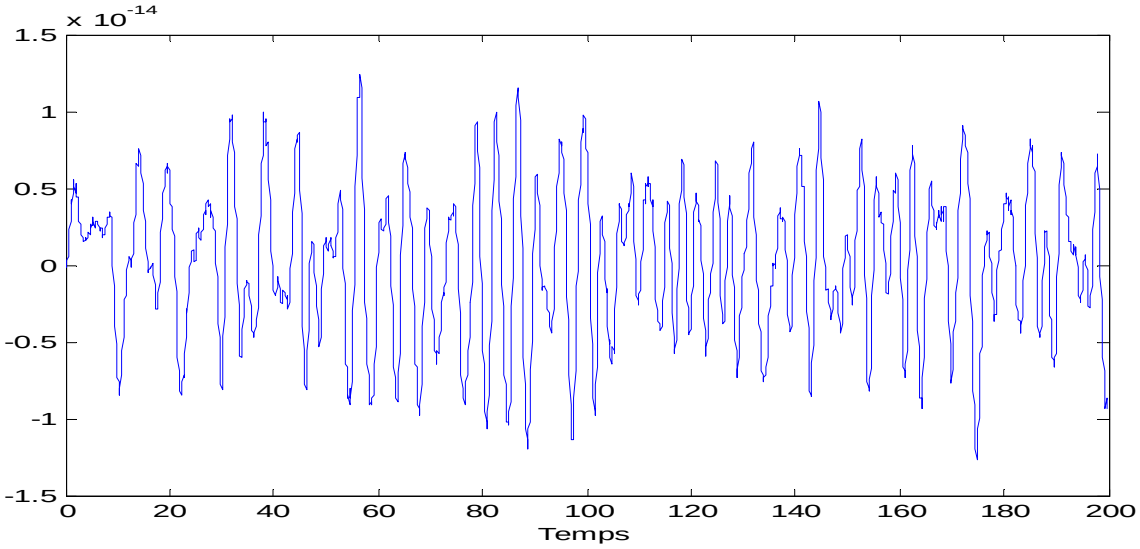


Figure 2.10: erreur de prédiction

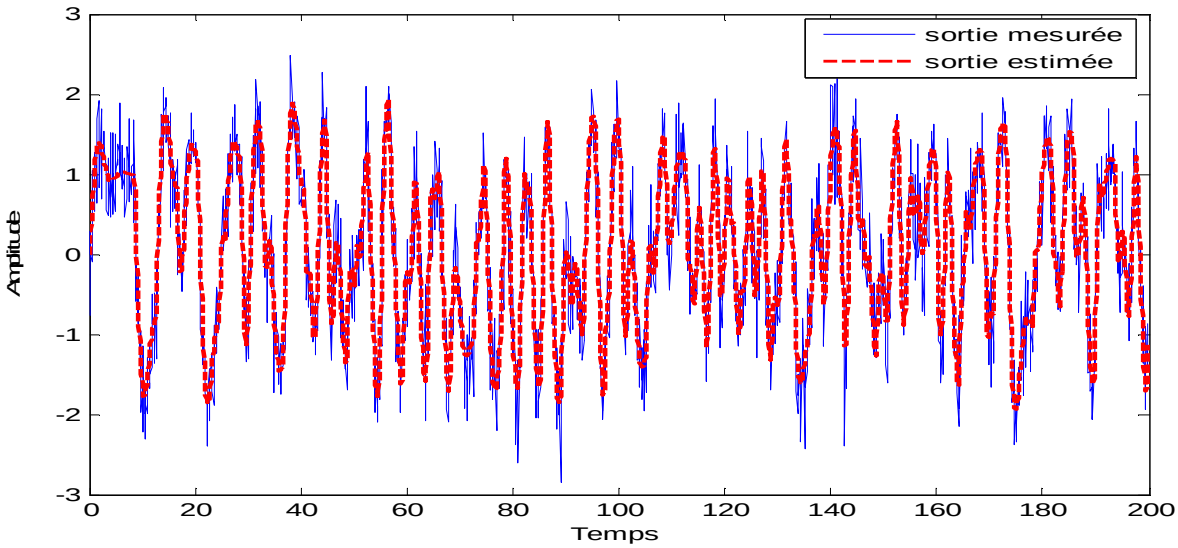
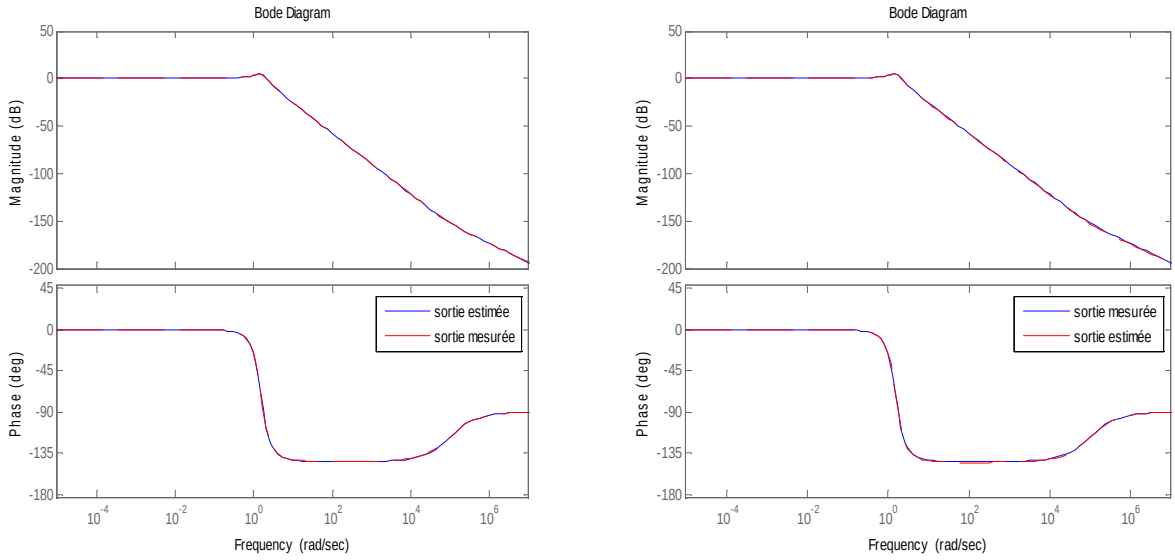


Figure 2.11: Résultat de simulation de l'exemple 1 avec SNR=8dB



(a)-SNR=8 dB (b) -SNR=16 dB

Figure 2.12 : Diagramme de Bode de l'exemple 1

Dans cet exemple les courbes des réponses temporelles (Figure 2.9, 2.11) et fréquentielles (Figure 2.12) se superposent respectivement et les paramètres sont estimés avec une précision satisfaisante même en cas de présence de bruit.

Exemple 2

Soit le modèle de dimension 3, avec un ordre de dérivation $\alpha = 0.9$, l'entrée du système est une séquence binaire pseudo-aléatoire.

$$D^{0.9}x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{u(t)} \qquad \text{avec} \quad x = [\, x_1 \;\; x_2 \;\; x_3]$$

$$y(t) = [\; 2 \quad 3 \quad 4]\, x\,(t)$$

L'opérateur d'intégration est simulé sur la bande de fréquence ω=[10^{-5} 10^{5}]rad/s avec un nombre de cellules égal à 30.

Le tableau 2.2 relate les résultats de l'identification de l'exemple 2 pour différente SNR (16 dB et de 8 dB). Les Figures 2.13, 2.14 montrent respectivement les réponses temporelles et l'erreur de prédiction de la sortie en absence de bruit. Les Figures 2.15, 2.16 représentent respectivement les réponses temporelles et fréquentielles en présence de bruit.

Paramètres		a_1	a_2	a_3	c_1	c_2	c_3	α	J
Paramètres réels	/	-1	-2	-3	2	3	4	0.9	/
Paramètres Initiaux	/	0	0	0	0	0	0	/	/
Paramètres estimés	Cas sans bruit	-1.00	-2.00	-3.00	2.00	3.00	4.00	0.90	5.04e-32
	SNR=20 dB	-0.77	-1.90	-2.96	1.53	2.87	4.01	0.90	0.018
	SNR=16 dB	-0.82	-1.59	-2.81	1.63	2.46	3.98	0.90	0.0265

Table 2.2 : Résultats des simulations de l'exemple 2

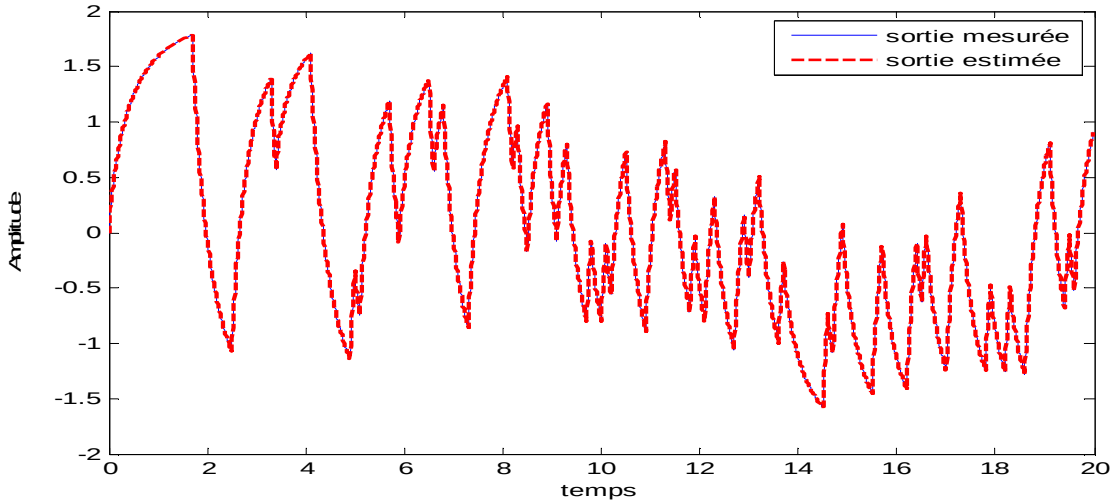


Figure 2.13 : Résultat de simulation de l'exemple 2

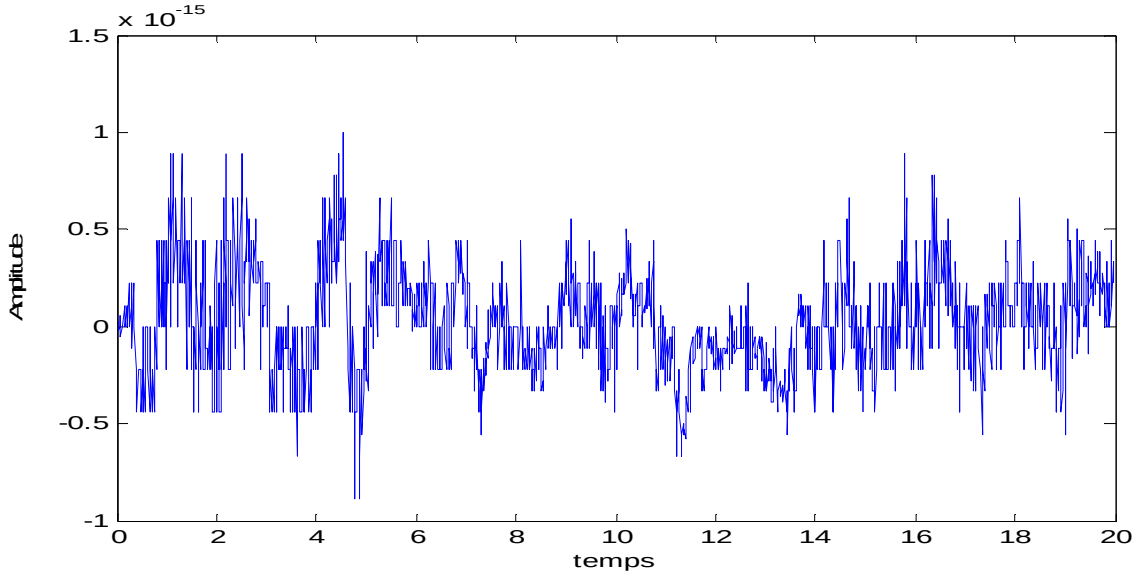


Figure 2.14: Erreur de prédiction

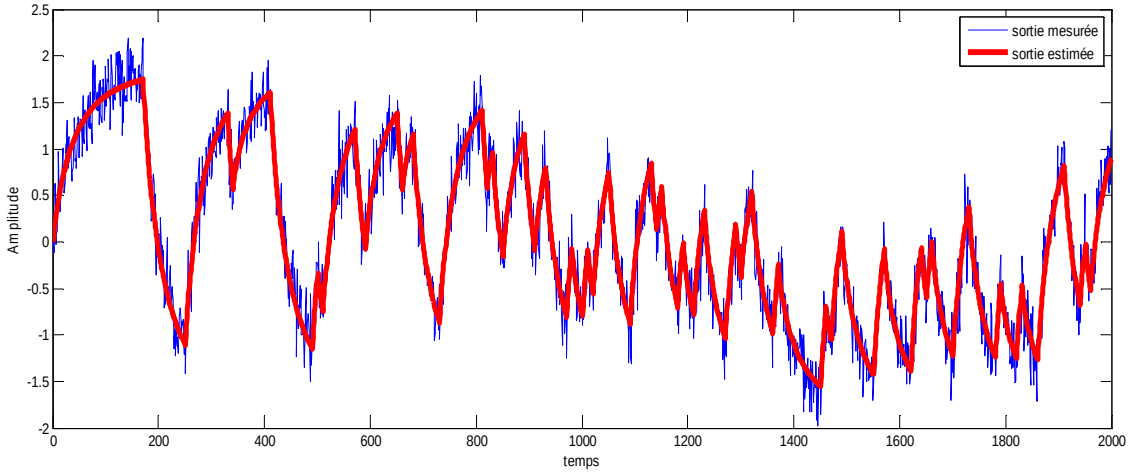
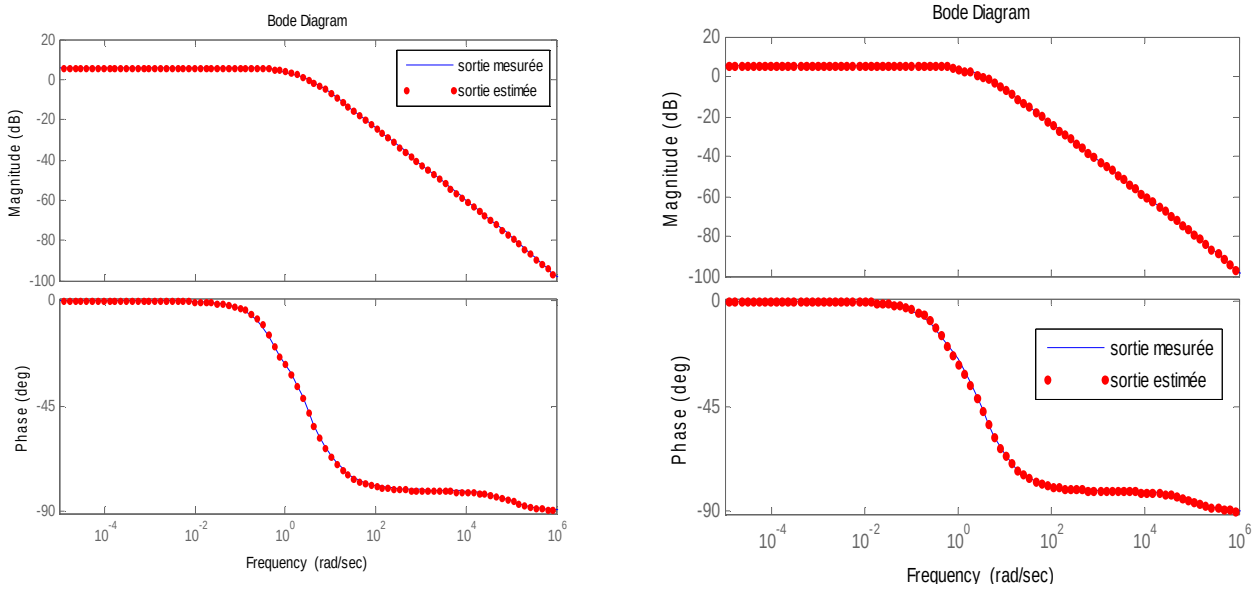


Figure 2.15 : Résultat de simulation de l'exemple 2 avec SNR=16 dB



(a)-SNR=16 dB (b)-SNR=20 dB

Figure 2.16 : Diagramme de Bode de l'exemple 2

Les réponses temporelles et fréquentielles montrent une très bonne adéquation entre les courbes simulées et les courbes estimées, de même les paramètres estimés sont très proches des paramètres exacts, mais avec un critère supérieur pour le cas bruité.

Ces exemples de simulation ont permis de mettre en évidence la capacité de la méthode d'identification choisie d'identifier efficacement la dynamique des systèmes fractionnaires même en présence d'un pourcentage important de bruit.

2.7 Conclusion

Ce chapitre a fait l'objet de plusieurs points essentiels, nous avons commencé par des rappels sur le calcul fractionnaire et les principales définitions de généralisation de l'opérateur d'intégration fractionnaire (Riemann-Liouville, Caputo et Grünwald-Letnikov).

