République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
Université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou

**Faculté des Sciences
Département des Mathématiques**

Mémoire de Master

Spécialité : MATHÉMATIQUES

Option : Modélisation mathématiques

Intitulé du mémoire

Sur Quelques Théorèmes du Point Fixe

Réalisé par :

YAKOUBI FAIZA

Dirigé par :

M^{me} **ZIDI YAMINA**

Année Universitaire : 2016/2017

Devant le jury d'examen composé de :

BOUDIBA	Arezki	UMMTO	Président
ZIDI	Yamina	UMMTO	Rapporteur
BEDOUHENE	Fazia	UMMTO	Examinatrice
DAOUI	Amina	UMMTO	Examineur

Année Universitaire : 2016/2017

Contents

1	Théorèmes "Classiques" du Points Fixes et Application	3
1.1	Introduction	3
1.2	Principe de la Contraction de Banach	5
1.2.1	Application: théorème de Cauchy Lipschitz	9
1.3	Théorème de Brouwer	12
1.3.1	Des exemples d'applications du théorème de Brouwer	16
1.4	Théorème de Schauder	17
1.4.1	Un exemple d'application du théorème de Schauder	19
2	Point Fixe des applications non-expansive dans les espaces de Banach	21
2.1	Rappels des Notions d'analyse fonctionnelle	22
2.1.1	Dualité-Topologie faible	22
2.1.2	isomorphisme	23
2.1.3	Espaces réflexifs	23
2.2	Applications non-Expansives-Convexes minimaux	24
2.3	Théorèmes basiques.	28
2.4	Propriété du point fixe dans les espaces a base inconditionnelle	30
2.4.1	Base inconditionnelles	30
2.4.2	Filtre Et Ultrafiltre	31
2.4.3	Ultrapuissances	32
2.4.4	Théorème de Pei-Kee-Lin	33
2.4.5	Application du théorème de P.K. Lin	35
2.4.6	Annexe	38

Introduction Générale

En mathématique, pour une application f d'un ensemble E dans lui-même, un élément x de E est un point fixe de f si $f(x) = x$.

Les théorèmes du point fixe consistent à donner des conditions sur E et f qui assurent l'existence d'un point fixe. Ces théorèmes sont fondamentaux en analyse mathématiques, ils ont de nombreuses applications, à la fois théoriques et pratiques; on les retrouve dans la plupart des problèmes d'existence: solutions d'équations différentielles,...

Ce travail est composé de deux chapitres:

Le premier chapitre est consacré à l'étude de quelques théorèmes qui sont à la base de la théorie du point fixe :

- Théorème ou principe de la contraction de Banach qui dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe.
- Théorème de Brouwer qui donne l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace euclidien de dimension finie.
- Théorème de Schauder qui est une généralisation du théorème de Brouwer en dimension infinie. Et on présente un exemple d'application pour chacun de ces théorèmes:théorème de Cauchy lipschitz, théorème de Cauchy Arzela,...

Dans le deuxième chapitre on étudie la propriété du point fixe dans les espaces de Banach pour les applications non-expansives; il s'agit des application T définie sur un sous-ensemble non vide C d'un espace de Banach dans lui même tel que:

$$\forall x, y \in C, \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|.$$

On présente dans ce chapitre les arguments fondamentaux de cette théorie, et deux théorèmes classiques: théorème de Kirk, théorème de Pei-Kee-Lin, et une application pour le théorème de Lin.

Chapter 1

Théorèmes "Classiques" du Points Fixes et Application

1.1 Introduction

Soit une fonction $f : E \rightarrow E$. Un point x_0 de E est appelé un point fixe de f s'il vérifie

$$f(x_0) = x_0.$$

les points fixes de f sont les solutions de l'équation $f(x) = x$.

Dans ce chapitre, on reprend trois théorèmes, des plus célèbres, du point fixe et quelques-unes de leurs applications.

Le théorème du point fixe de Banach nommé aussi principe de contraction de Banach dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique, de plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite d'itérées. En dimension finie, il fut pourtant énoncé et démontré pour la première fois en 1903 par Édouard Goursat. Stefan Banach l'a étendu en 1922 aux fermés d'espaces vectoriels normés complets de dimension infinie, ce qui a augmenté le champ de ses applications.

Le théorème du point fixe de Brouwer donne l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur une boule fermée dans un espace euclidien de dimension finie. Dans le cas de dimension 1, la preuve est très élémentaire, pour le cas de dimension $n \geq 2$, il existe plusieurs démonstrations aussi laborieuses les unes que les autres.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer en dimension infinie, il affirme qu'une application continue sur un convexe compact d'un espace de Banach admet

1.1. INTRODUCTION

un point fixe, mais il n'assure pas son unicité.

Pour chacun des théorèmes nous donnons un exemple d'application, bien que le domaine a beaucoup d'applications. Ces théorèmes apparaissent dans des différentes branches, ils interviennent aussi pour établir des résultats fins sur les équations différentielles, on a étudié comme exemples d'applications: théorème de Cauchy lipschitz, théorème de Cauchy Arzela ,...

1.2. PRINCIPE DE LA CONTRACTION DE BANACH

Les notions utilisées dans ce chapitre portent essentiellement sur les modules de l_1 , l_2 et l_3 , on a pas jugé nécessaire de les rappeler.

1.2 Principe de la Contraction de Banach

Définition 1.2.1. (*Application contractante*) .

Soit E un espace métrique, une application T de l'espace E dans lui-même est appelée application contractante ou simplement contraction, s'il existe un nombre $k \in [0, 1[$ tel que pour tout couple de points $x, y \in E$ on a l'inégalité

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \quad (1.1)$$

On peut illustrer une contraction par le lavage d'une chemise, à chaque lavage, la chemise rétrécit. Elle pourra se ranger dans le porte feuille après un nombre suffisant de lavage.

Remarque:

Si T est une application contractante alors toutes les itérées T^n de T , $n \in \mathbb{N}$ sont également contractantes.

Le théorème suivant dit principe de la contraction de Banach est à la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

Théorème 1.2.1. (*Théorème de Banach*) Soient (E, d) un espace métrique complet et $T : E \rightarrow E$ une application contractante. Alors T admet un unique point fixe $x \in E$ et pour tout point initial $x_0 \in E$ la suite des itérés $\{T^n x_0\}$ converge vers ce point fixe.

Preuve. 1

Soient $\{x_n\}$ la suite définie par

$$\begin{cases} x_0 & \text{donné dans } E \\ x_{n+1} = T(x_n), & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La suite $\{x_n\}$ est de Cauchy. En effet, soient $n, m \in \mathbb{N}$, pour fixer les idées on prend $m > n$, et $p = m - n$ on a

$$d(x_n, x_m) = d(T^n x_0, T^m x_0) \leq k^n d(x_0, x_{m-n}) = k^n d(x_0, x_p)$$

et

$$d(x_p, x_0) \leq d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + \dots + d(x_1, x_0).$$

1.2. PRINCIPE DE LA CONTRACTION DE BANACH

$$d(x_p, x_{p-1}) \leq kd(x_{p-1}, x_{p-2}) \leq \dots \leq k^{p-1}d(x_1, x_0) \text{ donc}$$

$$d(x_{p-1}, x_{p-2}) \leq k^{p-2}d(x_1, x_0)$$

·
·
·

$d(x_2, x_1) \leq kd(x_1, x_0)$. Ce qui implique que

$$d(x_m, x_n) \leq k^n(1 + k + k^2 + \dots + k^{p-1})d(x_1, x_0)$$

$$d(x_m, x_n) \leq k^n \frac{1 - k^p}{1 - k} d(x_1, x_0) \leq \frac{k^n}{1 - k} d(x_1, x_0) \dots (*)$$

Comme $k < 1$ pour n assez grand, cette quantité peut devenir aussi petite que l'on veut:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n, m, m > n \geq N_\epsilon \Rightarrow \frac{k^n}{1 - k} d(x_1, x_0) < \epsilon$$

Donc $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy.

L'espace E étant complet, la suite de Cauchy $\{x_n\}$ a une limite dans E .

Posons $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. En vertu de la continuité de l'application T , on a

$$Tx = T \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Tx_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = x$$

L'existence du point fixe étant démontré. Vérifions l'unicité de ce point.

Supposons qu'il existe $x, y \in E$ telle que $x = Tx$ et $y = Ty$, on a

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

comme $k < 1$, il vient que $d(x, y) = 0$ c.à.d. $x = y$.

On présente une deuxième preuve pour l'existence

Preuve. 2.

Trouver $x \in E$ telle que $x = Tx$ revient à trouver $x \in E$ tel que $d(x, Tx) = 0$

Soit $A = \{d(x, Tx), x \in E\} \subset \mathbb{R}_+$, A est minoré par 0 donc A admet une borne inférieure.

Soit $a = \inf\{d(x, Tx); x \in E\}$. vérifiant que $a = 0$.

On a $a \geq 0$ et Soit $\epsilon > 0$. Pour $\frac{1-k}{k} \cdot \epsilon > 0$, $\exists x_\epsilon \in M$ tel que;

$$d(x_\epsilon, Tx_\epsilon) \leq a + \epsilon \cdot \frac{1-k}{k},$$

Alors

$$a \leq d(Tx, T^2x) \leq kd(x, Tx) \leq k(a + \epsilon \cdot \frac{1-k}{k})$$

1.2. PRINCIPE DE LA CONTRACTION DE BANACH

ce qui implique que $0 \leq a < \epsilon$ c-à-d $a = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \{x \in E; d(x, Tx) \leq \frac{1}{n}\}$. On a

◇ $\forall n \in \mathbb{N}^*, M_n \neq \emptyset$ car:

$$\inf\{d(x, Tx), x \in E\} = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in E \quad / \quad d(x_n, Tx_n) \leq \frac{1}{n}.$$

◇ $\forall n \in \mathbb{N}, M_n$ est un fermé car il est l'image réciproque d'un fermé $[0, \frac{1}{n}]$ par l'application continue $x \rightarrow \varphi(x) = d(x, Tx)$.

◇ $\forall n, M_{n+1} \subset M_n$ car: $x \in M_{n+1} \Rightarrow d(x, Tx) \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow x \in M_n$. De plus

$$x, y \in M_n, \rho(x, y) \leq \rho(x, Tx) + \rho(Tx, Ty) + \rho(Ty, y) \leq \frac{2}{n} + k\rho(x, y).$$

$$\text{diam}M_n = \sup_{x, y \in M_n} d(x, y) \leq \frac{2}{n(1-k)}.$$

Par passage à la limite on aura $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam}M_n = 0$.

Ainsi, la suite $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie le lemme de **Cantor** donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} M_n$ est réduite à un seul point. Soit $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} M_n$.

Il est clair que x est un point fixe de T . En effet, on a:

$\forall n \in \mathbb{N}^* x \in M_n$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, d(x, Tx) \leq \frac{1}{n}$. Par passage à la limite on aura $0 \leq d(x, Tx) = 0$ c-à-d $x = T(x)$. ■

Remarque :

si T admet un point fixe alors toutes les itérées $T^n, n \in \mathbb{N}$ ont toutes un point fixe.

