

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

**Mémoire de Fin d'Etudes
de MASTER ACADEMIQUE**

Domaine : **Sciences et Technologies**

Filière : **Génie électrique**

Spécialité : **Entraînements Electriques**

Présenté par

Thiziri KABECHE

Thème

**Etude Théorique Et Expérimentale D'un
Capteur à Induction Electromagnétique**

Mémoire soutenu publiquement le 26/09/2017 devant le jury composé de :

Mr Farid HOCINI

MCB, UMMTO, Président

Mr Hassane MOHELLEBI

Professeur, UMMTO, Encadreur

Mr Samy Hassani OULD OUALI

MCB, UMMTO, Examineur

Remerciements

Je remercie, en premier lieu, Dieu de m'avoir permis d'accomplir ce travail à temps.

Je tiens à remercier mon promoteur Monsieur MOHELLEBI Hassane, professeur à l'UMMTO pour son aide inestimable et ses orientations qui m'ont été d'un grand soutien. Je salue son humilité et simplicité aux quelles je n'ai pas encore rencontré d'égale.

Mes remerciements vont aussi aux membres du jury qui ont accepté de corriger ce modeste travail.

Je remercie particulièrement Monsieur HAROUZ Amirouche, doctorant à l'UMMTO pour son aide, ses orientations, sa disponibilité et ses conseils avisés. Qu'il trouve ici ma profonde reconnaissance.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

Aux deux personnes les plus chères à mon cœur : mes parents Amar et Ouiza qui n'ont lésiné sur aucun moyen dans le but de ma réussite. Je les remercie pour leurs innombrables sacrifices, je vous serai éternellement reconnaissante.

A ma très chère grand-mère Ouardia dont je salue le courage et à l'amour inconditionnel qu'elle nous porte.

A la mémoire de « Jeddi Mouh » qui était une école où on puisait les valeurs et la sagesse. Je te porterai dans mon cœur à jamais.

A mes très chères sœurs : Thanina, Mazgha, Damia et Milda.

A mes tantes : Dehbia et Chauha ainsi que leurs enfants : Anis, Tahar et Liniza.

A mes ami(e)s : Lydia, Sandra, Mouloud, Nassima et Rabah et en particulier Djilalli qui a toujours été là pour moi.

Sommaire

Sommaire

Introduction générale	1
------------------------------------	---

Chapitre I

Notions sur le contrôle non destructif et généralités sur les capteurs

I.1 Introduction.....	3
I.2 Le contrôle non destructif.....	4
I.2.1 Définition du CND.....	4
I.2.2 Utilisations.....	4
I.2.3 Différents défauts.....	5
I.2.3.1 Défauts de surface	5
I.2.3.2 Défauts internes.....	5
I.2.4 Sources de défauts	5
I.2.5 Différentes techniques du CND.....	6
I.2.5.1 Examen visuel.....	6
I.2.5.2 Ressuage.....	7
I.2.5.3 Magnétoscopie.....	8
I.2.5.4 Radiographie.....	9
I.2.5.5 Thermographie infrarouge.....	10
I.2.5.6 Ultrasons.....	11
I.2.6 Avantages et inconvénients des techniques du CND.....	12
I.3 Les capteurs.....	14
I.3.1 Définition d'un capteur	14
I.3.2 Paramètre du capteur	14
I.3.2.1 Précision	14
I.3.2.2 Sensibilité.....	14
I.3.2.3 Etendue de mesure.....	14
I.3.2.4 Linéarité.....	14
I.3.2.5 Fidélité.....	15
I.3.3 Domaines d'utilisation des capteurs	15
I.3.4 Classification des capteurs	15
I.3.4.1 Classification selon la géométrie	15

a. La bobine encerclante	15
b. Sonde ponctuelle (palpeur).....	16
c. Bobine plate.....	17
d. Sonde interne	17
I.3.4.2 Classification selon la fonction.....	18
a. Capteur à double fonction.....	18
b. Capteur à fonction séparées	18
I.3.4.3 Classification selon le mode de contrôle	19
a. Mode absolu.....	19
b. Mode compensé	19
c. Mode différentiel	19
I.3.5 Différents types de capteurs.....	20
I.3.5.1 Capteur de position.....	20
a. Capteur optique.....	20
b. Capteur inductifs.....	21
c. Sonde de Hall.....	22
d. Capteur linéaire à transformateur différentiel	22
e. Capteur capacitif.....	23
f. Capteur de température	24
g. Capteur d'humidité.....	25
h. Capteur à ultrasons	26
I.3.6 Les capteurs les plus utilisés en CND.....	27
I.4 Conclusion.....	28

Chapitre II

Lois fondamentales de l'électromagnétisme

II.1 Introduction	29
II.2 Historique.....	29
II.3 Loi classique de l'électromagnétisme	29
II.3.1 Loi d'Ampère.....	29
II.3.2 Loi de Faraday-Lenz.....	30
II.3.3 Loi de Biot et Savart	30
II.3.4 Flux magnétique.....	31

II.3.5	Force de Laplace.....	31
II.3.6	Equation de Maxwell.....	32
II.3.7	Relations constitutives du milieu.....	33
II.3.7.1	Propriété conductrice (Loi d'Ohm).....	33
II.3.7.2	Propriétés magnétiques	33
II.3.7.3	Propriétés diélectriques	34
II.3.8	Equations de continuité	34
II.3.9	Relations de passage	34
II.3.10	Conditions aux limites	36
II.4	Electromagnétisme en régime quasi-stationnaire.....	37
II.4.1	Hypothèses simplificatrices.....	37
II.5	Formulation en potentiel vecteur magnétique.....	37
II.6	Equations aux dérivées partielles	39
II.6.1	Equations de type elliptique.....	39
II.6.2	Equations de type parabolique	39
II.6.3	Equation de type hyperbolique	40
II.7	Equations des différentes régions d'un Système électromagnétique.....	40
II.7.1	Equation dans le vide.....	40
II.7.2	Equation dans l'inducteur.....	40
II.7.3	Equation dans la charge (l'induit).....	40
II.8	Conclusion.....	41

Chapitre III

Méthodes numériques

III.1	Introduction.....	42
III.2	Méthodes numériques.....	42
III.2.1	Méthode des éléments finis.....	42
III.2.2	Etapas de résolution par la MEF.....	43
III.2.3	Principe de la méthode variationnelle.....	43
III.2.4	Méthode des résidus pondérés.....	44
III.2.4.1	Principe de la méthode.....	44
III.2.4.2	Différentes méthodes déduites des résidus pondérés.....	45
III.2.5	La discrétisation.....	46

III.2.5.1	Eléments finis réels.....	46
III.2.5.2	Fonction d'interpolation.....	48
III.2.5.3	Fonction d'interpolation sur l'élément.....	49
III.2.5.3	Fonction d'approximation sur le domaine.....	50
III.3	Formulation éléments finis des équations électromagnétiques.....	50
III.3.1	Equation magnétostatique.....	50
a.	Cas cartésien.....	50
b.	Cas axisymétrique	52
III.3.2	Equation magnétodynamique.....	54
a.	cas cartésien.....	54
b.	Cas axisymétrique	56
III.4	Conclusion.....	57

Chapitre IV

Application et résultats

IV.1	Introduction.....	58
IV.2	Caractéristiques géométriques et électromagnétiques du système.....	58
IV.3	Formulation électromagnétique des régions.....	59
IV.4	Domaine d'étude	59
IV.5	Maillage du domaine.....	60
IV.6	Résultats et interprétations.....	61
IV.6.1	Déplacement.....	65
•	Premier déplacement.....	65
•	Deuxième déplacement.....	69
•	Troisième déplacement.....	72
IV.7	Conclusion.....	76
Conclusion générale		77

Introduction générale

Les processus industriels et les pièces fabriquées sont devenus de plus en plus complexes tout au long du siècle dernier. Le CND, dernière étape du processus industriel, vise à contrôler sans endommager la qualité des pièces, en particulier mécaniques. Le CND est devenu une nécessité industrielle, la défaillance de ces pièces pouvant entraîner des conséquences plus ou moins importantes. Par exemple, dans les domaines aéronautique et nucléaire, ces conséquences s'expriment souvent en termes de sécurité des personnes ou de dégâts environnementaux. L'enjeu du CND est aussi d'ordre économique: la rapidité et la fiabilité des techniques employées sont capitales pour la réduction des coûts de maintenance et l'optimisation de la durée de vie des installations.

La recherche de défauts peut être opérée soit lors de la fabrication des pièces, soit lors de leur maintenance en cours de vie. Dans le premier cas, il s'agit souvent de détecter les problèmes et de trier les pièces défectueuses en vue d'une éventuelle élimination ou d'un ajustement. Dans le second cas, il est préférable de préciser la nature et les dimensions des défauts, dans le but de déterminer si la pièce peut être remise en service ou non. Dans les deux cas, l'inspection des défauts doit être fiable, reproductible, relativement rapide et avec un coût aussi faible que possible [28].

Après avoir effectué une recherche bibliographique, on a procédé à une prise des caractéristiques de la pièce contenant un défaut et cela en établissant un programme sous MATLAB en utilisant la méthode des éléments finis.

Pour le bon établissement de ce travail, différents procédés ont été mis en œuvre, utilisant des capteurs magnétique à haute sensibilité comme dispositif de mesure.

Le manuscrit est présenté comme suit :

Le premier chapitre comporte des notions sur le contrôle non destructif et les différentes techniques de ce dernier ainsi que les différents capteurs qui peuvent être mis en disposition afin de mesurer les différentes grandeurs physiques.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des différentes lois de l'électromagnétisme.

Dans le troisième chapitre sont développées les méthodes de résolution des équations électromagnétiques. Nous nous sommes intéressés au développement de la méthode des éléments finis.

Le quatrième chapitre est dédié à la présentation de l'application effectuée sur MATLAB et aux résultats obtenus.

Chapitre I

*Notions sur le contrôle non
destructif et généralités sur les
capteurs*

I.1 Introduction

Les contrôles non destructifs sont nés de la nécessité devant laquelle se sont trouvés les ingénieurs, de devoir garantir la sécurité des personnes et des matériels. Ainsi, les industries de pointe telles l'industrie aéronautique et l'industrie nucléaire ont implanté des techniques sophistiquées pour « débusquer » dans le stade final de l'élaboration des produits, les dernières imperfections de la matière [14].

Aujourd'hui, le contrôle non destructif est devenu un outil indispensable en contrôle de la qualité des produits. Ces techniques permettent de détecter les hétérogénéités et anomalies d'une pièce, sans altérer leur utilisation future. En effet, l'objectif du CND est de mettre en évidence les défauts, tout en préservant l'intégralité des produits contrôlés [1].

Les techniques de CND sont utilisées dans le but de contrôler la qualité et afin de s'assurer de la conformité et de la normalité d'une production, puis de garantir la tenue en service des pièces et des ensembles fabriqués. Pour que cela se produise, on a recours à mesurer différents types de grandeurs physiques, puis les traiter et les exploiter. Pour cela, il est nécessaire de les transporter sous forme d'un signal électrique.

C'est le rôle d'un capteur d'assurer cette duplication de l'information en la transférant du point même où se fait la mesure de la grandeur physique (non électrique) sur une grandeur électrique (courant, tension, charge, ou impédance ...) [3].

Dans ce premier chapitre, on reprendra, tout d'abord, les bases théoriques de la détection des défauts. Ensuite, on présentera les principes et la mise en œuvre des six principales familles de procédés du contrôle non destructif. Au final, on donnera un aperçu général des capteurs employés par les techniques du CND.

I.2 Le contrôle non destructif

I.2.1 Définition du CND

Le contrôle non destructif (CND) est un ensemble de méthodes qui permettent de caractériser l'état d'intégrité de structures ou de matériaux, sans les dégrader, soit au cours de la production (les pièces qui sortent de la fonderie ne sont jamais exemptes de défauts), soit en cours d'utilisation, soit dans le cadre de la maintenance (apparition de défaut). Il faut, donc, déterminer quelle taille de défauts est acceptable de façon empirique à la casse (destruction) et ensuite pouvoir les détecter sans détruire la pièce. On parle aussi d'essais non destructifs (END) ou examens non destructifs.

En ce sens, le contrôle non destructif (CND) apparaît comme un élément majeur du contrôle de la qualité des produits. Il se différencie de l'instrumentation de laboratoire et industrielle puisque l'objet est de détecter des hétérogénéités et anomalies plutôt que de mesurer des paramètres physiques tels que le poids ou les cotes d'une pièce [1].

I.2.2 Utilisations

Ces méthodes sont très utilisées dans :

- l'industrie automobile (contrôle des blocs moteurs)
- l'industrie pétrolière (pipelines, tubes, barres, soudures, réservoirs)
- l'industrie navale (contrôle des coques)
- l'aéronautique (poutres, ailes d'avion, nombreuses pièces moteurs, trains d'atterrissage, etc.)
- l'aérospatiale et l'armée
- l'industrie de l'énergie (réacteurs, chaudières, tuyauterie, turbines, etc.)
- le ferroviaire en fabrication et en maintenance notamment pour les organes de sécurité (essieux, roues, bogies)
- l'inspection alimentaire
- l'archéologie.

I.2.3 Différents défauts

Détecter un défaut dans une pièce, c'est physiquement, mettre en évidence une hétérogénéité de matière, une variation locale de propriété physique ou chimique préjudiciable au bon emploi de celle-ci. Cela dit, on a l'habitude de classer les défauts en deux grandes catégories liées à leur emplacement : les défauts de surface, les défauts internes [1].

I.2.3.1 Défauts de surface

Les défauts de surface, accessibles à l'observation directe mais pas toujours visibles à l'œil nu, peuvent se classer en deux catégories distinctes : les défauts ponctuels et les défauts d'aspects.

- Défauts ponctuels, ne sont pas visibles à l'œil nu, représentent les défauts les plus nocifs sur le plan technologique puisqu'il s'agit de criques, piqûres, fissures, craquelures, généralement apte à provoquer à terme la rupture de la pièce, en initiant par exemple des fissures de fatigue.
- Défauts d'aspects, visibles à l'œil nu, rendent le produit inutilisable (rugosité, surépaisseur, taches diverses) [1].

I.2.3.2 Défauts internes

Les défauts internes sont des hétérogénéités de natures, de formes, de dimensions variées, localisées dans le volume du corps à contrôler.

Dans les industries des métaux, il s'agit de criques internes, de porosités, des soufflures, d'inclusions diverses susceptibles d'affecter la santé des pièces moulées, forgées, laminées, soudées. Dans d'autres cas, il s'agit de la présence d'un corps étranger dans le produit emballé [3].

I.2.4 Sources de défauts

Les sources de défaut sont diverses, on en cite quelques unes :

- Défauts de moulage

- Défauts de soudage ou de brasage
- Détection de fissuration (interne ou débouchante)
- Endommagement (délaminage) de composites
- Hétérogénéité de matériaux
- Défauts de collage :
 - absence de colle
 - défaut d'adhésion
 - fissuration de colle
- Contrôle en ligne
- Électronique : défauts de fixation de composants [4].

I.2.5 Différentes techniques du CND

Les contrôles non destructifs peuvent se classer en trois catégories :

- Les méthodes dites de surface pour lesquelles l'anomalie est localisée, soit en surface, soit dans une zone proche de la surface (Examen visuel, le ressuage, la magnétoscopie, les courants induits).
- Les méthodes dites volumiques pour lesquelles l'anomalie est localisée dans le volume de la pièce (Ultrasons, rayonnements ionisants).
- Les méthodes complémentaires (Étanchéité, thermographie, émission acoustique) [5].

I.2.5.1 Examen visuel

L'examen visuel est le premier des procédés du contrôle non destructif, il est essentiel lors de ce dernier.

L'état extérieur d'une pièce peut donner des informations essentielles sur l'état de celle-ci : des défauts évidents (cassures, pliures, fissures ouvertes, ...)

L'examen visuel est le plus simple et le plus générale des procédés puisque c'est aussi le point final de la majorité des autres procédés non destructifs.

L'inspection visuelle d'un objet, d'une structure, d'un assemblage telle qu'une soudure permettra de guider un observateur expérimenté dans la définition d'une autre technique.

I.2.5.2 Ressuage

Cette méthode complète l'examen visuel en faisant apparaître des défauts de surface dans un contraste coloré ou fluorescent. Son principe est relativement simple et se déroule en plusieurs étapes. La première consiste à bien nettoyer la pièce à contrôler. Un liquide coloré ou fluorescent dit « pénétrant » est ensuite appliqué sur la surface à contrôler. Il va s'infiltrer à l'intérieur des anomalies (fissures, porosités...).

L'excès du pénétrant est ensuite éliminé par un lavage adapté. La surface est alors recouverte d'une fine couche de « révélateur » qui absorbe le pénétrant contenu dans les anomalies et donne une tache colorée en surface plus large que l'anomalie, permettant ainsi de la localiser. On dit alors que le révélateur fait « ressuier » le pénétrant (figure I.1). Ces indications sont alors visibles à l'œil nu. Dans certaines industries, on utilise un pénétrant fluorescent qui est révélé par un éclairage sous UV [6].

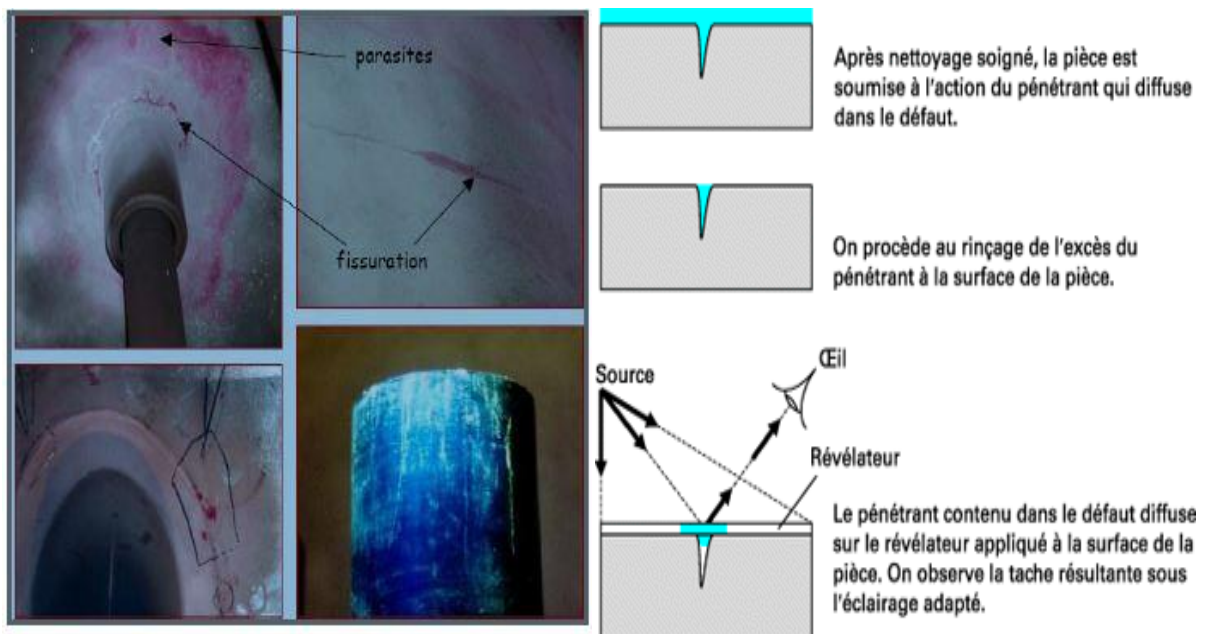


Figure I.1: Principe du ressuage

I.2.5.3 Magnétoscopie

L'examen magnétoscopique ne s'applique que sur des matériaux ferromagnétiques. Il consiste à soumettre la pièce à contrôler à un champ magnétique alternatif ou continu. À la rencontre d'un obstacle (défaut), les lignes de champ magnétique dans cette pièce s'épanouissent latéralement, créant ainsi un champ de fuite qui est matérialisé au moyen d'un révélateur constitué de particules ferromagnétiques.

La magnétoscopie est une technique qui permet d'inspecter l'ensemble d'une pièce en une seule opération, comme elle permet de mettre en évidence aussi bien les défauts débouchant que sous-jacents. La sensibilité de cette méthode est dépendante de l'orientation du défaut par rapport à la direction générale des lignes d'induction. En effet, les défauts sont d'autant mieux détectés lorsqu'ils sont orientés dans une direction perpendiculaire aux lignes de champ.

Cette méthode ne permet pas une appréciation de la profondeur et l'interprétation dans la phase de révélation reste parfois très délicate [7].

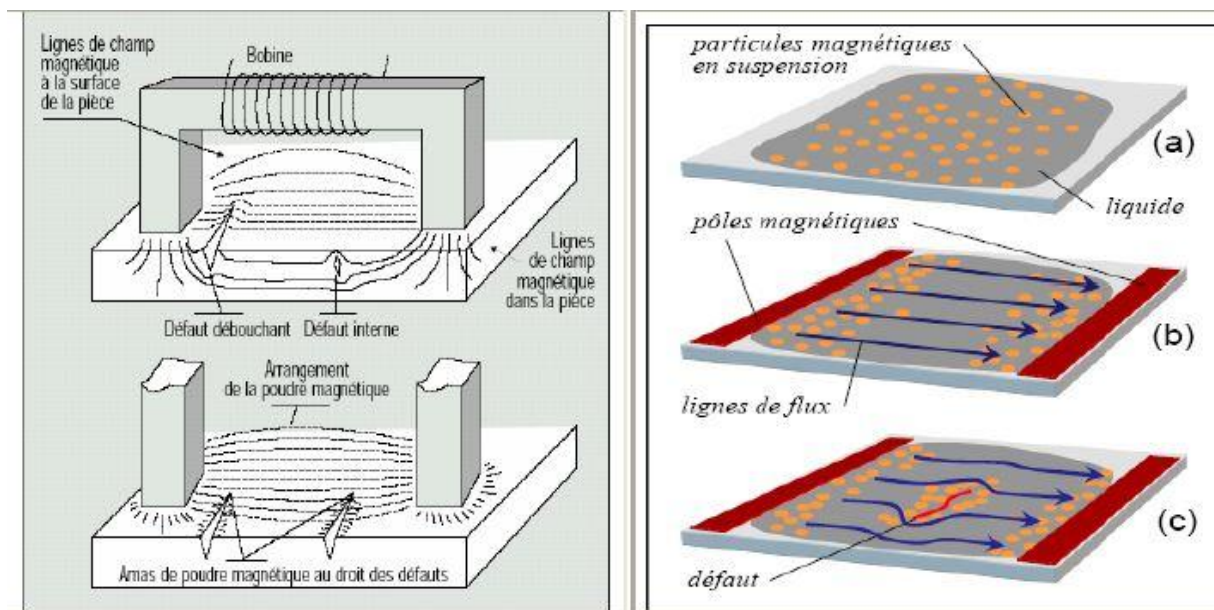


Figure I.2: principe de la magnétoscopie

I.2.5.4 Radiographie

Le principe de la radiographie est le même que pour le domaine médical. La méthode met à profit l'absorption des rayonnements électromagnétique ionisants par la matière. L'examen de la structure ou de l'état interne d'un objet par radiographie consiste à le faire traverser par un rayonnement électromagnétique de très courte longueur d'onde (rayon X ou γ) et à recueillir le rayonnement résiduel non absorbé sur un récepteur approprié, un film dans la plupart des cas, comme l'illustre la figure I.3.

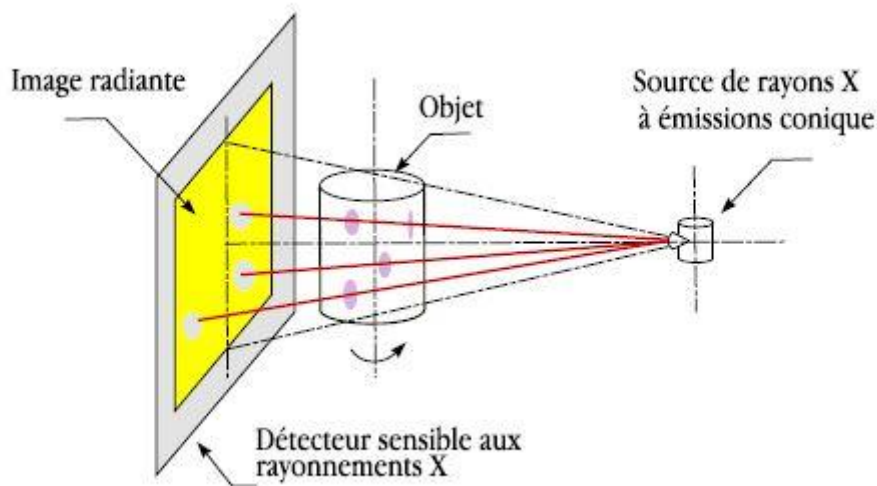


Figure I.3 : Principe de la radiographie

De par son principe, la radiographie ne permet pas d'avoir des informations sur la localisation du défaut en profondeur dans la pièce examinée. Pour cela, il faut réaliser plusieurs clichés sous des angles de tir différents, ce qui n'est pas toujours possible. L'autre moyen est la tomographie industrielle. Cette dernière a le même principe que le scanner médical. Elle consiste à reconstruire une coupe de la pièce par des algorithmes complexes à partir d'une succession d'acquisitions suivant des angles différents. La répétition de ce processus selon différentes hauteurs de tir permet d'obtenir une image 3D virtuelle complète de l'objet (Figure I.4) [6].

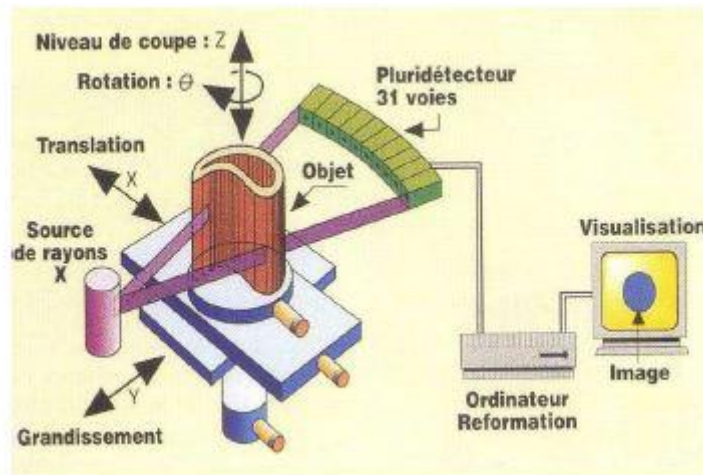


Figure1.4 : Principe de la tomographie X

L'essor de cette méthode est essentiellement dû aux progrès de l'informatique et à l'augmentation des capacités de traitement, que ce soit dans le domaine médical ou industriel.

Le champ d'application de la radiographie est très vaste ; c'est en effet la technique retenue lorsqu'il s'agit de mettre clairement en évidence et de dimensionner des hétérogénéités à l'intérieur des objets de toute nature, aussi bien au stade de la fabrication qu'à celui des contrôles de maintenance [6].

Les inconvénients principaux de cette technique sont :

- Coût de mise en œuvre des dispositifs et procédures de protection du personnel
- Règlementation souvent très contraignante (transport et stockage des sources radioactives,...)

I.2.5.5 Thermographie infrarouge

La thermographie infrarouge est utilisée pour détecter des cavités, décollements, pénétration de liquide, contamination, ou la présence de corps étrangers [11].

La méthode de contrôle thermique consiste à exciter un matériau ou une structure par un apport d'énergie (mécanique, chauffage par induction, air chaud...). La diffusion de la chaleur dans le matériau et l'impact qu'elle a sur la distribution de la température sur la surface renseigne sur la propriété thermo physique des matériaux et sur d'éventuels défauts à l'aide d'une caméra infrarouge.

Par exemple, l'inspection thermographique d'une installation se fait dans les conditions normales de travail. Les résultats d'examen sont implantés sur un PC (figure I.5). Les points anormalement chauds dans les tableaux électriques seront analysés avec le technicien de maintenance. Ces points chauds sont généralement l'indice d'une panne latente. En détectant précocement ces anomalies, on peut organiser les réparations et éviter les arrêts de production, l'inspection périodique est, donc, un outil idéal de maintenance préventive [7] [8].