La deuxième partie a porté sur la méthodologie de modélisation et simulation des systèmes d'ordre non entier par des modèles d'état. Ces méthodes reposent sur les techniques d'approximation de l'operateur d'intégration fractionnaire par un intégrateur fractionnaire borné en fréquence. Dans notre travail, cet opérateur est approximé à un modèle d'état entier conventionnel de dimension élevée mais non infinie.

La troisième partie est consacrée pour l'identification des systèmes fractionnaire par la méthode à erreur de sortie associée à l'algorithme de Marquardt étendu au cas non entier, cet algorithme permet d'accéder à l'estimation au même titre l'ordre de dérivation non entier ainsi que les paramètres d'un modèle d'état fractionnaire.

Diverses simulations numériques illustrent la capacité des systèmes fractionnaires de modéliser plusieurs dynamiques différentes avec un nombre restreint de paramètres, et d'autres simulations numériques ont permis de mettre en évidence la capacité de la méthode développé d'identifier efficacement la dynamique des systèmes fractionnaires même en présence du bruit.

Chapitre 3

Identification des systèmes non linéaires par l'approche multi-modèle

3.1 Introduction

Un système non-linéaire ne peut être représenté avec précision par un modèle linéaire que dans une zone restreinte de son espace de fonctionnement. En découpant cet espace en zones où le système peut être décrit par des modèles linéaires, le comportement du système peut être approché par une combinaison de ces modèles linéaires. L'approche multi-modèle se base sur ce principe, et s'appuie sur l'utilisation d'un ensemble de sous-modèles de structures simples, chaque sous-modèle décrivant le comportement du système dans une "zone de fonctionnement" particulière. Ces sous-modèles servent alors à la description du comportement dynamique global du système en utilisant des fonctions non linéaires (fonctions poids) définissant la contribution de chaque sous-modèle et fournissent une transition douce entre les modèles locaux.

La capacité des multi-modèles à représenter ou à approcher le comportement dynamique d'un système réel a été largement reconnue. En effet, d'une part, ils offrent la possibilité de décrire des comportements non linéaires très complexes avec une structure simple inspirée des modèles linéaires. Les multi-modèles offrent ainsi un excellent compromis entre complexité, précision, généralité et flexibilité.

La motivation de cette approche découle du fait qu'il est souvent difficile de concevoir un modèle qui tient compte de toute la complexité du système étudié. Ainsi la structure multi-modèle permet de simplifier et d'étudier aisément la stabilité d'un système non linéaire, grâce à l'outil numérique LMI qui permet de trouver des solutions aux équations de Lyapuonv.

La synthèse des correcteurs (constitue par exemple d'un retour d'état pour chaque modèle local) et la synthèse des multiobservateurs.

La forme multi-modèle réunit les avantages :

– des modèles linéaires du point de vue de la structure, qui sont simples à utiliser, et

– des modèles non linéaires, qui permettent d'avoir une bonne représentation d'un système réel.

Nombreux sont les travaux de recherche dédiés à l'identification des systèmes non linéaires par une approche multi-modèle. En effet, il n'y a pas de méthodologie spécifique capable de conduire à une représentation multi-modèle unique d'un système.

Les bons résultats obtenus avec les modèles d'ordre fractionnaire, en qualité de description des phénomènes physiques relativement aux résultats des modèles entiers, nous ont motivés à l'identification des systèmes non linéaires par l'approche multi-modèle fractionnaire, la théorie développée dans ce chapitre s'inspire fortement de ce qui est fait dans le chapitre précédent.

L'objectif de ce chapitre est l'identification des systèmes non linéaire dans le cas entier et fractionnaire. Ce dernier comporte deux parties principales, la première est consacrée à la présentation de l'approche multi-modèle, et la description de la méthode d'identification des systèmes non linéaire à l'aide de cette approche en utilisant la méthode à erreur de sortie basée sur l'algorithme de Levenberg Marquardt comme nous avons cité les différents critères à minimiser qui peuvent être utilisés en fonction du choix des fonctions de pondération. La deuxième partie est consacrée pour l'application de la méthode pour l'identification des systèmes non linéaires entiers et fractionnaires par les multi-modèles de Takagi-Sugeno.

3.2 Origine de l'approche multi-modèle

Un modèle doit être capable de représenter fidèlement le comportement dynamique d'un processus réel. Dans le cas d'un système non linéaire complexe, il est difficile de représenter touts les modes de fonctionnement ainsi que toutes les interactions entre les différentes grandeurs avec un seul modèle global. Afin de pallier la complexité de cette tâche, la tendance a été d'utiliser des modèles Linéaires Invariants dans le Temps (LTI). Cette approximation permet ainsi d'étudier un système ayant un comportement non linéaire en le représentant par un seul modèle linéaire (linéarisé tangent autour d'un point d'équilibre). L'inconvénient d'une telle approche est son aspect uniquement local, le modèle linéaire n'est qu'une description locale du comportement du système. Une approche globale basée sur de multiples modèles

LTI (linéaires ou affines) autour de différents points de fonctionnement a été élaborée ces dernières années. L'interpolation de ces modèles locaux à l'aide de fonctions d'activation normalisées permet de modéliser le système global non linéaire. Cette approche, dite multi-modèles, s'inspire des modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S). En effet, un multi-modèle réalise une partition floue de l'espace caractéristique Z dit aussi espace de décision (c'est l'espace caractérisé par l'ensemble des variables caractéristiques (de décision) z(t) qui peuvent être des variables d'état et/ou la commande, la sortie). Les zones de fonctionnement sont définies en termes de propositions sur les variables de prémisse.

3.3 Obtention d'une structure multi-modèle

Les multi-modèles peuvent être obtenus de différentes manières, dans cette section, nous décrivons les trois méthodes d'obtention d'une structure multi-modèle à partir d'un modèle non linéaire.

3.3.1 Multi-modèle par linéarisation

Dans ce cas, on dispose de la forme analytique du modèle non linéaire du processus physique qu'on linéarise autour de différents points de fonctionnement judicieusement choisis. Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) \\ y(t) = G(x(t), u(t)) \end{cases} \tag{3.1}$$

Où $(F,G) \in \Re^{2\times n}$ sont des fonctions non linéaires continues, $x(t) \in \Re^n$ est le vecteur d'état et $u(t) \in \Re$ est le vecteur d'entrée. Par la suite, nous représenterons le système non linéaire (3.1) par un multi-modèle (3.2), composé de plusieurs modèles locaux linéaires ou affines obtenus en linéarisant le système non linéaire autour d'un point de fonctionnement arbitraire $(x_i, u_i) \in \Re^n \times \Re$ [Johansen et Foss, 1993]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i\big(\xi(t)\big)(A_i\, x(t) + B_i\, u(t) + D_i) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i\big(\xi(t)\big)(C_i\, x(t) + E_i\, u(t) + N_i) \end{cases} \tag{3.2}$$

Avec L est le nombre de sous modèle.

$$A_i = \frac{\partial F(x,u)}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, \quad B_i = \frac{\partial F(x,u)}{\partial u}\Big|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, \quad D_i = F(x_i,u_i) - A_i x - B_i u$$

$$C_i = \frac{\partial G(x,u)}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, \quad E_i = \frac{\partial F(x,u)}{\partial u}\Big|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, \quad N_i = G(x_i,u_i) - C_i x - E_i u$$

Notons que dans ce cas, le nombre de modèles locaux (L) dépend de la précision de modélisation souhaitée, de la complexité du système non linéaire et du choix de la structure des fonctions d'activation. Ces dernières doivent satisfaire les propriétés (3.3).

$$\text{Avec} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{L} \mu_i\big(\xi(t)\big) = 1 \\ 0 \le \mu_i\big(\xi(t)\big) \le 1 \end{cases} \tag{3.3}$$

3.3.2 Multi-modèle basé sur les secteurs de non-linéarités

Considérons le système continu non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t)\big) + Bu(t) \tag{3.4}$$

Avec x(.)$\in \Re^n$, u(.)$\in \Re$, f(x(.))$\in \Re^n$ et B$\in \Re^n$.

La méthode de transformation exposée est initiée par Tanaka et al [Tanaka et al, 1996]. Elle est basée sur une transformation des fonctions scalaires origines de la non linéarité. L'avantage de cette méthode est de ne pas engendrer d'erreur d'approximation et de minimiser le nombre de modèles locaux. Cette méthode est basée sur la bornitude des fonctions continues.

Lemme 1 :

Soit $h(x(t))$ une fonction bornée de $[a, b] \longrightarrow \Re$ pour tout $x \in [a, b]$ avec

$(a, b) \in \Re^{+2}$. Alors il existe deux fonctions

$F^i(.) : [a, b] \rightarrow [0, 1]$, $i \in I_2$

$x(t) \rightarrow F^i(x(t))$

avec $F^1(x(t)) + F^2(x(t)) = 1$ et deux scalaires α et β tels que

$h(x(t)) = F^1(x(t))\ \alpha + F^2(x(t))\ \beta$

Une décomposition de $h(x(t))$ est considérée sur $[a, b]$ comme suivant

$\beta = min_{x\in[a,b]}\big(h(x)\big)$, $\quad \alpha = max_{x\in[a,b]}\ h(x))$

$F^1(x(t)) = \frac{h(x(t)) - \beta}{\alpha - \beta}$, $\quad F^2(x(t)) = \frac{\alpha - h(x(t))}{\alpha - \beta}$

Sous l'hypothèse de la continuité et la bornitude des fonctions $f(x(t))$ et $g(x(t))$ données en (3.4) avec $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$, ces fonctions peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$f(x(t)) = \sum_{i=1}^{2} F^i(x(t))\ A_i x(t)$; $\quad g(x(t)) = \sum_{i=1}^{2} F^i(x(t)) C_i x(t)$

Le modèle (3.4) devient

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{2} F^i\left(x(t)\right)(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{2} F^i\left(x(t)\right)(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \quad (3.5)$$

Dans ce cas, le multi-modèle (3.5) obtenu représente de façon exacte le modèle non linéaire (3.4) sur l'intervalle compact considère.

3.3.3 Multi-modèle par identification

Si l'on ne dispose que des mesures des entrées et sorties du système, on procède par identification en imposant la structure du multi-modèle.

Soit le système non linéaire modélisé sous la forme générale :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (3.6)$$

Où $x(t) \in \Re^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \Re$ représente le vecteur d'entrée et $y(t) \in \Re$ est le vecteur de sortie.

En représentant le système non linéaire sous forme multi-modèle, le problème de l'identification des systèmes non linéaires est réduit à l'identification des sous-systèmes définis par des modèles locaux linéaires et des fonctions d'activation. Les méthodes d'optimisation numérique sont alors utilisées pour estimer ces paramètres.

La forme générale d'un multi-modèle décrivant un système non linéaire continu dans le temps est :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i\left(\xi(t)\right)(A_i(\theta)x(t) + B_i(\theta)u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i\left(\xi(t)\right)(C_i(\theta)x(t) + D_i(\theta)u(t)) \end{cases} \quad (3.7)$$

Où $\xi(t) \in \Re$ est le vecteur des variables de décision, L est le nombre de modèles locaux, et μ_i *(.)* pour $i \in I_L$ sont les fonctions d'activation, Elles déterminent le degré d'activation de l'i^{eme} modèle local associé.

Généralement la construction d'un multi-modèle à partir des entrées/sorties exige :

-La définition d'une structure de multi-modèle

-La définition des fonctions d'appartenance

-L'estimation des paramètres des fonctions d'activation et des modèles locaux

L'identification des paramètres du multi-modele est effectuée à l'aide de la méthode à erreur de sortie en minimisant le critère défini par :

$$J = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t)^2 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} (\hat{y}(t) - y(t))^2 \quad (3.8)$$

3.4 Fonction de pondération

La fonction de pondération μ ($\xi(t)$) dite d'activation détermine le degré d'activation des sous-modèles. Selon la zone où évolue le système, cette fonction indique la contribution plus ou moins importante du modèle local correspondant dans le modèle global. Elle assure un passage progressif de ce modèle aux modèles locaux voisins. Elles peuvent être de forme triangulaire, sigmoïdale ou gaussienne, et satisfont les propriétés suivantes:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{L} \mu_i\big(\xi(t)\big) = 1 \\ 0 \le \mu_i\big(\xi(t)\big) \le 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

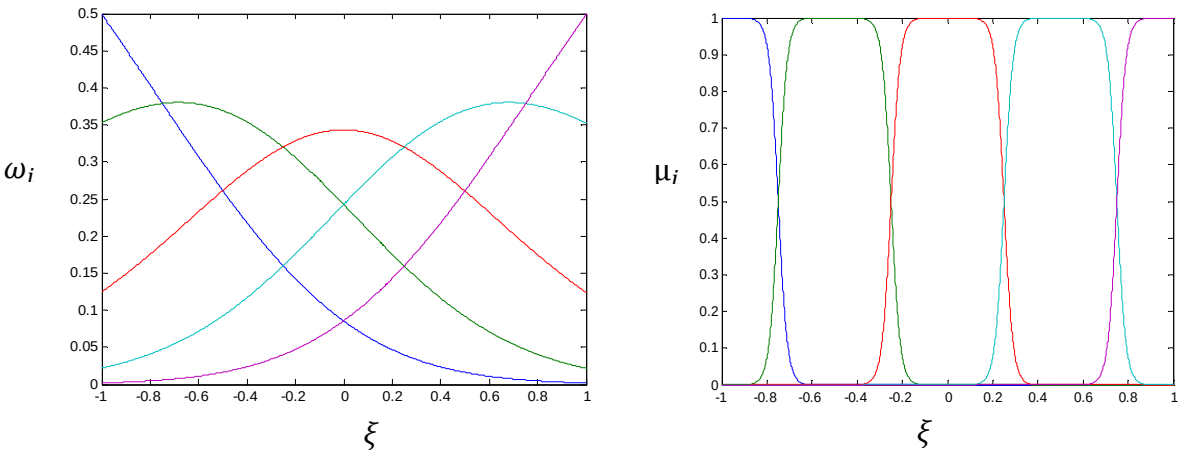
Dans la suite de notre travail les fonctions de pondération $\mu_i(\xi)$ sont considérées à partir d'une fonction Gaussienne :

$$\omega_i(\xi) = \exp\left(-\frac{(\xi - c_i)}{\sigma^2}\right) \quad (3.10)$$

qui est fonction de centre c_i et de la dispersion σ avec ξ est la variable d'indexation. Afin de respecter la contrainte donnée par la relation (3.9) les fonctions ω_i sont ensuite normalisées. Les fonctions de pondération sont données par :

$$\mu_i(\xi) = \frac{\omega_i(\xi)}{\sum_{j=1}^{L} \omega_j(\xi)} \quad (3.11)$$

En fonction de la vitesse de transition d'un sous-modèle à l'autre et de recouvrement on peut introduire les notions de fonction de pondération fortement mélangée et peu mélangée.



(a) (b)

Figure 3.1: (a) Fonction de ponderation fortement melangée, (b) Fonction de ponderation peu melangée.

La dispersion σ définit le degré de chevauchement des fonctions de pondération d'où nous pouvons tirer la notion des fonctions de pondération à de fort recouvrement et de faible recouvrement. Par recouvrement, on entend une zone où au moins deux fonctions de pondération sont significativement non nulles en même temps. Une grande dispersion σ traduit un recouvrement important entre les zones de fonctionnement et vice versa.

Dans le cas limite, le recouvrement est nul, correspond au cas des modèles linéaires par morceaux où les fonctions de pondération sont booléennes.

3.5 Stabilité des systèmes de Takagi-Sugeno

La structure particulière de type de modèle de Takagi-Sugeno a permis l'extension de l'étude de la stabilité des systèmes linéaires au cas des systèmes non linéaires.

Soit un système de Takagi-Sugeno autonome, représenté par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i\big(\xi(t)\big) A_i x(t) \tag{3.12}$$

Le système (3.12) est dit quadratiquement stable s'il existe une matrice $P \in R^{n\times n}$ symétrique et définie positive telle que les conditions suivantes soient vérifiées pour i =1,..., L

$$A_i^T P + P A_i < 0 \tag{2.13}$$

On peut noter que l'interpolation de sous-modèles stables n'est pas nécessairement stable.

3.6 Identification des systèmes non linéaires par multi-modèle

La modélisation des systèmes non linéaire par l'approche multi-modèle est devenue l'un des domaines de recherche les plus actifs. À la différence des approches classiques qui essayent de trouver un modèle global et par conséquent complexe, cette approche est basée sur la décomposition de l'espace de fonctionnement du système en petits secteurs. Des modèles locaux simples habituellement linéaires sont employés pour décrire le système dans chaque secteur. L'élaboration d'un multi-modèle nécessite l'étude de trois points : choix de la structure, choix de la variable d'indexation, et estimation des paramètres des modèles locaux.

3.6.1 Le choix de la structure du multi-modèle

Il faut choisir un modèle composé de sous-modèles et chacun est composé d'un nombre de paramètres qui dépend de la précision que l'on souhaite, ces sous modèles sont obtenus par le partitionnement uniforme de l'espace de fonctionnement du système. Ce choix est cependant sujet à un compromis. En effet, plus le nombre de sous-modèles et de paramètres sera élevés,

plus la précision sera meilleure mais plus la convergence sera difficile, longue, voire incertaine. A l'inverse, un nombre de paramètres réduit permet une convergence rapide et efficace au détriment de la précision.

Plusieurs types de multi-modèles ont été introduits: multi-modèles à états découplés et multi-modèles à états couplés connus sous le nom de modèle de Takagi-Sugeno(T-S).