L'hypothèse T contractante n'est pas nécessaire. En fait, on a:

Corollaire. .

Avec les mêmes hypothèses sur l'espace, si T est tel que:

Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ pour le quelle T^p est contractante alors T admet un unique point fixe. (c-à-d il $\exists! x : T^p(x) = x$ alors $\exists y : T(y) = y$).

Preuve. T^p admet un unique point fixe x c-à-d $T^p(x) = x$ ce qui implique $T(T^p(x)) = T^p(T(x)) = T(x)$ donc $T(x)$ est un point fixe de T^p , et par unicité du point fixe de T^p on a $T(x) = x$.

Variation sur le théorème de Banach

En renforçant l'hypothèse sur l'espace on obtient la même conclusion avec des conditions plus faible sur T .

Théorème 1.2.2. .

Soient (E, d) un espace métrique compact et $T : E \rightarrow E$ une application qui vérifie

$$d(Tx, Ty) < d(x, y), \forall x, y \in E, x \neq y$$

alors T admet un unique point fixe dans E et pour tout $x_0 \in E$ la suite $\{T^n x_0\}$ d'itérés converge vers ce point fixe.

Preuve. .

la fonction $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $\varphi(y) = d(y, T(y))$ est continue sur E

puisque E est compact alors φ atteint son minimum sur E . c-à-d:

$$\exists x \in E \quad / \quad d(x, Tx) = \varphi(x) = \min_{y \in E} \varphi(y)$$

Si $x \neq Tx$ alors $\varphi(Tx) = d(Tx, Tx^2) < d(x, Tx)$ contradiction avec le fait que $d(x, Tx)$ est le minimum, donc $x = Tx$.

Soit $x_0 \in E$ et l'ensemble $a_n = d(T^n x_0, x)$ puisque

$$a_{n+1} = d(T^{n+1} x_0, x) = d(T^{n+1} x_0, Tx) < d(T^n x_0, x) = a_n.$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de nombres réels positif et a donc une limite, disons a .

Par la compacité $(T^n x_0)_n$ a une sous suite convergente $(T^{n_k} x_0)_n$. Posons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^{n_k} x_0 = z$$

C'est évident que $d(z, x) = a$. Car

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n x_0, x) = d(\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x_0, x) = d(z, x)$$

Si $a > 0$ donc on obtient

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} d(T^{n_k+1} x_0, x) = d(Tz, x) = d(Tz, Tx) < d(z, x) = a$$

Contradiction. Ainsi $a = 0$

Par conséquent toute sous-suite de $\{T^n x_0\}$ convergente doit converger vers x donc par la compacité, $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x_0 = x$

■

1.2. PRINCIPE DE LA CONTRACTION DE BANACH

Exemples 1.2.1. .

Les exemples suivants montrent que chacune des hypothèses du théorème est réellement nécessaire. Si nous négligeons seulement une alors le point fixe n'existe pas.

1. X n'est pas stable par f : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $X = [0, 1]$.

or X est fermé dans $\mathbb{R}$, et complet car $\mathbb{R}$ est complet. De plus,

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} < 1 \Rightarrow \sup_{x \in X} |f'(x)| < 1 \Rightarrow f$ est contractante. Mais f

n'admet pas de point fixe car $f([0, 1]) = [1, \sqrt{2}]$, i.e. X n'est pas stable par f .

2. f n'est pas contractante: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $X = [0, +\infty[$.

Or $f : X \rightarrow X$, et X est un fermé de $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est complet donc X est complet.

Mais $\sup_{x \in X} |f'(x)| = 1$ donc f n'est pas contractante.

3. X n'est pas complet: $f(x) = \frac{\sin(x)}{2}$ sur $X =]0, \frac{\pi}{4}]$

Or $f(]0, \frac{\pi}{4}[) =]0, \frac{\sqrt{2}}{4}] \subset]0, \frac{\pi}{4}]$, et $\sup_{x \in X} |f'(x)| = \frac{1}{2} < 1$, donc f est contractante. Mais X n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc il n'est pas complet.

1.2.1 Application: théorème de Cauchy Lipschitz

Le théorème suivant est une application du théorème de Banach. En effet, nous verrons qu'une façon de le démontrer est d'appliquer le théorème (1.2.1) avec E un ensemble de fonction et φ une application bien choisie.

Problème de Cauchy: Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue.

On introduit le problème de Cauchy (E) suivant :

Étant donné $(t_0, y_0) \in U$, trouver une solution $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & (t, y) \in U \\ y(t_0) = y_0, & t_0 \in I \end{cases} \quad (E)$$

On note $\|\cdot\|$ une norme quelconque de $\mathbb{R}^n$. Pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_+$, on note $B_f(x_0, r)$ la boule fermé de centre x_0 et de rayon r :

$$B_f(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_0\| \leq r\}.$$

Avant d'énoncer le théorème d'existence et d'unicité de la solution de ce problème on a besoin de définir les notions suivants:

1.2. PRINCIPE DE LA CONTRACTION DE BANACH

Définition 1.2.2. Soient $T > 0$ et $r_0 > 0$. On dit que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité pour (E) si toute solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ du problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $B_f(y_0, r_0)$.

Définition 1.2.3. La fonction f est localement lipschitzienne par rapport à la variable y sur U si pour $(r_0, y_0) \in U$, il existe un voisinage V de (r_0, y_0) dans U et une constante $k = k(V)$ telle que

$$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in V, \quad \text{on ait} \quad \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|.$$

Théorème 1.2.3. (Théorème de Cauchy Lipschitz)

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue et localement Lipschitzienne par rapport à y sur U , alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$ le problème de Cauchy admet une unique solution $y : [T - t_0, T + t_0] \rightarrow U$. De plus, si on pose $\phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que la suite des itérées $\phi^p(z)$ converge uniformément vers la suite exacte.

Preuve. On commence par construire un cylindre de sécurité pour (E).

Soit V un voisinage de (t_0, y_0) sur lequel f est k -Lipschitzienne par rapport à y , et soient $T_0 > 0$ et $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times B_f(y_0, r_0) \subset V$ un cylindre. C_0 est un fermé borné de $\mathbb{R}^{m+1}$ donc compact, et on en déduit alors que f est bornée sur C_0 . Soit $M = \sup_{(t,y) \in C_0} \|f(t, y(t))\|$. Soit

$$C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0) \subset C_0$$

C est un cylindre de même diamètre que C_0 et de demi-longueur $T \leq T_0$.

On va montrer que C est un cylindre de sécurité pour (E).

Soit $y : I \subset [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \rightarrow \mathbb{R}^m$ avec $y(t_0) = y_0$ et $y' = f(t, y) \forall t \in I$. supposons que $J = \{t \in [t_0, t_0 + T[: y(t) \notin B_f(y_0, r_0)\}$ est non vide.

Soit τ le premier instant où $y(t) \notin B_f(y_0, r_0)$, c-à-d $\tau = \inf J$. Alors $\forall t \in [t_0, \tau[$ on a $y(t) \in B_f(y_0, r_0)$.

Par définition de τ on a $\|y(t) - y_0\| \leq r_0$ pour $t \in [t_0, \tau[$, donc par continuité de y on obtient $\|y(\tau) - y_0\| = r_0$. Comme $(t, y(t)) \in C \subset C_0$ pour $t \in [t_0, \tau]$, il vient

$$\|y'(\tau)\| = \|f(\tau, y(\tau))\| \leq M \quad \text{et} \quad r_0 = \|y(\tau) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^{\tau} y'(u) du \right\| \leq M(\tau - t_0)$$

Donc $\tau - t_0 \geq \frac{r_0}{M}$. Par conséquent si $T \leq \frac{r_0}{M}$, aucune solution ne peut s'échapper de C sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

1.2. PRINCIPE DE LA CONTRACTION DE BANACH

Alors C est un cylindre de securite pour $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$.

Dans la suite on travaille avec ce cylindre de securité . On remarque que par construction on a $\sup_C |f| = M$ et f est k -Lipschitzienne par rapport a y sur C

On note $F = C^0([t_0 - T, t_0 + T], B(y_0, r_0))$ muni de la distance $d = \|\cdot\|_\infty$. $\forall y \in F$ on associe $\phi(y)$ definie par :

$$\phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u))du, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T]$$

On montre d'abord l'équivalence suivante : y est solution de (E) $\Leftrightarrow y$ est un point fixe de ϕ .

($\Leftarrow$) Supposons que y est un point fixe de ϕ alors $\phi(y) = y$ c-à-d $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T] : \phi(y)(t) = y(t)$ d'où $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u))du$. Or f est continue sur U donc y est continue sur $[t_0 - T, t_0 + T]$. De plus , y est dérivable sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ et sa dérivée égale $f(t, y(t))$, i.e $y'(t) = f(t, y(t))$.

On a aussi $y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(t, u(t))du = y_0$. Donc y est solution du problème de Cauchy (C).

($\Rightarrow$) Supposons maintenant que y est solution de (E) . On a alors

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{et} \quad y(t_0) = y_0.$$

On peut intégrer y' par rapport à u car $y'(u) = f(u, y(u))$ et $u \rightarrow f(u, y(u))$ est continue sur un segment et donc integrable sur ce même segment . Alors on obtient :

$$\int_{t_0}^t y'(u)du = \int_{t_0}^t f(u, y(u))du = [y(u)]_{u=t_0}^{u=t} = y(t) - y(t_0) = y(t) - y_0.$$

Donc , on a bien $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(t, u(t))du = \phi(y)(t)$ et donc y est un point fixe de ϕ .

On veut appliquer le théorème du point fixe de Banach à ϕ^p (pour p bien choisi).

1. On montre d'abord que ϕ est une application de F dans F . Pour cela on montre que $\phi(y)(t) \in B_f(y_0, r_0) \quad \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. Soit $y \in F$. On remarque que si $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$,

1.3. THÉORÈME DE BROUWER

$\|\phi(y)(t) - y_0\| = \|\int_{t_0}^t f(u, y(u))du\| \leq \int_{t_0}^t \|f(u, y(u))\|du \leq M \int_{t_0}^t du \leq M|t - t_0| \leq M.T \leq r_0$
 Donc $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\phi(y) \in F$ et on a évidemment la stabilité de F par ϕ^p .

2. On montre maintenant que ϕ^p est contractante. Soient $y, z \in F$. On note $y_p = \phi^p(y)$ et $z_p = \phi^p(z)$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$. Par récurrence sur p on montre qu'on a :

$$\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T], \|y_p(t) - z_p(t)\| \leq k^p \frac{|t - t_0|^p}{p!} d(y, z). \quad (HR)$$

- Initialisation : C'est évident dans le cas $p = 0$.

