

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI-OUZOU

Faculté du Génie de la Construction

Département de Génie Mécanique

MEMOIRE DE MAGISTER

OPTION : mécanique appliquée

Présenté par: CHIKHI Nassima

THEME:

Analyse par éléments finis de la réponse dynamique des plaques minces en considérant le mouvement imposé aux appuis

Devant les membres du jury :

BOUAZOUNI Amar	Professeur	U.M.M.Tizi-Ouzou	Président
SADAOUI Arezki	Professeur	U.M.M.Tizi-Ouzou	Directeur du mémoire
BILEK Ali	Professeur	U.M.M.Tizi-Ouzou	Examineur
DJEBBAR Arezki	Professeur	U.M.M.Tizi-Ouzou	Examineur

Soutenu, le : 19/03/2015

REMERCIEMENT

Je tiens à exprimer nos sincères remerciements à toute personne qui a contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail.

Je tiens tout d'abord à remercier Mr. Arezki SADAoui, Professeur au département de génie civil, Université Mouloud MAMMERI Tizi-Ouzou, encadreur de mon mémoire de magister, pour la confiance qu'il m'a accordé en me proposant ce mémoire.

Je tiens particulièrement à remercier le Professeur Mr. Amar BOUAZZOUNI de l'Université Mouloud MAMMERI Tizi-Ouzou de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je tiens aussi à remercier les autres membres de jury Monsieur le professeur Ali. BILEK et Monsieur le professeur Arezki. DJEBBAR qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être les examinateurs de mon travail et pour le temps qu'ils ont consacré à l'examen de ce mémoire.

Je n'oublie pas aussi de remercier tous les enseignants de l'Université Mouloud MAMMERI Tizi-Ouzou qui ont contribué à ma formation.

Je tiens enfin à remercier également tous mes collègues et amis pour leur soutien, conseil et aide.

CHIKHI NASSIMA

TABLE DES FIGURES

Chapitre 1 : INTRODUCTION

Fig. 1-1 Méthodes numériques couramment employées.....	3
Fig.1-2 Historique de réponse (déplacements, contraintes ou forces).....	6
Fig.1-3 Charge harmonique sinusoïdale imposée par une machine rotative.....	7
Fig.1-4. Charge périodique causée par la marche d'un piéton.....	7
Fig.1-5 Charge impulsionnelle causée par une explosion.....	7
Fig.1-6 Charge arbitraire de longue durée causée par un tremblement de terre	7

Chapitre 2 :REVUE DE LA DYNAMIQUE ANALYTIQUE DES PLAQUES ET QUELQUES EXEMPLES DE RESOLUTION EN CONSIDERANT LES MOUVEMENTS AUX APPUIS

Fig. 2-1 Plan de référence de la plaque.....	12
Fig. 2-2 Convention des signes des moments	13
Fig.2-3 Elément parallélépipédique.....	13
Fig. 2-4 Rayons de courbure de la plaque.....	15
Fig. 2-5 Forme de la surface anticlastique ou selle de cheval.....	16
Fig. 2-6 Déformée en forme cylindrique.....	16
Fig. 2-7 Déformée en forme sphérique.....	17
Fig.2-8 Plaque rectangulaire simplement appuyée à ses deux extrémités.....	20
Fig. 2-9 Allure des modes de vibration [09] ; (a) mode fondamentale ; (b) et (c) modes supérieurs.....	23
Fig. 2-10 Plaque rectangulaire parfaitement encastree sur ses bords.....	29
Fig. 2-11 Discrétisation du quart de la plaque en un seul élément fini.....	30
Fig. 2-12 Plaque encastree avec un déplacement d'appui du nœud 4.....	33
Fig. 2-13 Discrétisation et la déformée de la plaque.....	35
Fig. 2-14 Discrétisation et la déformée de la plaque.....	38

Chapitre 3 : DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS

Fig. 3-1 Solide et sa frontière.....	42
Fig.3-2 Déplacements virtuels.....	46
Fig. 3-3 Définition du travail élémentaire d'une force intérieure	46
Fig.3-4 Structure de poutre.....	50
Fig. 3-5 Equivalence des forces appliquées sur la poutre.....	51
Fig. 3-6 Domaine plan discrétisé.....	54
Fig. 3-7 Élément fini de plaque non-conforme à 12 degrés de liberté par élément.....	55
Fig. 3-8 Système de coordonnées normalisées.....	58
Fig. 3-9 Steering vector - cas de l'élément à trois degrés de liberté par nœud.....	58
Fig. 3-10 Élément fini de plaque conforme à 16 degrés de liberté par élément.....	60
Fig. 3-11 Illustration des fonctions d'interpolation au nœud 1.....	63
Fig. 3-12 Steering vector - cas de l'élément à quatre degrés de liberté par nœud.....	64
Fig. 3-13 Utilisation des tables de yang.....	65
Fig. 3-14 Transformation d'un quadrilatère à 4 nœuds en un carré normé pour l'intégration numérique.....	71
Fig. 3-15. Implémentation numérique des matrices de rigidité et de masse dans le programme STRUDL5.FOR_version 2014.....	75
Fig. 3-16 Steering vector G de l'élément à 4 nœud.....	76

Chapitre 4 : RESOLUTION PAR LA METHODE D'INTEGRATION DIRECTE DE TYPE WILSON- θ EN CONSIDERANT LES MOUVEMENTS D'APPUIS

Fig. 4-1 Stabilité de l'algorithme de Newmark.....	79
Fig. 4-2 Mouvement d'un système (a) accélération constante (b) accélération linéaire.....	80
Fig. 4-3 Mouvement d'un système pour une accélération variant linéairement durant un incrément de temps $\theta\Delta t$	83
Fig. 4-4 Implémentation de l'algorithme de Wilson- θ dans STRUDL5.FOR_version 2014..	94
Fig. 4-5 Stockage de la matrice de rigidité et de la matrice masse en ligne de ciel.....	96

Chapitre 5 : EXPERIMENTATION NUMERIQUE ET ANALYSE

Fig. 5-1 Plaque rectangulaire encastrée sur deux bords et simplement appuyée sur les deux autres.....	99
Fig.5-2 Discrétisation du quart de la plaque et de sa déformée.....	100
Fig. 5-3 Variation en fonction du temps des déplacements et des moments -cas de la matrice masse concentrée-.....	106
Fig. 5-4 Variation en fonction du temps des déplacements et des moments -cas de la matrice masse consistante-.....	107
Fig. 5-5 Illustration de l'effet de la répartition de masse sur le comportement de la plaque.....	108
Fig. 5-6 Discrétisation et la déformée de la plaque-cas de mouvement imposé.....	108
Fig. 5-7 Variation en fonction du temps des déplacements et des moments.....	110
Fig. 5-8 Illustration de la réponse transitoire et permanente de la plaque.....	110
Fig. 5-9. Variation en fonction du temps des moments -maillage 8*8 éléments-.....	111
Fig. 5-10 Différents maillages utilisés.....	112
Fig. 5-11 Variation en fonction du temps et du nombre d'éléments du déplacement transversal du milieu de la plaque.....	113
Fig. 5-12 Variation en fonction du temps et du nombre d'éléments de la rotation selon y au milieu du coté simplement appuyé de la plaque.....	114
Fig. 5-13 Variation en fonction du temps du déplacement transversal (w_c) du centre de la plaque pour diverses pulsations.....	115
Fig. 5-14 Variation en fonction du temps de la rotation selon y (θ_{yc}) au milieu du coté simplement appuyé de la plaque pour diverses pulsations.....	115
Fig. 5-15 Variation en fonction du temps du déplacement transversal (w_c) du centre de la plaque pour diverses valeurs d'amortissement.....	116
Fig. 5-16 Variation en fonction du temps de la rotation selon y (θ_{yc}) au milieu du coté simplement appuyé de la plaque pour diverses valeurs d'amortissement.....	117

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre 1 : INTRODUCTION

Tableau 1-1 Types de charges dynamiques en génie civil.....	6
---	---

Chapitre 2 : REVUE DE LA DYNAMIQUE ANALYTIQUE DES PLAQUES ET QUELQUES EXEMPLES DE RESOLUTION EN CONSIDERANT LES MOUVEMENTS AUX APPUIS

Tableau 2-1 Intégration temporelle de la plaque encastrée sans déplacement d'appuis.....	31
Tableau 2-2 Intégration temporelle de la plaque encastrée- sans déplacement d'appuis et avec masse concentrée.....	33
Tableau 2-3 Intégration temporelle de la plaque encastrée- avec déplacement d'appuis et masse consistante.....	34
Tableau 2-4 Intégration temporelle de la plaque avec deux bords encastrés et simplement appuyée sur les deux autres : masse concentrée.....	37
Tableau 2-5 Intégration temporelle de la plaque avec deux bords encastrés et simplement appuyée sur les deux autres : masse consistante et sans déplacements imposés...	37
Tableau 2-6 Intégration temporelle de la plaque avec deux bords encastrés et simplement appuyée sur les deux autres : masse consistante et avec déplacements imposés.....	40

Chapitre 3 : DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS

Tableau 3-1 équations fondamentales de la théorie d'élasticité.....	41
Tableau 3-2 Définition des quantités matricielles dans la mécanique des solides plans.....	42

Chapitre 4 : RESOLUTION PAR LA METHODE D'INTEGRATION DIRECTE DE TYPE WILSON- θ EN CONSIDERANT LES MOUVEMENTS D'APPUIS

Tableau 4-1 Algorithme d'intégration de la méthode de Wilson- θ	86
--	----

Chapitre 5 : EXPERIMENTATION NUMERIQUE ET ANALYSE

Tableau 5-1 Valeurs des matrices de rigidité et de masse obtenues manuellement et par le Programme.....	101
Tableau 5-2 Valeurs des matrices de rigidité et de masse obtenues manuellement et par le programme.....	109
Tableau 5-3 Quelques valeurs obtenues au temps $t = 3.5s$	113
Tableau 5-3 Quelques valeurs obtenues au temps $t = 3.5s$ pour diverses pulsations.....	116
Tableau 5-3 Quelques valeurs obtenues au temps $t = 3.5s$ pour diverses taux d'amortissement.....	117

SOMMAIRE

Chapitre 1 : Introduction

1-1 Généralités.....	1
1-2 Cadre de ce travail.....	2
1-3 Cheminement du travail suivi	4
1-4 Quelques notions utiles de la dynamique des structures	5
1-4-1 Différence primordiale entre un problème dynamique et statique	5
1-4-2 Analyse déterministe et non déterministe	5
1-4-3 Réponse dynamique	5
1-4-4 Charges dynamiques	6
1-4-5 Régime libre et régime forcé d'un oscillateur élémentaire	8
1-4-6 Régime libre	8
1-4-7 Régime forcé	10

Chapitre 2 : Revue de la dynamique analytique des plaques et quelques exemples de résolution en considérant les mouvements imposés aux appuis

2-1 Généralités	12
2-2 Hypothèses de base	12
2-3 Flexion pure des plaques	13
2-3-1 Déformée de la plaque	14
2-3-2 Relation entre les moments et les courbures	14
2-3-3 Cas de quelques déformées particulières	16
2-4 Formulation analytique de la dynamique des plaques	18
2-4-1 Formulation de l'équation de mouvement	18
2-4-2 Vibration libre d'une plaque rectangulaire simplement appuyée	19
2-4-3 Vibration forcée d'une plaque rectangulaire simplement appuyée	23
2-4-4 Cas particuliers	25
2-5 Résolution manuelle de plaques rectangulaires en imposant des mouvements non nuls aux appuis	29
2-5-1 Cas d'une plaque parfaitement encastree sur ses bords	29
2-5-2 Cas d'une plaque avec deux bords encastres et simplement appuyée sur les deux autres	34

Chapitre 3 : DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS

3-1 Généralités	41
3-2 Equations fondamentales et forme différentielle forte de la mécanique du solide	41
3-3 Principe des déplacements virtuels et forme faible de la mécanique des solides	45
3-3-1 Théorème intégrale (ou théorème de la divergence)	45
3-3-2 Formule générale du principe des déplacements ou des travaux virtuels	45
3-3-3 Cas du champ virtuel compatible avec les appuis	48
3-3-4 Principe variationnel de Hamilton	48
3-4 Application aux cas particuliers des structures : poutre et plaque	50
3-4-1 Cas des poutres prismatiques	50

3-4-2 Cas des plaques	51
3-4-3 Concept des variables généralisées.....	53
3-5 Forme discrétisée par éléments finis	54
3-5-1 Discrétisation géométrique du domaine	54
3-5-2 Représentation élémentaire (ou locale) du champ de déplacements	54
3-5-3 Représentation globale du champ de déplacements	66
3-5-4 Partition des degrés de liberté- conditions aux limites	67
3-5-5 Discrétisation de la forme intégrale faible	67
3-5-6 Mise en œuvre pratique : calculs élémentaires et assemblage	69
3-5-7 Implémentation dans le programme STRUDL5.FOR_version 2014 des opérations liées au calcul élémentaire et à l'assemblage	73

Chapitre 4 : RESOLUTION PAR LA METHODE D'INTEGRATION DIRECTE DE TYPE WILSON- θ EN CONSIDERANT LES MOUVEMENTS D'APPUI

4-1 Généralités	77
4-2 Calcul de la réponse dynamique.....	78
4-2-1 Critère de stabilité	78
4-2-2 Méthodes de Newmark	78
4-2-3 Méthode de Wilson- θ	83
4-3 Méthode de résolution en présence des mouvements d'appui.....	87
4-3-1 Changement de résolution du système d'équations	87
4-3-2 Quelques indications relatives à la programmation de la procédure	91
4-3-3 Description des principales nouvelles sous-routines	92
4-4 Implémentation de l'algorithme de Wilson- θ en tenant compte des mouvements d'appui	93
4-5 Détermination des modes et des pulsations propres- Méthode de Jacobi	94

CHAPITRE 5 : EXPERIMENTATION NUMERIQUE ET ANALYSE

5-1 Généralités	97
5-2 Description du fichier de données STRUDL5.INP_version 2014	97
5-3 Expérimentation et validation des résultats	99
5-3-1 Sans mouvement d'appui	100
5-3-2 Avec mouvement d'appui	108
5-3-3 Vérification de la convergence h	112
5-4 Analyse paramétrique	114
5-4-1 Influence de la pulsation de la sollicitation extérieure vibratoire imposée	114
5-4-2 Influence du taux d'amortissement	116

CHAPITRE 6 : CONCLUSIONS

6-1 Rétrospective.....	118
6-2 Résultats obtenus.....	119
6-3 Recommandations futures.....	119

Références	120
------------------	-----

ANNEXE A : Tables de Yang pour le calcul des matrices de masse et de rigidité élémentaires

ANNEXE B : Fichier Example2.out- plaque rectangulaire encastree sur deux bords et simplement appuyée sur les deux autres

Chapitre 1

INTRODUCTION

1-1 Généralités

L'analyse dynamique d'une structure dont la géométrie est complexe, est une tâche ardue, nécessitant beaucoup d'expérience de la part de l'ingénieur lui permettant d'identifier les paramètres et les propriétés qui auront une influence marquante sur le comportement dynamique de la structure. Il y a en général trois étapes lors d'une analyse dynamique d'une construction civile ou mécanique [1]. Partant des plans d'une structure, on procède à (1) la création d'un modèle analytique consistant en l'identification des paramètres qui influencent le comportement dynamique de la structure, et à la simplification du système dynamique (système tridimensionnel ou bidimensionnel, contraintes planes, déformations planes, plaques, treillis, cadres, masses concentrées ou cohérentes, etc.), (2) la création d'un modèle mathématique continu ou discret et (3) le calcul des réponses temporelles proprement dites (Pulsations, déformations, contraintes, déplacements,...).

En ce qui concerne le premier point, la modélisation réaliste du comportement des structures est la première et la plus difficile étape dans une analyse dynamique. C'est le modèle physique qui permet la description en langage d'ingénieur du système étudié et du problème posé à son sujet. Celui-ci nécessite au préalable la compréhension du problème physique et la connaissance intuitive de la solution recherchée. Parmi les paramètres les plus importants à définir, on retrouve la répartition de la masse, les caractéristiques d'amortissement, la rigidité du système de résistance aux forces d'inertie, les conditions d'appui, l'influence des éléments secondaires et les divers phénomènes d'interaction. Il s'agit lors de cette étape de créer un modèle analytique ou physique de la structure qui est en fait une représentation simplifiée de la structure se prêtant mieux à l'analyse.

En ce qui est du deuxième point, une fois le choix du modèle analytique effectué, on fait appel aux lois de la physique afin d'obtenir des équations aux dérivées partielles dans le cas des modèles continus, et des équations différentielles ordinaires dans le cas des modèles discrets qui constituent le modèle mathématique du système. On ne peut trouver les solutions que de quelques modèles continus et pour des charges dynamiques relativement simples. Pour des problèmes complexes, le modèle mathématique consiste à discrétiser le problème par la méthode des éléments finis. Lors de cette étape, on aura à choisir entre une représentation consistante de la structure simulant un nombre infini de degrés de liberté, ou une représentation par masses concentrées où la masse du système est concentrée en un nombre réduit de degrés de liberté nécessaire pour représenter les effets de toutes les forces d'inertie importantes. La création d'un modèle avec masses concentrées est un art qui ne devrait être pratiqué que par un ingénieur possédant beaucoup d'expérience en dynamique des structures.

En ce qui concerne enfin le dernier point, le calcul de la réponse dynamique est effectué par un programme d'ordinateur avec la méthode des éléments finis. C'est le modèle

numérique ou algébrique qui fait nécessairement appel au modèle informatique dans le but de résoudre le système des équations algébriques ainsi obtenues. Le rôle de l'analyste n'est pas trivial lors de cette étape car il doit choisir les méthodes appropriées pour la résolution des équations différentielles ordinaires. Le choix est le plus souvent entre une superposition des réponses modales et une intégration numérique directe des équations différentielles. Mais même à l'intérieur de ces deux options, l'analyste aura à choisir entre plusieurs méthodes parmi lesquelles les plus connues en pratique (méthode de superposition modale, méthode d'intégration directe de Wilson- θ , méthode de Newmark,...).

La mise en œuvre effective de ces différentes méthodes comme dans celle de la méthode des éléments finis nécessite l'utilisation des méthodes numériques diverses ainsi récapitulées sur la figure (1-1) sans pour autant faire une présentation complète de toutes les méthodes disponibles dans la littérature [2,3]. Y sont employées principalement les méthodes numériques suivantes :

- Méthodes d'intégration numériques qui sont employées afin de construire, à l'échelle locale ou élémentaire, les matrices de rigidité, les matrices de masse consistante et les vecteurs de sollicitations élémentaires. La méthode la plus connue est celle basée sur la quadrature de Gauss ou de Simpson.
- Méthodes d'élimination de Gauss permettant la résolution de systèmes d'équations linéaires qui en résultent à l'échelle globale. Des techniques de décomposition adaptées sont utilisées pour le stockage des matrices obtenues, par exemple la technique en ligne de ciel pour le calcul des valeurs propres ou la technique en structure de bande pour la résolution efficace des systèmes d'équations qui régissent l'équilibre de la structure.
- Méthodes de substitution ou de Newton Raphson permettant la linéarisation des systèmes d'équations non linéaires.
- Méthodes de résolution des problèmes non stationnaires qui grâce à une discrétisation temporelle (par rapport au temps), la résolution se ramène à celui d'un système stationnaire (indépendant du temps) qu'il soit linéaire ou non. Les méthodes de discrétisation temporelle les plus utilisées sont celle d'Euler (explicite, implicite ou semi-implicite).
- Méthodes de calcul des valeurs propres et des vecteurs propres qui sont des méthodes itératives telles que les procédures de l'itération inverses et du sous-espace.

1-2 Cadre de ce travail

L'objectif fixé dans ce travail consiste essentiellement d'établir un code de calcul par éléments finis capable d'analyser la réponse dynamique des plaques minces en considérant une excitation extérieure type déplacement imposé appliquée par exemple aux appuis.

Il s'agit en deuxième lieu d'exploiter le code de calcul établi pour une simulation de différents problèmes physiques rencontrés dans la vie pratique de l'ingénieur afin de

comprendre et d'encrer la philosophie liée à la problématique de la dynamique dans le domaine particulièrement des constructions civiles et mécaniques.

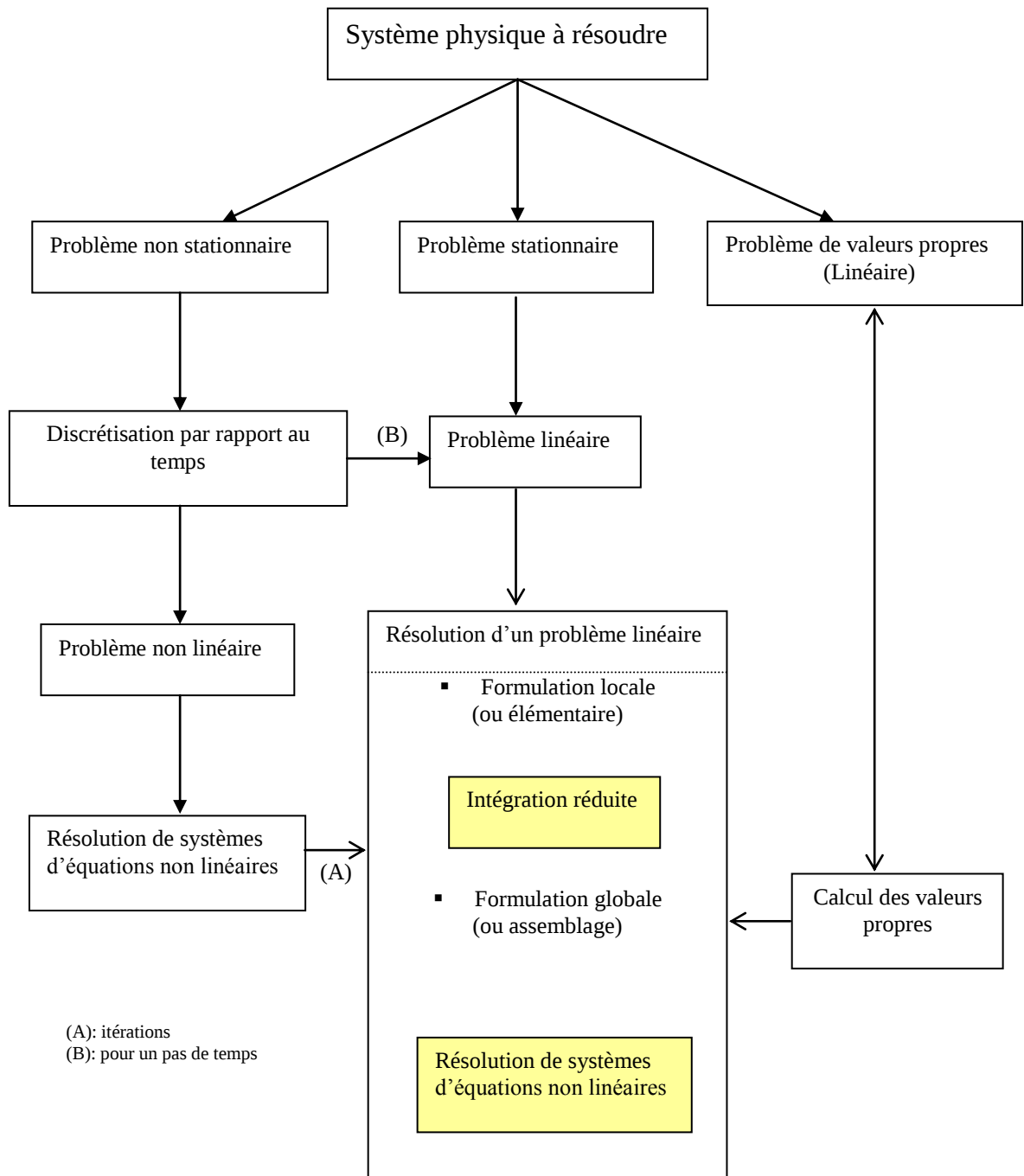


Fig. 1-1. Méthodes numériques couramment employées

1-3 Cheminement du travail suivi

Ce travail sera organisé en six chapitres dont le premier se rapportera essentiellement aux rappels de quelques notions utiles de la dynamique des structures en général en vue d'encrenir dans l'esprit du lecteur la philosophie liée à la dynamique en général.

Le chapitre subséquent sera consacré d'abord à la présentation succincte de la formulation du comportement dynamique des plaques dans laquelle la théorie classique des plaques est abordée d'une manière inductive entièrement parallèle à la théorie des poutres établies en Résistance des Matériaux. Quelques exemples simples de plaques avec mouvements imposés aux appuis seront ensuite résolus manuellement et d'une manière détaillée dans le but de comprendre facilement la démarche d'implémentation numérique de la méthode des éléments finis et de la méthode d'intégration directe type Wilson- θ .

Le chapitre trois sera trait à la discrétisation par éléments finis comprenant trois parties essentielles. La première, rappelle d'une façon succincte et sous forme matricielle les équations fondamentales de la théorie d'élasticité, applicables à un problème plan en tenant compte des effets dynamiques. La deuxième, montre comment obtenir par le biais particulièrement du principe des travaux virtuels, la forme faible de la mécanique du solide. Nous montrons enfin dans la dernière partie, comment passer à la discrétisation spatiale ou géométrique par la méthode des éléments finis en vue de formuler l'expression discrétisée des équations d'équilibre de mouvement d'une plaque mince rectangulaire avec mouvements imposés aux appuis. Les différentes techniques de programmation utilisées dans le code STRUDL5.FOR_version 2014 seront également indiquées en vue d'implémenter les matrices élémentaires de masse, d'amortissement et de rigidité ainsi que l'opération liée à l'assemblage.

Le chapitre quatre se rapportera à la résolution des équations obtenues de la forme non stationnaires de second ordre en utilisant la méthode d'intégration directe de Wilson- θ . Nous exposerons ensuite les différents algorithmes d'intégration ainsi que les techniques d'implémentation numériques utilisées en vue de tenir compte des effets des déplacements vibratoires imposés.

L'avant dernier chapitre sera consacré à l'expérimentation numérique où le programme établi sera illustré par des applications numériques portant sur l'évaluation de la réponse dynamique de plaques par la méthode d'intégration directe de Wilson- θ mentionnée ci-dessus. Sera suivi d'une analyse paramétrique en vue de mettre en relief l'effet de certains paramètres clés sur le comportement de la plaque envisagée tels le nombre de modes de vibration retenus et les pulsations.

Nous terminerons par une conclusion générale qui débouchera sur des recommandations futures de ce thème de travail.

1-4 Quelques notions utiles de dynamique des structures

La dynamique des structures a pour objectif l'étude des constructions ou éléments de construction sollicités par des charges dynamiques qui, contrairement à des charges statiques, varient dans le temps.

1-4-1 Différence primordiale entre un problème dynamique et statique

Les charges dynamiques engendrent naturellement dans les structures des déplacements, des forces internes, des réactions et des contraintes qui dépendent du temps. Il n'existe donc pas une seule solution comme pour un problème statique. Dans un problème dynamique, il faut établir les solutions successives dans le temps des déplacements appelées communément réponse dynamique, avant de trouver les valeurs maximums des forces, des réactions ou des contraintes qui seront utilisées pour des fins de dimensionnement ou de vérification de la structure. Cependant, le temps n'est pas réellement le seul paramètre qui fait distinguer une analyse dynamique d'une analyse statique. C'est en raison d'un côté, une charge n'est jamais appliquée totalement d'une manière statique, et d'un autre côté, les effets d'une charge statique peuvent varier dans le temps à cause des propriétés viscoélastiques éventuelles des matériaux (fluage, retrait, relaxation...). En fait, la différence primordiale entre un problème statique et dynamique ne réside pas principalement dans la variation temporelle de la charge ou de la réponse, mais surtout dans l'importance des forces d'inertie qui résisteraient au mouvement engendré par le chargement dynamique appliqué $p(t)$.

Le caractère dynamique du problème domine si les forces d'inertie sont importantes par rapport aux forces totales appliquées. Par contre, le problème peut être traité de façon statique si les mouvements mis en jeu par l'application des forces $p(t)$ sont tellement faibles qu'ils ne donnent naissance qu'à des forces d'inertie négligeables.

1-4-2 Analyse déterministe et non déterministe

Une charge dynamique est une charge dont la grandeur, la direction ou le point d'application varient avec le temps. Si le chargement est une fonction connue du temps, on dit que le chargement dynamique est prescrit. L'analyse d'une structure donnée sous l'effet d'un chargement prescrit est dite déterministe. Si d'un autre côté, la variation du chargement en fonction du temps n'est pas connue et ne peut être définie qu'en termes statistiques (cas des tremblements de terre), on dit que le chargement est dynamique aléatoire. Dans ce cas, une analyse probabiliste est l'analyse de la réponse à un chargement dynamique aléatoire. Dans ce présent travail, on ne traitera que de l'analyse déterministe.

1-4-3 Réponse dynamique

Le calcul par une analyse déterministe de la réponse dynamique d'une structure à un chargement dynamique donné, conduit à la détermination des déplacements de la structure dans le temps appelé aussi l'historique du déplacement. Les déformations, contraintes, forces

internes et réactions sont déterminées à partir de l'historique du déplacement (fig.1-2). L'analyse déterministe n'admet pas d'incertitudes dans l'expression de la charge dynamique.

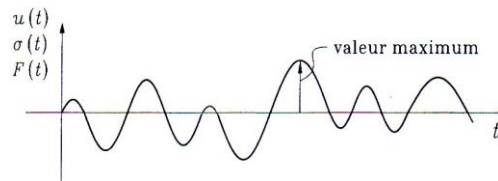


Fig. 1-2. Historique de réponse (déplacements, contraintes ou forces)

La réponse dynamique varie dans le temps. En général, pour un dimensionnement ou une vérification d'un système linéaire, on calcule la réponse dynamique maximum, et on l'additionne à la réponse statique maximum, afin d'obtenir la réponse totale maximum.

1-4-4 Charges dynamiques

On subdivise les charges dynamiques en charges périodiques et en charges apériodiques. Le tableau (1-1) résume les différents types de charges dynamiques que l'on peut rencontrer. Les charges permanentes et les charges d'exploitation appliquées lentement par rapport à la période de vibration naturelle de la structure sont généralement considérées comme des charges statiques au même titre que le poids propre [1,4].

Causes des différents types de charges dynamiques			
Périodiques		Apériodiques	
Harmonique simple	Périodique quelconque	Transitoire	Impulsionnelle
Machine rotative	Machine alternative Marche, Course Vent	Construction Vent Vagues Séismes Trafic	Construction Impact Explosion Perte d'un appui Rupture d'une pièce

Tableau 1-1. Types de charges dynamiques en génie civil

A- Charges périodiques

Une charge périodique est une charge dont les variations dans le temps se répètent après un intervalle de temps régulier T , appelé période. Les charges périodiques se divisent en charges harmoniques simples (fig.1-3) et en charges périodiques quelconques (fig.1-4).

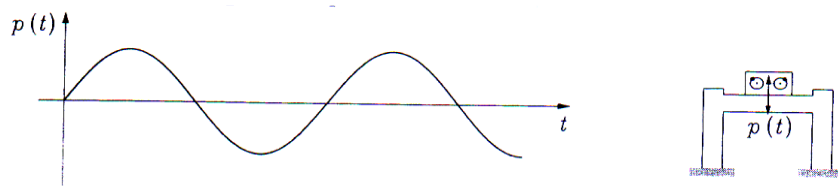


Fig.1-3. Charge harmonique sinusoïdale imposée par une machine rotative

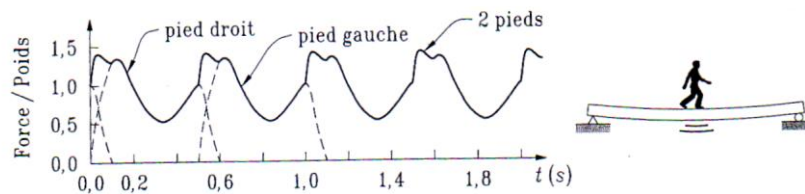


Fig.1-4. Charge périodique causée par la marche d'un piéton

B- Charges apériodiques

Les charges apériodiques sont des charges variant de façon arbitraire dans le temps sans périodicité. Ces charges se divisent en charges de courte durée de type impulsionnel (fig.1-5) et en charges transitoires ou charges de longue durée (fig.1-6).

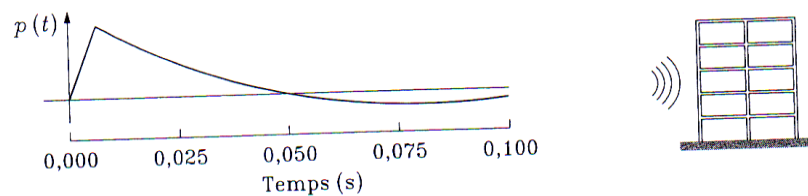


Fig.1-5. Charge impulsionnelle causée par une explosion

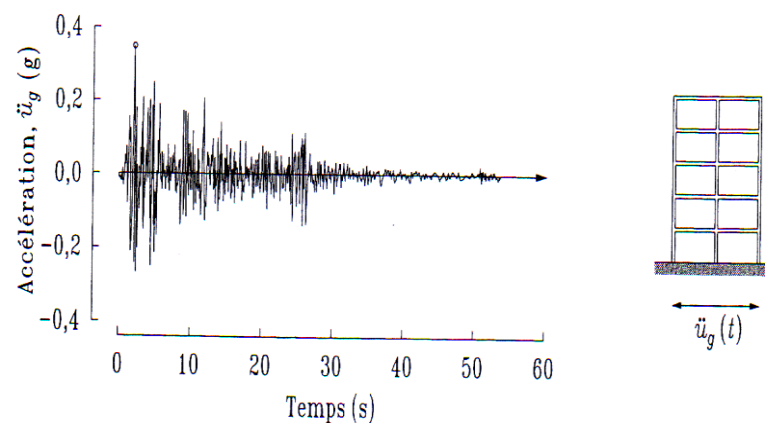


Fig.1-6. Charge arbitraire de longue durée causée par un tremblement de terre

1-4-5 Régime libre et régime forcé d'un oscillateur élémentaire

L'équation du mouvement d'un système à un seul degré de liberté appelé oscillateur élémentaire s'écrit :

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (1-1)$$

Où m , c et k sont respectivement la masse, l'amortissement et la rigidité du système soumis à la force dynamique extérieure $p(t)$. C'est une équation différentielle non homogène du second ordre et à coefficients constants.

La solution d'une telle équation dépend de la charge dynamique appliquée $p(t)$ et des conditions initiales. La réponse forcée est la solution de l'équation différentielle avec second membre et dépend essentiellement de la nature de la charge $p(t)$. La réponse libre est la solution de l'équation différentielle homogène, elle décrit le comportement de l'oscillateur élémentaire sous l'action des conditions initiales (déplacement et vitesse) non nulles alors que le second membre est nul [5,6].

1-4-6 Régime libre

Le régime libre est décrit par la solution de l'équation homogène suivante :

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (1-2)$$

Posons pour des raisons qui deviendront apparentes plus loin :

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (1-3)$$

Et

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega} \quad (1-4)$$

L'équation (1-2) peut s'écrire:

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega\dot{u}(t) + \omega^2u(t) = 0 \quad (1-5)$$

La solution de cette équation dépend de la valeur du taux d'amortissement ζ où trois cas sont possibles :

- $\zeta < 1$: système sous amorti ou amortissement sous critique (mouvement oscillatoire)
- $\zeta = 1$: amortissement critique (mouvement non oscillatoire)
- $\zeta > 1$: système sur amorti ou amortissement sur critique (mouvement non oscillatoire)

La bifurcation entre un mouvement oscillatoire et un mouvement non oscillatoire correspond à $\zeta = 1$. Par suite, l'amortissement critique s'exprime :

$$c_{cr} = 2m\omega = \frac{2k}{\omega} = 2\sqrt{km} \quad (1-6)$$

A- Amortissement sous critique

La solution de l'équation différentielle (1-5) quand le taux d'amortissement $\zeta < 1$ s'écrit en fonction des conditions initiales $u(0)$ et $\dot{u}(0)$:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega t} \left[u(0) \cos \omega_D t + \frac{\dot{u}(0) + \zeta\omega u(0)}{\omega_D} \sin \omega_D t \right] \quad (1-7)$$

Avec $\omega_D = \omega\sqrt{1-\zeta^2} < \omega$ étant la pulsation propre de l'oscillateur sous amorti. La fréquence propre correspondante a pour expression :

$$f_D = \frac{1}{T_D} = \frac{\omega_D}{2\pi} < f \quad (1-8)$$

Où

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} > T \quad (1-9)$$

NB : (1) L'amortissement a pour effet de diminuer la pulsation et donc, d'augmenter la période des oscillations d'un système par rapport au système correspondant non amorti. (2) Pour le cas d'un système non amorti appelé régime libre conservatif (i.e. $c=0$ donc $\zeta = 0$), l'équation (1-7) devient :

$$u(t) = u(0) \cos \omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin \omega t \quad (1-10)$$

B- Amortissement critique

La solution de l'équation (1-5) quand le taux d'amortissement $\zeta = 1$, donc $c = c_{cr}$ est de la forme :

$$u(t) = e^{-\omega t} \left[u(0)(1 + \omega t) + \dot{u}(0)t \right] \quad (1-11)$$

On constate que $u(t)$ est une fonction apériodique donc le système n'est pas oscillatoire en raison du terme en exponentiel ($e^{-\omega t}$).

C- Amortissement sur critique

La solution de l'équation (1-5) quand le taux d'amortissement $\zeta > 1$, s'écrit:

$$u(t) = e^{-\zeta \omega t} (Ae^{(\omega \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + Be^{-(\omega \sqrt{\zeta^2 - 1})t}) \quad (1-12)$$

Où A et B sont des constantes qui peuvent être déterminées en fonction des conditions initiales $u(0)$ et $\dot{u}(0)$.

Notons que dans ce travail, nous nous limiterons au cas d'un système sous amorti $\zeta < 1$.

1-4-7 Régime forcé

Nous allons nous limiter au cas d'un régime forcé harmonique i.e. quand l'oscillateur est soumis à l'action d'une force extérieure pure. Si nous considérons une force de forme sinus, l'équation de mouvement prend la forme :

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p_0 \sin \bar{\omega}t \quad (1-13)$$

La solution de cette équation est la somme de la solution complémentaire $u_c(t)$ de l'équation homogène avec $p(t) = 0$ et de la solution particulière $u_p(t)$ de l'équation non homogène donc liée à la charge $p(t)$, soit :

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t) \quad (1-14)$$

A- Régime forcé conservatif

Le système forcé est conservatif si $c = 0$. L'équation de mouvement (1-13) devient :

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = p_0 \sin \bar{\omega}t \quad (1-15)$$

La solution générale de l'équation (1-15) s'écrit en posant $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$:

$$u(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin \bar{\omega}t \quad (1-16)$$

Où A et B sont des constantes qui peuvent être déterminées en fonction des conditions initiales. Au repos i.e. $u(0)=0$ et $\dot{u}(0)=0$, l'équation de mouvement (1-16) peut se mettre sous la forme :

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} (\sin \bar{\omega}t - \beta \sin \omega t) \quad ; \beta \neq 1 \quad (1-17)$$

Où $\frac{1}{1-\beta^2}$ est le coefficient d'amplification dynamique.

B- Régime forcé dissipatif

L'équation de mouvement d'un système en régime dissipatif est la suivante :

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \frac{p_0}{m} \sin \bar{\omega}t \quad (1-18)$$

La solution complète est de la forme :

$$u(t) = e^{-\zeta\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} [(1-\beta^2) \sin \bar{\omega}t - 2\zeta\beta \cos \bar{\omega}t] \quad (1-19)$$

Où le premier terme correspond au régime transitoire qui disparaît rapidement à cause du terme $e^{-\zeta\omega t}$ et le deuxième terme correspond au régime permanent. Les constantes A et B de la partie transitoire de la réponse totale peuvent être évaluées pour des conditions initiales données.

Remarque :

- (1) Si $\beta = 1$ et donc $\bar{\omega} = \omega$ correspond à la résonance d'un système amorti ; l'équation (1-19) peut s'écrire :

$$u(t) = \frac{p_0}{2\zeta k} [e^{-\zeta\omega t} (\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_D t + \cos \omega_D t) - \cos \omega t] \quad (1-20)$$

Pour des cas pratiques, $\zeta \ll 1$ et le terme en sinus est négligeable. Alors, l'équation de mouvement devient avec $\omega_D \approx \omega = \bar{\omega}$:

$$u(t) = \frac{p_0}{2\zeta k} (e^{-\zeta\omega t} - 1) \cos \omega t \quad (1-21)$$

- (2) Si la force extérieure harmonique est de type cosinus i.e. $p(t) = p_0 \cos \bar{\omega}t$, la solution de l'équation différentielle sera de la forme :

$$u(t) = e^{-\zeta\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} [2\zeta\beta \sin \bar{\omega}t + (1-\beta^2) \cos \bar{\omega}t] \quad (1-22)$$

Chapitre 2

REVUE DE LA DYNAMIQUE ANALYTIQUE DES PLAQUES ET QUELQUES EXEMPLES DE RESOLUTION EN CONSIDERANT LES MOUVEMENTS AUX APPUIS

2-1 Généralités

Ce chapitre composé de deux parties, sera essentiellement consacré à la revue analytique de la formulation du comportement vibratoire des plaques dans le but d'encrer dans l'esprit du lecteur la philosophie du calcul dynamique des plaques en prenant en compte les mouvements éventuels aux appuis. La première partie se rapportera à la présentation d'une façon succincte et détaillée la formulation analytique de la dynamique en considérant la nature vibratoire des charges appliquées auxquelles il faut ajouter naturellement les forces d'inertie et les forces d'amortissement dans le bilan de jeu de forces qui caractérise l'équilibre dynamique de la structure étudiée.

La théorie classique des plaques (i.e épaisseur mince, comportement linéaire et élastique) sera introduite d'une manière inductive entièrement parallèle à la théorie des poutres établies en Résistance des Matériaux. Par simplicité, nous admettons que la plaque est d'épaisseur constante et formée d'un seul matériau isotrope et homogène. Contrairement à ce qui a lieu pour les poutres, cette théorie n'est valable que si les déplacements transversaux sont particulièrement faibles vis-à-vis de l'épaisseur de la plaque.

La deuxième partie portera sur la résolution manuelle de quelques exemples simples de plaques en considérant la notion du mouvement imposé en vue de faire comprendre aisément l'implémentation sur ordinateur de la formulation matricielle qui sera présentée dans les chapitres subséquents.

2-2 Hypothèses de base

Soit une plaque rectangulaire, d'épaisseur h , fléchiée par des moments uniformément réparties comme la montre la figure (2-1). Prenons référence, le plan moyen de la plaque (plan x - y) situé à égale distance des faces de celle-ci, et dirigeons les axes ox et oy selon les cotés de la plaque comme il est indiqué. L'axe des z est perpendiculaire au plan de référence et dirigé vers le bas.

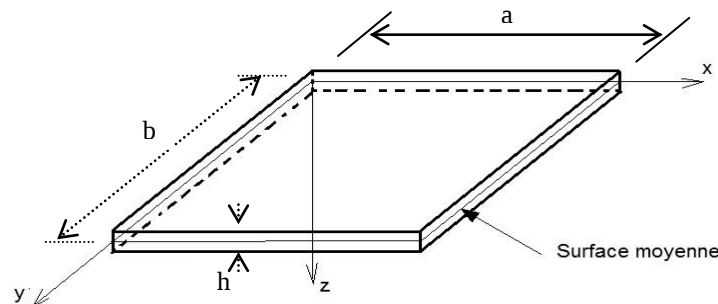


Fig. 2-1. Plan de référence de la plaque

L'épaisseur de la plaque est supposée petite par rapport aux deux autres dimensions ; ce qui correspond pratiquement à un facteur d'élancement $L = \max(a, b) \geq 20h$ [07]. Désignons par M_x , le moment de flexion par unité de longueur sur les cotés parallèles à oy et par M_y , le moment de flexion par unité de longueur sur les cotés parallèles à ox comme représentés sur la figure (2-2).

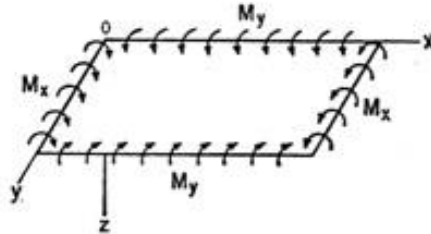


Fig. 2-2. Convention des signes des moments

Ces moments s'expriment, par exemple, en kN.m par mètre courant et ont donc la dimension d'une force (kN.m/m). En accord avec la convention générale des signes utilisés dans le cours de résistance des matériaux [08], nous compterons ces moments positivement s'ils tendent à comprimer la face supérieure de la plaque et à tendre la face inférieure.

Dans la théorie usuelle des plaques minces, nous admettons en outre les hypothèses complémentaires de base suivantes:

- L'hypothèse de linéarité matérielle (loi de Hooke)
- L'hypothèse de linéarité géométrique (petites déformations et petites rotations)
- Enfin, par simplicité, nous supposons de plus que la plaque est formée d'un seul matériau isotrope homogène.

2-3 Flexion pure des plaques

Soit un élément découpé hors de la plaque par deux paires de plans parallèles aux plans coordonnées Oxz et Oyz respectivement (fig. 2-3).

