

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE  
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

## Mémoire de Fin d'Etudes de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Génie électrique

Spécialité : **Commande des systèmes**

*Présenté par*  
**FRAH Fariza**  
**ABRIKA Fadhila**

Thème

# Synthèse d'une commande optimale par paramétrisation du vecteur de commande

*Mémoire soutenu publiquement le 07/09/2016 devant le jury composé de :*

Encadreur :	<b>M<sup>me</sup> Ghania IDIRI</b>	Mètre de conférasse A à L'UMMTO
Président :	<b>M<sup>me</sup> Oardia CHILALI</b>	Mètre de conférasse A à L'UMMTO
Examineur :	<b>M<sup>me</sup> Safia YOUSFI</b>	Mètre de conférasse A à L'UMMTO
Examineur :	<b>M<sup>me</sup> Saida BIDOUHANE</b>	Mètre de conférasse B à L'UMMTO

# REMERCIEMENTS

*Nous remercions avant tout le bon dieu de nous avoir donné courage et volonté pour réaliser ce travail et qui nous a éclairé les chemins par la lumière de son immense savoir.*

*Nos sincères remerciements en vers notre promotrice M<sup>em</sup> Idiri Ghania pour ces conseils constructifs tout au long de l'élaboration de ce mémoire.*

*Nos profondes gratitude, d'avance à l'endroit des membres du jury qui nous font l'honneur d'évaluer ce travail de fin d'études.*

*Enfin, nous remercions tout les enseignants de département d'automatique, sans oublier nos amis(es), camarades et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

# DEDICACE

*A mes chers parents*

*Pour les sacrifices déployés à mon égard ; pour leur patience, leur amour et leur confiance en moi*

*Merci ma chère maman pour avoir été à mes côtés en toute épreuve que j'ai traversé, de m'avoir soutenu, de m'avoir encouragé*

*Que dieu te protège et te garde pour moi*

*Je te dois toute ma vie*

*A mon cher Abdou*

*Qui a été toujours présent pour moi, m'a aidé à surmonter les moments difficiles*

*D'avoir été patient avec moi et de m'avoir encouragé*

*A ma chère sœur*

*A mes chers frères*

*A mes amis*

*Ghiles, Farid et Sofiane*

*En témoignage de mes sincères reconnaissances pour les efforts qu'ils ont consentis pour me soutenir au cours de mes études.*

*Que dieu nous garde toujours unis*

*A*

*Toute personne qui nous a aidés à faire ce projet.*

*Fadhila*

# DEDICACE

*Je dédie ce travail à*

*Ma très chère mère.*

*Mes très chers frères.*

*A mon fiancé.*

*Tous mes ami(e)s.*

*Et à tous mes camarades de la promotion « Automatique » 2015/2016*

*FARIZA*

# Sommaire

## Introduction générale

### Chapitre 1 : formulation d'un problème de commande optimale

I.1	Introduction.....	2
I.2	Commande optimale.....	2
I.3	Formulation du problème de commande optimale .....	3
I.3.1	Modèle du système .....	3
I.3.2	Conditions terminales .....	4
I.3.3	Contraintes instantanées et intégrales.....	4
I.3.3.1	Contraintes instantanées.....	4
I.3.3.2	Contraintes intégrales.....	5
I.3.4	Critère de performances.....	5
I.3.5	Exemple illustratif.....	6
I.4	Résolution d'un problème de commande optimale .....	8
I.5	Synthèse d'une commande optimale .....	12
I.6	conclusion .....	12

### Chapitre 2 : optimisation statique

II.1	Introduction .....	13
II.2	Formulation d'un problème d'optimisation .....	13
II.3	classification du problème d'optimisation dans $\mathfrak{R}$ .....	14
II.4	Résolution d'un problème d'optimisation .....	14
II.4.1	Optimisation sans contraintes .....	14
II.4.2	Optimisation en présence de contrainte .....	17
II.4.2.1	Cas des contraintes égalité .....	18
II.4.2.2	Cas des contraintes inégalité.....	19
II.4.2.3	Cas des contraintes mixtes (égalités et inégalités).....	20
II.5	Principe de la méthode d'Aliénor .....	21
II. 5.1	Autres transformations réductrices .....	22
II.6	Conclusion.....	23