- Généralisation : supposons que pour un certain entier p quelconque on ait (HR). Alors $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$

$$\begin{aligned} \|y_{p+1}(t) - z_{p+1}(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t k \|y_p(u) - z_p(u)\| du \right| \leq \left| \int_{t_0}^t k \cdot k^p \frac{|u - t_0|^p}{p!} d(y, z) du \right| \\ &\quad (\text{par (HR)}) \\ &\leq \frac{k^{p+1}}{p!} d(y, z) \int_{t_0}^t |u - t_0|^p du \leq \frac{k^{p+1}}{p!} d(y, z) \left[\frac{|u - t_0|^{p+1}}{(p+1)!} \right]_{u=t_0}^{u=t} = k^{p+1} \frac{|t - t_0|^{p+1}}{(p+1)!} d(y, z) \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

Comme $|t - t_0| \leq T$, on a $d(y_p(t), z_p(t)) \leq k^p \frac{T^p}{p!} d(y, z)$, donc ϕ^p est lipschitzienne de rapport $k^p \frac{T^p}{p!}$. Et il existe un $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $k^p \frac{T^p}{p!} < 1$ (car $\lim_{p \rightarrow +\infty} k^p \frac{T^p}{p!} = 0$). Donc ϕ^p est contractante, alors $\forall q \geq p$, ϕ^q est contractante.

3. Comme F est un espace métrique complet (voir annexe), on déduit du théorème de Banach (corollaire du théorème (1.2.1)). que ϕ admet un unique point fixe y . Finalement y est l'unique solution de (E).

1.3 Théorème de Brouwer

Théorème 1.3.1. Soit K une partie non vide, compact et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \rightarrow K$ une fonction continue. Il existe $x \in K$ tel que $f(x) = x$.

Ce théorème donne l'existence d'un point fixe (mais pas nécessairement l'unicité) pour une fonction continue sur un convexe fermé borné de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne.

Remarque. Les parties convexes et compactes de $\mathbb{R}$ sont les segments. ce théorème prend donc dans le cas $n = 1$ la forme particulière suivante:

Théorème 1.3.2. .

Si $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ est continue, alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

1.3. THÉORÈME DE BROUWER

Preuve. ;

Si f est continue de $[a, b]$ dans lui-même, la fonction $g : x \rightarrow f(x) - x$ est continue prend en a la valeur $f(a) - a \geq 0$ et en b la valeur $f(b) - b \leq 0$. Alors par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule en un point x_0 , qui est un point fixe de f .

La généralisation de ce théorème (cas de $n \geq 2$) dont la preuve est loin d'être aussi simple est dû au mathématicien Brouwer.

Dans ce paragraphe, on considère $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|$. On note B^n (respectivement S^{n-1}) la boule unité fermée (respectivement la sphère unité) de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$:

$$B^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \leq 1\},$$
$$S^{n-1} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

Théorème 1.3.3. *(théorème de Brouwer)*

Toute application continue $T : B^n \rightarrow B^n$ admet un point fixe.

Ce théorème prend des formes différentes et donc a plusieurs preuves faisant toutes appel à la notion de rétracte. Nous allons présenter celle qui fait appeler au théorème connu sous le nom de "la boule de billard chevelue".

Définition 1.3.1. *Si $D \subset E \subset \mathbb{R}^n$, une rétraction de E sur D est une application continue $R : E \rightarrow D$ telle que $R(x) = x$ pour tous $x \in D$. Si une telle rétraction existe, D est appelé un rétracte de E .*

Proposition 1.3.1. .

Si D est un rétracte de E et si E a la propriété du point fixe (c-à-dire toute application continue de E dans E admet un point fixe) alors D aussi a la propriété du point fixe (c-à-d toute application continue de D dans D admet un point fixe).

Borsuk a prouvé en 1931 les résultats suivants:

Théorème 1.3.4. S^{n-1} n'est pas un rétracte de B^n

Dans le cas de dimension $n = 1$ le théorème dit:

La frontière d'un disque n'est pas un rétracte du disque.

En terme imagés, on ne peut pas ramener la peau d'un tambour sur son

1.3. THÉORÈME DE BROUWER

cadre sans la déchirer.

De point de vue de son contenu topologique, le théorème de non-retraction de Borsuk est équivalent au théorème du point fixe de Brouwer. On va montrer la proposition suivante qui donne cette l'équivalence.

Proposition 1.3.2. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i) *Toute application continue $T : B^n \rightarrow B^n$ admet un point fixe.*
- (ii) *S^{n-1} n'est pas un retracte de B^n .*

Preuve. .

- (i) $\Rightarrow$ (ii) *S'il existe une retraction $R : B_f(0, 1) \rightarrow S(0, 1)$ alors $-R : B_f(0, 1) \rightarrow S(0, 1)$ n'a pas de point fixe . En effet S'il existe $x \in B_f(0, 1)$ tel que $(-R)(x) = x$. Donc $-x \in S(0, 1) \Rightarrow x \in S(0, 1)$ donc $R(x) = x$. contradiction ($x = R(x) = -x$)*
- (ii) $\Rightarrow$ (i) *Si $T : B_f(0, 1) \rightarrow B_f(0, 1)$ est continue et n'a pas de point fixe, alors*

$$R : B_f(0, 1) \rightarrow S(0, 1)$$

$$x \rightarrow x + t_x(x - T(x)).$$

Où t_x est le seul $t > 0$ tel que $\|x + t_x(x - T(x))\|^2 = 1$
ce qui est équivalent à $\|x\|^2 + 2t_x\langle x, x - T(x) \rangle + t_x^2\|x - Tx\|^2 = 1$ ce qui est équivalent à $t^2\|x - Tx\|^2 + 2t\langle x, x - T(x) \rangle + \|x\|^2 - 1 = 0$, on trouve

$$t_x = \frac{-\langle x, x - Tx \rangle + \sqrt{\langle x, x - Tx \rangle^2 + \|x - Tx\|^2(1 - \|x\|^2)}}{\|x - Tx\|^2}$$

donc t_x est bien définie et R est continue.

De plus, si $x \in S(0, 1)$ c-à-d $\|x\| = 1$, on a $t_x = \frac{-\langle x, x - Tx \rangle + |\langle x, x - Tx \rangle|}{\|x - Tx\|^2}$

Or $\langle x, x - Tx \rangle = \|x\|^2 - \langle x, Tx \rangle \geq 1 - \|x\| \cdot \|Tx\| \geq 0 \Rightarrow t_x = 0$.

Donc $\forall x \in S(0, 1)$, $R(x) = x$ c-à-d R est un retracte.

Dans la suite on va montré le théorème (1.3.4) dans le cas de n pair. Avant tout, on est amené à définir la notion suivante

Définition 1.3.2. *On appelle **champ de vecteurs** sur la sphère S_{n-1} toute fonction continue $V : S_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que, pour tout x , $V(x)$ soit tangent en x à S_{n-1} , c'est à-dire orthogonal a x .*

On admit le resultat suivant:

1.3. THÉORÈME DE BROUWER

Théorème 1.3.5. (Théorème de la boule de billard chevelue ou Hary ball theorem).

Sur la sphère S_{2n} tout champ de vecteurs s'annule en au moins un point.

Ce théorème est, entre autre, démontré et publié par John Milnor dans le Mathematical Monthly of the Mathematical Association of America, Vol. 85, No. 7

Lemme 1.3.1. *S'il existe une retraction de B_{2n} sur S_{2n-1} , il existe un champ de vecteurs partout non nul sur S_{2n} .*

Preuve. *On suppose que ρ est la retraction de B_{2n} sur S_{2n-1} et on note*

$$\pi : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$((x_1, x_2, \dots, x_{2n+1})) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{2n})$$

qui envoie S_{2n} sur B_{2n} . il existe un champ de vecteurs $V : S_{2n-1} \rightarrow S_{2n-1}$

(partout non nul). En effet, si on pose $V(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{2n}, -x_{2n-1})$

On a V est continue, $\|V(x)\|^2 = \|x\|^2 = 1$ et $\langle V(x), x \rangle = 0$

La fonction $f : y \rightarrow V \circ \rho \circ \pi(y)$ est alors continue sur S_{2n} a valeurs dans $S_{2n-1} \subset S_{2n}$. Si, pour un $y \in S_{2n}$, $f(y) = \pm y$, alors $y \in S_{2n-1}$ donc $\pi(y) = y$. et $\rho \circ \pi(y) = \rho(y) = y$. d'où $f(y) = V(y) = \pm y$. Ce qui contredit le fait que $\langle V(y), y \rangle = 0$, et on en déduit alors que $\forall y \in S_{2n}$, $f(y) \notin \{y, -y\}$. f étant une fonction continue de S_{2n} dans S_{2n} , la fonction V' définie par

$$V'(y) = f(y) - \langle f(y), y \rangle \cdot y$$

est continue et vérifie, $\forall y \in S_{2n}$,

$$\langle V'(y), y \rangle = \langle f(y), y \rangle - \langle f(y), y \rangle \|y\|^2 = 0$$

Donc V' est bien un champ de vecteurs sur S_{2n} . Et il est partout non nul car si on avait $V'(x) = 0$, $f(x)$ colinéaire a x et appartiendrait a S_{2n} , i.e $f(x) = \pm x$, ce qui est impossible.

On deduit du théorème (1.3.5) qu'il n'existe pas de retraction sur S_{2n} ce qui achève la preuve de théorème de Brouwer en dimension n pair. Maintenant on va le montré pour tout $n \in \mathbb{N}^$. Pour cela il suffit de montrer que:*

Si B_{n+1} a la propriété du point fixe alors B_n l'a aussi.

Soit la fonction $f : B_n \rightarrow B_n$ continue et π la projection définie par

1.3. THÉORÈME DE BROUWER

$\pi : (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n)$. On a alors $\pi(B_{n+1}) = B_n$, et de plus $f \circ \pi$ est continue de B_{n+1} dans $B_n \subset B_{n+1}$.

Donc, il existe $y \in B_{n+1}$ tel que $(f \circ \pi)(y) = y$. Alors $y \in B_n$ donc $\pi(y) = y$. On en déduit que y est un point fixe de f sur B_n .

Preuve du théorème (1.3.1):

K est un convexe compact non vide donc il est fermé borné de $\mathbb{R}^n$:

$$\exists r > 0 \text{ tq } K \subset B_f(0, r).$$

Fait(1):

Toute application continue $f : B_f(0, r) \rightarrow B_f(0, r)$ admet un point fixe.

Preuve. Il est clair que B^n est homéomorphe à $B_f(0, r)$. soit $h : B^n \rightarrow B_f(0, r)$ l'homéomorphisme et h^{-1} sa réciproque.

Puisque l'application $h^{-1} \circ f \circ h : B^n \rightarrow B^n$ est continue, elle admet un point fixe c-à-d $\exists x \in B^n$ tel que: $(h^{-1} \circ f \circ h)(x) = x$. Ce qui implique que $\Rightarrow (f \circ h)(x) = h(x)$. D'où $h(x)$ est un point fixe de f .

Fait (2): K est un retracte de B^n .

Preuve. Comme K est un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ l'application de projection $P_K : B_f \rightarrow K$ est une retraction.

La conclusion du théorème (1.3.1) s'ensuit du Fait (1) et Fait (2) et de la proposition (1.3.1).