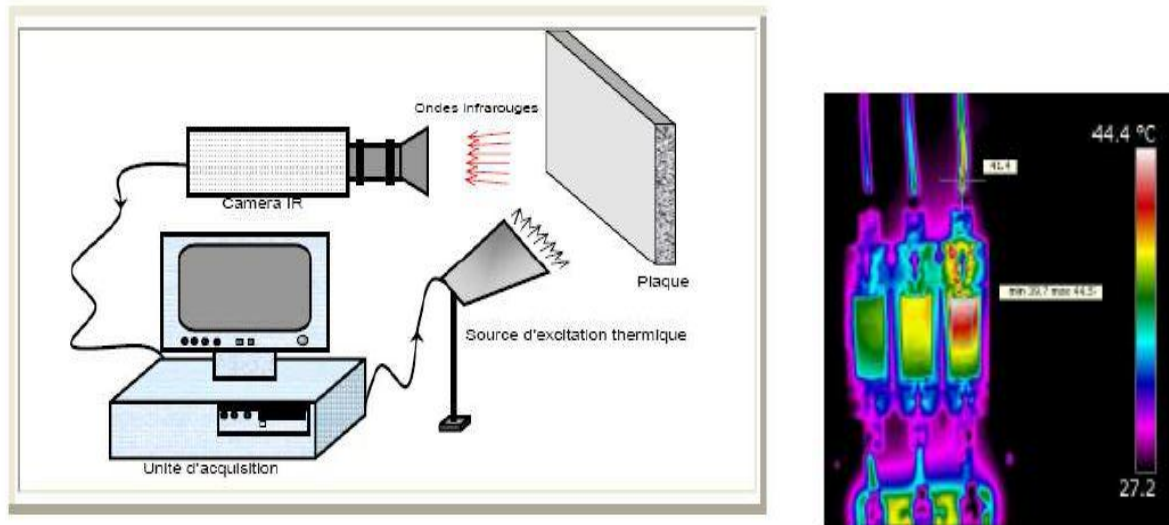


Figure I.5: Principe de la thermographie

I.2.5.6 Ultrasons

Les ultrasons sont des vibrations mécaniques qui se propagent dans la matière.

Le principe consiste à émettre une onde ultrasonore (par un transducteur) qui se propage dans la pièce à contrôler et se réfléchit, à la manière d'un écho, sur les obstacles qu'elle rencontre (défauts, limites de la pièce). Les échos sont analysés sur un écran ou traités dans une chaîne de mesure. Le signal est maximal lorsque le défaut est perpendiculaire aux ondes émises (figure I.6) [6].

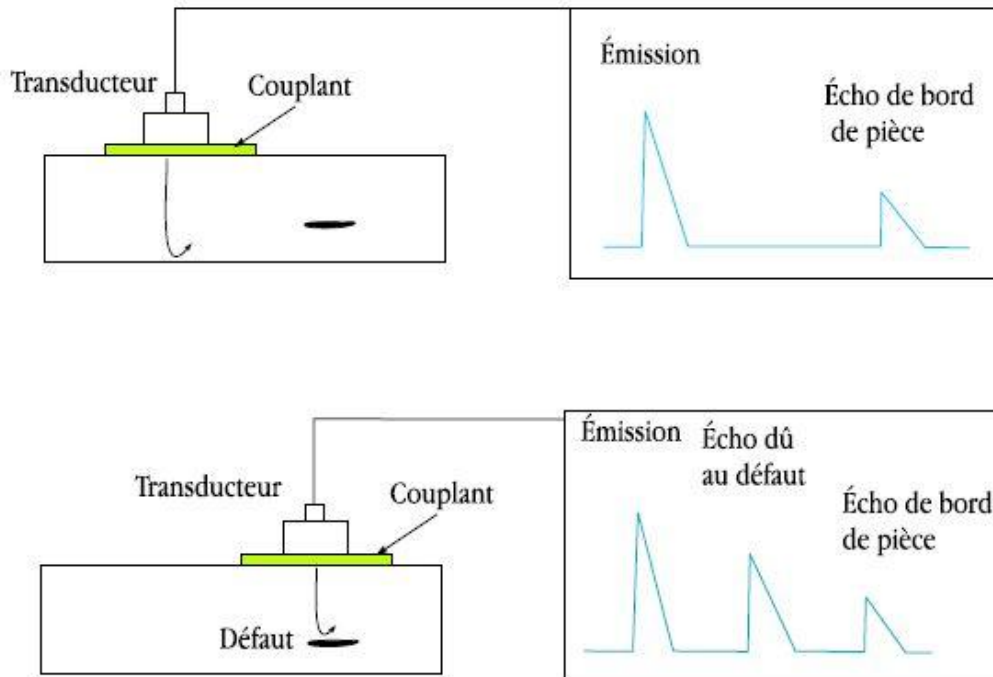


Figure I.6 : Principe de l'ultrason

Le contact entre le transducteur et la cible n'est jamais parfait ; il existe une couche d'air les séparant. La quasi-totalité de l'énergie émise par le transducteur à l'interface air-matériau ne pénètre pas à l'intérieur du matériau. Il y a ainsi nécessité de déposer un couplant (eau, huile par exemple) entre le transducteur et le matériau.

I.2.6 Avantages et inconvénients des techniques du CND

Le contrôle de la qualité des matériaux composites est régulièrement effectué en utilisant des techniques telles que les ultrasons, la radiographie ou la thermographie infrarouge. Ces techniques présentent toutefois certaines limitations pour le contrôle non destructif de matériaux composites. Ces limitations ont trait à la précision, la sensibilité, la fidélité de la mesure, la reproductibilité du signal et parfois aux difficultés de calibration [11].

Le tableau I.1 résume les avantages et inconvénients des techniques de CND les plus courantes.

Chapitre I Notions sur le contrôle non destructif et généralités sur les capteurs

Méthode	Avantages	Inconvénients
Ressuage	Simple à mettre en œuvre. Méthode particulièrement adaptée à la détection de fissures en surface sur des matériaux non ferreux. Coût minimum.	Ne concerne que les défauts de surface. Préparation de la surface critique. Nettoyage des pièces nécessaires.
Magnétoscopie	Simple d'utilisation. Permet d'inspecter rapidement de grandes surfaces ou volumes. Instrument peu onéreux.	Restreint aux matériaux ferromagnétiques. Faible pénétration. Nécessite de forts courants, ce qui entraîne le besoin de démagnétiser la pièce après évaluation.
Radiographie	Utilisable quelque soit le matériau. Détection surfacique et volumique. Possibilité d'inspecter des géométries complexes et des structures multicouches sans désassemblage.	Complexe à mettre en œuvre. Besoin d'accéder au deux côtés de la structure. Potentiellement dangereux pour la santé.
Thermographie	Possibilité d'effectuer un contrôle sans contact et automatisable.	Lenteur du contrôle. Coût de l'investissement. Difficulté de mise en œuvre des étapes d'inversion pour établir le diagnostic.
Ultrasons	Importante profondeur de pénétration pour la mesure de défauts. Bonne caractérisation de défaut (taille, forme, position).	Complexe à mettre en œuvre. La surface doit être accessible à la sonde. Pièces fines complexe à inspecter. Nécessité d'un couplant.

Tableau I.1 : Les avantages et inconvénients des techniques de CND les plus courantes [11]

I.3 Les capteurs

I.3.1 Définition d'un capteur

Un capteur est un organe de prélèvement d'information qui élabore à partir d'une grandeur physique (information entrante) une autre grandeur physique d'une nature différente (la plus part du temps électrique). Cette grandeur, représentative de la grandeur prélevée, est utilisable à des fins de mesure de commande [3].

I.3.2 Paramètre du capteur

Comme beaucoup de composants ou ensembles électroniques, il existe un certain nombre de paramètres électriques communs à tous les capteurs. Ils caractérisent les performances et donc leurs utilisations dans un environnement donné [3].

I.3.2.1 Précision :

La précision d'un capteur est caractérisée par l'incertitude absolue obtenue sur la grandeur électrique obtenue à la sortie du capteur. Elle s'exprime en fonction de la grandeur physique mesurée.

I.3.2.2 Sensibilité :

Ce paramètre caractérise l'aptitude du capteur à détecter la plus petite variation de la grandeur à mesurer.

I.3.2.3 Etendue de mesure :

Cette caractéristique donne la plage de fonctionnement du capteur pour la grandeur à mesurer.

I.3.2.4 Linéarité

Un capteur est dit linéaire s'il représente la même sensibilité sur toute l'étendue de sa plage d'emploi.

I.3.2.5 Fidélité

Un capteur est dit fidèle si le signal qu'il délivre ne varie pas pour une série de mesures concernant la même valeur de la grandeur d'entrée.

I.3.3 Domaines d'utilisation des capteurs [3]

MECANIQUE	ELECTRIQUE	CLIMATIQUE	DIVERS
Indication de présence	Tension	Température	Rayonnement
Déplacement linéaire	Courant	Humidité	Luminosité
Déplacement angulaire	Puissance	Vent	Niveau acoustique
Vitesse	Fréquence	Pluviométrie	Célérité acoustique
Accélération	Champ électrique	Ensoleillement	Champ magnétique
Force	Charge	Durée d'insolation	Débit
Pression	/	Durée de pluie	Couleur
Couple	/	/	Salinité

Tableau I.2 : Domaines d'utilisation des capteurs

I.3.4 Classification des capteurs

La classification des capteurs est basée sur différents critères, leur configuration diffère selon leurs géométries, leurs fonctions et leurs modes de contrôle.

I.3.4.1 Classification selon la géométrie

a. La bobine encerclante

Les bobines encerclantes sont des capteurs dont les enroulements de mesure entourent la pièce à contrôler. Ils sont destinés au contrôle des produits longs ou des pièces au défilé (tubes, barres,...) [7].

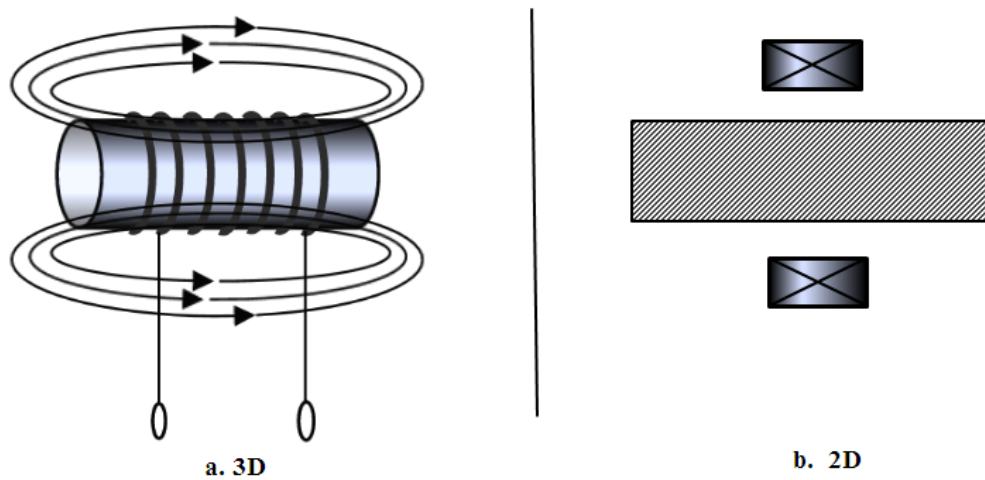


Figure I.7 : Bobine encerclante

b. Sonde ponctuelle (palpeur)

Elle est utilisée pour l'inspection des objets à des endroits précis. L'axe du capteur est perpendiculaire à la surface de la pièce. Il s'agit d'une petite bobine qui peut être placée sur ou à proximité de la surface de la pièce. En effet, ce palpeur permet de faire un contrôle local des pièces même celles dont la géométrie est complexe. Dans le cas d'une surface importante, il nécessite un balayage méthodique de la surface de la pièce [9] [10].

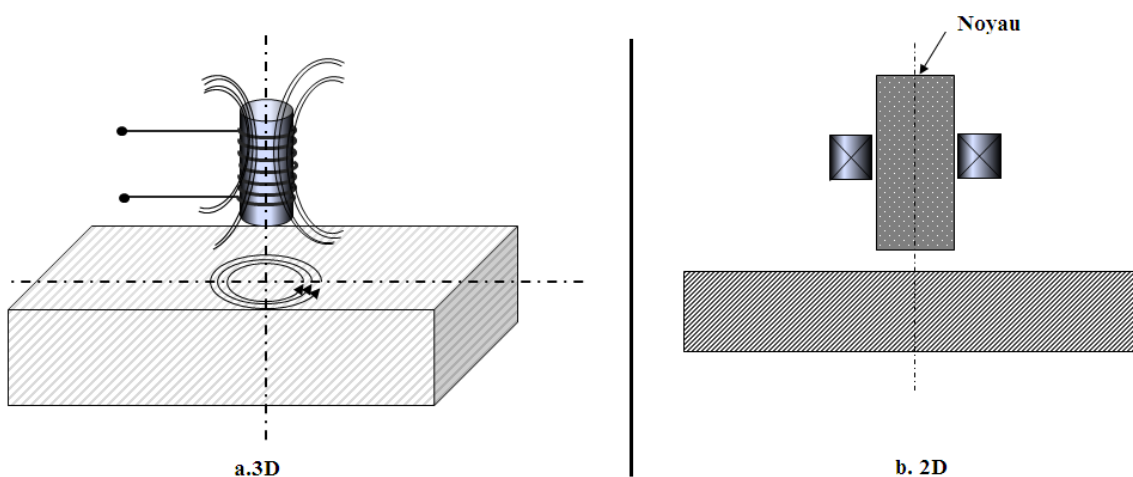


Figure I.8 : Sonde ponctuelle

c. Bobine plate

De la même que la bobine ponctuelle, ce capteur opère sur les surfaces des pièces. Vue sa géométrie, sa zone d'action est plus large (Figure I.9).

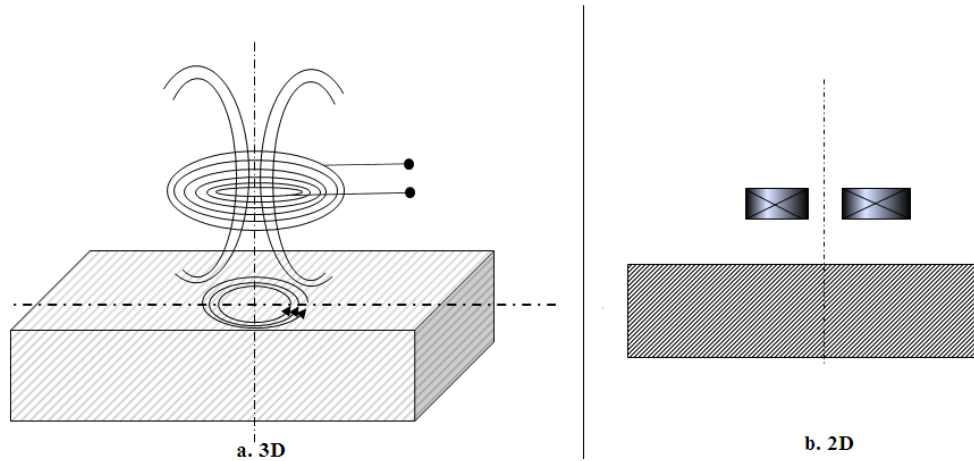


Figure I.9 : Bobine plate

d. Sonde interne

La sonde interne est destinée à l'examen des tubes par l'intérieur. Elle est développée principalement pour l'inspection des tubes des générateurs de vapeur dans les installations nucléaires. Il existe des sondes dites « axiales » pour lesquelles les enroulements sont bobinés autour de leurs axes de translation, et des sondes dites « tournantes » constituées de bobines ponctuelles autour de leurs axes de translation [7].

Dans ce cas, le capteur tourne autour de l'axe de translation. Il en résulte, alors, un champ magnétique perpendiculaire à l'axe du tube. Ce capteur permet de localiser le défaut avec précision sur la surface interne du tube [9].

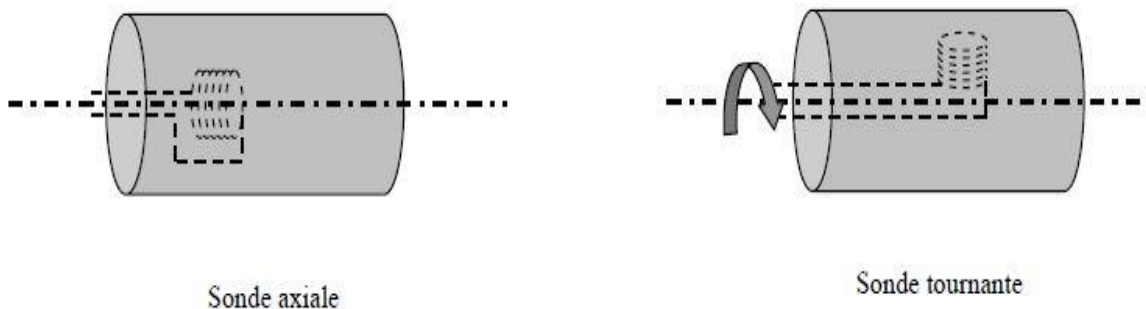


Figure I.10 : La sonde

I.3.4.2 Classification selon la fonction

Principalement, tous les capteurs assurent les deux fonctions suivantes : la fonction d'alimentation et celle de mesure.

Si ces fonctions sont assurées par un seul enroulement, on parle alors de capteurs à double fonction, sinon on parle de capteur à fonction séparée.

a. Capteur à double fonction

Ce type de capteurs est très utilisé dans les applications type courant de Foucault sinusoïdaux. C'est un capteur dans lequel les fonctions d'excitation et de réception sont assurées par la ou les mêmes bobines. L'exploitation se fait par la mesure de l'impédance équivalente de la bobine dans son environnement. Ce type de capteurs favorise la détection de grandeurs à évolution lente telles que l'épaisseur de revêtement et de conductivité (figure I.11) [9].

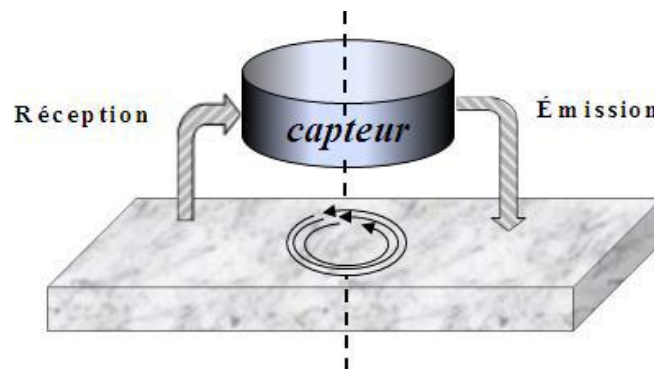


Figure I.11 : Capteur à double fonction

b. Capteur à fonction séparées

La détection des défauts profonds favorise une augmentation des dimensions de la bobine d'excitation. Cependant, cet accroissement de la taille de l'émetteur se fait au détriment de la résolution spatiale du capteur.

Il est, donc, nécessaire d'établir un compromis sensibilité-résolution. Ce compromis est facilité par l'adoption de capteurs à fonctions séparées. C'est un type de capteurs où la fonction d'excitation et de réception est assurée par des éléments distincts. La réception peut alors se faire à un endroit différent de la position de l'émetteur.

L'élément de mesure peut être une bobine plus petite aux bornes de laquelle on mesure la variation d'impédance (Figure I.12) [9].

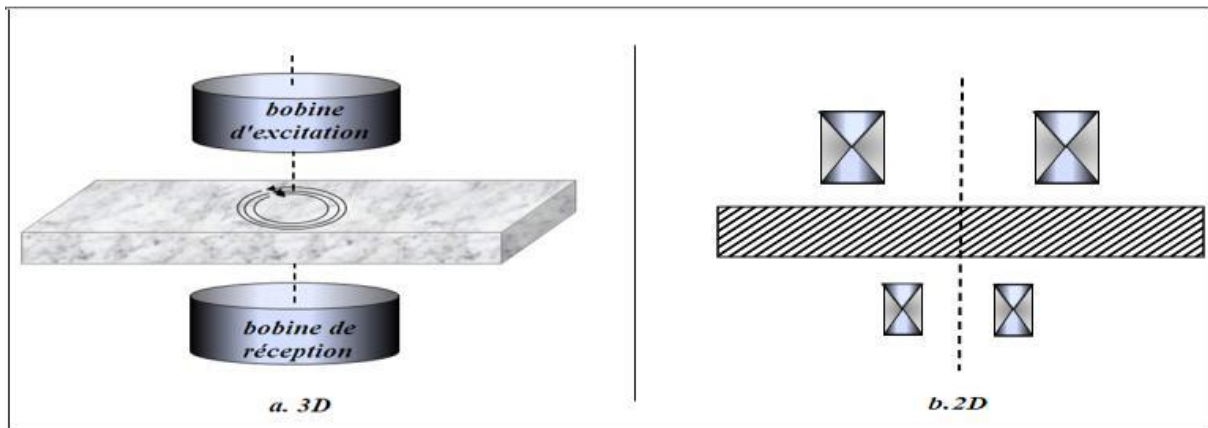


Figure I.12 : Capteur à fonction séparée

I.3.4.3 Classification selon le mode de contrôle

a. Mode absolu

La méthode absolue utilise un seul élément de mesure. Cette mesure se fait par comparaison du signal reçu à une référence artificielle électronique.

b. Mode compensé

Dans ce mode de contrôle, on utilise deux capteurs absolus dont l'un sert de référence. Le premier est positionné à proximité d'une surface de la pièce à contrôler. Il capte les grandeurs utiles et perturbatrices. Le deuxième est placé à proximité d'une autre surface saine du même matériau, il ne capte donc que les signaux perturbateurs. Une mesure comparative permet d'extraire seulement les signaux utiles donc d'éliminer les grandeurs d'influences [7].

c. Mode différentiel

Cette technique utilise deux capteurs rigidement liés, parcourus par le même courant mais de signes opposés. La mesure différentielle consiste à comparer deux mesures effectuées simultanément en deux emplacements voisins. Cette méthode est essentiellement utilisée en

contrôle de santé et particulièrement pour détecter des discontinuités lors d'un déplacement du capteur le long d'une pièce [7].

I.3.5 Différents types de capteurs

Pour les systèmes de mesure de position et de vitesse, on dégagera principalement cinq technologies :

- les capteurs optiques
- les capteurs inductifs
- les capteurs à effet magnétique tels que sonde de Hall ou magnéto résistances
- les capteurs capacitifs

Pour la mesure de courants, trois techniques sont principalement utilisées :

- la mesure de la tension aux bornes d'une résistance, souvent sous forme de capteur intégré.
- le transformateur d'intensité pour des courants élevés à une fréquence élevée.
- la mesure indirecte du courant par un champ magnétique et une sonde de Hall.

Pour les mesures thermiques, on recourt généralement à deux techniques :

- les thermo-résistances pour la détection d'un seuil critique nécessitant une alarme ou un arrêt.
- les thermocouples pour une mesure précise en continu.

I.3.5.1 Capteur de position

a. Capteur optique

Le capteur optique de position et de vitesse est une solution fréquemment utilisée. Le principe est basé sur la mesure de la luminosité par effet photo-électronique. Deux techniques principales sont utilisées :

- mesure par transmission entre un émetteur (LED, laser) et un récepteur (photodiode ou phototransistor) utilisant un disque avec des domaines alternativement transparents et opaque. Le disque monté sur l'arbre, est constitué d'une tôle emboutie pour une

technologie à basse ou moyenne résolution (figure I.13) et par un disque de verre gravé pour de hautes résolutions.

- mesure par réflexion. La modulation du rayon lumineux est obtenue par une structure (disque ou règle) qui alterne des zones absorbantes et réfléchissantes [12].

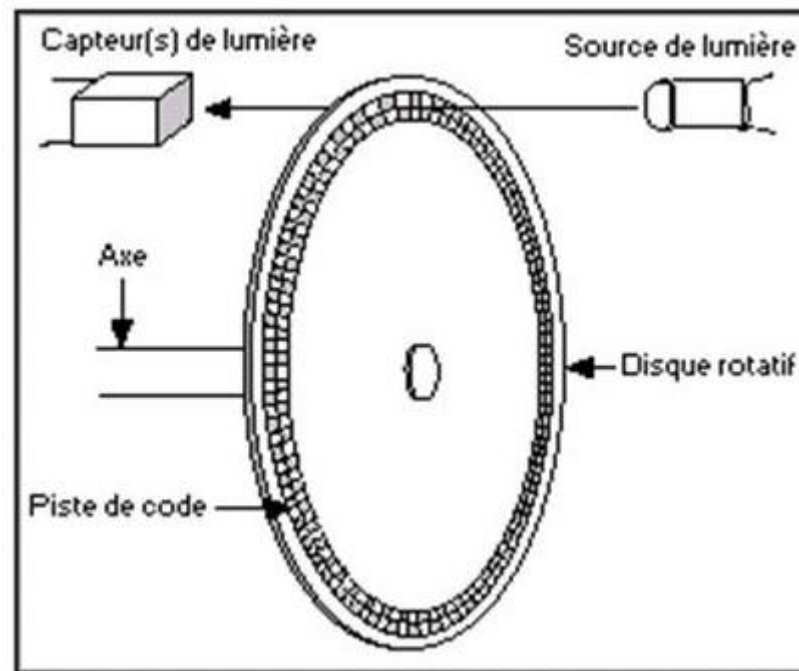


Figure I.13 : Capteur optique incrémental de position et de vitesse par transparence

b. Capteur inductifs

Un capteur inductif fonctionne par interaction d'une source de champ magnétique alternatif avec un milieu ferromagnétique ou conducteur.

Les fréquences correspondantes vont de 1 à 100 kHz, en général.

Par contre-réaction, en face d'un objet à détecter de nature ferromagnétique ou conductrice (apparition de courants de Foucault), l'impédance apparente de la source du capteur se modifie et permet ainsi la détection en fonction d'un seuil de référence.

Un tel capteur inductif est représenté par la figure I.14. Il est constitué d'un circuit ferromagnétique de type ferrite et d'une bobine associée, alimentée par une source alternative de tension ou de courant. La proximité d'un objet métallique modifie l'impédance apparente et peut donc être détectée, avec un niveau variant avec la distance au capteur [12].

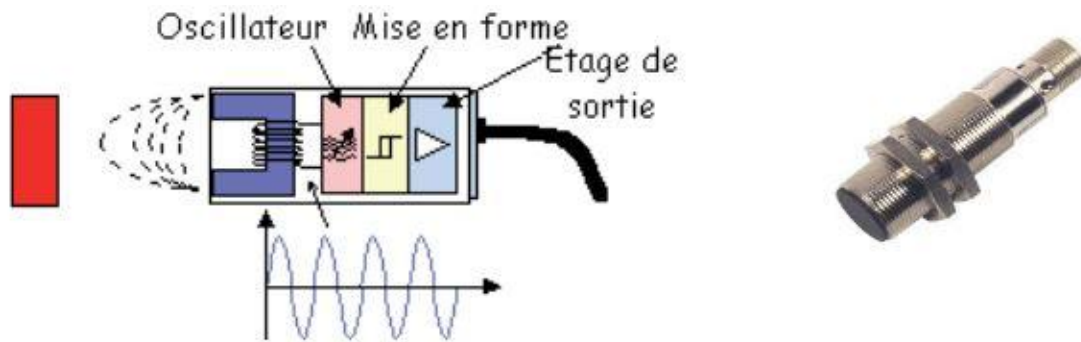


Figure I.14 : Capteur inductif

c. Sonde de Hall

Une sonde de Hall est un composant électronique de forme parallélépipédique alimenté en courant dans une direction. Lorsqu'il est soumis à un champ d'induction magnétique dans une direction perpendiculaire correspondant à la plus grande surface (figure I.15) une différence de potentiel proportionnelle à ce champ apparait dans la troisième direction.