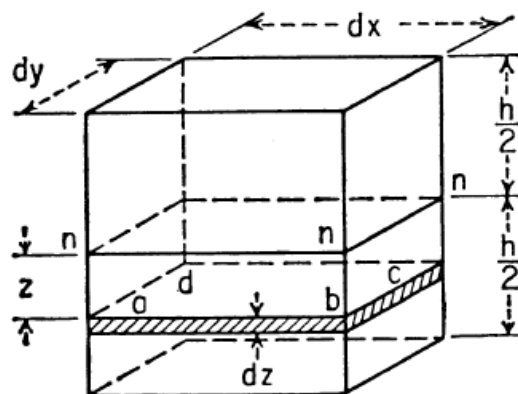


Fig. 2-3. Élément parallélépipédique

2-3-1 Déformée de la plaque

Dans l'étude de la flexion pure des poutres prismatiques, si la poutre est infiniment longue, ses sections droites restent planes pendant la flexion et tournent autour d'un axe neutre passant par le centre de gravité (hypothèse connue dite de Navier-Bernoulli ou de planéité des sections de poutre). Dans le cas d'une plaque, qui s'étend indéfiniment en tous sens, on peut faire une démonstration tout à fait semblable. On peut donc affirmer que les cotés latéraux dx dy dz restent plans au cours de la déformation et tournent autour des axes neutres correspondants « n-n » de manière à rester normaux au plan ou au feuillet moyen déformé de la plaque.

Dans ce cas, ce feuillet ne subit aucune déformation et constitue par hypothèse une surface neutre qui ne peut subir par conséquent ni allongement et ni raccourcissement. Ce qui revient à décrire la déformée de la plaque par le déplacement transversal de la surface de référence que nous notons par la fonction :

$$w=w(x,y) \quad (2-1)$$

2-3-2 Relation entre les moments et les courbures

Appelons par χ_x et χ_y les courbures des sections faites dans la surface neutre par les plans parallèles à oxz et oyz respectivement ; les déformations dans les directions x et y d'une lame élémentaire $abcd$ (fig. 2-3) située à la distance z de la surface neutre s'obtiennent comme dans le cas d'une poutre et valent :

$$\varepsilon_x = z\chi_x ; \quad \varepsilon_y = z\chi_y \quad (2-2)$$

D'après la loi de Hooke, on a :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) ; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad (2-3)$$

Et les contraintes qui s'exercent dans la lame $abcd$ valent :

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\nu^2}(\chi_x + \nu\chi_y) ; \quad \sigma_y = \frac{Ez}{1-\nu^2}(\chi_y + \nu\chi_x) \quad (2-4)$$

Elles sont proportionnelles à la distance z de la lame $abcd$ à la surface neutre et dépendent de la grandeur des deux courbures principales de la plaque fléchie. Ecrivons maintenant l'équilibre du parallélépipède $h.dx.dy$, i.e les couples des forces intérieurs sont égaux aux moments extérieurs appliqués $M_x.dy$ et $M_y.dx$ agissant sur les faces latérales de l'élément ; il vient alors :

$$\int_{-e/2}^{+e/2} \sigma_x \cdot z \cdot dy \cdot dz = M_x dy ; \int_{-e/2}^{+e/2} \sigma_y \cdot z \cdot dx \cdot dz = M_y dx \quad (2-5)$$

En y remplaçant σ_x et σ_y par leurs valeurs données par les expressions (2-4), on trouve :

$$M_x = D^* (\chi_x + \nu \chi_y) ; M_y = D^* (\chi_y + \nu \chi_x) \quad (2-6)$$

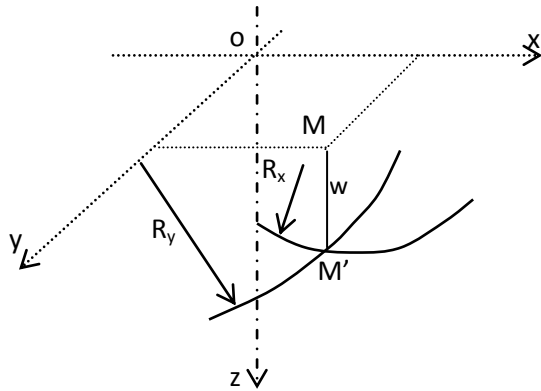
où:

$$D^* = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \int_{-e/2}^{+e/2} z^2 \cdot dz = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2-7)$$

La quantité D^* joue un rôle analogue au produit $E.I$ de l'équation de la ligne élastique ; c'est pourquoi on l'appelle la rigidité flexionnelle de la plaque.

Si nous supposons que les déplacements transversaux $w=w(x,y)$ de tout point M de la surface moyenne plaque sont faibles, nous pouvons adopter pour les courbures comme dans le cas des poutres fléchies, les expressions suivantes (fig. 2-4) :

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2-8)$$



$$\chi_x = \frac{1}{R_x} = \frac{-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} ; \chi_y = \frac{1}{R_y} = \frac{-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

R_x : rayon de courbure dans le plan oxz

R_y : rayon de courbure dans le plan oyz

avec $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} \cong 0$: hypothèse des pentes faibles

Fig. 2-4. Rayons de courbure de la plaque

Remplaçons les expressions des courbures dans l'équation (2-6), nous obtenons finalement:

$$M_x = -D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) ; M_y = -D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2-9)$$

Ces équations définissent la forme que prend après déformation le feuillet moyen de la plaque quand on donne les moments de flexion M_x et M_y .

2-3-3 Cas de quelques déformées particulières

1. Dans le cas particulier où $M_y=0$, la plaque fléchit comme une poutre ; à partir de l'équation (2-9), nous avons:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2-10)$$

C'est-à-dire que la plaque a en chaque point deux courbures principales opposées (surface dite anticlastique ou forme de la selle de cheval, (fig. 2-5)).

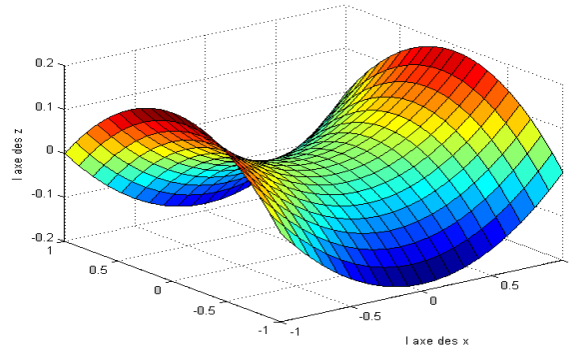


Fig. 2-5. Forme de la surface anticlastique ou selle de cheval

2. Si l'on fléchit la plaque de manière à lui donner une forme cylindrique, sa courbure dans le sens des y est nulle et les formules (2-9) se réduisent à :

$$M_x = D\chi_x = \frac{E.e^3}{12(1-\nu^2)} \chi_x ; M_y = \nu D\chi_x \quad (2-10)$$

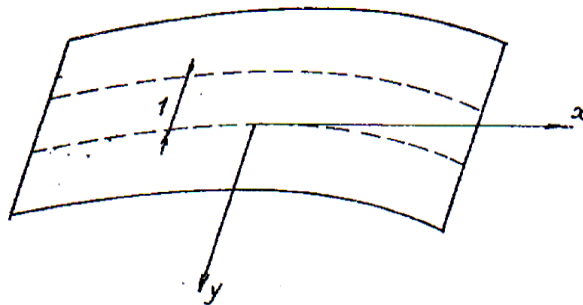


Fig 2-6. Déformée en forme cylindrique

Si l'on avait considéré une bande isolée de largeur unitaire et appliquée à cette bande la formule classique de la flexion des poutres, on aurait : $M_x = \frac{E \cdot s^3}{12} \chi_x$ puisque le moment d'inertie de la bande est $I = \frac{1 \cdot s^3}{12}$. En comparant ces deux résultats, on constate que la plaque est plus rigide que ne l'indique la théorie des poutres; cette augmentation de rigidité est de $\frac{1}{1-\nu^2}$ qui vaut, dans le cas de l'acier ($\nu=0,3$) 1.10. Elle est due au fait que, dans une poutre, la déformation transversale ε_y est libre de se produire à l'opposé de la plaque ou la déformation est empêchée par suite de la continuité dans le sens des y. Il naît de ce fait des contraintes σ_y qu'on peut déduire des formules (2-4).

3. Si $M_x = M_y = M$, les courbures du feuillet moyen dans les deux directions perpendiculaires sont égales et la plaque prend une forme sphérique (fig. 2-7); la courbure de la sphère est régit par l'équation:

$$\chi = \frac{M}{D \cdot (1 + \nu)} \quad (2-11)$$

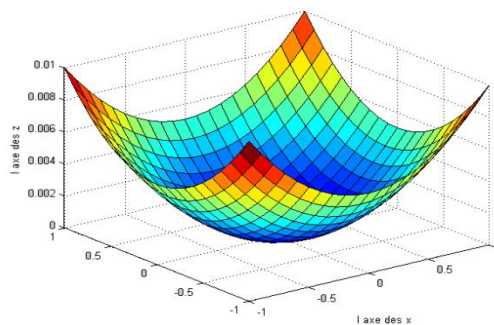


Fig. 2-7. Déformée en forme sphérique

Remarque:

Dans la théorie pure des plaques minces ci-dessus, on a supposé que le feuillet moyen de la plaque coïncidait avec sa surface neutre. Cette dernière ne subit donc aucune déformation pendant la flexion de la plaque. Cette condition n'est rigoureusement satisfaite que si ce feuillet moyen déformé devient une surface développable telle qu'un cylindre. En général, la plaque fléchit de telle sorte que la déformée de son feuillet moyen ne soit pas développable. Elle subit donc obligatoirement pendant la déformation des extensions ou des contractions.

Par conséquent, les formules obtenues dans la théorie de la flexion des plaques ne sont valables que si les contraintes dues aux variations de longueur des courbes tracées sur le

feuillelet moyen sont petites devant les contraintes dues aux moments de flexion i.e si les déformations du feuillelet moyen sont faibles devant déformations maximales dues à la flexion. Il faut, pour que cette condition soit remplie, que la flèche soit petite devant l'épaisseur h de la plaque.

2-4 Formulation analytique de la dynamique des plaques

Le comportement statique en flexion d'une plaque mince (i.e $\frac{\ell}{h} \geq 20$) est régi par l'équation différentielle suivante dite de Lagrange [8,9,10] dont la résolution consiste de trouver la solution $w=w(x,y)$ de telle façon que:

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D^*} \quad (2-12)$$

où $p=p(x,y)$ représente l'intensité par unité de surface des charges extérieures transversales appliquées à la partie supérieure de la plaque et D^* étant sa rigidité flexionnelle définie par la relation (2-7). Soulignons que l'équation différentielle (2-12) a été principalement obtenue en considérant invariables dans le temps les charges extérieures c'est-à-dire supposées appliquées lentement et progressivement pour négliger toute accélération sensible dans la plaque. Lorsque les charges appliquées varient dans le temps, il faut dans l'équation (2-12), introduire les effets d'amortissement et d'inertie.

2-4-1 Formulation de l'équation de mouvement

On n'examinera ici qu'une méthode permettant d'établir l'équation du mouvement de la plaque. Cette méthode, la plus simple, permet de comprendre le sens physique de l'équation de mouvement et des termes qui y apparaissent. Elle est basée sur le principe d'Alembert [5,6,9] selon lequel la dérivée par rapport au temps, de la quantité de mouvement, est égale à la somme des charges appliquées au système considéré.

Si nous introduisons les forces d'inertie par $-\rho h \ddot{w}$ et d'amortissement par $-c \dot{w}$, la fonction de charge apparaissant dans le terme de droite de l'équation différentielle (2-12) devient :

$$p - \rho h \ddot{w} - c \dot{w} \quad (2-13)$$

où ρ : masse volumique du matériau ; h : épaisseur de la plaque ; c : coefficient d'amortissement ; $w = w(x,y,t)$ et $p = p(x,y,t)$. En régime forcée, la force $p(x,y,t)$ est à l'origine de la réponse dynamique de la plaque.

Par suite, nous obtenons l'équation différentielle générale suivante qui régit le mouvement dynamique de la plaque en régime vibratoire forcé :

$$D^* \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p - \rho h \ddot{w} - c \dot{w} \quad (2-14a)$$

Où en utilisant la notation :

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

L'équation (2-14a) peut se mettre sous la forme :

$$D^* \nabla^2 \nabla^2 w = p - \rho h \ddot{w} - c \dot{w} \quad (2-14b)$$

Ayant établi l'équation différentielle générale du mouvement, il reste à voir comment la résoudre analytiquement. Remarquons tout d'abord que l'équation (2-14) ne suffit pas pour déterminer la réponse de la plaque $w(x,y,t)$; il faut encore spécifier les conditions initiales du mouvement : $w_0 = w(x,y,t=0)$ et $\dot{w} = \dot{w}(x,y,t=0)$ pour que le problème soit bien posé.

En l'absence des forces d'origine visqueuses, l'équation (2-14b) se réduit à :

$$D^* \nabla^2 \nabla^2 w = p - \rho h \ddot{w} \quad (2-14c)$$

Nous donnons ci-après la solution analytique de cette équation pour une plaque rectangulaire simplement appuyée à ses extrémités (fig. 2-8) selon l'une des situations suivantes à savoir en régime de vibration libre ou forcé.

2-4-2 Vibration libre d'une plaque rectangulaire simplement appuyée

Soit la plaque rectangulaire simplement appuyée à ses extrémités ayant comme dimensions a et b (fig. 2-8). En régime libre soit en l'absence des charges appliquées sur la plaque, l'équation de mouvement (2-14c) peut s'écrire en posant $\beta^2 = \frac{D^*}{\rho h}$:

$$\beta^2 \nabla^2 \nabla^2 w = -\ddot{w} \quad (2-15)$$

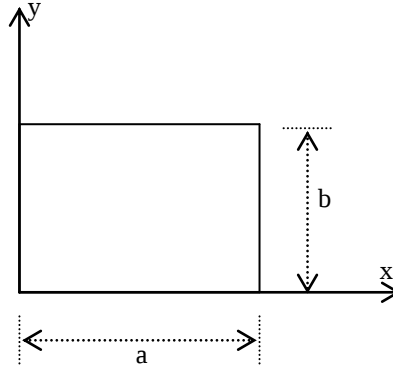


Fig. 2-8. Plaque rectangulaire simplement appuyée à ses deux extrémités

Utilisons la méthode de séparation de variables en écrivant:

$$w(x, y, t) = W(x, y) \cdot f(t) \quad (2-16)$$

En substituant l'équation (2-16) dans (2-15), nous aurons :

$$\beta^2 \nabla^2 \nabla^2 W(x, y) f(t) = -W(x, y) \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$$

En la divisant par $W(x, y)f(t)$, nous obtenons :

$$\beta^2 \frac{\nabla^2 \nabla^2 W(x, y)}{W(x, y)} = -\frac{1}{f(t)} \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$$

Le terme de gauche ne dépend que de x et y seulement et le terme de droite ne dépend que de t seulement. Alors, chaque membre doit être égal à une constante :

$$\beta^2 \frac{\nabla^2 \nabla^2 W(x, y)}{W(x, y)} = -\frac{1}{f(t)} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \omega^2$$

Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{f(t)} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = -\omega^2 \quad (2-17)$$

$$\beta^2 \frac{\nabla^2 \nabla^2 W(x, y)}{W(x, y)} = \omega^2 \quad (2-18)$$

ou ω^2 : constante et $\beta^2 = \frac{D^*}{\rho h} = \frac{E}{12(1-\nu^2)\rho h}$.

Les équations (2-17) et (2-18) peuvent se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \hat{\omega}^2 f(t) = 0 \quad (2-19)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 W(x, y) = \lambda^4 W(x, y) \quad (2-20)$$

où :

$$\lambda = \sqrt{\frac{\hat{\omega}}{\beta}} \quad (2-21)$$

La solution générale de l'équation (2-19) est de la forme :

$$f(t) = A \cos(\hat{\omega} t) + B \sin(\hat{\omega} t) \quad (2-22)$$

Afin d'intégrer la relation (2-17), posons :

$$W(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2-23)$$

Où m et n sont des nombres entiers. Cette fonction vérifie bien les conditions aux frontières d'une plaque rectangulaire simplement appuyée à ses extrémités. En effet :

$$w(x, y, t) = 0 ; M_x = D^* \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \text{ pour } x = a ; 0 \leq y \leq b$$

$$\text{et } w(x, y, t) = 0 ; M_y = D^* \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \text{ pour } y = b ; 0 \leq x \leq a$$

La substitution de l'équation (2-23) dans (2-20) conduit à :

$$\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 = \lambda_{mn}^4$$

Il vient avec $\lambda_{mn}^2 = \frac{\hat{\omega}_{mn}}{\beta} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) ;$

$$\omega_{mn} = \pi^2 \sqrt{\frac{D^*}{\rho h}} \cdot \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) = \pi^2 \beta \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (2-24)$$

La relation (2-24) représente la fréquence de vibration transversale d'une plaque simplement appuyée. A chaque fréquence caractéristique correspond une fonction caractéristique de la forme :

$$W_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2-25)$$

et une vibration caractéristique:

$$\left. \begin{aligned} w_{mn} &= W_{mn}(x, y) \left[A_{mn} \cos(\hat{\omega}_{mn} t) + B_{mn} \sin(\hat{\omega}_{mn} t) \right] \\ &= \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left[A_{mn} \cos(\hat{\omega}_{mn} t) + B_{mn} \sin(\hat{\omega}_{mn} t) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2-26)$$

La quantité $\hat{\omega}_{11} = \pi^2 \sqrt{\frac{D^*}{\rho h}} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$ qui correspond à $m = 1$ et $n = 1$ s'appelle la fréquence naturelle fondamentale dont le mode fondamental lui est correspondant est illustré sur la figure (2-9a). C'est une onde sinusoïdale dans les deux directions x et y et la flèche maximale se produit au centre de la plaque. Les modes de vibration qui correspondent respectivement aux fréquences $\hat{\omega}_{12}$ et $\hat{\omega}_{21}$ sont représentés sur les figures (2-9b,c).

En additionnant ensemble les solutions (2-26), nous aboutissons à la solution générale :

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left[A_{mn} \cos(\hat{\omega}_{mn} t) + B_{mn} \sin(\hat{\omega}_{mn} t) \right] \quad (2-27)$$

Les coefficients A_{mn} et B_{mn} sont déterminés à partir conditions initiales du problème. Supposons :

$$w(x, y, 0) = \varphi(x, y) \quad 0 \leq x \leq a \quad (2-27a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y) \quad 0 \leq y \leq b \quad (2-27b)$$

Il découle alors de l'équation (2-27) :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \varphi(x, y) \text{ et } \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\omega}_{mn} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \psi(x, y)$$

Les expressions A_{mn} et B_{mn} sont données par les relations suivantes en exploitant les propriétés d'orthogonalité de fonctions trigonométriques :

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \varphi(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (2-28a)$$

$$B_{mn} = \frac{4}{ab \omega_{mn}} \int_0^a \int_0^b \psi(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (2-28b)$$

Le mouvement décrit par l'équation (2-27) n'est pas, en général, périodique. C'est un mouvement périodique uniquement quand le rapport a/b est un nombre rationnel [10]. Si $a/b = p/q$ (p et q étant des nombres entiers), le mouvement présente une période :

$$\frac{2a^2 q^2}{\pi \beta (p^2 + q^2)} = \frac{2b^2 p^2}{\pi \beta (p^2 + q^2)}. \text{ Les vibrations d'une plaque carrée sont toujours périodiques.}$$

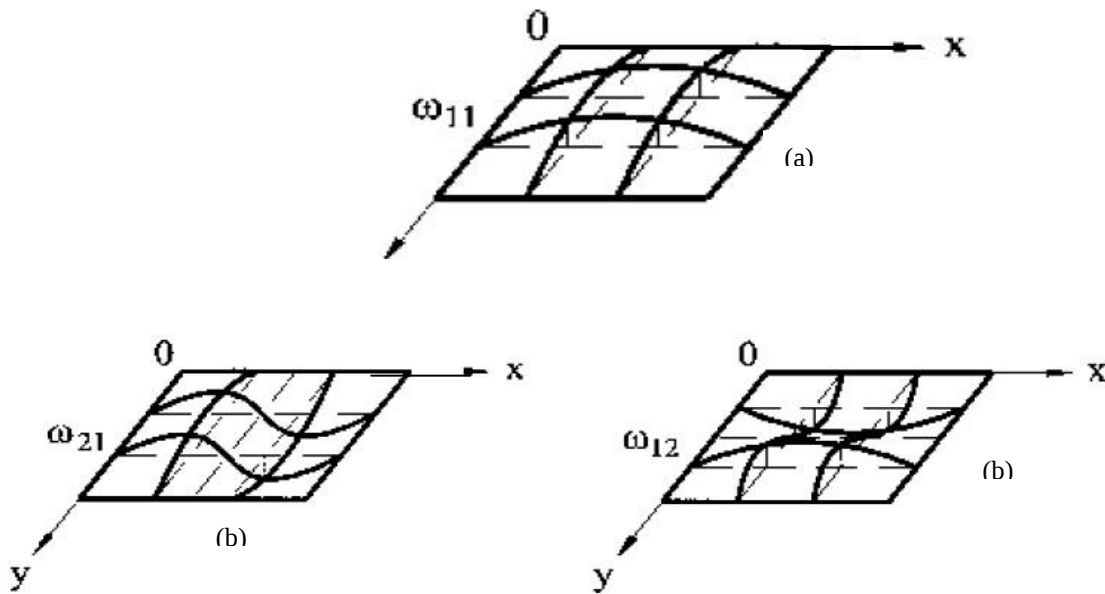


Fig. 2-9 : Allure des modes de vibration [09] ; (a) mode fondamentale ; (b) et (c) modes supérieurs

2-4-3 Vibration forcée d'une plaque rectangulaire simplement appuyée

L'équation de mouvement est donnée par :

$$D^* \nabla^2 \nabla^2 w = p(x, y, t) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2-29)$$

Dans le cas d'une plaque rectangulaire simplement appuyée à ses deux extrémités (fig. 2-8), le déplacement transversal de la plaque est donné par :

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2-30)$$

En portant l'équation (2-30) dans (2-29), nous aurons :

$$\begin{aligned} & \beta^2 \pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 f_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \Big\} \\ &= \frac{1}{\rho h} p(x, y, t) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 f_{mn}(t)}{dt^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \Big\} \end{aligned} \quad (2-33)$$

Multiplions les deux membres de l'équation (2-33) par $\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$ et intégrons entre $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$, l'équation (2-33) devient en utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques :

$$\frac{d^2 f_{mn}(t)}{dt^2} + \beta^2 \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) f_{mn}(t) = \frac{4}{ab\rho h} Q_{mn}(t) \quad (2-34)$$

Où :

$$Q_{mn}(t) = \int_0^a \int_0^b p(x, y, t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (2-35)$$

La solution générale de l'équation (2-34) prend alors la forme :

$$\begin{aligned} f_{mn}(t) &= A_{mn} \cos\left[\pi^2 \beta \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) t\right] \\ &+ B_{mn} \sin\left[\pi^2 \beta \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) t\right] + \frac{4}{\pi^2 ab\rho h \beta \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \\ &\times \int_0^t Q_{mn}(\tau) \sin\left[\pi^2 \beta \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) (t - \tau)\right] d\tau \end{aligned} \quad (2-36)$$

Par conséquent, à partir de l'équation (2-30), la solution générale de l'équation (2-29) devient finalement ;

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left[\pi^2 \beta \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) t\right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left[\pi^2 \beta \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) t\right] \\
 & + \frac{4}{\pi^2 ab \rho h \beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\
 & \times \int_0^t Q_{mn}(\tau) \sin\left[\pi^2 \beta \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) (t - \tau)\right] d\tau
 \end{aligned} \tag{2-37}$$

2-4-4 Cas particuliers

Soit une plaque rectangulaire simplement appuyée à ses extrémités ayant les dimensions a et b (fig. 2-8) supposée initialement au repos à l'instant $t = 0$. Déterminer la réponse dynamique de la plaque dans chacune des cas de chargement suivants :

- charge uniformément répartie d'intensité constante p_0
- charge uniformément répartie sinusoïdale $p = p_0 \sin(\omega t)$
- charge uniformément répartie cosinusoidale $p = p_0 \cos(\omega t)$

2-4-4-1 Charge uniformément répartie d'intensité constante : $p(x,y,t) = p_0$

A cause des conditions initiales imposées (plaque au repos :

$w(x, y, t = 0) = 0$; $\dot{w}(x, y, 0) = 0$), les A_{mn} et B_{mn} de l'équation (2-50) qui représentent l'effet de la vibration libre sont nulles.

Par suite, la fonction Q_{mn} donnée par l'équation (2-49) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 Q_{mn} &= \int_0^b dy \int_0^a p_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx = \frac{p_0 ab}{\pi^2 mn} (1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi) \\
 \text{soit : } Q_{mn} &= 0 \text{ si } m \text{ ou } n \text{ pair ou } Q_{mn} = \frac{4p_0 ab}{\pi^2 mn} \text{ si } m \text{ et } n \text{ impairs}
 \end{aligned} \tag{a}$$

En substituant l'équation (a) dans (2-51), nous obtenons :

$$f_{mn}(t) = \frac{16p_0}{\pi^4 mn \rho h \beta \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \int_0^t \sin\left[\pi^2 \beta \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) (t - \tau)\right] d\tau$$

$$= \frac{16p_0}{\pi^6 mn \rho h \beta^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} [1 - \cos \pi^2 \beta \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) t] \text{ pour } m=1,3,\dots \text{ et } n=1,3,\dots \quad (b)$$

Nous aurons finalement en remplaçant (b) dans (2-46) :

$$w(x, y, t) = \frac{16p_0}{\pi^6 \rho h \beta^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \times [1 - \cos \pi^2 \beta \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) t] \text{ pour } m=1,3,\dots \text{ et } n=1,3,\dots \quad (c)$$

2-4-4-2 Charge uniformément répartie sinusoïdale : $p = p_0 \sin(\hat{\omega}t)$

Les A_{mn} et B_{mn} étant nuls, les fonctions $Q_{mn}(t)$ données par l'équation (2-49) sont :

$$Q_{mn}(t) = p_0 \sin(\hat{\omega}t) \int_0^b dy \int_0^a dx \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \frac{p_0 ab}{\pi^2 mn} \sin(\hat{\omega}t) (1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi) \\ \text{soit : } Q_{mn} = 0 \text{ si } m \text{ ou } n \text{ pair ou } Q_{mn} = \frac{4p_0 ab}{\pi^2 mn} \sin(\hat{\omega}t) \text{ si } m \text{ et } n \text{ impairs} \quad (d)$$

En introduisant l'équation (d) dans (2-50), nous obtenons :

$$f_{mn}(t) = \frac{16p_0}{\pi^4 mn \rho h \beta \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^0} \int_0^t \sin(\hat{\omega}\tau) \sin\left[\pi^2 \beta \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) (t - \tau)\right] d\tau \\ = \frac{16p_0}{\pi^4 \rho h \beta \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) mn [\pi^4 \beta^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \hat{\omega}^2]} \\ \times \left[\pi^2 \beta \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sin(\hat{\omega}t) - \hat{\omega} \sin\left\{ \pi^2 \beta \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) t \right\} \right] \text{ pour } m=1,3,\dots \text{ et } n=1,3,\dots \quad (e)$$

Nous aurons finalement en remplaçant (e) dans (2-46) :

$$w(x, y, t) = \frac{16p_0}{\pi^2 \rho h} \left\{ \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{mn [\pi^4 \beta^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - (\hat{\omega})^2]} \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \Bigg\} \sin(\hat{\omega}t) \\ & - \frac{16p_0 \hat{\omega}}{\pi^4 \rho h \beta} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) [\pi^4 \beta^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 - (\hat{\omega})^4]} \\ & \times \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin[\pi^2 \beta \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) t]. \end{aligned} \quad (f)$$

2-4-4-3 Charge uniformément répartie cosinusoidale : $p = p_0 \cos(\hat{\omega}t)$

Les A_{mn} et B_{mn} étant nuls, les fonctions $Q_{mn}(t)$ données par l'équation (2-49) sont :

$$\begin{aligned} Q_{mn}(t) &= p_0 \cos(\hat{\omega}t) \int_0^b dy \int_0^a dx \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \frac{p_0 ab}{\pi^2 mn} \cos(\hat{\omega}t) (1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi) \\ \rightarrow Q_{mn} &= 0 \text{ si } m \text{ ou } n \text{ pair ou } Q_{mn} = \frac{4p_0 ab}{\pi^2 mn} \cos(\hat{\omega}t) \text{ si } m \text{ et } n \text{ impairs} \end{aligned} \quad (g)$$

En introduisant l'équation (g) dans (2-36), nous obtenons en fonction de la pulsation ω_{mn} (équ. 2-24) :

$$f_{mn}(t) = \frac{16p_0}{\pi^2 \rho h m n \omega_{mn}} \int_0^t \cos(\hat{\omega}t) \cdot \sin[\omega_{mn} \cdot (t - \tau)] d\tau$$

En utilisant les transformations trigonométriques suivantes [11] :

$$\begin{aligned} \cos mx \cos nx &= \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] ; \sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] ; \\ \sin mx \sin nx &= \frac{1}{2} [-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x], \text{ nous aboutissons à la relation:} \end{aligned}$$

$$f_{mn}(t) = \frac{16p_0}{\pi^4 \rho h m n} \cdot \frac{\cos \hat{\omega}t - \cos \omega_{mn}t}{(\omega_{mn}^2 - \hat{\omega}^2)} \quad (h)$$

Après une série d'intégration successive, nous obtenons finalement en remplaçant (h) dans (2-30) :

$$w(x, y, t) = \frac{16p_0}{\pi^2 \rho h} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos \hat{\omega} t - \cos \omega_{mn} t}{mn(\omega_{mn}^2 - \hat{\omega}^2)} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (i)$$

Ce qui est bien le résultat donné par Ventsel dans la référence [09]

2-5 Résolution manuelle de plaques rectangulaires en imposant des mouvements non nuls aux appuis

Afin de mieux comprendre aisément les développements mathématiques et numériques de la formulation matricielle qui seront présentés dans les chapitres qui suivent, nous allons dans cette section, montrer comment résoudre d'une manière manuelle deux cas académiques de plaque rectangulaire en considérant les déplacements imposés aux appuis. Le premier cas consiste en une plaque parfaitement encastree sur ses bords et le deuxième à une plaque encastree sur deux bords et simplement appuyée sur les deux autres.

Les plaques seront discrétisées en un seul élément fini non conforme de type rectangulaire à 4 nœuds ayant trois degrés de liberté par nœuds (w : déplacement transversal, θ_x : rotation le long de l'axe des x et θ_y : rotation le long de l'axe des y). Les éléments des matrices respectivement de rigidité $[K]$ et de masse consistante $[M]$ seront directement calculés à l'aide des tables de Yang [12] récapitulées en Annexe A.

2-5-1 Cas d'une plaque parfaitement encastree sur ses bords

Soit la plaque de forme rectangulaire ($2a \times 2b$), représentée sur la figure (2-10), parfaitement encastree sur ses bords et chargée en son milieu par une charge dynamique d'intensité $F(t) = F_0 \cos \Omega t$.

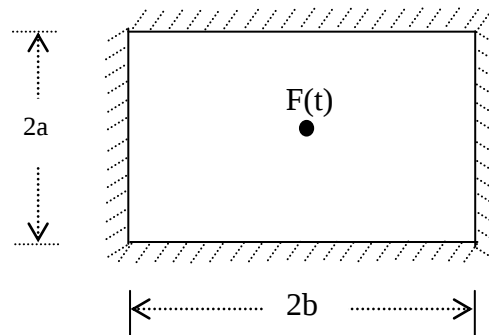


Fig 2-10. Plaque rectangulaire parfaitement encastree sur ses bords

On donne : Largeur, $2a=1.2\text{m}$; Longueur, $2b=1.8\text{m}$; Module d'élasticité, $E=70000\text{MPa}$; Masse volumique, $\rho= 2500 \text{ kg/m}^3$; Epaisseur, $e=7\text{mm}$; Coefficient de Poisson, $\nu=0.25$; Amplitude de la force dynamique, $F_0=10\text{kN}$.

Proposons d'analyser la réponse dynamique de la plaque par la méthode d'intégration directe de Wilson- θ d'abord en l'absence de toute excitation d'appui et ensuite en présence des mouvements imposés aux appuis. Nous supposons nul l'amortissement (ζ) afin de simplifier les calculs.

En raison de la symétrie, seul un quart de la plaque est analysé (fig. 2-11a) et discrétisé par un seul élément fini non conforme dont sa déformée est représentée sur la figure (2-11b).

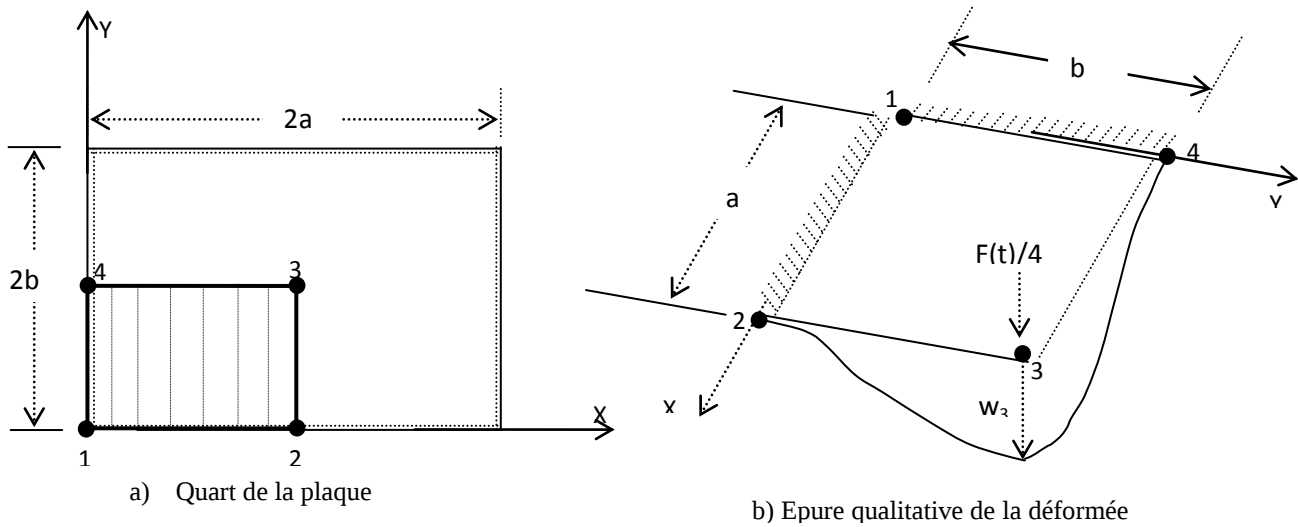


Fig 2-11. Discretisation du quart de la plaque en un seul élément fini

2-5-1-1 Sans déplacements imposés

a) Formulation de l'équation d'équilibre de mouvement

L'équation d'équilibre de mouvement, soit $[M]\{\ddot{d}\} + [K]\{d\} = \{F\}$; $[C] = 0$ (amortissement : $\zeta=0$), composée selon le seul degré de liberté actif non nul (w_3 : déplacement transversal du nœud 3) conduit à :

- Matrice de rigidité (table de Yang) :

$$[K] = k_{w_3, w_3} \equiv k_{11} ; D^* = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{70000 \times 7^3}{12(1-0.25^2)} = 2134 \text{ N.m}^2/\text{m} ;$$

$$\alpha_1 = \frac{156}{35} = \alpha_2 ; \alpha_3 = \frac{72}{25} ; \alpha_4 = 0 = \alpha_5 = \alpha_6 ; \alpha_7 = 169 \rightarrow$$

$$k_{11} = \frac{D^*}{ab} \left[-\frac{156}{35} \left(\frac{a}{b} \right)^2 + \left(\frac{54}{35} \left(\frac{b}{a} \right)^2 - \frac{72}{25} \right) \right] = \frac{2134}{0.6 \times 0.9} \left[\frac{156}{35} \left(\frac{0.9}{0.6} \right)^2 + \frac{156}{35} (0.9)^2 + \frac{72}{25} \right] = 59080.19$$

$$k_{w_3, w_3} = 59089.19 \text{ N/m.}$$

- Matrice masse consistante (table de Yang) :

$$[M] \equiv m_{w_3, w_3} \equiv m_{11} = \frac{\rho a b e}{1225} \alpha_7 a^{\alpha_5} b^{\alpha_6} = \frac{2500 \times 0.6 \times 0.9 \times 7 \times 10^{-3}}{1225} \times 169 = 1.30 \text{ kg}$$

NB : Matrice masse concentrée : $[M] \equiv m_{33} = \frac{\rho a b e}{4} = \frac{2500 \times 0.6 \times 0.9 \times 7 \times 10^{-3}}{4} = 2.36 \text{ kg}$.

L'équation d'équilibre de mouvement selon la direction transversale du nœud 3 s'écrit donc par exemple en utilisant la notion de concentration de masse:

$$59089.19 w_3 + 2.36 \ddot{w}_3 = F_3^*(t) = \frac{F_0}{4} \cos \Omega t = 2500 \cos \Omega t \text{ où la pulsation fondamentale est de}$$

$$\text{valeur égale à: } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 158.23 \approx 158 \text{ rd/s.}$$

b) Application de l'algorithme de Wilson- θ

Soit $\bar{K} w_{3,t+\theta \Delta t} = \bar{F}_{t+\theta \Delta t}$ où avec $\alpha' = 0 = \beta$ (coefficients de Raleigh ; $c_{33} = \alpha' m_{33} + \beta k_{33} = 2\omega \zeta$;

$$\zeta=0), \text{ nous avons : } \bar{K} = k_{33} + \frac{6m_{33}}{(\theta \Delta t)^2} ; \bar{F}_{t+\theta \Delta t} = F_{3,t} + \theta(F_{3,t+\Delta t} - F_{3,t}) + m_{33} \left(\frac{6\dot{w}_{3,t}}{(\theta \Delta t)^2} + \frac{6\ddot{w}_{3,t}}{\theta \Delta t} + 2\ddot{w}_{3,t} \right), \text{ ce}$$

qui nous donne la solution $w_{3,t+\theta \Delta t}$. La récurrence suivante permet d'obtenir l'accélération, la vitesse et le déplacement à l'instant $t+\Delta t$:

$$\ddot{w}_{3,t+\theta \Delta t} = \frac{6}{(\theta \Delta t)^2} (w_{3,t+\theta \Delta t} - w_{3,t}) - \frac{6\dot{w}_{3,t}}{\theta \Delta t} - 2\ddot{w}_{3,t} ; \quad \ddot{w}_{3,t+\Delta t} = \ddot{w}_{3,t} + \frac{1}{\theta} (\ddot{w}_{3,t+\theta \Delta t} - \ddot{w}_{3,t}) ;$$

$$\dot{w}_{3,t+\Delta t} = \dot{w}_{3,t} + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{w}_{3,t+\Delta t} + \ddot{w}_{3,t}) ; \quad w_{3,t+\Delta t} = w_{3,t} + \Delta t \dot{w}_{3,t} + \frac{\Delta t^2}{6} (\ddot{w}_{3,t+\Delta t} + 2\ddot{w}_{3,t}).$$

c) Intégration temporelle

Avec $\Omega = 158 \text{ rd/s}$, $T=2\pi/\Omega = 0.0397 \text{ s}$, $\Delta t = T/20 \approx 0.002 \text{ s}$ et en considérant nulles les conditions initiales ($t=0$: $w_3 = 0 = \dot{w}_3 = \ddot{w}_3$), l'intégration pas-à-pas vas nous conduire aux résultats récapitulés dans le tableau (2-1) :

Tableau 2-1. Intégration temporelle de la plaque encastree sans déplacement d'appuis

t(s)	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$
$w_3 \times 10^{-3}$ (mm)	1.23	4.97	10.86	17.55	23.27	26.27	25.09	18.83	7.33	-8.73
$\ddot{w}_3$ (m/s ²)	682.1 2	675.07	377.01	-55.17	-523.19	- 943.88	- 1244.64	- 1368.96	- 1283.29	- 981.98
$\dot{w}_3$ (m/s)	0.68	2.03	3.07	3.39	2.82	1.36	-8.16	-3.41	-6.05	-8.30
w_3 (mm)	0.45	3.14	8.31	14.88	21.21	25.50	26.14	21.98	12.54	-1.83

2-5-1-2 Avec déplacements d'appuis imposés

a) Formulation des équations d'équilibre de mouvement

Composons les équations d'équilibre de mouvement selon les degrés de liberté non nuls w_3 et w_4 (fig. 2-12) et écrivons-les sous la forme suivante:

$$\text{Selon } w_3 : k_{w_3, w_3} w_3 + k_{w_3, w_4} w_4 + m_{w_3, w_3} \ddot{w}_3 + m_{w_3, w_4} \ddot{w}_4 = F_3(t) \quad (1)$$

$$\text{Selon } w_4 : k_{w_4, w_3} w_3 + k_{w_4, w_4} w_4 + m_{w_4, w_3} \ddot{w}_3 + m_{w_4, w_4} \ddot{w}_4 = 0 \quad (2)$$

Soit sous forme condensée :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_{w_3, w_3} & k_{w_3, w_4} \\ k_{w_4, w_3} & k_{w_4, w_4} \end{bmatrix}}_{[K]} \underbrace{\begin{Bmatrix} w_3 \\ w_4 \end{Bmatrix}}_{[M]} + \underbrace{\begin{bmatrix} m_{w_3, w_3} & m_{w_3, w_4} \\ m_{w_4, w_3} & m_{w_4, w_4} \end{bmatrix}}_{[F]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{w}_3 \\ \ddot{w}_4 \end{Bmatrix}}_{[F]} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F_3(t) \\ 0 \end{Bmatrix}}_{[F]} \quad (3)$$

Transposons au second membre de l'équation (1), le terme qui correspond au degré de liberté imposé w_4 . On obtient alors le système d'équations de mouvement ci-après en supposant par exemple concentrée la matrice masse (i.e. $m_{w_3, w_4} = 0 = m_{w_4, w_3}$) et avec $F_3(t) = \frac{F_0}{4} \cos \Omega t$ et $w_4 = \delta(t) = \delta_0 \cos \Omega t$:

$$\begin{bmatrix} k_{w_3, w_3} & 0 \\ k_{w_4, w_3} & k_{w_4, w_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_3 \\ w_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{w_3, w_3} & 0 \\ m_{w_4, w_3} & m_{w_4, w_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_3 \\ \ddot{w}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \Omega t \left(\frac{F_0}{4} - \delta_0 k_{w_3, w_4} \right) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En omettant la deuxième équation d'équilibre, nous obtenons l'équation suivante que nous allons résoudre comme précédemment par l'algorithme de Wilson- θ :

$$k_{w_3, w_3} w_3 + m_{w_3, w_3} \ddot{w}_3 = F_3^*(t) = \cos \Omega t \left(\frac{F_0}{4} - \delta_0 k_{w_3, w_4} \right) \quad (4)$$

A l'aide des tables de Yang, nous avons : $k_{w_3, w_3} = 59080.19 \text{ N/m}$; $m_{w_3, w_3} = 2.36 \text{ kg}$;
 $k_{w_3, w_4} \equiv k_{21}$; $D^* = \frac{Ee^3}{12.(1-\nu^2)} = \frac{70000 \times 7^3}{12.(1-0.25^2)} = 2134 \text{ N.m}^2/\text{m}$; $\alpha_1 = \frac{156}{35} = \alpha_2$; $\alpha_3 = \frac{72}{25}$;

$\alpha_4 = 0 = \alpha_5 = \alpha_6 ; \alpha_7 = 169 \rightarrow k_{w_3, w_4} = \frac{2134}{0.6 \times 0.9} \left[\frac{-156}{35} \left(\frac{0.9}{0.6} \right)^2 + \frac{54}{35} \left(\frac{0.6}{0.9} \right)^2 - \frac{72}{25} \right] = -48304.61$
N/m ; soit d'une manière explicite avec $\delta_0 = 3.5$ mm :

$$59089.19 w_3 + 2.36 \ddot{w}_3 = F_3^r(t) = 2669.07 \cos \Omega t \quad (5)$$

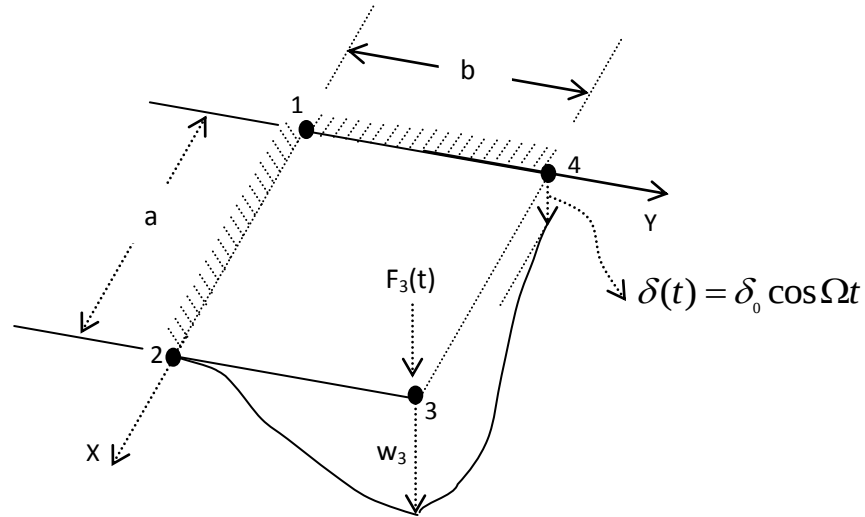


Fig 2-12. Plaque encastree avec un déplacement d'appui du nœud 4

b) Intégration temporelle

Avec $\Omega = 158$ rd/s, $\Delta t = T/20 \approx 0.002$ s et les conditions initiales nulles ($t=0 : w_3 = 0 = \dot{w}_3 = \ddot{w}_3$), l'intégration pas-à-pas de l'équation (5) vas nous conduire aux résultats du tableau (2-2) :

Tableau 2-2. Intégration temporelle de la plaque encastree- sans déplacement d'appuis et avec masse concentrée

t(s)	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$
$\overline{w_3} \times 10^{-3}$ (mm)	1.31	5.30	11.50	18.73	24.84	28.05	26.79	20.01	7.82	-9.32
$\ddot{w_3}$ (m/s ²)	728.3	720.7	402.5	-58.90	-558.6	-1000.8	-1329	-1462	-1370	-1048
$\dot{w_3}$ (m/s)	0.72	2.17	3.28	3.62	3.62	1.45	-0.87	-3.65	-6.46	-8.87
w_3 (mm)	0.48	3.35	8.87	15.89	21.21	27.23	27.91	23.47	13.39	-1.95

c) Considération de la masse consistante

Reconsidérant l'équation d'équilibre de mouvement (1), soit :

$$k_{w_3,w_3} w_3 + k_{w_3,w_4} w_4 + m_{w_3,w_3} \ddot{w}_3 + m_{w_3,w_4} \ddot{w}_4 = F_3(t). \quad \text{Avec} \quad w_4 = \delta(t) = \delta_0 \cos \Omega t \quad \text{et} \quad \ddot{w}_4 = -\delta_0 \Omega^2 \cos \Omega t, \quad \text{et en transposant au second membre les termes imposés, nous aurons :}$$

$$k_{w_3,w_3} w_3 + m_{w_3,w_3} \ddot{w}_3 = F_3^*(t) = F_{3,p}(t) - F_{3,w_2}(t) - F_{3,w}(t)$$

où : $F_{3,p}(t) = \frac{F_0}{4} \cos \Omega t$; $F_{3,w_2}(t) = \delta_0 k_{w_3,w_4} \cos \Omega t$; $F_{3,w}(t) = \delta_0 m_{w_3,w_4} \Omega^2 \cos \Omega t$. L'application de l'algorithme de Wilson- θ , avec $k_{w_3,w_2} = -48308 \text{ N/m}$ et $m_{w_3,w_2} = 0.45 \text{ kg}$, nous conduira aux résultats donnés dans le tableau (2-3) :

Tableau 2-3. Intégration temporelle de la plaque encastree- avec déplacement d'appuis et masse consistante

t(s)	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$
$\overline{w_3} \times 10^{-3}$ (mm)	2.36	10.19	23.01	36.84	46.39	46.73	34.59	9.22	-27.18	-69.68
$\ddot{w_3}$ (m/s ²)	1306	1666	809.1	-533.6	-1918	-2992	-3482	-3231	-2223	-5886
$\dot{w_3}$ (m/s)	1.30	4.25	6.71	6.99	4.55	-0.33	-6.76	-13.44	-18.36	-21.66
w_3 (mm)	0.86	6.26	17.45	31.51	43.44	47.99	41.09	20.92	-11.52	-52.34

Remarque : En programmation, on détermine d'abord le vecteur équivalent de charge $\overline{F}_{t+\theta\Delta t}$ en considérant les déplacements imposés comme étant actifs mais qui seront réduit par un artifice algorithmique qui sera développé dans les chapitres subséquents. Dans ce cas de la plaque encastree avec un seul déplacement imposé au nœud 4, nous aurons en considérant les notions vectorielle et matricielle :

$$\left\{ \overline{F}_{t+\theta\Delta t} \right\} = \left\{ \begin{matrix} F_{3,t} \\ F_{4,t} \end{matrix} \right\} + \theta \left(\left\{ \begin{matrix} F_{3,t+\Delta t} \\ F_{4,t+\Delta t} \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} F_{3,t} \\ F_{4,t} \end{matrix} \right\} \right) + [M] \left(\frac{6}{(\theta\Delta t)^2} \left\{ \begin{matrix} w_3 \\ w_4 \end{matrix} \right\} + \frac{6}{\theta\Delta t} \left\{ \begin{matrix} \dot{w}_3 \\ \dot{w}_4 \end{matrix} \right\} + 2 \left\{ \begin{matrix} \ddot{w}_3 \\ \ddot{w}_4 \end{matrix} \right\} \right)$$

2-5-2 Cas d'une plaque avec deux bords encastrés et simplement appuyée sur les deux autres

Soit la plaque du paragraphe précédent mais dans laquelle deux bords opposés sont maintenant considérés simplement appuyés ainsi modélisée dans la figure (2-13). Proposons d'analyser sa réponse dynamique de la même manière d'abord sans déplacement d'appuis et

ensuite en considérant les déplacements imposés ; l'amortissement (ζ) étant supposé nul pour des fins de simplification des calculs.