1.3.1 Des exemples d'applications du théorème de Brouwer

Définition 1.3.3. (Simplexe). L'ensemble

$$S^r = \{x_1, x_2, \dots, x_r : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_r \geq 0, \sum_{k=1}^r x_k = 1\}$$

est appelé simplexe de dimension $r - 1$.

(1) Une chaîne de Markov

Considérons une matrice A de r lignes et r colonnes, dans laquelle l'élément a_{ij} donne la probabilité qu'un système possède de passer de l'état j à l'état i entre les instants t et $t + 1$ (une transition).

Par définition, $\sum_{i=1}^r a_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, r$. Si le vecteur $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{rt})$ représente les probabilités que le système a d'être dans chacun des r états

1.4. THÉORÈME DE SCHAUDER

à l'instant t (et que dès lors $x_t \in S^r$), alors l'état du système à l'instant $t+1$ est décrit par les équations $x_{t+1} = Ax_t$. Il est aisé de voir que le vecteur x_{t+1} appartient aussi à S^r . La fonction continue Ax applique des points de S^r dans S^r et possède par conséquent un point fixe x^* tel que $x^* = Ax^*$. En ce point fixe, les probabilités $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*)$ ne se modifient plus lors des transitions suivantes.

(2) Un jeu non coopératif.

Considérons une situation dans laquelle r agents repérés par l'indice $j = 1, 2, \dots, r$ (les joueurs) interagissent sur un marché.

Chacun d'eux choisit dans son ensemble de stratégies $Y_j \subset R$ (par exemple l'ensemble de ses possibilités de production) une action y_j (sa production) de manière à maximiser son profit. Le profit de l'agent j , $\prod_j(y_j, y_{-j})$ dépend bien entendu de sa propre action y_j , mais aussi des actions

$y_{-j} = (y_1, y_2, \dots, y_j, y_{j+1}, \dots, y_r)$ prises par ses concurrents. Si le choix de j est unique pour chaque y_{-j} , il est donné par la fonction (appelée fonction de réaction de j), $g_j(y_{-j}) = \operatorname{argmax}_{y_j \in Y_j} \prod_j(y_j, y_{-j})$, qui prend nécessairement ses valeurs dans Y_j . Un équilibre de Nash de ce jeu est un vecteur

$y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_j^*, \dots, y_r^*)$, tel que pour chaque producteur j

$y_j^* = \operatorname{argmax} \prod_j(y_j, y_{-j}^*)$.

Un tel vecteur, s'il existe, doit donc être solution du système de r équations.

Définissons la fonction $g(y) = (g_1(y_{-1}), g_2(y_{-2}), \dots, g_j(y_{-j}), \dots, g_r(y_{-r}))$, qui applique des points de $Y = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_j \times \dots \times Y_r$ dans Y . Si Y est non vide, compact et convexe (ce qui est assuré si chacun des ensembles de production Y_j est non vide, compact et convexe) et que la fonction $g(y)$ est continue (ce qui est le cas si $\prod_j(y_j, y_{-j})$ est une fonction continue et strictement (quasi)concave), le théorème de Brouwer implique que $g(y)$ possède un point fixe y^* tel que $y^* = g(y^*)$; ce point fixe est bien une équilibre de Nash. Voir par exemple Friedman (1986) pour les détails.

1.4 Théorème de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Théorème 1.4.1. *Soient E un espace de Banach et $K \subset E$ convexe et compact. Alors toute application continue $f : K \rightarrow K$ possède un point fixe.*

Preuve. *Soit $f : K \rightarrow K$ une application continue.*

1.4. THÉORÈME DE SCHAUDER

Comme K est compact, f est uniformément continue; donc, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in K$, on ait $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$, dès que $\|x - y\| \leq \delta$. De plus,

il existe un ensemble fini des points $\{x_1, \dots, x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_i recouvrent K ; i.e $K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \delta)$

Si on désigne $L := \text{Vect}(f(x_j))_{1 \leq j \leq p}$, alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie.

Pour $1 \leq j \leq p$, on définit la fonction continue $\psi_j : E \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinon} \end{cases} .$$

et on voit que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle dehors.

On a donc, pour tout $x \in K$, $\sum_{j=1}^p \psi_j(x) > 0$, et donc on peut définir sur K

les fonctions continues positives φ_j par $\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^p \psi_k(x)}$

Pour lesquelles on a $\sum_{j=1}^p \varphi_j(x) = 1$, pour tout $x \in K$.

On pose alors, pour $x \in K$, $g(x) = \sum_{j=1}^p \varphi_j(x)f(x_j)$.

g est continue (car elle est la somme des fonctions continues), et prend ces valeurs dans K^* (car $g(x)$ est un barycentre des $f(x_j)$).

Donc, si on prend la restriction $g|_{K^*} : K^* \rightarrow K^*$, par le théorème (1.3.1), g possède un point fixe $y \in K^*$. De plus,

$$f(y) - y = f(y) - g(y) = \sum_{j=1}^p \varphi_j(y)f(y) - \sum_{j=1}^p \varphi_j(y)f(x_j) = \sum_{j=1}^p \varphi_j(y)(f(y) - f(x_j))$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\|y - x_j\| < \delta$ et donc

$\|f(y) - f(x_j)\| < \varepsilon$. Donc, on a, pour tout j , $\|\varphi_j(y)(f(y) - f(x_j))\| \leq \varepsilon \varphi_j(y)$, et donc

$$\|f(y) - y\| \leq \sum_{j=1}^p \|\varphi_j(y)f(y) - f(x_j)\| \leq \sum_{j=1}^p \varepsilon \varphi_j(y) = \varepsilon$$

Donc, pour tout entier m , on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que $\|f(y^m) - y_m\| < 2^{-m}$. Et puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous-suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \in K$.

Alors f étant continue, la suite $(f(y_{m_k}))$ converge vers $f(y^*)$, et on conclut que $f(y^*) = y^*$, i.e. y^* est un point fixe de f sur K .

1.4. THÉORÈME DE SCHAUDER

1.4.1 Un exemple d'application du théorème de Schauder

On prend le problème de Cauchy pour l'équation $y' = F(t, y(t))$, mais ici on ne sait pas si F est lipschitzienne

Le théorème de Schauder nous donnera l'existence d'une solution, mais pas nécessairement l'unicité qu'on avait dans le théorème de Cauchy lipschitz.

Théorème 1.4.2. (Cauchy -Arzela). Soient:

- E un espace normé de dimension finie,
- U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$,
- F une fonction continue de U dans E , et
- (t_0, x_0) un point de U .

Alors l'équation différentielle $x' = F(t, x)$ a une solution au voisinage de (t_0, x_0) . (i-e) Il existe un nombre $\rho > 0$ et une fonction $f : [t_0 - \rho; t_0 + \rho] \rightarrow E$ de classe C^1 avec $f(t_0) = x_0$. Telle que pour tout $t \in [t_0 - \rho; t_0 + \rho]$

1- $(t, f(t)) \in U$

2- $f'(t) = F(t, f(t))$.

Preuve. Soit $M > \|F(t_0, x_0)\|$, quitte à remplacer U par l'ensemble ouvert $\{(t, x) \in U : \|F(t, x)\| < M\}$, on peut supposer que F est majoré en norme par M sur U . Il existe donc $r > 0$ et $h > 0$ tels que $[t_0 - h, t_0 + h] \times B_f(x_0, r) \subset U$ et on choisit $\rho = \min(h, \frac{r}{M}) > 0$.

On considère l'ensemble K des fonctions M -lipschitzienne de l'intervalle $J = [t_0 - \rho, t_0 + \rho]$ dans E qui valent x_0 en t_0 , que l'on munit de la norme uniforme. Si f et g sont dans K et $s \in [0, 1]$ alors $sf + (1 - s)g \in K$, donc K est convexe. Si $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans K pour la norme uniforme, alors d'après le théorème (2.4.3), il existe une fonction continue $f : J \rightarrow E$ telle que f_i converge uniformément vers f .

On a alors $f(t_0) = \lim_{i \rightarrow +\infty} f_i(t_0) = x_0$ et

$$\forall t, t' \in J, \|f(t) - f(t')\| = \lim_{i \rightarrow +\infty} \|f_i(t) - f_i(t')\| \leq M|t - t'|$$

Et donc $f \in K$.

On en déduit que K est fermé pour la norme uniforme dans $C^0(J, E)$.

De plus, pour tous $t \in J$ et tout $f \in K$, on a

$$\|f(t) - x_0\| = \|f(t) - f(t_0)\| \leq M|t - t_0| \leq M\rho \leq r$$

Ce qui montre que $K(t) = \{f(t) : f \in K\}$ est contenu dans la boule $B_f(x_0, r)$, et donc $K(t)$ est relativement compact. Et puisque K est uniformément équicontinu, il résulte de théorème (2.4.4) que K est compact.

1.4. THÉORÈME DE SCHAUDER

On peut alors définir une application $\phi : K \rightarrow C^1(J, E)$, en posant

$$\phi(f)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, f(s)) ds.$$

En effet, si $f \in K$, alors $f(s) \in B_f(x_0, r)$ pour tout $s \in J$, ce qui montre que la fonction $s \rightarrow F(s, f(s))$ est bien définie et continue sur J à valeurs dans E , et possède une primitive $\phi(f)$ de classe C^1 , valant x_0 en t_0 .

Puisque la fonction $g := \phi(f)$ vérifie $g'(t) = F(t, f(t))$, on a que $\|g'(t)\| \leq M$, c'est-à-dire que g est M -lipschitzienne sur J . De plus, $g(t_0) = x_0$. Donc $\phi(K) \subset K$. Enfin, comme F est uniformément continue sur le compact $J \times B_f(x_0, r)$, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout (s, x) et (s', x') appartiennent à $J \times B_f(x_0, r)$, on ait

$$\max(|s - s'|, \|x - x'\|) < \delta \Rightarrow \|F(s, x) - F(s', x')\| < \frac{\epsilon}{\rho}.$$

Alors, si f et f_1 appartiennent à K et si $\|f - f_1\| < \delta$, on a $\forall s \in J$, $\|F(s, f(s)) - F(s, f_1(s))\| < \frac{\epsilon}{\rho}$. Donc,

$$\begin{aligned} \|\phi(f)(t) - \phi(f_1)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t F(s, f(s)) - F(s, f_1(s)) ds \right\| \\ &\leq |t - t_0| \sup_{s \in J} \|F(s, f(s)) - F(s, f_1(s))\| \leq \rho \frac{\epsilon}{\rho} = \epsilon. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in J$. Ceci montre que $\|\phi(f) - \phi(f_1)\| \leq \epsilon$, i.e. $\phi : K \rightarrow K$ est une application continue. Donc, d'après le théorème (1.4.1), il existe un point fixe $f \in K$ de ϕ , c'est à dire que f est une solution au problème de Cauchy.

Chapter 2

Point Fixe des applications non-expansive dans les espaces de Banach

Introduction

Soit M un espace metrique muni de la metrique d . L'application $T : M \rightarrow M$ est appelé nonexpansive si sa constante lipschitzienne k ne dépasse pas 1.

Ainsi cette classe d'applications contient les applications contractante.

En outre, elle contient toutes les isométries (y compris l'identité).