Une telle sonde est donc à même de détecter un champ d'induction magnétique local en direction et en intensité [12].

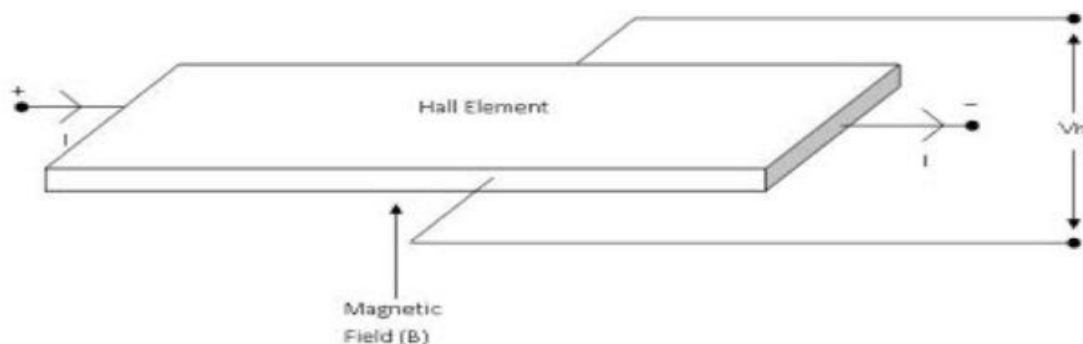


Figure I.15 : Sonde de Hall

d. Capteur linéaire à transformateur différentiel

Le capteur linéaire à transformateur différentiel ou capteur LVDT (Linear Variable Differential Transformer) est basé sur un couplage inductif entre une bobine émettrice et deux bobines de mesure montées en opposition, associé à un noyau mobile ferromagnétique (en général ferrite), (figure I.16) [12].

Ce dernier est alimenté par une tension sinusoïdale. Le déplacement du noyau ferromagnétique modifie le couplage entre le primaire et chacun des deux secondaires,

entraînant ainsi une variation de l'amplitude du signal recueilli. Le signal alternatif délivré par le capteur est ensuite démodulé et filtré. La plage de mesure des déplacements rectilignes varie entre 0.1 et 1000 mm selon les modèles.

La tension de mesure U_{mes} correspond à la différence des tensions induites respectives des deux bobines. En particulier, pour une position centrée du noyau, la tension U_{mes} est nulle.

Ces capteurs sont avantageux par leur bon fonctionnement en milieux difficiles (huiles, pression, températures, ...) et leurs bonnes performances métrologique, ainsi que leur cout relativement faible [3].

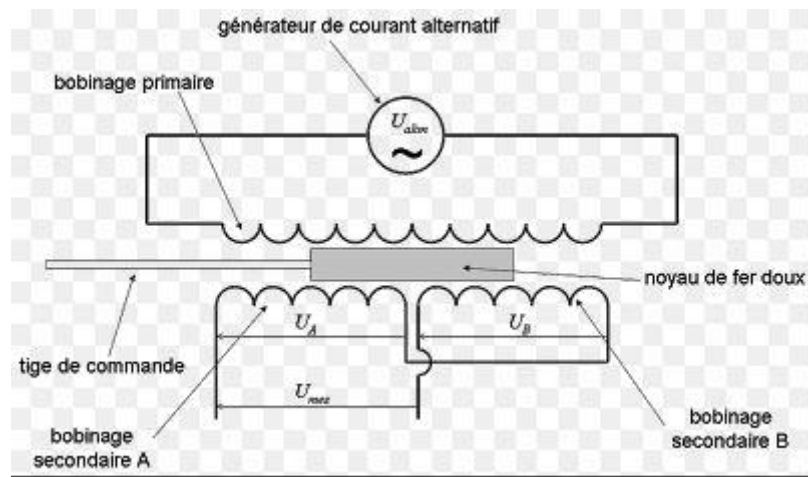


Figure I.16 : Capteur linéaire à transformateur différentiel (LVDT)

e. Capteur capacitif

Un condensateur présente une capacité proportionnelle à la surface entre deux électrodes créant les champs électriques et inversement proportionnelle à leur distance. Un capteur capacitif est réalisé par deux électrodes coplanaires permettant de mesurer une distance ou une surface variable.

Un capteur capacitif est très généralement réalisé avec une électrode plane entourée d'un anneau de garde. L'électrode forme avec la pièce à mesurer un condensateur plan. La détermination de la distance « d » entre cette électrode et la surface de la pièce à mesurer est réalisée en mesurant la capacité « C » du condensateur. Elles sont liées par l'équation suivante :

$$C = \varepsilon \frac{S}{d} \quad (\text{I.1})$$

Avec

ε : permittivité du diélectrique existant entre le capteur et la pièce à mesurer.

S : surface de l'électrode du capteur.

d : distance à mesurer.

La mesure de la capacité du condensateur est réalisée en injectant un courant alternatif « i » et en mesurant la tension « V » qui apparaît à ses bornes. Leurs valeurs sont liées par l'équation suivante :

$$V = \frac{i}{jC\omega} = \frac{i.d}{j.\omega\varepsilon.S} \quad (\text{I.2})$$

Avec

ω : pulsation du courant d'alimentation : $\omega = 2\pi f$.

f. Capteur de température

Qualitativement, la température d'un objet détermine la sensation de chaud ou de froid ressentie en le touchant. Plus spécifiquement, la température est une mesure de l'énergie cinétique moyenne des particules d'un échantillon de matière exprimée en unités de degrés sur une échelle standard.

Dans le monde de l'industrie sa mesure et son contrôle sont indispensables, c'est pourquoi on trouve diverses méthodes de mesures.

Les capteurs de température sont constitués d'un élément sensible isolé électriquement et protégé par une gaine. Ils permettent de mesurer une température dans un but de contrôle (simple visualisation), de régulation de la puissance de systèmes chauffants ou de sécurité. Ils permettent de mesurer des températures dans des échanges par conduction ou par convection. Les capteurs doivent être choisis soigneusement, notamment lorsqu'ils sont utilisés en tant que composants dans une chaîne de régulation. Il est nécessaire de tenir compte :

- de la sensibilité du capteur suivant l'utilisation souhaitée, la précision de la mesure.
- du milieu d'utilisation, par exemple en cas de chocs thermiques ou mécaniques.
- de l'inertie thermique du capteur.
- du système de régulation [13].

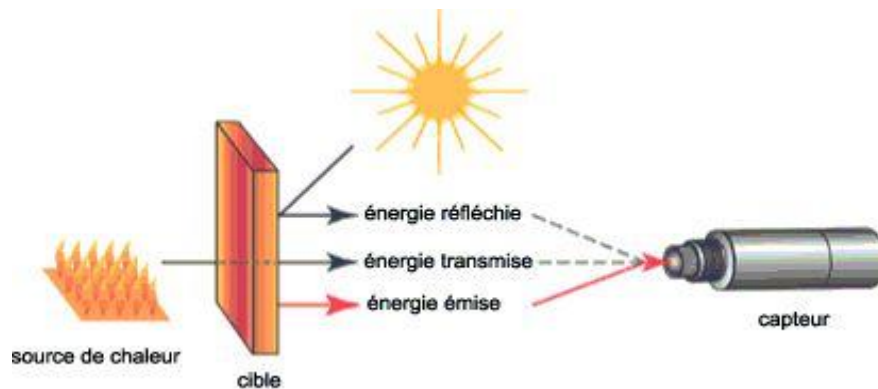


Figure I. 17 : Capteur de température

g. Capteur d'humidité

Ils sont utilisés pour le contrôle permanent de l'humidité dans l'industrie, l'agroalimentaire, les milieux hospitaliers, les habitations, les pièces frigorifiques ... etc.

Les techniques utilisées par les capteurs d'humidité sont très variées, elles dépendent de la précision de la mesure et du milieu dans lequel on veut mesurer l'humidité. Les principes de détection sont basés sur l'optique (variation du flux réfléchi), la piézoélectricité, le thermique (variation de la température), la mécanique (variation de capacité), l'électrique (variation de conductivité) [3].



Figure I.18 : Capteur de température et d'humidité

h. Capteur à ultrasons

L'ultrason est une onde acoustique dont la fréquence est trop élevée pour être audible par l'être humain. Il peut dans certaines applications remplacer avantageusement le capteur inductif ou capacitif et il peut détecter des objets jusqu'à plusieurs mètres.

L'émetteur et le récepteur sont situés dans le même boîtier. L'émetteur envoie un train d'ondes qui va se réfléchir sur l'objet à détecter et ensuite revenir à la source (Figure I.19). Le temps mis (1 temps + 2 temps) pour parcourir un aller-retour permet de déterminer la distance de l'objet par rapport à la source. Plus l'objet sera loin plus il faudra longtemps pour que le signal revienne [3].

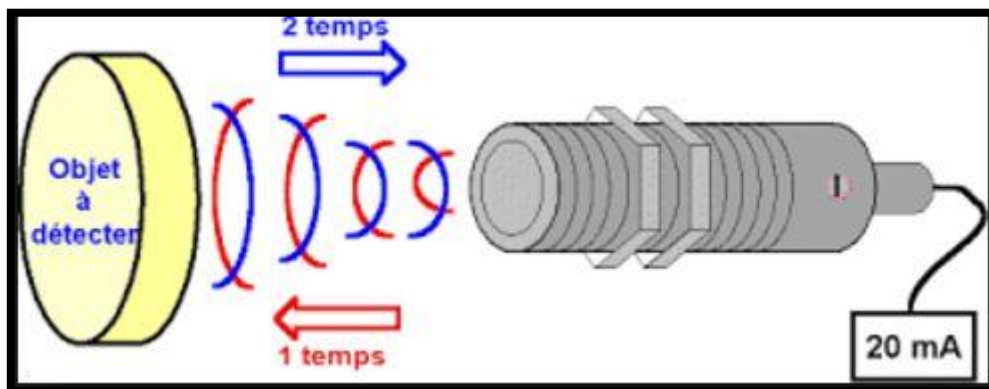


Figure I.19 : Capteur à ultrasons

I.3.6 Les capteurs les plus utilisés en CND

Le tableau ci-dessous nous résume les capteurs les plus utilisées dans le contrôle non destructif.

Capteurs	Domaine d'utilisation
Capteurs inductifs à courant de Foucault	C'est un capteur de structure simple, de poids léger. Consacré à la détection de défauts internes ou externes (fissure, corrosion, humidité ...). Basé sur la variation d'impédance. Appliqué aux : Tube de gaz, d'eau, pièce plane, circulaire ...
Capteurs optiques	Structure simple, poids léger, haute précision, travail à haute température. Utilisé pour détecter les fissures dans les turbomachines par exemple.
Capteurs capacitifs	Structure simple, poids léger, durable, la détection est faite à travers sa constante diélectrique. Il est utilisé pour la détection des fissures dans les matériaux conducteurs de l'électricité, les turbomachines.
Capteurs de températures	Distribution de la température au niveau d'une pièce sous test. Appliqué dans la technique de thermographie.
Capteurs à ultrasons	Le capteur permet de détecter tout type de matériau sauf les objets absorbant (fissure, défauts internes, surfacique). Dans un tube, cylindrique, torique, une tôle,...

Tableau I.3 : Les capteurs les plus utilisés en CND

I.4 Conclusion

Dans ce chapitre on a défini le contrôle non destructif, on a énuméré quelque domaine utilisant ce dernier. Ensuite, on a présenté les différentes techniques du CND en citant leurs avantages et leurs inconvénients.

Pour conclure, on a parlé des différents capteurs qu'on peut rencontrer lors de l'utilisation des techniques du CND tout en citant leurs paramètres et leurs différentes classifications.

Chapitre II

Lois fondamentales de l'électromagnétisme

II.1 Introduction

L'étude d'un dispositif électromagnétique est basée essentiellement sur l'exploitation des lois de l'électromagnétisme et des équations de Maxwell.

Dans ce chapitre, on va rassembler les équations mathématiques de base qui décrivent les phénomènes électromagnétiques intervenant dans le contrôle non destructif.

II.2 Historique

Tout au début, les phénomènes électriques et magnétiques ont été étudiés séparément. Les interactions entre ces deux phénomènes ont été mises en évidence pour la première fois par

Ampère (1775-1836), qui a prouvé que la source du magnétisme est le courant électrique, **Gauss** (1777-1855), qui a démontré que la source du champ électrique est la charge électrique statique et **Faraday** (1791-1867) qui relie la création de l'un des champs électrique et magnétique par l'autre et vice versa.

Le couplage des deux phénomènes qu'on regroupe en un mot «Electromagnétisme », on le doit à **James Clerk Maxwell** (1831-1879). Ce génie a exploité les découvertes des précédents, pour donner une formulation plus complète et exhaustive de l'électromagnétisme liant les grandeurs électriques et magnétiques [17].

II.3 Lois classiques de l'électromagnétisme

II.3.1 Loi d'Ampère

La circulation du champ magnétique \vec{B} le long d'un contour orienté Γ appelé contour d'Ampère, est égal au produit par la constante μ_0 de la somme algébrique des courants I_{int} qui traversent la surface délimitée par le contour Γ [19].

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_{int} \quad (\text{II.1})$$

Où :

\oint_{Γ} Représente l'intégrale curviligne sur le contour fermé Γ .

\vec{B} [T] est l'induction magnétique.

\overline{dl} : est l'élément infinitésimal de déplacement le long du contour Γ .

μ_0 : est la perméabilité magnétique du vide, elle est donnée par: $\mu_0 = 4. \pi. 10^{-7} [\text{H/m}]$.

$\sum_{i=1}^n I_{\text{int}}$ est la somme algébrique des intensités de courants enlacés par le contour Γ .

La circulation de l'induction magnétique \overline{B} sur une courbe fermée est donc directement liée au courant qui traverse la surface délimitée par cette courbe.

II.3.2 Loi de Faraday-Lenz

Par une pure expérience, Faraday remarque qu'à chaque fois qu'il y a variation de flux magnétique ou variation du champ d'induction lui-même, un courant est alors mesuré par un galvanomètre. Ce courant est dit courant induit. En effet, cette loi relie la force électromotrice induite à la variation de flux magnétique qui l'engendre [9].

$$e = - \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{II.2})$$

Où :

e : représente la f.e.m induite.

ϕ : représente le flux (Weber).

Le signe (-) de la loi de Faraday a une signification bien précise donnée explicitement par la loi de Lenz. Cette loi a été formulée par Lenz et éclaircit mieux le phénomène d'induction que Faraday avait observé. Elle indique que le sens du courant induit lors d'un phénomène d'induction électromagnétique dans un circuit électrique est tel qu'il s'oppose à la variation du flux initial. Donc la force électromotrice induite s'oppose à l'action qui leur a donné naissance [9].

II.3.3 Loi de Biot et Savart

Cette loi donne le champ magnétique créé par une distribution de courants continus. Elle constitue l'une des lois fondamentales de la magnétostatique, au même titre que la loi de Coulomb pour l'électrostatique.

En un point p de l'espace, l'élément du conducteur \overline{dl} , parcouru par un courant I génère un champ d'induction magnétique élémentaire \overline{dB} dans le vide. Cette induction est donnée par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int_i \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_u}{r^2} \quad (\text{II.3})$$

II.3.4 Flux magnétique

Le flux est une grandeur algébrique qui traduit la traversée d'un champ à travers la surface S. Son calcul nécessite l'orientation de S.

$$\varphi = \vec{B} \cdot \vec{S} \quad (\text{II.4})$$

- **Conservation de flux :**

Le flux d'induction magnétique est conservatif dans un circuit magnétique parfait. Autrement dit, le flux sortant à travers la surface latérale ($S_{\text{latérale}}$) est nul [23].

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Leftrightarrow B_1 S_1 = B_2 S_2 \quad (\text{II.5})$$

Où :

φ : est le flux d'induction magnétique [Wb : Webers].

\vec{B} : Induction magnétique [T].

S : Surface du conducteur.

II.3.5 Force de Laplace

Un conducteur de longueur « l » placé dans un champ magnétique et parcouru par un courant I est soumis à une force de Laplace \vec{F} [23].

- Direction : perpendiculaire au plan formé par le conducteur et \vec{B} .

- Sens : déterminé par la règle des trois doigts de la main droite

Pouce : sens de \vec{F} .

Index : sens du courant.

Majeur : sens de \vec{B} .

La loi donnant la force agissant sur un courant placé dans un champ d'induction est donnée comme suit :

$$d\vec{F} = I (d\vec{l} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.6})$$

\vec{F} : Force de Laplace [N].

I : L'intensité du courant [A].

\vec{B} : L'induction magnétique [T].

II.3.6 Equation de Maxwell

Vers 1865, Maxwell a réalisé une synthèse harmonieuse des diverses lois expérimentales découvertes par ses prédécesseurs (lois de l'électrostatique, du magnétisme, de l'induction...). Mais cette synthèse n'a été possible que parce que Maxwell a su dépasser les travaux de ses devanciers, en introduisant dans une équation un « chaînon manquant » appelé le courant de déplacement, dont la présence assure la cohérence de l'édifice unifié.

Maxwell a d'abord publié en 1865 sa théorie sous la forme de vingt équations à vingt inconnues, écrit à l'aide de quaternions. En 1873, dans l'ouvrage en deux volumes « A Treatise on Electricity and Magnetism », Maxwell a déjà réécrit sa théorie sous la forme de huit équations. Ce n'est que plus tard qu'Heaviside réécrivit ces équations sous la forme des quatre équations vectorielles aux dérivées partielles que l'on connaît maintenant [16].

$$\text{Maxwell-Gauss} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{II.7})$$

$$\text{Maxwell-Faraday} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.8})$$

$$\text{Conservation du flux} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II.9})$$

$$\text{Maxwell-Ampère} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II.10})$$

Où :

\vec{D} : est l'induction électrique [C/m³].

\vec{B} : est l'induction magnétique [T].

\vec{E} : est le champ électrique [V/m].

\vec{H} : est le champ magnétique [A/m].

ρ : est la densité volumique de la charge [C/m³].

\vec{J} : est la densité de courant de conduction [A/m²].

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$: est le terme exprimant la densité de courant de déplacement.

Les équations (II.7) et (II.9) sont respectivement la conservation de la charge électrique et du champ magnétique. L'équation (II.8) correspond à la loi d'induction de Faraday, qui établit le lien entre un champ électrique et un flux magnétique. Cette loi traduit le phénomène inductif qui se produit dans un conducteur soumis à un champ magnétique variable ou dans un conducteur en mouvement soumis à un champ magnétique constant.

L'équation (II.10) est une généralisation du théorème d'Ampère. Elle permet d'établir la relation entre le champ électromagnétique et les courants électriques. Elle traduit la création d'un champ magnétique par les courants électriques de conduction et de déplacement.

II.3.7 Relations constitutives du milieu

La résolution complète des équations de Maxwell passe par la connaissance du milieu où les grandeurs électromagnétiques règnent.

La loi d'Ohm, l'équation de conservation de la charge et les équations constitutives des matériaux définissent ce milieu. En effet, certains de ces champs vectoriels sont reliés entre eux par les propriétés de la matière.

La relation du milieu exprime le lien existant entre le champ magnétique \vec{H} et l'induction \vec{B} magnétique, d'une part, à travers la perméabilité magnétique μ ainsi que celui existant entre le déplacement électrique \vec{D} et le champ électrique \vec{E} à travers la permittivité électrique ϵ , d'autre part.

II.3.7.1 Propriété conductrice (Loi d'Ohm)

Les milieux conducteurs sont caractérisés par leur conductivité électrique. La densité de courant est reliée au champ électrique par la loi d'Ohm suivante :

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (\text{II.11})$$

σ : Conductivité électrique $[(\Omega \cdot \text{m})^{-1}]$.

II.3.7.2 Propriétés magnétiques

Un milieu magnétique est caractérisé par les relations magnétiques, qui permettent d'exprimer l'induction magnétique en fonction du champ d'excitation. Pour un milieu homogène, isotrope et linéaire, l'équation de constitution s'écrit :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{II.12})$$

Avec: $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$

Où :

μ_0 : est la perméabilité magnétique du vide, elle est donnée par: $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ [H/m].

μ_r : est la perméabilité magnétique relative du milieu.

μ : est la perméabilité magnétique [H/m].

II.3.7.3 Propriétés diélectriques

C'est une propriété qui caractérise les matériaux diélectriques. L'induction électrique dépend du champ électrique par la relation suivante :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (\text{II.13})$$

Avec : $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$

Où :

ε_0 : est la permittivité électrique du vide, elle est égale à : $\varepsilon_0 = \frac{1}{36 \cdot \pi} \cdot 10^{-9}$ [F/m].

ε_r : est la permittivité relative du milieu.

ε : est la permittivité électrique [F/m].

II.3.8 Equations de continuité

L'équation de continuité appelée aussi équation de la conservation de la charge électrique est donnée par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.14})$$

ρ : est la densité de charge électrique.

II.3.9 Relations de passage

A l'interface entre deux milieux différents respectivement (1) et (2), les champs de vecteurs doivent vérifier certaines conditions dites relations de passage. Elles s'énoncent comme suit [20], [21] :

- **Discontinuité de la composante normale de l'induction électrique**

$$\left(\vec{D}_{n1} - \vec{D}_{n2}\right) \cdot \vec{n} = \sigma_s \quad (\text{II.15})$$

\vec{D}_{n1} : La composante normale de l'induction électrique dans le milieu 1.

\vec{D}_{n2} : La composante normale de l'induction électrique dans le milieu 2.

σ_s : Densité de charge électrique portée par la surface de séparation.

\vec{n} : Vecteur unité suivant la normale de l'interface.

- **Conservation de la composante tangentielle du champ électrique**

$$\left(\vec{E}_{t1} - \vec{E}_{t2}\right) \wedge \vec{n} = 0 \quad (\text{II.16})$$

\vec{E}_{t1} : La composante tangentielle du champ électrique dans le milieu 1.

\vec{E}_{t2} : La composante tangentielle du champ électrique dans le milieu 2.

- **Conservation de la composante normale de l'induction magnétique**

$$\left(\vec{B}_{n1} - \vec{B}_{n2}\right) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{II.17})$$

\vec{B}_{n1} : La composante normale de l'induction magnétique dans le milieu 1.

\vec{B}_{n2} : La composante normale de l'induction magnétique dans le milieu 2.

- **Discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique**

$$\left(\vec{H}_{t1} - \vec{H}_{t2}\right) \wedge \vec{n} = k \quad (\text{II.18})$$

\vec{H}_{t1} : La composante tangentielle du champ magnétique dans le milieu 1.

\vec{H}_{t2} : La composante tangentielle du champ magnétique dans le milieu 2.

k : Densité de courant porté par la surface de séparation.

II.3.10 Conditions aux limites

- **Condition type Dirichlet**

Cette condition nous informe sur la valeur exacte de l'inconnue sur la frontière du domaine d'étude.

Elle est sous forme :

$$A = A_0 \quad (\text{II.19})$$

A : La fonction inconnue.

A_0 : Constante.

- **Condition type Neumann**

Elle est appliquée sur la frontière lorsque la valeur de la grandeur calculée n'est pas connue à la frontière du domaine d'étude.

$$\frac{\partial A}{\partial n} = A_0 \quad (\text{II.20})$$

- **Condition mixte**

C'est la combinaison des deux types précédents, elle s'exprime de la manière suivante :

$$\alpha A + \beta \frac{\partial A}{\partial n} = \gamma \quad (\text{II.21})$$

Où :

α , β et γ sont des constantes.

- **Condition de périodicité et d'anti-périodicité**

Cette périodicité du champ peut être utilisée pour définir un autre type de conditions aux limites pour réduire la taille du modèle numérique. On parle alors de condition de périodicité. La condition de l'anti-périodicité est appliquée lorsque nous avons les mêmes contraintes en module mais de polarité inverse.

Elle s'exprime comme suit :

$$A|_{\Gamma} = K.A|_{\Gamma+d\Gamma} \quad (\text{II.22})$$

A : Fonction inconnue.

d_Γ : Période spatiale suivant le contour.

Si : $K=1$, condition périodique.

Si : $K=-1$, condition anti-périodique.

II.4 Electromagnétisme en régime quasi-stationnaire

II.4.1 Hypothèses simplificatrices

Les équations qui précèdent décrivent globalement les phénomènes électromagnétiques et s'appliquent à des états quelconques [17]. Dans la pratique, en fonction du domaine d'utilisation, on simplifie ces équations. Ces dernières se découpent alors en donnant naissance à des modèles plus simples [22].

Dans le cas d'une excitation sinusoïdale les courants de conduction et de déplacements sont définis respectivement comme suit :

$$\vec{J}_c = \sigma \vec{E} \quad (\text{II.23})$$

$$\vec{J}_D = j2\pi f \varepsilon \vec{E} \quad (\text{II.24})$$

Dans le domaine de l'électrotechnique, la fréquence utilisée est inférieure à 10^{12} Hz. Les distances de la région où on observe les phénomènes sont faibles devant la longueur d'onde du champ électromagnétique. Les matériaux utilisés dans le contrôle non destructif par courant de Foucault sont suffisamment conducteurs pour considérer que le rapport (ε/σ) est très faible.

De ces trois hypothèses, on conclut que l'approximation de régimes quasi-stationnaire est valable. En termes de courant, cela revient à négliger le courant de

déplacement $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ devant le courant de conduction \vec{J}_c .

II.5 Formulation en potentiel vecteur magnétique

Bien que les équations de Maxwell permettant de modéliser le phénomène des courants de Foucault soient connues depuis longtemps, l'acquisition de cette connaissance se heurte à de nombreuses difficultés. En effet, ces courants induits sont purement tridimensionnels dans la plupart des situations de contrôle ce qui demande un temps de résolution très coûteux.

De plus, les formulations en champs présentent un inconvénient majeur, c'est celui de la discontinuité aux interfaces et particulièrement aux coins.

Pour pallier à ces problèmes, on fait appel à une entité mathématique connue sous le nom de potentiel. Celle-ci provient de considérations purement mathématiques (les identités vectorielles) plutôt que physiques. Par ailleurs, si le potentiel n'a à ce jour aucun sens physique, la nature de sa variation par contre, est significative [7].

Dans ce qui suit, nous présenterons la formulation en termes de potentiel vecteur magnétique décrivant le système étudié.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \Rightarrow \exists \vec{A} \text{ tel que } \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (\text{II.25})$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{B} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \end{cases} \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \exists \vec{V} / \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \vec{V} \\ \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \vec{V} \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

$$\text{Or } \vec{J} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \vec{J} = -\sigma \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \sigma \cdot \vec{\nabla} \vec{V} \quad (\text{II.27})$$

$$\text{On pose } \vec{J}_s = -\sigma \vec{\nabla} \vec{V} \quad (\text{II.28})$$

$$\text{On aura } \vec{J} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{J}_s \quad (\text{II.29})$$

Pour un problème de courants induits on considère l'hypothèse suivante : $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$ on aura

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{II.30})$$

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{J}_s \end{cases} \Rightarrow \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}{\mu} = \vec{J}_s + -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

On a $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ d'où :

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{A}}{\mu} \right) = \vec{J}_s - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{A}}{\mu} \right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_s \quad (\text{II.31})$$

Avec : $\vec{J}_s = -\sigma \vec{\nabla} V$

L'équation (II.31) représente l'équation magnétodynamique transitoire en terme de potentiel vecteur magnétique A. Cette équation traduit les phénomènes d'effet de peau dans les conducteurs ou le régime transitoire des dispositifs électromagnétiques.

II.6 Equations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles ou équation différentielle partielle (EDP) est une équation dont les solutions sont les fonctions inconnues vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles. C'est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante des variables indépendantes.

II.6.1 Equations de type elliptique

Ce type d'équations traite les problèmes stationnaires (indépendant du temps), en coordonnées cartésiennes, l'équation peut être représentée sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II.32})$$

$\varphi(x,y,z)$: est la fonction inconnue du phénomène.