2-5-2-1 Déplacements imposés nuls

- Equations d'équilibre de mouvement

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [K] \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} k_{w3,w3} & k_{w3,\theta y2} \\ k_{\theta y2,w3} & k_{\theta y2,\theta y2} \end{bmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} [M] \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} m_{w3,w3} & m_{w3,\theta y2} \\ m_{\theta y2,w3} & m_{\theta y2,\theta y2} \end{bmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} [F] \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} F_3(t) = \frac{F_0}{4} \cos \Omega t \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \ddot{w}_3 \\ \ddot{\theta}_{y2} \end{bmatrix}$$

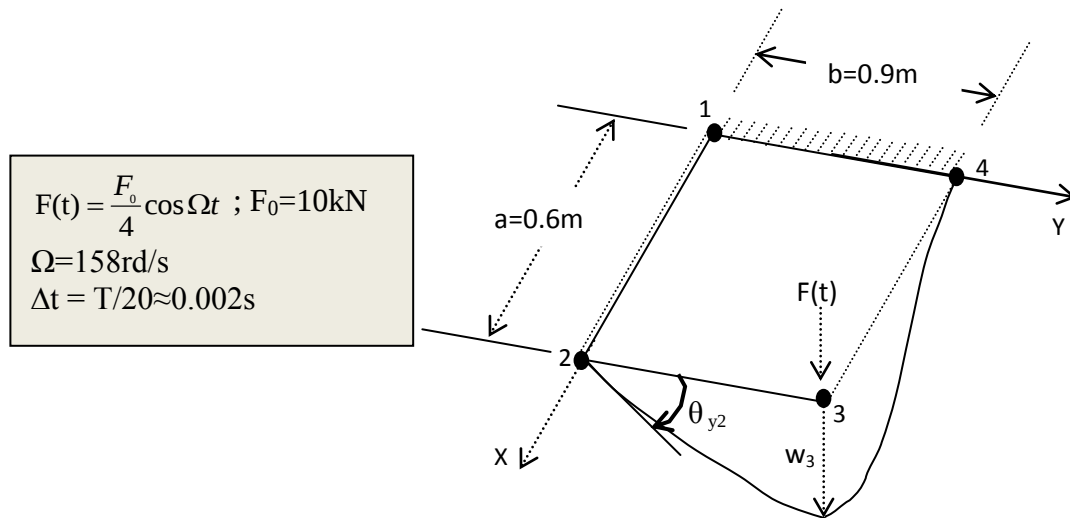


Fig 2-13. Discrétisation et la déformée de la plaque

Utilisons les tables de Yang pour évaluer les éléments des matrices de rigidité et de masse :

$$k_{w3,w3} = 59080.19 \text{ N/m} ; m_{w3,w3} = 1.30 \text{ kg} ; k_{w3,w4} \equiv k_{21} ; D^* = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{70000 \times 7^3}{12(1-0.25^2)} = 2134$$

$$\text{N.m}^2/\text{m} ; k_{w3,\theta y2} \equiv -k_{12,1} ; k_{12,1} = \frac{D^*}{ab} [\alpha_1 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \alpha_3 + \alpha_4 \nu] a^{\alpha_5} b^{\alpha_6} ; \alpha_1 = -\frac{13}{35} ; \alpha_2 = \frac{78}{35} ;$$

$$\alpha_3 = \frac{6}{25} ; \alpha_4 = 0 = \alpha_5 ; \alpha_6 = 1 ; \alpha_7 = -\frac{169}{12} \rightarrow$$

$$k_{12,1} = \frac{2134}{0.6 \times 0.9} \left[-\frac{13}{35} \left(\frac{0.9}{0.6}\right)^2 + \frac{78}{35} \left(\frac{0.6}{0.9}\right)^2 + \frac{6}{25} \right] \times 0.9 = 1422.67 \text{ N/m} \rightarrow k_{w3,\theta y2} \equiv -1422.67 \text{ N/m}$$

$$\begin{aligned}
 ; m_{w3,\theta y2} &= -m_{12,1} ; m_{12,1} = \frac{\rho a b e}{1225} \alpha_7 a^{\alpha_5} b^{\alpha_6} = \frac{2500 \times 0.6 \times 0.9 \times 7 \times 10^{-3}}{1225} \times \frac{-169}{12} \times 0.9 = -0.098 \rightarrow \\
 m_{w3,\theta y2} &= 0.098 \text{ kg.m} ; k_{\theta y2,\theta y2} \equiv k_{9,9} ; k_{9,9} = \frac{D^*}{ab} [\alpha_1 (\frac{a}{b})^2 + \alpha_2 (\frac{b}{a})^2 + \alpha_3 + \alpha_4 \nu] a^{\alpha_5} b^{\alpha_6} ; \alpha_1 = \frac{4}{35} ; \\
 \alpha_2 &= \frac{52}{35} ; \alpha_3 = \frac{8}{25} ; \alpha_4 = 0 = \alpha_5 ; \alpha_6 = 2 ; \alpha_7 = \frac{13}{3} \rightarrow \\
 k_{9,9} &= \frac{2134}{0.6 \times 0.9} [\frac{4}{35} (\frac{0.9}{0.6})^2 + \frac{52}{35} (\frac{0.6}{0.9})^2 + \frac{8}{25}] \times (0.9)^2 = 3969.24 \rightarrow k_{\theta y2,\theta y2} = 3969.24 \text{ N.m} ; \\
 m_{w3,\theta y2} &= m_{9,9} ; m_{9,9} = \frac{\rho a b e}{1225} \alpha_7 a^{\alpha_5} b^{\alpha_6} = \frac{2500 \times 0.6 \times 0.9 \times 7 \times 10^{-3}}{1225} \times \frac{13}{3} \times (0.9)^2 = 0.03 \rightarrow \\
 m_{w3,\theta y2} &= 0.03 \text{ kg.m}^2.
 \end{aligned}$$

d'où les équations d'équilibre de mouvement en utilisant la notion de masse consistante:

$$\begin{aligned}
 &\underbrace{\quad \quad \quad}_{[K]} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{[M]} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{[F]} \\
 &\begin{bmatrix} 59089.19 & -1422.67 \\ -1422.67 & 3969.24 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_3 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.30 & 0.098 \\ 0.098 & 0.03 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_3 \\ \ddot{\theta}_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2500 \cos 158t \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

- a) Trouvons d'abord la solution en considérant la notion de la masse concentrée selon les degrés de liberté actifs de translation, tous les autres étant nuls. Dans ce cas, $m_{w3,w3} = 2.36 \text{ kg}$ et $m_{w3,\theta y2} = 0 = m_{\theta y2,w3}$. Les deux équations d'équilibre vont s'écrire alors :

$$\begin{aligned}
 &\underbrace{\quad \quad \quad}_{[K]} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{[M]} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{[F]} \\
 &\begin{bmatrix} 59089.19 & -1422.67 \\ -1422.67 & 3969.24 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_3 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.36 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_3 \\ \ddot{\theta}_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2500 \cos 158t \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

L'algorithme de Wilson- θ , l'amortissement étant nul $C=0$, conduira à :

$$\begin{aligned}
 \bar{K} d_{t+\theta \Delta t} &= \bar{F}_{t+\theta \Delta t} \rightarrow d_{t+\theta \Delta t} = \begin{Bmatrix} w_{3,t+\theta \Delta t} \\ w_{\theta y2,t+\theta \Delta t} \end{Bmatrix} ; \quad \bar{K} = K + \frac{6}{(\theta \Delta t)^2} M = \\
 &\begin{bmatrix} 59089.19 & -1422.67 \\ -1422.67 & 3969.24 \end{bmatrix} + \frac{6}{(1.4 \times 0.002)^2} + \begin{bmatrix} 2.36 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1864211.5 & -1422.67 \\ -1422.67 & 3924 \end{bmatrix} \\
 F_{t+\theta \Delta t} &= \begin{Bmatrix} 2500 \cos 158t \\ 0 \end{Bmatrix} + 1.4 \begin{Bmatrix} 2500 \cos 158(t + \Delta t) - 2500 \cos 158t \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$+ \begin{bmatrix} 2.36 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left[\frac{6}{(\theta \Delta t)^2} \begin{Bmatrix} w_{3,t} \\ \theta_{y2,t} \end{Bmatrix} + \frac{6}{\theta \Delta t} \begin{Bmatrix} \dot{w}_{3,t} \\ \dot{\theta}_{y2,t} \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} \ddot{w}_{3,t} \\ \ddot{\theta}_{y2,t} \end{Bmatrix} \right]$$

Ayant calculé la solution au temps $t+\theta\Delta t$, soit $d_{t+\theta\Delta t} = \begin{Bmatrix} w_{3,t+\theta\Delta t} \\ w_{\theta y2,t+\theta\Delta t} \end{Bmatrix}$, on calcule l'accélération, la vitesse et les déplacements comme suit :

$$\ddot{d}_{t+\Delta t} = \begin{Bmatrix} \ddot{w}_{3,t+\Delta t} \\ \ddot{\theta}_{y2,t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{w}_{3,t} \\ \ddot{\theta}_{y2,t} \end{Bmatrix} + \frac{1}{\theta} \left[\begin{Bmatrix} \ddot{w}_{3,t+\theta\Delta t} \\ \ddot{\theta}_{y2,t+\theta\Delta t} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \ddot{w}_{3,t} \\ \ddot{\theta}_{y2,t} \end{Bmatrix} \right]; \quad \dot{d}_{t+\Delta t} = \begin{Bmatrix} \dot{w}_{3,t} \\ \dot{\theta}_{y2,t} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \left[\begin{Bmatrix} \ddot{w}_{3,t+\Delta t} \\ \ddot{\theta}_{y2,t+\Delta t} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{w}_{3,t} \\ \ddot{\theta}_{y2,t} \end{Bmatrix} \right]$$

$$d_{t+\Delta t} = \begin{Bmatrix} w_{3,t} \\ \theta_{y2,t} \end{Bmatrix} + \Delta t \begin{Bmatrix} \dot{w}_{3,t} \\ \dot{\theta}_{y2,t} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t^2}{6} \left[\begin{Bmatrix} \ddot{w}_{3,t+\Delta t} \\ \ddot{\theta}_{y2,t+\Delta t} \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} \ddot{w}_{3,t} \\ \ddot{\theta}_{y2,t} \end{Bmatrix} \right]$$

Le processus conduit aux résultats du tableau (2-4) (les conditions initiales étant nulles, $t=0$: $w_3 = 0 = \dot{w}_3 = \ddot{w}_3$; $\Delta t = 0.002s$) :

Tableau 2-4. Intégration temporelle de la plaque avec deux bords encastres et simplement appuyée sur les deux autres : masse concentrée

t(s)	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$
$w_3 \times 10^{-3}$ (mm)	0.45	3.14	8.31	14.9	21.25	25.58	26.26	22.15	12.77	-15.58.68
$\theta_{y2} \times 10^{-4}$ (rad)	1.59	11.13	29.48	52.81	75.33	90.67	93.11	78.53	45.28	-5.51

b) En considérant maintenant la matrice masse consistante soit $M = \begin{bmatrix} 1.30 & 0.098 \\ 0.098 & 0.03 \end{bmatrix}$, les résultats sont donnés dans le tableau (2-5) :

Tableau 2-5 : Intégration temporelle de la plaque avec deux bords encastres et simplement appuyée sur les deux autres : masse consistante et sans déplacements imposés

t(s)	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$
$w_3 \times 10^{-3}$ (mm)	9.85	66.2	160.	252.	301.	285.	204.	72.2	-92.7	-278.
$\theta_{y2} \times 10^{-4}$ (rad)	-27	-166	-319	-295	12.4	527	1020	1220	992.	376

2-5-2-2 Avec un déplacement imposé (vertical au nœud 2 : figure 2-14)

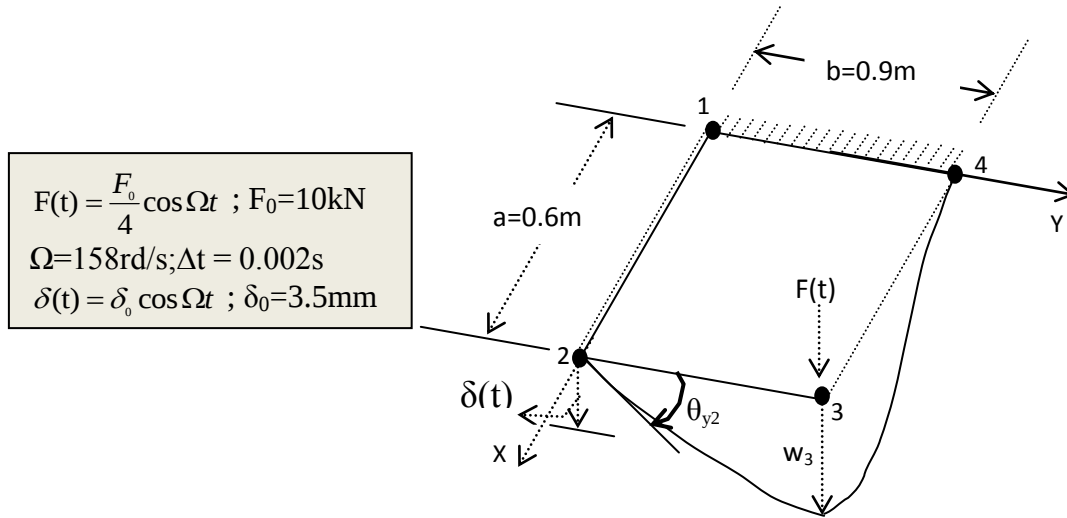


Fig 2-14. Discretisation et la déformée de la plaque

- Equation générale de mouvement-matrice masse consistante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_{w2,w2} & k_{w2,\theta y2} & k_{w2,w3} \\ k_{\theta y2,w2} & k_{\theta y2,\theta y2} & k_{\theta y2,w3} \\ k_{w3,w2} & k_{w3,\theta y2} & k_{w3,w3} \end{bmatrix}}_{[K]} \underbrace{\begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_{y2} \\ w_3 \end{Bmatrix}}_{[D]} + \underbrace{\begin{bmatrix} m_{w2,w2} & m_{w2,\theta y2} & m_{w2,w3} \\ m_{\theta y2,w2} & m_{\theta y2,\theta y2} & m_{\theta y2,w3} \\ m_{w3,w2} & m_{w3,\theta y2} & m_{w3,w3} \end{bmatrix}}_{[M]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{w}_2 \\ \ddot{\theta}_{y2} \\ \ddot{w}_3 \end{Bmatrix}}_{[D]} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3(t) \end{Bmatrix}}_{[F]}$$

- Calcul des coefficients k_{ij} et m_{ij} (table de Yang) :

$$\begin{aligned} k_{w3,w3} &= 59080.19 \text{ N/m} ; & m_{w3,w3} &= 1.30 \text{ kg} ; & k_{w3,\theta y2} &\equiv -1422.67 \text{ N/m} ; \\ m_{w3,\theta y2} &= -m_{\theta y2,w3} = 0.098 \text{ kg.m} ; & k_{\theta y2,\theta y2} &\equiv k_{9,9} = 3969.24 \text{ N.m} ; & m_{\theta y2,\theta y2} &= 0.03 ; & k_{w2,w2} &= \\ & 59080.19 \text{ N/m} ; & m_{w3,w3} &= 1.30 ; & k_{w2,w3} &= -5491.49 \text{ N/m} ; & m_{w2,w3} &= 0.45 \text{ kg} ; & k_{w2,\theta y2} &= 10474.6 \text{ N} ; \\ & m_{w2,\theta y2} &= 0.165. \end{aligned}$$

- Réduction de l'équation générale de mouvement:

Transposons aux second membres de la deuxième et de la troisième équation d'équilibre, les termes correspondants au degré de liberté imposé w_2 ainsi que sa deuxième dérivée $\ddot{w}_2$, nous obtenons ainsi :

$$\begin{bmatrix} k_{w2,w2} & k_{w2,\theta y2} & k_{w2,w3} \\ 0 & k_{\theta y2,\theta y2} & k_{\theta y2,w3} \\ 0 & k_{w3,\theta y2} & k_{w3,w3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_{y2} \\ w_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{w2,w2} & m_{w2,\theta y2} & m_{w2,w3} \\ 0 & m_{\theta y2,\theta y2} & m_{\theta y2,w3} \\ 0 & m_{w3,\theta y2} & m_{w3,w3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_2 \\ \ddot{\theta}_{y2} \\ \ddot{w}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -k_{w2,\theta y2} * w_2(t) - m_{\theta y2,w2} * \ddot{w}_2(t) \\ F_3(t) - k_{w3,w2} * w_2(t) - m_{w3,w2} * \ddot{w}_2(t) \end{Bmatrix}$$

En omettant la première équation, nous obtenons le système réduit des équations d'équilibre de mouvement de la plaque que nous écrivons sous la forme : $Kd + M \ddot{d} = F$ où :

$$K = \begin{bmatrix} k_{\theta y2, \theta y2} & k_{\theta y2, w3} \\ k_{\theta y2, \theta y2} & k_{w3, w3} \end{bmatrix}; M = \begin{bmatrix} m_{\theta y2, \theta y2} & m_{\theta y2, w3} \\ m_{\theta y2, \theta y2} & m_{w3, w3} \end{bmatrix}; d = \begin{Bmatrix} \theta_{y2,t}(t) \\ w_{3,t}(t) \end{Bmatrix}; \dot{d} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{y2,t}(t) \\ \dot{w}_{3,t}(t) \end{Bmatrix}; \ddot{d} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_{y2,t}(t) \\ \ddot{w}_{3,t}(t) \end{Bmatrix}$$

$$F = \begin{Bmatrix} f_{\theta y2}(t) \\ f_{w3}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k_{w2, \theta y2} * w_2(t) - m_{\theta y2, w2} * \ddot{w}_2(t) \\ F_3(t) - k_{w3, w2} * w_2(t) - m_{w3, w2} * \ddot{w}_2(t) \end{Bmatrix}$$

avec : $f_{\theta y2}(t) = -k_{w2, \theta y2} * w_2(t) - m_{\theta y2, w2} * \ddot{w}_2(t)$ et $f_{w3}(t) = F_3(t) - k_{w3, w2} * w_2(t) - m_{w3, w2} * \ddot{w}_2(t)$

- Résolution avec l'algorithme de Wilson- θ :

$$\overline{K}d_{3,t+\theta\Delta t} = \overline{F}_{t+\theta\Delta t}; \overline{K} = K + \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} M = \begin{bmatrix} 24927.37 & 74305 \\ 74305 & 846816.44 \end{bmatrix}; d_{t+\theta\Delta t} = \begin{Bmatrix} \theta_{y2,t}(t+\theta\Delta t) \\ w_{3,t}(t+\theta\Delta t) \end{Bmatrix}$$

$$\overline{F}_{t+\theta\Delta t} = F_t + \theta(F_{t+\Delta t} - F_t) = \begin{Bmatrix} f_{\theta y2}(t) \\ f_{w3}(t) \end{Bmatrix} + \theta \begin{Bmatrix} f_{\theta y2}(t+\theta\Delta t) - f_{\theta y2}(t) \\ f_{w3}(t+\theta\Delta t) - f_{w3}(t) \end{Bmatrix} \quad \text{où avec } w_2 = \delta(t) = \delta_0 \cos \Omega t;$$

$\ddot{w}_2 = -\delta_0 \Omega^2 \cos \Omega t$; $f_{w3}(t) = \frac{F_0}{4} \cos \Omega t$; $\Omega = 158 \text{ rad/s}$; $F_0 = 10 \text{ kN}$; $\delta_0 = 3.5 \text{ mm}$, nous aurons plus explicitement :

$$f_{\theta y2}(t) = -k_{w2, \theta y2} * \delta_0 \cos \Omega t + m_{\theta y2, w2} * \delta_0 \Omega^2 \cos \Omega t$$

$$f_{w3}(t) = \frac{F_0}{4} \cos \Omega t - k_{w3, w2} * \delta_0 \cos \Omega t + m_{w3, w2} * \delta_0 \Omega^2 \cos \Omega t$$

Soit numériquement, par exemple à l'instant t : $f_{\theta y2}(t) = -22.24 \cos 158t$;
 $f_{w3}(t) = 2520.1 \cos 158t$ et à l'instant $t+\Delta t$:

$$F_{t+\theta\Delta t} = \begin{Bmatrix} -22.24 \cos 158t \\ 2520.1 \cos 158t \end{Bmatrix} + 1.4 \begin{Bmatrix} -22.24(\cos 158(t+\Delta t) - \cos 158t) \\ 2520.1(\cos 158(t+\Delta t) - \cos 158t) \end{Bmatrix}$$

Au premier incrément soit au temps $\theta\Delta t$ ($\theta=1.4$, $\Delta t=0.002$ s), nous obtenons par exemple :

$$F_{\theta\Delta t} = \begin{Bmatrix} -22.24 + 1.4 \times (-22.24) \times \cos 158 \times 0.002 - 1 \\ 2520.1 + 1.4 \times 2520.1 \times \cos 158 \times 0.002 - 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20.86 \\ 2345.1 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow d_{\theta\Delta t} = \begin{Bmatrix} \theta_{y2,\theta\Delta t} \\ w_{3,\theta\Delta t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9.44 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ 2.89 \text{ mm} \end{Bmatrix} \text{ où } d_0 = \dot{d}_0 = \ddot{d}_0 = 0 \text{ (conditions initiales nulles : } t=0)$$

$$\ddot{d}_{\theta\Delta t} = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} (d_{\theta\Delta t} - d_0) = \frac{6}{(1.4 \times 0.002)^2} \times d_{\theta\Delta t} = \begin{Bmatrix} -7224.5 \text{ m/s}^2 \\ 2211.7 \text{ m/s}^2 \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{d}_{\Delta t} = \ddot{d}_0 + \frac{1}{\theta} (\ddot{d}_{\theta\Delta t} - \ddot{d}_0) = \frac{1}{1.4} \times \ddot{d}_{\theta\Delta t} = \begin{Bmatrix} -5160.4 \text{ m/s}^2 \\ 1579.8 \text{ m/s}^2 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{d}_{\Delta t} = \dot{d}_0 + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{d}_{\Delta t} - \ddot{d}_0) = \frac{0.002}{2} \times \ddot{d}_{\Delta t} = \begin{Bmatrix} -5.2 \text{ m/s} \\ 1.58 \text{ m/s} \end{Bmatrix}$$

$$d_{\Delta t} = d_0 + \Delta t \dot{d}_0 + \frac{\Delta t^2}{6} (\ddot{d}_{\Delta t} + 2\ddot{d}_0) = \frac{\Delta t^2}{6} (\ddot{d}_{\Delta t}) = \begin{Bmatrix} -3.44 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ 1.58 \text{ mm} \end{Bmatrix}$$

Les résultats sont donnés dans le tableau (2-6) :

Tableau 2-6. Intégration temporelle de la plaque avec deux bords encastres et simplement appuyée sur les deux autres : masse consistante et avec déplacements imposés

t(s)	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$
w_3 (mm)	1.03	6.92	16.90	27.80	36.20	39.70	35.90	23.0	0.19	-32.00
$\theta_{y2} \times 10^3$ (rad)	-310	-14.70	-8.79	23.50	68.10	100.00	99.20	57.30	-15.80	-99.80

Chapitre 3

DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS

3-1 Généralités

Nous rappelons dans ce chapitre, en premier lieu, d'une façon succincte et sous forme matricielle les équations fondamentales de la théorie d'élasticité applicables à un problème plan en tenant compte des effets dynamiques. Il s'agit en second lieu de montrer comment obtenir par le biais essentiellement du principe des travaux virtuels, la forme faible de la mécanique du solide qui constitue l'ingrédient essentiel de la méthode des éléments finis. Nous montrons en troisième lieu, comment passer à la discrétisation spatiale ou géométrique par la méthode des éléments finis en vue de formuler l'expression discrétisée des équations d'équilibre de mouvement d'un problème plan non stationnaire du type de second ordre. Nous indiquons en dernier lieu les techniques de programmation utilisées dans le programme STRUDL5.FOR_version 2014 en vue d'implémenter les matrices élémentaires de masse, d'amortissement et de rigidité ainsi que l'opération liée à leur assemblage.

3-2 Equations fondamentales et forme différentielle forte de la mécanique du solide

On rappelle dans le tableau (3.1) les équations fondamentales de la théorie d'élasticité et présenter sous forme matricielle (puisque mieux adaptée à la programmation) d'un solide bidimensionnel soumis, à un instant t donné, à l'action à la fois des sollicitations de surface ou de volume, statique et dynamique. Les déplacements, déformations, contrainte et équations d'équilibre sont donnés en coordonnées cartésiennes.

Tableau 3-1. Équations fondamentales de la théorie d'élasticité

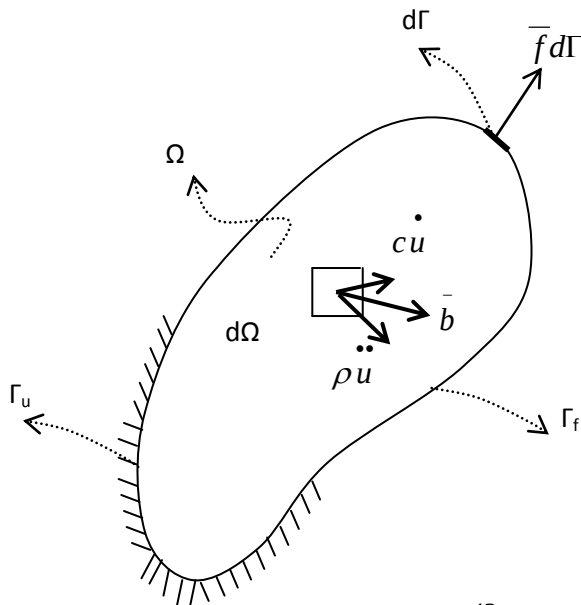
Relation	Ecriture matricielle
1- Loi de Hooke	$\sigma = D\varepsilon$
2- Equations géométriques	$\varepsilon = Lu$
3-Equations d'équilibre	$L^T \sigma + b = 0$
4- Conditions imposées sur les bords	$A\sigma = f$

A condition d'adapter les définitions appropriées de divers vecteurs (matrices uni colonnes) et matrices (tableau 3-2), les équations s'appliquent à l'état plan de contrainte ou de déformation mais peuvent être facilement généralisable à l'état de contraintes à trois dimensions. Dans le même esprit, les notations Ω (domaine) et Γ (sa frontière) peuvent porter sur un domaine tri ou bidimensionnel.

Tableau 3-2. Définition des quantités matricielles dans la mécanique des solides plans

$x = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad b = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \quad u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$		
$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{état plan de contrainte})$		
$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{état plan de déformation})$		
$\varepsilon = Lu ;$	$\sigma = D\varepsilon ;$	$L^T \sigma + \bar{b} - c\dot{u} - \rho\ddot{u} = 0$
$L^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$		$A = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}$
$A\sigma = f$		

De la même manière, on partage la frontière du solide (Γ) en deux parties Γ_u et Γ_f de telle façon que $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_f$ (fig. 3-1) où l'on distingue : 1) Γ_u = la partie appuyée (déplacements imposés, tractions de bord = réactions d'appuis) 2) Γ_f = la partie libre (déplacement inconnus, tractions de bord imposés)

**Fig. 3-1.** Solide et sa frontière

Dans la suite, les quantités imposées seront surlignées pour mettre en évidence qu'il s'agit de valeurs connues (par exemple, $\bar{u}$: déplacements imposés sur Γ_u , $\bar{f}$: tractions imposées sur Γ_t pouvant ou non dépendre du temps, $\bar{b}$: forces imposées par unité de volume dans le domaine Ω).

En fonction des forces d'inertie ($\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho \ddot{u}$; ρ : masse volumique supposée constante) qui s'opposent à l'accélération de la masse et des forces éventuelles d'amortissement d'origine visqueuses c'est-à-dire s'opposant linéairement à la vitesse ($c \frac{\partial u}{\partial t} = c \dot{u}$; c : constante d'amortissement du milieu considéré), le vecteur des sollicitations exprimé par unité de volume de Ω peut s'écrire :

$$b = \bar{b} - \rho \ddot{u} - c \dot{u} \quad (3-1)$$

De manière générale, la solution générale des problèmes de la mécanique des solides revient à résoudre le problème suivant :

$$\sigma = D\varepsilon \quad (3-2a)$$

$$\varepsilon = Lu \quad (3-2b)$$

$$L^T \sigma + b = 0 \quad (3-2c)$$

Avec les conditions aux limites :

$$u = \bar{u} \text{ sur } \Gamma_u, A\sigma = \bar{f} \text{ sur } \Gamma_f \quad (3-3)$$

Et les conditions initiales liées à la vitesse et à l'accélération :

$$\dot{u}_0 = \dot{u}_0^- \text{ et } \ddot{u}_0 = \ddot{u}_0^- \quad (3-4)$$

Où $\dot{u}_0^-$ et $\ddot{u}_0^-$ étant respectivement la vitesse et l'accélération imposées à l'instant initial $t = 0$.

Pour en simplifier la solution, on cherche à éliminer certaines inconnues pour aboutir à un système d'équations restreint ne comprenant plus que les inconnues de la même nature. La solution en fonction des déplacements est la plus simple à établir en tenant compte de la variable temps additionnelle. Les deux premières équations de (2-2a et 2-2c) permettent d'exprimer les contraintes en fonction des déplacements :

$$\sigma = DLu \quad (3-5)$$

Dès lors, il suffit de substituer cette expression dans l'équation d'équilibre (2-2c) et dans la deuxième condition aux limites type force ou naturelle (2-3) pour se ramener, pour les déplacements inconnus, aux équations suivantes :

$$L^T(DLu) + \bar{b} - c\dot{u} = \rho\ddot{u} \quad \text{sur } \Omega \quad (3-6)$$

avec :

$$u = \bar{u} \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (3-7a)$$

$$ADLu = \bar{f} \quad \text{sur } \Gamma_f \quad (3-7b)$$

$$\dot{u}_0 = \dot{u}_0^- \quad \text{et} \quad \ddot{u}_0 = \ddot{u}_0^- \quad (3-7c)$$

Ces équations représentent la forme différentielle (ou forte) de la mécanique du solide d'un problème non stationnaire i.e dépendant du temps ou en particulier d'un problème quasi-statique si les effets des forces d'accélération et de vitesse sont négligeables. On remarque que le système d'équations différentielles non stationnaires (3-6) c'est-à-dire dépendant du temps est du second ordre puisque la matrice opérateur L contenant les dérivées du premier ordre s'applique ici deux fois.

En conclusion, la solution basée sur la forme différentielle de la mécanique du solide revient à résoudre le système d'équations différentielles du second ordre (3-6) en tenant compte des conditions aux limites (3-7a,b,c). Une fois les déplacements connus, on en dérive les contraintes correspondantes par l'application des relations (3-2). En pratique, hélas, cela s'avère extrêmement difficile hormis quelques cas particuliers élémentaires. Les problèmes difficiles ne peuvent être résolus qu'en partant de la forme faible [13,14,15] en utilisant le principe variationnel d'Hamilton ou des déplacements virtuels qui seront exposés ci-après.

Remarque :

L'équation différentielle (3-6) conduisant à l'équation différentielle d'équilibre dynamique suivante :

$$L^T \sigma + \bar{b} = \rho\ddot{u} + c\dot{u} \quad (3-8)$$

Représente l'expression locale connue de la loi de conservation de la quantité de mouvement (ou de la troisième loi de Newton), selon laquelle le taux d'accroissement de la quantité de mouvement de l'ensemble des particules constituant d'un corps est égal à la somme des forces extérieures appliquées sur les particules. Si la grandeur de la masse est indépendante du temps, il est possible d'écrire :

$$\int_{\Omega} \bar{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \bar{f} d\Gamma - \int_{\Omega} c \dot{u} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \ddot{u} d\Omega \quad (3-9)$$

3-3 Principe des déplacements virtuels et forme faible de la mécanique des solides

Ce principe joue un rôle capital dans la formulation des équations de mouvement d'un solide en moyennant quelques transformations intégrales et constitue l'ingrédient essentiel dans la discrétisation par la méthode des éléments finis.

3-3-1 Théorème intégrale (ou théorème de la divergence)

Si (Ω) est un domaine tri ou bidimensionnel, Γ sa frontière et $\Phi = \Phi(X)$ une fonction scalaire sur Ω , le théorème intégral connu des mathématiques définit la relation suivante entre les intégrales sur Ω et sur Γ :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} d\Omega = \int_{\Gamma} \Phi \cdot n_i d\Gamma$$

où pour $i = 1, 2, (3)$, $X_i = X, Y, (Z)$ et $n_i = n_x, n_y, (n_z)$ (les cosinus directeurs de la normale extérieure à la frontière Γ). Si l'on pose $\Phi = f(X) \cdot g(X)$, on en tire en dérivant par parties :

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial X_i} d\Omega = \int_{\Gamma} f g \cdot n_i d\Gamma - \int_{\Omega} g \frac{\partial f}{\partial X_i} d\Omega \quad (3-10)$$

Ce théorème est la clé des transformations intégrales, connu aussi en mathématique par la formule de Gauss ou de Green.

3-3-2 Formule générale du principe des déplacements ou des travaux virtuels

Soit, à un instant donné t , un corps solide déformable en équilibre soumis à l'action des charges réelles de surface ($\bar{f}$: tractions de bord) et de volume ($\bar{b}$), toutes connues (fig. 3-2a) et à l'action des forces d'inertie ($\rho \ddot{u}$) et d'amortissement visqueux ($c \dot{u}$). Il se produit en tout point $M (\in \Omega)$ des états réels de contrainte (σ), de déformation (ε) et de déplacement (u).

Imposons un déplacement virtuel δu supposé petit mais quelconque (fig. 3-2b) et exprimons le travail virtuel effectué par l'ensemble des charges appliquées (δW_E) et par les forces intérieures (δW_I)

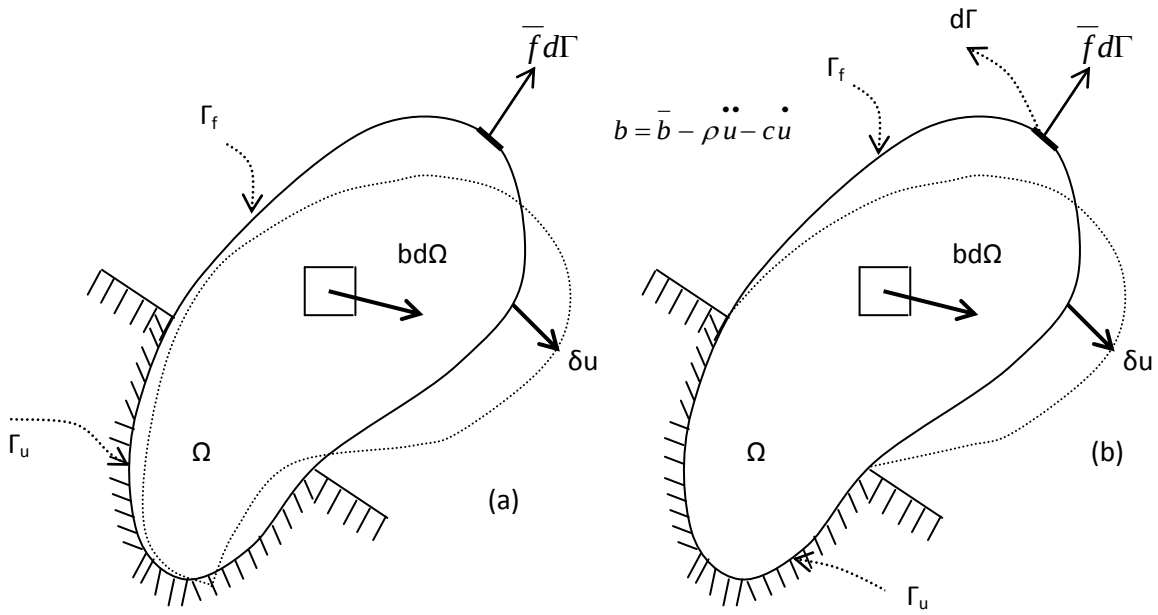


Fig. 3-2. Déplacements virtuels

En notant que le travail élémentaire d'une force est le produit de l'intensité de la force et du déplacement de son point d'application dans la direction de son support, alors, il est possible d'écrire, au cours du déplacement virtuel δu de leur point d'application, pour les forces de traction de bord ($\bar{f}$), de volume ($\bar{b}$), d'inertie ($\rho \ddot{u}$) et d'amortissement ($c \dot{u}$) la formule suivante :

$$\delta W_E = \int_{\Omega} \delta u^T \bar{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta u^T \bar{f} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta u^T f d\Gamma - \int_{\Omega} \delta u^T \rho \ddot{u} d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T c \dot{u} d\Omega \quad (3-11)$$

Evaluons le travail virtuel dans un élément de volume élémentaire parallélépipédique droit ($d\Omega = dx dy dz$) que nous supposons d'abord sollicité seule par une contrainte normale σ_x (fig. 3-3). Alors:

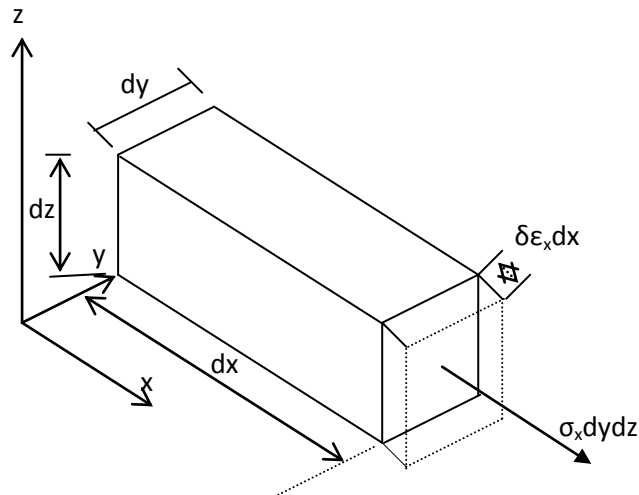


Fig. 3-3. Définition du travail élémentaire d'une force intérieure

$$\delta dW_I(\sigma_x) = \sigma_x dydz. \delta \epsilon_x dx = \sigma_x \delta \epsilon_x d\Omega$$

On peut obtenir de la même manière des expressions analogues pour les autres contraintes en faisant remarquer que chacune des composantes de contrainte provoque un déplacement sur lequel aucune des autres contraintes n'effectue de travail. Par suite, le travail virtuel effectué par les efforts internes peut être considéré comme la somme de chacune des composantes des travaux virtuels des efforts dus aux contraintes :

$$\delta dW_I = \delta dW_I(\sigma_x) + \delta dW_I(\sigma_y) + \delta dW_I(\tau_{xy})$$

Le travail virtuel total sur l'ensemble du domaine Ω s'écrira alors:

$$\delta W_I = \int_{\Omega} \delta \epsilon^T \sigma d\Omega. \quad (3-12)$$

L'égalité : $\delta W_I = \delta W_E$ exprime le principe des déplacements virtuels (ou des travaux virtuels) qui nous pouvons énoncer par la manière suivante: *à un instant t , un solide déformable est en équilibre, si le travail virtuel des forces appliquées y compris les forces d'inertie et d'amortissement est égal au travail virtuel des forces intérieures, pour tout ensemble de déplacements virtuels et de déformations virtuelles qui dérivent de ces déplacements».*

NB : Il est possible de retrouver (ou vice-versa) les équations d'équilibre (3-3) en transformant l'intégrale $\delta W_I = \int_{\Omega} \delta \epsilon^T \sigma d\Omega$. Soit pour un état plan de contrainte :

$$\delta W_I = \int_{\Omega} (\delta \epsilon_x \sigma_x + \delta \epsilon_y \sigma_y + \delta \gamma_{xy} \tau_{xy}) d\Omega. \quad (3-13)$$

En posant : $\delta \epsilon = L \delta u$, et en faisant usage du théorème intégral (3-10), il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned} \delta W_I &= \langle \delta u \delta v \rangle \left(\int_{\Gamma} \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} d\Gamma - \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega \right) \\ &= \int_{\Omega} \delta u^T A \sigma d\Gamma - \int_{\Gamma} \delta u^T L^T \sigma d\Omega \end{aligned} \quad (3-14)$$

et, en observant qu'en retranchant cette expression de celle de δW_E (3-11), l'intégrale sur la partie Γ_u de Γ s'annule, nous aboutissons à l'expression suivante :

$$\delta W_E - \delta W_I = \int_{\Omega} \delta u^T (L^T \sigma + b) d\Omega - \int_{\Gamma_f} \delta u^T (A \sigma - \bar{f}) d\Gamma = 0 \quad (3-15)$$

Puisque les déplacements virtuels sont, par définition, quelconques, cette équation n'est vraie que si les deux expressions entre parenthèses sont identiquement nulles, c'est-à-dire :

$$L^T \sigma + b = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad \text{et} \quad A \sigma - \bar{f} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_f \quad (3-16)$$

Par conséquent, ces conditions se confondent avec les conditions d'équilibre internes (3-3) et les conditions aux limites (3-4) qui traduisent les conditions d'équilibre du solide soumis à des charges données b sur Ω et $\bar{f}$ sur Γ_f .