3.6.1.1 Multi-modèle à états découplés

Les multi-modèles à états découplés sont représentés par un ensemble de sous-modèles linéaires représentant chacun le comportement du système autour d'un point de fonctionnement. Ces sous-modèles évoluent indépendamment les uns des autres.

La description du comportement global du système est caractérisée par la pondération, via des fonctions non linéaires, des différentes sorties des sous-modèles. [Filev, 91]

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i\big(\xi(t)\big) C_i x_i(t) \end{cases} \tag{3.14}$$

avec

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i\big(\xi(t)\big) = 1 \tag{3.15}$$

Où $x_i \in \Re^{n_i}$ est le vecteur d'état de l'i^{eme} sous-modèle, *u(t)* $\in \Re$ est le vecteur de commande, $y \in \Re$ le vecteur de mesures, le rôle des fonction de pondération μ_i est de pondérer la sortie de chaque sous-modèle sans mélanger les paramètres des sous-modèles A_i, B_i, et C_i.

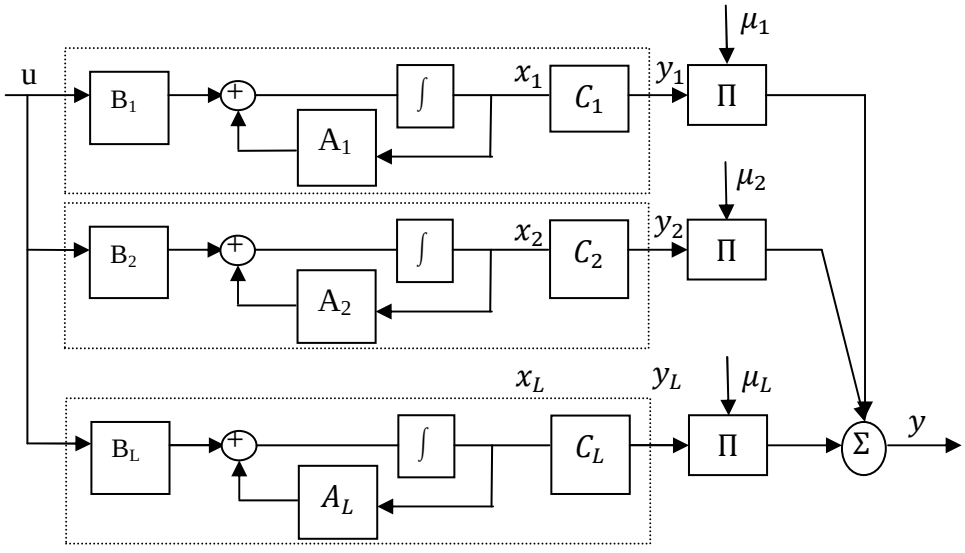


Figure 3.2: Schéma fonctionnel d'un multi-modèle à état découplé

3.6.1.2 Multi-modèle à états couplés (Modèle de type Takagi-Sugeno)

Le modèle flou de Takagi et Sugeno (TS) [Takagi et Sugeno, 1985] est décrit par des règles "si-alors" qui représentent des modèles LTI. tout modèle flou TS d'un système non linéaire est structuré comme une interpolation de systèmes linéaires, les matrices A_i, B_i et C_i caractérisent un fonctionnement local particulier.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i\big(\xi(t)\big)\big(A_i x(t) + B_i u(t)\big) \\ y(k) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i\big(\xi(t)\big)\, C_i x(t) \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \big(\sum_{i=1}^{L} \mu_i\big(\xi(t)\big)A_i\big)x(t) + \big(\sum_{i=1}^{L} \mu_i\big(\xi(t)\big)B_i\big)u(t) \\ y(t) = \big(\sum_{i=1}^{L} \mu_i\big(\xi(t)\big)C_i\big)x(t) \end{cases} \tag{3.17}$$

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi) = 1 \ \text{ et } \ 0 \le \mu_i(\xi) \le 1, \forall\, t, \forall\, i \in \{1, \dots, L\} \tag{3.18}$$

On peut faire apparaître un état local x_i en écrivant l'équation (3.16) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i\,\big(\xi(t)\big)\dot{x}_i(t) \end{cases} \tag{3.19}$$

Le rôle des fonctions de pondération μ_i dans ce cas est d'effectuer un mélange de paramètres des sous-modèles en fonction de la zone de fonctionnement du système non linéaire.

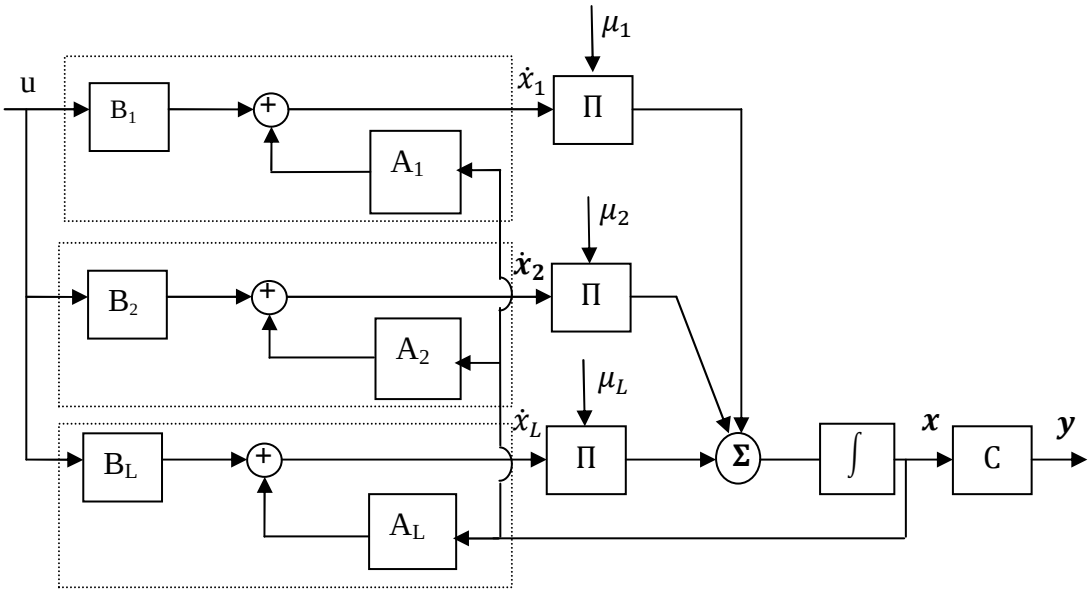


Figure 3.3: Schéma fonctionnel d'un multi-modèle à état couplé

3.6.2 Le choix de la variable d'indexation ξ des fonctions de pondération

Dans le cas du modèle de Takagi-Sugeno la variable d'indexation ξ et les fonctions de pondération (3.11) sont fixées à priori, ξ est définie par les variables d'état et/ou les valeurs du signal d'entrée ou de sortie du système.

Dans la suite de notre travail nous nous intéressons au modèle de Takagi-Sugeno, obtenu par la méthode d'identification, ainsi que les variables d'indexation ou variables prémisses sont considérées connues (entrée du système: $\xi = u$) ce qui contourne ce problème.

3.6.3 Estimation paramétrique d'un multi-modèle à états couplés (TS)

Elle s'intéresse au choix de la structure du multimodèle et à l'optimisation paramétrique qui consiste à identifier les paramètres des modèles locaux permettant une reproduction fidèle du comportement dynamique du système.

3.6.3.1 Cas de multi-modèle entier

La structure à états couplés ou modèle de Takagi-Sugeno se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i\big(\xi(t)\big)\,(A_i(\theta)x(t) + B_i(\theta)u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i\big(\xi(t)\big)(C_i(\theta)x(t) + D_i(\theta)u(t)\,) \end{cases} \tag{3.20}$$

Avec $\quad \sum_{i=1}^{L} \mu_i\big(\xi(t)\big) = 1, \quad i = 1 \ldots L\,, \forall t$

Où $x \in \Re^n$ est le vecteur d'états, u ∈ ℜ le vecteur de commande, $y \in \Re$ le vecteur de mesures et ξ la variable d'indexation des fonctions de pondération μ_i , L est le nombre de sous-modèles.

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -a_{i,1} & -a_{i,2} & -a_{i,3} & \cdots & -a_{i,n} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_i = [c_{i,1} \quad c_{i,2} \quad \ldots \quad c_{i,n}]^T$$

$$D_i = d_i \tag{3.21}$$

Le vecteur de θ_i correspond aux paramètres inconnus d'un sous-modèle particulier *i*, avec :

$$\theta_i = [a_{i,1}\ a_{i,2} \ldots a_{i,n}\, c_{i,1}\ c_{i,2} \ldots c_{i,n}\, d_i]^T \quad \text{avec} \quad dim\ \theta_i = 2n + 1 \tag{3.22}$$

On définit le vecteur θ comme étant le vecteur colonne des paramètres du multi-modèle à estimer, il est représenté sous la forme d'un vecteur partitionné en L bloc colonne θ_i :

$$\theta = [{\theta_1}^T \dots \ {\theta_i}^T \dots {\theta_L}^T]^T \quad \text{avec} \quad dim\ \theta\ = L\ (2n+1) \tag{3.23}$$

où n est l'ordre du vecteur d'état.

L'identification des sous-modèles s'effectue à partir de données entrée sortie du système non linéaire, en minimisant le critère quadratique moyen J.

avec

$$\mathrm{J} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \mathcal{E}(t)^2 \qquad \text{et} \quad \mathcal{E}(t) = y^*(t) - y(t) \tag{3.24}$$

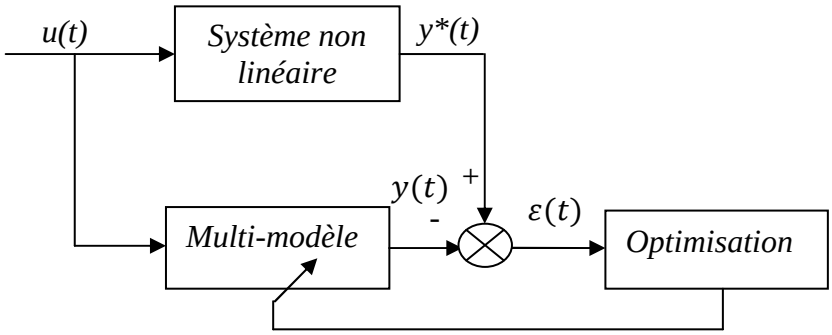


Figure 3.4:Identification d'un système non linéaire par multi-modèle

Le multi-modèle doit représenter au mieux le comportement dynamique du système (adéquation globale du multi-modèle et du système) afin de prédire correctement le comportement du système. Comme il est souhaitable que les sous-modèles fournissent une caractérisation du comportement du système dans chaque zone de fonctionnement (adéquation locale du multi-modèle et du système).

Pour répondre à ces contraintes plusieurs critères (global, local ou combiné) peuvent être utilisés lors de l'optimisation paramétrique du multi-modèle.

a- Estimation paramétrique avec un critère global

Ce critère favorise une bonne caractérisation du comportement global du système non linéaire par le multi-modèle. Le critère est définit par :

$$J_G = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \mathcal{E}(t)^2 \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{E}(t) = y^*(t) - y(t) \tag{3.25}$$

Où $\mathcal{E}(t)$ est l'erreur entre la sortie du multi-modèle y et la sortie du système non linéaire y^*, et N est le nombre de mesures.

$J'_G = \frac{\partial J_G(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{2}{N}\sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t) \ \frac{\partial y(t)}{\partial \theta}$ Le vecteur gradient

$J''_G \approx \frac{2}{N}\sum_{t=1}^{N} \frac{\partial y(t)}{\partial \theta} \ \frac{\partial y(t)}{\partial \theta^T}$ La matrice Hessienne

avec $\frac{\partial y(t)}{\partial \theta} = \sum_{t=1}^{N} \mu_i\big(\xi(t)\big) C_i x(t)$

$\frac{\partial y_i(t)}{\partial \theta}$ est la fonction de sensibilité de la *i^eme^* sortie par rapport aux paramètres inconnus du multi-modèle.

b- Estimation paramétrique avec un critère local :

Il favorise une bonne adéquation entre le comportement local des sous-modèles et le comportement local du système non linéaire à condition toutefois que les fonctions de pondération μ_i soient peut mélangées.

Le critère local est de la forme :

$$J_{L,i} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \mu_i\big(\xi(t)\big)\mathcal{E}_i(t)^2 \quad avec \quad \mathcal{E}_i(t) = y_i(t) - y^*(t) \qquad (3.26)$$

Où $\mathcal{E}_i(t)$ est l'erreur entre la sortie du *i^eme^* sous-modèle et la sortie du système non linéaire avec N est le nombre de mesures.

$J'_L = \frac{\partial J_L(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{L}\sum_{t=1}^{N} \mu_i\big(\xi(t)\big)\mathcal{E}_i(t) \ \frac{\partial y_i(t)}{\partial \theta}$ Le vecteur gradient

$J''_L \approx \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{L} \sum_{t=1}^{N} \mu_i\big(\xi(t)\big) \ \frac{\partial y_i(t)}{\partial \theta}$ La matrice Hessiane

c- Le critère mixte

Le critère mixte ou combiné représente un compromis entre le critère global et local, comme il permit de profiter des avantages offerts par chacun des critères en fonction de la valeur donnée au paramètres p , il est définit par : [Yen et al, 1998]

$$J_C = pJ_G + (1-p)\sum_{i=1}^{L} J_{L,i} \qquad 0 \le p \le 1, \qquad (3.27)$$

Si les fonctions de pondération $\mu_i(.)$ choisies sont peu mélangées, la distinction entre le critère global et le critère local disparaît. Les deux approches d'identification livrent alors des mêmes résultats (les vecteurs gradients et les matrices hessiennes sont sensiblement identiques) [Orjuela, 08].

Dans notre cas l'identification des systèmes non linéaires par des multi-modèles est obtenue par l'optimisation des paramètres en appliquant l'algorithme d'identification non linéaire (Levenberg-Marquardt) et en utilisant les définitions du gradient et du hessien (J'_G) et (J''_G) pour un critère global (J_G).

Le calcul des fonctions de sensibilité $\frac{\delta y}{\delta \theta}$ de la sortie du multi-modèle (3.20) par rapport aux paramètres θ (3.23) est nécessaire pour le calcul du vecteur *gradient J'* et la matrice *hessienne J''*.

d- calcul des fonctions de sensibilité paramétriques

La méthode d'estimation paramétrique utilisée résulte de l'extension de la méthode à erreur de sortie aux ordres non entier (chapitre II), l'objectif consiste à estimer les paramètres θ_i pour chaque sous modèle *i*, à partir des données entrée sortie du système réel à identifier.

À partir du système (3.20) on peut distinguer deux sortes de fonction de sensibilité :

1- $\sigma_{y/\theta} = \frac{\partial y}{\partial \theta}$ est la somme ponderée des fonctions de sensibilité de la sortie de chaque sous-modèle par rapport à θ . sont obtenues par la dérivation partielle des équations de sortie des sous-modèles.

2- $\dot{\sigma}_{x/\theta} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta}$ est la fonction de sensibilité du vecteur d'état, elle est calculée par dérivation partielle du vecteur d'état du modèle (3.20) par rapport à chaque paramètre de θ (3.23) .