Explicitement T est non -expansive si:

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y); \quad \text{pour tout } x, y \in M$$

La théorie pour les applications non-expansive est fondamentalement différente de celle des applications contractante: dans le sens que, même si l'application non-expansive a un point fixe, la procédure itérative décrite dans le chapitre (1) ne parvient généralement pas a converger.

Voici quelques-unes des questions les plus élémentaires posées lors de l'étude des applications non-expansive:

- a) Quelles hypothèses supplémentaires doivent etre ajoutées concernant les structures de l'espace M et ou des restrictions sur T pour asurer l'existence d'au moins un point fixe ?
- b) Quelle est la structure de l'ensemble de tous les points fixes d'un T donné?
- c) Que peut-on dire du comportement des itérations de T ?

Nous limiterons principalement notre attention a la question (a).

2.1 Rappels des Notions d'analyse fonctionnelle

Définition 2.1.1.

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance induite par la norme ($d = \|\cdot\|$).

Exemple 1. Les espaces suivants sont des espaces de Banach:

$l^\infty(\mathbb{N}) = \{(x_n) \subset \mathbb{R} / \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty\} = \{\text{suites réelles bornées}\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty = \sup |x_n|$.

Le sous-espace fermé de $l^\infty(\mathbb{N})$: $c_0(\mathbb{N}) = \{(x_n) \subset \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$

$l^p(\mathbb{N}) = \{(x_n) \subset \mathbb{R}, \sum |x_n|^p < +\infty\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_p = (\sum |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$

$C(K, \mathbb{R}) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continue}\}$ l'ensemble des fonctions continues muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t \in K} |f(t)|$.

Dans toute la suite il est question d'espaces de Banach réels. Pour un espace X , on notera: B_X La boule unite fermé.

2.1.1 Dualité-Topologie faible

Définition 2.1.2. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach.

Le dual de X noté X^* est l'espace des formes linéaires continues sur X muni de la norme duale:

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{x \in B_X} |f(x)|.$$

Le bidual de X noté X^{**} est le dual de X^* : l'espace des formes linéaires continues sur X^* muni de la norme bidual:

$$\|f\|_{X^{**}} = \sup_{x \in B_{X^*}} |f(x)|.$$

$(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$, et $(X^{**}, \|\cdot\|_{X^{**}})$ sont des espaces de Banach.

Définition 2.1.3. Sur l'espace de Banach X est définie, en plus de la topologie forte (associée à la norme), la topologie faible notée $\sigma(X, X^*)$ (notée aussi w) qui est la topologie la moins fine sur X rendant continues toutes les formes linéaires sur X .

Remarque: Tout ouvert (resp. fermé) pour la topologie faible est ouvert (resp. fermé) pour la topologie de la norme. L'inverse n'est pas vrai.

Cependant, dans le cas des sous-ensembles convexes, on a le résultat suivant.

Proposition 2.1.1. *Soit C un convexe dans un espace de Banach X . Alors C est faiblement fermé si et seulement s'il est fermé pour la norme.*

Définition 2.1.4. *(convergence faible)*
 Soit X un espace de Banach, $(x_n)_n$ une suite d'éléments de X , $x \in X$. On dit que (x_n) converge faiblement vers x et on note $x_n \rightharpoonup x$, quand $n \rightarrow \infty$ si $\forall \varphi \in X^*$, $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$ quand $n \rightarrow \infty$.

Théorème 2.1.1. *(compacité faible)*
 Soit X un espace de Banach et $K \subset X$ faiblement compact. Alors de toute suite de K on peut extraire une sous-suite faiblement convergente vers un élément de K .

Définition 2.1.5. *On appelle topologie préfaible ou topologie faible* sur X^* la topologie la moins fine telle que toutes les applications:
 $j_x : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $j_x(f) = f(x)$, $x \in X$ soient continues.*

2.1.2 isomorphisme

Théorème 2.1.2. *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces de Banach. $f : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ une application linéaire continue. si f est bijective alors sa réciproque f^{-1} est aussi continue.*

On dit alors que f est un isomorphisme autrement dit une application linéaire et bijective f de $(X, \|\cdot\|_X)$ dans $(Y, \|\cdot\|_Y)$ est un isomorphisme si elle vérifie

$$\exists \alpha, \beta > 0 \text{ tq } \beta \|x\|_X \leq \|f(x)\|_Y \leq \alpha \|x\|_X, \forall x \in X$$

Définition 2.1.6. *Une isométrie linéaire $f : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ est une application linéaire et bijective telle que*

$$\|f(x)\| = \|x\|, \forall x \in X.$$

On dira que X contient une copie isométrique de Y si X contient un sous-espace fermé qui est linéairement isométrique à Y .

Dans la suite on dira isométrie au lieu d'isométrie linéaire.

2.1.3 Espaces réflexifs

Soit X un espace de Banach. On voit facilement que X s'identifie à un sous-espace vectoriel de X^{**} grâce à l'injection:

$$j_x : f \in X^* \rightarrow j_x(f) = f(x) \in \mathbb{R}.$$

qui est une isométrie.

On généralise l'application j n'est pas surjective.

Définition 2.1.7. On dit que X est réflexif s'il est égale (isométrique à X^{**}) (i.e) si l'application j définie précédemment est surjective.

Définition 2.1.8. (stricte convexité)

On dit que l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$ est strictement convexe s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes:

- 1- $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, x \neq y$ et $0 < t < 1$ implique $\|(1-t)x + ty\| < 1$,
- 2- $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ implique l'existence de scalaire $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ tels que $\alpha + \beta > 0$ et $\alpha x = \beta y$.

On dit qu'un espace de Banach X est uniformément convexe si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que

$$(x, y \in X, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \text{ et } \|x - y\| > \epsilon) \Rightarrow (\|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta)$$

Exemple 2. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, l^p, L^p$ ($1 < p < +\infty$) sont des espaces réflexifs

Théorème 2.1.3. (Milman-pettis)

Toute espace de Banach uniformément convexe est réflexif.

Théorème 2.1.4. (Kakutani)

X est réflexif si et seulement si

$$B_X = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$$

est compact pour $\sigma(X, X^*)$.

Corollaire. .

Si X est réflexif alors tout sous-ensemble convexe fermé, borné de X est faiblement compact.

2.2 Applications non-Expansives-Convexes minimaux

Définition 2.2.1. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, soit C un sous-ensemble non vide de X . On appellera application non-expansive sur C toute application $T : C \rightarrow C$ vérifiant:

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C \quad (1)$$

Remarque

Si T est non-expansive alors toutes les itérées T^n de $T, n = 0, 1, 2, \dots$ (avec $T^0 = I$) sont également non-expansive.

Les applications non-expansives n'ont pas toujours de point fixe.

Exemple 3. .

1– Si a est un élément non nul, l'application $x \rightarrow x + a$ est non-expansive et elle n'admet pas de point fixe.

2– Les contractions, l'identité et les isométries sont évidemment non expansives.

3– Soit $C[0,1]$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelle muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Soit $M = \{x \in C[0,1] : 0 = x(0) \leq x(t) \leq x(1) = 1\}$.

l'application $T : M \rightarrow M$ définie par $T(x)(t) = tx(t)$. $x \in M, t \in [0,1]$ est non-expansive car $\forall x, y \in M, t \in [0,1]$,

$\|T(x)(t) - T(y)(t)\| = \|tx(t) - ty(t)\| = t\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t) - y(t)\| \Rightarrow \sup_{t \in [0,1]} \|Tx(t) - Ty(t)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|x(t) - y(t)\|$ (=i.e $\|Tx - Ty\|_\infty \leq \|x - y\|_\infty$. et elle n'a pas de point fixe car $T(x) = x$ est équivalent à $x(t) = 0, \forall t \in [0,1]$, mais $x \equiv 0 \notin M$.

Définition 2.2.2. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, et C un ensemble non vide de X .

- On dira que C a la propriété du point fixe (en abrégé. *ppf*) si toute application non-expansive T de C dans C admet un point fixe.
- On dira que l'espace de Banach X a la propriété du point fixe(en abrégé. *ppf*) si tout convexe fermé borné $C \neq \emptyset$ de X a la *ppf*.
- On dira que X a la propriété faible du point fixe(en abrégé. *pfpf*) si tous les convexes faiblement compacts C de X ont la *pfpf*.

Remarque 1

Si X a la *ppf* alors X a *pfpf* et que *ppf* et *pfpf* coïncident pour un espace de Banach réflexif .

Remarque 2

– Si un espace de Banach X à la *ppf* (resp. *pfpf*) alors tout sous-ensemble fermé de X ont la *ppf* (resp. *pfpf*).

– *ppf* est conservé par les isométries mais pas pour les isomorphismes en général.

Exemple 4. L'espace $c_0(\mathbb{N})$ muni de la norme usuelle n'a pas la *ppf*, ainsi que tout les espaces de Banach contenant une copie isométrique de $c_0(\mathbb{N})$ n'ont pas la *ppf*, mais il à la *pfpf*. [voir maurey]

Dans la suite On va s'intéressé à la *pfpf*. On présente quelques propriétés géométriques qui implique la *pfpf*. On commence a présenté quelques résultats classiques

On commence par le résultat suivant:

2.2. APPLICATIONS NON-EXPANSIVES-CONVEXES MINIMAUX

Lemme 2.2.1. *Si K est un convexe non vide fermé borné de X et $T : K \rightarrow K$ une application nonexpansive alors il existe une suite $(x_n) \subset K$ tel que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0.$$

Preuve. *Pour z fixé et $n \in \mathbb{N}^*$, considérons l'application $T_n : K \rightarrow K$ définie par*

$$T_n x = \frac{1}{n+1}z + \frac{n}{n+1}Tx$$

Donc

$$Tx = \frac{n+1}{n}(T_n x - \frac{1}{n+1}z) = \frac{n+1}{n}T_n x - \frac{1}{n}z$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, T_n est une contraction car

$$\|T_n x - T_n y\| \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)\|Tx - Ty\| \leq \frac{n}{n+1}\|x - y\|; x, y \in K$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^$, $\exists x_n \in K$ telle que $T_n(x_n) = x_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|T_n x_n - x_n\| = 0$
La suite (x_n) ainsi définie est telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$. en effet:*

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Tx_n - x_n\| &= \left\| \frac{n+1}{n}T_n x_n - \frac{1}{n}z - x_n \right\| = \left\| \frac{n+1}{n}T_n x_n - \frac{n+1}{n}x_n + \frac{n+1}{n}x_n - \frac{1}{n}z - x_n \right\| \\ &= \left\| \frac{n+1}{n}(T_n x_n - x_n) + \frac{1}{n}x_n - \frac{1}{n}z \right\| \leq \frac{n+1}{n}\|T_n x_n - x_n\| + \frac{1}{n}\|x_n - z\| \leq \frac{1}{n} \text{diam}K \end{aligned}$$

la conclusion s'ensuit par passage à la limite.

Remarque

Le lemme précédent montre, sous les mêmes hypothèses, le fait suivant:

$$\inf\{\|x - Tx\|; x \in K\} = 0$$

La question, maintenant, de savoir si T a un point fixe équivaut à la question si la fonction $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \|x - Tx\|$ atteint sa valeur minimal zéro .