3-3-3 Cas du champ virtuel compatible avec les appuis

L'expression du travail virtuel externe se simplifie (la troisième intégrale du second membre dans (3-11) disparaît) si le champ virtuel δu est tel qu'il s'annule aux appuis (ce qui signifie aussi que les réactions d'appuis ne travaillent pas) :

$$\delta u = 0 \text{ sur } \Gamma_u \quad (3-17)$$

Un tel champ est dit cinématiquement admissible et le principe des déplacements virtuels, $\delta W_I = \delta W_E$, s'écrit alors simplement :

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega + \int_{\Omega} \delta u^T \rho \ddot{u} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u^T c \dot{u} d\Omega = \int_{\Omega} \delta u^T \bar{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta u^T \bar{f} d\Gamma \quad (3-18)$$

C'est sous cette forme intégrale dite faible qui sera utilisée dans la formulation des équations algébriques par la méthode des éléments finis.

NB : l'égalité des travaux garantit l'équilibre du solide en fournissant les équations d'équilibre différentielles internes. La démonstration établie n'a fait aucunement appel à la nature du matériau. De ce fait, le principe des déplacements virtuels s'applique même s'il y a dissipation d'énergie en plasticité par exemple.

3-3-4 Principe variationnel de Hamilton

Une autre méthode permettant d'éviter les équations différentielles d'équilibre (3-2c) consiste à utiliser les grandeurs énergétiques scalaires sous forme variationnelle. Le principe variationnel le plus généralement applicable est le principe de Hamilton qui stipule que la somme de la variation d'énergie cinétique (δE_c) et potentielle (δE_p) et de la variation du travail effectué par les forces non conservatives (δW_{nc}), prise pendant un intervalle de temps quelconque $[t_1, t_2]$, est identiquement nulle. On peut l'écrire par la façon suivante :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta (E_c - E_p + W_{nc}) dt = 0 \quad (3-19)$$

δ étant la variation subie pendant l'intervalle $[t_1, t_2]$.

L'énergie cinétique de solide est par définition donnée par:

$$E_c = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho (\dot{u})^2 d\Omega \quad (3-19a)$$

et l'énergie potentielle, qui représente simplement l'énergie de déformation interne (U) du corps solide, est donnée par:

$$E_p = U = \int_{\Omega} \frac{1}{2} D(\varepsilon)^2 d\Omega \quad (3-19b)$$

Les forces non conservatives du système sont constituées des forces agissant sur le système i.e l'amortissement et toutes les autres charges extérieures arbitrairement appliquées. La variation du travail effectué par ces forces peut s'exprimer comme dans le cas de la formule (3-18) ; soit:

$$\delta W_{nc} = - \int_{\Omega} \delta u^T \dot{c} u d\Omega + \int_{\Omega} \delta u^T \bar{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta u^T \bar{f} d\Gamma \quad (3-19c)$$

En reportant les équations (3-19a,b,c) dans l'équation (3-19) et en prenant la variation du premier terme, nous aboutissons à :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \delta \dot{u}^T \rho \dot{u} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T \dot{c} u d\Omega + \int_{\Omega} \delta u^T \bar{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta u^T \bar{f} d\Gamma \right) dt = 0 \quad (3-20)$$

Le premier terme de cette équation peut à présent être intégré par parties comme suit :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \delta \dot{u}^T \rho \dot{u} d\Omega \right) dt = \int_{\Omega} \delta u^T \Big|_{t_1}^{t_2} \rho \dot{u} d\Omega - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \delta u^T \rho \ddot{u} d\Omega \right) dt \quad (3-21)$$

où $\delta \dot{u} = \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}$. Avec δu nulle aux bornes d'intégration t_1 et t_2 (par hypothèse), le premier terme de (3-21) s'annule. Par suite, si on reporte la relation (3-21) dans (3-20), le résultat peut s'écrire :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(- \int_{\Omega} \delta u^T \rho \ddot{u} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T \dot{c} u d\Omega + \int_{\Omega} \delta u^T \bar{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta u^T \bar{f} d\Gamma \right) dt = 0 \quad (3-22)$$

Cette équation est bien entendu ne peut être satisfaite que si le terme entre parenthèses est nul, c'est-à-dire nous retrouvons la même équation (3-18). Notons que contrairement au principe des travaux virtuels, les quantités σ et ε utilisés dans l'expression de l'énergie de déformation interne (U) sont liées par une équation constitutive (D) et qu'il faut dériver en tenir compte lors de la dérivation si le matériau n'est pas isotrope et linéaire. C'est pourquoi la suprématie du principe des travaux virtuels par rapport à tout autre principe à base énergétique.

3-4 Application aux cas particuliers des structures : poutre et plaque

L'application aux structures formées de poutre ou de plaque est immédiate. Il suffit de connaître les expressions des travaux virtuels δW_I et δW_E .

3-4-1 Cas des poutres prismatiques

La théorie classique des poutres admet que :

- les sections restent planes après la déformation et demeurent perpendiculaires à l'axe de la poutre déformée (hypothèse de Navier-Bernoulli, fig. 3-3).
- Les contraintes σ_y , σ_z et τ_{yz} perpendiculaires aux fibres restent négligeables.

En tenant compte de ces hypothèses et en notant pour les déformations associées à l'effort normal N_x et au moment fléchissant M_z les quantités suivantes :

$$\varepsilon_x = u_0' \text{ et } \chi_0 = -v_0'' \quad (3-23)$$

L'indice 0 exprime la référence par rapport à l'axe moyen de la poutre. Le travail virtuel aura pour expression :

$$\delta W_I = \int_0^l (\delta \varepsilon_0 N_x + \delta \chi_0 M_z) dx \quad (3-24)$$

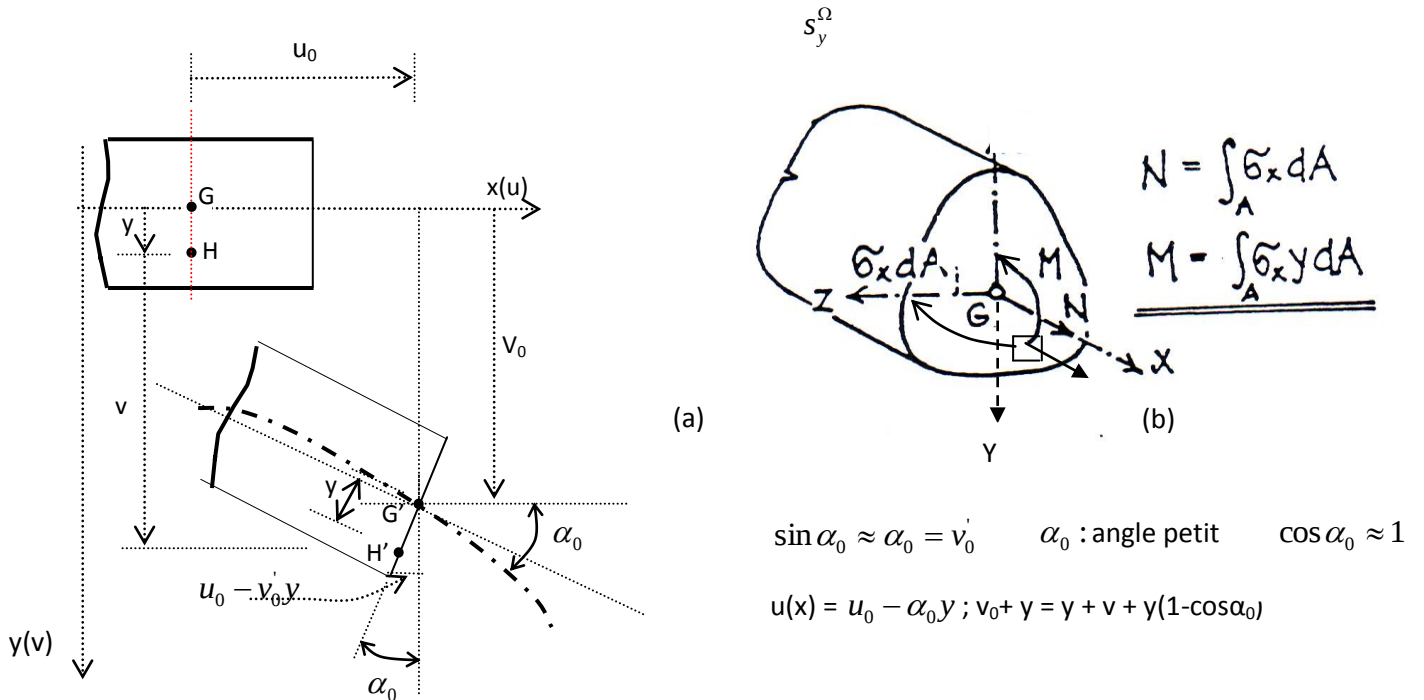


Fig. 3-4. Structure de poutre

Ce résultat qui fait intervenir l'effort normal N_x et le moment fléchissant M_z fait appel aux contraintes d'équivalence statique de la figure (3-3b). Manifestement, les efforts N_x et M_z jouent ici le même rôle que les contraintes σ dans le cas général de l'élasticité tridimensionnel, et, de même les quantités virtuelles $\delta u'$ (dilatation virtuelle de l'axe de la poutre) et $-\delta v''$ (sa courbure virtuelle) s'apparentent aux déformations virtuelles $\delta \epsilon$.

En ce qui concerne δW_E , on peut se ramener au travail virtuel des forces appliquées à l'axe. Les charges respectives $\bar{q}_x$ et $\bar{q}_y$ par unité de longueur (fig.3-5) remplacent alors les forces de volume $\bar{b}$ de l'élasticité tridimensionnel et les forces $\bar{r}_{BX}$, $\bar{r}_{BY}$ et le couple $\bar{r}_{B\theta}$ les

tractions de bord $\bar{t}$ où : $\bar{b} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_x \\ \bar{q}_y \end{Bmatrix}$ $\bar{t} = \begin{Bmatrix} \bar{r}_{BX} \\ \bar{r}_{BY} \\ \bar{r}_{B\theta} \end{Bmatrix}$

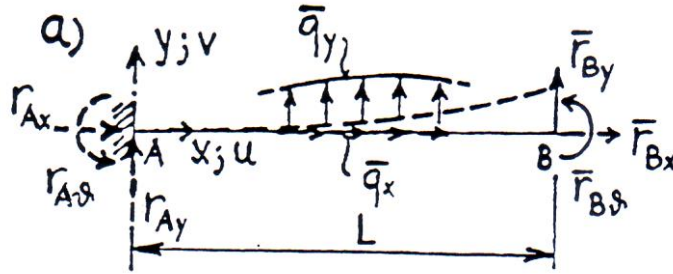


Fig .3-5. Equivalence des forces appliquées sur la poutre

Le travail virtuel des réactions d'appuis (r_{AX} , r_{AY} , $r_{A\theta}$) étant nul (δu_A , δv_A , $\delta \theta_A = 0$: encastrement) et l'expression de δW_E se réduit à :

$$\delta W_E = \int_0^L (\delta u \bar{q}_x + \delta v \bar{q}_y) dx + \delta u_B \bar{r}_{BX} + \delta v_B \bar{r}_{BY} + \delta \theta_B \bar{r}_{B\theta} \quad (3-25)$$

NB : Si à la place des charges réparties $\bar{q}_x$ et $\bar{q}_y$ la poutre étant chargée par des forces concentrées $\bar{P}_{xi}$ et $\bar{P}_{yi}$, le terme $\int_0^L (\delta u \bar{q}_x + \delta v \bar{q}_y) dx$ dans la relation (3-25) doit être remplacée par : $\sum (\delta u_i \bar{P}_{xi} + \delta v_i \bar{P}_{yi})$.

3-4-2 Cas des plaques

On adopte la même démarche que dans le cas d'une poutre. Sachant que les déformations ϵ_x , ϵ_y et γ_{xy} ont pour expressions (paragraphe 3-2) ; $w = w(x,y)$ étant le déplacement transversal de la plaque :

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3-26)$$

Il est possible d'effectuer dans l'expression générale de travail virtuel l'intégration selon z sur l'épaisseur e de la plaque :

$$\begin{aligned} \delta W_I &= \int_{\Omega} (\delta \varepsilon_x \sigma_x + \delta \varepsilon_y \sigma_y + \delta \gamma_{xy} \tau_{xy}) d\Omega \\ &= - \iint_A \left[\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_x z dz + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_y z dz + 2 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \tau_{xy} z dz \right] dx dy \\ &= \iint_A \left(-\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} M_x - \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} M_y - 2 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} M_{xy} \right) dx dy \end{aligned} \quad (3-27)$$

Si l'on désigne encore les courbures associées aux moments M_x , M_y et M_{xy} par χ_x , χ_y et χ_{xy}

i.e : $\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, $\chi_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ on obtient :

$$\delta W_I = \iint_A (\delta \chi_x M_x + \delta \chi_y M_y + \delta \chi_{xy} M_{xy}) dx dy \quad (3-28)$$

Où nous avons d'après la théorie de la flexion pure des plaques :

$$M_x = D^* (\chi_x + \nu \chi_y), \quad M_y = D^* (\chi_y + \nu \chi_x), \quad M_{xy} = \frac{D^*}{2} (1 - \nu) \chi_{xy} \quad (3-29)$$

Avec D^* étant la rigidité flexionnelle de la plaque définie par la relation ;

$$D^* = \frac{E e^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (3-30)$$

Si δw est cinématiquement admissible i.e $\delta w = 0$ sur l'appui simple, $\delta w = \frac{\partial}{\partial n} \delta w = 0$ à l'encastrement et $\delta w = 0$ à chaque angle appuyé, le travail virtuel des réactions est nul et il ne reste que celui des charges données. S'il n'a pas d'autres charges que la charge transversale soit $\bar{q}$, on aura par exemple pour le travail virtuel externe:

$$\delta W_E = \iint_A \delta w \bar{q} dx dy \quad (3-31)$$

3-4-3 Concept des variables généralisées

En développant les équations des travaux virtuels, nous avons observé que les efforts internes d'une structure par exemple N_x et M_z d'une poutre et les déformations correspondants ε_x et χ_x qui leur sont associés jouent le même rôle que les composantes des vecteurs contraintes et déformations dans le cas général de l'état de contrainte à 3 D. Dès lors, il est naturel de les qualifier des contraintes et des déformations généralisées. Par suite, en admettant que les déplacements virtuels δv sont cinématiquement admissibles ($\delta v = 0$ sur Γ_v), le principe des déplacements virtuels peut s'écrire de manière analogue à la relation (3-18) :

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega = \int_{\Omega} \delta u^T \bar{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta u^T \bar{f} d\Gamma \quad (3-32)$$

S'il s'agit du cas général de la mécanique du solide, $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ et $\Gamma_v = \Gamma_u$, et tous les vecteurs intervenant dans (3-18) conservant leur définition initiale comme dans la section (3-3). Dans les autres cas, leur définition dépend du type de structure considéré, par exemple :

- Poutre ($\Omega = l$) :

$$u = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} ; \quad \bar{b} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_x - c \dot{u}_0 - \rho \ddot{u}_0 \\ \bar{q}_y - c \dot{v}_0 - \rho \ddot{v}_0 \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0' \\ -v_0'' \end{Bmatrix} \rightarrow \sigma = \begin{Bmatrix} N_x \\ M_z \end{Bmatrix} = D \varepsilon ; \quad D = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \quad (3-34)$$

- Plaque ($\Omega = A$) :

$$u = \{w\} ; \quad \bar{b} = \left\{ \bar{q} - c \dot{w} - \rho \ddot{w} \right\} \quad (3-35)$$

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} ; \quad \sigma = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \varepsilon ; \quad D = D^* \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3-36)$$

3-5 Forme discrétisée par éléments finis

La solution analytique de la forme intégrale (3-18) est en général inaccessible. On est donc conduit à chercher une solution approchée par une méthode numérique soit par la méthode des éléments finis. Notons que cette dernière est un cas particulier de la méthode de Galerkin vu que le champ de déplacement et la fonction de pondération sont considérés appartenir au même espace de dimension finie représentant ici les déplacements.

3-5-1 Discretisation géométrique du domaine

Le domaine (Ω) est décomposé en sous domaine (Ω^e) forme géométrique simple (les éléments) reliés entre eux en des points appelés nœuds. Cette opération s'appelle le maillage comme pour le domaine plan rectangulaire illustré sur la figure (3-6) discrétisé en 12 éléments reliés entre eux par 20 nœuds. Ecrivons alors la forme intégrale (3-18) sous la forme :

$$W = \sum_{e=1}^m W_e \quad (3-37)$$

Où W_e est la forme intégrale élémentaire (i.e pour l'élément e) et m représente le nombre d'éléments du maillage.

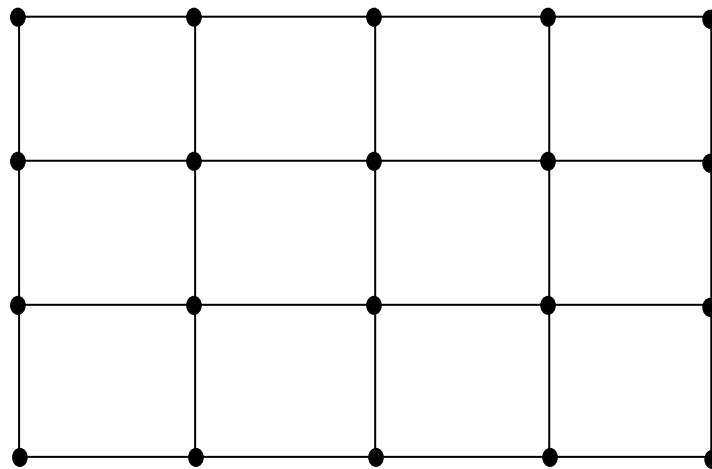


Fig. 3-6. Domaine plan discrétisé

3-5-2 Représentation élémentaire (ou locale) du champ de déplacements

3-5-2-1 Cas d'un élément fini de plaque non-conforme

Soit un élément rectangulaire de plaque mince, représenté sur la figure (3-7a). En chaque nœud, on associe 3 inconnues à savoir la flèche (w) et les deux rotations (ou pentes)

$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ et $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$ dont les sens de rotation positifs sont montrés sur la figure (3-7b).

L'élément a alors au total 12 degrés de liberté [16,17,18].

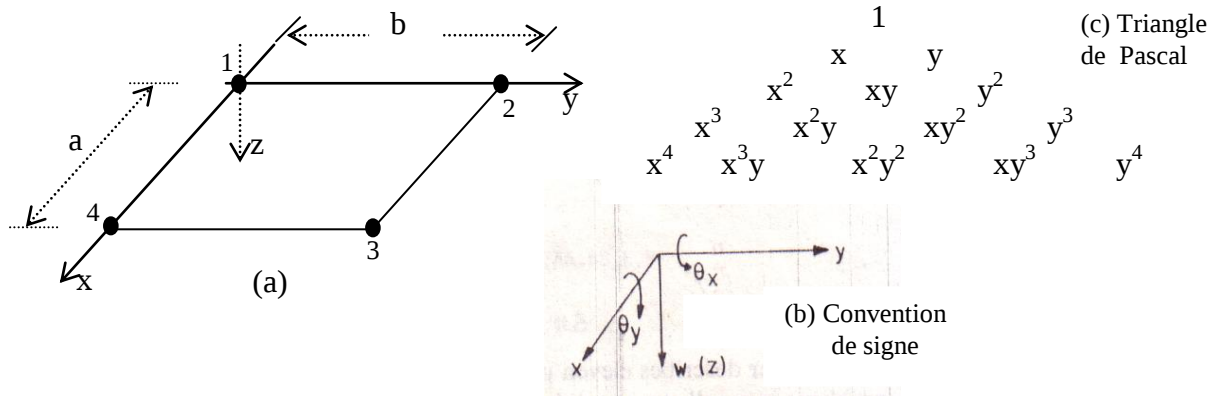


Fig. 3-7. Élément fini de plaque non-conforme à 12 degrés de liberté par élément

Choisissons un développement polynomial incomplet mais conservant son isotropie (fig. 3-7c) de 4^{ème} degré :

$$w(x, y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2 + b_7x^3 + b_8x^2y + b_9xy^2 + b_{10}y^3 + b_{11}x^3y + b_{12}xy^3 \quad (3-38)$$

a) Convergence : L'ordre des dérivées, $m = 2$, dans la forme faible réclame :

- une continuité C^1 , relative à la flèche w et à la pente normale $\frac{\partial w}{\partial n}$ aux frontières, pour aboutir à un élément conforme ;
- un polynôme au moins complet au degré 2.

La continuité de la flèche est ordinairement aisée à réaliser, et assure simultanément celle de la pente tangentielle $\frac{\partial w}{\partial s}$. Par contre, la continuité de la pente normale $\frac{\partial w}{\partial n}$ pose de très difficiles problèmes. Le polynôme (3-38) satisfait à l'interprétation physique du critère (C) : être complet puisqu'il peut représenter pour une plaque mince : 1) les modes rigides ($w = b_1$: translation parallèle à w , $w = b_2x$: rotation autour de y , $w = b_3x$: rotation autour de x) 2) les déformations généralisées constantes ($\chi_x = -2b_4$, $\chi_y = -2b_6$, $\chi_{xy} = -2b_5$).

b) Difficulté de conformité

Les termes quartiques dans le polynôme (3-38) sont tels que le long des frontières de l'élément ($x = \text{cte}$, $y = \text{cte}$), la flèche varie cubiquement et la pente paraboliquement. Cette

flèche est définie par 4 valeurs (par exemple pour le coté 4-3 ; $x = a$) la flèche et la pente aux 2 nœuds : 4 et 3), et continue. Les coefficients indéterminés qui sont en nombre de 4 peuvent être alors calculés de façon unique en exprimant les composantes de déplacement des nœuds 4 et 3 en fonction des coordonnées nodales. Il ne restera alors que 2 valeurs (la pente normale $\frac{\partial w}{\partial x}$ aux 2 nœuds : 4 et 3), insuffisante à garantir la continuité de la pente normale ; celle-ci étant parabolique, elle exige trois degrés de liberté signifiant aux 2 pentes normales existantes en 4 et 3 ($\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_4, \frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_3$), il faut ajouter une pente normale soit à mi-frontière par exemple.

L'élément est donc non-conforme mais il conduit malgré tout à des résultats satisfaisants. Il est alors convergent au sens du critère de convergence C. En effet, lorsqu'on subdivise toujours plus finement, on tend dans chaque élément vers un état de déformation constante.

c) Matrice de rigidité et le vecteur des forces nodales

Exprimons l'équilibre de l'élément en écrivant le PTV :

$$\int_{\Omega_0} \delta \varepsilon_0^T \sigma_0 d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \delta w \bar{p} d\Omega_0 \quad (3-39)$$

Où d'après les relations des déformations et des contraintes généralisées (3-34) :

$$\varepsilon_0 = \chi_0 = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} ; \sigma_0 = M_0 = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D^* \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3-40)$$

$$\int_{\Omega_0} \delta \chi_0^T M_0 dx dy = \int_{\Omega_0} \delta w \bar{p} dx dy \text{ avec } D^* = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)}$$

On obtient via (3-38), la matrice de rigidité k et le vecteur force f de l'élément en choisissant une approximation appropriée du champ:

$$w = Nd \quad (3-41)$$

avec $\delta w = N \delta d$ et $\delta \varepsilon_0 = B \delta d = \delta \chi_0$; $\sigma_0 = M_0 = D \chi_0 = DBd$; ce qui nous permet d'avoir :

$$\delta d^T \left(\int_{\Omega_0} B^T DB d\Omega_0 \right) d - \int_{\Omega_0} N^T \bar{p} d\Omega_0 = 0 \quad (3-42)$$

Soit :

$$\delta d^T (k.d - f) = 0 \Leftrightarrow k.d = f ; \delta d^T \text{ étant arbitraire.}$$

où :

$$k = \int_{\Omega_0} B^T D B d\Omega_0 \text{ et } f = \int_{\Omega_0} N^T \bar{p} d\Omega_0 \quad (3-43)$$

Evaluons maintenant explicitement les fonctions d'interpolation n_j en exprimant les 12 degrés de liberté de l'élément en fonction des coordonnées nodales (figure 3-7a). La relation (3-38) conduit à :

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & b^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 \\ 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 3a^2b & b^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & a^3 & 3ab^2 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & b^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \\ b_{10} \\ b_{11} \\ b_{12} \end{Bmatrix} \quad (3-44a)$$

Ou symboliquement

$$d = Ab \quad (3-44b)$$

Soit inversement:

$$b = A^{-1}.d \quad (3-45)$$

Il est possible de résoudre l'équation (3-45) et obtenir l'expression explicite de la fonction de déplacement (3-38) conduisant en utilisant un système de coordonnées normalisées (ζ, η : figure 3-8) à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} w(\zeta, \eta) = & \sum_{i=1}^4 \frac{1}{8} (1 + \zeta \zeta_i)(1 + \eta \eta_i)(2 + \zeta \zeta_i + \eta \eta_i - \zeta^2 - \eta^2) w_i \\ & + \sum_{i=1}^4 \frac{a}{16} \zeta_i (1 + \zeta \zeta_i)^2 (1 + \eta \eta_i)(\zeta \zeta_i - 1) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i + \sum_{i=1}^4 \frac{b}{16} \eta_i (1 + \zeta \zeta_i)(1 + \eta \eta_i)^2 (\eta \eta_i - 1) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{12} N_i(\zeta, \eta) d_i \quad (3-46)$$

où $\zeta = \frac{2}{a}(x - x_0)$; $\eta = \frac{2}{b}(y - y_0)$; (x_0, y_0) : coordonnées centroidales de l'élément de la plaque ; $-1 \leq \zeta \leq 1$ et $-1 \leq \eta \leq 1$.

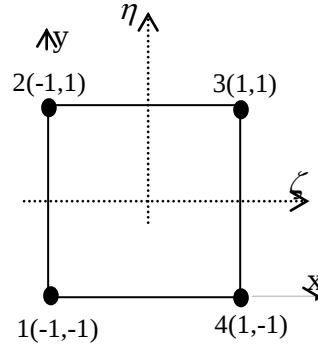


Fig. 3-8. Système de coordonnées normalisées

En substituant l'expression (3-46) dans (3-43), nous pouvons obtenir explicitement pour la matrice de rigidité élémentaire :

$$k_{ij} = D \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} + \nu \left[\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \right] + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad (3-47)$$

Exemple : calculons le terme de la matrice de rigidité qui correspond à l'effort dans la direction verticale du nœud 3 et du à l'action du déplacement vertical du nœud 2.

D'après la numérotation des degrés de liberté adoptés dans la figure (3-9), le terme de la matrice de rigidité correspond à l'élément k_{74} . La numérotation des noeuds correspond à celle adoptée dans le programme STRUDL5_version 2014 soit dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

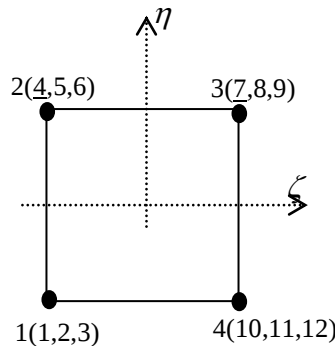


Fig. 3-9. Steering vector - cas de l'élément à trois de grés de liberté par noeud

En sachant que : $\zeta = \frac{2x}{a} - 1$ et $\eta = \frac{2y}{b} - 1$; $dxdy = |J|d\zeta d\eta$; $|J| = \frac{ab}{4}$ où $|J|$ étant le déterminant de la matrice Jacobienne (voir le cours d'éléments finis) ; si $f(x,y) \equiv f(\zeta, \eta)$,
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{2}{a}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{2}{b}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y} = \left(\frac{2}{a}\right)\left(\frac{2}{b}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta \partial \eta}$, l'expression (3-47)
s'écrit :

$$k_{74} = D^* \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{4}{a^2} \frac{\partial^2 N_7}{\partial \zeta^2} \cdot \frac{4}{a^2} \frac{\partial^2 N_4}{\partial \zeta^2} + \frac{4}{b^2} \frac{\partial^2 N_7}{\partial \eta^2} \cdot \frac{4}{b^2} \frac{\partial^2 N_4}{\partial \eta^2} + \frac{16\nu}{a^2 b^2} \left(\frac{\partial^2 N_7}{\partial \zeta^2} \frac{\partial^2 N_4}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 N_4}{\partial \zeta^2} \frac{\partial^2 N_7}{\partial \eta^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{32(1-\nu)}{a^2 b^2} \left(\frac{\partial^2 N_7}{\partial \zeta \partial \eta} \frac{\partial^2 N_4}{\partial \zeta \partial \eta} \right) \right] \frac{ab}{4} d\zeta d\eta \quad (a)$$

A partir des fonctions de déplacements (3-46), nous avons pour $k = 4$ (nœud 2 : w_2) ou $k = 7$ (nœud 3 : w_3) : $N_k(\zeta, \eta) = \frac{1}{8}(1 + \eta\eta_k)(1 + \zeta\zeta_k)(2 + \zeta\zeta_k + \eta\eta_k - \zeta^2 - \eta^2)$. Alors, nous aurons respectivement pour les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 N_k}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{4}(1 + \eta\eta_k)(\zeta_k^2 - 3\zeta\zeta_k - 1) ; \quad \frac{\partial^2 N_k}{\partial \eta^2} = \frac{1}{4}(1 + \zeta\zeta_k)(-3\eta\eta_k - 1) \\ \frac{\partial^2 N_k}{\partial \zeta \partial \eta} = \frac{1}{8}(4\zeta_k\eta_k - 2(\zeta_k\eta + \zeta\eta_k) + 2\zeta_k\eta_k(-\zeta\zeta_k + \eta\eta_k) - 3\zeta_k^2\eta_k(\zeta^2 + \eta^2)) \quad (b)$$

où $(\zeta_k, \eta_k) = (-1, 1)$ et $(1, 1)$. En substituant (b) dans (a), on peut écrire :

$$k_{74} = D^* (I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5) = \frac{D^*}{5ab} \left[10\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 20\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 4\nu - 14 \right] \text{ où :}$$

$$I_1 = \frac{b}{4a^3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 + \eta)^2 (-9\zeta^2) d\zeta d\eta = \frac{-4b}{a^3} ; \quad I_2 = \frac{b}{4b^3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 - \zeta^2) (9\eta^2) d\zeta d\eta = \frac{2a}{b^3}$$

$$I_3 = \frac{\nu}{4ab} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 + \eta)(1 - \zeta)(9\zeta\eta) d\zeta d\eta = \frac{-\nu}{ab} ; \quad I_4 = \frac{\nu}{4ab} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 + \eta)(1 + \zeta)(-9\zeta\eta) d\zeta d\eta = \frac{-\nu}{ab}$$

$$I_5 = \frac{1-\nu}{8ab} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 -4[4 - 3(\zeta^2 + \eta^2)]^2 d\zeta d\eta = \frac{-14(1-\nu)}{5ab}$$

Soit $k_{74} = \frac{D^*}{5ab} (10(\frac{a}{b})^2 - 20(\frac{b}{a})^2 + 4\nu - 14) = -4.56 \frac{D^*}{a^2}$. Si $a = b$ (élément carré) ; $\nu = 0.3$ nous aurons : $k_{74} = -4.56 \frac{D^*}{a^2}$.

3-5-2-1 Cas d'un élément fini de plaque conforme

La difficulté majeure pour assurer la conformité aux frontières (continuité C^1) dans les éléments finis de forme simple (triangle, rectangle) provient de ce que la pente n'est pas indépendante de la flèche (mais lui est liée par dérivation) de sorte que le nombre de paramètres (b_i) nécessaires à assurer la continuité de cette pente est imposé, une fois choisi celui de la flèche. Pour contourner l'obstacle, on peut :

- admettre une certaine non-conformité ne détruisant pas la convergence comme dans le paragraphe précédent
- admettre une certaine sur compatibilité comme dans le cas de l'élément rectangulaire à 16 degrés de liberté ci-après que nous utilisons dans le cadre de ce présent travail [12].

Considérons toujours comme dans le cas précédent un élément à 4 nœuds mais ayant 16 degrés de liberté (fig. 3-10a). Par rapport à l'élément précédent, un degré supplémentaire de torsion (fig. 3-10c) est ajouté au niveau de chaque nœud.

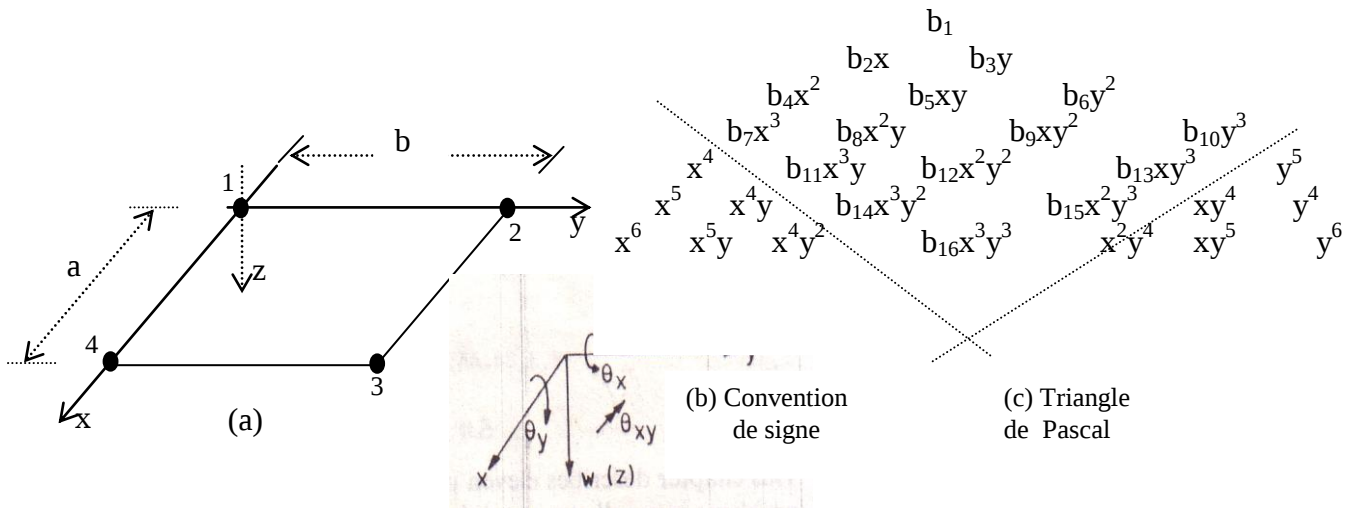


Fig. 3-10. Elément fini de plaque conforme à 16 degrés de liberté par élément

On choisit une fonction polynomiale de déplacement de la forme :

$$w(x, y) = (a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3)(b_1 + b_2y + b_3y^2 + b_4y^3) \quad (3-48)$$

Les 16 constantes considérées sont montrées sur le triangle de Pascal (fig. 3-10c). Elles peuvent être déterminées en évaluant les 16 valeurs nodales en fonction des coordonnées

nodales de l'élément conduisant, dans le système de coordonnées normalisées (fig. 3-8), à l'expression suivante :

$$w(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^4 [G_i(\zeta)G_i(\eta)w_i + \frac{a}{2}H_i(\zeta)G_i(\eta)(\frac{\partial w}{\partial x})_i + \frac{b}{2}G_i(\zeta)H_i(\eta)(\frac{\partial w}{\partial y})_i + \frac{ab}{4}H_i(\zeta)H_i(\eta)(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})_i] \quad (3-49a)$$

$$\text{où : } G_i(\zeta) = \frac{1}{4}(-\zeta_i \zeta^3 + 3\zeta_i \zeta + 2) ; \quad H_i(\zeta) = \frac{1}{4}(\zeta^3 + \zeta_i \zeta^2 - \zeta - \zeta_i) \quad (3-49b)$$

$$\zeta = \frac{x - (a/2)}{a/2} = 2(\frac{x}{a}) - 1 ; \quad \eta = 2(\frac{y}{b}) - 1$$

Sous forme physique en fonction de la cubique de déplacement d'un élément de poutre (section 3-4-1), l'expression (3-49a) peut se réécrire par la manière suivante :

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{i=1}^{16} n_i(x, y) d_i \\ &= \frac{1}{a^3 b^3} [(a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(b^3 + 2y^3 - 3by^2)w_1 + ax(x-a)^2(b^3 + 2y^3 - 3by^2)(\frac{\partial w}{\partial x})_1 \\ &\quad + b(a^3 + 2x^3 - 3ax^2)y(y-b)^2(\frac{\partial w}{\partial y})_1 + abxy(x-a)^2(y-b)^2(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})_1 \\ &\quad + (a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(3by^2 - 2y^3)w_2 + ax(x-a)^2(3by^2 - 2y^3)(\frac{\partial w}{\partial x})_2 \\ &\quad + b(a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(y^3 - by^2)(\frac{\partial w}{\partial y})_2 + abxy(x-a)^2(y^2 - by)(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})_2 \\ &\quad + (3ax^2 - 2x^3)(3by^2 - 2y^3)w_3 + a(x^3 - ax^2)(3by^2 - 2y^3)(\frac{\partial w}{\partial x})_3 \\ &\quad + b(3ax^2 - 2x^3)(y^3 - by^2)(\frac{\partial w}{\partial y})_3 + abxy(x^2 - ax)(y^2 - by)(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})_3 \\ &\quad + (3ax^2 - 2x^3)(b^3 + 2y^3 - 3by^2)w_4 + a(x^3 - ax^2)(b^3 + 2y^3 - 3by^2)(\frac{\partial w}{\partial x})_4 \\ &\quad + b(3ax^2 - 2x^3)y(y-b)^2(\frac{\partial w}{\partial y})_4 + abxy(x^2 - ax)(y-b)^2(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})_4] \end{aligned} \quad (3-50)$$

Notons que les polynômes des relations (3-49) dits d'Hermite sont identiques aux fonctions de déplacements de poutre [12] où en vue de faciliter la programmation on pose :

$$G_1(\zeta) = \frac{1}{4}(\zeta^3 - 3\zeta + 2) = G_2(\zeta) = f_1(x) = P_1$$

$$G_3(\zeta) = \frac{1}{4}(-\zeta^3 + 3\zeta + 2) = G_4(\zeta) = f_2(x) = P_3$$

$$\begin{aligned} H_1(\zeta) &= \frac{1}{4}(\zeta^3 - \zeta^2 - \zeta + 1) = H_2(\zeta) = f_3(x) = P_2 \\ H_3(\zeta) &= \frac{1}{4}(\zeta^3 + \zeta^2 - \zeta - 1) = H_4(\zeta) = f_4(x) = P_4 \\ G_1(\eta) &= \frac{1}{4}(\eta^3 - 3\eta + 2) = G_4(\eta) = f_1(y) = Q_1 \\ G_2(\eta) &= \frac{1}{4}(-\eta^3 + 3\eta + 2) = G_3(\eta) = f_2(y) = Q_3 \\ H_1(\eta) &= \frac{1}{4}(\eta^3 - \eta^2 - \eta + 1) = H_4(\eta) = f_3(y) = Q_2 \\ H_2(\eta) &= \frac{1}{4}(\eta^3 + \eta^2 - \eta - 1) = H_3(\eta) = f_4(y) = Q_4 \end{aligned} \tag{3-51}$$

Les fonctions P_1, P_2, P_3, P_4 et Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sont des noms de variables utilisées par le programme STRUDL5_version 2014 dans la subroutine FMPLAT qui calcule les fonctions d'interpolation $N_i(x,y)$. Il est possible d'interpréter physiquement ces 16 fonctions d'interpolation. Par suite, la représentation élémentaire ou locale du champ de déplacement transversal $w^e(x,y,t)$ de l'élément e peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$w^e(x, y, t) = [N^e] \{d^e(t)\} \quad (3-52)$$

Ou explicitement :

The diagram illustrates a 1D chain of 16 nodes, labeled N_1 through N_{16} . The nodes are grouped into four sets of four, each associated with a 'noeud' (node) label: 'noeud 1' for N_1-N_4 , 'noeud 2' for N_5-N_8 , 'noeud 3' for N_9-N_{12} , and 'noeud 4' for $N_{13}-N_{16}$. Vertical dotted lines separate the groups. To the left of N_1 is a weight w with a left-pointing arrow. To the right of N_{16} is a weight w with a right-pointing arrow. On the far right, a vertical line separates the node groups from a list of parameters. For each 'noeud', there are three parameters: w_i , $\theta_{x i}$, and $\theta_{y i}$, where i is the node index. For example, for 'noeud 1', the parameters are w_1 , θ_{x1} , and θ_{y1} . The parameters are listed vertically, with horizontal dotted lines separating the parameter sets for different nodes. The labels 'noeud 1', 'noeud 2', 'noeud 3', and 'noeud 4' are placed to the left of their respective parameter sets, with a right-pointing arrow indicating the association.

où :

- $n^e (=4)$ est le nombre total de nœuds de l'élément
- $N_j^e = n_j^e(x, y)$; $j = 1, n^e$ sont les fonctions d'interpolation élémentaires.
- $[N^e]$ est la matrice des fonctions d'interpolation
- $\{d^e\} = \{d^e(t)\}$ est le vecteur regroupant les déplacements des nœuds de l'élément (e)

Remarque : Considérons par exemple le nœud 1 : les valeurs w , $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ sont égales aux 4 degrés de liberté du nœud associés en ce nœud. On peut vérifier que dans ce nœud (i.e $x = y = 0$), les fonctions $n_1(x, y)$, $\frac{\partial n_2(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial n_3(x, y)}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 n_4(x, y)}{\partial x \partial y}$ prennent des valeurs égales à 1 dont l'allure est illustrée sur la figure (3-11). Les 12 autres fonctions restantes doivent être nulles.

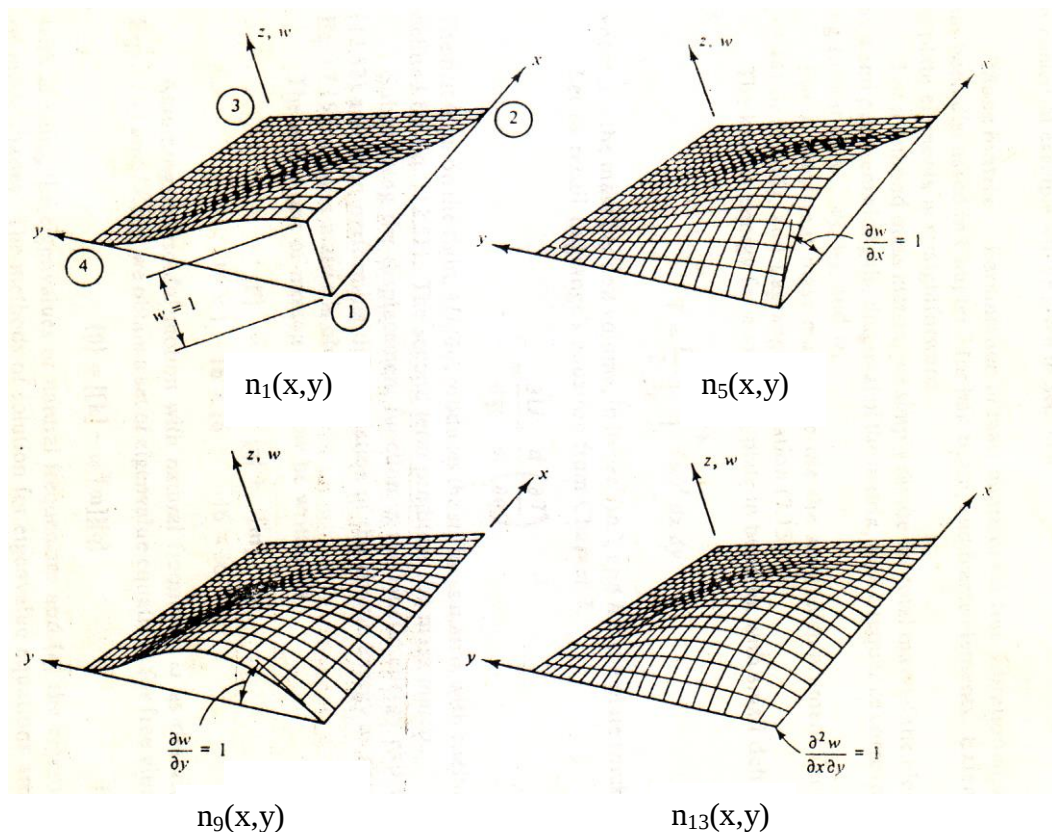


Fig. 3-11. Illustration des fonctions d'interpolation au nœud 1

Exemple 2 : Reprendre l'exemple précédent mais en considérant un élément fini de plaque mince conforme à 16 degrés de liberté par élément. Comparer les résultats à ceux donnés par les tables (A1) et (A2) de Yang présentés en annexe A. AN : Prendre une plaque en acier ($E = 210000 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$), $e = 20 \text{ mm}$; $a = b = 250 \text{ mm}$.