La sensibilité du système (3.23) par rapport à $\theta_{i,j}$ avec *i=1…L* et *j=1…2n+1* est donnée par :

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta_{i,j}} = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi) \left(A_i \frac{\partial x}{\partial \theta_{i,j}} + \begin{bmatrix} \frac{\partial A_i}{\partial \theta_{i,j}} & \frac{\partial B_i}{\partial \theta_{i,j}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right)$$

$$\dot{\sigma}_{x/\theta_{i,j}} = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi) \left(A_i \sigma_{x/\theta_{i,j}} + \begin{bmatrix} \frac{\partial A_i}{\partial \theta_{i,j}} & \frac{\partial B_i}{\partial \theta_{i,j}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right) \quad (3.28)$$

La différentiation de la sortie :

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_{i,j}} = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi) \left(\frac{\partial C_i}{\partial \theta_{i,j}} x + C_i \frac{\partial x}{\partial \theta_{i,j}} + \frac{\partial D_i}{\partial \theta_{i,j}} u + D_i \frac{\partial u}{\partial \theta_{i,j}} \right)$$

$$\sigma_{y/\theta_{i,j}} = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi) \left(C_i \sigma_{x/\theta_{i,j}} + \begin{bmatrix} \frac{\partial C_i}{\partial \theta_{i,j}} & \frac{\partial D_i}{\partial \theta_{i,j}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right) \quad (3.29)$$

Des deux formules précédentes (3.28) et (3.29) on peut définir un modèle d'état de fonctions de sensibilités

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{x/\theta_{i,j}} = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi) \left(A_i \sigma_{x/\theta_{i,j}} + \begin{bmatrix} \frac{\partial A_i}{\partial \theta_{i,j}} & \frac{\partial B_i}{\partial \theta_{i,j}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right) \\ \sigma_{y/\theta_{i,j}} = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi) \left(C_i \sigma_{x/\theta_{i,j}} + \begin{bmatrix} \frac{\partial C_i}{\partial \theta_{i,j}} & \frac{\partial D_i}{\partial \theta_{i,j}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right) \end{cases} \quad (3.30)$$

qui sera simplifié par l'écriture suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}_s = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi) (A_{s_i} X_s + B_{s_i} U_s) \\ Y_s = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi) \left(C_{s_i} X_s + D_{s_i} U_s \right) \end{cases} \quad (3.31)$$

avec

$X_s = \sigma_{x/\theta_{i,j}} = [\sigma x/_{\theta_{1,1}} \ \dots \ \sigma x/_{\theta_{1,2n+1}} \ \dots \sigma x/_{\theta_{L,2n+1}}]^T$, $\quad X_s \in R^{Ln(2n+1)} \times \mathrm{R}$

$Y_s = [\sigma y/_{\theta_{1,1}} \dots \sigma y/_{\theta_{1,2n+1}} \dots \sigma y/_{\theta_{L,2n+1}}]^T$, $\quad Ys \in R^{\mathrm{L}(2n+1)} \times \mathrm{R}.$

$U_S = [x_1 \ x_2 \dots x_n \ u]^T$, $\quad U_S \in R^{(n+1)} \times \mathrm{R}$

$$A_{s_i} = \begin{bmatrix} A_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_i & 0 & & 0 \\ 0 & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & A_i \end{bmatrix} \qquad C_{s_i} = \begin{bmatrix} C_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_i & 0 & & 0 \\ 0 & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & C_i \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial B_i}{\partial \theta_{i,j}} = 0$$

$$B_{s_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_i}{\partial \theta_{1,1}} & \dots & \frac{\partial A_i}{\partial \theta_{1,j}} & \dots & \frac{\partial A_i}{\partial \theta_{L,2n+1}} \\ & & & & \\ 0 & & 0 & & 0 \end{bmatrix}^T \qquad D_{s_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_i}{\partial \theta_{1,1}} & \dots & \frac{\partial C_i}{\partial \theta_{1,j}} & \dots & \frac{\partial C_i}{\partial \theta_{L,2n+1}} \\ & & & & \\ \frac{\partial D_i}{\partial \theta_{1,1}} & \dots & \frac{\partial D_i}{\partial \theta_{1,j}} & \dots & \frac{\partial D_i}{\partial \theta_{L,2n+1}} \end{bmatrix}^T$$

3.6.3. 2 Cas de multi-modèle fractionnaire

Dans ce cas le multi-modèle a un comportement fractionnaire, la formulation mathématique du modèle de Takagi-Sugeno fractionnaire est donnée par les équations :

$$\begin{cases} D^{\alpha} x = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi)(A_i(\theta)x + B_i(\theta)u) \\ y = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi)(C_i(\theta)x + D_i(\theta)u) \end{cases} \quad (3.32)$$

La simulation du multi-modèle fractionnaire est basée sur l'approximation de chacun des sous-modèles fractionnaires en utilisant la même procédure définie au paragraphe 2.5 du chapitre 2.

Le vecteur des paramètres à estimer pour le cas fractionnaire est donné par :

$$\theta = [\tilde{\theta}\ \alpha] \tag{3.33}$$

Avec $\tilde{\theta}$ est le vecteur des paramètres des matrices A_i,C_i et D_i des sous-modèle i, et α est l'ordre de dérivation commun pour tout les modèles locaux.

- ***Sensibilité par rapport à $\tilde{\theta}$:***

La procédure que nous avons adoptée pour l'estimation des paramètres $\tilde{\theta}$ est analogue pour le cas entier. Le calcul de la sensibilité de la sortie du multi-modèle par rapport aux paramètres $\tilde{\theta}$ pour le cas fractionnaire est donné par :

$$\begin{cases} D^{\alpha}X_s = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi)(A_{s_i}X_s + B_{s_i}U_s) \\ Y_s = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi)\left(C_{s_i}X_s + D_{s_i}U_s\right) \end{cases} \tag{3.34}$$

Le modèle d'état non entier obtenu des fonctions de sensibilité est un modèle multi-variable ayant pour entrées les états et l'entrée du multi-modèle à identifier et pour sortie la sensibilité par rapport à $\tilde{\theta}$. Les matrices $A_{s_i}, B_{s_i}, C_{s_i}etD_{s_i}$ sont calculées de la même manière que le cas entier.

- ***Sensibilité par rapport à α :***

Le calcul de la sensibilité par rapport *à* α s'effectué numériquement comme pour le cas des systèmes linéaires [Djamah et al, 08], avec y est la sortie du multi-modele :

$$y(t, \alpha + \Delta\alpha) - y(t, \alpha) \approx \Delta\alpha \frac{\delta y}{\delta \alpha} = \Delta\alpha \sigma_{y/\alpha} \tag{3.35}$$

Pour une variation de $\Delta\alpha$ suffisamment faible une bonne approximation de la sensibilité $\sigma_{y/\alpha}$est obtenue.

Le vecteur des fonctions de sensibilité utilisé pour le calcul du gradient et du Hessien pour le cas fractionnaire est définit comme suit :

$$\sigma_{y/\theta} = [\sigma_{y/\tilde{\theta}}\ \sigma_{y/\alpha}] \tag{3.36}$$

Avec $\sigma_{y/\tilde{\theta}}$ est la sensibilité du système par rapport aux paramètres $\tilde{\theta}$, et $\sigma_{y/\alpha}$ est la sensibilité du système par rapport à l'ordre de dérivation α.

3.7 Exemples de simulation

Nous considérons deux exemples de simulation afin de mettre en évidence la capacité de l'algorithme développé pour l'identification des systèmes non linéaires par l'approche multi-

modèle, l'exemple 1 permet l'étude de la précision de l'estimation paramétrique d'un multi-modele dans un contexte sans bruit, puis en présence de bruit.

L'objectif de l'exemple 2 consiste à approcher un système non linéaire fractionnaire par une structure multi-modèle entier puis fractionnaire affin de conclure l'apport des modèles fractionnaire par rapport aux modèles entiers, et d'étudier l'influence du nombre ainsi que la dimension des sous-modèles sur la précision du modèle obtenu.

Exemple 1 :

Soit le multi-modele défini par $L = 2$ sous modèles entier de dimension $n = 2$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i\big(\xi(t)\big)\,(A_i x(t) + B_i u(t))$$
$$y(k) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i\big(\xi(t)\big)\,C_i x(t)$$

Les valeurs numériques des matrices A_i, et C_i sont les suivantes :

$$\mathrm{A_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.58 & -0.40 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{A_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.06 & -0.5 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{C_1} = [2.75 \quad 0] \qquad \mathrm{C_2} = [-0.2 \quad 2.5]$$

L'entrée u(t) est constituée par la concaténation de créneaux d'amplitude variables $u \in [-0.5 \;\; 0.5]$, les fonctions de pondération μ_i dépendent du signal de commande u(t), les centres sont donnés par c_i=[−0.5,0.5], et la dispersion $\sigma = 0.4$, La procédure d'identification est basée sur un critère global.

La table 3.1 illustre les résultats des simulations. Dans le cas sans bruit les paramètres estimés sont satisfaisants et convergent vers les valeurs exactes des paramètres du système. Les figures (3.5) représente l'écart entre la sortie exact du multi-modèle et estimée.

n=2	Sous-modèle 1				Sous-modèle 2				critère (J)
Paramètres	a_1	a_2	c_1	c_2	a_1	a_2	c_1	c_2	
Paramètres réels	-0.58	-0.40	2.75	0	-0.06	0.50	-0.20	2.50	6.5e-18
Paramètres estimés	-0.58	-0.40	2.75	0	-0.06	0.50	-0.20	2.50	
Paramètres estimés SNR=16dB	-0.80	-0.35	2.89	0.16	-0.21	0.85	-0.87	2.39	8.4 e-03
Paramètres estimés SNR=8dB	-0.34	-0.75	2.48	0.40	-0.17	0.66	-0.14	2.23	1.6e-02

Table 3.1: Résultats des simulations

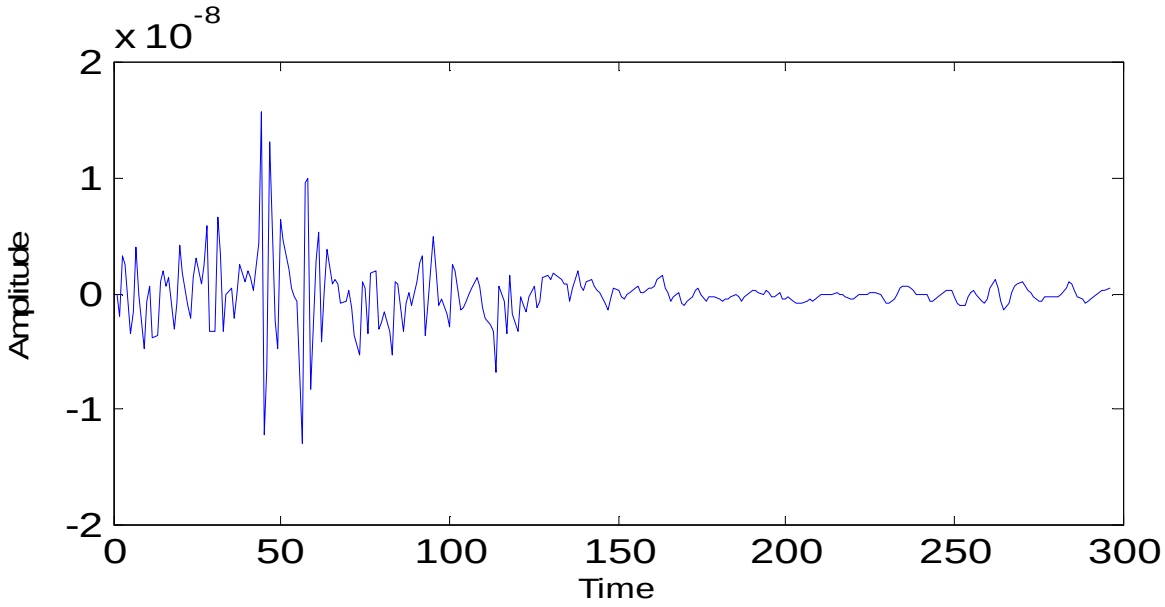


Figure 3.5: erreur de prédiction

La figure (3.5) nous montre une erreur de 10^{-8} qui est un résultat très satisfaisant, comme l'analyse des résultats présentés par le tableau (3.1) nous permet de constater que la méthode d'identification que l'on a mise en œuvre nous permet d'obtenir une très bonne précision sur les paramètres estimés du multi-modèle. Mais en présence de bruit (*SNR = 8dB, 16dB)*, la précision diminue avec le taux de bruit.

Exemple 2 : Système non linéaire fractionnaire

Soit le modèle non linéaire fractionnaire à approcher, par une structure multi-modèle entier puis fractionnaire, défini par :

$$\frac{d^{0.6}y(t)}{dt^{0.6}} = -y^2(t) - y(t) + u(t)$$

L'entrée u(t) du système est une séquence binaire pseudo aléatoire $u \in [-0.25 \;\; 0.55]$, Un jeu de données entrée/sortie a servi à l'identification, avec t=10, et une période d'échantillonnage h=0.01. Les fonctions de pondération μ_i sont de type gaussien et dépendent du signal d'entrée u(t).

L'entrée et la sortie de ce système sont représentées sur la figure 3.6.

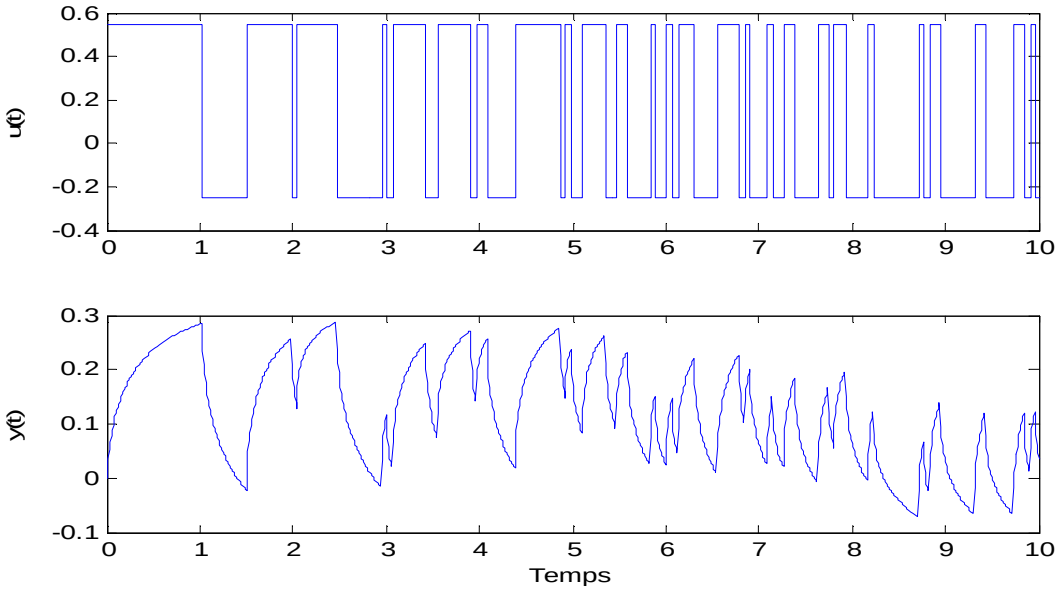


Figure 3.6: Entrée sortie du système

1- Identification par des multi-modèles entiers

Dans le premier cas le modèle testé est composé de deux sous-modèles (L=2) pour différents dimensions du vecteur d'état (n), ensuite nous avons considéré un modèle de trois sous-modèles (L=3).

Les tableaux 3.2 présente l'évolution du critère en fonction du nombre de sous-modèles (L) et de la dimension (n) du vecteur d'état.

La sortie du multi-modèle qui convient à la représentation du système non linéaire est représentée par la figure 3.7 et la figure 3.8 illustre l'erreur de prédiction.

n	L	c_i	σ	EQM
1	2	[-0.2 0.35]	0.03	2.7e-003
2				3.5e-004
3				6.9e-004
1	3	[-0.2 -0.05 0.35]	0.02	2.3e-003
2				3.5e-004
3				1.6e-003

Table 3.2 : résultats des simulations de l'exemple 2

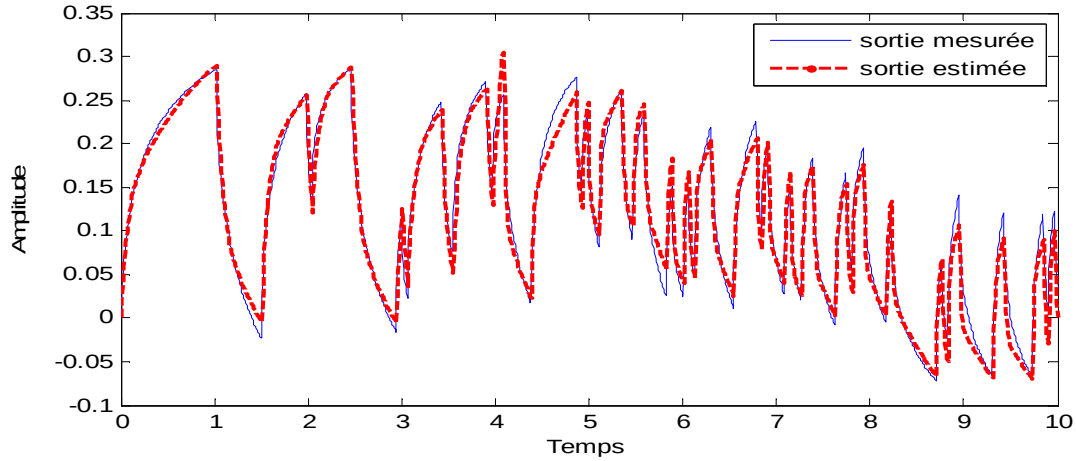


Table 3.7 : Sortie du système non linéaire et du multi-modèle pour L=2 et n=2

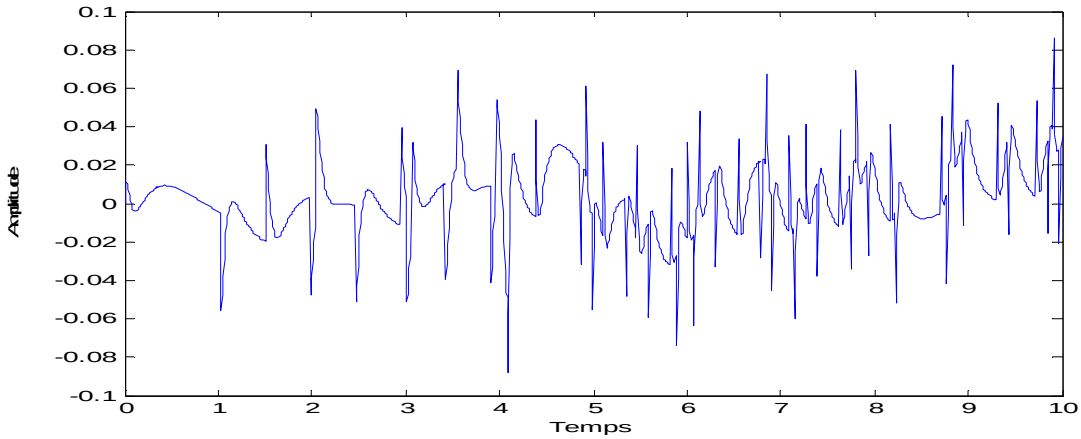


Figure 3.8: Erreur de prédiction

L'augmentation du nombre de modèles locaux permet la prise en compte de la complexité plus ou moins grande du système et permet également d'atteindre la précision souhaitée du modèle global. Les résultats illustrés par les tableaux 3.2 permettent de constater que le multi-modèle qui représente au mieux le système non linéaire comporte L=2 sous-modèles et la dimension des sous-modèles est de n=2.