II.6.2 Equations de type parabolique

Ce type d'équations est lié à l'étude des régimes transitoires comme l'équation de la pénétration des courants induits ou la diffusion de la chaleur en thermique, elles sont présentées en coordonnées cartésiennes sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.33})$$

II.6.3 Equation de type hyperbolique

Ce type d'équations traite les problèmes de propagation d'ondes et il est régi par l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.34})$$

II.7 Equations des différentes régions d'un système électromagnétique

II.7.1 Equation dans le vide

Les régions non conductrices sont caractérisées par une conductivité nulle, l'équation en termes de « \vec{A} » est donnée par [24] :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{A} = 0 \quad (\text{II.35})$$

II.7.2 Equation dans l'inducteur

L'inducteur est caractérisé par une perméabilité égale à celle du vide. Lorsque celui-ci est alimenté par un générateur de tension, l'équation en terme de \vec{A} devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{A} = -\mu \vec{J}_s \quad (\text{II.36})$$

Dans ce cas, le potentiel scalaire V doit être relié à la tension du générateur alimentant l'inducteur, le courant de celui-ci étant inconnu.

II.7.3 Equation dans la charge (l'induit)

Dans ce cas le courant n'est créé que par la variation temporelle du potentiel vecteur magnétique par conséquent on a :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{A} = -\mu \vec{J}_i \quad (\text{II.37})$$

Avec : $\vec{J}_i = -j\sigma\omega A$ (II.38)

II.8 Conclusion

Ce chapitre présente les équations de Maxwell qui sont les lois de base de l'électromagnétisme, ainsi que les modèles des différents phénomènes électromagnétique qui en découlent.

III.1 Introduction

La simulation numérique est devenue un puissant moyen d'investigation qui tend à prendre une place de plus en plus importante, à côté de l'approche expérimentale classique, dans les sciences et techniques. Dans les domaines de la mécanique, de la physique ou de la chimie, l'utilisation de modèles fondés sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles est naturelle (électromagnétisme, chimie...). Plus récemment, ce type de modélisation a fait son apparition dans d'autres domaines tels que la biologie et l'économie (finance en particulier). Hormis quelques cas particuliers, il n'est pas possible de résoudre analytiquement ces systèmes d'équations, et il est donc obligatoire d'avoir recours à des techniques d'approximation [25]. Il en existe un certain nombre, dans notre cas on se concentrera sur la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis, apparue dans les années 50 pour traiter des problèmes de mécanique des structures, a connu depuis lors un développement continu et est présentée, aujourd'hui, dans tous les domaines d'application : mécanique, physique, chimie, économie, finance et biologie. Elle est maintenant utilisée dans la plupart des logiciels de calcul scientifique, et de nombreux ingénieurs y sont confrontés dans le cadre de leur activité de modélisation et de simulation numérique. Il est donc important d'en maîtriser les divers aspects [25].

Ce chapitre est consacré à la présentation des éléments essentiels de la méthode des éléments finis.

III.2 Méthodes numériques

L'utilisation des méthodes numériques pour la modélisation des dispositifs électromagnétiques, est devenue une option incontournable au vu des avantages qu'elles présentent dans la prise en compte des problèmes de type vectoriel, des non-linéarités et des géométries complexes [18].

III.2.1 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques [26]. Elle fait appel aux trois domaines suivants :

- Services de l'ingénieur pour décrire les lois de la physique (équations aux dérivées partielles)
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- Outils informatiques pour exécuter efficacement les calculs sur l'ordinateur.

III.2.2 Etapes de résolution par la MEF

D'une façon générale, la résolution par la MEF inclut les étapes suivantes :

- Obtention de la formulation variationnelle du problème et définition des espaces fonctionnels de solutions admissibles.
- Réalisation d'un maillage correspondant à la discrétisation du domaine d'étude en éléments (triangles, tétraèdres, hexaèdres...) sur lesquels les champs sont écrits en termes d'un nombre fini de degrés de liberté et de fonctions de base à support local
- Calcul des matrices élémentaires qui, après assemblage, génèrent un système matriciel creux.
- Résolution du système algébrique pour l'obtention d'une solution approchée du problème.

III.2.3 Principe de la méthode variationnelle

La méthode variationnelle nécessite la connaissance a priori de la fonctionnelle d'énergie du système à étudier. Celle-ci est déterminée à partir du principe de l'action Hamiltonienne qui stipule l'existence d'une fonctionnelle type intégrale définie par [17] [24] :

$$F(A) = \int_{\Omega} L(x_i, q_i, q'_{ik}) d\Omega \quad (\text{III.1})$$

L : Fonction de Lagrange déduite de la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.

Ω : Domaine d'étude.

x_i : Variable.

q_i : Variable d'état.

$q'_{ik} = \frac{\partial q_i}{\partial x_{ik}}$: Dérivées des fonctions d'état

Avec :

$$L(x_i, q_i, q'_{ik}) = W_c - W_p \quad (\text{III.2})$$

W_c : Energie cinétique.

W_p : Energie potentielle.

La résolution du problème variationnel ainsi défini, revient à minimiser la fonctionnel d'énergie $F(A)$. La minimisation est effectuée en utilisant le principe de Rayleigh-Ritz qui s'énonce comme suit [27] : « *La dérivée de la fonctionnelle d'énergie $F(A)$ par rapport à chaque inconnue au nœud est nulle* ».

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = 0 \quad (\text{III.3})$$

Où :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_2} = \dots = \frac{\partial F(A)}{\partial A_N} = 0 \quad (\text{III.4})$$

Où :

N : Nombre de nœuds du domaine d'étude.

A : Est l'inconnu aux nœuds i du domaine.

III.2.4 Méthode des résidus pondérés

III.2.4.1 Principe de la méthode

La méthode des résidus pondérés est basée sur la détermination du résidu par :

$$R = L(A) - f_v \quad (\text{III.5})$$

Où :

R : représente le résidu de l'approximation.

$L(A)$: Opérateur différentiel.

f_v : Fonction définie sur le domaine d'étude Ω .

A : L'inconnue du problème.

A l'aide de fonctions de pondération bien choisies, on impose à l'intégrale du résidu de s'annuler en « n » points du domaine Ω :

$$\int_{\Omega} R_i \Phi_i d\Omega = 0 \quad (\text{III.6})$$

Φ_i : Fonction de projection.

Les valeurs de A qui permettent d'annuler l'intégrale, sont les solutions du système algébrique obtenu.

III.2.4.2 Différentes méthodes déduites des résidus pondérés

Le choix des fonctions de pondération appelées aussi fonctions de projection, conduit à plusieurs méthodes. Parmi celles-ci nous citerons :

- La méthode de collocation par point.
- La méthode des moindres carrés.
- La méthode de Galerkin.

La méthode de collocation par point utilise les fonctions de Dirac comme fonction de pondération, la méthode des moindres carrés est basée sur la minimisation de la norme quadratique de l'erreur sur l'équation et les conditions aux limites. La méthode de Galerkin consiste à choisir des fonctions de projection identiques aux fonctions d'approximation.

Contrairement à la méthode variationnelle, la méthode des résidus pondérés ne nécessite pas la connaissance au préalable, de la fonctionnelle d'énergie du système.

Dans le cas de l'utilisation de la méthode de Galerkin, on obtient un système algébrique symétrique facile à résoudre. On se limitera dans ce qui suit, à la méthode projective de Galerkin qui est utilisée dans le cadre de ce travail.

III.2.5 La discrétisation

L'approche de base de la méthode des éléments finis est de subdiviser le domaine d'étude en un nombre fini de sous domaines appelés éléments. L'approximation de l'inconnue se fait en chaque élément à l'aide des fonctions d'interpolation. La fonction d'interpolation est aussi définie en fonction de la géométrie de l'élément qu'on choisit préalablement et coïncide avec les nœuds de cet élément relatif aux valeurs de l'inconnue.

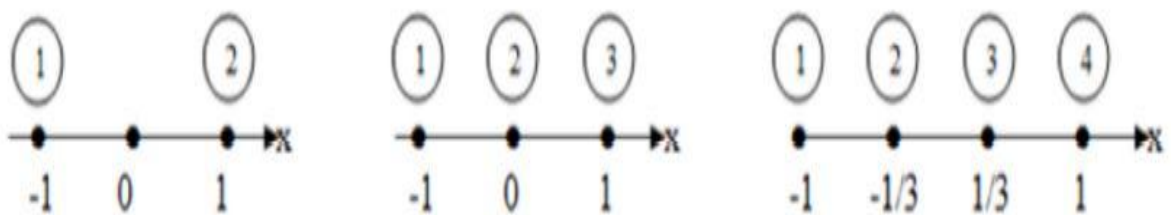
On parle alors d'interpolation nodale.

III.2.5.1 Eléments finis réels

Pour des domaines d'étude à une, deux ou trois dimensions, des éléments classiques peuvent être définis selon le degré de la courbe d'interpolation qui lui est associé. On rencontre généralement, des éléments linéaires, quadratiques ou cubiques.

Nous présentons dans ce qui suit quelques éléments :

- **Eléments à une dimension (1D)**



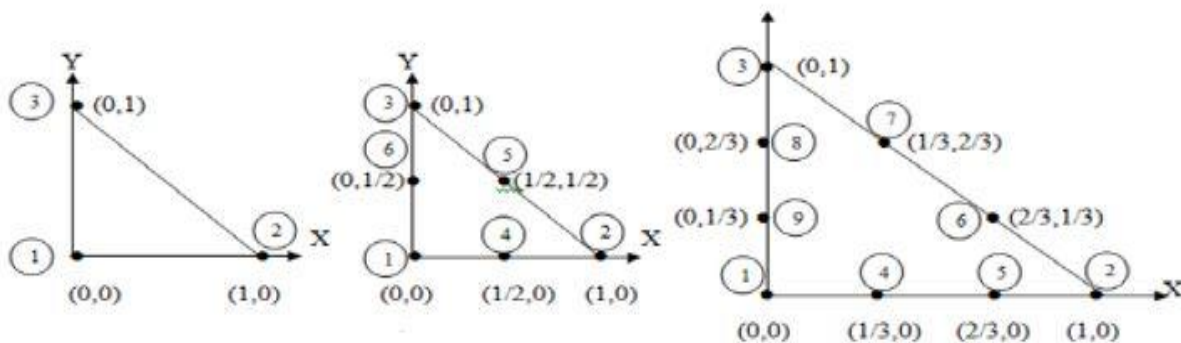
Linéaire (2 nœuds)

Quadratique (3 nœuds)

Cubique (4 nœuds)

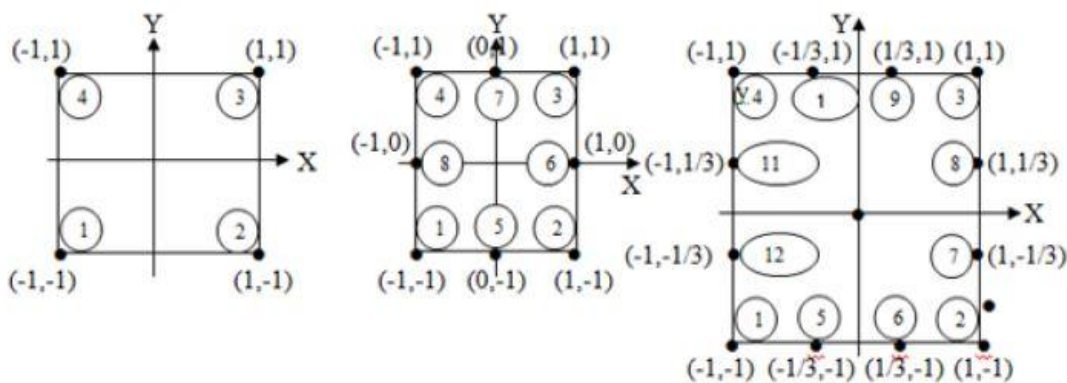
- **Eléments à deux dimensions (2D)**

- **Eléments triangulaires**



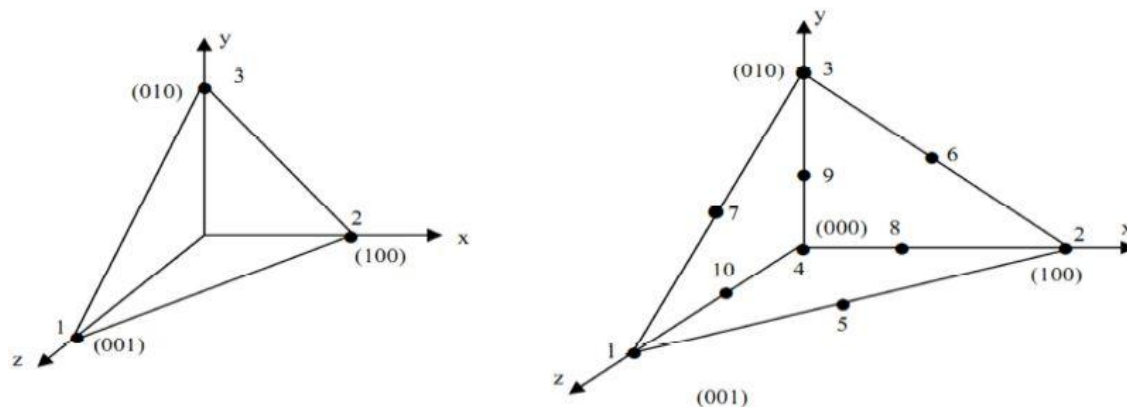
Linéaire (3 nœuds) Quadratique (6 nœuds) Cubique (9 nœuds)

➤ **Éléments carrés**



Linéaire (4 nœuds) Quadratique (8 nœuds) Cubique (12 nœuds)

• **Éléments à trois dimensions (3D)**



Linéaire (3 nœuds) Quadratique (10 nœuds)

Etant donné que le logiciel de simulation utilisé (MATLAB) fait appel à l'élément triangulaire linéaire, on ne s'intéressera dans la suite qu'à celui-ci.

III.2.5.2 Fonction d'interpolation

Les fonctions d'interpolation sont obtenues à partir du triangle de Pascal, donné ci-dessous :

$$\begin{array}{rcccl}
 & & 1 & \text{-----} & \text{ordre 0} \\
 & & & & \\
 & U & V & \text{-----} & \text{ordre 1} \\
 & & & & \\
 & U^2 & UV & V^2 & \text{-----} & \text{ordre 2} \\
 & & & & \\
 U^3 & U^2V & UV^2 & V^3 & \text{-----} & \text{ordre 3}
 \end{array}$$

Figure III.1 : Triangle de Pascal

Ces fonctions sont construites de telle sorte à obéir à deux principes.

1. Principe de l'état complet

- Le nombre de termes de la fonction doit être égal au nombre de nœuds de l'élément.
- La fonction doit contenir un terme constant.

2. Principe de comptabilité

Celui-ci est explicité par la continuité de la fonction.

Dans le cas d'un élément triangulaire linéaire, la fonction d'interpolation est donnée par :

$$u(x, y) = a.x + b.y + c \quad (\text{III.7})$$

Exemple d'une fonction d'interpolation (ordre 2)

$$A(U, V) = a + bU + cV + dUV + eU^2 + fV^2 \quad (\text{III.8})$$

La base polynomiale sera donc :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & U & V & UV & U^2 & V^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

La construction d'une fonction approchée $U^e(x)$, avec « e » comme indice relatif à l'élément étudié est différente sur chaque élément par la méthode d'approximation nodale.

Donc, la fonction d'approximation aura la forme suivante :

$$U(x) = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & \Phi_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \Phi U \quad (\text{III.10})$$

$U(x)$: La fonction d'approximation qui est identifiée à la fonction exacte.

$\Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_n$: Les fonctions de forme de l'élément.

$U_1 \ U_2 \ \dots \ U_n$: Les fonctions de forme de l'élément.

III.2.5.3 Fonction d'interpolation sur l'élément

Dans le cas d'un élément triangulaire linéaire, l'approximation d'une fonction $u(x, y)$ de valeurs u_1, u_2 et u_3 respectivement aux sommets 1, 2 et 3 est de la forme suivante :

$$u(x, y) = \begin{bmatrix} N_1(x, y) & N_2(x, y) & N_3(x, y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

Avec :

$$N_1(x, y) = \frac{1}{2T} \cdot \left[(y_3 - y_2) \cdot (x_2 - x) - (x_3 - x_2) \cdot (y_2 - y) \right] \quad (\text{III.12})$$

$$N_2(x, y) = \frac{1}{2T} \cdot \left[(y_1 - y_3) \cdot (x_3 - x) - (x_1 - x_3) \cdot (y_3 - y) \right] \quad (\text{III.13})$$

$$N_3(x, y) = \frac{1}{2T} \cdot \left[(y_2 - y_1) \cdot (x_1 - x) - (x_2 - x_1) \cdot (y_1 - y) \right] \quad (\text{III.14})$$

Où :

T : est la surface du triangle décrit par les sommets (1), (2) et (3). On remarque que :

$$N_1(x_1, y_1) = 1$$

$$N_2(x_2, y_2) = 0$$

$$N_3(x_3, y_3) = 0$$

III.2.5.4 Fonction d'approximation sur le domaine

Dans le domaine global contenant N nœuds, l'inconnu s'exprime alors :

$$A = \sum_j^N \alpha_j A_j \quad (\text{III.15})$$

N : Nombre de nœuds.

A_j : Valeur de l'inconnue au nœud j

α_j : Fonction d'interpolation au nœud j

III.3 Formulation éléments finis des équations électromagnétiques

III.3.1 équation magnétostatique

a. cas cartésien

L'équation magnétostatique dans ce cas, est donnée par l'expression suivante :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) = J_z \quad (\text{III.16})$$

La formulation intégrale de l'équation (III.16) est donnée comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) + J_z \right) \cdot dx dy = 0 \quad (\text{III.17})$$

L'équation (III.17) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \cdot dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_z \cdot dx dy \quad (\text{III.18})$$

L'application du théorème de Green au premier terme de l'équation (III.13) nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_{\Omega} \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \cdot dx dy \\ & = -\iint_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \cdot dx dy + \int_{\Gamma} \nu \cdot \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \cdot \cos(n, x) + \frac{\partial A_z}{\partial y} \cdot \cos(n, y) \right) \alpha_i \cdot d\Gamma \end{aligned} \right. \quad (\text{III.19})$$

Où $\cos(n, x)$ et $\cos(n, y)$ sont les cosinus directeurs au point considéré de la frontière Γ .

L'équation (III.19) peut être écrite comme suit :

$$\iint_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \cdot dx dy - \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial A_z}{\partial n} \cdot \alpha_i \cdot d\Gamma = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_z \cdot dx dy \quad (\text{III.20})$$

Dans le cas de conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène le terme sur la frontière s'annule, c'est-à-dire :

$$\int_{\Gamma} \nu \frac{\partial A_z}{\partial n} \cdot \alpha_i \cdot d\Gamma = 0 \quad (\text{III.21})$$

L'expression (III.20) devient alors :

$$\iint_{\Omega} \nu \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \cdot dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_z \cdot dx dy \quad (\text{III.22})$$

L'équation (III.22) en écriture condensée devient :

$$\iint_{\Omega} \nu \cdot \overrightarrow{\nabla} \alpha_i \cdot \overrightarrow{\nabla} A_z \cdot dx dy \quad (\text{III.23})$$

Sachant que :

$$\mathbf{A}_z = \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathbf{A}_j \quad (\text{III.24})$$

Et en remplaçant dans (III.22) on aboutit à :

$$\sum_{j=1}^N \left[\iint_{\Omega} \nu \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dx dy \right] \cdot \mathbf{A}_j = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_z \cdot dx dy \quad (\text{III.25})$$

Avec :

i, j : Entiers naturels variant de 1 à N.

N : Nombre de nœuds du domaine.

L'écriture de (III.25) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[M] \cdot [A] = [K] \quad (\text{III.25})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \nu \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dx dy \quad (\text{III.26})$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_z \cdot dx dy \quad (\text{III.27})$$

[A] Vecteur des inconnus du domaine d'étude.

b. Cas axisymétrique

Dans ce cas, l'équation magnétostatique est donnée par :

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial (r \cdot \mathbf{A}_\varphi)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial (r \cdot \mathbf{A}_\varphi)}{\partial z} \right) \right) = \mathbf{J}_\varphi \quad (\text{III.28})$$

En considérant comme inconnu le potentiel vecteur modifié donné par $\mathbf{A} = r \cdot \mathbf{A}_\varphi$ l'équation (III.28) devient :

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) = \mathbf{J}_\varphi \quad (\text{III.29})$$

La formulation intégrale de l'expression (III.29) est donnée comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left(\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) - \mathbf{J}_\varphi \right) dr dz = 0 \quad (\text{III.30})$$

L'équation (III.30) peut être écrite comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) dr dz = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_\varphi dr dz \quad (\text{III.31})$$

L'application du théorème de Green au premier terme de (III.31) nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_{\Omega} \alpha_i \left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) dr dz \\ & = -\iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) dr dz + \int_{\Gamma} \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial A}{\partial r} \alpha_i \cdot \cos(n, r) + \frac{\partial A}{\partial z} \alpha_i \cdot \cos(n, z) \right) d\Gamma \end{aligned} \right. \quad (\text{III.32})$$

En remplaçant (III.31) dans (III.32), on obtient :

$$\iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla} \alpha_i \cdot \overrightarrow{\nabla} A dr dz - \int_{\Gamma} \frac{\nu}{r} \frac{\partial A}{\partial n} \alpha_i d\Gamma = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_\varphi dr dz \quad (\text{III.33})$$

Dans le cas de conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène le terme sur la frontière s'annule, ce qui revient à écrire :

$$\int_{\Gamma} \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \cdot \alpha_i d\Gamma = 0$$

L'équation (III.33) devient :

$$\iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla} \alpha_i \cdot \overrightarrow{\nabla} A dr dz = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_\varphi dr dz \quad (\text{III.34})$$

Sachant que :

$$A = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j$$

Et en remplaçant dans (III.34) on obtient alors :

$$\sum_{j=1}^N \left[\iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dr dz \right] \cdot A_j = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_{\varphi} dr dz \quad (\text{III.35})$$

L'écriture de (III.28) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[M] \cdot [A] = [K] \quad (\text{III.36})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dr dz$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_{\varphi} dr dz$$

III.3.2 Equation magnétodynamique

a. cas cartésien

L'équation magnétodynamique dans le cas comportant une source est donnée par :

$$\overline{\nabla} \wedge \nu \overline{\nabla} \wedge \overline{A} + \sigma \frac{\partial \overline{A}}{\partial t} = \overline{J}_z \quad (\text{III.37})$$

En considérant le régime harmonique, l'équation (III.37) s'écrit :

$$\overline{\nabla} \wedge \nu \overline{\nabla} \wedge \overline{A} + j\sigma\omega \overline{A} = \overline{J}_z \quad (\text{III.38})$$

Après transformation (III.38) l'équation devient :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) + j\sigma\omega A_z = J_z \quad (\text{III.39})$$

La formulation intégrale de l'équation (III.39) est donnée par :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left(- \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) + j\sigma\omega A_z - J_z \right) dx dy = 0 \quad (\text{III.40})$$

L'équation (III.40) peut être réécrite comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left(- \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) dx dy + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \sigma \cdot A_z dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i J_z dx dy \quad (\text{III.41})$$

L'application du théorème de Green, nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_{\Omega} \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) dx dy & (\text{III.42}) \\ & = - \iint_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Gamma} \nu \cdot \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \cdot \alpha_i \cos(n, x) + \frac{\partial A_z}{\partial y} \cdot \alpha_i \cos(n, y) \right) d\Gamma \\ & = \iint_{\Omega} \nu \overline{\nabla \alpha_i} \cdot \overline{\nabla A_z} dx dy + \int_{\Gamma} \nu \cdot \alpha_i \frac{\partial A_z}{\partial n} d\Gamma \end{aligned} \right.$$

En remplaçant (III.41) dans (III.42) on obtient :

$$\iint_{\Omega} \nu \overline{\nabla \alpha_i} \cdot \overline{\nabla A_z} dx dy - \int_{\Gamma} \nu \cdot \alpha_i \frac{\partial A_z}{\partial n} d\Gamma + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \sigma \cdot A_z dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i J_z dx dy \quad (\text{III.43})$$

Dans le cas de conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène le terme sur la frontière s'annule, ce qui revient à écrire :

$$\int_{\Gamma} \nu \cdot \alpha_i \frac{\partial A_z}{\partial n} d\Gamma = 0$$

L'expression (III.43) devient alors :

$$\iint_{\Omega} \nu \overline{\nabla \alpha_i} \cdot \overline{\nabla A_z} dx dy + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \sigma \cdot A_z dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i J_z dx dy \quad (\text{III.44})$$

Sachant que :

$$A = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j$$

Et en remplaçant dans (III.44) on obtient alors :

$$\sum_{i=1}^N \left[\iint_{\Omega} v \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} \cdot dx dy \right] \cdot A_j + j\omega \cdot \sum_{j=1}^N \left[\iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot dx dy \right] \cdot A_j = \iint_{\Omega} \alpha_i J_z \cdot dx dy \quad (\text{III.45})$$

L'écriture de (III.45) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[M] \cdot [A] + j\omega \cdot [L] \cdot [A] = [K] \quad (\text{III.46})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} v \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} \cdot dx dy$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot dx dy$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i J_z \cdot dx dy$$

b. Cas axisymétrique

En considérant comme précédemment le régime harmonique ; la formulation intégrale dans ce cas, est donnée par l'expression suivante :

$$-\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right) \cdot dr dz + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \sigma \cdot A_z \cdot \frac{dr dz}{r} = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{\varphi} \cdot dr dz \quad (\text{III.47})$$

L'application du théorème de Green nous permet d'écrire :

$$\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) \cdot dr dz - \int_{\Gamma} \frac{v}{r} \cdot \alpha_i \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \cdot d\Gamma + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \sigma \cdot A \cdot \frac{dr dz}{r} = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{\varphi} \cdot dr dz \quad (\text{III.48})$$

Dans le cas de conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène le terme sur la frontière s'annule, ce qui revient à écrire :

$$\sum_{j=1}^N \left[\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} \cdot dr dz \right] \cdot A_j + j\omega \sum_{j=1}^N \left[\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \sigma \cdot A \cdot \frac{dr dz}{r} \right] \cdot A_j = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{\varphi} \cdot dr dz \quad (\text{III.49})$$

L'écriture de (III.49) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[M] \cdot [A] + j\omega \cdot [L] \cdot [A] = [K] \quad (\text{III.50})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} \cdot dr dz$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot \frac{dr dz}{r}$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i J_z \cdot dr dz$$

$$\bar{A} = A_r + jA_i$$

III.4 Conclusion

Ce chapitre offre une présentation détaillée de la méthode des éléments finis, les différentes méthodes de résolutions des équations aux dérivées partielles ainsi que les différentes formulations électromagnétiques qui résolvent les équations de la magnétostatique et la magnétodynamique.

III.1 Introduction

La simulation numérique est devenue un puissant moyen d'investigation qui tend à prendre une place de plus en plus importante, à côté de l'approche expérimentale classique, dans les sciences et techniques. Dans les domaines de la mécanique, de la physique ou de la chimie, l'utilisation de modèles fondés sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles est naturelle (électromagnétisme, chimie...). Plus récemment, ce type de modélisation a fait son apparition dans d'autres domaines tels que la biologie et l'économie (finance en particulier). Hormis quelques cas particuliers, il n'est pas possible de résoudre analytiquement ces systèmes d'équations, et il est donc obligatoire d'avoir recours à des techniques d'approximation [25]. Il en existe un certain nombre, dans notre cas on se concentrera sur la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis, apparue dans les années 50 pour traiter des problèmes de mécanique des structures, a connu depuis lors un développement continu et est présentée, aujourd'hui, dans tous les domaines d'application : mécanique, physique, chimie, économie, finance et biologie. Elle est maintenant utilisée dans la plupart des logiciels de calcul scientifique, et de nombreux ingénieurs y sont confrontés dans le cadre de leur activité de modélisation et de simulation numérique. Il est donc important d'en maîtriser les divers aspects [25].

Ce chapitre est consacré à la présentation des éléments essentiels de la méthode des éléments finis.