La numérotation des degrés de liberté adoptés est représentée sur la figure (3-12) où l'effort dans la direction verticale du nœud 3 (F_{3z}) et du à l'action du déplacement vertical du nœud 2 (w_3) correspond à l'élément k_{95} de la matrice de rigidité de l'élément. La numérotation des noeuds correspond étant celle adoptée dans le programme STRUDL5 soit dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

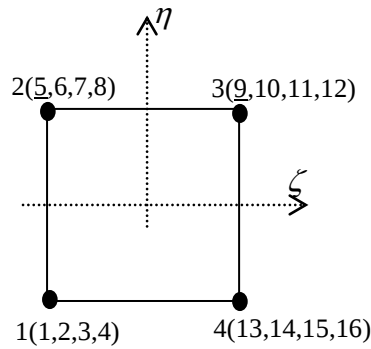


Fig. 3-12. Steering vector - cas de l'élément à quatre degrés de liberté par noeud

$$k_{95} = D \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{4}{a^2} \right)^2 \frac{\partial^2 N_9}{\partial \zeta^2} \cdot \frac{\partial^2 N_5}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{4}{b^2} \right)^2 \frac{\partial^2 N_9}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial^2 N_5}{\partial \eta^2} + \frac{16\nu}{a^2 b^2} \left(\frac{\partial^2 N_9}{\partial \zeta^2} \frac{\partial^2 N_5}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 N_9}{\partial \zeta^2} \frac{\partial^2 N_5}{\partial \eta^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{32(1-\nu)}{a^2 b^2} \left(\frac{\partial^2 N_9}{\partial \zeta \partial \eta} \frac{\partial^2 N_5}{\partial \zeta \partial \eta} \right) \right] \frac{ab}{4} d\zeta d\eta \quad (a)$$

Evaluons d'abord les dérivées secondes des fonctions d'interpolation (3-49). Nous avons:

$$N_5 = G_2(\zeta)G_2(\eta) ; N_9 = G_3(\zeta)G_3(\eta) ; G_2(\zeta) = \frac{1}{4}(\zeta^3 - 3\zeta + 2) ; G_3(\zeta) = \frac{1}{4}(-\zeta^3 + 3\zeta + 2)$$

$$G_2'(\zeta) = \frac{3}{4}(\zeta^2 - 1) = -G_3'(\zeta) ; G_2''(\zeta) = \frac{3}{2}\zeta = -G_3''(\zeta)$$

$$G_2(\eta) = \frac{1}{4}(-\eta^3 - 3\eta + 2) = G_3(\eta) ; G_2'(\eta) = \frac{3}{4}(-\eta^2 + 1) = G_3'(\eta) ; G_2''(\eta) = -\frac{3}{2}\eta = G_3''(\eta)$$

La relation (a) conduira à : $k_{95} = D^* (I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5)$ où :

$$I_1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{4b}{a^3} \left(-\frac{9}{4}\zeta^2\right) \cdot \frac{1}{16} \cdot (-\eta^3 + 3\eta + 2)^2 d\zeta d\eta = \frac{-156b}{35a^3}$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{4a}{b^3} \left(\frac{3\eta}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{16} \cdot (-\zeta^3 + 3\zeta + 2) \cdot (\zeta^3 - 3\zeta + 2) d\zeta d\eta = \frac{-54a}{35b^3}$$

$$I_3 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{4\nu}{ab} \left(\frac{-3\zeta}{2}\right) \cdot \frac{1}{16} \cdot (-\eta^3 + 3\eta + 2) \cdot (\zeta^3 - 3\zeta + 2) \cdot \left(\frac{-3\eta}{2}\right) \cdot d\zeta d\eta = \frac{-36\nu}{25ab} = I_4$$

$$I_5 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{8(1-\nu)}{ab} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot (-\eta^2 + 1)^2 \cdot (-\zeta^2 + 1)^2 \cdot (-1) \cdot d\zeta d\eta = \frac{-72(1-\nu)}{25ab}$$

D'où $k_{95} = D^* \left(\frac{-156b}{a^3} + \frac{54a}{35b^3} - \frac{72}{25ab} \right)$; pour $a = b$ $k_{95} = \frac{-5070}{875} \cdot \frac{D^*}{a^2} = 5.79 \frac{D^*}{a^2}$ soit 26% supérieur au terme k_{74} .

Utilisons maintenant les tables de Yang, soit $F_{3,4} \equiv F_{w_3, w_4} = k_{w_3, w_4}$, voir figure 3-13). D'abord selon la table 1, on en déduit : $k_{95} = k_{21}$ (i.e row = 2 and column = 1) et ensuite d'après la table 2, on peut déduire également les valeurs des coefficients suivants :

$$\alpha_1 = \frac{-156}{36} ; \alpha_2 = \frac{54}{35} ; \alpha_3 = \frac{-72}{25} ; \alpha_4 = 0 = \alpha_5 = \alpha_6.$$

$$\rightarrow k_{21} = \frac{D^*}{ab} \left[\left(\frac{-156}{36} \right) \left(\frac{b}{a} \right)^2 + \frac{54}{35} \left(\frac{a}{b} \right)^2 - \frac{72}{25} \right] = \frac{D^*}{a^2} (5.67)$$

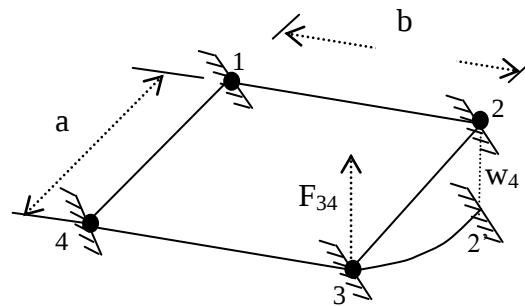


Fig. 3-13. Utilisation des tables de yang

Notons que la numérotation des nœuds utilisée par Yang est de sens contraire aux aiguilles d'une montre soit contraire à celle adoptée dans le programme STRUDL5.FOR_version 2014.

3-5-3 Représentation globale du champ de déplacements

Le champ de déplacements $w(x, y, t)$ a pour expression sur l'ensemble du domaine (Ω) :

$$w = [N]\{d\} \quad (3-53)$$

$$w = \begin{matrix} & \text{noeud 1} & & & \text{noeud i} & & & \text{noeud n} & \\ \leftarrow & N_{w1} & N_{\theta_{x1}} & N_{\theta_{y1}} & N_{\theta_{xy1}} & \dots & N_{wi} & N_{\theta_{xi}} & N_{\theta_{yi}} & N_{\theta_{xyi}} & \dots & N_{wn} & N_{\theta_{xn}} & N_{\theta_{yn}} & N_{\theta_{xyn}} & \end{matrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{xy1} \\ \vdots \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{xyi} \\ \vdots \\ w_n \\ \theta_{xn} \\ \theta_{yn} \\ \theta_{xyn} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \leftarrow \text{noeud 1} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{noeud i} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{noeud n} \end{matrix} \end{matrix}$$

Où :

- n est le nombre de nœuds total du maillage
- $N_j = N_j(x, y)$; $j = 1, N$ sont les $N_i(x, y)$ sont les fonctions d'interpolation
- $[N]$ est la matrice des fonctions d'interpolation
- $\{d\} = \{d(t)\}$ est le vecteur des n déplacements nodaux.

NB : Les fonctions d'interpolation vérifient les relations :

$$N_i^e(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad ; \quad N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j$$

Où (x_j, y_j) étant les coordonnées du nœuds j considéré.

3-5-4 Partition des degrés de liberté- conditions aux limites

Effectuons une partition des degrés de liberté en déplacements inconnus $\{d_L\}$ et connus $\{d_p\}$; où :

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} \{d_L\} = ? \\ \{d_p\} \end{Bmatrix} \quad (3-54)$$

Où le vecteur $\{d_p\}$ regroupe les déplacements connus des nœuds situés sur la surface Γ_u .

Cette partition conduit également à la partition de la matrice des fonctions d'interpolation :

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_L] & [N_p] \end{bmatrix} \quad (3-55)$$

D'où la relation du champ de déplacements d et de sa variation δd :

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_L] & [N_p] \end{bmatrix} \quad (3-56a)$$

$$\delta d = \begin{bmatrix} [N_L] & [N_p] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta d_L \\ 0 \end{Bmatrix} = [N_L] \delta d_L \quad (3-56b)$$

NB: Compte-tenu des propriétés des fonctions d'interpolation : $d = d_p$ et $\delta d = 0$ aux nœuds situés sur la frontière Γ_u (i.e $\delta d_p = 0$).

3-5-5 Discrétisation de la forme intégrale faible

De l'expression (3-53) du champ de déplacements w sur le domaine ; soit :

$$w = [N] \{d\} \quad (3-57a)$$

$$\dot{w} = [N] \{\dot{d}\} \quad (3-57b)$$

$$\ddot{w} = [N] \{\ddot{d}\} \quad (3-57c)$$

On déduit à l'aide des relations définies dans le paragraphe (3-4-2) :

$$\varepsilon_0 = \chi_0 = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [B] \{d\} \quad (3-58)$$

où :

$$[B] = [\{B_1\} \dots \{B_i\} \dots \{B_n\}] \quad (3-59)$$

$$\{B_i\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \\ -\frac{2\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3-60)$$

De même, en termes de variation:

$$\delta w = [N] \{\delta d\} = \{\delta d\}^T [N] \quad (3-61a)$$

$$\delta \varepsilon_0 = \delta \chi_0 = [B] \{d\} \quad (3-61b)$$

$$\dot{\delta w} = [N] \{\dot{\delta d}\} \quad (3-61c)$$

$$\ddot{\delta w} = [N] \{\ddot{\delta d}\} \quad (3-61d)$$

En portant ces relations dans la relation (3-18), il vient finalement:

$$W = \{\delta d\}^T ([M] \{\ddot{d}\} + [C] \{\dot{d}\} + [K] \{d\} - \{F\}) = 0 \quad (3-62)$$

Où :

$$M = \int_{\Omega} [N]^T \rho [N] d\Omega \quad (3-63)$$

$$C = \int_{\Omega} [N]^T c [N] d\Omega \quad (3-64)$$

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (3-65)$$

$$\{F\} = \int_{\Omega} [N]^T \{b\} d\Omega + \int_{\Gamma_f} [N]^T \{f\} d\Gamma \quad (3-66)$$

où $[M]$, $[C]$, $[K]$ sont des matrices respectivement de masse [kg.s²/m], d'amortissement [N.s/m] et de rigidité [N/m] et $\{F\}$, $\{u\}$ sont des vecteurs des sollicitations directement

appliquées $[N]$ et des déplacements nodaux $[m]$. Notons que les matrices $[M]$, $[C]$ et $[K]$ sont en outre symétriques.

La partition des degrés de liberté induit une partition de $[M]$, $[C]$, $[K]$ et $\{F\}$:

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{LL}] & [M_{LP}] \\ [M_{PL}] & [M_{PP}] \end{bmatrix}; [C] = \begin{bmatrix} [C_{LL}] & [C_{LP}] \\ [C_{PL}] & [C_{PP}] \end{bmatrix}; [K] = \begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LP}] \\ [K_{PL}] & [K_{PP}] \end{bmatrix}; \{F\} = \begin{Bmatrix} \{F_L\} \\ \{F_P\} \end{Bmatrix} \quad (3-67)$$

La forme discrétisée des équations de mouvement s'écrira finalement : trouver $[d_L(t)]$, $\forall \langle \delta d_L \rangle$: tel que :

$$\{\delta d_L\}^T \left(\begin{bmatrix} [M_{LL}] & [M_{LP}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_L \\ \ddot{d}_P \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{LL}] & [C_{LP}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_L \\ \dot{d}_P \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LP}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_L \\ d_P \end{bmatrix} - \{F_L\} \right) = 0$$

soit:

$$\begin{bmatrix} [M_{LL}] & [M_{LP}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_L \\ \ddot{d}_P \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{LL}] & [C_{LP}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_L \\ \dot{d}_P \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LP}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_L \\ d_P \end{bmatrix} - \{F_L\} = 0 \quad (3-68)$$

Avec les conditions initiales : $\{d_L(t_0)\} = \{d_{L,0}\}$

Par conséquent, les déplacements nodaux sont les solutions du système d'équations :

$$\begin{aligned} [M_{LL}] \{\ddot{d}_L\} + [C_{LL}] \{\dot{d}_L\} + [K_{LL}] \{d_L\} &= \{F_L\} - [M_{LP}] \{\ddot{d}_P\} - [C_{LP}] \{\dot{d}_P\} - [K_{LP}] \{d_P\} \\ \{d_L(t_0)\} &= \{d_{L,0}\} \end{aligned} \quad (3-69)$$

3-5-6 Mise en œuvre pratique : calculs élémentaires et assemblage

En pratique $[M]$, $[C]$, $[K]$ et $\{F\}$ sont construits élément par élément. La procédure consiste d'abord d'écrire la forme intégrale élémentaire W^e en composant l'équation (3-18) pour un élément (e) et ensuite de réaliser l'opération d'assemblage en utilisant la relation (3-37).

3-5-6-1 Matrices et vecteur de sollicitations élémentaires

Écrivons pour l'expression du champ de déplacements dans l'élément (e) :

$$w^e = [N^e] \{d^e\} \quad (3-70)$$

On déduit alors :

$$\varepsilon_0^e = [B^e] \{d^e\}, \quad \dot{w}^e = [N^e] \left\{ \dot{d}^e \right\}, \quad \ddot{w}^e = [N^e] \left\{ \ddot{d}^e \right\} \quad (3-71)$$

De même : $\delta w^e = [N^e] \{ \delta d^e \}$, $\delta \varepsilon_0^e = [B^e] \{ \delta d^e \}$. En reportant ces expressions dans l'équation (3-18), il vient :

$$\sum_e \left(\{ \delta d^e \}^T \left([M^e] \left\{ \ddot{d}^e \right\} + [C^e] \left\{ \dot{d}^e \right\} + [K^e] \{d^e\} - \{F^e\} \right) \right) = 0 \quad (3-72)$$

où :

$$[M^e] = \int_{\Omega^e} [N^e]^T \rho [N^e] d\Omega \quad (3-73a)$$

$$[C^e] = \int_{\Omega^e} [N^e]^T c [N^e] d\Omega \quad (3-73b)$$

$$[K^e] = \int_{\Omega^e} [B^e]^T [D] [B^e] d\Omega \quad (3-73c)$$

$$\{F^e\} = \int_{\Omega^e} [N^e]^T \{ \bar{b} \} d\Omega + \int_{\Gamma_f^e} [N^e]^T \{ \bar{f} \} d\Gamma \quad (3-73d)$$

NB : Dans ces formules, Ω^e représente le volume de l'élément (e) et Γ_f^e la partie de Γ_f qui appartient à la frontière de l'élément (e). Notons par ailleurs que ces quantités sont souvent évaluées numériquement vu qu'il est difficile ou impossible de trouver les expressions analytiques de ces intégrales. On peut alors les évaluer de manière approchée par une intégration numérique.

3-5-6-2 Intégration numérique

Les relations (3-73) font intervenir des intégrales qu'on peut écrire sous la forme :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx, \quad \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dx dy, \quad \dots$$

Afin de simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, on fait associer un élément de référence de forme très simple comme déjà spécifié dans le paragraphe (3-5-2). L'élément de référence est repéré dans un espace de référence qui peut être transformé en chaque élément réel (e) par une transformation géométrique

bijective. Pour un domaine quadrilatère (fig. 3-14), il est possible de se ramener à l'intégrale définie sur un domaine unitaire par la transformation :

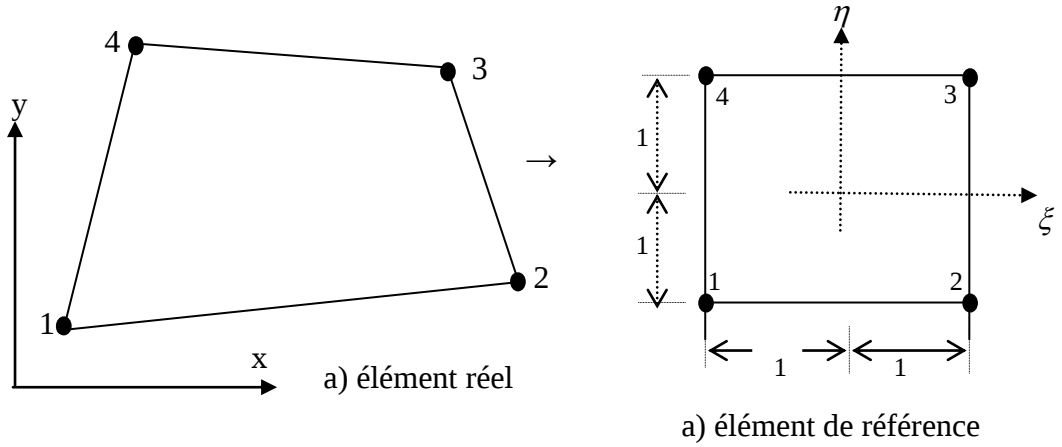


Fig. 3-14. Transformation d'un quadrilatère à 4 nœuds en un carré normé pour l'intégration numérique

$$x = \sum_{L=1}^{16} N_L(\xi, \eta) x_L, \quad y = \sum_{L=1}^{16} N_L(\xi, \eta) y_L \quad (3-74)$$

Où $N_L(\xi, \eta)$ sont des fonctions cubiques qui prennent une valeur unité en L et nulle en tous les autres sommets (voir le paragraphe 3-5-2-1).

On peut alors calculer la matrice Jacobienne $[J]$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_L \frac{\partial N_L}{\partial \xi} x_L & \sum_L \frac{\partial N_L}{\partial \xi} y_L \\ \sum_L \frac{\partial N_L}{\partial \eta} x_L & \sum_L \frac{\partial N_L}{\partial \eta} y_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_{16}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_{16}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{16} & y_{16} \end{bmatrix} \quad (3-75)$$

Soit en relation avec les dérivées premières, on peut écrire :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3-76)$$

Inversement :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3-77)$$

En fonction des variables nodales, nous obtenons aussi :

$$\begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [B] \{d^e\} \quad (3-78a)$$

$$\text{Où} \quad [B] = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_1^e}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 N_2^e}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 N_3^e}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 N_{16}^e}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 N_1^e}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 N_2^e}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 N_3^e}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 N_{16}^e}{\partial \eta^2} \\ \frac{2\partial^2 N_1^e}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{2\partial^2 N_2^e}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{2\partial^2 N_3^e}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{2\partial^2 N_{16}^e}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3-78b)$$

Si nous posons:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

Nous aurons alors :

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (3-78c)$$

$$\text{Où} \quad |J| = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \quad (3-78d)$$

Pour un élément de forme rectangulaire tel que celui de la figure (3-10), on trouve $|J| = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = ab/4$. Par ailleurs, en faisant intervenir le déterminant de $[J]$, il est possible d'exprimer l'élément de surface :

$$dxdy = |J| d\xi d\eta \quad (3-79)$$

Dés lors, l'intégrale sur le quadrilatère se ramène à :

$$\iint_A f(x, y) dxdy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} h(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} g(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3-80)$$

Calculons maintenant l'intégrale (3-80). La méthode la plus répandue est celle de Gauss [15,18], qui consiste tout d'abord d'évaluer la première intégrale en admettant que η est constant c'est-à-dire : $\int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi \approx \sum_{i=1}^l w_i g(\xi_i, \eta) = g(\eta)$. Dès lors : $\int_{-1}^1 g(\eta) d\eta = \sum_{j=1}^m w_j g(\eta_j)$ ou encore :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} g(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m w_i w_j g(\xi_i, \eta_j) \quad (3-81)$$

où l et m sont les nombres de points d'intégration suivant les deux directions ; (ξ_i, η_j) : abscisses des points d'intégration (point de Gauss) ; (w_i, w_j) : Coefficients de Gauss correspondants (poids d'intégration de Gauss).

3-5-6-3 - Matrices et vecteurs de sollicitations globales

L'équation (3-18) s'écrit à l'aide de la relation (3-53) :

$$W = \sum_e \left(\{\delta d^e\}^T \left([M^e] \{\ddot{d}^e\} + [C^e] \{\dot{d}^e\} + [K^e] \{d^e\} - \{F^e\} \right) \right) = 0 \quad (3-82)$$

où les matrices $[M^e]$, $[C^e]$, $[K^e]$ et $\{F^e\}$ sont obtenues par les relations (3-73). Dans ces matrices, les seuls termes non nuls sont les termes associés aux degrés de liberté de l'élément (e). On en déduit :

$$[M] = \sum_e [M^e], \quad [C] = \sum_e [C^e], \quad [K] = \sum_e [K^e], \quad \{F\} = \sum_e \{F^e\} \quad (3-83)$$

Notons que dans la pratique, la partition est effectuée avant la phase d'assemblage.

3-5-7 Implémentation dans le programme STRUDL5.FOR_version 2014 des opérations liées au calcul élémentaire et à l'assemblage

Evaluons les matrices de rigidité et de masse données par les relations (3-73a) et (3-73c) :

$$[K^e] = \int_{\Omega^e} [B^e]^T [D] [B^e] d\Omega \quad (3-84)$$

$$[M^e] = \int_{\Omega^e} [N^e]^T \rho [N^e] d\Omega \quad (3-85)$$

La formation de ces matrices et leur assemblage sont implémentés dans le programme STRUDL5.FOR_version 2014 et sont décrits dans l'algorithme de la figure (3-15) donné ci-après.

● **Dimensionnement et déclaration des variables :**

```
parameter(IKV=100000,ILOADS=1000,INF=1000,...)
integer NF(INF,4),G(16), NF2(INF,4), G2(16),...
real*8
SAMP(7,2),FUN(16),...,WIDTH,ECM(16,16),KM(16,16),EMM(16,16),KV(IKV),
KV2(IKV),MM(IKV), MM2(IKV), VK(IKV), VM(IKV),...
DATA LEC/5/,NODOF/4/,...
OPEN(UNIT=LEC,FILE='STRUDL5.INP'),...
```

● **Lecture des données :**

- NXE : nombre d'éléments suivant la direction x
- NYE : nombre d'éléments suivant la direction y
- NN : nombre total de nœuds du maillage
- NR : Nombre de degrés de liberté où au moins un degré de liberté est empêché
- NGP : nombre de points de Gauss
- ITYPE : indice de calcul de la matrice masse
(=1 : matrice concentrée ; =2 : matrice consistante)
- AA,BB : dimensions de l'élément suivant x et y
- WIDTH : épaisseur du solide
- E : module d'élasticité
- V : coefficient de Poisson
- RHO : masse volumique du matériau
- DR : taux d'amortissement
- NL : Nombre de nœuds chargés
- ND : Nombre de degrés de liberté imposés



call STRUDL5.INP



Formulation de la matrice des degrés de liberté NF de l'ensemble du maillage

→ call FORMNF(NF,INF,NN,NODOF,ND,NR,NCLT,N)

Calcul de la demi-largeur de bande IW : → call HBNDW(NXE,NYE, NF,...IW)

Formulation de la matrice des degrés de liberté NF2 avec déplacements imposés

→ call FORNF2(NF2,NF,INF,NODOF,ND,NO)



Pour tous les éléments (IP=1, NXE ; IQ=1,NYE)

Initialiser à zéro la matrice de rigidité KM et la matrice masse EMM de l'élément

Pour chaque point de Gauss (I=1,NGP ; J=1,NGP)

- Trouver les coordonnées du point de Gauss XSI=SAMP(I,1) et ETA=SAMP(I,2) et les coefficients de pondération $w_i = \text{SAMP}(I,2)$, $w_j = \text{SAMP}(I,2)$
→ call GAUSS(SAMP,..., NGP)
- Former les fonctions d'interpolation $[N_i^e]$ $i = 1,16$ et leurs dérivées par rapport au système de coordonnées locales ($\zeta = \text{XSI}$, $\eta = \text{ETA}$). Les fonctions d'interpolation sont stockées dans le vecteur colonne FUN et les dérivées premières et secondes respectivement (par rapport à ζ et η) sont stockées dans les vecteurs D1X, D1Y, D2X, D2Y et D2XY en moyennant les dimensions de l'élément AA et BB.

B

A

→ call FMPLAT(FUN, D1X, D1Y, D2X, D2Y,D2XY, XSI,ETA,AA,BB)

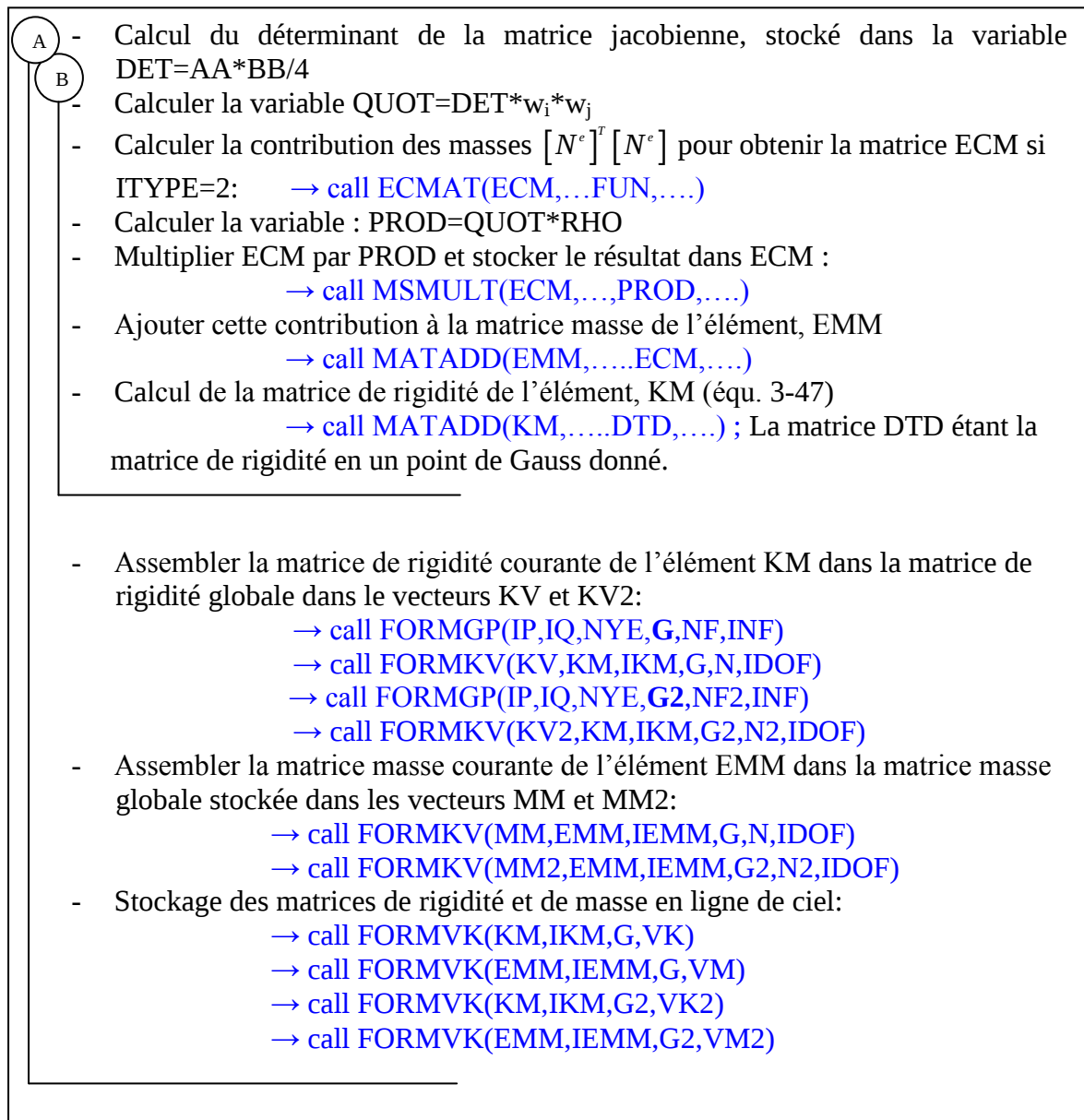


Fig. 3-15. Implémentation numérique des matrices de rigidité et de masse dans le programme STRUDL5.FOR_version 2014

Remarques :

1- Si la matrice masse est calculée comme étant concentrée (ITYPE = 1), elle devient diagonale qui s'écrit de la façon suivante:

$$MM = \frac{\rho ab}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-5} \end{bmatrix}$$

2- le vecteur G (ou respectivement G_2 : steering vector) correspondant est donné sur la figure (3-16) (sens de comptage étant horaire comme indiqué sur la figure (3-12)).

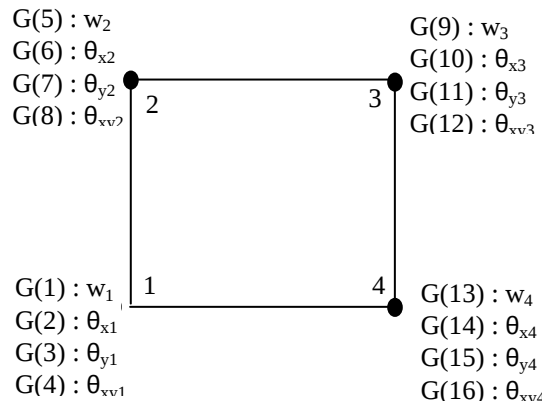


Fig. 3-16. Steering vector G de l'élément à 4 noeuds

Chapitre 4

RESOLUTION PAR LA METHODE D'INTEGRATION DIRECTE DE TYPE WILSON-θ
EN CONSIDERANT LES MOUVEMENTS D'APPUIS

4-1 Généralités

Comme vu au chapitre précédent, la discrétisation en espace (x,y) d'un problème de propagation par la méthode des éléments finis conduit à un système d'équations différentielles linéaires, en temps, i.e non stationnaires de la forme (équ. 3-62 ou 3-72) que nous écrivons sous la forme suivante afin de simplifier l'écriture matricielle:

$$M \ddot{d} + C \dot{d} + Kd = F \quad \text{pour } t > t_0 ; \text{ conditions initiales : } d(t_0) = d_0 ; \dot{d}(t_0) = \dot{d}_0 \quad (4-1)$$

où $\dot{d} = \frac{\partial d}{\partial t}$; $\ddot{d} = \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} = \frac{\partial \dot{d}}{\partial t}$; $M (= \sum_e [M^e])$ est la matrice masse ; $C (= \sum_e [C^e])$ est la matrice d'amortissement ; $K (= \sum_e [K^e])$ est la matrice de rigidité ; d étant le vecteur déplacement solution recherché du problème.

Puisque nous nous limitons dans ce travail à l'étude des problèmes élastiques linéaires, le système d'équations (4-1), traduisant les équations d'équilibre dynamique ou de mouvement d'un solide général plan ou particulièrement d'une plaque, sera admis linéaire. Par suite, M, C, K et F sont supposés indépendants des déplacements d et de ses dérivés. Nous admettons de plus, comme dans le cas de nombreux systèmes physiques, que les matrices M, C, K sont indépendantes du temps ; ce qui suppose en outre que les paramètres physiques du système ne dépendent pas du temps.

La résolution du problème consiste à trouver un ensemble de fonctions $d=d(t)$ qui satisfont au système d'équations (4-1) à tout instant t ainsi aux conditions initiales imposées à $t = 0$. Nous allons principalement présentés ci-après la méthode de Wilson-θ qui est une méthode d'intégration directe dont l'évaluation de la réponse dynamique consiste à construire numériquement, à partir de d_0 , une suite de valeurs de la solution aux instants successifs $t_0+\Delta t, t_0+2\Delta t, \dots, t_0+n\Delta t, \dots$:

$$d_0=d(t_0) \rightarrow d_1=d_1(t_0+\Delta t) \rightarrow d_2=d_2(t_0+2\Delta t) \rightarrow \dots \rightarrow d_n=d_2(t_0+n\Delta t) \quad (4-2)$$

La méthode d'intégration directe de Wilson-θ utilise des approximations des dérivées $\dot{d}$ et $\ddot{d}$ de différences finies contrairement, à titre de comparaison, à la méthode de superposition modale où il faut d'abord commencer par transformer le système d'équations couplées (4-1) en un système d'équations découplées. Chacune des équations ainsi obtenues par la méthode

de superposition modale est alors intégrée explicitement ou numériquement où la solution cherchée est une combinaison linéaire des solutions des équations découplées.

4-2 Calcul de la réponse dynamique

La littérature révèle l'existence de plusieurs méthodes [1,3,9] dont principalement la méthode des différences finies centrales, la méthode de Houblot, les méthodes de Newmark avec accélération moyenne ou avec accélération linéaire dont dérive particulièrement la méthode de Wilson- θ . Notons qu'en raison de son algorithme inconditionnellement stable qu'elle présente, la méthode d'intégration directe de Wilson- θ peut être considérée, dans un sens, comme étant une extension directe de la méthode de Newmark lorsque l'accélération devient linéaire.

4-2-1 Critère de stabilité

L'une des exigences fondamentales d'une méthode d'intégration numérique temporelle est qu'elle doit être cohérente c'est-à-dire doit être convergente vers la solution exacte quand on réduit le pas de temps Δt . D'une autre manière, elle doit être stable en présence d'erreurs d'arrondis et doit être suffisamment précise.

Naturellement, le critère de stabilité ne se pose pas pour un système à un seul degré de liberté vu que le pas de temps peut être choisi beaucoup plus petit que la limite garantissant la stabilité le chargement et la réponse. Ce n'est pas le cas des systèmes à plusieurs degrés de liberté dont la stabilité des méthodes d'intégration directes est une considération importante.

Ajoutons toutefois que la stabilité du schéma d'intégration n'est pas le seul critère de sélection d'une méthode. Donnons l'exemple du taux d'amortissement numérique induit par le schéma numérique qui peut jouer parfois un rôle important. En effet, les modèles d'éléments finis donnent lieu à des hautes fréquences parasites qui ne sont pas représentatives des systèmes et qu'il est nécessaire de filtrer par l'injection d'amortissement numérique [1].

4-2-2 Méthodes de Newmark

Les méthodes de Newmark en général permettent de construire la solution à l'instant $t_0+n\Delta t$ ($= t_0+n\Delta t = t_n+\Delta t$) à partir des vecteurs connus $d_n, \dot{d}_n, \ddot{d}_n$. Elles utilisent les expressions de la vitesse et du déplacement à la fin du pas de temps d'intégration définies par la manière suivante :

$$\dot{d}_{n+1} = \dot{d}_n + (1-\gamma)\Delta t \ddot{d}_n + \gamma\Delta t \ddot{d}_{n+1} \quad (4-3)$$

$$d_{n+1} = d_n + \Delta t \dot{d}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\gamma(\Delta t)^2 \ddot{d}_n + \beta(\Delta t)^2 \ddot{d}_{n+1} \quad (4-4)$$

Où les constantes γ et β sont les paramètres de la formule de la quadrature numérique. Le paramètre γ est un facteur de pondération variant linéairement entre l'influence de l'accélération à t_n et de l'accélération à t_{n+1} sur l'incrément de vitesse. Apparemment, γ peut prendre toutes les valeurs dans l'intervalle $[0,1]$ et β dans l'intervalle $[0,1/2]$ et définissent la variation de l'accélération durant le pas de temps Δt . Ce sont ces 2 paramètres (γ, β) qui déterminent les caractéristiques de dissipation d'énergie (précision) et de stabilité de la méthode (fig. 4-1). On démontre qu'il n'y a pas d'amortissement numérique pour $\gamma = 1/2$. En pratique, on choisit ces paramètres dans les limites : $0.5 \leq \gamma < 0.75$ et $0 \leq \beta < 0.25$.

Suivant les valeurs que prennent γ et β , on obtient les schémas classique de Newmark dont les plus connus avec accélération moyenne ($\gamma = 0.5; \beta = 0.25$ (fig.4-2a)) et accélération linéaire ($\gamma = 0.5; \beta = 1/6$ (fig.4-2b)). Notons que les équations (4-3) et (4-4) sont implicites car elles dépendent de l'accélération au temps t_{n+1} .

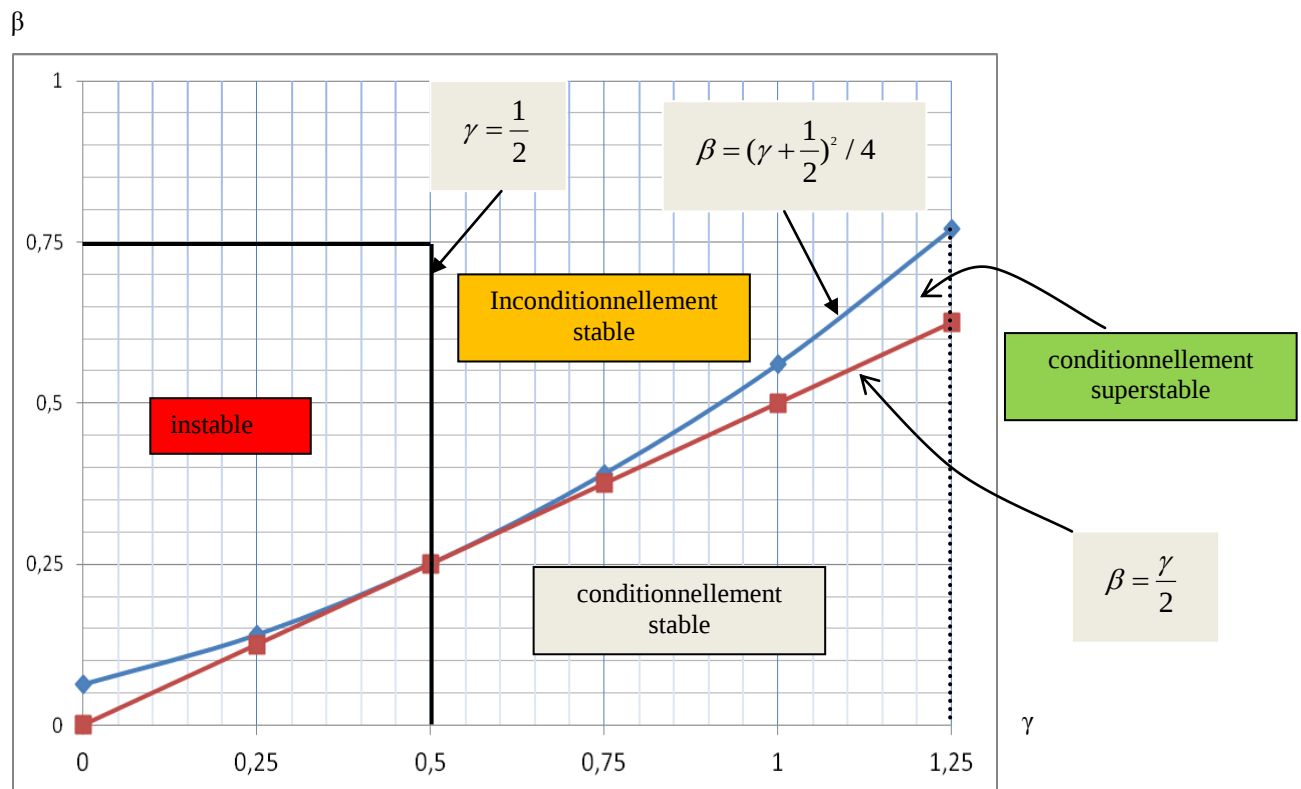


Fig 4-1. Stabilité de l'algorithme de Newmark

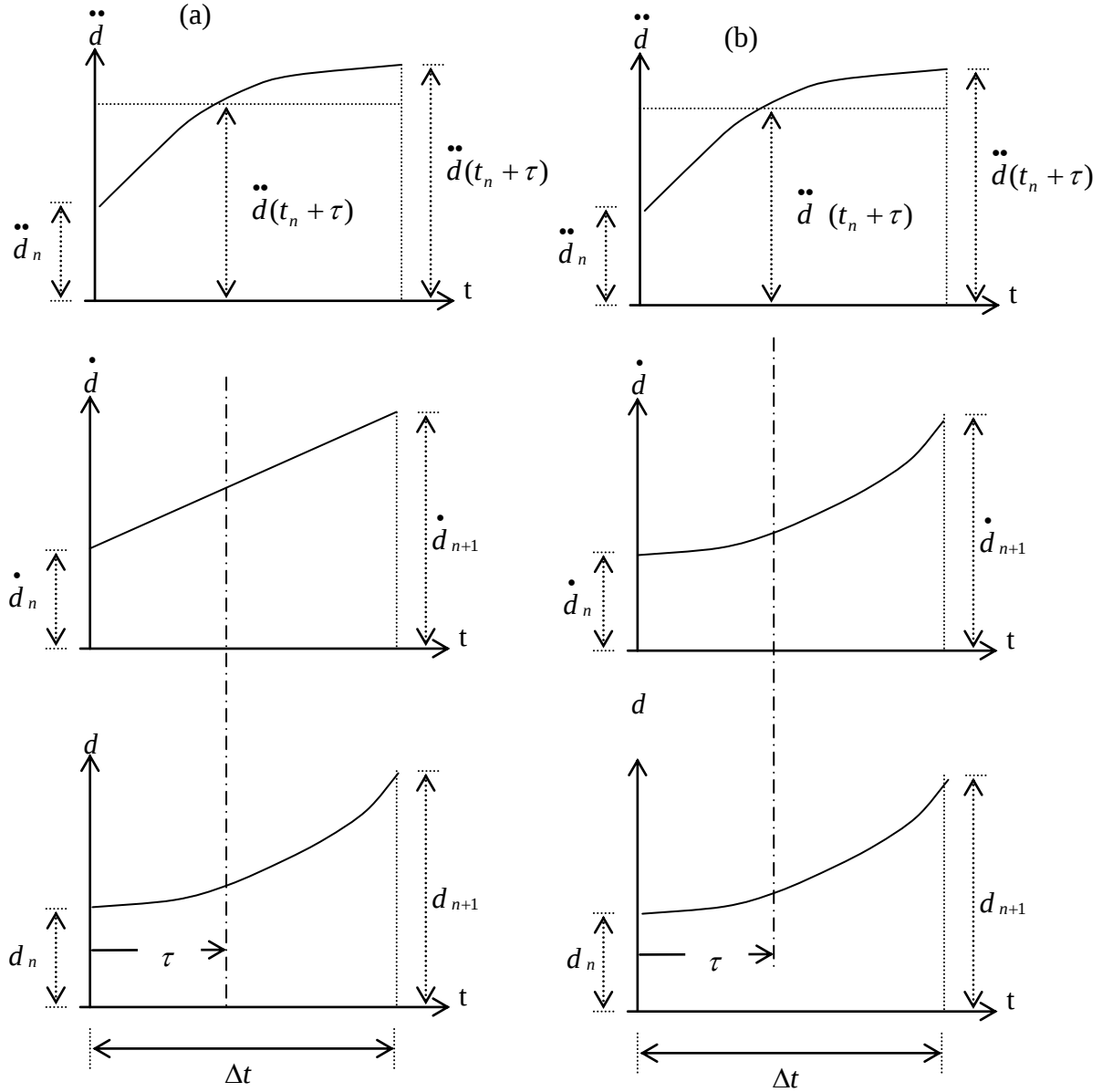


Fig. 4-2. Mouvement d'un système (a) accélération constante (b) accélération linéaire

Exprimons maintenant le système d'équations d'équilibre dynamique au temps t_{n+1} .

$$M \ddot{d}_{n+1} + C \dot{d}_{n+1} + K d_{n+1} = F_{n+1} \quad (4-5)$$

Les équations (4-3), (4-4) et (4-5) servent à déterminer l'état du système au temps t_{n+1} par itération. Cette itération peut être évitée de la manière suivante. Explicitons l'accélération au temps t_{n+1} de la relation (4-4) :

$$\ddot{d}_{n+1} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} (d_{n+1} - d_n) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{d}_n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{d}_n \quad (4-6)$$

Remplaçons $\ddot{d}_{n+1}$ dans (4-3), nous obtenons :

$$\dot{d}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (d_{n+1} - d_n) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right) \dot{d}_n - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) \Delta t \ddot{d}_n \quad (4-7)$$

Substituons les relations (4-6) et (4-7) dans l'équation (4-5), il vient :

$$\overline{K} d_{n+1} = \overline{F}_{n+1} \quad (4-8)$$

Où

$$\overline{K} = K + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} M + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} C \quad (4-9)$$

$$\begin{aligned} \overline{F} = F_{n+1} + M \left(\frac{1}{\beta(\Delta t)^2} d_n + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{d}_n + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{d}_n \right) \\ + C \left[\left(\frac{\gamma}{\beta \Delta t} d_n + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right) \dot{d}_n + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) \Delta t \ddot{d}_n \right) \right] \end{aligned} \quad (4-10)$$

Particulièrement, lorsque $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$, nous obtenons les formules de récurrence :

$$\begin{aligned} \dot{d}_{n+1} &= \dot{d}_n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{d}_n + \ddot{d}_{n+1}) \\ d_{n+1} &= d_n + \Delta t \dot{d}_n + \frac{(\Delta t)^2}{4} (\ddot{d}_n + \ddot{d}_{n+1}) \\ \overline{K} &= K + \frac{4}{(\Delta t)^2} M + \frac{2}{\Delta t} C \\ \overline{F} &= F_{n+1} + M \left(\frac{4}{(\Delta t)^2} d_n + \frac{4}{\Delta t} \dot{d}_n + \ddot{d}_n \right) + C \left(\frac{2}{\Delta t} d_n + \dot{d}_n \right) \end{aligned} \quad (4-11)$$

Notons que la méthode de Newmark avec accélération moyenne est inconditionnellement stable alors que la méthode avec accélération linéaire est conditionnellement stable pour un pas de temps n'excédant pas le pas critique dont la valeur est :

$$\Delta t \leq \frac{T}{2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta}} = 0.551T \quad \text{où } T \text{ est la période de plus haut rang i.e la plus petite période du}$$

système d'équations. Pour un pas de temps qui respecte cette limite de stabilité, la méthode de Newmark avec accélération linéaire est plus précise que la méthode avec accélération moyenne. Pour des modèles d'éléments finis possédant un très grand nombre de degrés de liberté, la période du mode le plus élevé peut être très petite, ce qui oblige à utiliser un pas de temps très court si l'on veut utiliser la méthode avec accélération linéaire. Les temps de calcul devront donc être extrêmement longs.

En conséquence, on adopte généralement la méthode de Newmark avec accélération moyenne, inconditionnellement stable, au lieu de la méthode de Newmark avec accélération linéaire, pourtant cette dernière est plus précise. La méthode de Wilson- θ que nous allons exposer dans la section subséquente a été justement développée afin de rendre inconditionnellement stable la méthode de Newmark avec accélération linéaire.