2. Identification par des multi-modèles fractionnaires

Dans ce cas le système est modélisé avec différentes structures de multi-modèle fractionnaire.

Le tableau 3.3 représente les résultats de simulation du système non linéaire par multi-modèle fractionnaire, après plusieurs essais le meilleur critère obtenu est d'ordre 10^{-4}. Les paramètres du multi-modèle qui représente au mieux le système sont illustrés dans la table 3.4. La figure

3.9 représente les sorties réelle et estimée pour un multi-modèle fractionnaire de deux sous-modèles de dimension n=1 avec l'ordre de dérivation du multi-modèle $\alpha = 0.57$. La figure 3.10 représente l'erreur de prédiction.

n	*L*	c_i	σ	*EQM*	α
1	2	[-0.2 0.35]	0.5	1.59e-004	0.575
1	3	[-0.2 -0.05 0.35]	0.4	1.51e-004	0.520

Table 3.3 : résultats des simulations de l'exemple 2

Dimension n	Paramètres	Sous-modèles		Ordre de dérivation
		L=1	L=2	
n=1	a_L	-1.730	-0.955	α=0.57
	c_L	3.19 0	0.168	

Table 3.4 : paramètres estimées, pour L=2, n=1, α=0.57

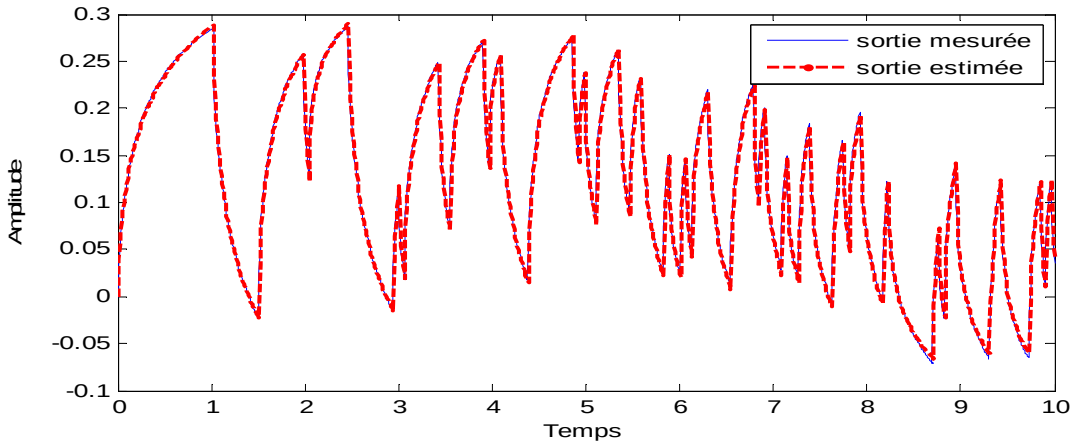


Figure 3.9: sortie du système non linéaire et sortie du multi-modèle avec L=2, n=1

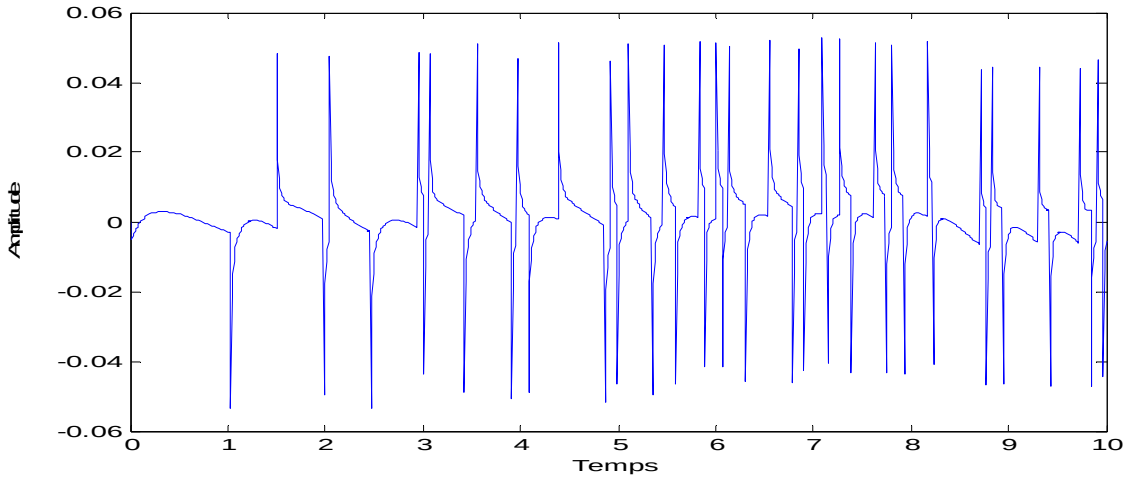


Figure 3.10: erreur de prédiction

L'analyse des résultats illustrés par le tableau 3.3 nous permet de constater que la dynamique du système non linéaire peut être représentée par un multi-modèle fractionnaire de L=2 sous-modèles de dimension n=1 pour une erreur d'ordre10^{-4}.l'augmentation du nombre de sous-modèle et de la dimension (n) n'apporte pas une minimisation meilleure du critère.

A travers cet exemple académique, Nous montrons la qualité de l'approximation d'un système dynamique non linéaire par un multi-modèle entier et fractionnaire, en effet, de la comparaison des résultats mentionnés dans les tableaux 3.2 pour le cas de sous-modèles entiers et dans le tableau 3.3 pour le cas de sous-modèles fractionnaires, nous pouvons conclure que pour une erreur l'ordre $\approx 10^{-4}$ l'identification du système non linéaire nécessite un multi-modèle de L=2 sous-modèles avec une dimension n=2, par contre pour le cas de multi-modèle fractionnaire pour la même erreur, le modèle nécessite que L=2 sous-modèles avec une dimension n=1.

Ces différentes simulations montrent que l'algorithme à erreur de sortie développé pour le cas de l'approche multi-modèle, donne des résultats satisfaisants pour l'estimation paramétrique des multi-modèles, ainsi, l'exemple 2 montre la capacité des sous-modèles fractionnaires par rapport au sous-modèles entiers de décrire la dynamique d'un système complexe avec un nombre minimal de sous modèles et un nombre restreint de paramètres, sur tout le domaine de fonctionnement.

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème de l'identification des systèmes non linéaires à l'aide de l'approche multi-modèle. Notre attention s'est portée sur le multi-modèle de Takagi-Sugeno que nous avons développé pour l'identification des systèmes non linéaires fractionnaires.

La première partie de ce chapitre a été consacrée à la présentation des différentes méthodes d'obtention d'un multi-modèle à partir d'un système non linéaire (linéarisation, les secteurs de non-linéarités, identification). Nous avons en particulier mis en évidence l'algorithme d'identification des systèmes non linéaires par multi-modèle entier en utilisant la méthode à erreur de sortie que nous avons étendue pour l'identification des systèmes non linéaires fractionnaires par des multi-modèle d'ordre non entier. Deux exemples de simulation ont été présentés pour mettre en évidence la capacité de l'algorithme développé pour identifier des systèmes non linéaires par l'approche multi-modèle, nous avons constaté que les multi-

modèles fractionnaires représentent d'une manière plus précise et compacte les systèmes non linéaires fractionnaires, les rendant facilement exploitables du point de vue mathématique.
Pour évaluer les performances de l'approche développée dans ce chapitre, il nous semble intéressant et essentiel de l'appliquer sur des processus réels, ce qui fera l'objet du chapitre suivant, avec l'application de la méthode à l'étude du transfert de chaleur.

Chapitre 4

Application de l'approche multi-modèle au transfert de chaleur

4.1 Introduction

Le transfert de la chaleur est un phénomène diffusif, son étude à travers une théorie classique monodimensionnelle, montre un aspect fractionnaire d'ordre 0.5 [Battaglia et al, 00] [cois, 02]... ; Ainsi, l'idée de l'application des systèmes fractionnaires dans la modélisation des procèdes diffusifs apparait évidente, [Battaglia et al, 00] [Benchellal et al, 05] [Djamah, 10].

Dans la littérature, l'étude thermodynamique a montré que certains coefficients thermophysiques sont directement liés à l'état du milieu et varient avec la température, induisant ainsi des non linéarités difficiles à prendre en compte avec un seul modèle, les paramètres de ce dernier devant être actualisés lorsque le point de fonctionnement change. L'approche multimodèle offre l'alternative intéressante de caractériser la présence de plusieurs modes de fonctionnement, en décomposant l'intervalle de fonctionnement dynamique en plusieurs zones, chacune d'elle étant décrite par un sous-modèle.

Ce chapitre présente le phénomène de transfert de chaleur dans une géométrie plane, et le principe de la modélisation d'un simulateur thermique par la méthode des différences finies. Afin d'évaluer la méthode d'identification par l'approche multi-modele développée aux chapitre précédent, deux exemples de simulation sont considérés, le premier est l'identification du simulateur thermique par différences finies, le deuxième est l'identification d'un benchmark expérimental représentant le transfert de chaleur dans une barre en aluminium. Pour l'identification de chaque système nous avons considéré deux cas : en premier des sous-modèles entiers puis des sous-modèles fractionnaires afin de montrer l'apport des multi-modèles fractionnaires par rapport aux multi-modèles entiers pour modéliser les systèmes non linéaires fractionnaires.

4.2 Transfert de chaleur

L'évolution de la température dans un milieu conducteur de la chaleur est régie par une équation aux dérivées partielles dite équation de la chaleur

$$\frac{\partial \mathrm{T}\,(\mathrm{r,t})}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\alpha_c}{r^p}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^p \frac{\partial \mathrm{T}\,(\mathrm{r,t})}{\partial \mathrm{r}}\right) \qquad \alpha_c = \frac{\lambda_c}{\rho c_p} \qquad (4.1)$$

où t est une variable scalaire, symbolisant le temps, r est l'abscisse du point de mesure.

- α_c représente le coefficient de diffusivité (où α_c peut varier avec T)
- λ_c est la conductivité thermique du milieu
- c_p représente la chaleur massique du milieu
- ρ représente la densité massique du milieu

La géométrie du matériau considéré est caractérisée par la variable *p* telle que :

- *p* = 0 pour une géométrie plane
- *p* = 1 pour une géométrie cylindrique
- *p*= 2 pour une géométrie sphérique

4.2.1 Etude du transfert de chaleur dans un mur plan

Le transfert de chaleur à une dimension est régi par l'équation aux dérivées partielles appelée équation de la chaleur (4.2) et la loi de Fick (4.3) suivantes :

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \alpha_c \frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2} \quad \text{quand} \quad 0 < r < \infty \text{ et } t > 0 \qquad (4.2)$$

Ayant comme conditions aux limites :

$$-\lambda_c \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} = \phi(r,t) \quad \text{quand} \quad r = 0 \quad \text{et} \quad t > 0 \qquad (4.3)$$

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial r} = 0 \quad \text{quand} \quad r = \infty \quad \text{et} \quad t > 0 \qquad (4.4)$$

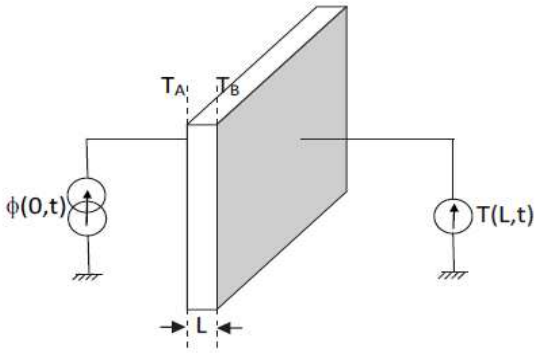


Figure 4.1: Transfert de chaleur dans un mur plan

Considérons la configuration simple d'un mur homogène de longueur L soumis à l'une des extrémités A à un flux de chaleur $\phi(0,t)$ (en l'abscisse r = 0), la face B, à l'autre extrémité, transmet la chaleur au milieu ambiant à travers une résistance thermique R(R est la résistance thermique entre le mur et l'air): $\phi(L,t) = T(L,t)/R$.

L'équation (4.3) correspond au flux de la chaleur injecté, (4.4) à l'isolation parfaite du mur (il n'y a aucun transfert de la chaleur en dehors du milieu).

Le modèle dynamique décrivant le système thermique ayant pour entrée le flux de chaleur Φ(0,t)=u(t) et pour sortie la température T(r, t)=y(t) est défini par la fonction de transfert $Hp(s) = Y(s)/U(s)$; lorsque $r = 0$, le système décrit l'interface de diffusion thermique. L'expression analytique de cette fonction de transfert est donnée par l'équation suivante :

$$H_p(s) = \frac{\tanh\left(L\sqrt{s/\alpha_c}\right)}{S_m \lambda_c \sqrt{s/\alpha_c}} \tag{4.5}$$

En basses fréquences (t → ∞), un modèle d'ordre entier est suffisant pour décrire l'interface de diffusion, alors que pour les hautes fréquences (régime transitoire t → 0), elle agit comme un intégrateur fractionnaire d'ordre 0.5. Cela montre la pertinence de l'utilisation des modèles fractionnaires pour la description du système thermique dans cette bande de fréquences [Cois, 02], [Oustaloup, 95].

4.2.2 Simulation du transfert de chaleur par différences finies

L'étude théorique du transfert thermique d'un mur plan a permis à l'aide d'hypothèses simplificatrices plus ou moins justifiées, de décrire le processus par des modèles fractionnaires simples d'ordre 0.5. Dans la réalité, le phénomène physique étant souvent plus complexe, la température extérieure n'étant pas nulle, l'utilisation des méthodes numériques comme les différences finies permet d'aborder le problème et de représenter les observations le plus exactement possibles en vue de sa résolution dans les conditions de fonctionnement.

L'objectif étant l'identification du transfert de chaleur, cette méthode numérique permet de générer une base de données du transfert thermique indépendamment de toute caractérisation fractionnaire, en vue de son analyse d'une part, et de son identification d'autre part.

Le principe de la méthode repose sur la discrétisation spatiale du mur en I blocs élémentaires, de même épaisseur Δx, tel que : $L = I.\Delta x$, et le i^{eme} bloc d'abscisse x est défini par: $x = i.\Delta x$.

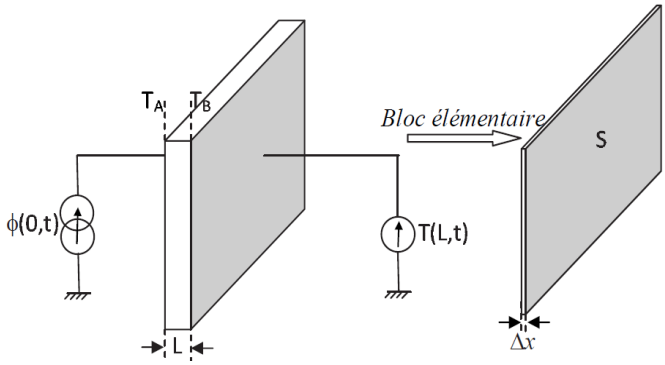


Figure 4.2: Transfert de chaleur dans un mur plan

L'analogie thermique-électrique permet de remplacer le flux de chaleur par une source de courant et la température fixée en B par une source de tension et de traiter ainsi les conditions aux limites. La face A étant soumise à un flux de chaleur $\emptyset(0,t) = u(t)$ et la face B à une température extérieure $T_{ext} = T(L,t)$ non nulle dans la réalité. Chaque bloc élémentaire étant composé d'une résistance thermique *Ri* et d'une capacité thermique *Ci*, et le schéma équivalent d'un bloc élémentaire est donné en figure 4.3. [Lin, 01], [Cois et al, 02].

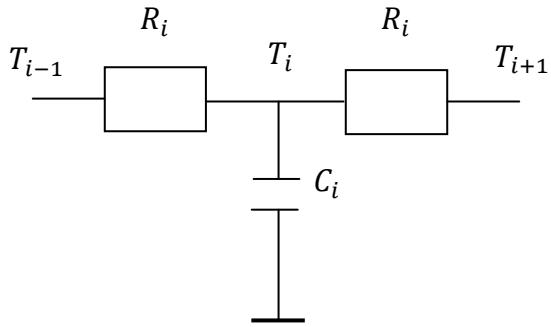


Figure 4.3: Schéma de simulation d'un bloc élémentaire du mur

Le transfert de la chaleur est un phénomène diffusif qui fait apparaître un comportement fractionnaire d'ordre 0.5 et un comportement non linéaire dû à la variation de α_c et λ_c en fonction de la température. A cet effet, la modélisation de ce phénomène nécessite un modèle fractionnaire non linéaire. Ce chapitre propose une nouvelle structure permettant d'approcher au mieux les comportements dynamiques des interfaces diffusifs thermiques dans une large plage fréquentielle.

4.2 Identification de transfert de chaleur par l'approche multi-modèle

Notre objectif est de définir un modèle non linéaire dans le cas où α_c et $\lambda_c$varient avec T, et cela a l'aide d'un multi-modèle parcimonieux, c.-à-d. un multi-modèle entier ou bien

fractionnaire capable de fournir une bonne caractérisation du système non linéaire avec un nombre minimal de paramètres.

Le multi-modèle aurait été déterminé directement a partir des données expérimentales après avoir imposé des structures pour différent nombre L et n. L'inconvénient principal de cette approche réside dans le nombre de paramètres à identifier.