La reponse est oui ,si K est compact . D'où le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *Soit K un sous-espace convexe non vide et compact d'un espace de Banach , alors toute application non-expansive de K dans K a un point fixe .*

Ce resultat qui est un cas particulier du théorème de Schauder n'est plus vrai si K n'est pas compact.

2.2. APPLICATIONS NON-EXPANSIVES-CONVEXES MINIMAUX

Exemple 5. Soit $C[0, 1]$ l'espace des fonctions à valeur réelle continue sur $[0, 1]$ avec la norme définie pour $x \in C[0, 1]$ par:

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)|: t \in [0, 1]\}.$$

Soit $M = \{x \in C[0, 1] : 0 = x(0) \leq x(t) \leq x(1) = 1\}$.

M est un convexe fermé borné et il est complet (fermé dans un complet), Mais M n'est pas compact car c'est un ensemble fermé borné dans un espace de dimension infinie.

L'application $T : M \rightarrow M$ définie par $T(x)(t) = tx(t)$, $x \in M$, $t \in [0, 1]$, est non-expansive (voir ex 2) et elle n'admet pas de point fixe car $T(x) = x$ est équivalent à $x(t) = 0, \forall t \in [0, 1]$, mais $x \equiv 0 \notin M$

Avant de donner un autre resultat donnons la definition d'un argument de base utilisé.

Définition 2.2.3. (Ensemble minimal T - invariant)

Un sous-ensemble K_0 non vide convexe et fermé d'un ensemble convexe donné K est dit minimal invariant par l'application $T : K \rightarrow K$, si $T(K_0) \subset K_0$ et si $\forall D \subset K$ invariant par T c-à-d $T(D) \subset D$ tel que $D \subset K_0$, $D = K_0$.

Théorème 2.2.2. Soit K un sous-ensemble convexe, non vide, et faiblement compact d'un espace de Banach. Alors pour toute application $T : K \rightarrow K$, il existe un sous-ensemble de K qui est minimal T - invariant.

Preuve. Considerons la famille $\mathfrak{S}$ de tous les sous-ensembles convexes non vides fermés (donc faiblement compacts) de K qui sont invariants par T , et ordonnée par la relation d'ordre tq pour $K_1, K_2 \in \mathfrak{S}$:

$$K_1 \leq K_2 \Leftrightarrow K_2 \subset K_1$$

Par la compacité faible, toute chaîne d'éléments de $\mathfrak{S}$ a une intersection non vide. Alors par le lemme de Zorn, il existe au moins un ensemble majorant $D \in \mathfrak{S}$ qui est la borne supérieure (un élément maximal) par rapport à la relation $\leq$, et qui est minimal par la relation d'inclusion. Donc qui est le T -minimal invariant.

Lemme 2.2.2. .

Si K un ensemble convexe non vide, fermé et borné et minimal T -invariant alors

$$K = \overline{\text{conv}T(K)}$$

2.3. THÉORÈMES BASIQUES.

Preuve. .

On a K est T -invariant alors $T(K) \subset K$ et donc $\overline{\text{conv}}T(K) \subset K$.

Ce qui implique que

$$T(\overline{\text{conv}}T(K)) \subset T(K) \subset \overline{\text{conv}}T(K).$$

Alors $\overline{\text{conv}}T(K)$ est un convexe fermé T - invariant inclus dans K .

Comme K est minimal T -invariant alors $\overline{\text{conv}}T(K) = K$.

2.3 Théorèmes basiques.

Soit X un espace de Banach. Kirk en 1965 a observé que la présence d'une propriété géométrique appelée "Structure Normale" garantit la *ppf* si X est réflexif .

Le concept de "S.N" a été introduit en 1948 par Brodski et Milman pour etudier les points fixes des isométries .

Pour toute ensembles D, H de X :

- $r_u(D) = \sup\{\|u - v\|; v \in D\}$ ($u \in X$). (rayon de D par rapport a u).
- $r_H(D) = \inf\{r_u(D); u \in H\}$ (rayon de chebyshev)
- $c_H(D) = \{u \in H; r_u(D) = r_H(D)\}$ (centre de chebyshev).

$$\text{On a } r(D) \leq r_u(D) \leq \text{diam}D = \sup_{u \in D} r_u(D).$$

Définition 2.3.1. *Un point u est dit diametral si $r_u(D) = \text{diam}D$*

Si ce n'est pas le cas on dit alors que u est non diamétral .

Définition 2.3.2. *(Structure Normale)(Brodski et Milman)*

Un sous-ensemble K de X est dit avoir une structure normale si chaque sous-ensemble convexe borné S de K avec $\text{diam}(S) > 0$ contient des points non diametral .

A l'aide d'un argument direct Brodski et Milman (1948) ont montré qu'un ensemble convexe faiblement compact K qui a une Structure Normale contient toujours un point fixe par chaque isométrie de K dans K .

Théorème 2.3.1. *Soit K un sous-ensemble convexe non vide , faiblement compact d'un espace de Banach et supposons que K a la S.N alors toute application non-expansive $T : K \rightarrow K$ a un point fixe .*

2.3. THÉORÈMES BASIQUES.

Preuve. *Sans perdre de généralité on peut supposer que le convexe K est un minimal T -invariant, d'après le lemme (2.2.2) on a*

$$\overline{\text{Conv}T}(K) = K$$

Soit $u \in C(K)$ i.e $r_u(K) = r(K)$. Puisque $\|T(u) - T(v)\| \leq \|u - v\| \leq r(K)$ alors pour tous $v \in K, Tv \in B_f(Tu, r(K))$ donc $T(K) \subset B_f(Tu, r(K))$. Par conséquent

$$K = \overline{\text{Conv}T}(K) \subset \overline{\text{Conv}B_f}(Tu, r(K)) = B_f(Tu, r(K)).$$

Montrons que $r_{Tu}(K) = r(K)$. On a

$$r_{Tu}(K) = \sup\|Tu - v\| \leq r(K) = \inf r_u(K) \leq r_{Tu}(K)$$

D'où $r(K) = r_{Tu}(K)$ c-à-d $Tu \in C(K)$. Cela prouve que $C(K)$ est T -invariant, et par minimalité de K , $C(K) = K: \forall u \in K, r_u(K) = r(K)$.

Ce qui implique que l'application $u \rightarrow r_u(K)$ est constante sur K , donc $\forall u \in K, r_u(K) = \text{diam}K$. Ce qui implique que tout les points de K sont diamétraux, ce qui contredit la S.N de K sauf si K est réduit à un seul point x_0 .

Remarque:

Dans la preuve précédente, nous avons observé le fait suivant:

Fait: Si K est un convexe non vide faiblement compact et minimal T -invariant alors chaque point de K est diamétral.

Lemme 2.3.1. (Lemme de Karlovitch) : *Soit K un convexe faiblement compact minimal pour l'application non-expansive T et soit (x_n) une suite quasi-fixe, alors pour tout x de K , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\| = \text{diam}(K)$.*

Preuve. *supposons qu'il existe $\{x_n\} \subseteq K$ pour lequel $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$ mais pour lequel $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - x_n\| = r < \text{diam}(K)$ pour certain $x \in K$. Soit*

$$C = \{z \in K : \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|z - x_n\| \leq r\}$$

Il est facile de voir que C est convexe et fermé. En effet,

Si $\{u_i\} \subseteq C$ et si $\lim_{i \rightarrow +\infty} u_i = u$ alors pour chaque $i = 1, 2, \dots$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u - x_n\| \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u - u_i\| + \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_i - x_n\| \leq \|u - u_i\| + r$$

Donc $u \in C$ alors C est fermé. De plus si $u \in K$,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|Tu - x_n\| \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} [\|Tu - Tx_n\| + \|Tx_n - x_n\|]$$

2.4. PROPRIÉTÉ DU POINT FIXE DANS LES ESPACES A BASE INCONDITIONNELLE

$$\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \|Tu - Tx_n\| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \|u - x_n\| \leq r$$

Donc $Tu \in C$. Cela prouve que C est T -invariant, et on sait que tout sous-ensemble convexe fermé d'un ensemble faiblement compact est lui-même faiblement compact, alors C est faiblement compact et T -invariant et par minimalité de K nous concluons que $C = K$. Supposons que $\text{diam}(K) > 0$. Soit $\epsilon > 0$ tel que $r + \epsilon < \text{diam}(K)$.

$\forall x \in K$, $F_x = B(x, r + \epsilon) \cap K$ est w -compact car c'est un w -fermé dans un w -compact. la famille $\{F_x; x \in K\}$ a la propriété d'intersection finie.

En effet; F_x contient une infinité d'éléments de la suite (x_n) donc tout intersection finie des F_x est non vide. Comme K est w -compact,

$$\bigcap_{x \in K} B(x; r + \epsilon) \cap K \neq \emptyset$$

Mais cela implique $\exists v \in \bigcap_{x \in K} B(x; r + \epsilon) \cap K$, c-à-d

$\exists v \in K, \forall x \in K, v \in B(x, r + \epsilon)$.

Donc $\exists v \in K$ tq $\forall x \in K, \|u - x\| \leq r + \epsilon < \text{diam}(K)$ d'où

$r_v(K) \leq r + \epsilon < \text{diam}(K)$. Contradiction avec le fait que K ne peut avoir aucun point non diamétral.

Karlovitz à utilisé ce lemme pour montrer que la S.N n'est pas nécessaire pour la *ppf*.

2.4 Propriété du point fixe dans les espaces a base inconditionnelle

Des résultats surprenants ont été apportés par Maurey concernant les espaces L_1 et C_0 , il utilisa la technique des ultra-produits pour montrer que les sous-espaces réflexifs de L_1 ont la *ppf*.

S'inspirant de la démonstration de Maurey, Lin réussit à montrer que si un espace de base inconditionnelle dans la constante d'inconditionnalité λ est strictement inférieur à 1, 37, a la *ppf*.

On va cité des définitions dont nous auront besoin pour démontré le théorème de Lin.

2.4.1 Base inconditionnelles

Définition 2.4.1. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et (e_n) une suite d'éléments de X . On dira que la suite (e_n) est une base de Schauder de X si pour tout x

2.4. PROPRIÉTÉ DU POINT FIXE DANS LES ESPACES A BASE INCONDITIONNELLE

dans X il existe une suite unique de scalaire (x_n) telle que: $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, où la convergence a lieu au sens de la norme

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{n=N} x_n e_n \right\| = 0.$$

Si $\{e_n\}_{n \geq 1}$ est une base de X alors les projections $P_N : X \rightarrow X$, définie par:

$$P_N : X \rightarrow X, P_N \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right) = \sum_{n=1}^{n=N} x_n e_n,$$

sont continues de plus $\sup_n \|P_n\| < \infty$

Les projections $\{P_N\}_{N \in \mathbb{N}^*}$ sont appelées projections naturelles associées à la base $\{e_n\}_{n \geq 1}$ et le nombre $c = \sup_N \|P_N\|$ est appelé constante de la base $\{e_n\}_{n \geq 1}$.