III.2 Méthodes numériques

L'utilisation des méthodes numériques pour la modélisation des dispositifs électromagnétiques, est devenue une option incontournable au vu des avantages qu'elles présentent dans la prise en compte des problèmes de type vectoriel, des non-linéarités et des géométries complexes [18].

III.2.1 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques [26]. Elle fait appel aux trois domaines suivants :

Chapitre III

Méthodes numériques

- Services de l'ingénieur pour décrire les lois de la physique (équations aux dérivées partielles)
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- Outils informatiques pour exécuter efficacement les calculs sur l'ordinateur.

III.2.2 Etapes de résolution par la MEF

D'une façon générale, la résolution par la MEF inclut les étapes suivantes :

- Obtention de la formulation variationnelle du problème et définition des espaces fonctionnels de solutions admissibles.
- Réalisation d'un maillage correspondant à la discrétisation du domaine d'étude en éléments (triangles, tétraèdres, hexaèdres...) sur lesquels les champs sont écrits en termes d'un nombre fini de degrés de liberté et de fonctions de base à support local
- Calcul des matrices élémentaires qui, après assemblage, génèrent un système matriciel creux.
- Résolution du système algébrique pour l'obtention d'une solution approchée du problème.

III.2.3 Principe de la méthode variationnelle

La méthode variationnelle nécessite la connaissance a priori de la fonctionnelle d'énergie du système à étudier. Celle ci est déterminée à partir du principe de l'action Hamiltonienne qui stipule l'existence d'une fonctionnelle type intégrale définie par [17] [24] :

$$F(A) = \int_{\Omega} L(x_i, q_i, q'_{ik}) d\Omega \quad (\text{III.1})$$

L : Fonction de Lagrange déduite de la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.

Ω : Domaine d'étude.

x_i : Variable.

q_i : Variable d'état.

$q'_{ik} = \frac{\partial q_i}{\partial x_{ik}}$: Dérivées des fonctions d'état

Avec :

$$L(x_i, q_i, q'_{ik}) = W_c - W_p \quad (\text{III.2})$$

W_c : Energie cinétique.

W_p : Energie potentielle.

La résolution du problème variationnel ainsi défini, revient à minimiser la fonctionnel d'énergie $F(A)$. La minimisation est effectuée en utilisant le principe de Rayleigh-Ritz qui s'énonce comme suit [27] : « *La dérivée de la fonctionnelle d'énergie $F(A)$ par rapport à chaque inconnue au nœud est nulle* ».

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = 0 \quad (\text{III.3})$$

Où :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_2} = \dots = \frac{\partial F(A)}{\partial A_N} = 0 \quad (\text{III.4})$$

Où :

N : Nombre de nœuds du domaine d'étude.

A : Est l'inconnu aux nœuds i du domaine.

III.2.4 Méthode des résidus pondérés

III.2.4.1 Principe de la méthode

La méthode des résidus pondérés est basée sur la détermination du résidu par :

$$R = L(A) - f_v \quad (\text{III.5})$$

Où :

R : représente le résidu de l'approximation.

$L(A)$: Opérateur différentiel.

f_v : Fonction définie sur le domaine d'étude Ω .

A : L'inconnue du problème.

A l'aide de fonctions de pondération bien choisies, on impose à l'intégrale du résidu de s'annuler en « n » points du domaine Ω :

$$\int_{\Omega} R_i \Phi_i d\Omega = 0 \quad (\text{III.6})$$

Φ_i : Fonction de projection.

Les valeurs de A qui permettent d'annuler l'intégrale, sont les solutions du système algébrique obtenu.

III.2.4.2 Différentes méthodes déduites des résidus pondérés

Le choix des fonctions de pondération appelées aussi fonctions de projection, conduit à plusieurs méthodes. Parmi celles-ci nous citerons :

- La méthode de collocation par point.
- La méthode des moindres carrés.
- La méthode de Galerkin.

La méthode de collocation par point utilise les fonctions de Dirac comme fonction de pondération, la méthode des moindres carrés est basée sur la minimisation de la norme quadratique de l'erreur sur l'équation et les conditions aux limites. La méthode de Galerkin consiste à choisir des fonctions de projection identiques aux fonctions d'approximation.

Contrairement à la méthode variationnelle, la méthode des résidus pondérés ne nécessite pas la connaissance au préalable, de la fonctionnelle d'énergie du système.

Dans le cas de l'utilisation de la méthode de Galerkin, on obtient un système algébrique symétrique facile à résoudre. On se limitera dans ce qui suit, à la méthode projective de Galerkin qui est utilisée dans le cadre de ce travail.

III.2.5 La discrétisation

L'approche de base de la méthode des éléments finis est de subdiviser le domaine d'étude en un nombre fini de sous domaines appelés éléments. L'approximation de l'inconnue se fait en chaque élément à l'aide des fonctions d'interpolation. La fonction d'interpolation est aussi définie en fonction de la géométrie de l'élément qu'on choisit préalablement et coïncide avec les nœuds de cet élément relatif aux valeurs de l'inconnue.

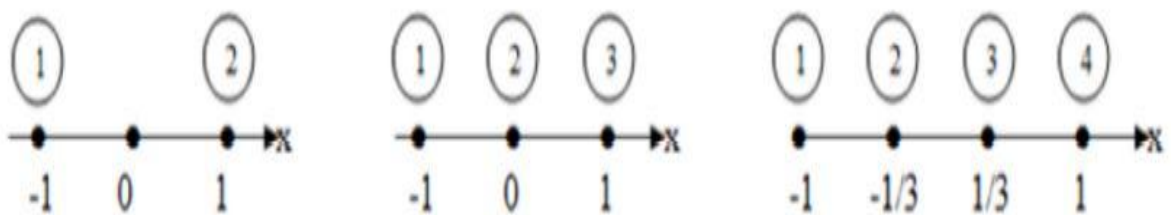
On parle alors d'interpolation nodale.

III.2.5.1 Eléments finis réels

Pour des domaines d'étude à une, deux ou trois dimensions, des éléments classiques peuvent être définis selon le degré de la courbe d'interpolation qui lui est associé. On rencontre généralement, des éléments linéaires, quadratiques ou cubiques.

Nous présentons dans ce qui suit quelques éléments :

- **Eléments à une dimension (1D)**



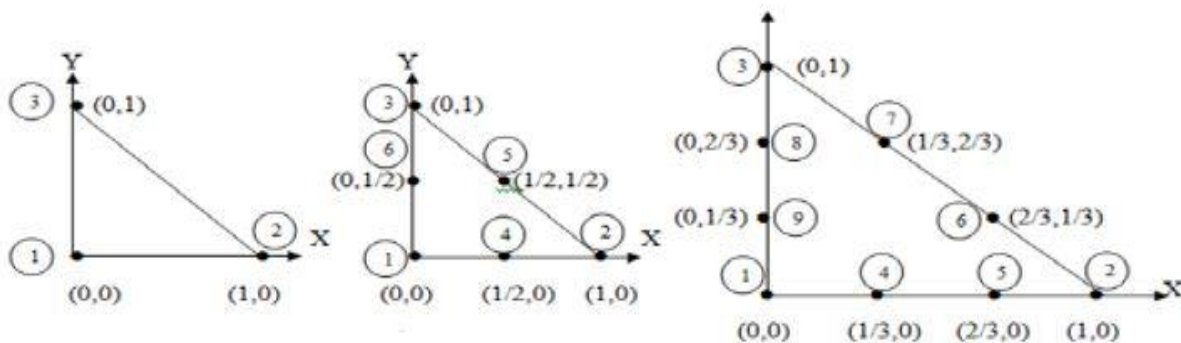
Linéaire (2 nœuds)

Quadratique (3 nœuds)

Cubique (4 nœuds)

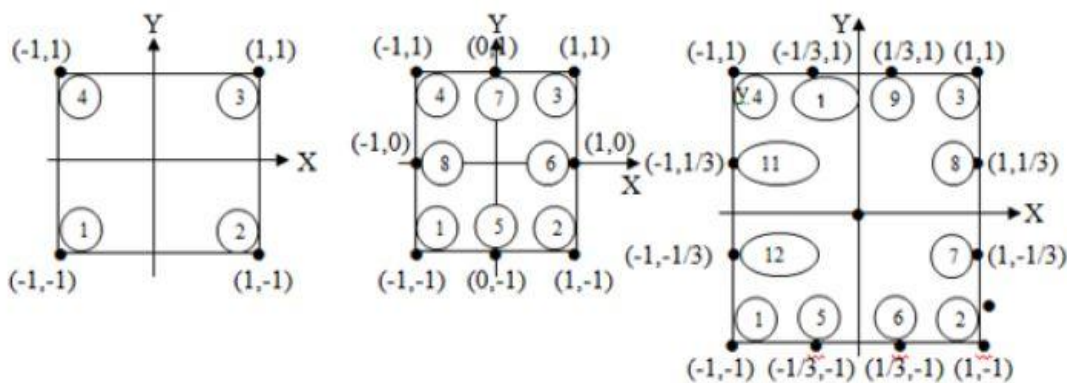
- **Eléments à deux dimensions (2D)**

- **Eléments triangulaires**



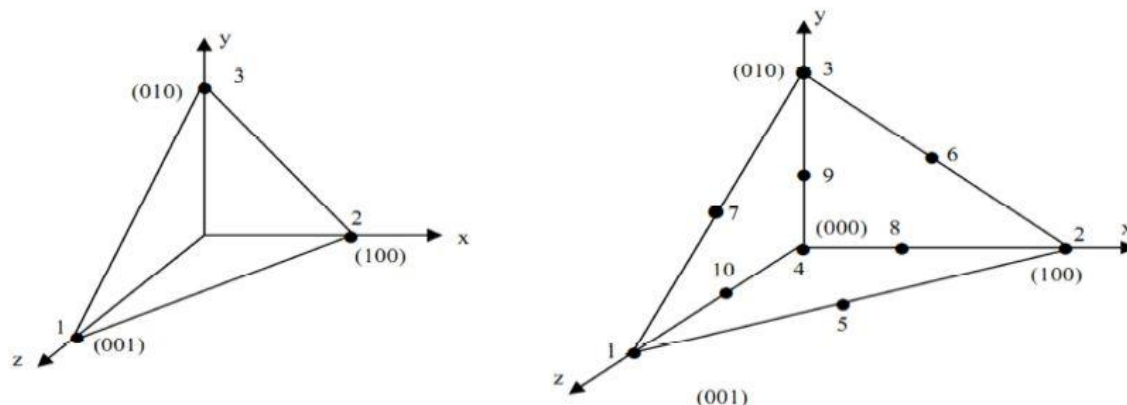
Linéaire (3 nœuds) Quadratique (6 nœuds) Cubique (9 nœuds)

➤ **Éléments carrés**



Linéaire (4 nœuds) Quadratique (8 nœuds) Cubique (12 nœuds)

• **Éléments à trois dimensions (3D)**



Linéaire (3 nœuds) Quadratique (10 nœuds)

Etant donné que le logiciel de simulation utilisé (MATLAB) fait appel à l'élément triangulaire linéaire, on ne s'intéressera dans la suite qu'à celui-ci.

III.2.5.2 Fonction d'interpolation

Les fonctions d'interpolation sont obtenues à partir du triangle de Pascal, donné ci-dessous :

$$\begin{array}{rcccl}
 & & 1 & \text{-----} & \text{ordre 0} \\
 & & & & \\
 & U & V & \text{-----} & \text{ordre 1} \\
 & & & & \\
 & U^2 & UV & V^2 & \text{-----} & \text{ordre 2} \\
 & & & & \\
 U^3 & U^2V & UV^2 & V^3 & \text{-----} & \text{ordre 3}
 \end{array}$$

Figure III.1 : Triangle de Pascal

Ces fonctions sont construites de telle sorte à obéir à deux principes.

1. Principe de l'état complet

- Le nombre de termes de la fonction doit être égal au nombre de nœuds de l'élément.
- La fonction doit contenir un terme constant.

2. Principe de comptabilité

Celui-ci est explicité par la continuité de la fonction.

Dans le cas d'un élément triangulaire linéaire, la fonction d'interpolation est donnée par :

$$u(x, y) = a.x + b.y + c \quad (\text{III.7})$$

Exemple d'une fonction d'interpolation (ordre 2)

$$A(U, V) = a + bU + cV + dUV + eU^2 + fV^2 \quad (\text{III.8})$$

La base polynomiale sera donc :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & U & V & UV & U^2 & V^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

La construction d'une fonction approchée $U^e(x)$, avec « e » comme indice relatif à l'élément étudié est différente sur chaque élément par la méthode d'approximation nodale.

Donc, la fonction d'approximation aura la forme suivante :

$$U(x) = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & \Phi_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \Phi U \quad (\text{III.10})$$

$U(x)$: La fonction d'approximation qui est identifiée à la fonction exacte.

$\Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_n$: Les fonctions de forme de l'élément.

$U_1 \ U_2 \ \dots \ U_n$: Les fonctions de forme de l'élément.

III.2.5.3 Fonction d'interpolation sur l'élément

Dans le cas d'un élément triangulaire linéaire, l'approximation d'une fonction $u(x, y)$ de valeurs u_1, u_2 et u_3 respectivement aux sommets 1, 2 et 3 est de la forme suivante :

$$u(x, y) = \begin{bmatrix} N_1(x, y) & N_2(x, y) & N_3(x, y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

Avec :

$$N_1(x, y) = \frac{1}{2T} \cdot \left[(y_3 - y_2) \cdot (x_2 - x) - (x_3 - x_2) \cdot (y_2 - y) \right] \quad (\text{III.12})$$

$$N_2(x, y) = \frac{1}{2T} \cdot \left[(y_1 - y_3) \cdot (x_3 - x) - (x_1 - x_3) \cdot (y_3 - y) \right] \quad (\text{III.13})$$

$$N_3(x, y) = \frac{1}{2T} \cdot \left[(y_2 - y_1) \cdot (x_1 - x) - (x_2 - x_1) \cdot (y_1 - y) \right] \quad (\text{III.14})$$

Où :

T : est la surface du triangle décrit par les sommets (1), (2) et (3). On remarque que :

$$N_1(x_1, y_1) = 1$$

$$N_2(x_2, y_2) = 0$$

$$N_3(x_3, y_3) = 0$$

III.2.5.4 Fonction d'approximation sur le domaine

Dans le domaine global contenant N nœuds, l'inconnu s'exprime alors :

$$A = \sum_j^N \alpha_j A_j \quad (\text{III.15})$$

N : Nombre de nœuds.

A_j : Valeur de l'inconnue au nœud j

α_j : Fonction d'interpolation au nœud j

III.3 Formulation éléments finis des équations électromagnétiques

III.3.1 équation magnétostatique

a. cas cartésien

L'équation magnétostatique dans ce cas, est donnée par l'expression suivante :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) = J_z \quad (\text{III.16})$$

La formulation intégrale de l'équation (III.16) est donnée comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) + J_z \right) \cdot dx dy = 0 \quad (\text{III.17})$$

L'équation (III.17) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \cdot dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_z \cdot dx dy \quad (\text{III.18})$$

L'application du théorème de Green au premier terme de l'équation (III.13) nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \cdot dx dy \\ & = -\iint_{\Omega} \nu \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \cdot dx dy + \int_{\Gamma} \nu \cdot \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \cdot \cos(n, x) + \frac{\partial A_z}{\partial y} \cdot \cos(n, y) \right) \alpha_i \cdot d\Gamma \end{aligned} \right. \quad (\text{III.19})$$

Où $\cos(n, x)$ et $\cos(n, y)$ sont les cosinus directeurs au point considéré de la frontière Γ .

L'équation (III.19) peut être écrite comme suit :

$$\iint_{\Omega} \nu \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \cdot dx dy - \int_{\Gamma} \nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \cdot \alpha_i \cdot d\Gamma = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_z \cdot dx dy \quad (\text{III.20})$$

Dans le cas de conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène le terme sur la frontière s'annule, c'est-à-dire :

$$\int_{\Gamma} \nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial n} \cdot \alpha_i \cdot d\Gamma = 0 \quad (\text{III.21})$$

L'expression (III.20) devient alors :

$$\iint_{\Omega} \nu \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \cdot dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_z \cdot dx dy \quad (\text{III.22})$$

L'équation (III.22) en écriture condensée devient :

$$\iint_{\Omega} \nu \cdot \overrightarrow{\nabla} \alpha_i \cdot \overrightarrow{\nabla} A_z \cdot dx dy \quad (\text{III.23})$$

Sachant que :

$$\mathbf{A}_z = \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathbf{A}_j \quad (\text{III.24})$$

Et en remplaçant dans (III.22) on aboutit à :

$$\sum_{j=1}^N \left[\iint_{\Omega} \nu \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dx dy \right] \cdot \mathbf{A}_j = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_z \cdot dx dy \quad (\text{III.25})$$

Avec :

i, j : Entiers naturels variant de 1 à N.

N : Nombre de nœuds du domaine.

L'écriture de (III.25) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[M] \cdot [A] = [K] \quad (\text{III.25})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \nu \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dx dy \quad (\text{III.26})$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_z \cdot dx dy \quad (\text{III.27})$$

[A] Vecteur des inconnus du domaine d'étude.

b. Cas axisymétrique

Dans ce cas, l'équation magnétostatique est donnée par :

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial (r \cdot \mathbf{A}_\varphi)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial (r \cdot \mathbf{A}_\varphi)}{\partial z} \right) \right) = \mathbf{J}_\varphi \quad (\text{III.28})$$

En considérant comme inconnu le potentiel vecteur modifié donné par $\mathbf{A} = r \cdot \mathbf{A}_\varphi$ l'équation (III.28) devient :

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) = \mathbf{J}_\varphi \quad (\text{III.29})$$

La formulation intégrale de l'expression (III.29) est donnée comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left(\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) - \mathbf{J}_\varphi \right) dr dz = 0 \quad (\text{III.30})$$

L'équation (III.30) peut être écrite comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) dr dz = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_\varphi dr dz \quad (\text{III.31})$$

L'application du théorème de Green au premier terme de (III.31) nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_{\Omega} \alpha_i \left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) dr dz \\ & = -\iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) dr dz + \int_{\Gamma} \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial A}{\partial r} \alpha_i \cdot \cos(n, r) + \frac{\partial A}{\partial z} \alpha_i \cdot \cos(n, z) \right) d\Gamma \end{aligned} \right. \quad (\text{III.32})$$

En remplaçant (III.31) dans (III.32), on obtient :

$$\iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla} \alpha_i \cdot \overrightarrow{\nabla} A dr dz - \int_{\Gamma} \frac{\nu}{r} \frac{\partial A}{\partial n} \alpha_i d\Gamma = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_\varphi dr dz \quad (\text{III.33})$$

Dans le cas de conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène le terme sur la frontière s'annule, ce qui revient à écrire :

$$\int_{\Gamma} \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \cdot \alpha_i d\Gamma = 0$$

L'équation (III.33) devient :

$$\iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla} \alpha_i \cdot \overrightarrow{\nabla} A dr dz = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_\varphi dr dz \quad (\text{III.34})$$

Sachant que :

$$A = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j$$

Et en remplaçant dans (III.34) on obtient alors :

$$\sum_{j=1}^N \left[\iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dr dz \right] \cdot A_j = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_{\varphi} dr dz \quad (\text{III.35})$$

L'écriture de (III.28) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[M] \cdot [A] = [K] \quad (\text{III.36})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dr dz$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_{\varphi} dr dz$$

III.3.2 Equation magnétodynamique

a. cas cartésien

L'équation magnétodynamique dans le cas comportant une source est donnée par :

$$\overline{\nabla} \wedge \nu \overline{\nabla} \wedge \overline{A} + \sigma \frac{\partial \overline{A}}{\partial t} = \overline{J}_z \quad (\text{III.37})$$

En considérant le régime harmonique, l'équation (III.37) s'écrit :

$$\overline{\nabla} \wedge \nu \overline{\nabla} \wedge \overline{A} + j\sigma\omega \overline{A} = \overline{J}_z \quad (\text{III.38})$$

Après transformation (III.38) l'équation devient :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) + j\sigma\omega A_z = J_z \quad (\text{III.39})$$

La formulation intégrale de l'équation (III.39) est donnée par :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left(- \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) + j\sigma\omega A_z - J_z \right) dx dy = 0 \quad (\text{III.40})$$

L'équation (III.40) peut être réécrite comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left(- \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) dx dy + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \sigma \cdot A_z dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i J_z dx dy \quad (\text{III.41})$$

L'application du théorème de Green, nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_{\Omega} \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) dx dy & (\text{III.42}) \\ & = - \iint_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Gamma} \nu \cdot \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \cdot \alpha_i \cos(n, x) + \frac{\partial A_z}{\partial y} \cdot \alpha_i \cos(n, y) \right) d\Gamma \\ & = \iint_{\Omega} \nu \overline{\nabla \alpha_i} \cdot \overline{\nabla A_z} dx dy + \int_{\Gamma} \nu \cdot \alpha_i \frac{\partial A_z}{\partial n} d\Gamma \end{aligned} \right.$$

En remplaçant (III.41) dans (III.42) on obtient :

$$\iint_{\Omega} \nu \overline{\nabla \alpha_i} \cdot \overline{\nabla A_z} dx dy - \int_{\Gamma} \nu \cdot \alpha_i \frac{\partial A_z}{\partial n} d\Gamma + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \sigma \cdot A_z dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i J_z dx dy \quad (\text{III.43})$$

Dans le cas de conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène le terme sur la frontière s'annule, ce qui revient à écrire :

$$\int_{\Gamma} \nu \cdot \alpha_i \frac{\partial A_z}{\partial n} d\Gamma = 0$$

L'expression (III.43) devient alors :

$$\iint_{\Omega} \nu \overline{\nabla \alpha_i} \cdot \overline{\nabla A_z} dx dy + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \sigma \cdot A_z dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i J_z dx dy \quad (\text{III.44})$$

Sachant que :

$$A = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j$$

Et en remplaçant dans (III.44) on obtient alors :

$$\sum_{i=1}^N \left[\iint_{\Omega} v \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} \cdot dx dy \right] \cdot A_j + j\omega \cdot \sum_{j=1}^N \left[\iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot dx dy \right] \cdot A_j = \iint_{\Omega} \alpha_i J_z \cdot dx dy \quad (\text{III.45})$$

L'écriture de (III.45) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[M] \cdot [A] + j\omega \cdot [L] \cdot [A] = [K] \quad (\text{III.46})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} v \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} \cdot dx dy$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot dx dy$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i J_z \cdot dx dy$$

b. Cas axisymétrique

En considérant comme précédemment le régime harmonique ; la formulation intégrale dans ce cas, est donnée par l'expression suivante :

$$-\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right) \cdot dr dz + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \sigma \cdot A_z \cdot \frac{dr dz}{r} = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{\varphi} \cdot dr dz \quad (\text{III.47})$$

L'application du théorème de Green nous permet d'écrire :

$$\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) \cdot dr dz - \int_{\Gamma} \frac{v}{r} \cdot \alpha_i \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \cdot d\Gamma + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \sigma \cdot A \cdot \frac{dr dz}{r} = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{\varphi} \cdot dr dz \quad (\text{III.48})$$

Dans le cas de conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène le terme sur la frontière s'annule, ce qui revient à écrire :

$$\sum_{j=1}^N \left[\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} \cdot dr dz \right] \cdot A_j + j\omega \sum_{j=1}^N \left[\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \sigma \cdot A \cdot \frac{dr dz}{r} \right] \cdot A_j = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{\varphi} \cdot dr dz \quad (\text{III.49})$$

L'écriture de (III.49) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[M] \cdot [A] + j\omega \cdot [L] \cdot [A] = [K] \quad (\text{III.50})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} \cdot dr \, dz$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot \frac{dr \, dz}{r}$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_z \cdot dr \, dz$$

$$\bar{A} = A_r + jA_i$$

III.4 Conclusion

Ce chapitre offre une présentation détaillée de la méthode des éléments finis, les différentes méthodes de résolutions des équations aux dérivées partielles ainsi que les différentes formulations électromagnétiques qui résolvent les équations de la magnétostatique et la magnétodynamique.

Chapitre IV

Application et validation

IV.1 Introduction

Dans cette partie, un programme de calcul sous MATLAB a été établi en utilisant la méthode des éléments finis pour l'étude et la caractérisation de la charge.