Pour le cas de multi-modèles fractionnaires l'operateur d'intégration fractionnaire du modèle est simulé dans une bande de fréquence w= [10^{-5} 10^{5}] rad/s, avec un nombre de cellules N_c=30.

4.3.1 Identification de l'interface de diffusion du mur

Pour l'identification de l'interface de diffusion du mur deux cas de sous-modèles sont considérés : des sous-modèles entiers puis des sous-modèles fractionnaires.

Les données du processus thermique sont générées par les différences finies, le nombre de blocs utilisés est I=300. Celles-ci seront considérées comme les données réelles du simulateur thermique. L'entrée correspondante au flux de chaleur est une séquence binaire pseudo aléatoire de période d'échantillonnage $\Delta t = 0.1s$.

La figure 4.4 représente l'entrée sortie temporelles du simulateur numérique du mur à l'interface de diffusion.

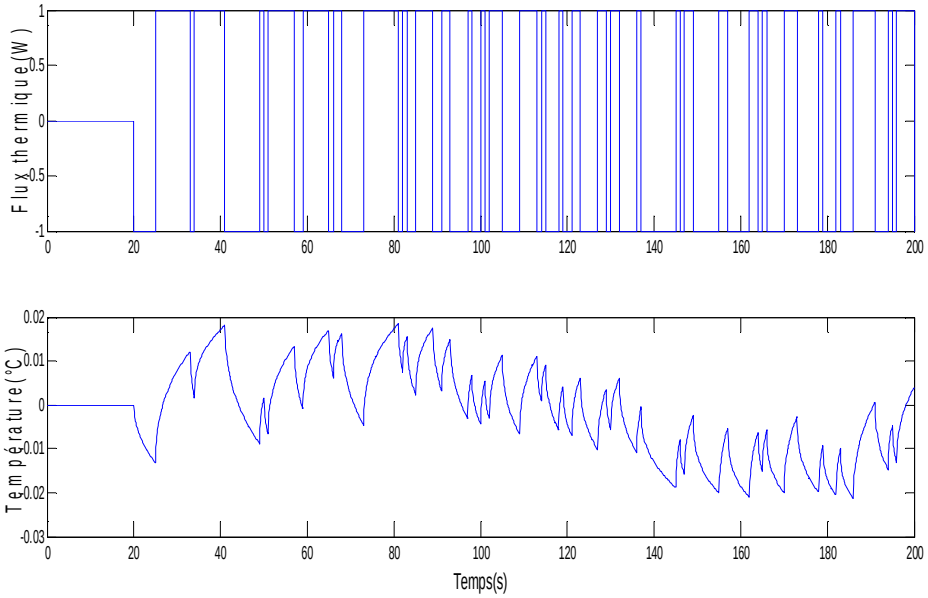


Figure 4.4 : Entrée sortie du simulateur thermique

1- Identification par multi-modèle entier

Nous avons fait des tests en faisant varier le nombre L de modèles locaux et ainsi leur dimension n. Les valeurs des différents critères sont montrées sur le tableau 4.1, Nous avons choisi L=3 sous-modèles de dimension n=2.

La figure 4.5 représente la sortie réelle et la sortie estimée choisie, l'erreur de prédiction est illustrée par la figure 4.6.

n	L	c_i	σ	critère (J)
1	2	[-1 1]	0.15	1.13e-05
2	2	[-1 1]	0.1	7.33e-07
1	3	[-1 0 1]	0.05	5.01e-05
2	3	[-1 0 1]	0.04	4.85e-07
2	5	[-1 -0.5 0 0.5 1]	0.03	5.05e-07

Table 4.1: résultats des simulations

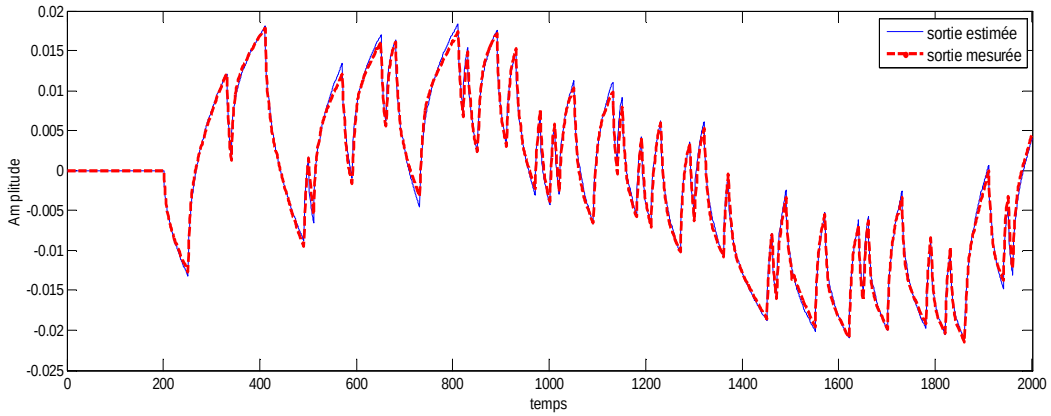


Figure 4.5: sortie réelle du système et la sortie du multi-modèle avec L=3 et n=2

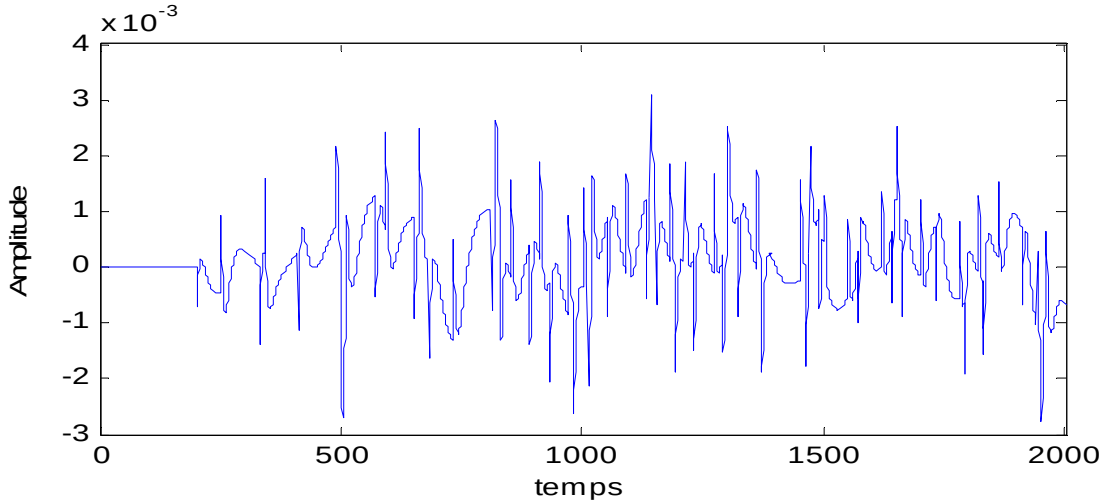


Figure 4.6: erreur de prédiction de la sortie

L'analyse des résultats du tableau 4.1 permet de constater que pour une bonne approximation, avec un critère *J* de 10^{-7}, le système nécessite un multi-modele de dimension n=2.

2-Identification par multi-modèle fractionnaire

Plusieurs multi-modèles fractionnaires commensurables de différents dimensions et de nombres de sous-modèles sont testés.

Les résultats obtenus par cette simulation sont donnés dans le tableau 4.2 avec des critères satisfaisants, le meilleur étant obtenu pour un multi-modele de L=3 avec une dimension n=2. Les paramètres des modèles avec L=2 sous-modèles de dimension n=1 et L=3 sous-modèles de dimension n=2 sont illustrés dans le tableau 4.3. La figure 4.7 représente les fonctions de pondération pour L=2 sous-modèles. Les figure 4.8 montre la superposition de sorties du système et son approximation par le multi-modèle (L=2 et n=1). L'erreur de sortie est représentée sur la figure 4.9.

La figure 4.10 représente les fonctions de pondérations pour un modèle de L=3 sous-modèles de dimension n=2. La figure 4.11 montre une bonne adéquation entre la réponse temporelle mesurée et estimée avec une erreur d'ordre 10^{-4}, illustrée sur la figure 4.12.

α	n	L	c_i	σ	critère *(J)*
0.57	1	2	[-1 1]	0.5	7.03e-07
0.32	2	2	[-1 1]	1	4.85e-07
0.58	1	3	[-1 0 1]	0.94	6.77e-07
0.40	2	3	[-1 0 1]	1	1.81e-07

Table 4.2: Résultats des simulations

dimension n	Paramètres	sous-modèle L			Ordre de dérivation
		L=1	L=2	L=3	
n=1	a	-0.31	-0.05	/	α =0.57
	c	0.30	0.005	/	

Table 4.3: paramètres estimés

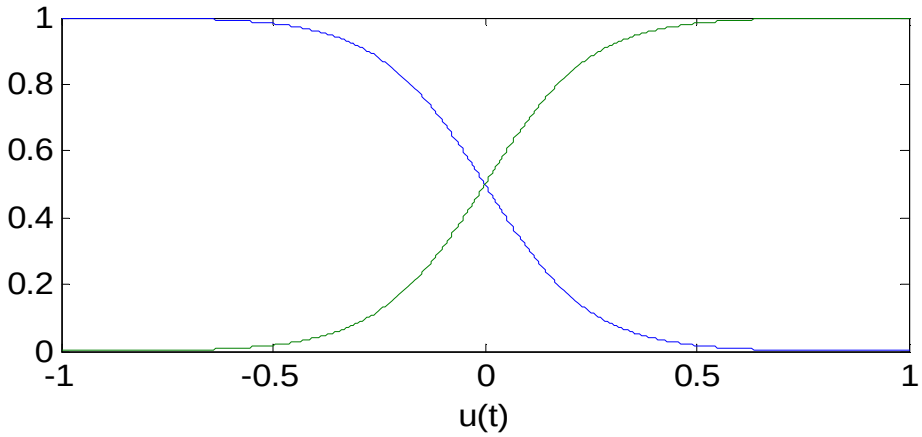


Figure 4.7: Fonction de pondération pour L=2

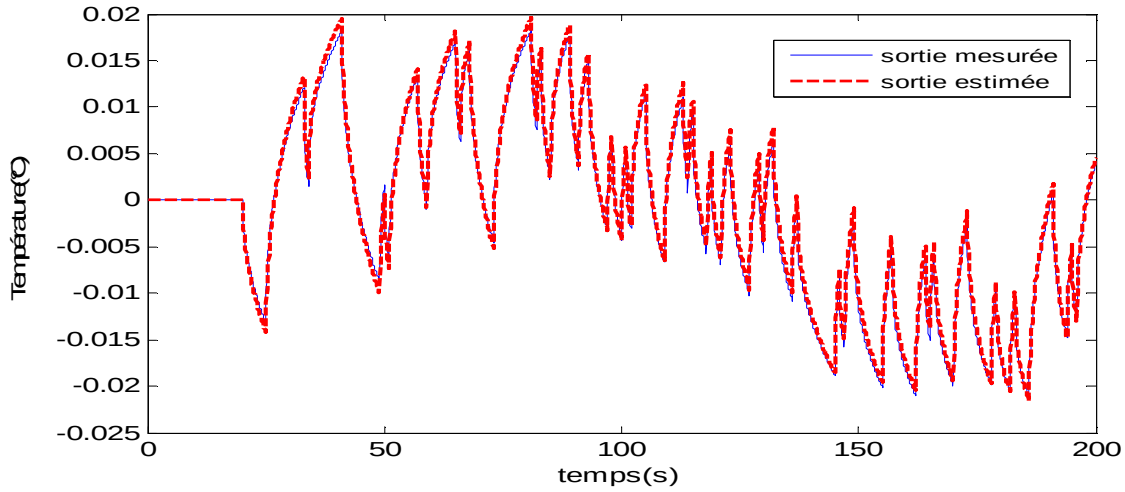


Figure 4.8: sortie réelle et sortie du multi-modèle pour L=2 et n=1

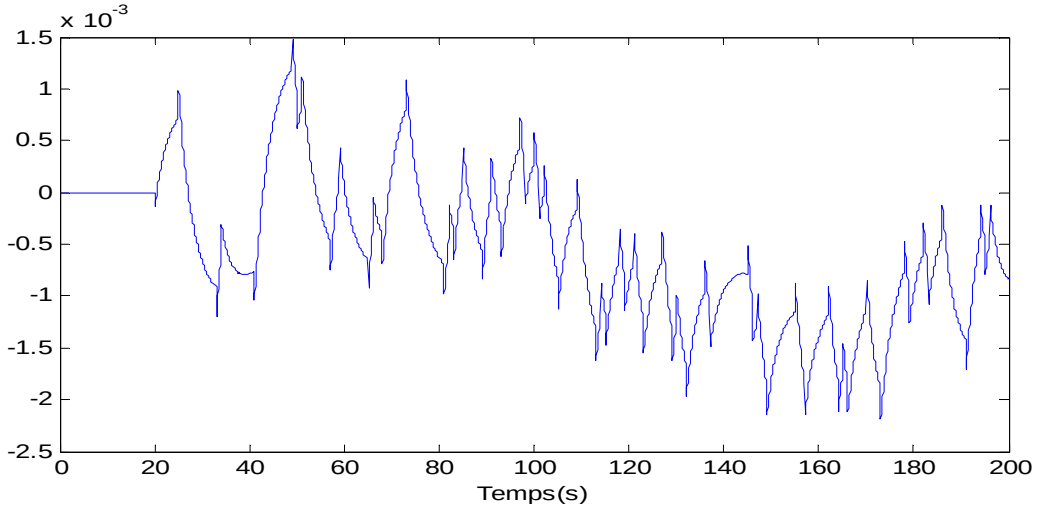


Figure 4.9: erreur de prédiction, L=2, n=1

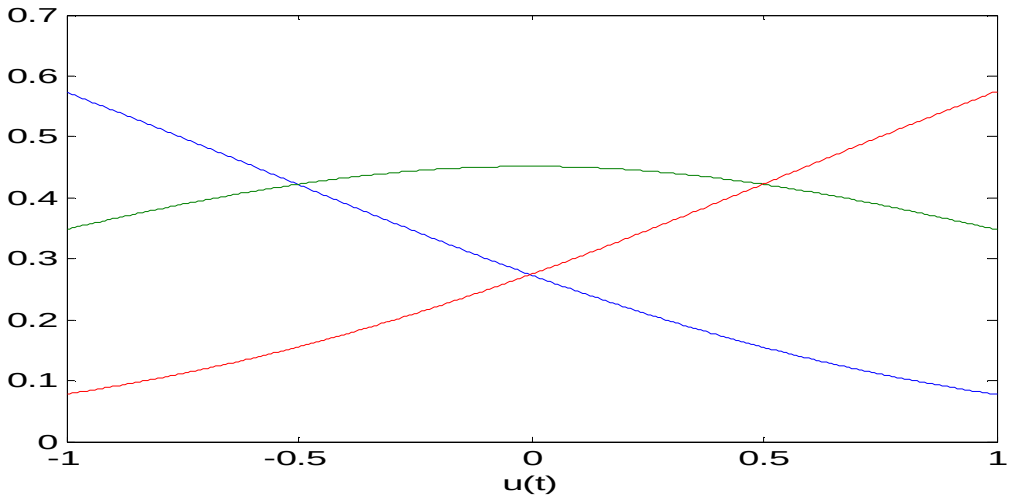


Figure 4.10: Fonction de pondération pour L=3

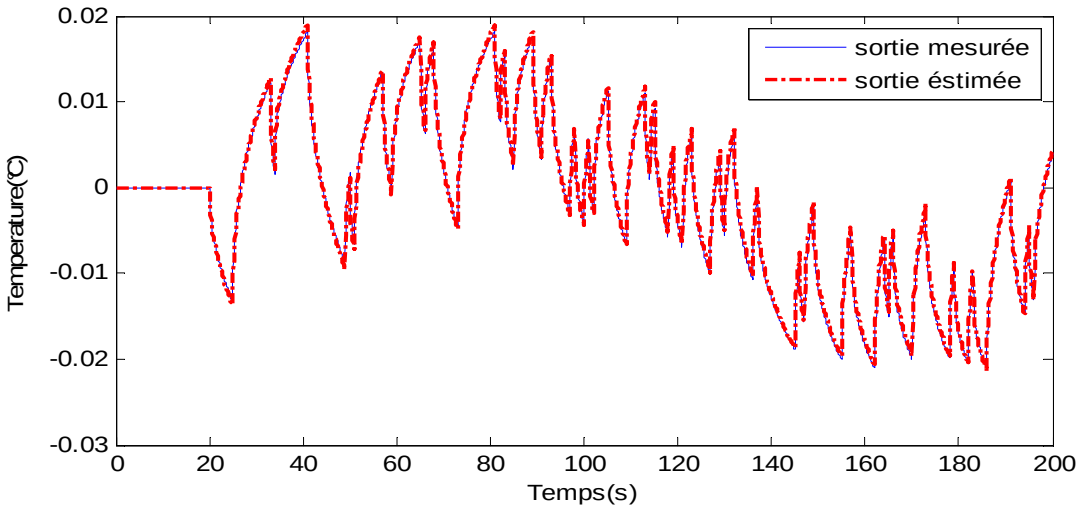


Figure 4.11: sorties réelle et du multi-modèle pour L=3 et n=2

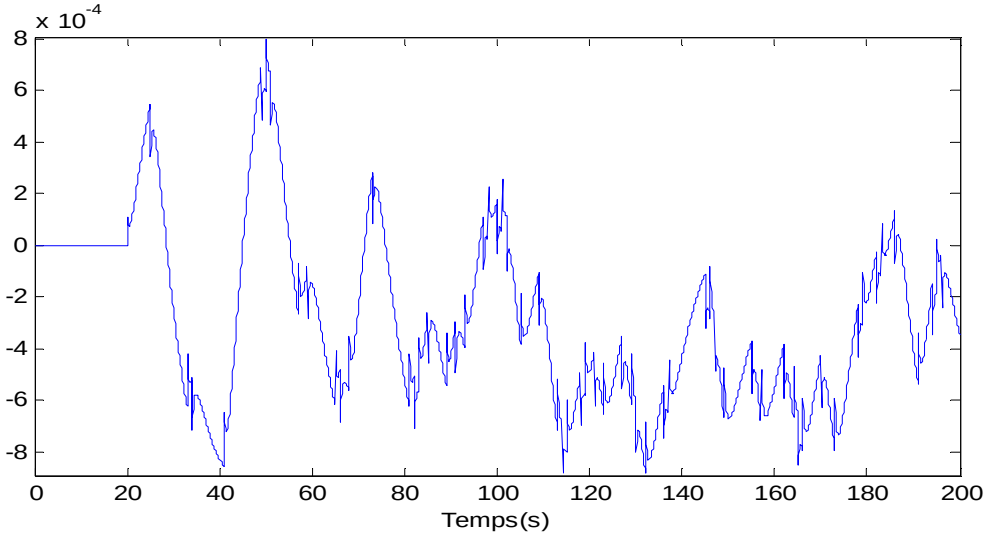


Figure 4.12: erreur de prédiction pour L=3 et n=2

Les résultats du tableau 4.2, montre une légère diminution du critère à chaque fois que le nombre de sous-modèle et leur dimension sont augmentés. Ce qui conclut que pour cet exemple la variation du critère est inversement proportionnel au nombre de sous-modèles et à la dimension n. Un modèle fractionnaire de deux sous-modèles de dimension 1 est suffisant pour décrire l'interface de diffusion, avec l'ordre de dérivation du modèle α= 0.57, ce qui est en accord avec la théorie.