Il est possible par ailleurs de transformer les relations (4-11) ;

i) en tenant compte de l'équation d'équilibre (4-1) à l'instant t_n soit :

$$M \ddot{d}_n + C \dot{d}_n + K d_n = F_n \quad (4-12)$$

ii) en considérant la matrice d'amortissement comme étant une combinaison linéaire de la matrice masse et de la matrice de rigidité soit :

$$C = \alpha' M + \beta' K \quad (4-13)$$

où α' , β' sont des coefficients d'amortissement dits de Raleigh. En pratique [6], on suggère de prendre : $\alpha' = 0.005$ et $\beta' = 0.272$.

Nous aboutissons alors aux formules de récurrence [6,14] suivantes en fonction du paramètre θ qu'on prend égal 0.5:

$$\begin{aligned} \dot{d}_{n+1} &= \frac{1}{\theta \Delta t} (d_{n+1} - d_n) - \frac{1-\theta}{\theta} \dot{d}_n \\ \ddot{d}_{n+1} &= \frac{1}{\theta \Delta t} (\dot{d}_{n+1} - \dot{d}_n) - \frac{1-\theta}{\theta} \ddot{d}_n \\ \bar{K} &= \left[\left(\alpha' + \frac{1}{\theta \Delta t} \right) M + (\beta' + \theta \Delta t) K \right] \\ \bar{F}_{n+1} &= \theta \Delta t F_{n+1} + (1-\theta) \Delta t F_n + \left(\alpha' + \frac{1}{\theta \Delta t} \right) M d_n + \frac{1}{\theta} M \dot{d}_n + [\beta' - (1-\theta) \Delta t] K d_n \end{aligned} \quad (4-14)$$

Remarquons que la matrice de rigidité effective $\bar{K}$, qui est l'opération la plus coûteuse en temps de calcul, n'est réalisée qu'une seule fois dans l'algorithme de Newmark avec accélération moyenne pour les problèmes linéaires. Mentionnons en outre, que la méthode de Newmark avec accélération moyenne, lorsque particulièrement $\theta = \frac{1}{2}$, est plus connue sous l'appellation de la méthode de Newmark avec $\beta = \frac{1}{4}$ qui est exactement équivalente à la méthode de Cranck-Nicholson utilisée pour la résolution des problèmes non stationnaires du premier ordre [6].

4-2-3 Méthode de Wilson- θ

Comme indiqué dans la section précédente, la méthode de Wilson- θ est une extension de la méthode de Newmark avec accélération linéaire dans le but de la rendre inconditionnellement stable. On suppose que l'accélération varie linéairement dans l'intervalle étendu allant du temps $t_n = n\Delta t$ au temps $t_{n+\theta} = t_n + \theta\Delta t$, où $\theta \geq 1.0$ (fig. 4-3).

Soit τ la variable d'intégration qui varie de 0 à $\theta\Delta t$, c'est-à-dire $0 \leq \tau \leq \theta\Delta t$. L'hypothèse d'une accélération linéaire de l'accélération s'exprime :

$$\ddot{d}(t_n + \tau) = \ddot{d}_n + \frac{\tau}{\theta\Delta t} (\ddot{d}_{n+\theta} - \ddot{d}_n) \quad (4-15)$$

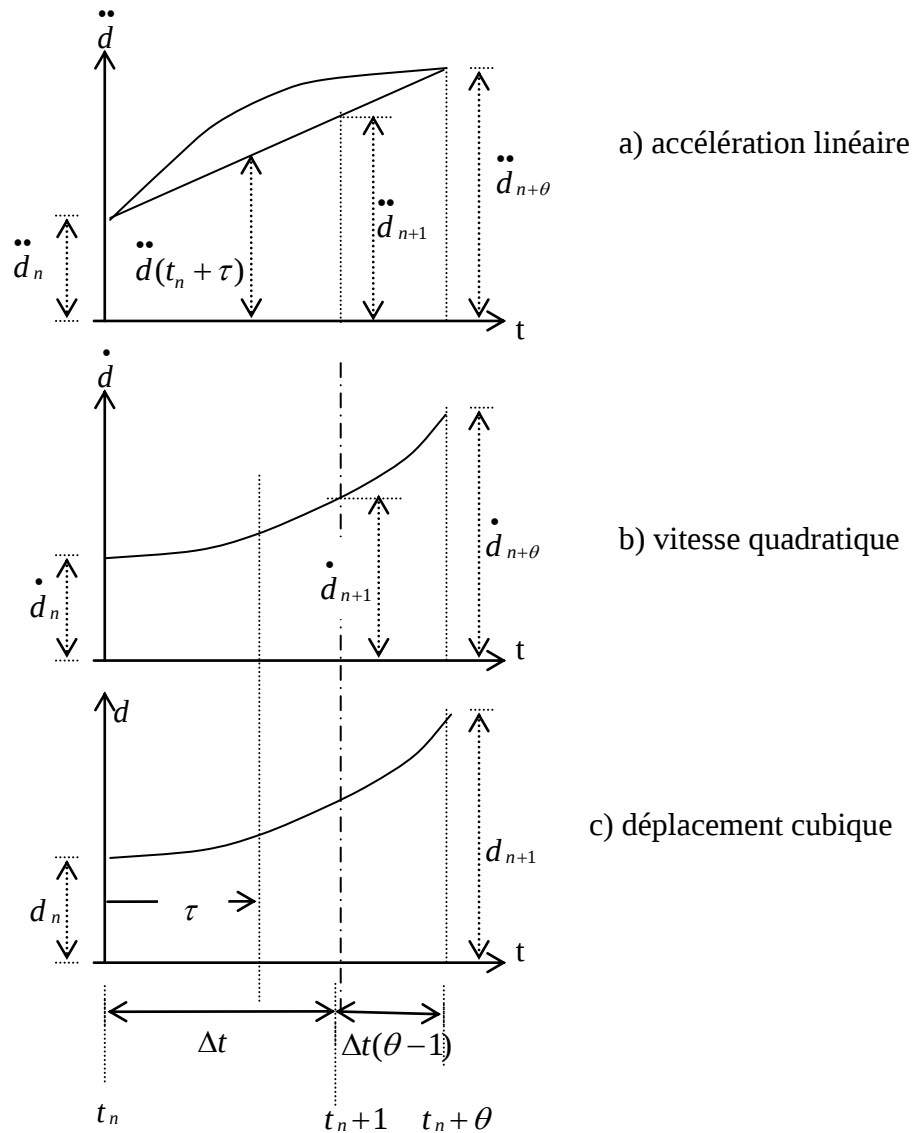


Fig. 4-3. Mouvement d'un système pour une accélération variant linéairement durant un incrément de temps $\theta\Delta t$

Après intégration de (4-15), nous obtenons l'expression de la vitesse :

$$\dot{d}(t_n + \tau) = \dot{d}_n + \dot{d}_n \tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}(\ddot{d}_{n+\theta} - \ddot{d}_n) \quad (4-16)$$

et, après une seconde intégration, nous obtenons le déplacement :

$$d(t_n + \tau) = d_n + \dot{d}_n \tau + \frac{\tau^2}{2} \ddot{d}_n + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t}(\ddot{d}_{n+\theta} - \ddot{d}_n) \quad (4-17)$$

D'après les équations (3-16) et (3-17), la vitesse et le déplacement évalués au temps $t_{n+\theta} = t_n + \theta\Delta t$, soit $\tau = \theta\Delta t$, s'expriment :

$$\dot{d}_{n+\theta} = \dot{d}_n + \frac{\theta\Delta t}{2}(\ddot{d}_{n+\theta} + \ddot{d}_n) \quad (4-18)$$

$$d_{n+\theta} = d_n + \theta\Delta t \dot{d}_n + \frac{(\theta\Delta t)^2}{6}(\ddot{d}_{n+\theta} + 2\ddot{d}_n) \quad (4-19)$$

où l'on voit que la méthode est implicite car la vitesse et le déplacement évalués à $t_{n+\theta}$ dépendent de l'accélération à $t_{n+\theta}$. La transformation de la méthode de Wilson- θ à une forme directe est similaire à la même transformation pour les méthodes de Newmark. Des équations (4-18) et (4-19), on peut déduire $\ddot{d}_{n+\theta}$ et $\dot{d}_{n+\theta}$ en fonction de $d_{n+\theta}$, soit :

$$\ddot{d}_{n+\theta} = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}(d_{n+\theta} - d_n) - \frac{6}{\theta\Delta t}\dot{d}_n - 2\ddot{d}_n \quad (4-20)$$

$$\dot{d}_{n+\theta} = \frac{3}{\theta\Delta t}(d_{n+\theta} - d_n) - 2\dot{d}_n - \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{d}_n \quad (4-21)$$

Pour calculer le déplacement, la vitesse et l'accélération au temps t_{n+1} , écrivons l'équation d'équilibre dynamique au temps $t_{n+\theta}$:

$$M \ddot{d}_{n+\theta} + C \dot{d}_{n+\theta} + K d_{n+\theta} = F_{n+\theta} \quad (4-22)$$

Où $F_{n+\theta}$ n'est pas connu. Puisqu'on suppose que les accélérations varient linéairement, on utilisera une projection linéaire du vecteur de chargement temps $t_{n+\theta}$, qu'on exprime :

$$F_{n+\theta} = F_n + \theta(F_{n+1} - F_n) \quad (4-23)$$

Après avoir remplacé (4-20) et (4-21) dans (4-22), nous obtenons :

$$\overline{K} d_{n+\theta} = \overline{F}_{n+\theta} \quad (4-24)$$

où

$$\bar{K} = K + \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} M + \frac{3}{\theta\Delta t} C \quad (4-25)$$

et

$$\begin{aligned} \bar{F}_{n+\theta} = F_n + \theta(F_{n+1} - F_n) + M \left(\frac{6}{(\theta\Delta t)^2} d_n + \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{d}_n + 2\ddot{d}_n \right) \\ + C \left(\frac{3}{\theta\Delta t} d_n + 2\dot{d}_n + \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{d}_n \right) \end{aligned} \quad (4-26)$$

Après avoir déterminé $d_{n+\theta}$ de (4-24), on calcule $\ddot{d}_{n+\theta}$ et $\dot{d}_{n+\theta}$ de (4-20) et (4-21).

On calcule ensuite $\ddot{d}_{n+1}$, $\dot{d}_{n+1}$ et d_{n+1} en évaluant les équations (4-15), (4-16) et (4-17) à $\tau = \theta\Delta t$; on obtient donc :

$$\ddot{d}_{n+1} = \dot{d}_n + \frac{1}{\theta} \left[\frac{6}{(\theta\Delta t)^2} (d_{n+\theta} - d_n) - \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{d}_n - 3\ddot{d}_n \right] \quad (4-27)$$

$$\dot{d}_{n+1} = \dot{d}_n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{d}_{n+1} + \ddot{d}_n) \quad (4-28)$$

$$d_{n+1} = d_n + \Delta t \dot{d}_n + \frac{\Delta t^2}{6} (\ddot{d}_{n+1} + 2\ddot{d}_n) \quad (4-29)$$

On montre [07] que la méthode de Wilson- θ est inconditionnellement stable pour $\theta \geq 1.37$. On utilise en général $\theta = 1.40$. En tenant compte des coefficients d'amortissement de Raleigh (α' , β') comme dans la relation (4-13), on peut aboutir aux formules de récurrence suivantes en fonction du paramètre θ qu'on prend toujours égal 1.4 ; l'algorithme étant présenté au tableau (4-1).

$$\begin{aligned} \ddot{d}_{n+\theta} = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} (d_{n+\theta} - d_n) - \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{d}_n - 2\ddot{d}_n ; \quad \ddot{d}_{n+1} = \ddot{d}_n + \frac{1}{\theta} (\ddot{d}_{n+\theta} - \ddot{d}_n) \\ \dot{d}_{n+1} = \dot{d}_n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{d}_{n+1} + \ddot{d}_n) ; \quad d_{n+1} = d_n + \Delta t \dot{d}_n + \frac{\Delta t^2}{6} (\ddot{d}_{n+1} + 2\ddot{d}_n) \\ \bar{K} = \left(\frac{6}{(\theta\Delta t)^2} + \frac{3\alpha'}{\theta\Delta t} \right) M + \left(\frac{3\beta'}{\theta\Delta t} + 1 \right) K \end{aligned} \quad (4-30)$$

$$\bar{F}_{n+\theta} = F_n + \theta(F_{n+1} - F_n) + M \left[\left(\frac{6}{(\theta\Delta t)^2} + \frac{3\alpha'}{\theta\Delta t} \right) d_n + \left(\frac{6}{\theta\Delta t} + 2\alpha' \right) \dot{d}_n + \left(2 + \frac{2\alpha'\theta\Delta t}{2} \right) \ddot{d}_n \right]$$

$$+ K\left(\frac{3\beta'}{\theta\Delta t} \dot{d}_n + 2\beta' \ddot{d}_n + \frac{\beta'\theta\Delta t}{2} \ddot{\ddot{d}}_n\right)$$

Tableau 4-1. Algorithme d'intégration de la méthode de Wilson-θ

Initialisation des variables :

- 1- Conditions initiales à $t = 0$: $d(0)$; $\dot{d}(0)$; calcul de $\ddot{d}(0)$: $M \ddot{d}_0 = F_0 - C \dot{d}_0 - Kd_0$
- 2- Choix des coefficients d'amortissement de Raleigh : (α', β') et du paramètre d'intégration θ . Prendre : $\alpha' = 0.005$, $\beta' = 0.272$ et $\theta = 1.4$
- 3- Choix du pas de temps d'intégration : Δt et du nombre de pas temps : nstep

Calculs préliminaires :

- 1- calcul des constantes d'intégration : $c_1 = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}$; $c_2 = \frac{6}{\theta\Delta t}$; $c_3 = \frac{2\Delta t}{6}$; $c_4 = 2$

$$c_5 = \frac{3\alpha'}{\theta\Delta t} ; c_6 = \frac{3\beta'}{\theta\Delta t} ; c_7 = \frac{0.5\alpha'}{\theta\Delta t} ; c_8 = 0.5\beta'\theta\Delta t$$

- 2- Calcul de la matrice de rigidité effective $\bar{K} = (c_1 + c_5)M + (1 + c_6)K$

Intégration pas à pas : pour $n = 0, 1, 2, \dots, \text{nstep} = t_d/\Delta t$

- 1-Initialisation du temps : $t_{n+1} = t_n + \Delta t = (n+1) \Delta t$; $t_0 = 0$.

- 2- calcul du vecteur des forces effectives $\bar{F}_{n+1}$ au temps t_{n+1} :

$$\begin{aligned} \bar{F}_{n+\theta} = F_n + \theta(F_{n+1} - F_n) + M[(c_1 + c_5)d_n + (c_2 + 2\alpha')\dot{d}_n + (2 + c_7)\ddot{d}_n] \\ + K(c_6d_n + 2\beta'\dot{d}_n + c_8\ddot{d}_n) \end{aligned}$$

- 3-calcul du vecteur des déplacements au temps t_{n+1} : $\bar{K}d_{n+\theta} = \bar{F}_{n+\theta}$

- 4-calcul des vecteurs des accélérations, des vitesses et des déplacements au temps t_{n+1} :

$$\ddot{d}_{n+\theta} = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}(d_{n+\theta} - d_n) - \frac{6}{\theta\Delta t}\dot{d}_n - 2\ddot{d}_n$$

$$\ddot{d}_{n+1} = \ddot{d}_n + \frac{1}{\theta}(\ddot{d}_{n+\theta} - \ddot{d}_n)$$

$$\dot{d}_{n+1} = \dot{d}_n + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{d}_{n+1} + \ddot{d}_n)$$

$$d_{n+1} = d_n + \Delta t \dot{d}_n + \frac{\Delta t^2}{6}(\ddot{d}_{n+1} + 2\ddot{d}_n)$$

Calcul au centre de gravité de chaque élément des déformations et des contraintes généralisées i.e des courbures et des moments :

$$\begin{aligned} \chi_{x,n+1}, \chi_{y,n+1}, \chi_{xy,n+1} \\ M_{x,n+1}, M_{y,n+1}, M_{xy,n+1} \end{aligned}$$

4-3 Méthode de résolution en présence des mouvements d'appuis

Comme déjà expliqué au paragraphe (2-5), l'équation d'équilibre correspondant à un degré de liberté où un déplacement est imposé, doit être éliminé du système d'équations lors de l'assemblage des matrices de rigidité, de masse, d'amortissement et du vecteur force. Notons que les mots 'degré de liberté' et 'déplacement imposé' sont employés ici dans le sens généralisé ainsi un degré de liberté peut désigner aussi ses dérivées (par rapport au temps) et le déplacement imposé peut être le déplacement proprement dit de translation ou de rotation et peut signifier également une vitesse ou une accélération imposée.

Utilisant la méthode directe d'assemblage du système d'équations, une valeur nulle est donnée au degré de liberté retenu et au degré de liberté où un déplacement est imposé et les termes des matrices et vecteurs élémentaires correspondant à une valeur nulle du vecteur G_2 des degrés de liberté globaux ne sont pas pris en compte dans l'assemblage. Le développement théorique de cette méthode ainsi que quelques considérations relatives à la programmation de cette méthode sont donnés ci-après.

4-3-1 Changement de résolution du système d'équations

Soit à résoudre, en considérant les mouvements d'appuis, le système linéaire d'équations différentielles (4-1), à n équations et à n inconnues que nous écrivons explicitement sous la forme :

$$\left[\begin{array}{cccccc} k_{1,1} & k_{1,2} & \cdot & k_{1,i-1} & k_{1,i} & k_{1,i+1} & \cdot & k_{1,n} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \cdot & k_{2,i-1} & k_{2,i} & k_{2,i+1} & \cdot & k_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{i-1,1} & k_{i-1,2} & \cdot & k_{i-1,i-1} & k_{i-1,i} & k_{i-1,i+1} & \cdot & k_{i-1,n} \\ k_{i,1} & k_{i,2} & \cdot & k_{i,i-1} & k_{i,i} & k_{i,i+1} & \cdot & k_{i,n} \\ k_{i+1,1} & k_{i+1,2} & \cdot & k_{i+1,i-1} & k_{i+1,i} & k_{i+1,i+1} & \cdot & k_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n,1} & k_{n,2} & \cdot & k_{n,i-1} & k_{n,i} & k_{n,i+1} & \cdot & k_{n,n} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ d_{i-1} \\ d_i \\ d_{i+1} \\ \cdot \\ d_n \end{array} \right\} +$$

$$\begin{bmatrix}
C_{1,1} & C_{1,2} & \cdot & C_{1,i-1} & C_{1,i} & C_{1,i+1} & \cdot & C_{1,n} \\
C_{2,1} & C_{2,2} & \cdot & C_{2,i-1} & C_{2,i} & C_{2,i+1} & \cdot & C_{2,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
C_{i-1,1} & C_{i-1,2} & \cdot & C_{i-1,i-1} & C_{i-1,i} & C_{i-1,i+1} & \cdot & C_{i-1,n} \\
C_{i,1} & C_{i,2} & \cdot & C_{i,i-1} & C_{i,i} & C_{i,i+1} & \cdot & C_{i,n} \\
C_{i+1,1} & C_{i+1,2} & \cdot & C_{i+1,i-1} & C_{i+1,i} & C_{i+1,i+1} & \cdot & C_{i+1,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
C_{n,1} & C_{n,2} & \cdot & C_{n,i-1} & C_{n,i} & C_{n,i+1} & \cdot & C_{n,n}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\dot{d}_1 \\
\dot{d}_2 \\
\cdot \\
\dot{d}_{i-1} \\
\dot{d}_i \\
\dot{d}_{i+1} \\
\cdot \\
\dot{d}_n
\end{Bmatrix} + \quad (4-31)$$

$$\begin{bmatrix}
m_{1,1} & m_{1,2} & \cdot & m_{1,i-1} & m_{1,i} & m_{1,i+1} & \cdot & m_{1,n} \\
m_{2,1} & m_{2,2} & \cdot & m_{2,i-1} & m_{2,i} & m_{2,i+1} & \cdot & m_{2,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
m_{i-1,1} & m_{i-1,2} & \cdot & m_{i-1,i-1} & m_{i-1,i} & m_{i-1,i+1} & \cdot & m_{i-1,n} \\
m_{i,1} & m_{i,2} & \cdot & m_{i,i-1} & m_{i,i} & m_{i,i+1} & \cdot & m_{i,n} \\
m_{i+1,1} & m_{i+1,2} & \cdot & m_{i+1,i-1} & m_{i+1,i} & m_{i+1,i+1} & \cdot & m_{i+1,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
m_{n,1} & m_{n,2} & \cdot & m_{n,i-1} & m_{n,i} & m_{n,i+1} & \cdot & m_{n,n}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\ddot{d}_1 \\
\ddot{d}_2 \\
\cdot \\
\ddot{d}_{i-1} \\
\ddot{d}_i \\
\ddot{d}_{i+1} \\
\cdot \\
\ddot{d}_n
\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}
F_1 \\
F_2 \\
\cdot \\
F_{i-1} \\
F_i \\
F_{i+1} \\
\cdot \\
F_n
\end{Bmatrix}$$

Supposons que parmi tous les déplacements, seul les déplacements en i ($d_i, \dot{d}_i, \ddot{d}_i$) sont connus. Les termes de chaque équation relatifs aux déplacements $d_i, \dot{d}_i, \ddot{d}_i$ sont transposés au second membre de l'équation (4-31) sauf pour la $i^{\text{ème}}$ équation. Le système d'équations (4-31) devient alors :

$$\begin{bmatrix}
k_{1,1} & k_{1,2} & \cdot & k_{1,i-1} & 0 & k_{1,i+1} & \cdot & k_{1,n} \\
k_{2,1} & k_{2,2} & \cdot & k_{2,i-1} & 0 & k_{2,i+1} & \cdot & k_{2,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
k_{i-1,1} & k_{i-1,2} & \cdot & k_{i-1,i-1} & 0 & k_{i-1,i+1} & \cdot & k_{i-1,n} \\
k_{i,1} & k_{i,2} & \cdot & k_{i,i-1} & k_{i,i} & k_{i,i+1} & \cdot & k_{i,n} \\
k_{i+1,1} & k_{i+1,2} & \cdot & k_{i+1,i-1} & 0 & k_{i+1,i+1} & \cdot & k_{i+1,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
k_{n,1} & k_{n,2} & \cdot & k_{n,i-1} & 0 & k_{n,i+1} & \cdot & k_{n,n}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
d_1 \\
d_2 \\
\cdot \\
d_{i-1} \\
d_i \\
d_{i+1} \\
\cdot \\
d_n
\end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdot & c_{1,i-1} & 0 & c_{1,i+1} & \cdot & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdot & c_{2,i-1} & 0 & c_{2,i+1} & \cdot & c_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{i-1,1} & c_{i-1,2} & \cdot & c_{i-1,i-1} & 0 & c_{i-1,i+1} & \cdot & c_{i-1,n} \\ c_{i,1} & c_{i,2} & \cdot & c_{i,i-1} & c_{i,i} & c_{i,i+1} & \cdot & c_{i,n} \\ c_{i+1,1} & c_{i+1,2} & \cdot & c_{i+1,i-1} & 0 & c_{i+1,i+1} & \cdot & c_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdot & c_{n,i-1} & 0 & c_{n,i+1} & \cdot & c_{n,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \cdot \\ \dot{d}_{i-1} \\ \dot{d}_i \\ \dot{d}_{i+1} \\ \cdot \\ \dot{d}_n \end{Bmatrix} + \quad (4-32)$$

$$\begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdot & m_{1,i-1} & 0 & m_{1,i+1} & \cdot & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdot & m_{2,i-1} & 0 & m_{2,i+1} & \cdot & m_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{i-1,1} & m_{i-1,2} & \cdot & m_{i-1,i-1} & 0 & m_{i-1,i+1} & \cdot & m_{i-1,n} \\ m_{i,1} & m_{i,2} & \cdot & m_{i,i-1} & m_{i,i} & m_{i,i+1} & \cdot & m_{i,n} \\ m_{i+1,1} & m_{i+1,2} & \cdot & m_{i+1,i-1} & 0 & m_{i+1,i+1} & \cdot & m_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m & m_{n,2} & \cdot & m_{n,i-1} & 0 & m_{n,i+1} & \cdot & m_{n,n} \end{bmatrix} m \begin{Bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \\ \cdot \\ \ddot{d}_{i-1} \\ \ddot{d}_i \\ \ddot{d}_{i+1} \\ \cdot \\ \ddot{d}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - k_{1,i} d_i - c_{1,i} \dot{d}_i - m_{1,i} \ddot{d}_i \\ F_2 - k_{2,i} d_i - c_{2,i} \dot{d}_i - m_{2,i} \ddot{d}_i \\ \cdot \\ F_{i-1} - k_{i-1,i} d_i - c_{i-1,i} \dot{d}_i - m_{i-1,i} \ddot{d}_i \\ F_i \\ F_{i+1} - k_{i+1,i} d_i - c_{i+1,i} \dot{d}_i - m_{i+1,i} \ddot{d}_i \\ \cdot \\ F_n - k_{n,i} d_i - c_{n,i} \dot{d}_i - m_{n,i} \ddot{d}_i \end{Bmatrix}$$

Où F_i est inconnue qui peut constituer la réaction de la plaque développée dans la direction i .
En supprimant l'équation (i), il vient :

$$\begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \cdot & k_{1,i-1} & k_{1,i+1} & \cdot & k_{1,n} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \cdot & k_{2,i-1} & k_{2,i+1} & \cdot & k_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{i-1,1} & k_{i-1,2} & \cdot & k_{i-1,i-1} & k_{i-1,i+1} & \cdot & k_{i-1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{i+1,1} & k_{i+1,2} & \cdot & k_{i+1,i-1} & k_{i+1,i+1} & \cdot & k_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n,1} & k_{n,2} & \cdot & k_{n,i-1} & k_{n,i+1} & \cdot & k_{n,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ d_{i-1} \\ \cdot \\ d_{i+1} \\ \cdot \\ d_n \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix}
c_{1,1} & c_{1,2} & \cdot & c_{1,i-1} & c_{1,i+1} & \cdot & c_{1,n} \\
c_{2,1} & c_{2,2} & \cdot & c_{2,i-1} & c_{2,i+1} & \cdot & c_{2,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
c_{i-1,1} & c_{i-1,2} & \cdot & c_{i-1,i-1} & c_{i-1,i+1} & \cdot & c_{i-1,n} \\
c_{i+1,1} & c_{i+1,2} & \cdot & c_{i+1,i-1} & c_{i+1,i+1} & \cdot & c_{i+1,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
c_{n,1} & c_{n,2} & \cdot & c_{n,i-1} & c_{n,i+1} & \cdot & c_{n,n}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\dot{d}_1 \\
\dot{d}_2 \\
\cdot \\
\dot{d}_{i-1} \\
\dot{d}_{i+1} \\
\cdot \\
\dot{d}_n
\end{Bmatrix} + \quad (4-33)$$

$$\begin{bmatrix}
m_{1,1} & m_{1,2} & \cdot & m_{1,i-1} & m_{1,i+1} & \cdot & m_{1,n} \\
m_{2,1} & m_{2,2} & \cdot & m_{2,i-1} & m_{2,i+1} & \cdot & m_{2,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
m_{i-1,1} & m_{i-1,2} & \cdot & m_{i-1,i-1} & m_{i-1,i+1} & \cdot & m_{i-1,n} \\
m_{i+1,1} & m_{i+1,2} & \cdot & m_{i+1,i-1} & m_{i+1,i+1} & \cdot & m_{i+1,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
m & m_{n,2} & \cdot & m_{n,i-1} & m_{n,i+1} & \cdot & m_{n,n}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\ddot{d}_1 \\
\ddot{d}_2 \\
\cdot \\
\ddot{d}_{i-1} \\
\ddot{d}_{i+1} \\
\cdot \\
\ddot{d}_n
\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}
F_1 - k_{1,i} d_i - c_{1,i} \dot{d}_i - m_{1,i} \ddot{d}_i \\
F_2 - k_{2,i} d_i - c_{2,i} \dot{d}_i - m_{2,i} \ddot{d}_i \\
\cdot \\
F_{i-1} - k_{i-1,i} d_i - c_{i-1,i} \dot{d}_i - m_{i-1,i} \ddot{d}_i \\
F_{i+1} - k_{i+1,i} d_i - c_{i+1,i} \dot{d}_i - m_{i+1,i} \ddot{d}_i \\
\cdot \\
F_n - k_{n,i} d_i - c_{n,i} \dot{d}_i - m_{n,i} \ddot{d}_i
\end{Bmatrix}$$

Qu'on peut écrire simplement par :

$$M' \ddot{d} + C' \dot{d} + K' d = F' \quad (4-34)$$

Avec :

$$d' = \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ \vdots \\ d'_{i-1} \\ d'_i \\ d'_{i+1} \\ \vdots \\ d'_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{i-1} \\ d_{i+1} \\ d_{i+2} \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} ; \dot{d}' = \begin{Bmatrix} \dot{d}'_1 \\ \dot{d}'_2 \\ \vdots \\ \dot{d}'_{i-1} \\ \dot{d}'_i \\ \dot{d}'_{i+1} \\ \vdots \\ \dot{d}'_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \vdots \\ \dot{d}_{i-1} \\ \dot{d}_{i+1} \\ \dot{d}_{i+2} \\ \vdots \\ \dot{d}_n \end{Bmatrix} ; \ddot{d}' = \begin{Bmatrix} \ddot{d}'_1 \\ \ddot{d}'_2 \\ \vdots \\ \ddot{d}'_{i-1} \\ \ddot{d}'_i \\ \ddot{d}'_{i+1} \\ \vdots \\ \ddot{d}'_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \\ \vdots \\ \ddot{d}_{i-1} \\ \ddot{d}_{i+1} \\ \ddot{d}_{i+2} \\ \vdots \\ \ddot{d}_n \end{Bmatrix} \quad (4-35)$$

$$F' = \begin{Bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ \vdots \\ F'_{i-1} \\ F'_i \\ F'_{i+1} \\ \vdots \\ F'_n \end{Bmatrix} : \text{second membre de l'équation (4-33)} \quad (4-36)$$

L'application de l'algorithme de Wilson-θ (tableau 4-1) va nous amener à résoudre un système linéaire à n-1 équations et à n-1 inconnues, que nous pouvons écrire à l'instant fictif $t + \theta \Delta t$ par analogie à l'équation (4-30) sous la forme :

$$\overline{K'} d'_{n+\theta} = \overline{F'}_{n+\theta} \quad (4-37)$$

Cette manière de procéder a un grand avantage dans le cas où plusieurs déplacements sont imposés car elle permet de réduire le nombre d'inconnues du système linéaire et par suite le temps d'exécution du programme. Cette manière de procéder est aussi préférée de celle qui consistait à ajouter un très grand nombre au terme de la diagonale, car si les termes de la matrice K' sont très grands ou très petits le fait d'ajouter un très grand nombre au terme de la diagonale peut ne pas donner une bonne solution lors de la résolution du système linéaire.

4-3-2 Quelques indications relatives à la programmation de la procédure

- La matrice de rigidité K est stockée dans le vecteur KV
- La matrice de rigidité K' est stockée dans le vecteur KV2
- La matrice masse consistante M est stockée dans le vecteur MM
- La matrice masse consistante M' est stockée dans le vecteur MM2

Notons que la matrice C' est calculée par analogie à la relation (4-13) en fonction des coefficients de Raleigh (α', β'), soit :

$$C' = \alpha' M' + \beta' K' \quad (4-38)$$

Le second membre de l'équation (4-32) est déterminée par la subroutine CHARGE et stockée dans le vecteur LOADS, la composante i n'est pas calculée (on n'en aura pas besoin). Le second membre de l'équation (4-33) est déterminé par la subroutine NFNF2 du vecteur LOADS et stocké dans le vecteur LOADS2.

La résolution du système linéaire (4-37) est effectuée en utilisant les sousroutines BANRED et BAC12, le vecteur solution est $d'_{n+\theta}$ et stocké dans le vecteur LOADS2. Une fois les déplacements $d'_{n+\theta}$ connus, on fait appel à la subroutine NFNF2 pour insérer la composante i du vecteur $d'_{n+\theta}$ dans le vecteur LOADS2 ; le vecteur ainsi construit est LOADS. Ce vecteur LOADS nous permet d'avoir l'ensemble des déplacements globaux y compris les déplacements imposés.

Le nombre de déplacements imposés peut être différent de 1. Supposons que le nombre de déplacements imposés est ND et le nombre de degrés de liberté actifs est N, les dimensions des matrices et vecteurs seront comme suit :

- $K : N \times N \rightarrow KV : (IW+1) \times N$
- $K' : (N-ND) \times (N-ND) \rightarrow KV2 : (IW+1) \times (N-ND)$
- $LOADS : N \rightarrow LOADS2 : N-ND$

4-3-3 Description des principales nouvelles sousroutines

Ce changement de méthode de résolution nous conduit à l'introduction de 3 nouvelles sousroutines à savoir FORNF2, CHARGE et NFNF2 décrites comme suit en notant qu'elles sont écrites pour un nombre quelconque de déplacements imposés.

- Subroutine FORNF2 :

Cette subroutine construit la matrice NF2 à partir de la matrice NF. Les composantes de la matrice NF correspondant à un degré de liberté retenu sont nulles par contre les composantes de la matrice NF2 correspondant à un degré de liberté où un déplacement est imposé sont aussi nulles. Les vecteurs G et G2 sont construits à partir respectivement des matrices NF et NF2.

- Subroutine CHARGE:

Cette subroutine détermine les nouvelles composantes du vecteur charges nodales LOADS en retranchant les termes correspondant aux déplacements connus de chaque équation comme expliqué à la section (4-3-1).

- Subroutine NFNF2:

Cette subroutine détermine les nouvelles composantes du vecteur charges nodales LOADS2 à partir du vecteur charges nodales LOADS et ce, en supprimant les composantes relatives aux degrés de liberté où un déplacement est imposé. Une fois le système d'équations résolu, la solution est stockée dans le vecteur LOADS2 (sans les composantes correspondant aux déplacements imposés). Par suite, cette même subroutine est utilisée pour déterminer les composantes du vecteur solution LOADS à partir du vecteur LOADS2, en incluant les composantes correspondant aux déplacements imposés.

4-4 Implémentation de l'algorithme de Wilson- θ en tenant compte des mouvements d'appuis

Comme déjà indiqué sur la figure (3-15), les matrices globales de rigidité et de masse en tenant compte des déplacements d'appuis sont stockées dans les vecteurs KV2 et MM2 en moyennant la valeur calculée de la demi-largeur de bande IW. Les différentes opérations d'implémentation dans le programme STRUDL5.FOR_version 2014 sont données sur la figure suivante (fig. 4-4):

- Lecture des données (suite : fig. 3-15) :
 - ALPHA, BETA : coefficients d'amortissement de Raleigh (α', β'), calculés à partir de la première et de la troisième pulsation en utilisant la méthode de Jacobi
 - ISTEP : Nombre de pas de temps d'intégration (=500)
 - THETA : paramètre d'intégration numérique ($\theta = 0.5$)
 - OMEGA : valeur de la fréquence forcée liée au chargement cosinusoidal imposé
 - DTIM : pas de temps (qui peut être choisi comme étant une fraction de la période du chargement, $PERIOD = 2 * \pi / \omega_{min}$)
 - AM(NX) : Amplitude du chargement imposé selon le degré de liberté NX
 - AMD(NDX) : Amplitude du déplacement imposé selon le degré de liberté NDX

→ call STRUDL5.INP

- Au temps $t=0$ (TIM=0), stockage des déplacements, des vitesses et des accélérations initiaux et ce pour l'ensemble des degrés de liberté actifs du problème (N), dans les vecteurs : X0, D1X0, D2X0
- Initialisation du temps: TIM = 0

```

Pour chaque intervalle de temps: J=1,ISTEP
- TIM=TIM+DTIM
- Calcul et réduction de la matrice  $\bar{K}$ , stockée dans le vecteur F1
  → call BANRED(F1,N,IW)
- Calcul du vecteur des forces effectives  $\bar{F}_{n+\theta}$ , stockée dans le vecteur
  X1 en appelant successivement les sous programmes de multiplication et
  d'addition
  de matrices : LINMUL et VECCAD ainsi que les sousroutines CHARGE et
  NFNF2
- Résolution du système d'équations  $\bar{K}d_{n+\theta} = \bar{F}_{n+\theta}$  et stockage des résultats dans
  X1
  → call BACSUB (F1,X1,N,IW)
  → call NFNF2(NF,NF2,INF,X1,LOADS2,NO,VAL,ND,NN,NODOF,1)
- Calcul de l'accélération au temps fictif  $t_{n+\theta}$ , stockée dans le vecteur D2X
- Calcul des nouvelles accélérations, vitesses et déplacements stockées dans les
  vecteurs :
  D2X1, D1X1, X1
- Impression des déplacements du degré de liberté X1(Nx)
- Réactualisation de D2X1, D1X1, X1 pour l'intervalle de temps suivant, stockés
  dans les vecteurs D2X1, D1X1, X1
  → call VECCOP (D2X1,D2X0,...)
  → call VECCOP (D1X1,D1X0,...)
  → call VECCOP (X1,X0,...)
- Calcul au CG de chaque élément (IELX, IELY) des courbures et des moments :
  → call RECOVER(IELX,IELY,...XMOMX,XMOMY,XMOMXY)
  write(IMP1,1085)TIM,XMOMX,XMOMY,XMOMXY

```

Fig. 4-4 Implémentation de l'algorithme de Wilson-θ dans STRUDL5.FOR_version 2014

4-5 Détermination des modes et des pulsations propres- Méthode de Jacobi

On appelle mode propre, les solutions de l'équation générale de l'équilibre dynamique (4-1) dans laquelle on admet conjointement nuls l'amortissement et le chargement extérieur appliqué conduisant alors à une équation de la forme :

$$M \ddot{d}(t) + Kd(t) = 0 \quad (4-39)$$

Le mouvement régi par une telle équation différentielle est dit non amorti en oscillation libre. Pour la résoudre, par analogie à un système à un seul degré de liberté, on suppose que la réponse est de type harmonique ayant la forme:

$$d(t) = \phi \sin(\omega t - \theta) \quad (4-40a)$$

Où ϕ représente les modes de déformation possibles, qui ne changent pas avec le temps et θ est un angle de déphasage. Le vecteur d'accélération en vibration libre est alors :

$$\ddot{d}(t) = -\omega^2 \phi \sin(\omega t - \theta) = -\omega^2 d(t) \quad (4-40b)$$

Substituons d et $\ddot{d}$ dans l'équation (4-39), nous obtenons :

$$(K - \omega^2 M)\phi \sin(\omega t - \theta) = 0 \quad (4-41)$$

Cette expression doit être vérifiée quelque soit t , donc pour toutes les valeurs du terme en sinus ; ce que nous écrivons :

$$K\phi = \omega^2 M\phi \quad (4-42)$$

Cette équation est un problème dit aux valeurs propres généralisé (en anglais generalized eigenvalue problem). Elle peut être aussi écrite :

$$[K - \omega^2 M]\phi = [K - \lambda M]\phi = 0 \quad (4-43)$$

Où $\lambda \equiv \omega^2$ est un scalaire réel positif. La solution triviale $\phi_i = 0$ de l'équation (4-43) correspond à aucun mouvement et ne nous intéresse pas. Une solution non triviale n'est possible que si le déterminant de la matrice des coefficients $[K - \omega^2 M]$ s'annule. En d'autres termes, des vibrations d'amplitudes finies sont possibles si et seulement si :

$$\det(K - \omega^2 M) = \det(K - \lambda M) = 0 \quad (4-44)$$

L'équation (4-44) est appelée équation aux fréquences ou équation caractéristique du système. En développant ce déterminant, on obtient une équation polynomiale d'ordre N en $\lambda_j = \omega_j^2$ pour un système avec n_{eq} degrés de liberté. Les n_{eq} racines de cette équation ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_{n_{eq}}$) sont les pulsations propres, appelées plus fréquemment fréquences naturelles du système qui sont associées chacune à un vecteur modal ou mode propre de vibration du système. En termes d'algèbre linéaire, les paires (λ_j, ϕ_j) sont les valeurs propres et les vecteurs propres du problème aux valeurs propres généralisé.

Cependant, la résolution de ce polynôme en tant que tel s'avère fastidieux et laborieux et pour contourner la difficulté, on fait appel à des méthodes itératives dont les méthodes de Raleigh, de Stodolla-Vianello, de Holzer et de Jacobi. La plus utilisée en pratique pour des problèmes d'éléments finis est la méthode de Jacobi amplement revue et documentée dans l'ouvrage de Datt et Touzout [2,19,20]. Son principe consiste de calculer les N valeurs

propres et les N pulsations propres d'un système d'équations en transformant les matrices M et K, celles-ci étant définies positives et symétriques, en des matrices diagonales à l'aide d'un processus de transformations successives.

Les valeurs propres et les pulsations propres sont déterminées en appelant le sous programme Jacobi par la manière suivante :

subroutine JACOBI(VK,VM,N,NCYM,EPS,VALP,VECT)

Les arguments représentent respectivement :

- VK, VM : matrices de rigidité K et de masse M rangées en triangle supérieure par colonnes descendantes i.e en lignes de ciel comme indiqué sur la figure (4-5) donnée ci-après.
- Dimension des matrices K et M
- NCYM : Nombre de cycles maximum (15)
- EPS : Précision requise (1.D-12)
- VALP : valeurs propres calculées
- VECT : vecteurs propres calculés.

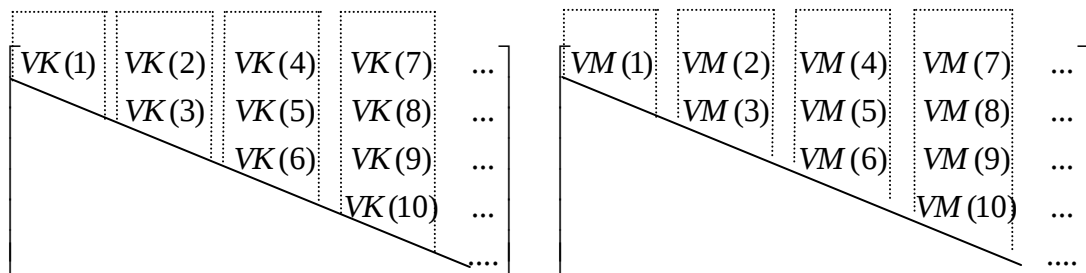


Fig 4-5. Stockage de la matrice de rigidité et de la matrice masse en ligne de ciel

Chapitre 5

EXPERIMENTATION NUMERIQUE ET ANALYSE

5-1 Généralités

Nous allons dans ce chapitre illustrer le programme établi par des applications numériques portant sur l'évaluation de la réponse dynamique de la plaque en considérant les mouvements d'appuis.

Le programme s'intitule STRUDL5.FOR_version 2014 facilement exploitable sur micro-ordinateur dont le langage d'ordinateur employé est le fortran où le compilateur est celui du Microsoft Developer Studio.

Dans ce qui suit, nous allons tout d'abord présenter la description du fichier type de données qui s'intitule STRUDL5.INP_version 2014 et ensuite donner l'organigramme général du programme résumant l'algorithme de calcul. Sera suivi d'une illustration d'un certain nombre d'exemples numériques avec lesquels nous effectuerons une analyse de quelques paramètres clés sur le comportement de la plaque envisagée.

5-2 Description du fichier de données STRUDL5.INP_version 2014

- COMT : bloc des commentaires.

Les cartes de commentaires sont suivies obligatoirement d'une carte blanche.

- Variables lues- carte 1 :

NXE,NYE,NN,NR,NGP,IMETH,ITYPE

Description des variables

NXE : nombre d'éléments suivant la direction x

NYE : nombre d'éléments suivant la direction y

NN: nombre total de nœuds du maillage

NR: Nombre de degrés de liberté où au moins un degré de liberté est empêché

NGP: nombre de points de Gauss

IMETH: Type de méthode envisagée (=1 : Wilson- θ)

ITYPE : Type de méthode de calcul de la matrice masse

(=1 : masse concentrée ; =2 : masse consistante)

- Variables lues- carte 2 :

AA,BB,WIDTH,RHO,E,V,DR

Description des variables

AA : dimension de l'élément suivant x

BB : dimension de l'élément suivant y

WIDTH: épaisseur de la plaque

RHO: masse volumique ou densité du matériau (en kg/m^3)

E : module d'élasticité

V : coefficient de Poisson

DR: Taux d'amortissement (ζ)

- Variables lues- carte 3 :

ISTEP,THETA,,NPRI,IPRN1

Description des variables

ISTEP : Nombre de pas de temps d'intégration

THETA : paramètre d'intégration numérique (=1.4: méthode de Wilson- θ)

NPRI : Indice de contrôle d'impression : imprimer tous les NPRI intervalles de temps

IPRN1 : Indice de contrôle d'impression des valeurs intermédiaires
(IPRN1=1 : oui ; IPRN1=0 : non)

- Variables lues- carte 4 (lecture des conditions aux limites):

K, NF(K,1), NF(K,2) , NF(K,3) , NF(K,4) à lire autant de fois NR

Description des variables

K : numéro du nœud où au moins un degré de liberté est retenu

NF(K,1) =0 ou 1 si le nœud K est retenu ou non suivant le déplacement transversal

NF(K,2) =0 ou 1 si le nœud K est retenu ou non suivant la rotation θ_x

NF(K,3) =0 ou 1 si le nœud K est retenu ou non suivant la rotation θ_y

NF(K,4) =0 ou 1 si le nœud K est retenu ou non suivant la rotation θ_{xy}

- Variables lues- carte 5:

NL,ND

Description des variables

NL : nombre de nœuds chargés (chargement de type cosinusoidal uniquement)

ND : nombre de nœuds où les déplacements sont imposés

- Variables lues- carte 6:

NLX,NODX,IDIRX,IELX,IELY

Description des variables

NLX : numéro du chargement à imprimer uniquement
 NODX : impression du numéro du nœud spécifié
 IDIRX : direction (=1 : suivant w ; =2 : suivant θ_x ; =3 : suivant θ_y ; =4 : suivant θ_{xy}) choisie du déplacement du nœud à imprimer
 IELX : numéro de l'élément suivant x où seront imprimés les contraintes et les déformations au CG
 IELY : numéro de l'élément suivant y où seront imprimés les contraintes et les déformations au CG

- Variables lues- carte 7 : si ND est différent de zéro

K,IDK,XVALUE,X1VALUE à lire autant de ND appliqués

Description des variables

K : numéro du nœud où les conditions initiales sont appliquées
 IDK: direction (=1 : suivant w ; =2 : suivant θ_x ; =3 : suivant θ_y ; =4 : suivant θ_{xy}) suivant laquelle les conditions initiales sont appliquées
 XVALUE : valeur du déplacement initial appliqué
 X1VALUE : valeur de la vitesse initiale appliquée

5-3 Expérimentation et validation des résultats

Afin de jauger la fiabilité des résultats obtenus par le programme, nous proposons de reprendre la plaque analysée manuellement au paragraphe (2-5-2), qui consiste en une plaque rectangulaire avec deux bords encastres et simplement appuyée sur les deux autres comme schématisée sur la figure (5-1). Elle est supposée sollicitée en son centre par une charge transversale de la forme: $F(t) = F_0 \cos \Omega t$.