IV.2 Caractéristiques géométriques et électromagnétiques du système

- **Le capteur (inducteur)**
 - Longueur : 1 mm
 - Largeur : 0.5 mm
 - Perméabilité magnétique : $4\pi \cdot 10^{-7}$ [H/m]
 - Densité de courant : $2 \cdot 10^3$ [A/m²]

- **La charge (induit)**
 - Longueur : 110 mm
 - Largeur : 4 mm
 - Conductivité électrique : 10^{-6} [$\Omega \cdot m$]⁻¹
 - Perméabilité magnétique : $4\pi \cdot 10^{-7}$ [H/m]

- **L'air**
 - Conductivité électrique : 0
 - Perméabilité magnétique : $4\pi \cdot 10^{-7}$ [H/m]

IV.3 Formulation électromagnétique des régions

L'équation en terme de potentiel vecteur magnétique est donnée comme suit :

$$-\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) + j\sigma\omega A = \mathbf{J}_s \quad (\text{IV.1})$$

L'adaptation de l'équation (IV.1) pour les différentes régions du système donne :

- **Dans le capteur (inducteur)**

$$-\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) = \mathbf{J}_s \quad (\text{IV.2})$$

- **Dans la charge (induit)**

$$-\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) + j\sigma\omega A = 0 \quad (\text{IV.3})$$

- Dans l'air

$$-\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (\text{IV.4})$$

IV.4 Domaine d'étude

Le domaine de résolution et les conditions aux limites sont représentés dans la figure suivante :

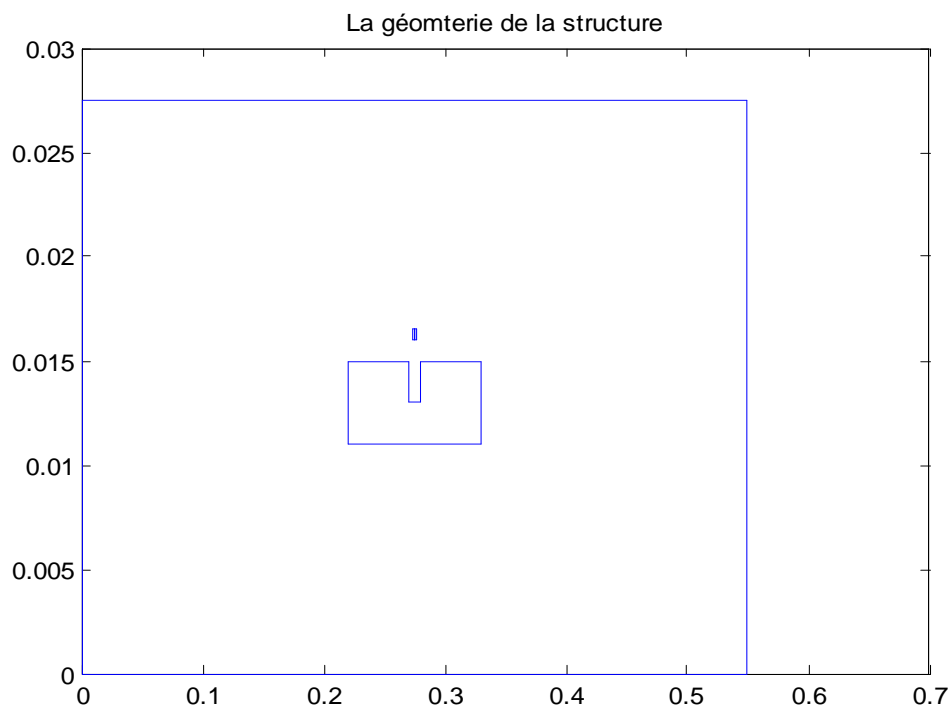


Figure IV.1 : Domaine de résolution

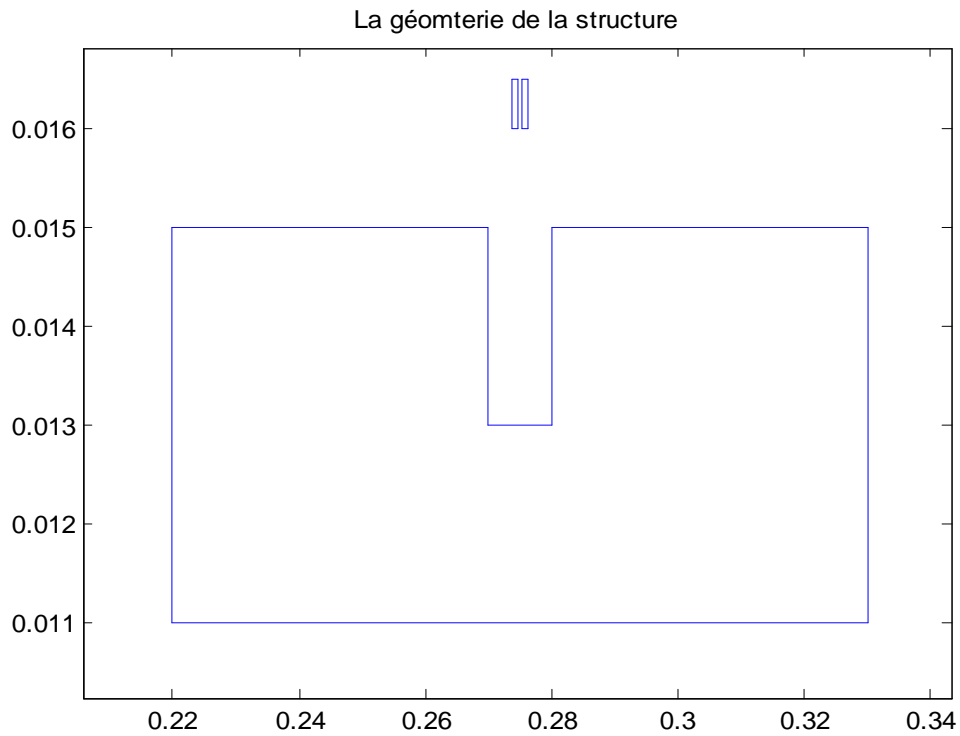


Figure IV.2 : Domaine de résolution

IV.5 Maillage du domaine

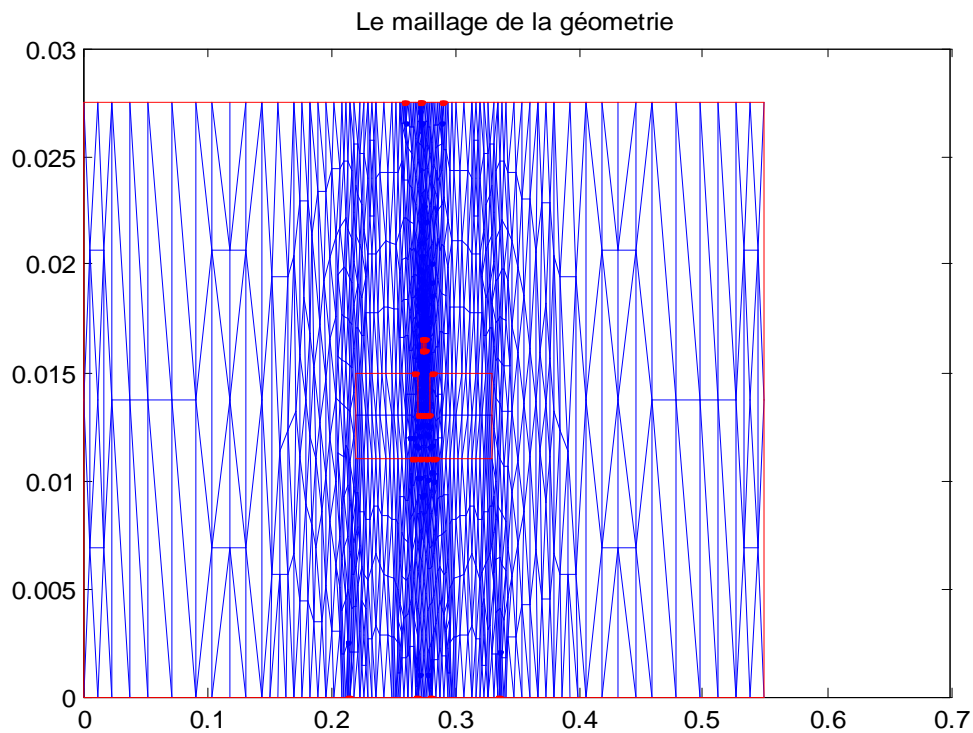


Figure IV.3 : Maillage du domaine

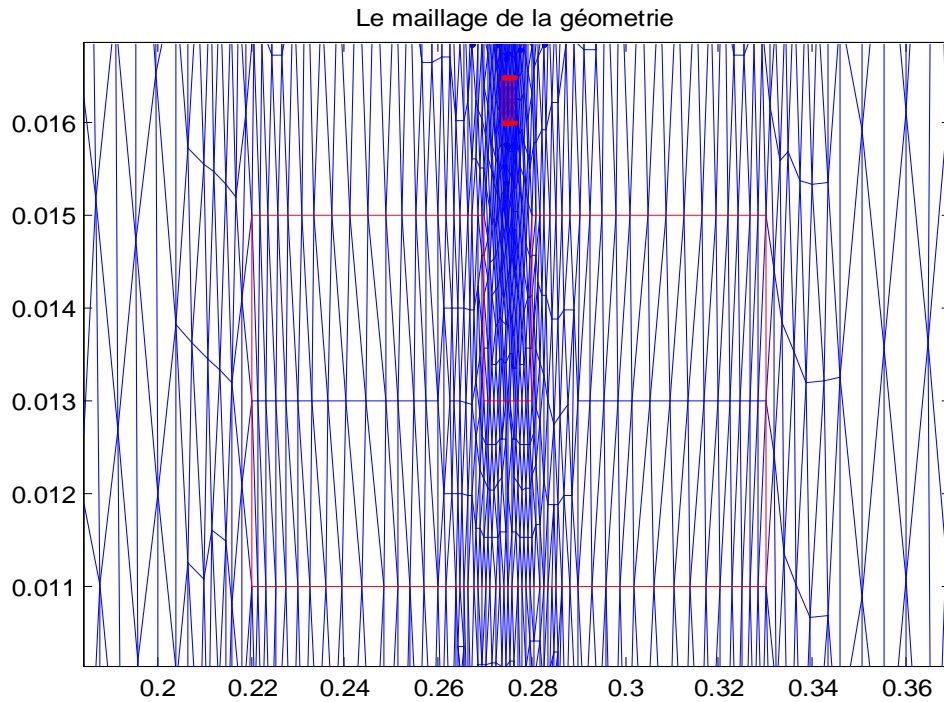


Figure IV.4 : Maillage du domaine

IV.6 Résultats et interprétations

Dans cette application, on considère une plaque contenant un défaut (fissure), le capteur est alimenté avec une fréquence $f=100$ KHz et une densité de courant $J_s=2*10^3$ A/m².

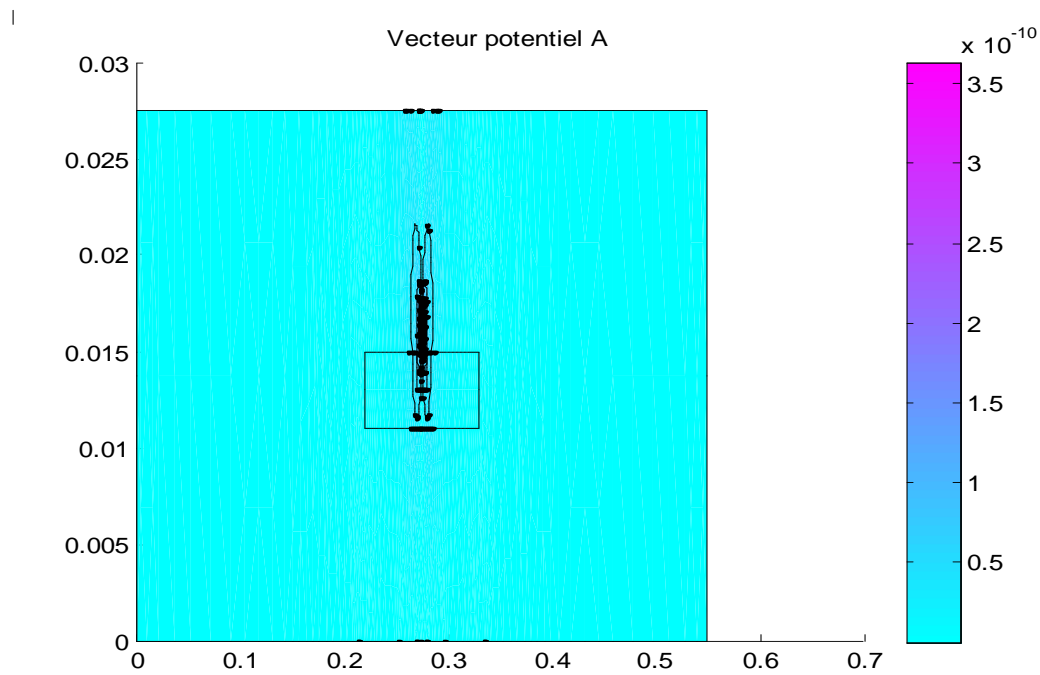


Figure IV.5 : Représentation du potentiel vecteur magnétique

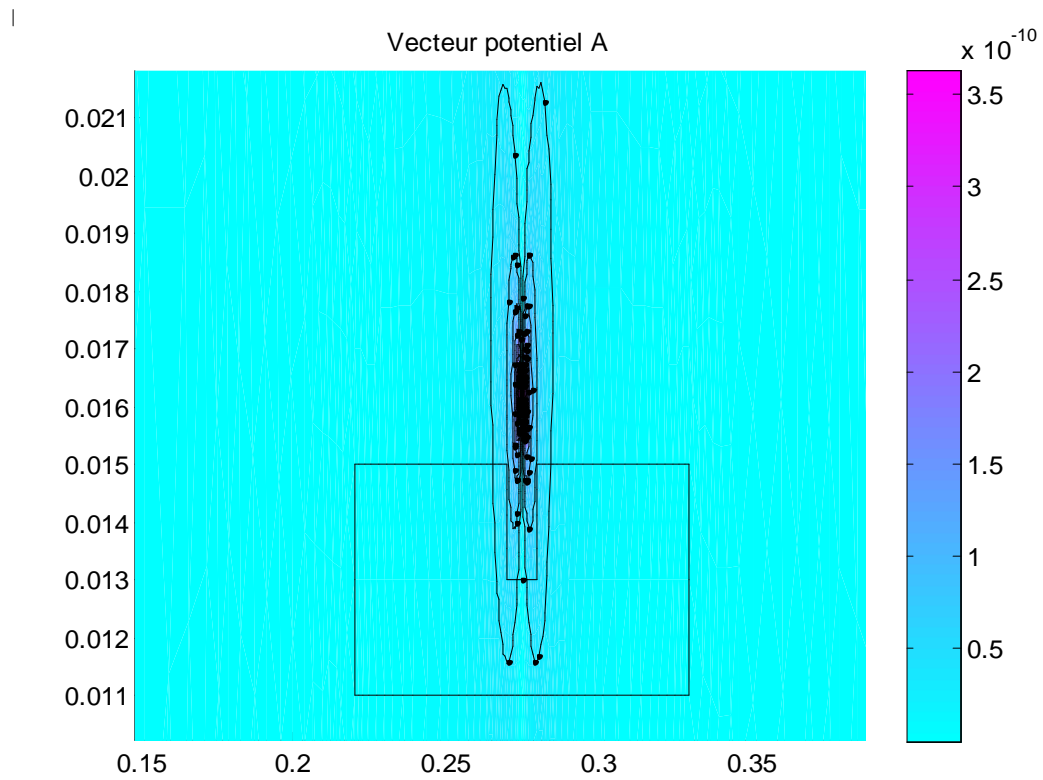


Figure IV.6 : Représentation du potentiel vecteur magnétique

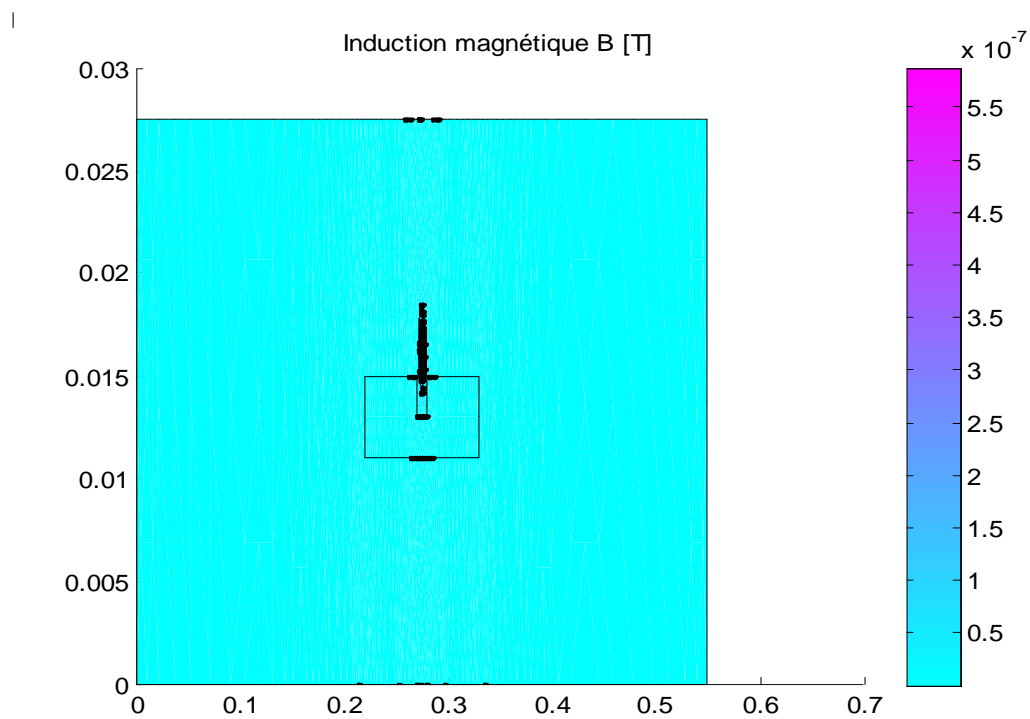


Figure IV.7 : Représentation de l'induction magnétique

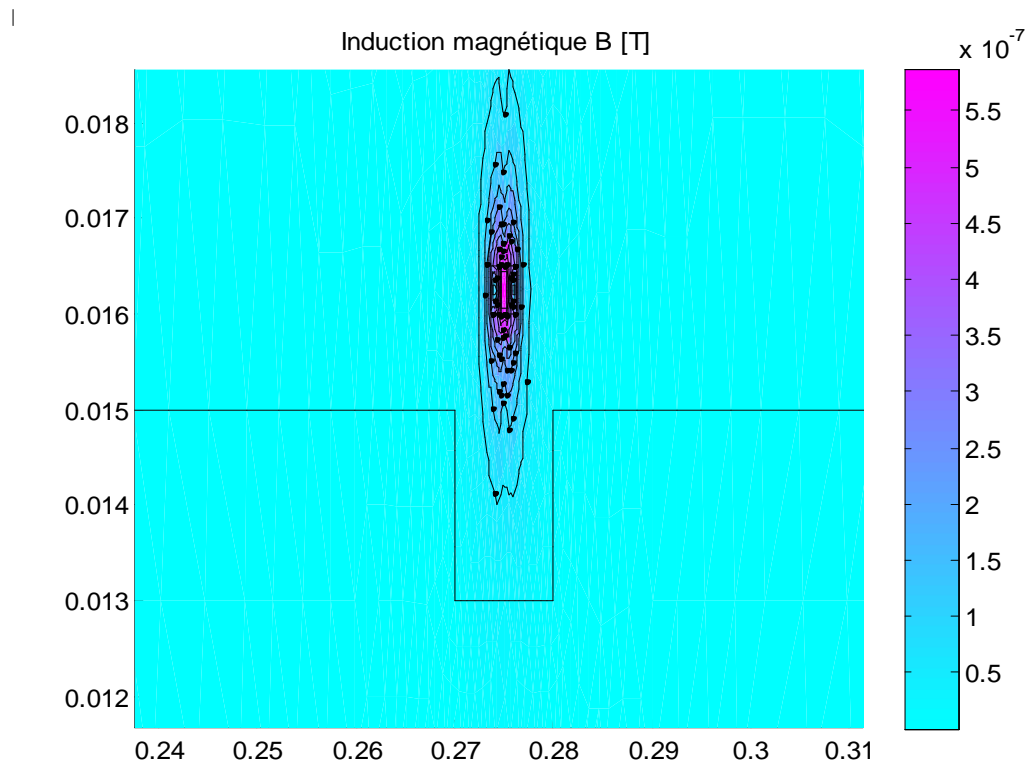


Figure IV.8 : Représentation de l'induction magnétique

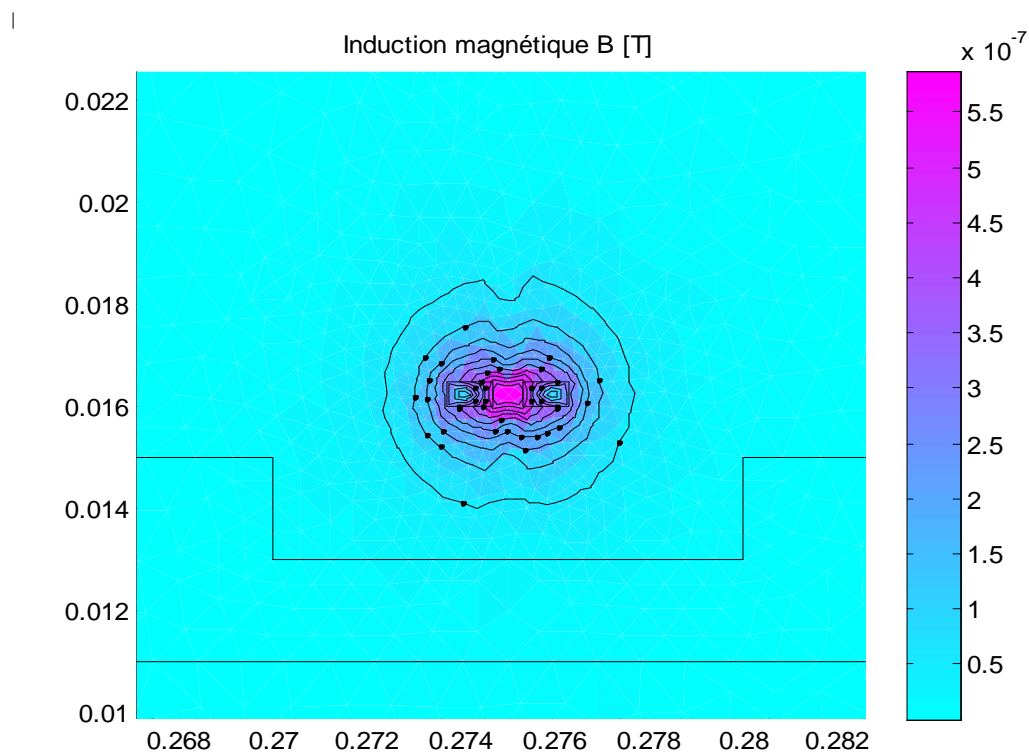


Figure IV.9 : Représentation de l'induction magnétique

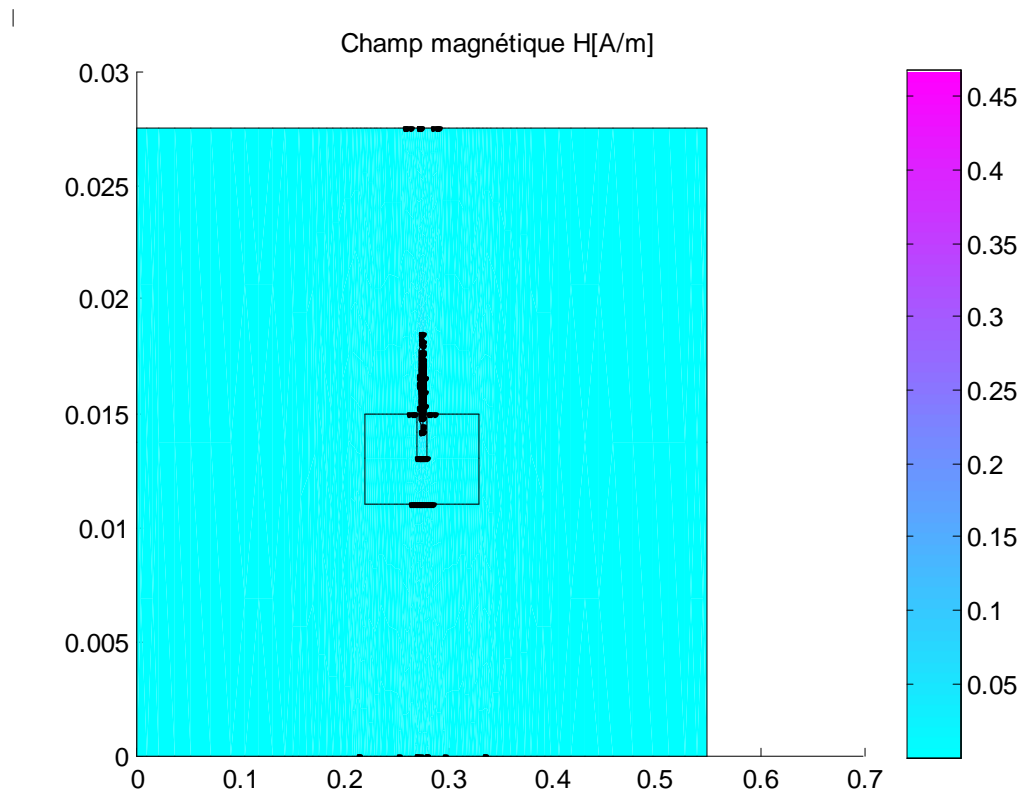


Figure IV.10 : Représentation du champ magnétique

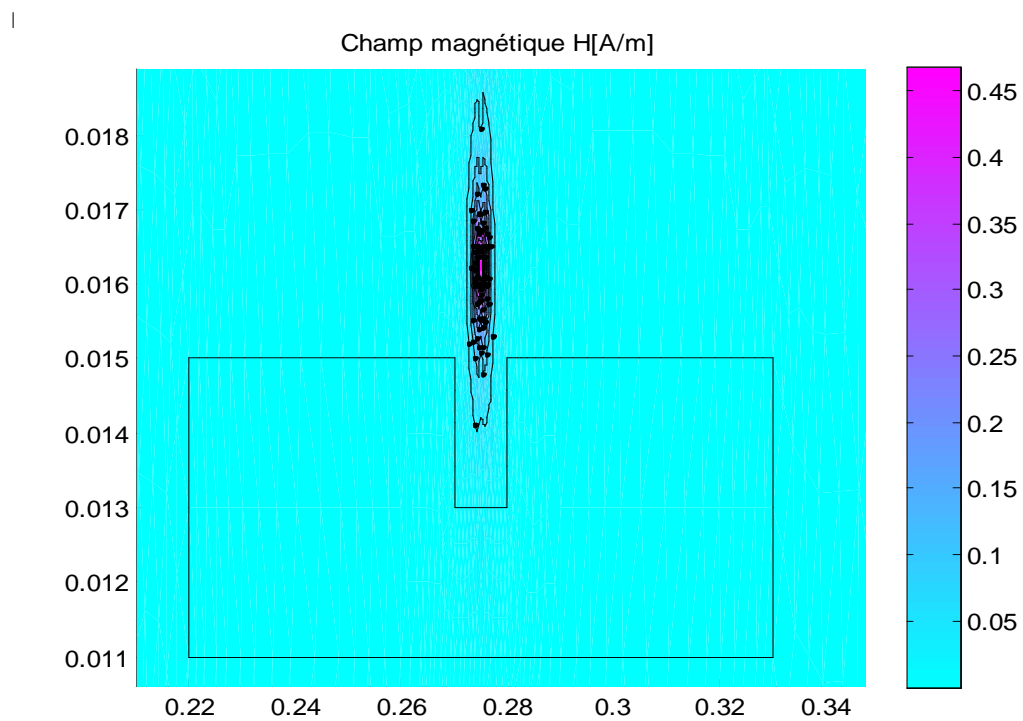


Figure IV.11 : Représentation du champ magnétique

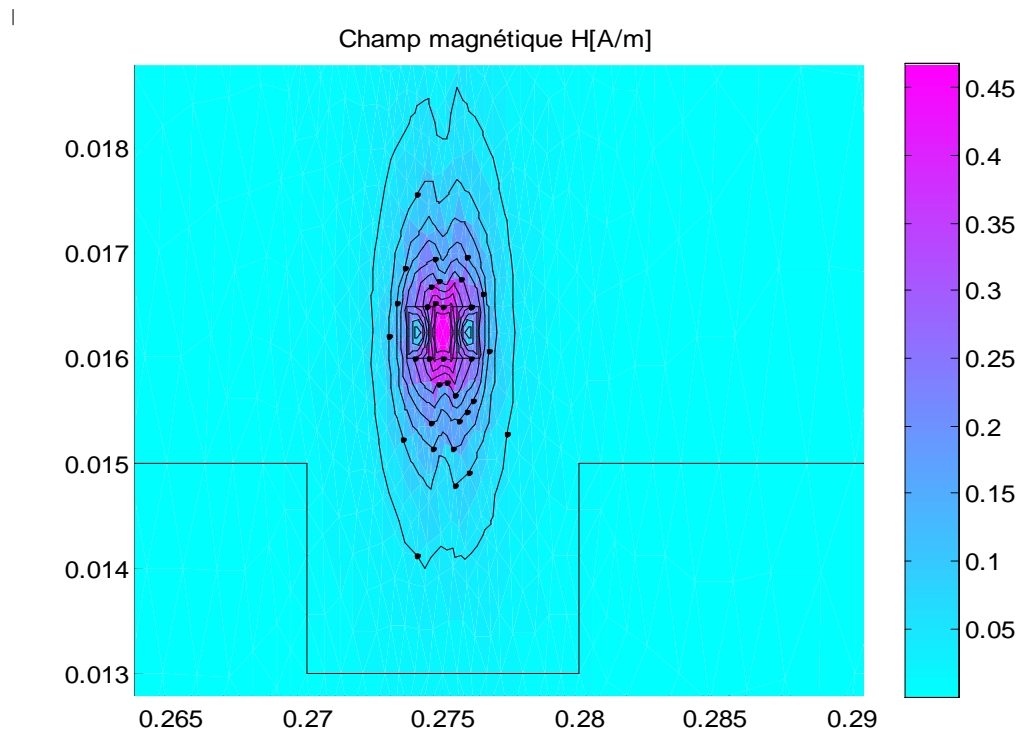


Figure IV.12 : Représentation du champ magnétique

IV.6.1 Déplacement

Après avoir effectué plusieurs déplacements du capteur, on a obtenu les résultats suivants :