la comparaison des résultats illustrés dans les tableaux 4.1 et 4.2 de l'identification de la diffusion du mur par des multi-modèles entiers et fractionnaires respectivement, permet de constater que pour un même ordre du critère (10^{-07}) le système est représenté avec un modèle de deux sous-modèles de dimension deux pour le cas entier et un modèle de deux sous-modèles de dimension un pour le cas fractionnaires, et pour un même nombre de sous-

modèle(L=3)et de même dimension(n=2) la figure 4.6 donne une erreur de prédiction d'ordre 10^{-3} pour le cas entier et la figure 4.12 montre une erreur d'ordre de 10^{-4} pour le cas fractionnaire.

Ces résultats confirment la capacité des systèmes fractionnaires de mieux représenter la dynamique des systèmes ainsi que leur critère parcimonieux.

4.3.2 Identification du benchmark Malti [Université Bordeaux I]

Le système expérimental est une barre en aluminium isolée représentée sur la Figure 4.13, l'entrée étant le flux de chaleur appliqué à l'une des extrémités et la sortie étant la température mesurée à une distance x = 0.5 cm de l'extrémité chauffée, à l'instant initial le système est à la température ambiante, et on suppose l'échange thermique avec l'extérieur nul. [Malti et al, 04]

Figure 4.13: Système expérimental (0-20W heater, temperature measurement probe slot)

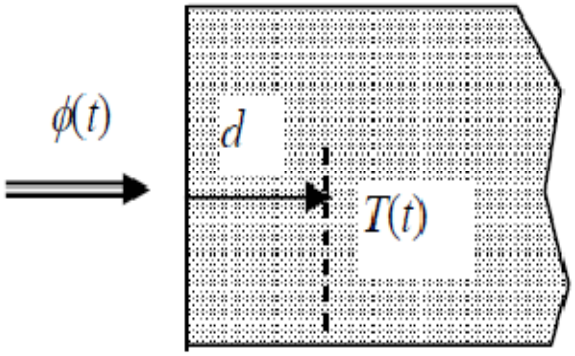


Figure 4.14: schéma du système expérimental

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha_c \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, t > 0 \tag{4.6}$$

$$-\lambda_c \frac{\partial T(x,t)}{\partial n} = \varphi(t), \quad x = 0,\ t > 0 \tag{4.7}$$

$$T(x,t) = 0,\ 0 \le x < \infty,\ t = 0$$

La figure (4.15) représente l'entrée et sortie temporelles du système expérimental :

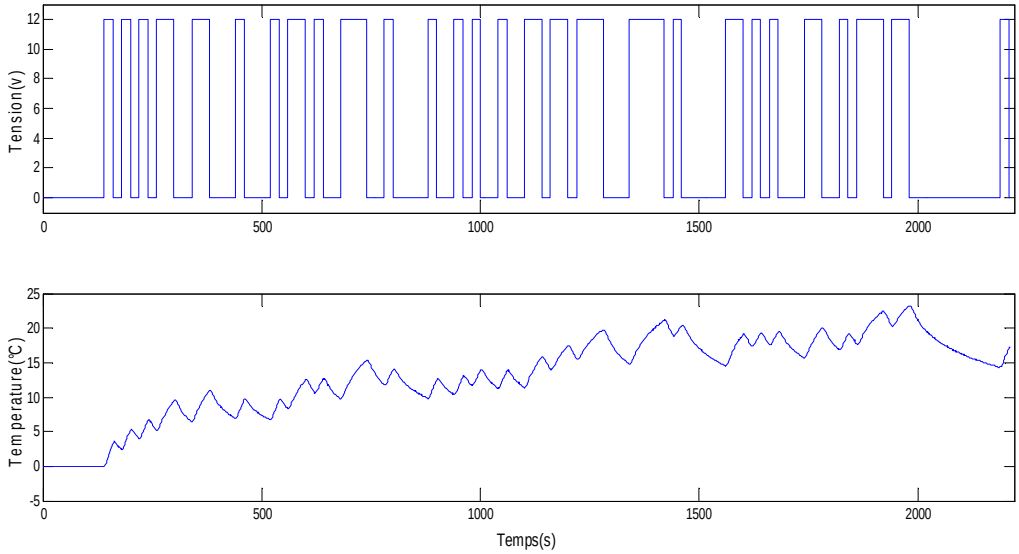


Figure 4.15: Entrée sortie du système

1- Cas de multi-modèles entiers

Le test est effectué sur des modèles de différent nombre de modèle locaux et de différente dimension. Les résultats obtenus pour différents modèles de simulation sont représentés dans le tableau 4.4. Le figure 4.16 représente la sortie du système et du multi-modele qui l'approxime avec L=5 sous-modèles. L'erreur de prédiction de la sortie est illustrée sur la figure 4.17.

n	L	c_i	σ	critère (J)
1	3	[0 6 12]	0.1	0.5673
1	5	[0 3 6 9 12]	0.1	0.2087

Tableau 4.4 : résultats des simulations

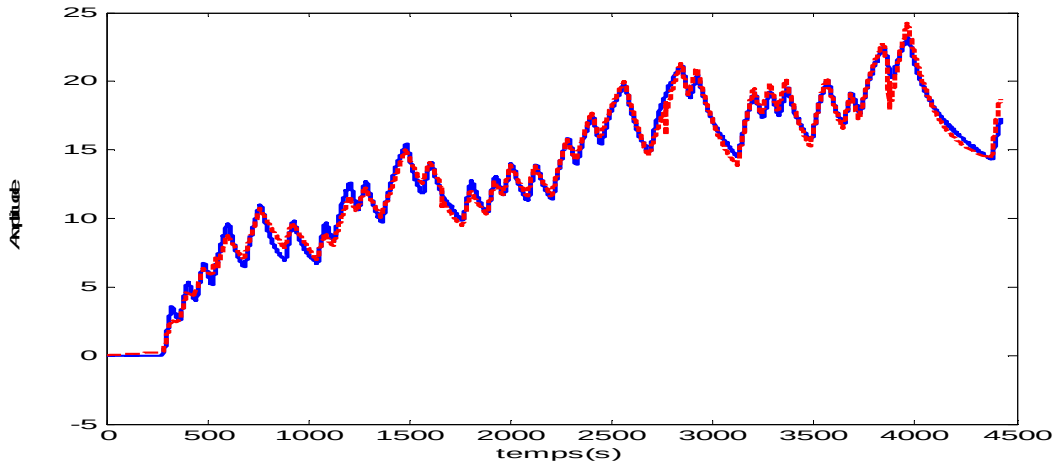


Figure 4.16: sorties réelle et du multi-modèle pour L=5 et n=1

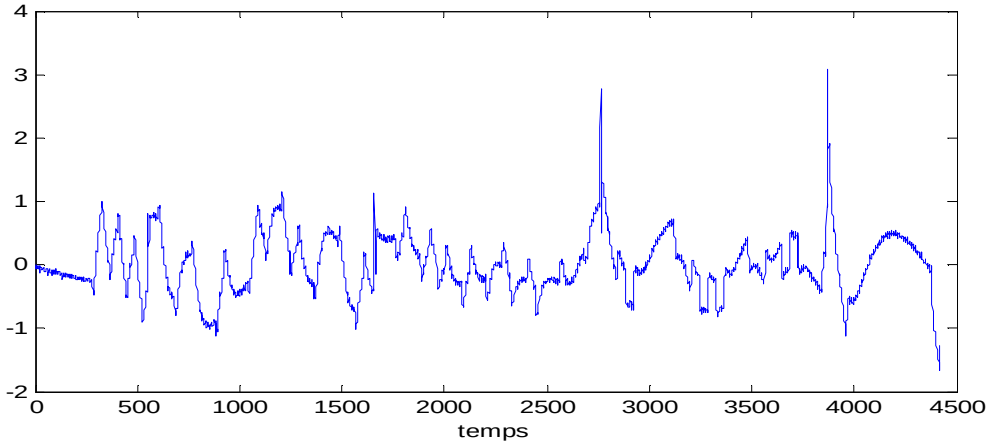


Figure 4.17: erreur de prédiction

Le tableau 4.4 montre qu'il existe une relation inversement proportionnelle entre le critère *J* et le nombre L de modèles locaux choisi. Comme il indique les multi-modèles retenus qui offrent une bonne approximation du système, mais aussi une certaine complexité de modélisation et un grand nombre de paramètres à identifier.

2- Cas de multi-modèles fractionnaires

Dans ce deuxième cas, plusieurs multi-modèles fractionnaires commensurables sont testés.

Les résultats de simulation sont montrés dans le tableau 4.5. Les paramètres des multi-modèles qui approximent au mieux la dynamique du système sont illustrés dans le tableau 4.6. La figure 4.18 représente la fonction de pondération pour L=2. La sortie réelle et du multi-modèle illustrée sur la figure 4.19, et la figure 4.20 représente l'erreur de prédiction pour un modèle de L=2 sous-modèle de dimension n=1.

Les figure 4.21, 4.22 représentent les sorties réelle et du multi-modèle et l'erreur de prédiction respectivement pour un modèle de L=2 sous-modèle de dimension n=2.

α	n	L	C_i	σ	critère (J)
0.71	1	2	[0 12]	6	0.24
0.35	2	2	[0 12]	6	0.05
0.73	1	3	[0 6 12]	4	0.23
0.37	2	3	[0 6 12]	4	0.28

Tableau 4.5 : résultats des simulations

dimension n	Paramètres	sous-modèle L			Ordre de dérivation
		L=1	L=2	L=3	
n=1	a_L	-0.0076	-0.005	/	α=0.71
	c_L	0.0194	0.0328	/	
n=2	a_{1L}	-0.7416	0.0916	/	α =0.35
	a_{2L}	-0.9184	0.0780	/	
	c_{1L}	-1.1297	0.2123	/	
	c_{2L}	-1.7984	0.1667	/	
n=1	a_L	-0.0055	-0.0091	-0.0041	α =0.73
	c_L	0.0177	0.0370	0.245	