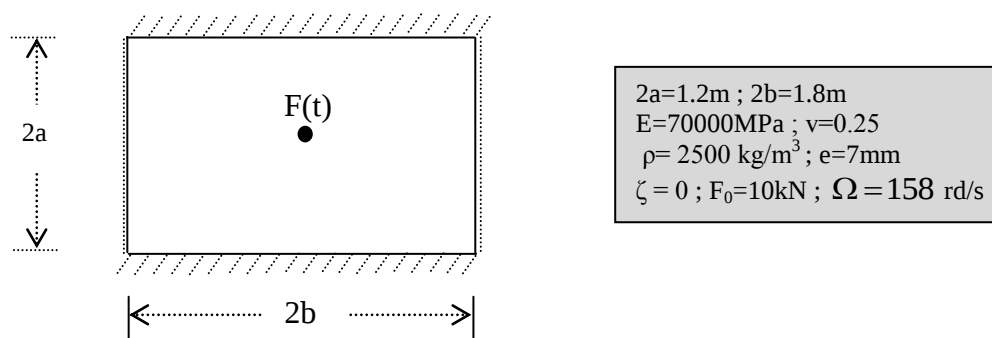


Fig. 5-1. Plaque rectangulaire encastree sur deux bords et simplement appuyée sur les deux autres

Nous proposons d'analyser la réponse dynamique de la plaque d'abord en l'absence de toute excitation d'appui et ensuite en présence des mouvements imposés aux appuis en considérant un maillage composé d'un seul élément fini de type conforme i.e. ayant 4 nœuds avec 4 degrés de liberté par nœud (1 : w ; 2: θ_x ; 3: θ_y ; 4 : θ_{xy}) comme déjà décrit dans la section (3-5-2-1) et en tirant les avantages possibles de la symétrie du problème.

5-3-1 Sans mouvement d'appuis

En raison de la symétrie, seul un quart de la plaque est analysée (fig. 5-2a) et discrétisé par un seul élément fini conforme dont sa déformée est donnée sur la figure (5-2b). La numérotation des degrés de liberté actifs sont comme suit : nœud 1 (0,0,0,0) ; nœud 2 (0,0,0,0) ; nœud 3 (0,0,1: θ_{y3} , 0) ; nœud 4 (2: w_4 , 0,0,0).

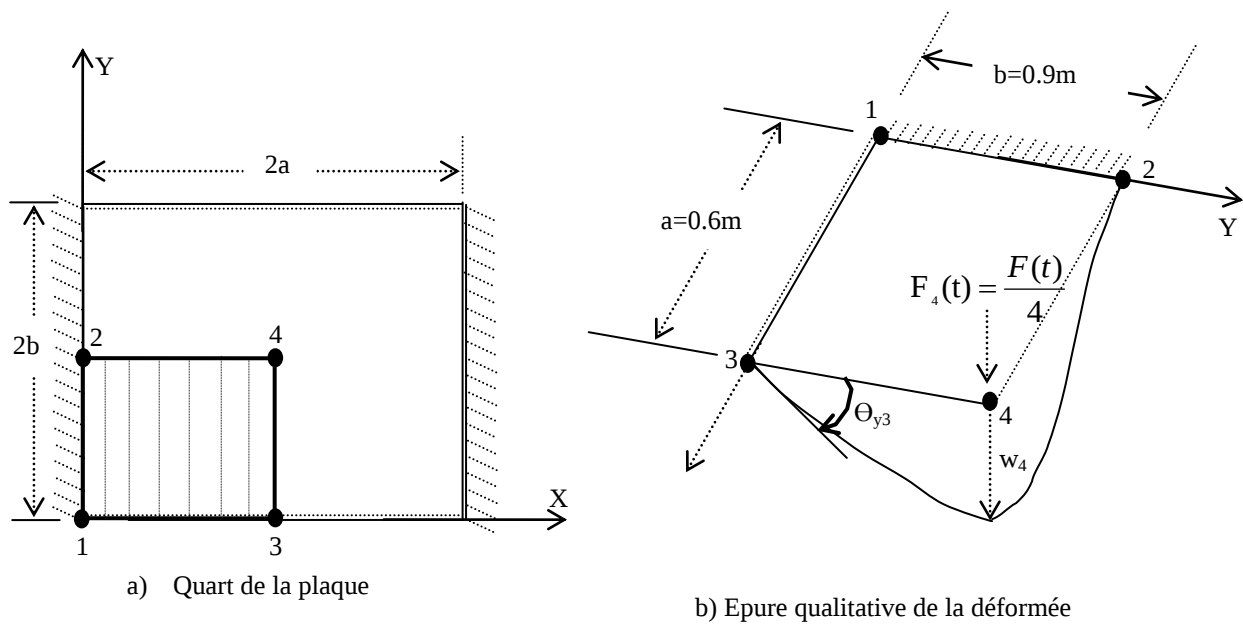


Fig. 5-2. Discretisation du quart de la plaque et de sa déformée

5-3-1-1 Comparaison des matrices de rigidité et de masse obtenues manuellement et par le programme

A titre comparatif, les matrices de rigidité et de masse obtenues respectivement d'une manière manuelle et par le programme de calcul a conduit aux résultats récapitulés dans le tableau suivant :

Tableau 5-1 Valeurs des matrices de rigidité et de masse obtenues manuellement et par le programme

Procédure	Matrice de rigidité, K	Matrice masse concentrée, M	Matrice masse consistante, M
Manuelle (tables de Yang)	$\begin{bmatrix} 3969.24 & -1422.67 \\ -1422.67 & 59089.19 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2.36 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.03 & 0.098 \\ 0.098 & 1.30 \end{bmatrix}$
Programme (intégration numérique)	$\begin{bmatrix} 3961.52 & -1404.18 \\ -1404.18 & 58847.32 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 \\ 0 & 2.36 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0027 & 0.098 \\ 0.098 & 1.304 \end{bmatrix}$

5-3-1-2 Résultats obtenus

Les résultats obtenus pour un nombre de pas de temps d'intégration, ISTEP=10 et pour la valeur de l'incrément de temps choisi, $\Delta t = T/20 \approx 0.002$ s ($T=2\pi/\Omega = 0.0397$ s), selon que la matrice est concentrée ou consistante, sont synthétisés par la manière donnée ci-après.

A- Masse concentrée (ITYPE=1)

- Fichier d'entrée des données :

Dynamic analysis of a rectangular plate with 2 edges clamped and 2 others simply supported under mid transverse concentrate cosinus load (acote-4_1x1.inp), Wilson-teta method [N,m,kg],strudl5x.for, modified on october 29th 2013, mesh: 1x1 elements, Lumped mass

```

!NXE,NYE,NN,NR,NGP,IMETH,ITYPE
      1,1,4,4,4,1,1
!AA,BB,WIDTH,RHO,E,V,DR
      0.6,0.90,0.007,2500.0,7E10,0.25,0.0
!ISTEP,THETA,NPRI,IPRN1
      10,1.4,1,1
!CL: Noeud W,teta-x,teta-y, teta-xy
      1,0,0,0,0
      2,0,0,0,0
      3,0,0,1,0
      4,1,0,0,0
! NL, ND
      1,0
! Print indexes: NLX,NoeudX,IELX,IELY
      1,4,1,1,1
! NTYPE
      1
! Loading:Noeud, direction,amplitude,pulsation      (NL times)
      4,1,2500.0,158.0
end

```

- **Fichier de sortie:**

```

=====BEGINNING:COMMENTS/DESCRIPTION=====
Dynamic analysis of a rectangular plate with 2 edges clamped and 2 others simply
under mid transverse concentrate cosinus load (acote-4_1x1.inp), Wilson-teta met
[N,m,kg],strudl5x.for, modified on october 29th 2013, mesh: 1x1 elements
=====END:COMMENTS/DESCRIPTION=====
Number of element columns in x direction, NXE= 1
Number of element in y direction NYE= 1
Number of nodes in the mesh NN= 4
Number of restrained nodes in the mesh NR= 4

Number of integrating points NGP= 4
Type of the method: IMETH= 1
[ IMETH=1: Wilson-theta method IMETH=2: Modal superposition method]
Mass matrix computation ITYPE= 1
Lumped mass: ITYPE=1 Consistent mass: ITYPE=2
Dimension of elements in x direction AA= .6000
Dimension of elements in y direction BB= .9000
Width of the structure WIDTH= .0070
Material density RHO=2500.00000
Young modulus E= 70000000000.0000
Poisson ratio V= .2500
The damping ratio DR= .00000
Number of time integration ISTEP= 10
Time intégration parameter THETA= 1.40
Print control-print every NPRI(I) steps NPRI= 1
Flag to print intermediate values (IPRN1 = 1: PRINT, IPRN1 = 0:NO NO PRINT) = 1

```

Matrix of nodal degrees of freedom NF:

```
1  0 0 0 0
2  0 0 0 0
3  0 0 1 0
4  2 0 0 0
```

There are 2 equations and the half-bandwidth is 1

Flexural rigidity of the plate: D= .2134E+04

Number of restrained degrees of freedom NCLT= 14

Number of degrees of freedom in the mesh N= 2

Number of loaded nodes (cosinusoidal function only) NL= 1

Number of nodes where displacements are imposed (cosinusoidal function only) ND= 0

Print loading or displaced number NLX= 1

Print displacement of the node NODX= 4 in the direction IDIRX= 1

Number of element (ielx,iely): moments where to be printed:

(at center of element) ielx= 1 iely= 1

ntype=1: charge concentrée du type cosinus

Dynamic loadings are applied

Node number direction amplitude value pulsation value

```
4  1 2500.00000 158.00000
```

Matrix of nodal degrees of freedom NF or NF2:

```
1  0 0 0 0
2  0 0 0 0
3  0 0 1 0
4  2 0 0 0
```

Ordre des pulsations propres:

```
2  1
```

Valeurs des pulsations propres (Eigenvalues):

```
.2470E+05 .3962E+09
```

Impression des 2 premiers modes propres:

Modes propres: 1

```
.2306E+00 .6506E+00
```

Modes propres: 2

```
.3162E+03 -.4745E-03
```

print of the 2th first eigenvalues (pulsations):

```
157.156707912267100
```

```
19903.580381428870000
```

```
ALPHA: 0.000000E+00 BETA: 0.000000E+00
```

time	load.function	displ. function	acceleration	velocity	displacements	
					Rot. of node 3	transl. of node 4
.1988E-02	.2378E+04	.0000E+00	.6823E+03	.6783E+00	.1590E-03	.4496E-03
.3977E-02	.2023E+04	.0000E+00	.6758E+03	.2029E+01	.1113E-02	.3143E-02
.5965E-02	.1469E+04	.0000E+00	.3787E+03	.3077E+01	.2948E-02	.8316E-02
.7953E-02	.7725E+03	.0000E+00	-.5246E+02	.3401E+01	.5281E-02	.1490E-01
.9942E-02	.2213E-03	.0000E+00	-.5198E+03	.2832E+01	.7533E-02	.2125E-01
.1193E-01	-.7725E+03	.0000E+00	-.9405E+03	.1381E+01	.9067E-02	.2558E-01
.1392E-01	-.1469E+04	.0000E+00	-.1242E+04	-.7897E+00	.9311E-02	.2626E-01
.1591E-01	-.2023E+04	.0000E+00	-.1369E+04	-.3386E+01	.7854E-02	.2215E-01
.1790E-01	-.2378E+04	.0000E+00	-.1287E+04	-.6026E+01	.4528E-02	.1277E-01
.1988E-01	-.2500E+04	.0000E+00	-.9892E+03	-.8288E+01	-.5515E-03	-.1558E-02

TIME XMOMX XMOMY XMOMXY

```
.1988E-02 -.4714E-01 -.1886E+00 .2839E+01
.3977E-02 -.3299E+00 -.1319E+01 .1985E+02
.5965E-02 -.8738E+00 -.3495E+01 .5252E+02
.7953E-02 -.1565E+01 -.6261E+01 .9409E+02
.9942E-02 -.2233E+01 -.8932E+01 .1342E+03
.1193E-01 -.2688E+01 -.1075E+02 .1615E+03
.1392E-01 -.2760E+01 -.1104E+02 .1659E+03
.1591E-01 -.2328E+01 -.9312E+01 .1399E+03
.1790E-01 -.1342E+01 -.5369E+01 .8064E+02
.1988E-01 .1635E+00 .6539E+00 -.9842E+01
```

- Matrice consistante (ITYPE=2)
- **Fichier d'entrée des données :**

Dynamic analysis of a rectangular plate with 2 edges clamped and 2 others simply supported under mid transverse concentrate cosinus load (acote-4_1x1.inp), Wilson-teta method [N,m,kg],strudl5x.for, modified on october 29th 2013, mesh: 1x1 elements, Consistant mass

```
!NXE,NYE,NN,NR,NGP,IMETH,ITYPE
      1,1,4,4,4,1,2
!AA,BB,WIDTH,RHO,E,V,DR
      0.6,0.90,0.007,2500.0,7E10,0.25,0.0
!ISTEP,THETA,NPRI,IPRN1
      10,1.4,1,1
!CL: Noeud W,teta-x,teta-y, teta-xy
      1,0,0,0,0
      2,0,0,0,0
      3,0,0,1,0
      4,1,0,0,0
! NL, ND
      1,0
! Print indexes: NLX,NoeudX,IELX,IELY
      1,4,1,1,1
! NTYPE
      1
! Loading:Noeud, direction,amplitude,pulsation      (NL times)
      4,1,2500.0,158.0
end
```

- **Fichier de sortie:**

```
=====BEGINNING:COMMENTS/DESCRIPTION=====
Dynamic analysis of a rectangular plate with 2 edges clamped and 2 others simply
under mid transverse concentrate cosinus load (acote-4_1x1.inp), Wilson-teta met
[N,m,kg],strudl5x.for, modified on october 29th 2013, mesh: 1x1 elements , Consistant mass
=====END:COMMENTS/DESCRIPTION=====
Number of element columns in x direction, NXE= 1
Number of element in y direction NYE= 1
Number of nodes in the mesh NN= 4
Number of restrained nodes in the mesh NR= 4
Number of integrating points NGP= 4
Type of the method: IMETH= 1
[ IMETH=1: Wilson-theta method IMETH=2: Modal superposition method]
Mass matrix computation ITYPE= 2
Lumped mass: ITYPE=1 Consistent mass: ITYPE=2
Dimension of elements in x direction AA= .6000
Dimension of elements in y direction BB= .9000
Width of the structure WIDTH= .0070
Material density RHO=2500.00000
Young modulus E= 70000000000.0000
Poisson ratio V= .2500
The damping ratio DR= .00000
Number of time integration ISTEP= 10
Time intégration parameter THETA= 1.40
Print control-print every NPRI(I) steps NPRI= 1
Flag to print intermediate values (IPRN1 = 1: PRINT, IPRN1 = 0:NO NO PRINT) = 1
```

Matrix of nodal degrees of freedom NF:

```
1  0 0 0 0
2  0 0 0 0
3  0 0 1 0
4  2 0 0 0
```

There are 2 equations and the half-bandwidth is 1

Flexural rigidity of the plate: D= .2134E+04

Number of restrained degrees of freedom NCLT= 14

Number of degrees of freedom in the mesh N= 2

Number of loaded nodes (cosinusoidal function only) NL= 1

Number of nodes where displacements are imposed (cosinusoidal function only) ND= 0

Print loading or displaced number NLX= 1

Print displacement of the node NODX= 4 in the direction IDIRX= 1

Number of element (ielx,iely): moments where to be printed:

(at center of element) ielx= 1 iely= 1

Dynamic loadings are applied

NTYPE.= 1

Node number direction amplitude value pulsation value

```
4  1 2500.00000 158.00000
```

Matrix of nodal degrees of freedom NF2:

```
1  0 0 0 0
2  0 0 0 0
3  0 0 1 0
4  2 0 0 0
```

Ordre des pulsations propres:

```
2  1
```

Valeurs des pulsations propres (Eigenvalues):

```
.3821E+05 .2350E+06
```

Impression des 2 premiers modes propres:

Modes propres: 1

```
.1335E+01 .7601E+00
```

Modes propres: 2

```
.6990E+01 -.6886E+00
```

print of the 2th first eigenvalues (pulsations):

```
195.480988706237100
```

```
484.774174229609700
```

```
ALPHA: 0.000000E+00 BETA: 0.000000E+00
```

time	load. function	disp.function	acceleration	velocity	displacement	
					Rot. of node 3	transl. of node 4
.1988E-02	.2378E+04	.0000E+00	.1521E+04	.1512E+01	-.2987E-02	.1002E-02
.3977E-02	.2023E+04	.0000E+00	.1051E+04	.4069E+01	-.1822E-01	.6706E-02
.5965E-02	.1469E+04	.0000E+00	-.1334E+03	.4982E+01	-.3380E-01	.1609E-01
.7953E-02	.7725E+03	.0000E+00	-.1196E+04	.3661E+01	-.2858E-01	.2504E-01
.9942E-02	.2213E-03	.0000E+00	-.1671E+04	.8101E+00	.6993E-02	.2964E-01
.1193E-01	-.7725E+03	.0000E+00	-.1551E+04	-.2394E+01	.6125E-01	.2802E-01
.1392E-01	-.1469E+04	.0000E+00	-.1156E+04	-.5085E+01	.1070E+00	.2046E-01
.1591E-01	-.2023E+04	.0000E+00	-.8417E+03	-.7071E+01	.1178E+00	.8270E-02
.1790E-01	-.2378E+04	.0000E+00	-.7220E+03	-.8626E+01	.8447E-01	-.7375E-02
.1988E-01	-.2500E+04	.0000E+00	-.6038E+03	-.9944E+01	.1943E-01	-.2588E-01

TIME	XMOMX	XMOMY	XMOMXY
.1988E-02	.8855E+00	.3542E+01	.9672E+01
.3977E-02	.5402E+01	.2161E+02	.6295E+02
.5965E-02	.1002E+02	.4008E+02	.1412E+03
.7953E-02	.8473E+01	.3389E+02	.1956E+03
.9942E-02	-.2073E+01	-.8292E+01	.1907E+03
.1193E-01	-.1816E+02	-.7262E+02	.1256E+03
.1392E-01	-.3171E+02	-.1268E+03	.2945E+02
.1591E-01	-.3493E+02	-.1397E+03	-.6273E+02
.1790E-01	-.2504E+02	-.1002E+03	-.1337E+03
.1988E-01	-.5760E+01	-.2304E+02	-.1920E+03

5-3-1-3 Comparaison des résultats

L'évolution en fonction du temps du déplacement transversal du centre de la plaque (nœud 4 : w_4) et de la rotation selon l'axe y du nœud 3 (θ_{y3}) ainsi que des moments (M_x , M_y , M_{xy}) calculés au CG de l'élément, obtenus respectivement en considérant la notion de concentration de masse ou consistante, sont illustrés sur les figures (5-3) et (5-4). Nous remarquons une quasi-concordance des résultats avec ceux calculés par voie manuelle.

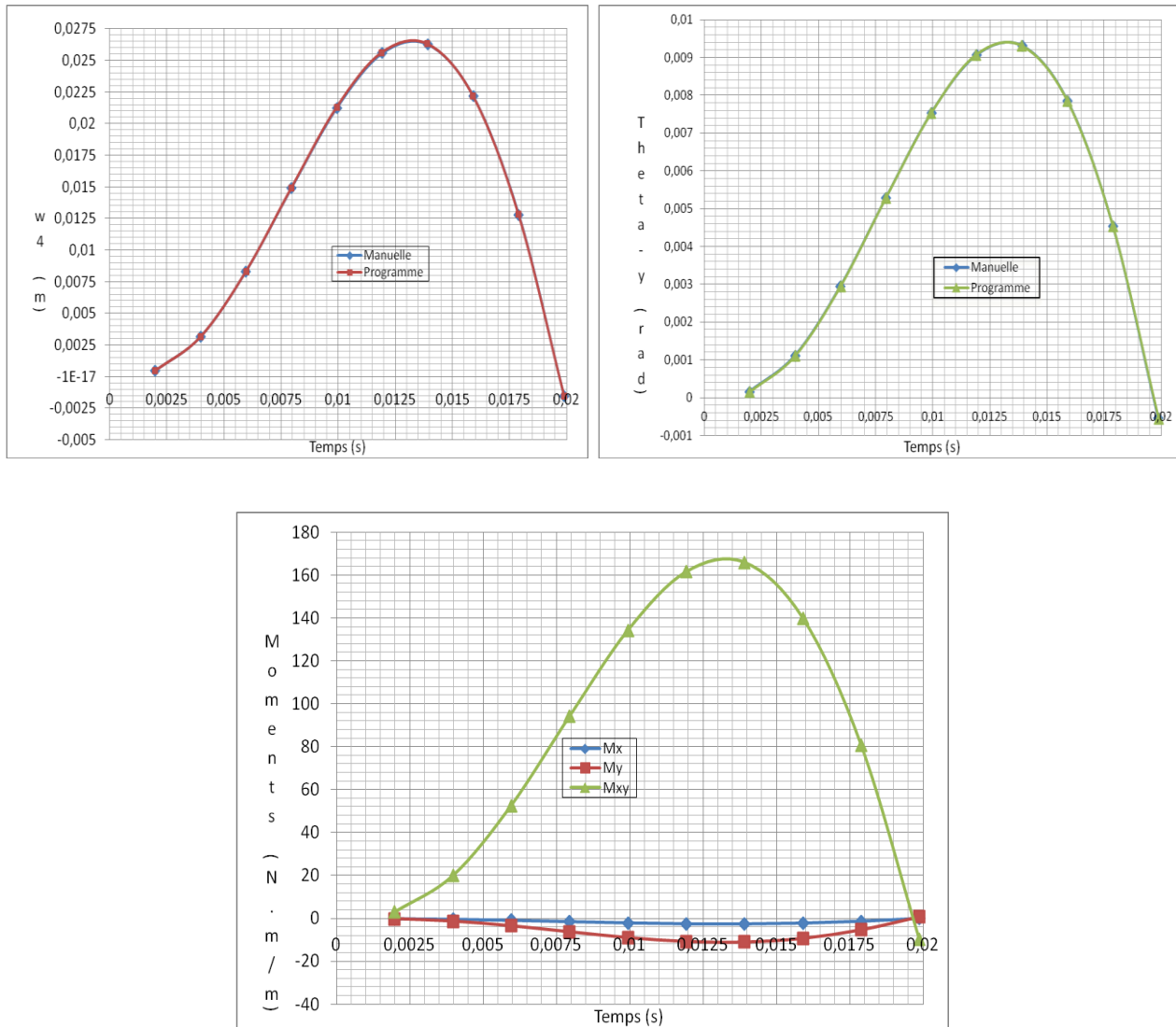


Fig .5-3 . Variation en fonction du temps des déplacements et des moments
-cas de la matrice masse concentrée-

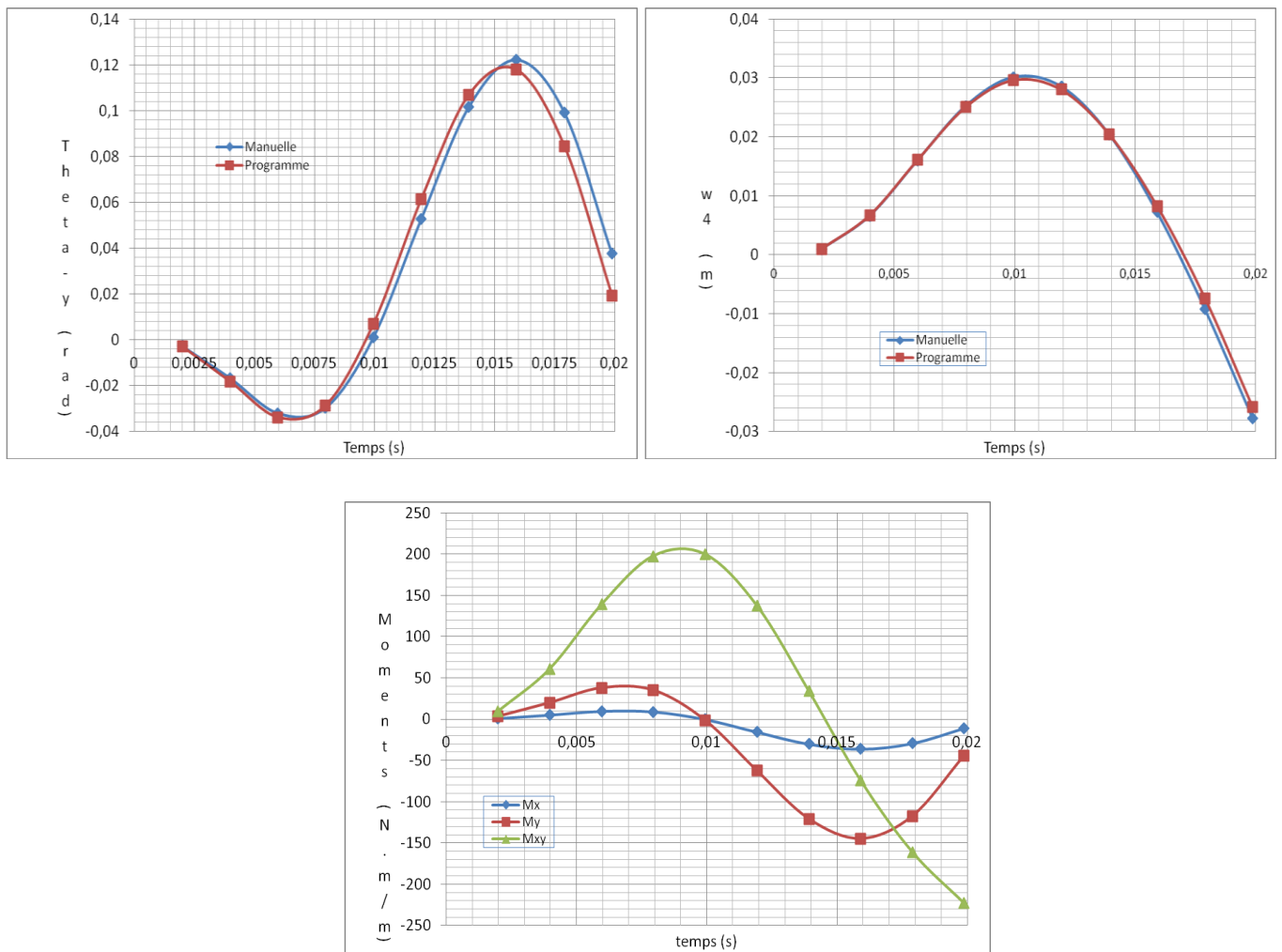


Fig .5-4. Variation en fonction du temps des déplacements et des moments
-cas de la matrice masse consistante-

A la figure (5-5), nous comparons les déplacements de translation w_4 et de rotation θ_{y3} obtenus respectivement en considérant les notions de masse consistante et concentrée où nous remarquons l'effet non négligeable de la répartition de la masse sur le comportement de la plaque.

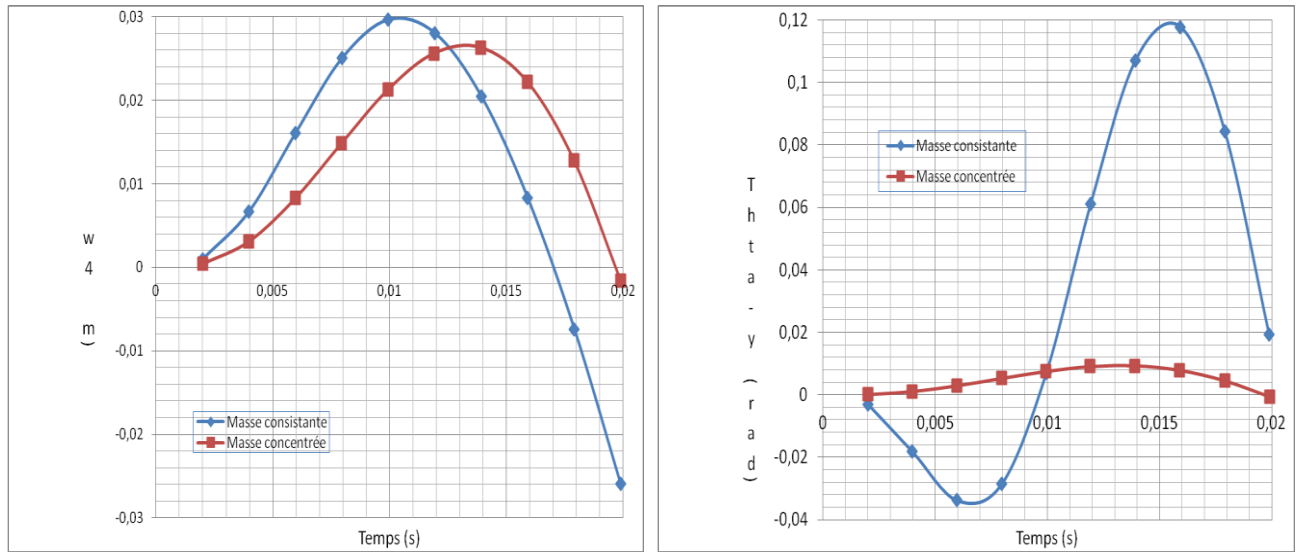


Fig .5-5. Illustration de l'effet de la répartition de masse sur le comportement de la plaque

5-3-2 Avec mouvement d'appuis

Considérons maintenant qu'en plus de la charge $F(t) = \frac{F_0}{4} \cos \Omega t$, la plaque subit un déplacement transversal dynamique de la forme $\delta(t) = \delta_0 \cos \Omega t$ qui est appliqué au niveau du nœud 3 comme schématisé sur la figure (5-6). La numérotation des degrés de liberté actifs sont dans ce cas définis comme suit : nœud 1 (0,0,0,0) ; nœud 2 (0,0,0,0) ; nœud 3 (1 : $w_3 = \delta(t)$, 0, 2 : θ_{y3} , 0) ; nœud 4 (3 : w_4 , 0,0,0).

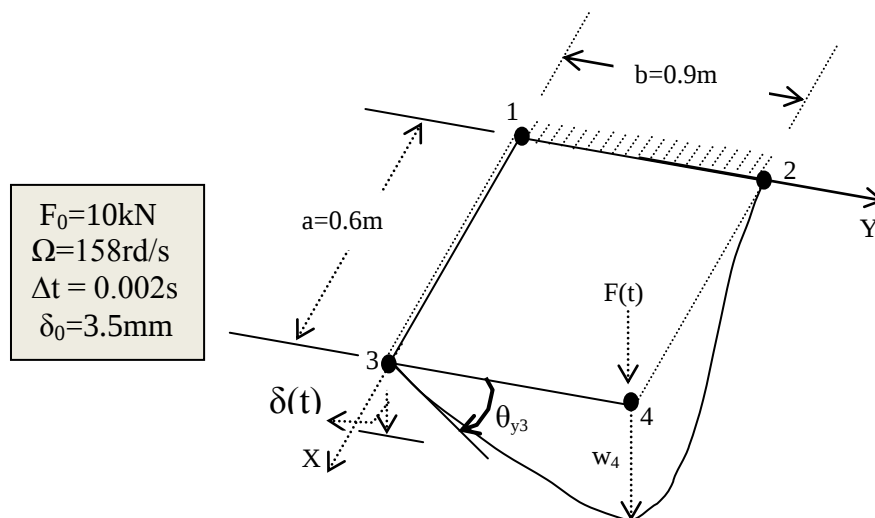


Fig .5-6. Discretisation et la déformée de la plaque-cas de mouvement imposé

Analysons le quart de la plaque comme dans la section précédente dont les fichiers d'entrée des données et de sortie sont donnés à l'annexe B.

5-3-2-1 Comparaison des matrices de rigidité et de masse obtenues manuellement et par le programme

Tableau 5-2 : Valeurs des matrices de rigidité et de masse obtenues manuellement et par le programme

Procédure	Matrice de rigidité, K	Matrice masse consistante, M
Manuelle (tables de Yang)	$\begin{bmatrix} 59084.19 & 10474.6 & -5491.49 \\ 10474.6 & 3969.24 & -1422.67 \\ -5491.49 & -1422.67 & 59084.19 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.30 & 0.165 & 0.45 \\ 0.165 & 0.03 & 0.098 \\ 0.45 & 0.098 & 1.30 \end{bmatrix}$
Programme (intégration numérique)	$\begin{bmatrix} 58847.32 & 10474.63 & -5491.76 \\ 10474.63 & 3961.52 & -1404.18 \\ -5491.76 & -1404.18 & 58847.32 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.304 & 0.165 & 0.45 \\ 0.165 & 0.027 & 0.098 \\ 0.45 & 0.098 & 1.304 \end{bmatrix}$

5-3-2-2 Analyse et discussion des résultats obtenus

A la figure (5-7), nous illustrons la variation en fonction du temps du déplacement transversal du milieu de la plaque (w_4) et de la rotation relative au nœud 3 (θ_{y3}) ainsi que des moments calculés au CG de l'élément fini. Nous remarquons particulièrement une concordance quasi-parfaite des résultats avec ceux calculés manuellement au chapitre 2. La petite différence qui n'excède guère 1% serait due principalement à la petite différence entre les valeurs des matrices de rigidité et de masse présentées au tableau (5-2). Notons enfin la réponse transitoire durant les premiers instants de chargement où comme montrée sur la figure (5-8), la réponse permanente commence à se manifester après un temps supérieur ou égal à 2.62 secondes équivalent à un nombre de pas d'intégration, ISTEP = 1319.

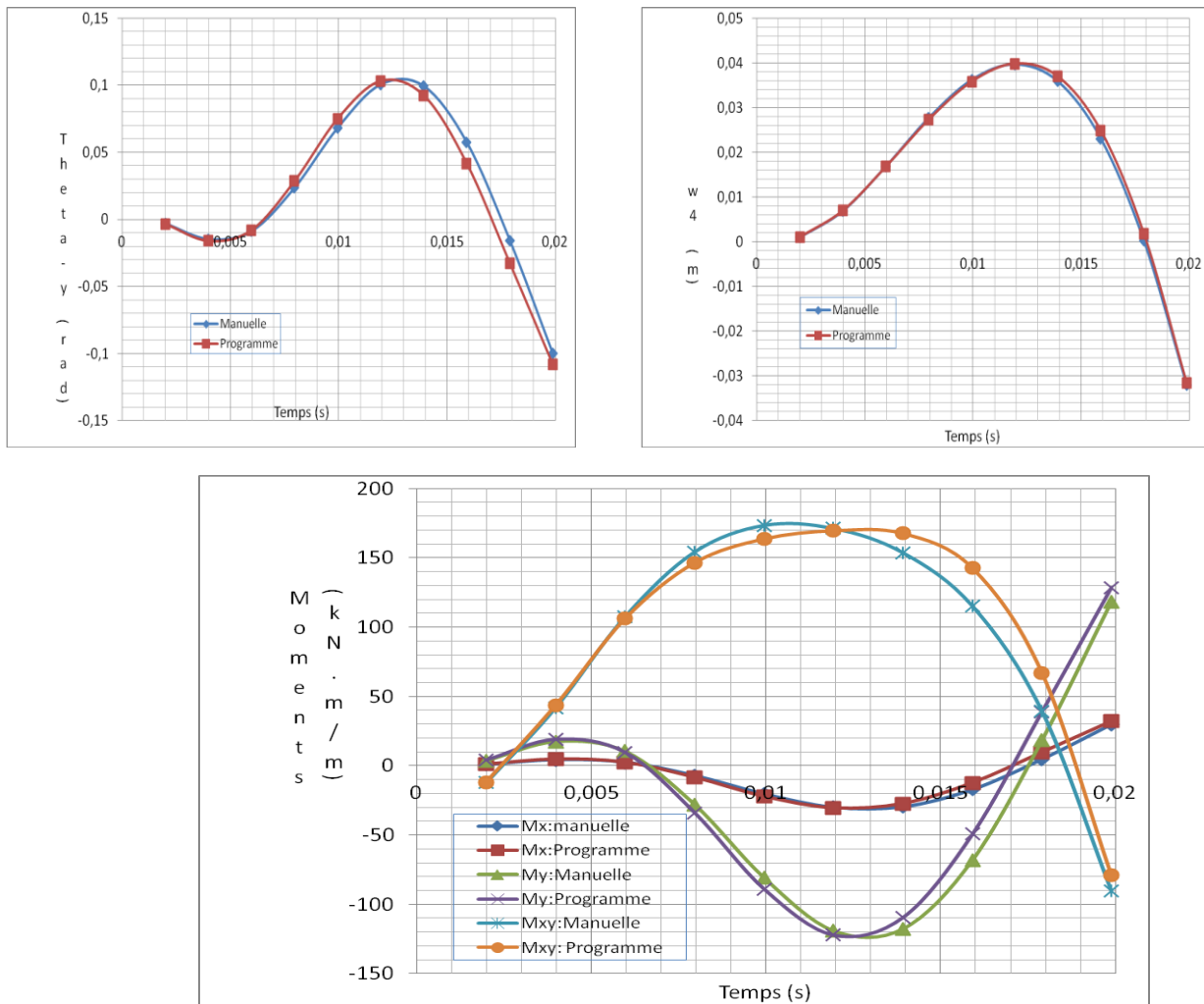


Fig. 5-7. Variation en fonction du temps des déplacements et des moments

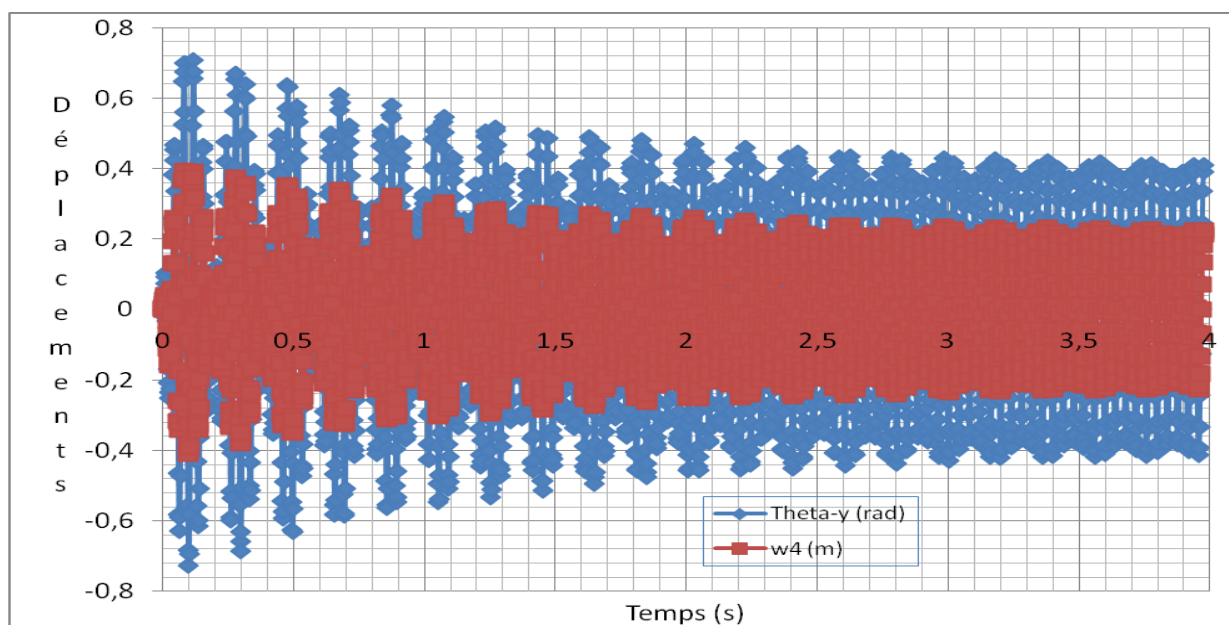


Fig. 5-8. Illustration de la réponse transitoire et permanente de la plaque

Remarque

On donne sur la figure (5-9) les résultats des moments en augmentant le nombre d'éléments. Au fait, nous constatons que le moment de torsion est effectivement très faible par rapport à M_x et M_y . Par suite, 1x1 élément comme c'est le cas de la figure (5-3) et la figure (5-7) ne donne pas de bons résultats en ce qui concerne les efforts.

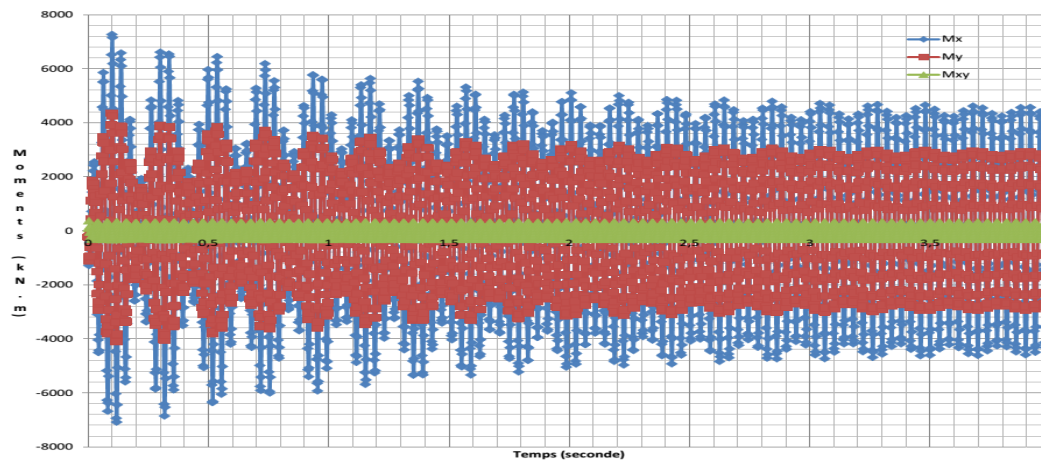


Fig .5-9. Variation en fonction du temps des moments
-maillage 8*8 éléments-

5-3-3 Vérification de la convergence h

Afin de vérifier la convergence de type h soit en augmentant le nombre d'éléments, considérons les différents maillages représentés dans la figure (5-10):

- Maillage 1x1 (i.e $NXE=1=NYE$), figure (5-10a), charge étant appliquée au nœud 4 et le déplacement imposé au nœud 3.
- Maillage 2x2 (i.e $NXE=2=NYE$), figure (5-10b), charge étant appliquée au nœud 9 et le déplacement imposé au nœud 7.
- Maillage 4x4 (i.e $NXE=4=NYE$), figure (5-10c), charge étant appliquée au nœud 25 et le déplacement imposé au nœud 21.
- Maillage 8x8 (i.e $NXE=8=NYE$), figure (5-10d), charge étant appliquée au nœud 81 et le déplacement imposé au nœud 73.