La base de Schauder (e_i) est dite inconditionnelle si et seulement si

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n x_n e_n \right\|, \epsilon_n = \pm 1, \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right\| \leq 1 \right\} < +\infty.$$

On note

$$\lambda = \sup_{F \subset \mathbb{N}} \|2P_F - I\|$$

la constante d'inconditionnalité (où F un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$).

Exemple 6. .

La base naturelle $\{e_n\}_{n=1}^{n=\infty}$, $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ est une base 1-inconditionnelle pour chacun des espaces $c_0(\mathbb{N})$ et $l^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$ pour en savoir plus consulter [9].

2.4.2 Filtre Et Ultrafiltre

Définition 2.4.2. Soit X un ensemble fini. Un filtre φ dans X est une famille de sous-ensemble non vides de X satisfaisant :

- a) $A, B \in \varphi \Rightarrow A \cap B \in \varphi$
- b) $A \in \varphi$ et $A \subset B \Rightarrow B \in \varphi$

La famille de tous les Filtres sur X ordonné par inclusion, satisfait le principe selon lequel chacune de ces chaines a l'ordre lineaire a une limite superieure. Par consequent, chaque filtre est contenu dans un filtre maximal. tous filtre dans ce sens s'appelle un Ultrafiltre.

2.4. PROPRIÉTÉ DU POINT FIXE DANS LES ESPACES A BASE INCONDITIONNELLE

Proposition 2.4.1. *Un filtre φ est un Ultrafiltre si et seulement si pour tout $A \in X$ on a $A \in \varphi$ ou $X \setminus A \in \varphi$*

L'utilité du concept d'ultrafiltre dans l'analyse résulte en grand partie de la définition de convergence suivante

Définition 2.4.3. .

Soit S un espace topologique et soit U un ultrafiltre dans l'ensemble X . Soit $x : X \rightarrow S$ et pour chaque $i \in X$, $x(i) = x_i$, alors $\{x_i, i \in X\}$ est dite convergente par rapport à U vers un élément $y \in S$ si pour chaque voisinage V de y , l'ensemble $\{i \in X, x_i \in V\}$ est dans U . Dans ce cas nous écrivons

$$\lim_U x_i = y.$$

Définition 2.4.4. . (D'un Espace de Banach Quotient)

L'espace quotient d'une relation d'équivalence R définie sur un ensemble X est l'ensemble X/R des classes d'équivalences de la relation R .

2.4.3 Ultrapuissances

Soient X un espace de Banach et U un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$. On appelle ultrapuissance de X l'espace $\tilde{X}$ quotient de l'espace

$$l^\infty(X) = \{(x_n) : x_n \in X, \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \|(x_n)\| = \sup_n \|x_n\| < \infty\}$$

par le sous-espace

$$N = \{(x_n) \in l^\infty(X) : \lim_{n \rightarrow U} \|x_n\| = 0\}.$$

Si (x_n) est un représentant de $\tilde{x} \in \tilde{X}$, on a $\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}} = \lim_{n \rightarrow U} \|x_n\|$.

$\tilde{X}$ est un espace de Banach, dit ultrapuissance de X .

$\tilde{X}$ a des propriétés de prolongement qui sont très riches.

Il est clair que X est isométrique à $\tilde{X}$ par l'application $x \rightarrow (x, x, \dots, x)$.

Si (S_n) est une suite de projection sur X telles que $\sup_n \|S_n\| < \infty$ alors

$\tilde{S} = (S_n)$ telle que $\tilde{S}(x_n) = (S_n x_n)$ est une projection sur $\tilde{X}$ et

$$\|\tilde{S}\| \leq \sup \|S_n\|.$$

Argument de Maurey

Soient C un convexe fermé borné de X et $T : C \rightarrow C$ une application non-expansive.

2.4. PROPRIÉTÉ DU POINT FIXE DANS LES ESPACES A BASE INCONDITIONNELLE

On designe par $\tilde{C}$ l'ultrapuissance de C : $\tilde{C} = \{\tilde{x} \in \tilde{X}; \tilde{x} = (x_n), x_n \in C\}$ l'application $\tilde{T} : \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}$ définie par $\tilde{T}(\tilde{x}) = \tilde{T}(x_n) = (T(x_n))$ est une application non-expansive sur $\tilde{C}$.

En outre $\tilde{T}$ admet toujours des points fixes. En effet dire que $\tilde{T}\tilde{x} = \tilde{x}$ équivaut à dire que $\tilde{x}$ est représenté par une suite quasi fixe (x_n) .

Si K est un convexe faiblement compact minimal pour T alors $\tilde{K}$ est un convexe fermé borné et $diam(K) = diam(\tilde{K})$.

P.K.Lin à adapté le lemme de Karlovitch dans le langage des ultrapuissance.

Lemme 2.4.1. (*lemme de Lin*)

Sous les hypothèses précédentes, on a:

1) *Si $(\tilde{x}_n)$ est une suite quasi-fixe pour $\tilde{T}$, alors*

$$\lim_n \|\tilde{x}_n - x\| = diam\tilde{K} = diamK.$$

Où K est un convexe minimal pour T .

2) *Si $\tilde{W}$ est un sous-convexe non vide de $\tilde{K}$, invariant par $\tilde{T}$, alors*

$$\forall x \in K \sup_{\tilde{w}} \|\tilde{w} - x\| = diamK.$$

Après ce rappel des résultats fondamentaux, on est en mesure de démontrer certains nouveaux résultats.

2.4.4 Théorème de Pei-Kee-Lin

Soit X un espace de Banach avec une base λ -inconditionnelle.

Si $\lambda < \frac{\sqrt{33}-3}{2}$ alors X à la *pfpf*. En particulier si X est a base 1-inconditionnelle alors X a la *pfpf*.

Preuve. .

*Supposons que X a une base $\{e_n\}$ λ -inconditionnelle et X n'a pas la *pfpf*. Alors il existe un convexe faiblement compact K qui est minimal pour une application non-expansive T laissant invariant K tel que $diamK > 0$. Dans K , il va exister une suite quasi-fixe (x_n) pour T convergeant faiblement. Sans perdre de généralité on peut suppose les propositions suivantes:*

(a) $diamK = 1$;

(b) $0 \in K$;

(c) $w - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$;

et par le lemme de Karlovitch on a

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 1$;

2.4. PROPRIÉTÉ DU POINT FIXE DANS LES ESPACES A BASE INCONDITIONNELLE

et par passage aux sous-suites nous pouvons en outre supposer

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_{n+1}\| = 1;$$

On designe P_n les projections naturelles sur X associées à $\{e_n\}$ vérifiant:

$$P_n \circ P_m = 0 \quad \text{si } n \neq m, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n x_n\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(I - P_n)(x_n)\| = 0.$$

Les points $\tilde{y} = (x_n)$ et $\tilde{z} = (z_n)$ avec $z_n = x_{n+1}$ sont fixes pour $\tilde{T}$ et $\|\tilde{y} - \tilde{z}\| = 1$. Soient $\tilde{P} = (P_n)$ et $\tilde{Q} = (P_{n+1})$. Alors $\tilde{P}\tilde{y} = \tilde{y}$ et $\tilde{Q}\tilde{z} = \tilde{z}$ et pour tout $x \in K$,

$$\tilde{P}x = \tilde{Q}x = \tilde{P}\tilde{z} = 0 = \tilde{Q}\tilde{y}.$$

Soit

$$\tilde{W} = \{\tilde{w} \in \tilde{K}; \exists x \in K : \|\tilde{w} - x\| \leq \frac{\lambda}{2} \quad \text{et} \quad \max(\|\tilde{w} - \tilde{x}\|, \|\tilde{w} - \tilde{y}\|) \leq \frac{1}{2}\}.$$

Alors $\tilde{W}$ est un convexe non vide, fermé borné et invariant par $\tilde{T}$. Donc $\tilde{W}$ contient une suite quasi-fixe pour $\tilde{T}$. pour faciliter les calculs, on suppose que $\tilde{W}$ contient un point $\tilde{w}$ tq $\|\tilde{w}\| = 1$. Soit $x \in K$ avec $\|\tilde{w} - x\| \leq \frac{\lambda}{2}$ et soit $\tilde{f} \in \tilde{X}^*$ avec $\tilde{f}(\tilde{w}) = 1 = \|\tilde{f}\|$. D'où,

$$1 - \tilde{f}(\tilde{y}) = \tilde{f}(\tilde{w} - \tilde{y}) \leq \|\tilde{w} - \tilde{y}\| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et donc} \quad \tilde{f}(\tilde{y}) \geq \frac{1}{2}.$$

De façon analogue, on obtient les inégalités $\tilde{f}(\tilde{z}) \geq \frac{1}{2}$ et $\tilde{f}(x) \geq 1 - \frac{\lambda}{2}$.

Soit $\alpha = \tilde{f}((\tilde{I} - \tilde{P} - \tilde{Q})\tilde{w})$. Alors

$$1 - \alpha = \tilde{f}(\tilde{w}) - \tilde{f}((\tilde{I} - \tilde{P} - \tilde{Q})\tilde{w}) = \tilde{f}((\tilde{P} + \tilde{Q})\tilde{w}) = \tilde{f}(\tilde{P}\tilde{w}) + \tilde{f}(\tilde{Q}\tilde{w})$$

$$\text{Et donc ou } \tilde{f}(\tilde{P}\tilde{w}) \leq \frac{1 - \alpha}{2}, \quad \text{ou } \tilde{f}(\tilde{Q}\tilde{w}) \leq \frac{1 - \alpha}{2}. \quad \text{Soit } \tilde{f}(\tilde{P}\tilde{w}) \leq \frac{1 - \alpha}{2}.$$

Alors

$$(2 - 2\alpha) - \frac{\lambda}{2} \leq 2\tilde{f}((\tilde{P} + \tilde{Q})\tilde{w}) - \tilde{f}(\tilde{w} - x) = \tilde{f}((2\tilde{P} + 2\tilde{Q})\tilde{w} - \tilde{I})(\tilde{w} - x) \leq \|\tilde{f}\| \|2\tilde{P} + 2\tilde{Q} - \tilde{I}\| \|\tilde{w} - x\| \leq \frac{\lambda^2}{2}.$$

Et

$$\alpha + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 1 - (1 - \alpha) \leq \tilde{f}(\tilde{y}) + \tilde{f}(\tilde{w}) - 2\tilde{f}(\tilde{P}\tilde{w}) = \tilde{f}(\tilde{w} - \tilde{y}) + 2\tilde{f}(\tilde{P}(\tilde{y} - \tilde{w})) \leq \|\tilde{f}\| \|\tilde{I} - 2\tilde{P}\| \|\tilde{w} - \tilde{y}\| \leq \frac{\lambda^2}{2}$$

$$D'où $3 - \frac{3\lambda}{2} \leq \frac{\lambda^2}{2}$ et donc $\lambda \geq \frac{\sqrt{33} - 3}{2}$.$$

Remarque:

Pei-Kee-Lin a d'abord montré le théorème pour la base 1- inconditionnelle.