Tableau 4.6 : paramètres estimés, pour L=2 de n=1 et 2, et L=3de n=1

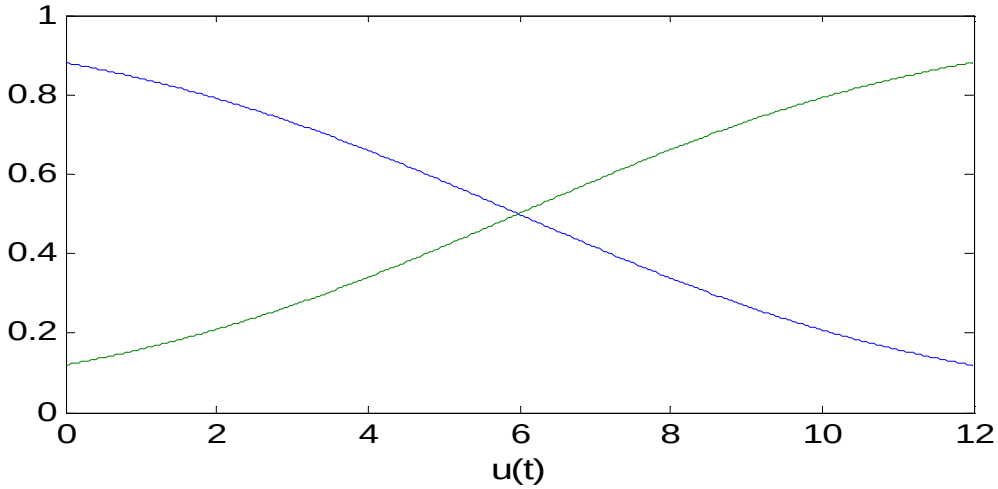


Figure 4.18: Fonction de pondération L=2

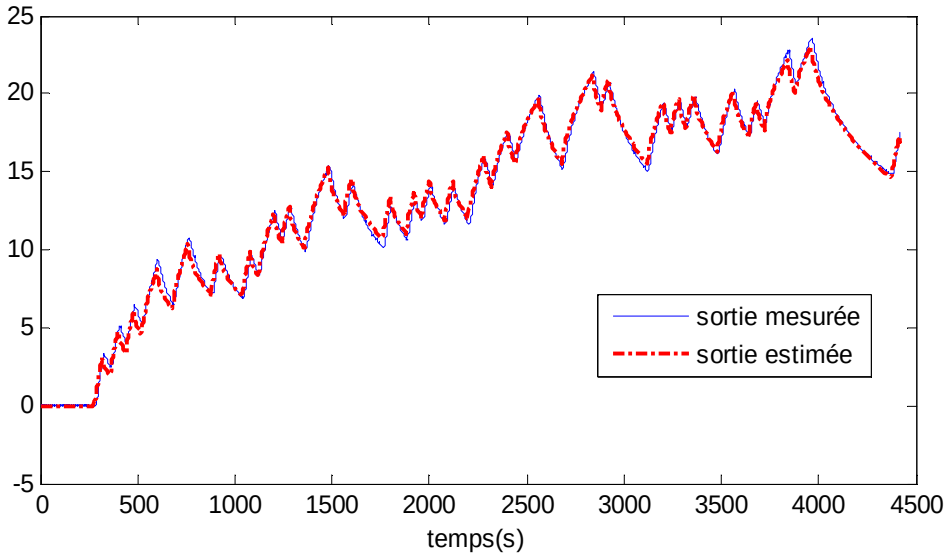


Figure 4.19: résultat de simulation pour L=2, n=1

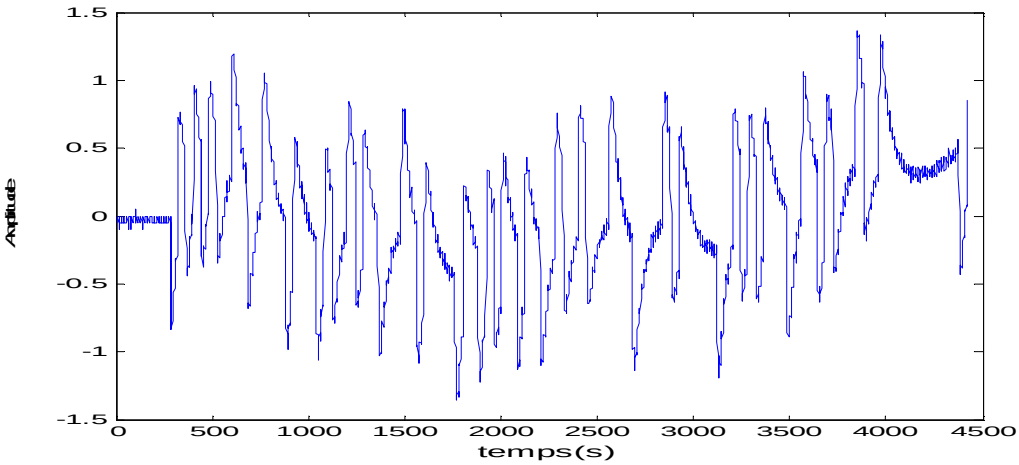


Figure 4.20: Erreur de prédiction pour L=2, n=1

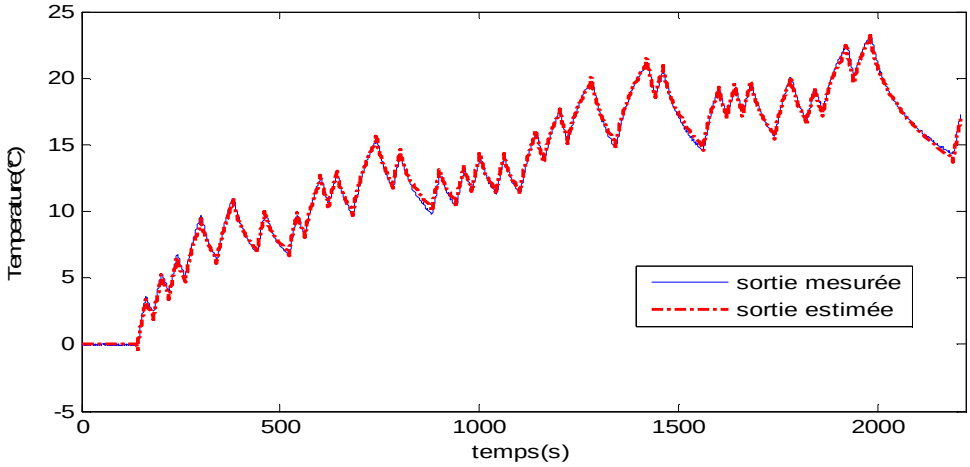


Figure 4.21: résultat de simulation pour L=2, n=2

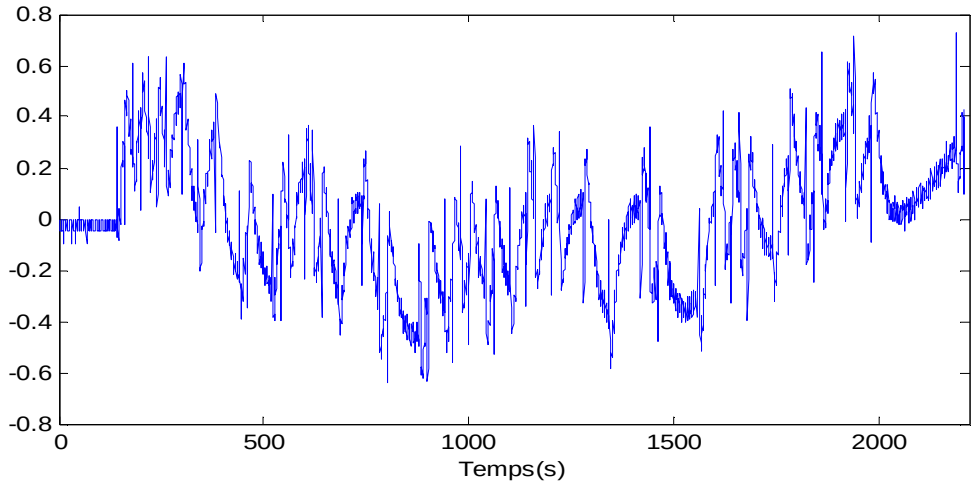


Figure 4.22: Erreur de prédiction pour L=2 n=2.

La figure 4.20 montre que les courbes du système et du modèle sont confondues avec une erreur de moyenne d'ordre de 10^{-1} et on voit qu'il y'a un léger décalage qui est dû au bruit de

mesure, et l'augmentation de la dimension de ce modèle donne une meilleure approximation avec une erreur moyenne d'ordre de 10^{-2} (Tableau 4.5).

L'analyse des résultats obtenus de l'identification des systèmes non linéaires défini par benchmark en exploitant l'approche multi-modèle montre que le modèle de deux sous-modèles de dimensions deux reproduit fidèlement le comportement dynamique du système non linéaire fractionnaire, qui nécessitent un nombre de sous-modèle supérieurs pour le cas de multi-modèle entier.

Les résultats de simulation montrent la capacité des multi-modèles à approcher le comportement des systèmes non linéaires. Pour le cas entier le nombre de modèles locaux augmente en fonction de la complexité de la dynamique du modèle a appréhender et de la précision souhaitée par contre pour le cas de multi-modèles fractionnaire la dynamique du système non linéaire fractionnaire peut être représentée avec un modèle moins complexe. Cette identification met en valeur la pertinence de l'utilisation des modèles fractionnaire, et montre la caractéristique de parcimonie des systèmes fractionnaires. La propriété de compacité des modèles fractionnaires est ainsi vérifiée.

4.3 Conclusion

L'objectif de ce chapitre est la validation de la méthode développée pour l'identification des systèmes non linéaires fractionnaire par des multi-modèles.

Les différentes simulations effectuées ont permis de vérifier l'efficacité de la méthode développée pour l'identification du processus fractionnaires.

La simulation des systèmes non linéaires fractionnaires à l'aide de l'approche multi-modèle d'ordre non entier permet d'obtenir des modèles parcimonieux aux paramètres. L'analyse des résultats obtenus à l'interface de diffusion révèle que le multi-modèle fractionnaire de dimension un reproduit fidèlement le comportement dynamique du transfert de chaleur défini par différence fini qui nécessite un multi-modèle entier plus complexe, en effet, l'utilisation de modèles classiques basés sur une dérivation entière n'est donc pas appropriée.

L'identification du transfert thermique à partir des données réelles de benchmark permet de valider la méthode développée. De ce chapitre nous pouvons conclure que la modélisation fractionnaire est capable de reproduire les caractéristiques essentielles des systèmes non linéaires fractionnaires avec des modèles non complexes et avec un nombre réduit de paramètre.

Cette étude comparative, aide au choix du nombre de modèles locaux pour une bonne approximation du système. Nous avons donc fait un compromis entre ces trois contraintes à savoir la complexité, le nombre de paramètres à identifier et la qualité de l'approximation.

Conclusion générale

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire concernent des contributions à l'identification paramétrique des systèmes non linéaires fractionnaires par l'approche multi-modèle. La difficulté de l'identification des systèmes réels fractionnaires réside dans leur dynamique de nature non linéaire, les systèmes de commande et de diagnostic développés sur la base de modèles linéaires fournissent des performances dégradées dès qu'on s'éloigne du point de fonctionnement. Afin d'améliorer les performances des systèmes, il est impératif de prendre en considération les non-linéarités dans la phase de modélisation. Cela permet de décrire le comportement d'un système réel sur une large plage de fonctionnement avec une meilleure précision comparée à celle obtenue avec des modèles linéaires, et d'autre part, les systèmes fractionnaires sont considérés comme des systèmes à mémoire, notamment pour la prise en compte des conditions initiales, ils présentent une dynamique beaucoup plus complexe, de-ce-fait l'utilisation de modèles classiques basés sur une dérivation entière n'est donc pas appropriée.

Avant de nous pencher sur le problème posé par l'identification des systèmes non linaires fractionnaires par des multi-modèles d'ordre non entier nous avons présenté au cours du premier chapitre les principales méthodes d'identification des systèmes. L'étude bibliographique nous a permis de constater que la méthode à erreur de sortie non restrictive sur l'hypothèse de linéarité et d'application plus générale, constituent un outil puissant d'identification, ainsi que les modèles à temps continu sont plus proches de la nature physique du système et les paramètres estimés sont fortement liés aux paramètres réels du processus, Cette méthode est étendue pour l'identification des systèmes linéaires d'ordre non entier, et l'identification des systèmes non linéaires fractionnaires par l'approche multi-modèle.

Le second chapitre a présenté un rappel sur le calcul fractionnaire et les différentes méthodes d'approximation de l'operateur d'intégration fractionnaire, la deuxième partie de ce chapitre a porté sur la méthodologie de modélisation et simulation des systèmes d'ordre non entier par des modèles d'état qui repose sur la technique d'approximation de l'operateur d'intégration fractionnaire. En fait, cet opérateur est approximé à un modèle d'état conventionnel de dimension élevée mais non infinie. La troisième partie est consacrée pour l'identification des systèmes fractionnaires par la méthode à erreur de sortie associée à l'algorithme de Levenberg-Marquardt étendu au cas non entier, cette méthode permet d'accéder à l'estimation au même titre les ordres non entiers ainsi que les paramètres d'un modèle d'état fractionnaire.

Le troisième chapitre a porté sur la présentation de l'approche multimodèle qui est l'une des méthodes qui est utilisée jusqu'à présent pour l'identification des systèmes non linéaires, ainsi nous avons présenté les deux structures des multi-modèles classiquement utilisées. Nous avons en particulier mis en évidence l'algorithme d'identification des systèmes non linéaire par multi-modele de Takagi-Sugeno entier en utilisant la méthode à erreur de sortie associé a l'algorithme d'optimisation non linéaire Levenberg-Marquardt que nous avons étendu pour l'identification des système non linéaire fractionnaire par des multi-modele d'ordre non entier, l'estimation des paramètre est effectuée en minimisant un critère global afin d'avoir une adéquation du comportement dynamique globale du système.

La principale contribution de ce travail de recherche apparaît au cours du quatrième chapitre, les méthodes développées sont appliquées sur l'identification du phénomène de diffusion thermique du mur, les résultats sont validés pour des données expérimentales de benchmarks Malti , tel que nous avons pris des multi-modèles entiers puis des multi-modèles fractionnaire afin de montrer l'apport des multi-modèles fractionnaires par rapport aux multi-modèles entiers.

Les multi-modèles fractionnaires obtenus de l'identification du comportement dynamique des systèmes non linéaires fractionnaires ont une représentation paramétrique compacte, ils permettent de représenter de manière précise les systèmes non linéaires. Ils ont une structure simple présentant des propriétés intéressantes les rendant facilement exploitables du point de vue mathématique et permettant l'extension de certains résultats du domaine linéaire aux systèmes non linéaires.

Les résultats présentés dans ce mémoire sont prometteurs et ouvrent de multiples perspectives

- Généralisation de la méthode développée pour le cas de multi-modele fractionnaire non commensurable
- Application de la méthode développée pour le cas d'un multi-modele fractionnaire multi-variable
- Application de la méthode développée pour le cas de multi-modele fractionnaire à état découplé

Références bibliographiques

[Battaglia et al, 00] J.L. Battaglia, L. Le Lay, J.C. Batsale, A. Oustaloup and O. Cois. *Heat flow estimate through inverted not integer identification models*. Int. J. of Thermal Science. Vol. 39, n 3, pp 374-389, 2000.

[Battaglia, 02] J.L. Battaglia. *Méthodes d'identification de modèles à dérivées d'ordre non entier et de réduction modale : Application à la résolution de problèmes thermiques Industriels*. Habilitaton à Diriger des Recherches, Universit´e de Bordeaux I, 2002

[Benchellal et al, 05] A. Benchellal, T. Poinot, J. C. Trigeassou. *Approximation and identification of fractional systems.* In International Design Engineering Technical Conferences (ASME, IDETC). Long Beach, California, USA, September 2005.

[Bettayeb M et al, 06] M Bettayeb. et S Djennoune. *A Note on the Controllability and the Observability of Fractional Dynamical Systems*. In : Proceedings of the 2th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, Porto, Portugal. 2006.

[Buckley, 92] J. J. Buckley. *Universal fuzzy controllers*. Automatica, 28, 1992.

[Castro, 95] J. Castro. *Fuzzy logic controllers are universal approximator*. *IEEE 1995*

[Charef et al,92] A. Charef, H.H. Sun, Y.Y. Tsao, and B. Onaral. *Fractal system as represented by singularity function*.IEEE Trans. Auto. Control, 37, pp 1465-1470, sept 1992.

[Calamai and More, 87] P.H. Calamai, J. More. *Projected Gradient Methods for Linearly Constrained Problems*. Mathematical Programming. Vol. 39, pp 93-116, 1987

[Cois et al, 02] O.Cois. *Systèmes linéaires non entiers et identification par modèle non entier: Application en thermique*. Thèse de doctorat. Université de Bordeaux, France, 2002.

[Djamah, 10]T.Djamah. *Identification des systèmes par des modèles d'ordre fractionnaire.* Thèse de doctorat, Université Mouloud MAMMERI de Tizi Ouzou, Janvier 2010.

[Djamah et al, 07] T. Djamah, R. Mansouri, M. Bettayeb, S. Djennoune, S. Guermah. *Identification des systèmes fractionnaires par des modèles optimaux réduits d'ordre entier*. 5ème Conférence sur le Génie Electrique, CGE'07. Alger, Algérie. 16-17 Avril 2007.

[Djamah et al, 08] Djamah, R. Mansouri, S. Djennoune, M. Bettayeb. *Identification des modèles d'état d'ordre fractionnaire*. 7ème conférence Internationale de Modélisation et Simulation, MOSIM 08. Paris France, du 31 Mars au 02 Avril 2008.

[Filev,91] *Fuzzy modeling of complex systems*. Internetional Journal of approximate Reasoning, 5(3), page 281-290, 1991.

[Gasso et al, 01], Komi Gasso, Gilles Mourot and JosC Ragot. *Structure identification in multiple model representation: elimination and merging of local models.* Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control Orlando, Florida USA, December 2001.

[Gasso, 02], Komi Gasso, Gilles Mourot and JosC Ragot. *structure identification of multiple models whith output error local models*. 15th Triennal World Congress, Barcelona, Spain 2002.

[Ichise et al,71] M. Ichise, Y. Nagayanagi and T. Kojima. *An analog simulation of noninteger order transfer functions for analysis of electrode processes.* Journal of Electroanalytical Chemistry and Interfacial Electrochemistry. Vol. 33, pp 253-265, 1971.

[Johansen et Foss, 93] T. A. Johansen et A. B. Foss. *Constructing narmax using armax*. International Journal of Control, 58, 1993.

[Kelley, 99] C.T. Kelley. *Iterative Methods for Optimization*. SIAM, Philadelphia, 1999

[Landeau, 93] I.D Landeau, *Identification et commande des systèmes. 2e édition revue et augmentée*, Hermès, 1993.

[Le Lay, 98] L. Le lay. *Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier*. Thèse de doctorat Université de Bordeaux I, France, 1998.

[Lin, 01] J. Lin. *Modélisation et identification de systèmes d'ordre non entier*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, France, 2001.

[Makris et al, 91] N.Makris and M.C. Constantinou. *Fractional-Derivative Maxwell Model for Viscous Dampers*, Journal of Structural Engineering, Vol.117, No. 9, 2708-2724, Sep. 1991.

[Malti et al,04] R.Malti and J.Sabatier. *Time-Domain System Identification Using Fractional Models: A Benchmark.* IFAC Workshop on: Fractional Differentiation and its applications, FDA04, Université de Bordeaux I, France 2004.

[Mansouri, 2008] R. Mansouri. Contribution à l'analyse et la synthèse des systèmes d'ordre fractionnaire par la représentation d'état. These de doctorat, Université M.MAMMERI de Tizi Ouzou, juin 2008.

[Marquardt, 63] D.W. Marquardt. *An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters*. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics.Vol. 11, n± 2, pp 431-441, Paris France, 1963.

[Matignon et al, 96] D.Matignon et B.Andrea-Novel. Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems. In IMACS, IEEE-SMC Proceedings Conference. pp. 952-956, Lille, France, 1996.

[Orjuela, 08] R.Orjuela. *Contribution à l'estimation d'état et au diagnostic des systèmes représentés par des multi-modèles*. Thèse Doctorat, l'Institut National Polytechnique de Lorraine. France 2008.

[Oustaloup, 91] Oustaloup, A, *La commande CRONE*, Paris: Hermès, 1991.

[Oustaloup, 95] A. Oustaloup. *La dérivation non entière*. Hermès. Paris, 1995.

[Petras et al,02] I. Petras, I. Podlubny, P.O'Leary, L.Dorcak , and B. M. Vinagre. *Analogue Realization of Fractional Order Controllers.* Fakulta Berg , TU Kosice, 2002.

[Podlubny,99] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations.* Academic Press, San Diego, 1999.

[Povy, 75]L.Povy. *identification des processus.* Dunod université.OTTSet-Aubin 1975

[Richalet, 91] J. Richalet.*Pratique de l'identification*. Paris, Hermès, 1991.

[Samko et al, 93] S.G. Samko, A.A. Kilbas et O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives: theory and applications*. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1993.

[Sun et al,84] H. Sun, A. A. Abdelwahab and B. Onaral. *Linear Approximation of Transfer Function with a Pole of Fractional Power*. IEEE Trans. Automatic Control, 29 (5), pp. 441-444, Mai 1984.

[Takagi et Sugeno, 85] T. Takagi and M. Sugeno. *Fuzzy identification of systems and its applications to modelling and control*. *IEEE Trans. on Systems Man and Cybernetics*, 15, pages 116–132, 1985.

[Tanaka et al, 96] K. Tanaka, T. Ikeda, et H. O. Wang. *Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: quadratic stabilizability, control theory, and linear matrix inequalities*. IEEE Trans. Fuzzy Systems, 4, 1996.

[Trigeassou et al, 99] J.C. Trigeassou, T. Poinot, J. Lin, A. Oustaloup et F. Levron. *Modeling and identification of a non integer order system*. ECC*0*99, European Control Conference. Karlsruhe, Germany,1999.

[Young, 1970] P.C. Young. *An instrumental variable method for real time identification of a noisy process*. Automatica. Vol. 6, n± 6, pp271-288, 1970.

[Young, 81] P. C. Young. *Parameter estimation for continuous time models*. A survey. Automatica. Vol. 17, n± 1, pp 23-39, 1981.

[Yen,98]J. Yen, L. Wang, and C. W Gillespie. *Improving the interpretability of Takagi-Sugeno fuzzy models by combining global learning and local learning*. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 6(4), pages 530–537, 1998.