- **Premier déplacement**

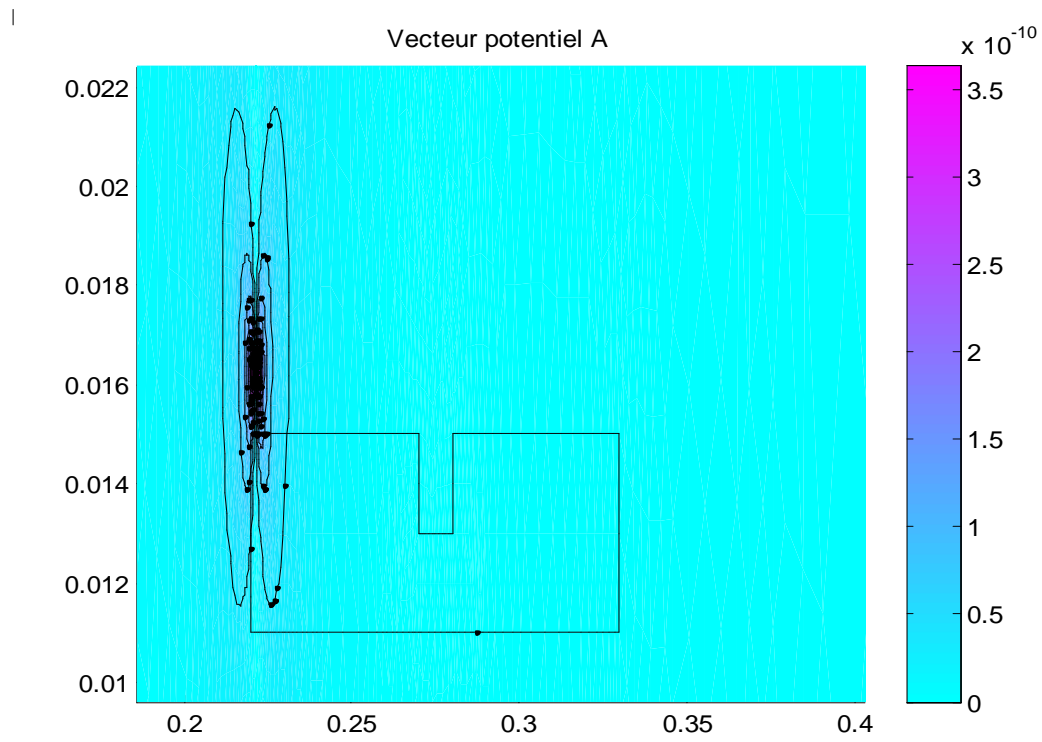


Figure IV.13 : Représentation du potentiel vecteur magnétique

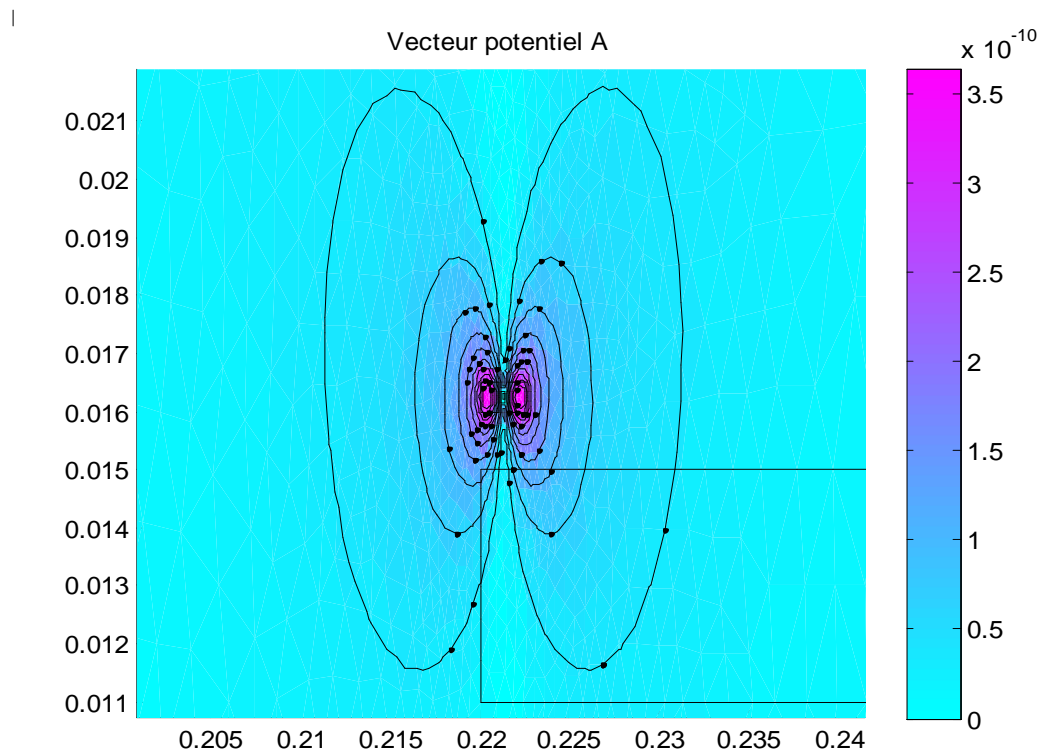


Figure IV.14 : Représentation du potentiel vecteur magnétique

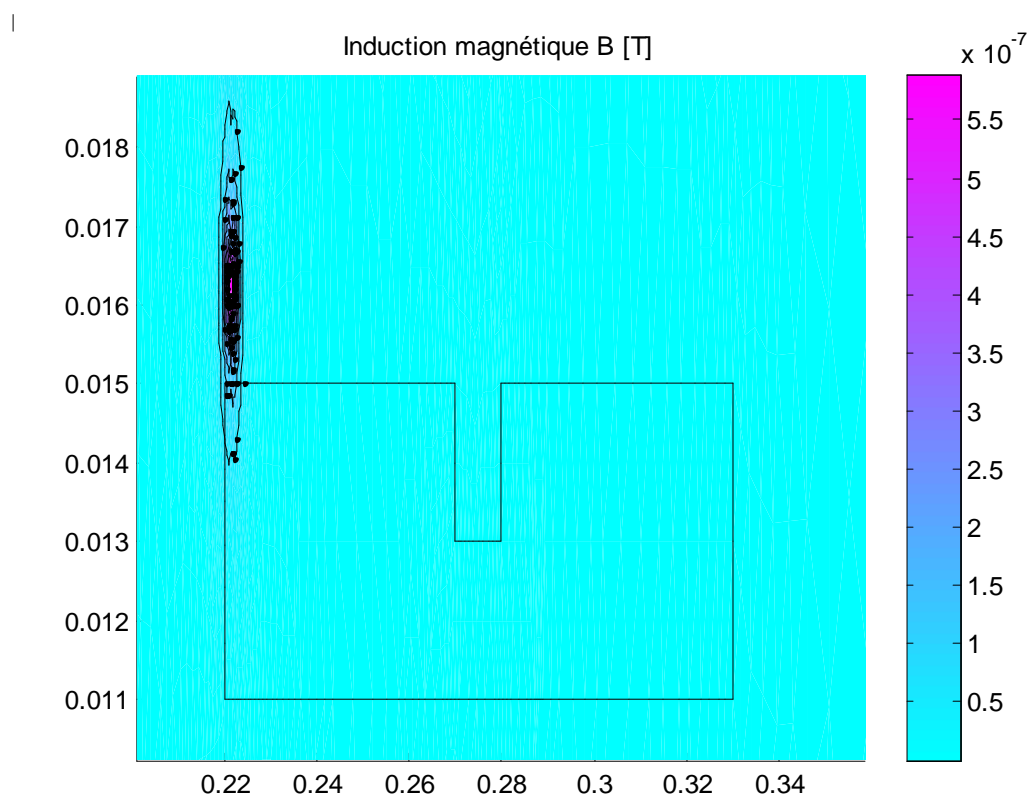


Figure IV.15 : Représentation de l'induction magnétique

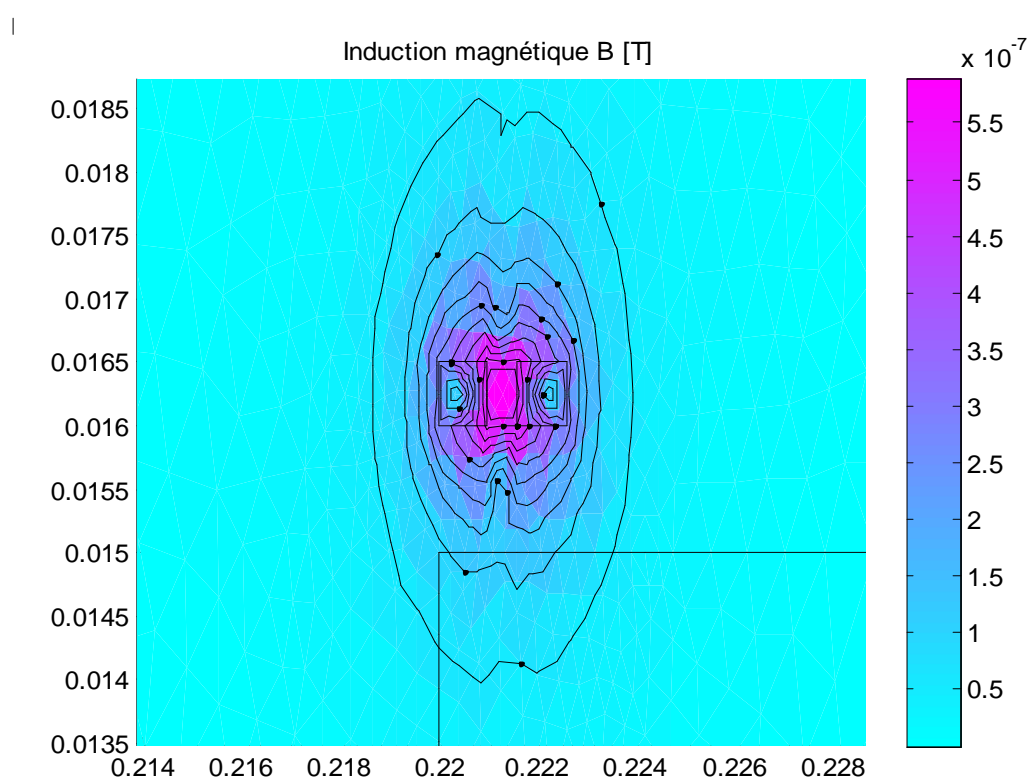


Figure IV.16 : Représentation de l'induction magnétique

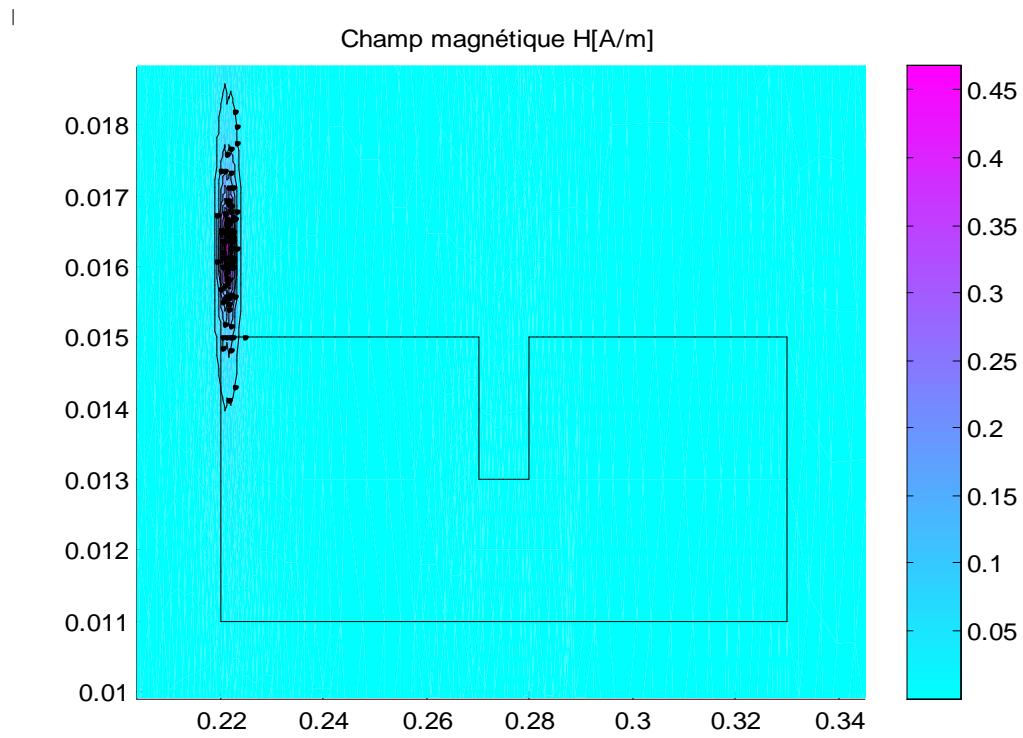


Figure IV.17 : Représentation du champ magnétique

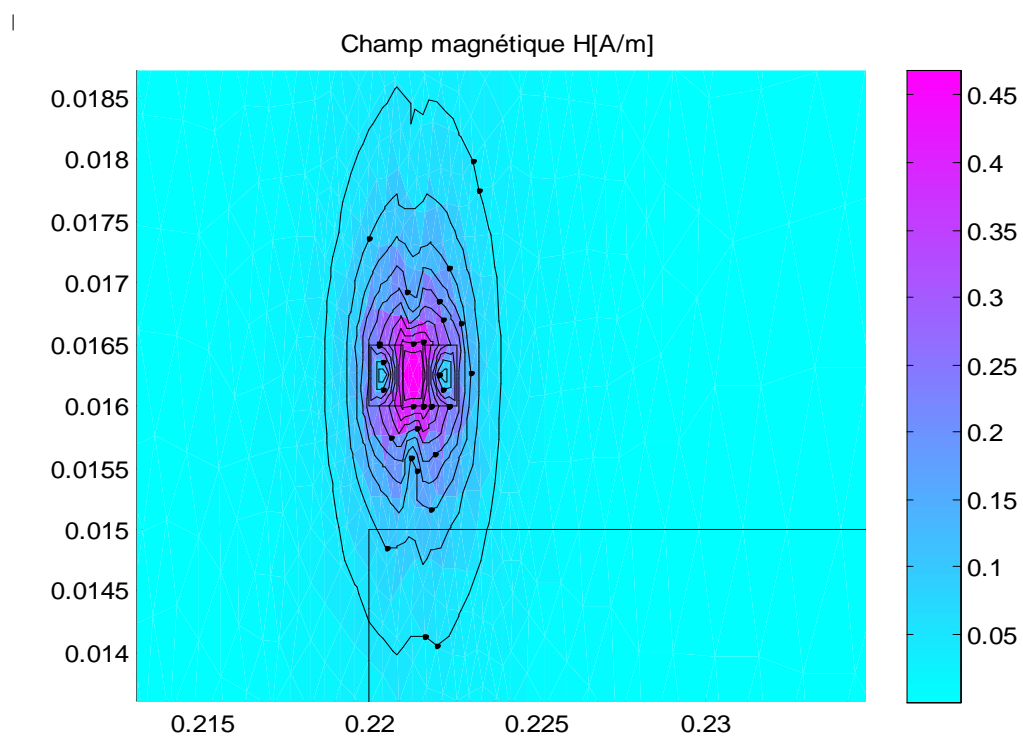


Figure IV.18 : Représentation du champ magnétique

- **Deuxième déplacement**

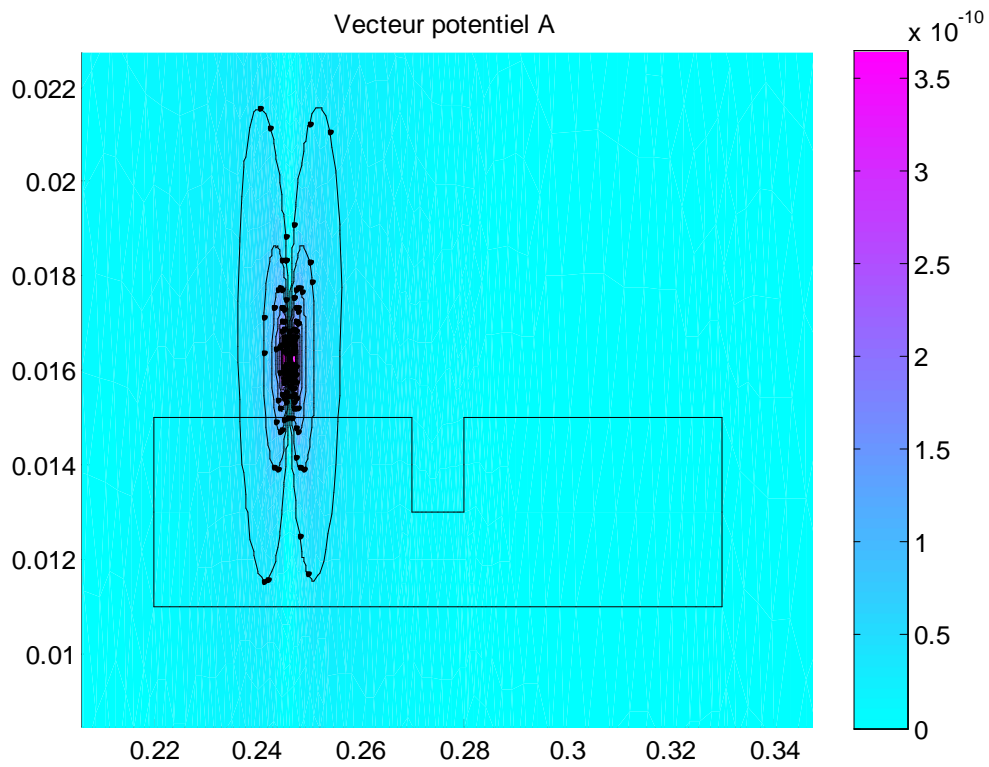


Figure IV.19 : Représentation du potentiel vecteur magnétique

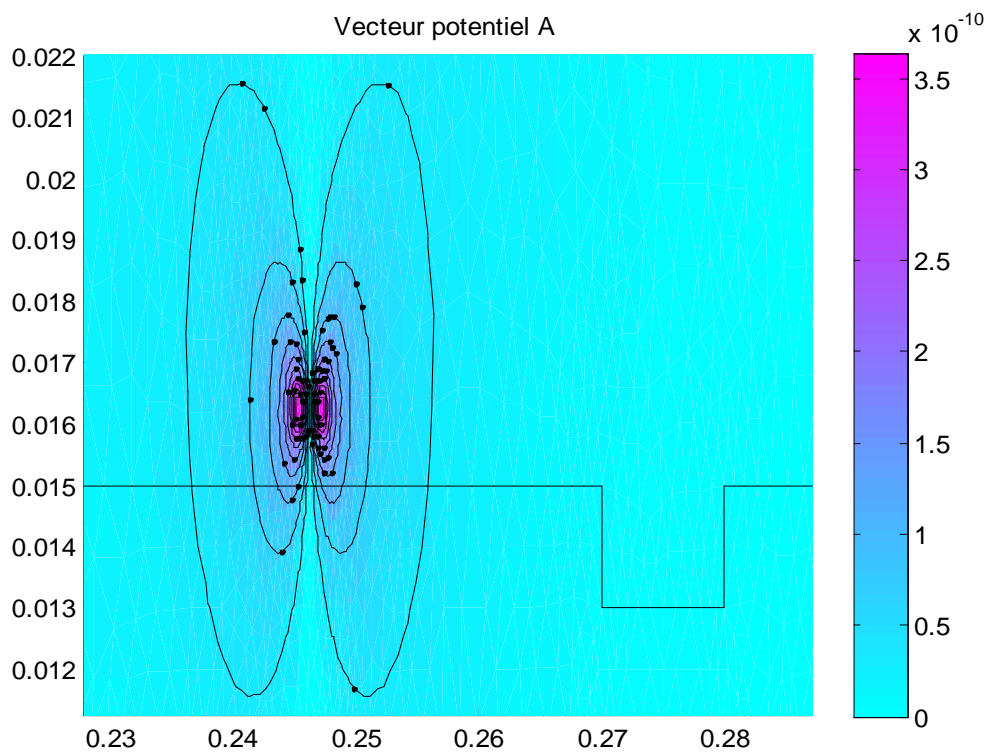


Figure IV.20 : Représentation du potentiel vecteur magnétique

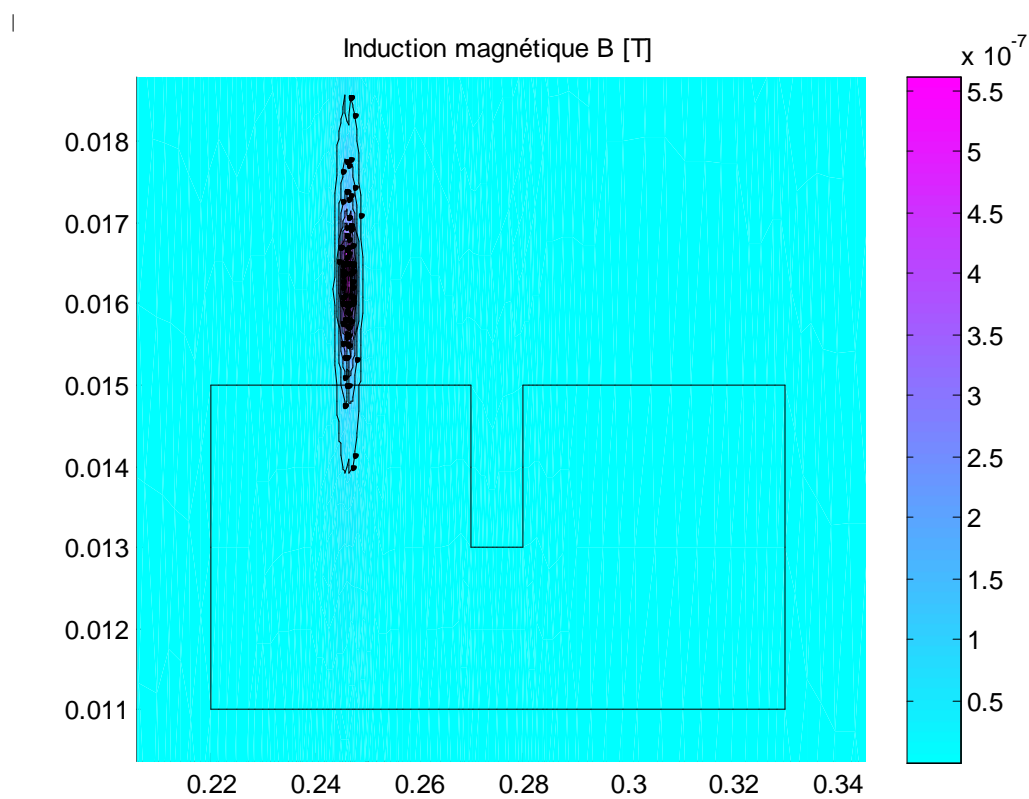


Figure IV.21 : Représentation de l'induction magnétique

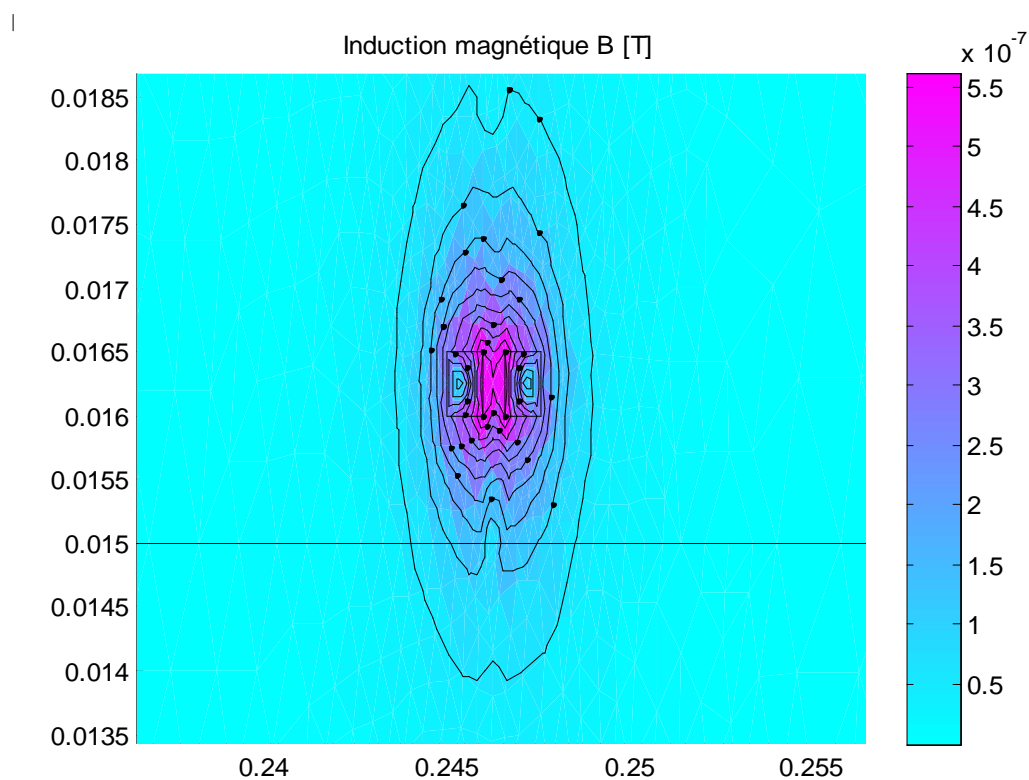


Figure IV.22 : Représentation de l'induction magnétique

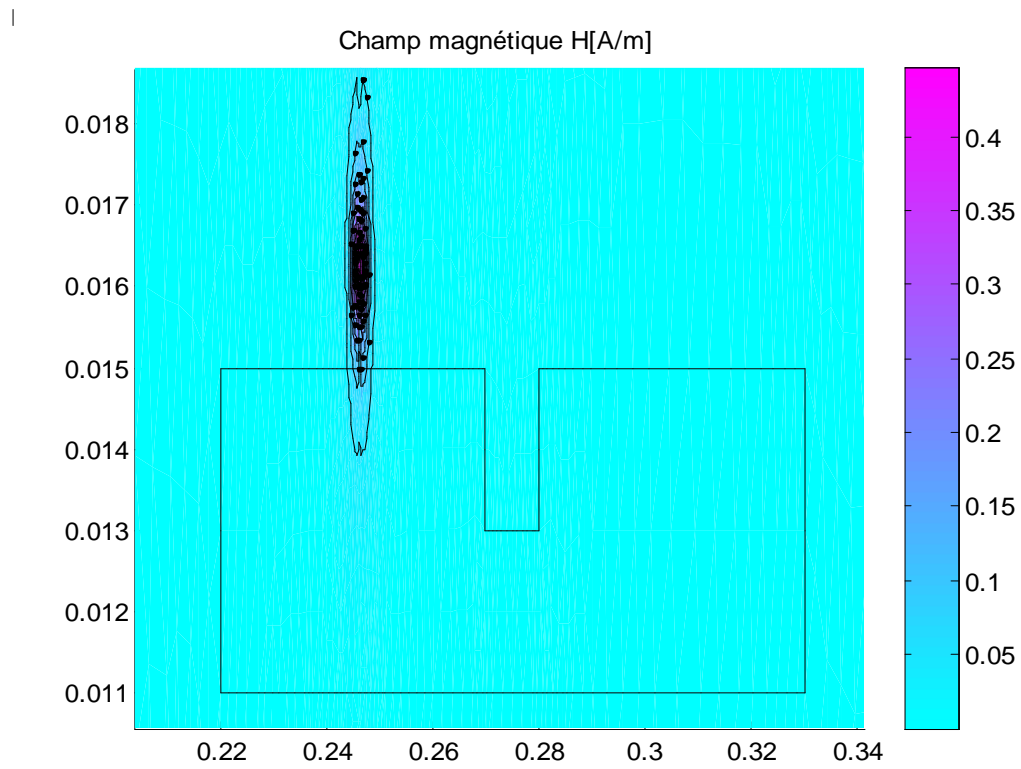


Figure IV.23 : Représentation du champ magnétique

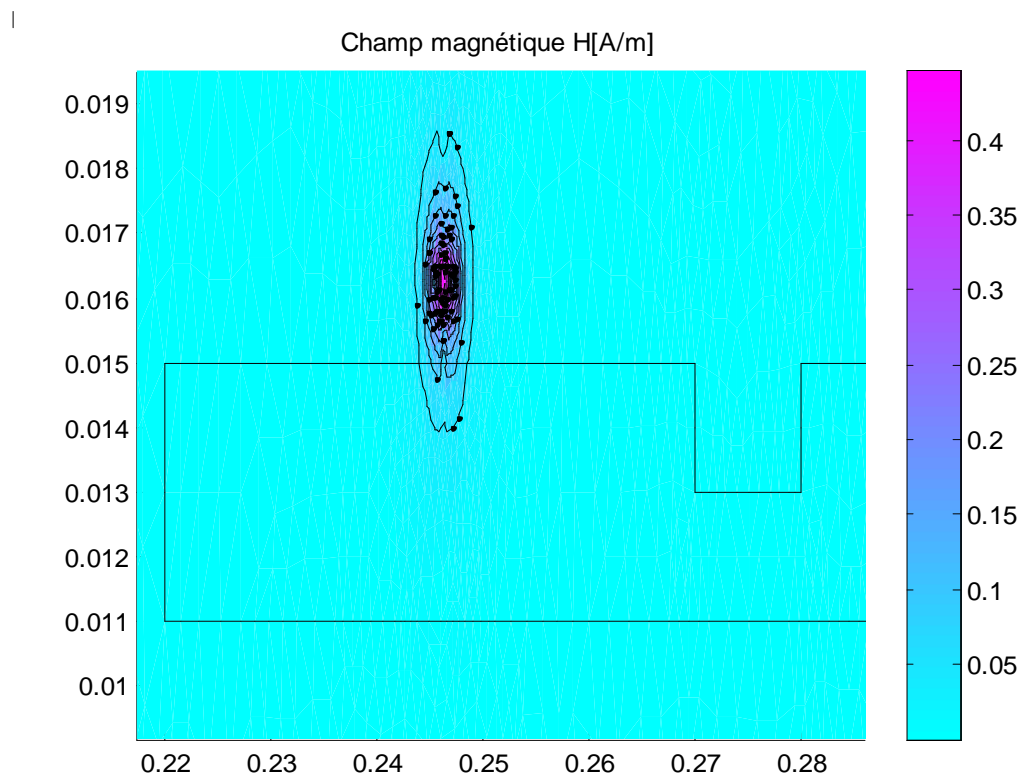


Figure IV.24 : Représentation du champ magnétique

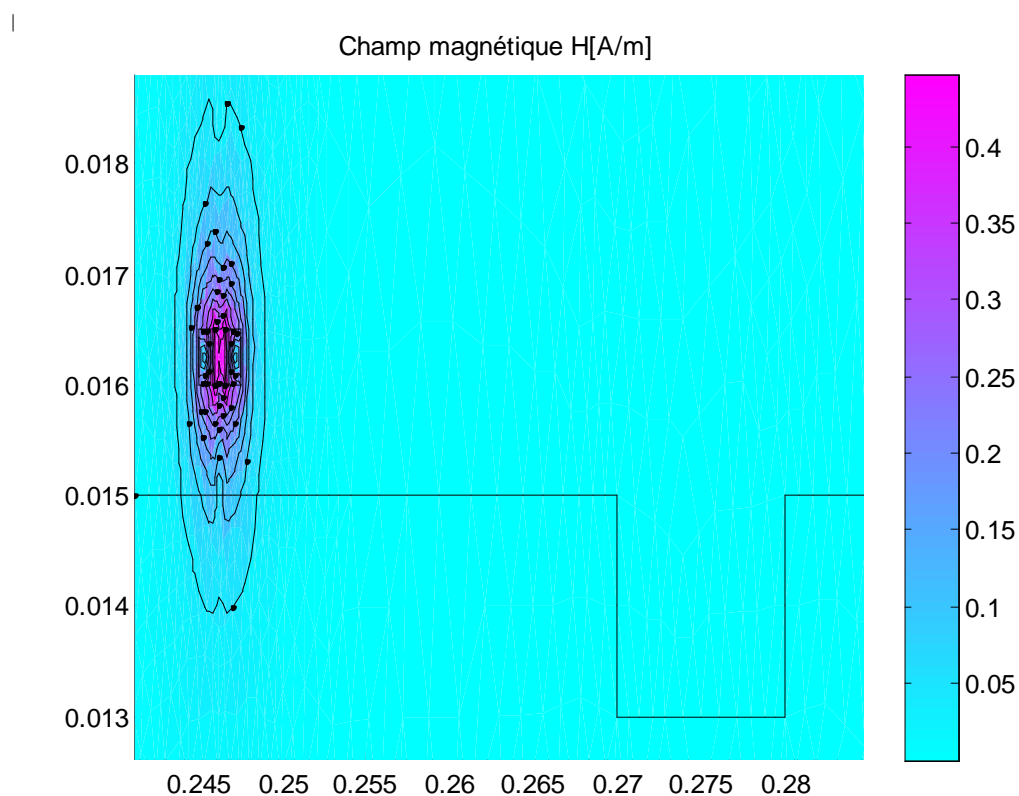


Figure IV.25 : Représentation du champ magnétique

- Troisième déplacement

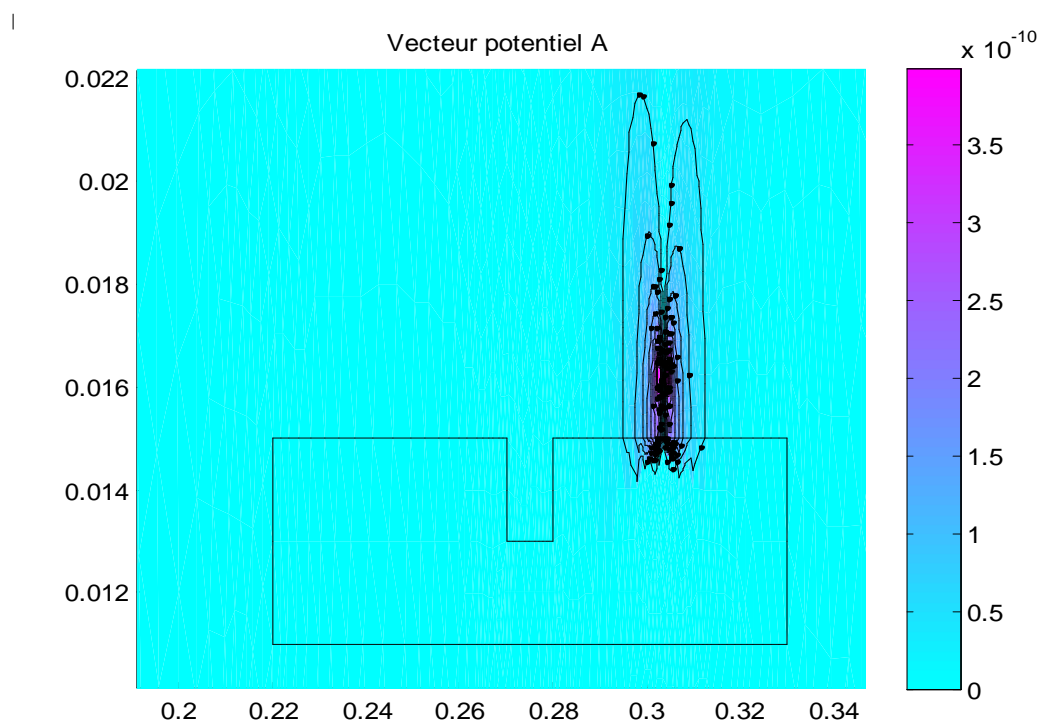


Figure IV.26 : Représentation du potentiel vecteur magnétique

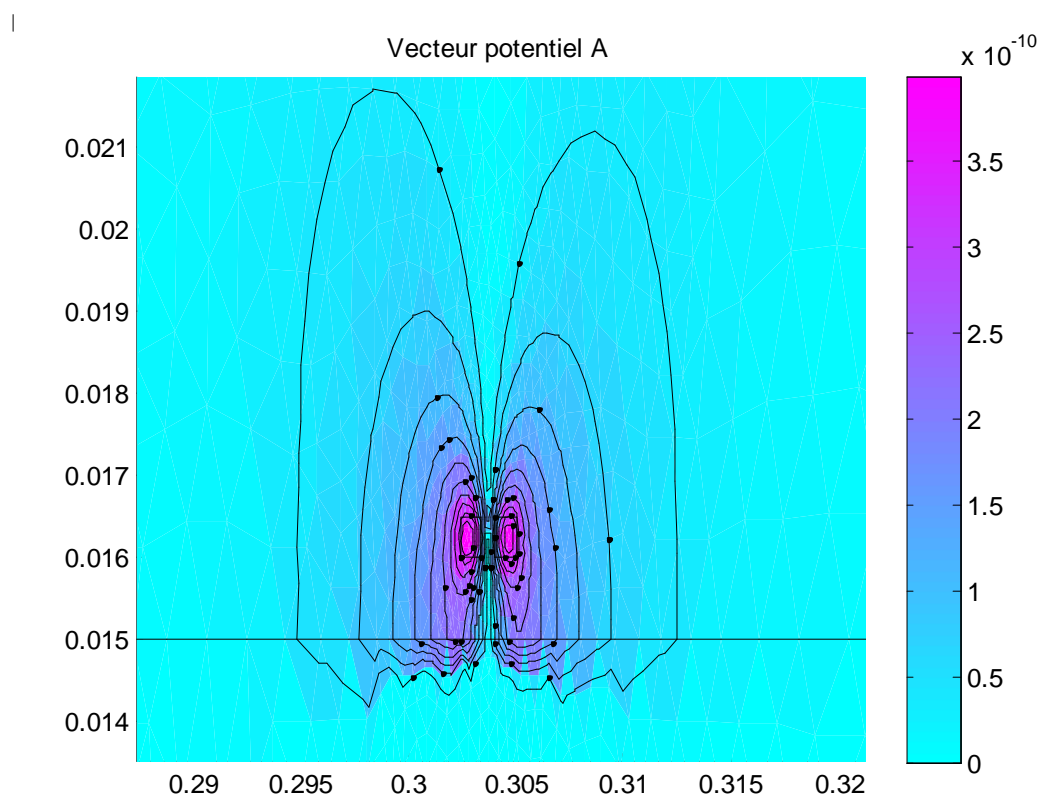


Figure IV.27 : Représentation du potentiel vecteur magnétique

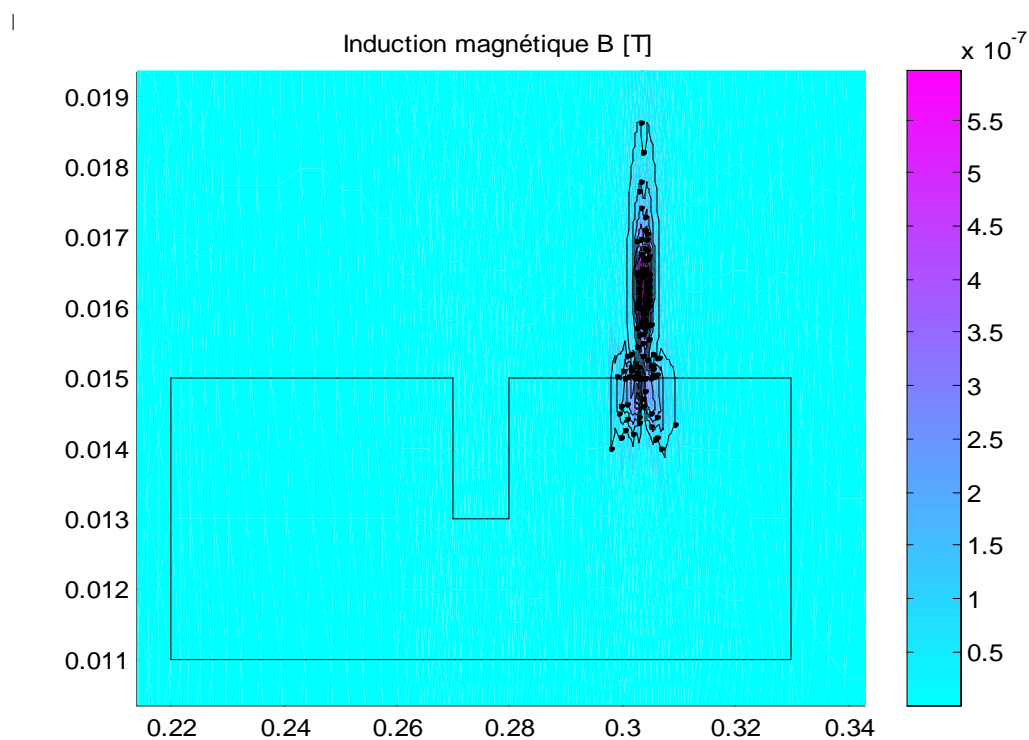


Figure IV.28 : Représentation de l'induction magnétique

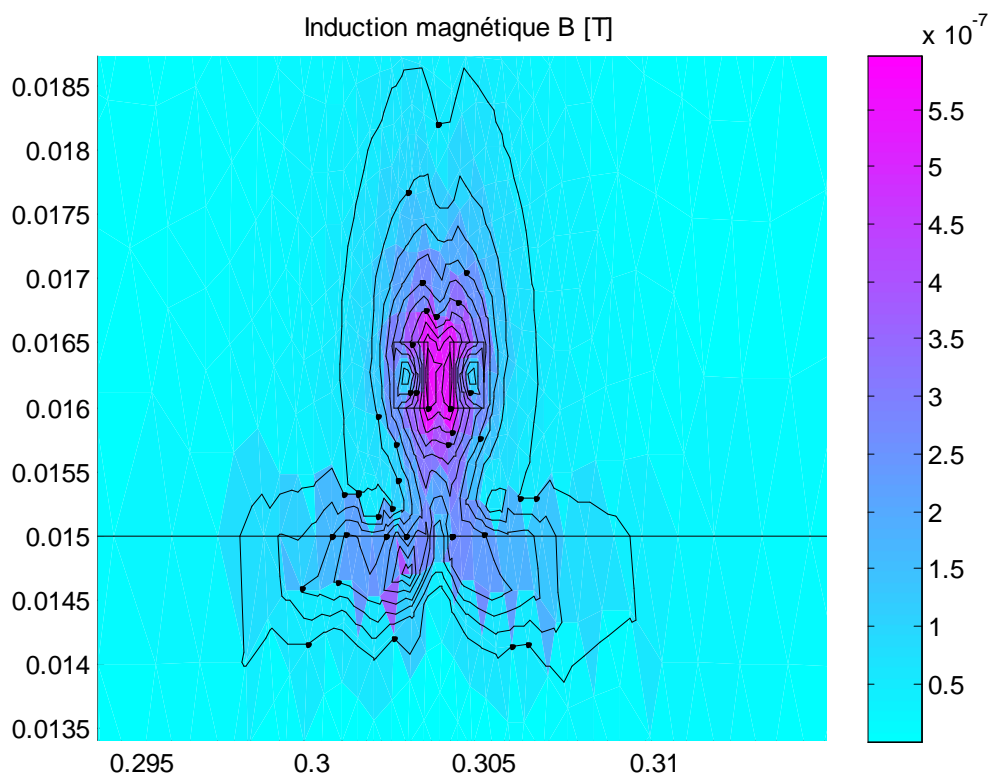


Figure IV.29 : Représentation de l'induction magnétique

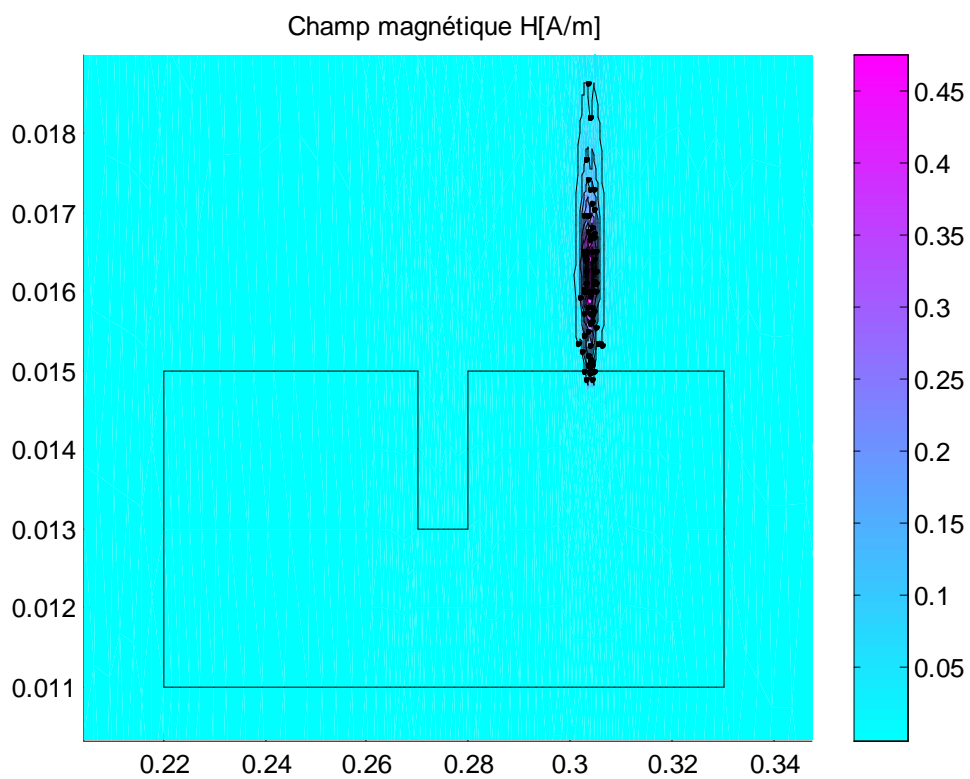


Figure IV.30 : Représentation du champ magnétique

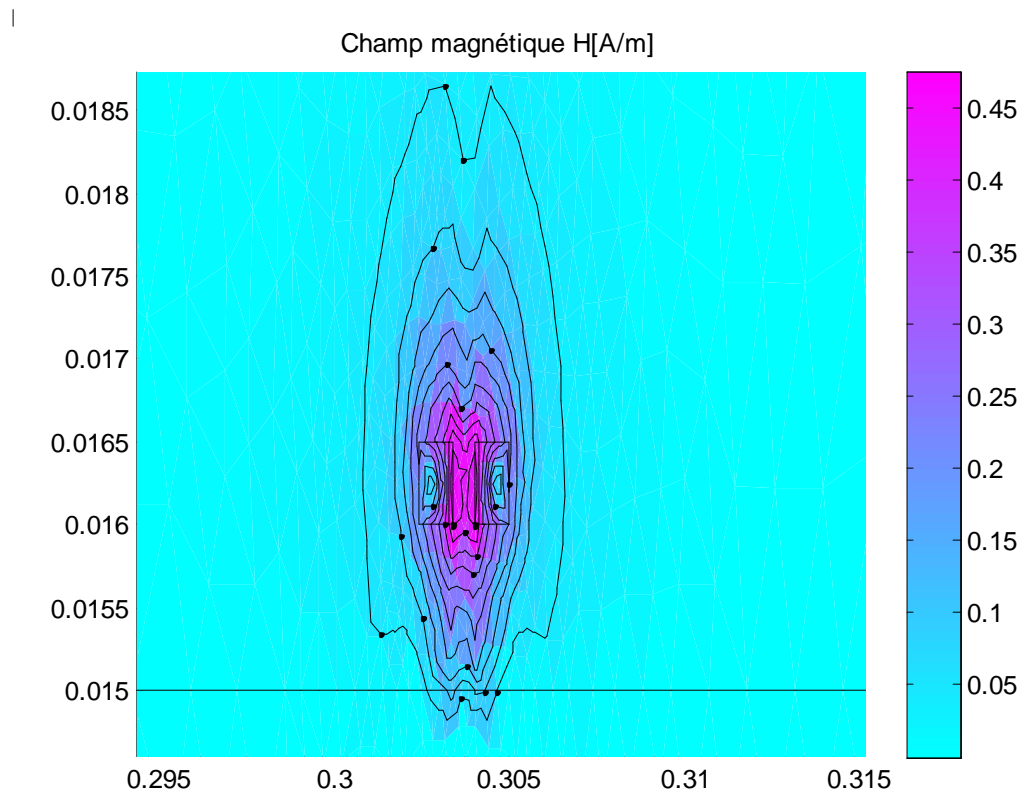


Figure IV.31 : Représentation du champ magnétique

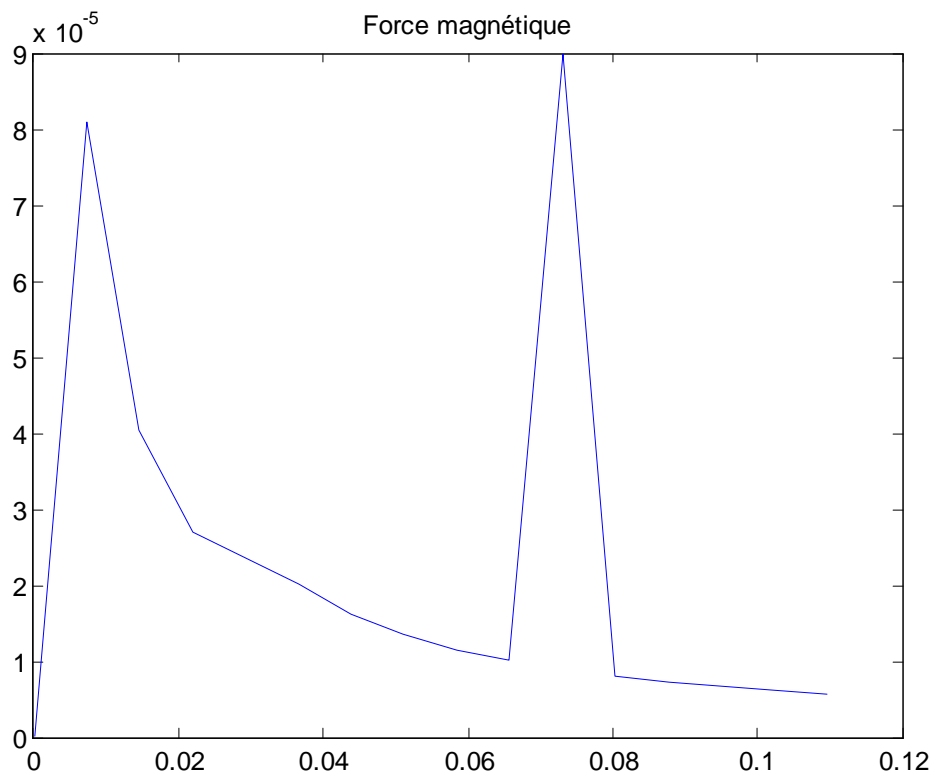


Figure IV.32 : Représentation de la force en fonction du déplacement

Les figures (IV.8 et IV.9) représentent l'induction magnétique B . On remarque que la valeur de cette induction est particulièrement faible, cela est dû à la densité du courant de l'inducteur J_s qui est faible et la nature de la charge (perméabilité magnétique).

De même pour le champ magnétique représenté par la figure (IV.11, 12).

La figure (IV.32) représente la force magnétique en fonction du déplacement.

On constate que la force magnétique augmente considérablement jusqu'à atteindre une valeur de $8 \cdot 10^{-5}$ N, puis elle diminue progressivement pour augmenter encore une fois.

L'augmentation de la force est enregistrée dans les régions en dehors du défaut, tandis que dans la zone du défaut la force est considérablement faible. Cette diminution peut être expliquée par l'augmentation de l'entrefer qui engendre des flux de fuite ainsi qu'une diminution de l'induction magnétique.

IV.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats obtenus après élaboration d'un programme sous MATLAB pour l'étude du dispositif à défaut.

Conclusion générale

L'objectif de ce travail est la détection de défauts durant le procédé du contrôle non destructif et cela en utilisant un capteur électromagnétique.

Nous avons commencé notre travail par une recherche bibliographique des différents procédés et méthodes de traitement du contrôle non destructif ainsi que les différents capteurs utilisés durant ce dernier. Dans un second temps, nous avons présenté les phénomènes électromagnétiques ainsi que les différentes modélisations mathématiques de ce dernier.

Afin d'obtenir les caractéristiques régissant les différentes régions du domaine d'étude un programme a été élaboré sous le logiciel MATLAB.

Bibliographie

[1] **J.DUMONT-FILLON**, « Contrôle non destructif (CND) », Techniques de l'ingénieur, R1400, 10 janvier 1996.