2.4. PROPRIÉTÉ DU POINT FIXE DANS LES ESPACES A BASE INCONDITIONNELLE

2.4.5 Application du théorème de P.K. Lin

Signalons aux passage les faits suivants:

- 1) Pour un espace de Banach X , la propriété d'avoir une base(inconditionnelle ou pas) ne passe pas aux sous-espaces fermés de X .
- 2) Si un espace de Banach X a la *pfpf* et si Z est un sous-espace fermé de X alors Z a la *pfpf*.
- 3) la *pfpf* se conserve par les isométries.

Dans la suite nous aurons besoin des notions suivants:

Définition 2.4.5. (*Distance de Banach Mazur*):

Soient X et Y deux espaces de Banach isomorphes. On appelle distance de Banach-Mazur entre X et Y le nombre:

$$d_{BM}(X, Y) = \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\|, T : X \rightarrow Y \text{ isomorphe}\}$$

On a toujours $1 \leq d_{BM}(X, Y) < +\infty$

Si $d_{BM}(X, Y) = 1$, on dit que X et Y sont presque isométrique cela se traduit par: Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un isomorphisme T_ϵ de X dans Y tel que

$$\|T_\epsilon\| \cdot \|T_\epsilon^{-1}\| < 1 + \epsilon.$$

Remarque:

Si X et Y sont isométrique alors $d_{BM}(X, Y) = 1$. L'inverse n'est pas vrai (l'inf peut ne pas être atteint).

Dans la suite on utilisera le resultat elementaire [voir [10]]

Proposition 2.4.2. Soit X un espace de Banach avec une base inconditionnelle $\{e_n\}_{n \geq 1}$. Si Y est un espace de Banach isomorphe à X alors Y admet une base inconditionnelle. Plus précisément, si $\{e_n\}_{n \geq 1}$ est une base λ -inconditionnelle de X et T est un isomorphisme de X sur Y alors la suite $\{T(e_n)\}_{n \geq 1}$ est une base λ' -inconditionnelle de Y avec $\lambda' \leq \lambda \|T\| \cdot \|T^{-1}\|$.

Comme conséquence immédiate du théorème de P.K.Lin, compte tenu de la proposition précédente, on a le corollaire suivant.

Corollaire. Si X est un espace de Banach presque isométrique à un espace de Banach Y ayant une base 1-inconditionnelle alors, en particulier, X a la *pfpf*.

Preuve. On a $d_{BM}(X, Y) = 1$. Donc, pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un isomorphisme $T_\epsilon : Y \rightarrow X$ tel que $\|T_\epsilon\| \cdot \|T_\epsilon^{-1}\| < 1 + \epsilon$.

Par la proposition précédente, on déduit que X a une base λ -inconditionnelle tel que $\lambda < 1 + \epsilon, \forall \epsilon > 0$. On peut, alors, choisir ϵ tel que $1 + \epsilon < \frac{\sqrt{33} - 3}{2}$.

2.4. PROPRIÉTÉ DU POINT FIXE DANS LES ESPACES A BASE INCONDITIONNELLE

En fait, on a un résultat plus fort:

Théorème 2.4.1. *Soient X un espaces de Banach, Y un espace de Banach ayant une base 1-inconditionnelle. S'ils vérifient la propriété suivante: $\forall \epsilon > 0$, il existe un sous-espace fermé X_ϵ de Y tel que $d_{BM}(X, X_\epsilon) < 1 + \epsilon$ alors X a la pfpf.*

Remarquons que, comme Y est a base 1-inconditionnelle, il a la pfpf. Par conséquent, tout sous-espace fermé de Y a la pfpf.

Pour montrer le théorème précédent on admet la proposition suivante [voir [10]].

Proposition 2.4.3. *$(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ deux espaces de Banach. Si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un sous-espace X_ϵ de Y tel que $d_{BM}(X, X_\epsilon) < 1 + \epsilon$. Alors pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un sous-espace Y_ϵ de Y , il existe une norme $\|\cdot\|_\epsilon$ équivalente sur Y tels que X est isométrique à $(Y_\epsilon, \|\cdot\|_\epsilon)$ et*

$$\frac{1}{1 + \epsilon} \|y\|_Y \leq \|y\|_\epsilon \leq \|y\|_Y, \forall y \in Y.$$

Preuve. *(Preuve de th (2.4.1):*

Soit ϵ_0 tel que $1 + \epsilon_0 < \frac{\sqrt{33} - 3}{2}$

D'après la proposition (2.4.3), il existe une norme équivalente $\|\cdot\|$ sur Y vérifiant les conditions (i) et (ii) suivantes:

(i) $d_{BM}(Y, \|\cdot\|), ((Y, \|\cdot\|)) \leq 1 + \epsilon_0$

(ii) X est isométrique à un sous-espace de $(Y, \|\cdot\|)$.

La condition (i) et la proposition (2.4.2) impliquent que $(Y, \|\cdot\|)$ a une base λ -inconditionnelle avec $\lambda < \frac{\sqrt{33} - 3}{2}$. Donc $(Y, \|\cdot\|)$ a pfpf, d'après le

théorème de P.K.Lin. par conséquent, tous les sous-espaces fermés de Y ont la pfpf. On déduit de la condition (ii) que X a pfpf puisqu'il est isométrique à un sous-espace d'un espace qui a pfpf.

Des exemples d'espace de Banach vérifiant les hypothèses de théorème (2.4.1) sont donnés par les travaux de Goedfroy[13]. On cite sans démonstration quelque-un

Lemme 2.4.2. *Soit Ω un K_σ c-à-d une reunion dénombrable de compacts. Soit X un sous espace fermé de $C_0(\Omega)$ tel que pour tout compact K de Ω , l'opérateur de restriction:*

$$r_K : X \rightarrow C(K) \text{ telque } r_K(f) = f|_K$$

2.4. PROPRIÉTÉ DU POINT FIXE DANS LES ESPACES A BASE INCONDITIONNELLE

est compact.

Alors pour tous $\epsilon > 0$, il existe un sous espace X_ϵ de $C_0(\mathbb{N})$ tel que

$$d_{BM}(X, X_\epsilon) < 1 + \epsilon.$$

Lemme 2.4.3. Soit Ω un espace localement compact métrisable (non nécessairement K_σ). Si X un sous-espace fermé de $C_b(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ tel que $\forall f \in X, \forall x \in \Omega, f$ est ponctuellement lipschitzienne en x (ce qui, par définition, est:

$$\exists M \in \mathbb{R} (M \text{ depend de } f \text{ et de } x) \text{ tel que } |f(x) - f(y)| \leq M d(x, y) \quad \forall y \in \Omega)$$

Alors pour tout compact K de Ω l'opérateur: $r_K : X \rightarrow C(K)$ est compact.

Exemple 7. Soit X un sous-espace fermé de $C([0, 1])$ tel que $\forall f \in X, f$ est dérivable en tout point x de $[0, 1[$. Alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists X_\epsilon \text{ sous - espace de } c_0(\mathbb{N}) \text{ telque : } d_{BM}(X, X_\epsilon) < 1 + \epsilon.$$

En particulier X a pfpf.

Preuve. Tout d'abord remarquons le fait que si f est dérivable en $x \in [0, 1[$, alors f est ponctuellement lipschitzienne sur tout compact $K \subseteq [0, 1]$ en x . En effet, il suffit de voir que pour un compact $K \subseteq [0, 1]$, la fonction φ définie par:

$$\varphi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad \text{sit } t \neq x \text{ et } \varphi(x) = f'(x)$$

est continue sur K donc bornée sur K c.à.d

$$\exists M_x \in \mathbb{R} / \forall t \in K, |f(t) - f(x)| \leq M_x |t - x|.$$

Ainsi la première assertion de la proposition se déduit des lemme (2.4.3) et (2.4.4) la deuxième de déduit du théorème (2.4.1).

2.4. PROPRIÉTÉ DU POINT FIXE DANS LES ESPACES A BASE INCONDITIONNELLE

2.4.6 Annexe

Théorème 2.4.2. (Lemme de Cantor)

Dans un espace complet, si $(F_n)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante de fermés non vides telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam}(F_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x, y \in F_n} d(x, y) = 0$, alors $\bigcap_{n \geq 0} F_n$ est un singleton.

Théorème 2.4.3. Soit (E, d) et (E', d') deux espaces métriques avec (E', d') complet. Alors l'ensemble $C_b^0(E, E') = \{f : E \rightarrow E', f \text{ continue et bornée}\}$ est complet pour la distance uniforme $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in E} (d'(f(x), g(x)))$

Si l'espace d'arrivée est un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$ alors l'espace des fonctions $C_b^0(E, E')$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup \|f(x)\|$ est un espace de Banach.

En particulier si l'espace de départ E est un compact K et l'espace d'arrivée $\mathbb{R}$ l'espace de Banach muni de la norme $\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$: $C_b^0(K, \mathbb{R}) = C^0(K, \mathbb{R})$ est noté $C^0(K)$.

Théorème 2.4.4. (Théorème d'Ascoli):

Soit (E, d) un espace métrique compact, (F, δ) un espace métrique complet.

Une partie A de $C(E, F)$ est relativement compact si et seulement si:

1- A est équicontinue, c'est-à-dire:

$$\forall x \in E, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall f \in A, \forall y \in E, (d(x, y) \leq \eta) \Rightarrow (\delta(f(x), f(y)) < \epsilon)$$

2- Pour tout $x \in E$, l'ensemble $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact.

2.4. PROPRIÉTÉ DU POINT FIXE DANS LES ESPACES A BASE INCONDITIONNELLE

Bibliographie:

- [1] Jacques Dixmier. Topologie générale, presses universitaires de France, Paris 1981.
- [2] Berger et Gostiaux Géométrie différentielle: variétés, courbes et surfaces; presses universitaires de France, Paris (1987).
- [3] Jean- pierre Demailly. Analyse numérique et équations différentielles, presses universitaires de Grenoble, Grenoble 1996.
- [5] A.Kolmogorov, S. Fomine. Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle 2^{eme} édition 12/1973.
- [6] Haim Brezis. Analyse fonctionnelle. Masson, Paris,(1983).
- [7] Handbook of metric fixed point theory. William A-Kirk
- [8] Pei-Kee-Lin, Unconditional bases and fixed of nonexpansive mappings, Pacific J. Math.116,(1985), 69 – 76.
- [9] K.Goebel and W.A.Kirk, Topics in metric fixed point theory, cambridge studies in advanced Mathematics,(1990).
- [10] Thèse de Doctorat. Yamina Yagoub-Zidi, Inconditionnalité et propriétés du point fixe dans les espaces de fonctions lisses (2014).
- [11] J. Diestel, Géométry of Banach space. Selected Topics, Lecture Notes in Mathematics (485), Springer Verlag (1975).
- [12] B. Maurey, Points fixes des contractions sur un convexe fermé de L^1 , semi. Analyse Fonctionnelle 1980 – 1981, Ecole Polytechnique.
- [13] G. Godefroy, Unconditionaly in spaces of smoth functions, Arch Math (2009), 476 – 484.