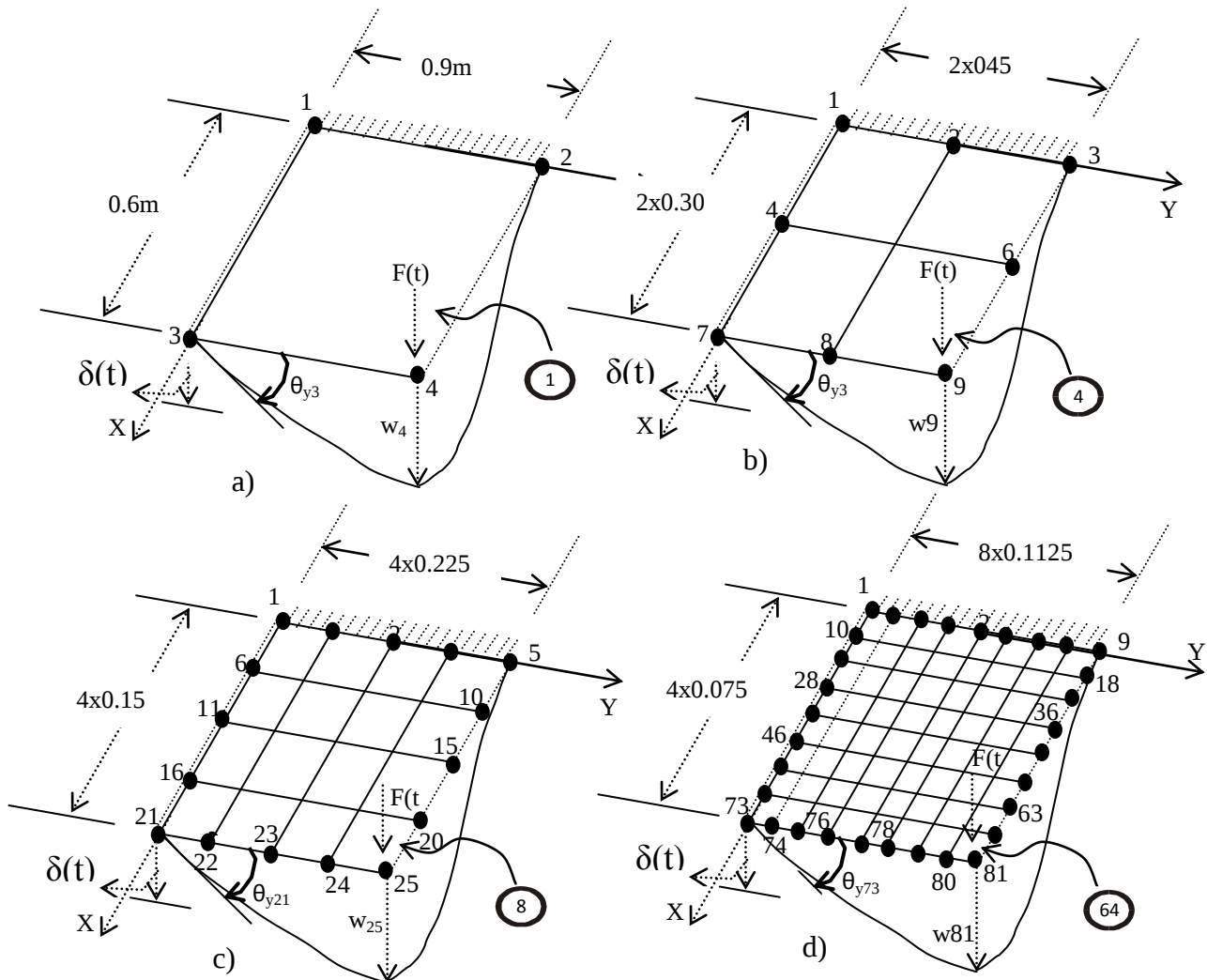


Fig. 5-10. Différents maillages utilisés

Les résultats exprimés en terme de la variation en fonction du temps du déplacement transversal au milieu de la plaque (w_c) et de la rotation selon l'axe y au centre du coté simplement appuyé (θ_{yc}), obtenus en considérant la notion de la matrice consistante, sont représentés graphiquement sur les figures (5-11) et (5-12). Nous remarquons que les résultats convergent au fur et à mesure que le nombre d'éléments augmente c'est-à-dire vérifiant en d'autres termes la convergence dite de type h. A titre illustratif, nous donnons au tableau (5-3), quelques valeurs obtenues au temps $t = 3.5$ s. Notons, cependant, que les moments sont calculés au centre de gravité de l'élément entouré d'un cercle ainsi indiqué dans la figure respective de la figure (5-10).

Tableau 5-3 Quelques valeurs obtenues au temps $t = 3.5$ s

Maillage	1x1	2x2	4x4	8x8
w_c (m)	0.2079	0.1507	0.1333	0.1440
θ_{yc} (rad)	0.3809	0.2028	0.1382	0.1234
Les trois premières pulsations de vibration	195.48 484.77 -	193.98 431.34 975.84	192.24 423.65 952.19	192.50 421.59 943.31
M_x (kN.m/m)	-113.	-252.	-348.	-462.
M_y (kN.m/m)	-452.	-1320	-2060.	-295.
M_{xy} (kN.m/m)	982.	477	354.	321.

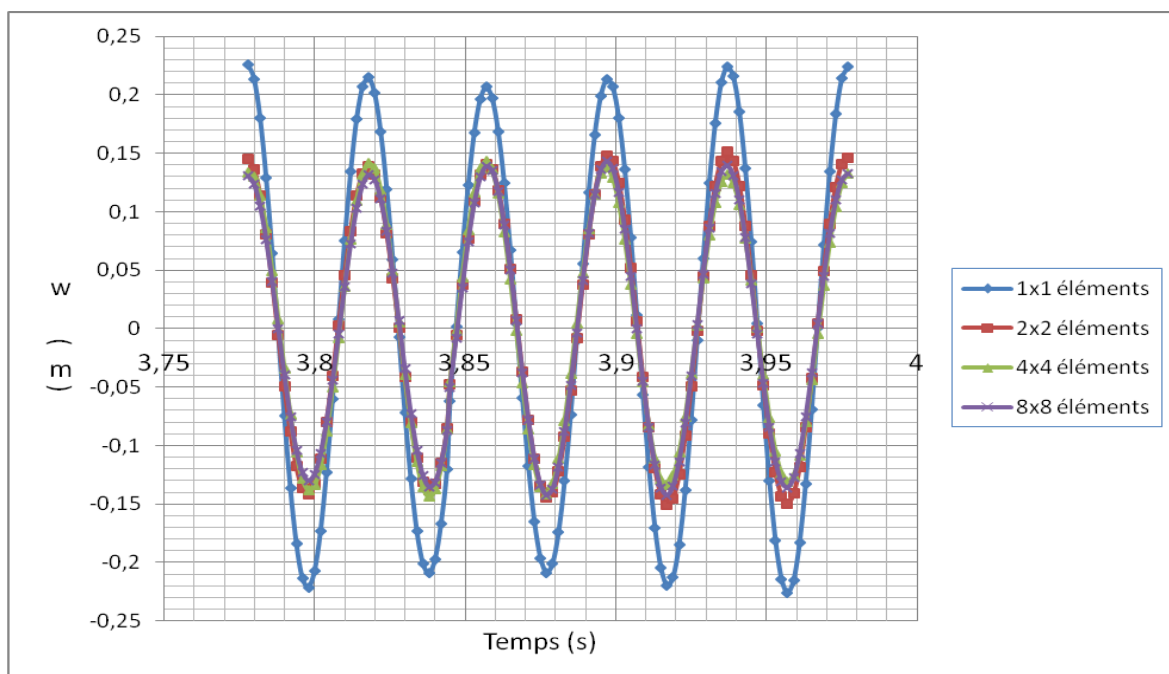


Fig. 5-11. Variation en fonction du temps et du nombre d'éléments du déplacement transversal du milieu de la plaque

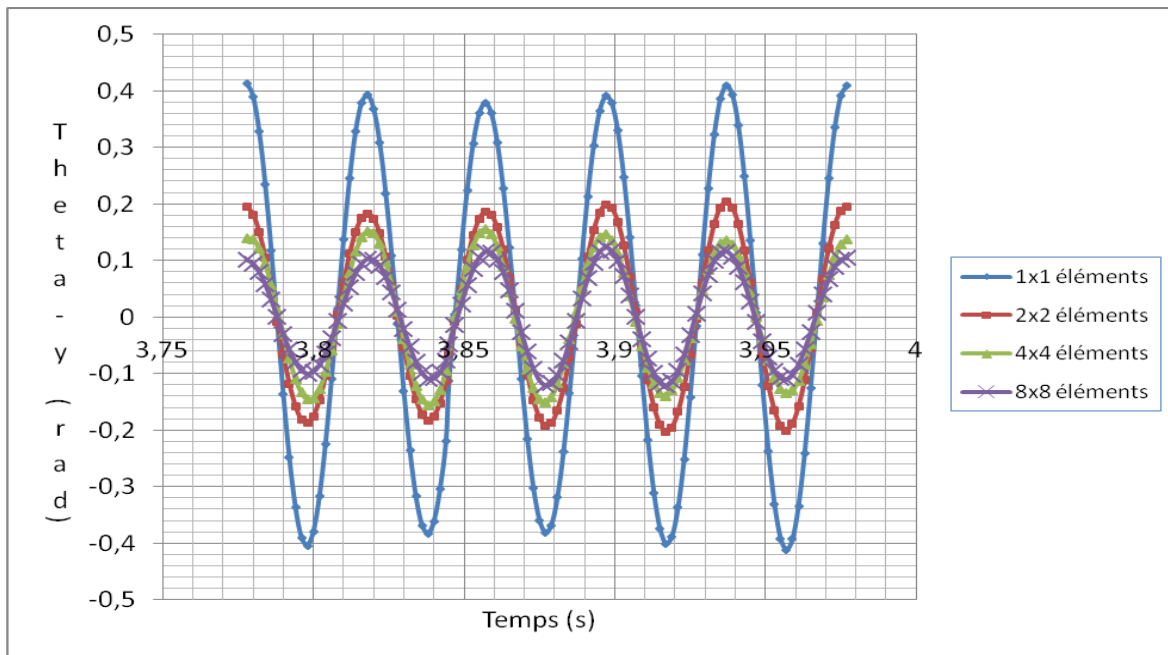


Fig.5-12. Variation en fonction du temps et du nombre d'éléments de la rotation selon y au milieu du coté simplement appuyé de la plaque

5-4 Analyse paramétrique

Nous analysons dans cette section, l'influence de quelques paramètres sur le comportement de la plaque rectangulaire décrite précédemment ayant deux bords encastres et les deux autres simplement appuyés. La nature de la répartition de la masse considérée est constante et le maillage est de type 2x2 éléments. Les paramètres étudiés sont respectivement l'influence de la pulsation de la sollicitation extérieure vibratoire imposée (Ω) et de celle du taux d'amortissement (ζ).

5-4-1 Influence de la pulsation de la sollicitation extérieure vibratoire imposée

Comme indiqué au tableau (5-3), la résolution du problème aux valeurs propres nous a permis d'obtenir les pulsations propres de la plaque dont les trois premières fondamentales sont les suivantes : $\omega_1 = 194$ rad/s, $\omega_2 = 431$ rad/s et $\omega_3 = 976$ rad/s. Leur effet ainsi que de la pulsation de 158 rad/s qui correspond à celle d'une machine industrielle usuelle, sont illustrés sur les figures (5-13) et (5-14) en terme de la variation en fonction du temps du déplacement transversal au milieu de la plaque (w_c) et de la rotation selon l'axe y (θ_{yc}) au centre du côté simplement appuyé. La plaque est sollicitée comme dans la section précédente à savoir à la fois par la charge $F(t) = \frac{F_0}{4} \cos \Omega t$ qui est appliquée en son centre et par le déplacement imposé $\delta(t) = \delta_0 \cos \Omega t$ appliqué au mi-côté simplement appuyée ; $\delta_0 = 3.5$ mm ; l'amortissement ζ étant supposé nul. Nous remarquons que la réponse de la plaque sous l'effet de la première pulsation fondamentale $\omega_1 = 194$ rad/s est nettement plus amplifiée, ce qui peut bien s'apparenter en quelques sortes au phénomène de résonance. Nous constatons de même

que la réponse en considérant la deuxième pulsation est plus amplifiée en comparaison à la réponse enregistrée par la troisième pulsation donnant le même ordre de grandeur que la pulsation due à la machine industrielle soit $\Omega = 158 \text{ rad/s}$. A titre de comparaison, nous donnons au tableau (5-4) quelques valeurs obtenues au temps $t = 3.5 \text{ s}$.

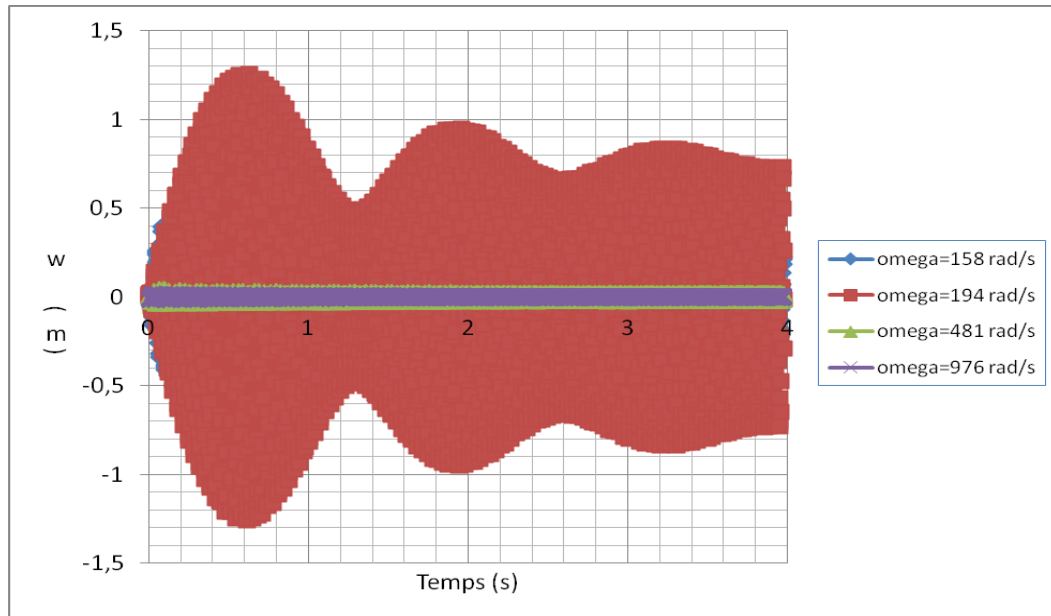


Fig.5-13. Variation en fonction du temps du déplacement transversal (w_c) du centre de la plaque pour diverses pulsations

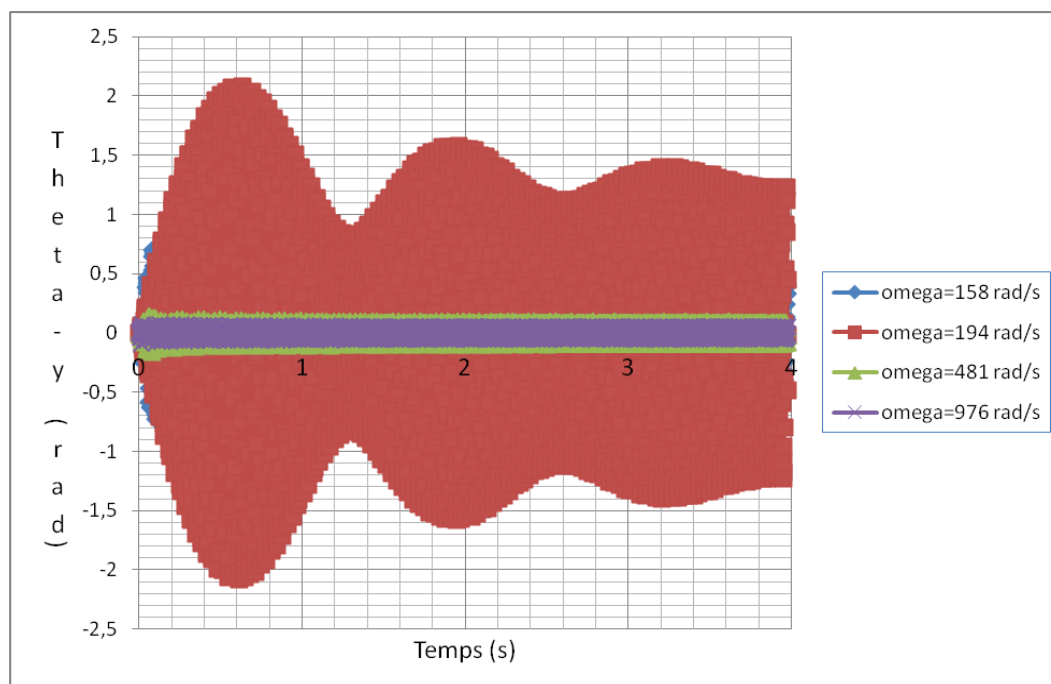


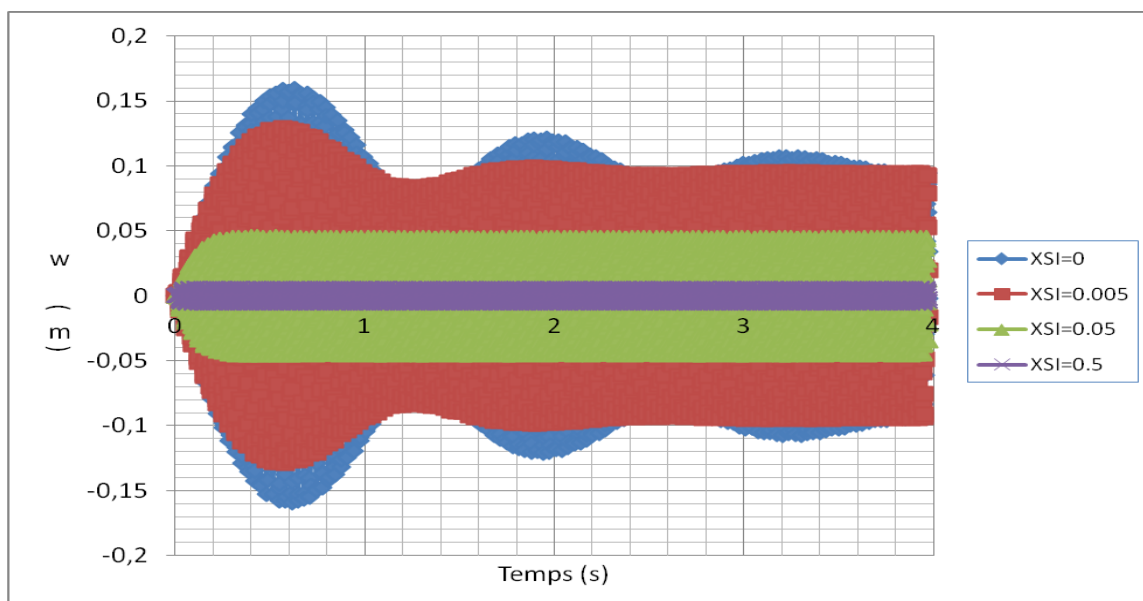
Fig.5-14. Variation en fonction du temps de la rotation selon y (θ_{yc}) au milieu du côté simplement appuyé de la plaque pour diverses pulsations

Tableau 5-4 Quelques valeurs obtenues au temps $t = 3.5s$ pour diverses pulsations

Pulsation (rad/s)	158	194	431	976
w_c (m)	0.1507	-0.725	-0.019	0.001
θ_{yc} rad)	0.2028	-1.22	-0.0736	0.0233
M_x (kN.m/m)	-252.	1290.	-349.	-83.1
M_y (kN.m/m)	-1320.	6770	-455.	-9.96
M_{xy} (kN.m/m)	427.	-1040	27.4	-135.

5-4-2 Influence du taux d'amortissement

Sur les figures (5-15) et (5-16), nous montrons la variation en fonction du temps du déplacement transversal au milieu de la plaque (w_c) et de la rotation (θ_{yc}) au centre du coté simplement appuyé en considérant les diverses valeurs des taux d'amortissement : $\zeta = 0, 0.005, 0.05$ et 0.5 . La plaque est ici supposée sollicitée uniquement par le déplacement imposé $\delta(t) = \delta_0 \cos \Omega t$; $\delta_0 = 3.5$ mm et où $\Omega = 194$ rad/s i.e en l'absence de la charge $F(t) = \frac{F_0}{4} \cos \Omega t$; $F_0 = 0$. En outre, la masse est considérée de nature consistante et les conditions initiales sont toujours nulles. Il est possible de remarquer que la partie transitoire de la réponse disparaît avec l'élévation du taux d'amortissement ζ . Après un certain temps, il ne reste que la réponse permanente. Notons toutefois que le temps de réponse pour un amortissement faible ($\zeta=0$) est très important. Dans notre cas, la réponse permanente a été obtenue après un temps de 3.5 s soit 1759 intervalles de pas de temps Δt . Nous remarquons par ailleurs que l'amplitude des déplacements augmente au fur et à mesure que le taux d'amortissement diminue. Au tableau (5-5), nous illustrons également quelques valeurs utiles pour des fins de comparaison.

**Fig.5-15.** Variation en fonction du temps du déplacement transversal (w_c) du centre de la plaque pour diverses valeurs d'amortissement

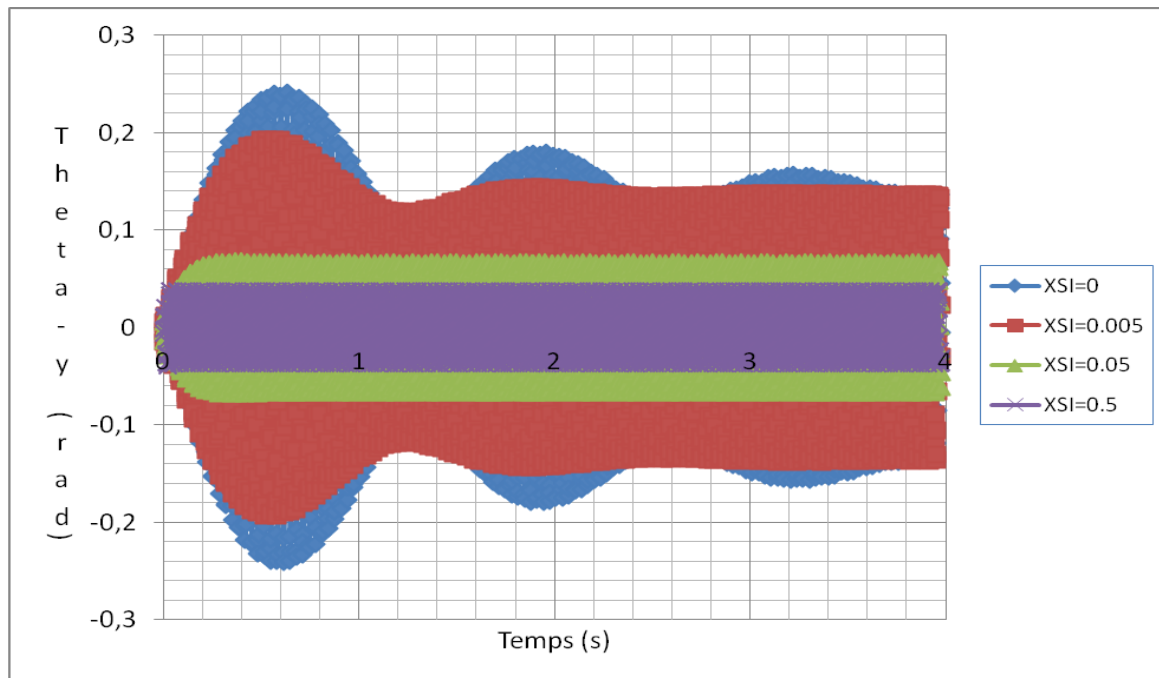


Fig.5-16. Variation en fonction du temps de la rotation selon y ($\theta_{y\zeta}$) au milieu du coté simplement appuyé de la plaque pour diverses valeurs d'amortissement

Tableau 5-5 Quelques valeurs obtenues au temps $t = 3.5s$ pour diverses taux d'amortissement

ζ	0	0.005	0.05	0.5
$w_{\zeta} (m)$	-93×10^{-3}	-7.51×10^{-3}	-9.19×10^{-3}	-1.75×10^{-3}
$\theta_{y\zeta} (rad)$	-1.35×10^{-1}	-1.05×10^{-1}	3.70×10^{-3}	3.42×10^{-2}
$M_x (kN.m/m)$	1630.	1320.	154.	21.8
$M_y (kN.m/m)$	-911.	745	136.	67.3
$M_{xy} (kN.m/m)$	-190.	-160	-46.2	-33.7

Chapitre 6

CONCLUSION

6-1 Rétrospective

Nous nous sommes principalement intéressés dans ce travail à l'élaboration d'un code de calcul capable d'analyser, par éléments finis, la réponse vibratoire des plaques minces élastiques linéaires en considérant une excitation extérieure dynamique type déplacement imposé de la forme cosinusoidale appliquée au niveau des appuis. Le système d'équations différentielles non stationnaires de mouvement d'équilibre ainsi obtenu est résolu à l'aide de l'algorithme d'intégration directe de Wilson- θ adapté pour tenir compte des effets des déplacements imposés ; Le temps étant subdivisé en intervalles élémentaires successifs Δt pris égal à une fraction de la période de l'excitation appliquée.

Les principales modifications apportées sont basées essentiellement sur le principe qu'une équation d'équilibre correspondant à un degré de liberté où un déplacement est imposé, doit être éliminé systématiquement du système d'équations d'équilibre globales formulé lors de l'opération d'assemblage des matrices de rigidité, de masse, d'amortissement et du vecteur force. Les mots respectifs "degré de liberté" et "déplacement imposé" sont employés ici dans le sens généralisé c'est-à-dire un degré de liberté peut désigner également ses dérivées par rapport au temps. Ainsi, un déplacement imposé peut signifier le déplacement proprement dit de translation ou de rotation mais peut signifier aussi une vitesse ou une accélération imposée.

Les équations générales d'équilibre sont dérivées en se basant sur le principe des travaux virtuels et sont discrétisées en utilisant un élément fini du type Kirchhoff à 4 degrés de liberté par nœud. Les matrices de masse, de rigidité et le vecteur de sollicitations nodales sont évalués par intégration numérique de Gauss. La matrice d'amortissement est évaluée comme étant une combinaison linéaire de la matrice masse et de la matrice de rigidité en fonction des coefficients de Raleigh afin de respecter les propriétés d'orthogonalité des modes propres. L'utilisation d'un amortissement proportionnel du type Rayleigh (α, β), nécessite le choix de deux fréquences de contrôle où sont considérés la première et la troisième fréquence propre de la plaque dans le but d'assurer un même taux d'amortissement pour les premiers modes.

Le programme principal s'intitule STRUDL5.FOR_version 2014 et enchaîne essentiellement l'exécution d'un ensemble de sous programmes dont chacun d'eux comprend une sousroutine qui calcule une fonction bien particulière. Il est écrit en langage d'ordinateur Fortran 90 et exécuté sous le compilateur du Developer Studio. Le fichier de données (STRUDL5.INP_version 2014) se compose de blocs fonctionnels qui sont sous le contrôle de l'utilisateur en appelant les cartes d'en-tête correspondantes à chaque bloc. La largeur de bande est calculée automatiquement en spécifiant le nombre de nœuds restreint et la matrice des degrés de liberté modifiée NF2. Ajoutons que les valeurs et les modes propres sont

calculés directement en appelant la subroutine JACOBI où les matrices masse et de rigidité doivent être stockées en ligne de ciel.

6-2 Résultats obtenus

Un exemple pratique permettant de calculer la réponse dynamique d'une plaque rectangulaire encastrée sur deux bords et simplement appuyée sur les deux autres, en régime forcé, a été illustré en considérant d'abord l'absence toute forme d'excitation d'appuis et ensuite en combinant l'action des déplacements imposés. Les résultats obtenus ont été comparé à ceux obtenus par voie manuelle en considérant une plaque avec un seul élément fini (1x1 élément ; cas académique le plus simple avec deux degrés de liberté au total). La comparaison dénote une concordance quasi-parfaite des résultats démontrant ainsi la fiabilité du programme de calcul ainsi développé.

Quant aux résultats de l'expérimentation paramétrique effectuée, nous pouvons en dégager les conclusions générales suivantes :

- L'amplitude maximale, pouvant bien correspondre dans une certaine mesure au phénomène de résonance de la plaque, se produit en considérant la première pulsation propre.
- La partie transitoire de la réponse de la plaque s'amortie en fonction du degré de l'élévation du taux d'amortissement et les déplacements dus à la partie permanente s'amplifient au fur et à mesure que le taux d'amortissement diminue.
- Convergence des résultats avec le raffinement du maillage i.e au fur et à mesure que le maillage le nombre d'éléments finis augmente (C'est la convergence dite de type h).

6-3 Recommandations futures

Ce qu'on pourrait enfin suggérer comme étude future pour l'amélioration de ce thème de travail est d'étendre la procédure de calcul adoptée aux déplacements imposés type échelon dans le but d'annexer un spectre de réponse lié à la variation de l'accélération en fonction du temps.

Références

- [1] Paultre P. Dynamique des structures application aux ouvrages de génie civil, Hermes Science, 2005.
- [2] Datt G. et Touzot G. Une présentation de la méthode des éléments fins ; Les Presses de l'Université Laval, Québec, 1981.
- [3] Datt G., Touzot G. et Lefrançois E. , Méthode des éléments finis, Hermès Lavoisier, 2005, Paris.
- [4] Frey F. and Studer M.A. Analyse des structures et milieux continus, Coques, EPFL, V5.
- [5] Clough R.W and Penzien J. , Dynamique des structures, Tome 1, Principes fondamentaux, Ed. Pluralis, 1980.
- [6] Paz M., Structural dynamics Theory and computation, Kluwer academic publisher, 4ed., 1997.
- [7] Batoz J.L. et Dhatt G., Modélisation des structures par éléments finis, V2, Hermes, 1995.
- [8] Timoshenko S. and Woinowsky-Krieger S., Theory of plates and shells, MacGraw-Hill company classic text book Reissue, Sd edition, NY, 1989.
- [9] Ventsel E. and Krauthammer T., Thin Plates and Shells- theory, analysis, and applications, Pennsylvania State University, Marcel Dekker Inc, NY, 2001.
- [10] Volterra E. and Zachmanoglou E.C., Dynamics of vibrations, Charles E. Merrill Books, Columbus, USA, 1965.
- [11] Piskounov N., Calcul differential et integral, Tome I, 11eme Ed. Moscou, 1987.
- [12] Yang T.Y., Finite element structural analysis, Prentice Hall Inc, 1986.
- [13] Bathe K.J., Finite element procedure in engineering analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1982.
- [14] Cook R.D., Concepts and applications of finite element method analysis, John Wiley & Sons, New York.
- [15] Zienkiewicz O.C., The finite element method, Mc Graw-Hill, 3rd Edition, New York.
- [16] Smith I.M. and griffiths D.V., Programming the finite element method, John Wiley & Sons, New York.
- [17] Hinton E. and Owen D.R.J.; An introduction to finite element computations, Pineridge Press Lim., Swansea (GB), 1979.
- [18] Smith I.M. and griffiths D.V., Programming the finite element method, 4th edition, John Wiley & Sons, 2004.
- [19] Lattari Kamel, Analyse par éléments finis de la réponse dynamique des plaques minces en utilisant les méthodes de superposition modales et d'intégration implicite de Wilson-θ, Magister en mécanique appliquée, Département de Mécanique, UMMTO, septembre 2013.
- [20] Hamdad M., Analyse par éléments finis de la réponse dynamique des solides plans sous l'action d'une excitation vibratoire forcée, Master académique, Mémoire soutenu dirigé par A. Sadaoui, Département de Génie civil, UMMTO, septembre 2011.

ANNEXE A

Tables de Yang pour le calcul des matrices de masse et de rigidité élémentaires

En référence à la numérotation des nœuds (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre), les éléments de la matrice de rigidité élémentaire k_{ij} et de la matrice masse élémentaire consistante m_{ij} d'un élément fini de Kirchhoff, rectangulaire conforme à 16 degrés de liberté (fig. 1) sont déduits directement des tables 1 et 2 ci-dessous en utilisant les relations suivantes :

$$k_{ij} = \frac{D}{a.b} \left[\alpha_1 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + \alpha_3 + \alpha_4 \nu \right] a^{\alpha_5} b^{\alpha_6} ; \quad m_{ij} = \frac{\rho h a b}{1225} \alpha_7 a^{\alpha_5} b^{\alpha_6}$$

où :

- a et b : dimensions de l'élément respectivement suivant l'axe des x et y
- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$: coefficients donnés dans la table 1
- $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$: rigidité flexionnelle de la plaque et h son épaisseur
- E, ν : module d'élasticité et coefficient de Poisson du matériau.

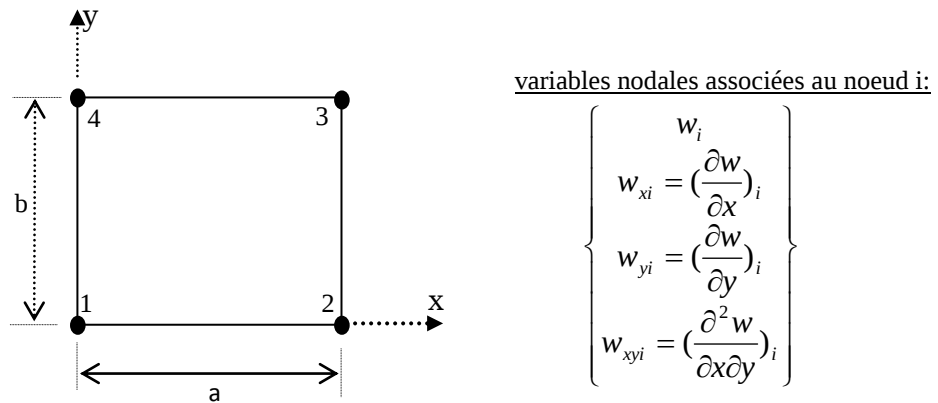


Fig. 1 Élément à 16 degrés de liberté

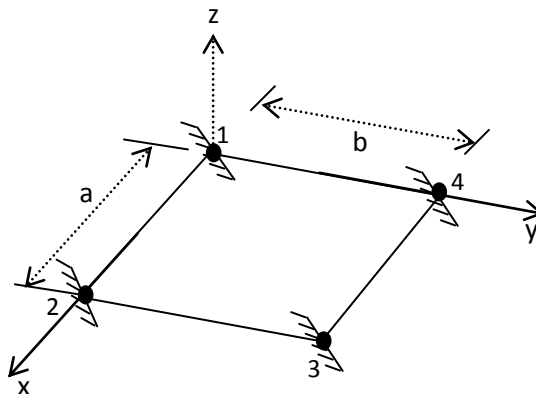


Fig. 2 Interprétation physique des éléments de la matrice de rigidité et de la matrice masse (système de retenue)

ligne i	colonne j	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
1	1	156/35	156/35	72/25	0	0	0	169
2	1	-156/35	54/35	-72/25	0	0	0	117/2
3	1	-54/35	-54/35	72/25	0	0	0	81/4
4	1	54/35	-156/35	-72/25	0	0	0	117/2
5	1	78/35	22/35	6/25	6/5	1	0	143/6
6	1	78/35	-13/35	6/25	0	1	0	-169/12
7	1	27/35	13/35	-6/25	0	1	0	-39/8
8	1	27/35	-22/35	-6/25	-6/5	1	0	33/4
9	1	22/35	78/35	6/25	6/5	0	1	143/6
10	1	-22/35	27/35	-6/25	-6/5	0	1	33/4
11	1	13/35	27/35	-6/25	0	0	1	-39/8
12	1	-13/35	78/35	6/25	0	0	1	-169/12
13	1	11/35	11/35	1/50	1/5	1	1	121/36
14	1	11/35	-13/70	1/50	1/10	1	1	-143/72
15	1	-13/70	-13/70	1/50	0	1	1	169/144
16	1	-13/70	11/35	1/50	1/10	1	1	-143/72
5	5	52/35	4/35	8/25	0	2	0	13/3
6	5	26/35	-3/35	-2/25	0	2	0	-13/4
7	5	9/35	3/35	2/25	0	2	0	-9/8
8	5	18/35	-4/35	-8/25	0	2	0	3/2
9	5	11/35	11/35	1/50	6/5	1	1	121/36
10	5	-11/35	13/70	-1/50	-1/10	1	1	143/72
11	5	13/70	13/70	-1/50	0	1	1	-169/144
12	5	-13/70	11/35	1/50	1/10	1	1	-143/72
13	5	22/105	2/35	2/75	2/15	2	1	11/18
14	5	11/105	-3/70	-1/150	-1/30	2	1	-11/24
15	5	-13/210	-3/70	-1/150	0	2	1	13/48
16	5	-13/105	2/35	2/75	0	2	1	-13/36
9	9	4/35	52/35	8/25	0	0	2	13/3
10	9	-4/35	18/35	-8/25	0	0	2	3/2
11	9	3/35	9/35	2/25	0	0	2	-9/8
12	9	-3/35	26/35	-2/25	0	0	2	-13/4
13	9	2/35	22/105	2/75	2/15	1	2	11/18
14	9	2/35	-13/105	2/75	0	1	2	-13/36
15	9	-3/70	-13/210	-1/150	0	1	2	13/48
16	9	-3/70	11/105	-1/150	-1/30	1	2	-11/24
13	13	4/105	4/105	8/225	0	2	2	1/9
14	13	2/105	-1/35	-2/225	0	2	2	-1/12
15	13	-1/70	-1/70	1/450	0	2	2	1/16
16	13	-1/35	2/105	-2/225	0	2	2	-1/12

Table A1 : détermination des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6,$

Cause

↑

w ₁	k _{1,1}												
w ₂	k _{2,1}	k _{1,1}											
w ₃	k _{3,1}	k _{4,1}	k _{1,1}										
w ₄	k _{4,1}	k _{3,1}	k _{2,1}	k _{1,1}									
θ _{x1}	k _{5,1}	-k _{6,1}	- k _{7,1}	k _{8,1}	k _{5,5}								
θ _{x2}	k _{6,1}	- k _{5,1}	- k _{8,1}	k _{7,1}	k _{6,5}	k _{5,5}							
θ _{x3}	k _{7,1}	- k _{8,1}	- k _{5,1}	k _{6,1}	k _{7,5}	k _{8,5}	k _{5,5}						
θ _{x4}	k _{8,1}	- k _{7,1}	-k _{6,1}	k _{5,1}	k _{8,5}	k _{7,5}	k _{6,5}	k _{5,5}					
θ _{y1}	k _{9,1}	k _{10,1}	-k _{11,1}	-k _{12,1}	k _{9,5}	- k _{10,5}	k _{11,5}	- k _{12,5}	k _{9,9}				
θ _{y2}	k _{10,1}	k _{9,1}	-k _{12,1}	-k _{11,1}	k _{10,5}	- k _{9,5}	k _{12,5}	- k _{11,5}	k _{10,9}	k _{9,9}			
θ _{y3}	k _{11,1}	k _{12,1}	- k _{9,1}	- k _{10,1}	k _{11,5}	- k _{12,5}	k _{9,5}	- k _{10,5}	k _{11,9}	k _{12,9}	k _{9,9}		
θ _{y4}	k _{12,1}	k _{11,1}	- k _{10,1}	- k _{9,1}	k _{12,5}	- k _{11,5}	k _{10,5}	- k _{9,5}	k _{12,9}	k _{11,9}	k _{10,9}	k _{9,9}	
θ _{xy1}	k _{13,1}	- k _{14,1}	k _{15,1}	- k _{16,1}	k _{13,5}	k _{14,5}	- k _{15,5}	- k _{16,5}	k _{13,9}	- k _{14,9}	- k _{15,9}	k _{16,9}	k _{13,13}
θ _{xy2}	k _{14,1}	- k _{13,1}	k _{16,1}	- k _{15,1}	k _{14,5}	k _{13,5}	- k _{16,5}	- k _{15,5}	k _{14,9}	- k _{13,9}	- k _{16,9}	k _{15,9}	k _{14,13}
θ _{xy3}	k _{15,1}	- k _{16,1}	k _{13,1}	- k _{14,1}	k _{15,5}	k _{16,5}	- k _{13,5}	- k _{14,5}	k _{15,9}	- k _{16,9}	- k _{13,9}	k _{14,9}	k _{15,13}
θ _{xy4}	k _{16,1}	- k _{15,1}	k _{14,1}	- k _{13,1}	k _{16,5}	k _{15,5}	- k _{14,5}	- k _{13,5}	k _{16,9}	- k _{15,9}	- k _{14,9}	k _{13,9}	k _{16,13}
	w ₁	w ₂	w ₃	w ₄	θ _{x1}	θ _{x2}	θ _{x3}	θ _{x4}	θ _{y1}	θ _{y2}	θ _{y3}	θ _{y4}	θ _{xy1}

↑

Effect

Table A2 détermination des éléments k_{ij} ou m_{ij}
 (concevant m_{ji}, il suffit de remplacer k par m)

ANNEXE B

Plaque rectangulaire encastrée sur deux bords et simplement appuyée sur les deux autres

- **Fichier d'entrée des données :**

```
Dynamic analysis of a rectangular plate with 2 edges clamped and 2 others simply supported  
under mid transverse concentrate cosinus load (acote-4_1x1.inp), Wilson-teta method  
[N,m,kg],strudl5x.for, modified on october 29th 2013, mesh: 1x1 elements, Mass consistent
```

```
!NXE,NYE,NN,NR,NGP,IMETH,ITYPE  
1,1,4,4,4,1,2  
!AA,BB,WIDTH,RHO,E,V,DR  
0.6,0.90,0.007,2500.0,7E10,0.25,0.0  
!ISTEP,THETA,NPRI,IPRN1  
10,1.4,1,1  
!CL: Noeud W,teta-x,teta-y, teta-xy  
1,0,0,0,0  
2,0,0,0,0  
3,1,0,1,0  
4,1,0,0,0  
! NL, ND  
1,1  
! Print indexes: NLX,NoeudX,IELX,IELY  
1,4,1,1,1  
! NTYPE  
1  
! Loading:Noeud, direction,amplitude,pulsation (NL times)  
4,1,2500.0,158.0  
! Displacent:Noeud,direction,amplitude, pulsation (ND times)  
2,1,0.0035,158.0  
end
```

- **Fichier de sortie:**

=====BEGINNING:COMMENTS/DESCRIPTION=====

Dynamic analysis of a rectangular plate with 2 edges clamped and 2 others simply
under mid transverse concentrate cosinus load (acote-4_1x1.inp), Wilson-teta met
[N,m,kg],strudl5x.for, modified on october 29th 2013, mesh: 1x1 elements, Mass c

=====END:COMMENTS/DESCRIPTION=====

Number of element columns in x direction, NXE= 1

Number of element in y direction NYE= 1

Number of nodes in the mesh NN= 4

Number of restrained nodes in the mesh NR= 4

Number of integrating points NGP= 4

Type of the method: IMETH= 1

[IMETH=1: Wilson-theta method IMETH=2: Modal superposition method]

Mass matrix computation ITYPE= 2

Lumped mass: ITYPE=1 Consistent mass: ITYPE=2

Dimension of elements in x direction AA= .6000

Dimension of elements in y direction BB= .9000

Width of the structure WIDTH= .0070

Material density RHO=2500.00000

Young modulus E= 70000000000.0000

Poisson ratio V= .2500

The damping ratio DR= .00000

Number of time integration ISTEP= 10

Time integration parameter THETA= 1.40

Print control-print every NPRI(I) steps NPRI= 1

Flag to print intermediate values (IPRN1 = 1: PRINT, IPRN1 = 0:NO NO PRINT) = 1

Matrix of nodal degrees of freedom NF:

1 0 0 0 0

2 0 0 0 0

3 1 0 2 0

4 3 0 0 0

There are 3 equations and the half-bandwidth is 2

Flexural rigidity of the plate: D= .2134E+04

Number of restrained degrees of freedom NCLT= 13

Number of degrees of freedom in the mesh N= 3

Number of loaded nodes (cosinusoidal function only) NL= 1

Number of nodes where displacements are imposed (cosinusoidal function only) ND= 1

Print loading or displaced number NLX= 1

Print displacement of the node NODX= 4 in the direction IDIRX= 1

Number of element (ielx,iely): moments where to be printed:

(at center of element) ielx= 1 iely= 1

Dynamic loadings are applied

NTYPE....= 1

Node number direction amplitude value pulsation value

4 1 2500.00000 158.00000

Nodal displacements are imposed

Node number direction amplitude value pulsation value

3 1 .00350 158.00000

Matrix of nodal degrees of freedom NF2:

1 0 0 0 0

2 0 0 0 0

3 0 0 1 0

4 2 0 0 0

Ordre des pulsations propres:

2 1

Valeurs des pulsations propres (Eigenvalues):

.3821E+05 .2350E+06

Impression des 6 premiers modes propres:

Modes propres: 1

.1335E+01 .7601E+00

Modes propres: 2

.6990E+01 -.6886E+00

print of the 6th first eigenvalues (pulsations):

195.480988706237100

484.774174229609700

ALPHA: 0.000000E+00 BETA: 0.000000E+00

time	load. function	disp.function	acceleration	velocity	displacement	
					Rot. of node 3	transl. of node 4
.1988E-02	.2378E+04	.3329E-02	.1597E+04	.1588E+01	-.3439E-02	.1052E-02
.3977E-02	.2023E+04	.2832E-02	.1024E+04	.4193E+01	-.1602E-01	.6988E-02
.5965E-02	.1469E+04	.2057E-02	.1702E+03	.5380E+01	-.8054E-02	.1679E-01
.7953E-02	.7725E+03	.1082E-02	-.5497E+03	.5003E+01	.2857E-01	.2735E-01
.9942E-02	.2213E-03	.3099E-09	-.1133E+04	.3330E+01	.7506E-01	.3582E-01
.1193E-01	-.7725E+03	-.1082E-02	-.1730E+04	.4840E+00	.1031E+00	.3981E-01
.1392E-01	-.1469E+04	-.2057E-02	-.2372E+04	-.3594E+01	.9233E-01	.3693E-01
.1591E-01	-.2023E+04	-.2832E-02	-.2841E+04	-.8778E+01	.4160E-01	.2479E-01
.1790E-01	-.2378E+04	-.3329E-02	-.2757E+04	-.1434E+02	-.3279E-01	.1773E-02
.1988E-01	-.2500E+04	-.3500E-02	-.1824E+04	-.1890E+02	-.1081E+00	-.3158E-01

TIME XMOMX XMOMY XMOMXY

.3977E-02	.4749E+01	.1899E+02	.4375E+02
.5965E-02	.2387E+01	.9549E+01	.1063E+03
.7953E-02	-.8470E+01	-.3388E+02	.1466E+03
.9942E-02	-.2225E+02	-.8900E+02	.1638E+03
.1193E-01	-.3055E+02	-.1222E+03	.1697E+03
.1392E-01	-.2737E+02	-.1095E+03	.1677E+03
.1591E-01	-.1233E+02	-.4933E+02	.1426E+03
.1790E-01	.9720E+01	.3888E+02	.6683E+02
.1988E-01	.3204E+02	.1282E+03	-.7915E+02