[2] https://fr.wikipedia.org/wiki/contrôle_non_destructif

[3] **N.BENHADDA**, « Modélisation des capteurs inductifs à courant de Foucault », Mémoire de Magister, Université de Batna, 2006.

[4] « Contrôle non destructif », HOLO3, 7 rue du général Cassagnou, F-68300 Saint-Louis.

[5] **R.BOURAS**, « Contrôle non destructif », UMMTO.

[6] **Y.CHOUA**, « Application de la méthode des éléments finis pour la modélisation de configurations de contrôle non destructif par courant de Foucault », Thèse de doctorat, Faculté des sciences d'Orsay, Université Paris-Sud 11, 2009.

[7] **F.BOUALI**, « Utilisation d'une méthode semi analytique pour l'étude du contrôle non destructif en régime pulsé », Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2010.

[8] **N.OUKACINE**, « Utilisation des réseaux de neurones pour la reconstitution de défauts en évaluation non destructive », Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou, 2012.

[9] **M.TALEB M'HAMMED, E.GHEDAMSI**, « Modélisation semi-analytique d'un système de CND-CF pour la caractérisation d'un défaut dans la structure d'un matériau conducteur », Mémoire de Master, Université KASDI MERBAH-OUARGLA, 2013.

[10] **M.SALHI**, « Modélisation électromagnétique des capteurs à fonction séparées dans les dispositifs Axisymétrique de contrôle non destructif par courant de Foucault (CND-CF) », Mémoire de Magister, Université El Hadj Lakhdar de Batna, 2008.

[11] **Yue Li**, « Modélisation des phénomènes électromagnétiques caractérisant des structures composites complexes, application à l'évaluation non destructive », Thèse de doctorat, Université de NANTES, 2012.

[12] **M.JUFER**, « Les entrainements électriques : méthodologie de conception », hermes sciences, Lavoisier 2010.

[13] www.acim-jouanin.fr/français/contenu/catalogue/sonde/SONDES.pdf .

[15] **S.CHERIF**, « Modélisation électromagnétique des systèmes multicateurs-pièces à défauts complexes pour le contrôle non destructif par courant de Foucault », Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou, 2011.

[16] https://fr.wikipedia.org/wiki/Equations_de_Maxwell#Aspects_historiques

[17] **M.HAMEL**, « Etude et réalisation d'un dispositif de détection de défauts par méthodes électromagnétiques », Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou, 2012.

[18] **H.MOHELLEBI, M.NAIT-IKENE et A.ARIFI**, « Calcul de champ électrostatique 2D par la méthode des éléments finis : Application au milieu diélectrique », Deuxième conférence nationale sur la haute tension, Tizi-ouzou, 17,18 et 19 Novembre 1997.

[19] **M.HULIN, J.P.MAURY**, « Les bases de l'électromagnétisme », Edition Dunod, 1991.

[20] **E. AMZALLAG, N. PICOLLI**, «Electromagnétisme», Tome 3, édition Ediscience, Paris, 1996.

[21] **B. THIDE**, «Electromagnetic field theory», Edition Epsilon, Uppsala, 2001.

[22] **P.LORRAIN, D.P.CORSON, F.LORRAIN**, « Electromagnetic field and waves, W.H.Freeman and Co. New York, 1988.

[23] **M.MARTY, D.DIXNEUF, D.G.GILABERT** « Principes d'électrotechnique », Edition Dunod, Paris 2005.

[24] **H. MOHELLEBI**, « Cours de cinquième année Master II : Modélisation Numériques des Systèmes d'Entraînements Electriques (MEE₃₆), Année Universitaire 2014-2015.

[25] **P.CIARLET, E.LUNEVILLE**, « La méthode des éléments finis, de la théorie à la pratique », Edition Les presses de l'ENSTA, Paris, 2009.

[26] **G.DHATT, G.TOUZOUT, E.LEFRANÇOIS**, « Méthodes des éléments finis », Edition Hermes, Lavoisier 2005.

[27] **F.HOCINI**, « Association de la commande pour l'étude par EF des phénomènes magnéto-élastiques et vibratoires dans les systèmes Electrotechnique », Thèse de doctorat, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2013.

[28] **C.RAVAT**, « Conception de multicapteurs à courants de Foucault et inversion des signaux associés pour le contrôler non destructif », Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud 11, 2008.