## **Chapitre 3 : Résolution des équations différentielles par la méthode d'itération variationnelle**

III.1. Introduction .....	24
III.2. Les équations différentielles ordinaires (EDOs).....	24
III.2.1. Définition.....	24
III.2.2. Classification des équations différentielles ordinaires .....	25
III.2.2.1. Equation différentielle ordinaire linéaire et non linéaire.....	25
III.2.2.2. Equation différentielle ordinaire homogène et non homogène .....	25
III.3. Résolution des équations différentielles .....	25
III.3.1. Méthode analytique .....	25
III.3.2 Méthode Numérique .....	26
III.3.2.1 Méthode d'Euler.....	26
III.3.2.2 Méthode de Runge-Kutta .....	27
III.4. Principe de la méthode des itérations variationnelles (VIM) .....	28
III.5. Application de VIM pour les équations différentielles ordinaires .....	29
III.6. Conclusion.....	34

## **Chapitre 4 : la paramétrisation de vecteur de commande**

IV.1. Introduction.....	35
IV.2. Les expressions de paramétrisation de la commande .....	35
IV.3. Exemple illustratif .....	37
IV.4. Exemple de résolution d'un problème de commande optimale par la technique de Paramétrisation.....	43
IV.5. Conclusion .....	46

## **Conclusion générale**

## **Bibliographie**



MONENCLATURE

## Table des indices

$t$	: variable indiquant le temps.
$t_0$	: Instant initial.
$t_f$	: Instant final.
$T$	: Durée de l'horizon (temps).
$n$	: Dimension de système.
$n_q$	: Nombre de contraintes instantanées.
$n_p$	: Nombre de contraintes intégrales.
$P$	: Nombre de contraintes égalités.
$q$	: Nombre de contraintes inégalités.
$k$	: Numéro de l'itération.
$x(t)$	: Forme continu de vecteur d'état.
$y(t)$	: Forme continu de vecteur de sortie.
$u(t)$	: Forme continu de vecteur de commande
$U(t)$	: Ensemble de vecteur de commande admissible.
$a^{(k)}$	: Pas de descente.
$x_i$	: Variable de décision.
$\tilde{X}$	: Vecteur généralisé, $\tilde{X} = (X, \lambda)$ .
$f^*$	: Minimum global.
$x^{(k)}$	: Estimé $x$ à l'itération $k$ .
$J$	: Fonction objectif ou critère.
$J^*$	: Valeur optimale de critère.
$u^*$	: Valeur optimale de $u$ .
$G(X)$	: Vecteur des contrainte de type égalité.
$H(X)$	: Vecteur des contrainte de type inégalité.
$D$	: Ensemble admissible des variables d'état.
$\Re$	: Ensemble des réels.
$R, B, \text{ et } Q$	: Matrices symétriques définie positives.
$F$	: Fonction scalaire.
$F$	: Fonction décrivant la dynamique des systèmes.
$\psi_{x(0)}(u)$	: Fonction de $u$ , avec $x(0)$ fixé.
$L$	: lagrangien.

$\lambda$	:	Vecteur des paramètres de Lagrange
$\mu$	:	Vecteur des paramètres de Kuhn-Tucker.
$R$	:	Résistance électrique.
$i(t)$	:	Intensité du courant électrique.
$V_c(t)$	:	Tension électrique d'entrée.
$V_s(t)$	:	Tension électrique de sortie.
$m$	:	Unité de longueur, le mètre.
$s$	:	Unité de temps (seconde).
$\nabla$	:	Le gradient.
$\mathfrak{R}^n$	:	Espace vectorielle de dimensions $n$ .
$\nabla^2$	:	La matrice Hessienne.
$  $	:	Le module.
$     $	:	Norme Euclidienne.
$r$	:	Rayon
$\alpha$	:	L'angle d'un cercle
$v$	:	vitesse
$\frac{f}{m}$	:	Accélération



INTRODUCTION GENERALE

## Introduction générale

La commande optimale consiste à synthétiser une loi de commande qui permet de minimiser un critère de performance tout en respectant un ensemble des contraintes et des conditions terminales.

L'une des approches la plus utilisée pour le calcul de la loi de commande consiste à transformer le problème de commande optimale à un problème d'optimisation, puis d'utiliser des algorithmes d'optimisation pour la résolution de ce dernier.

Dans ce mémoire, on s'est intéressé à la résolution des problèmes de commande optimale des systèmes dynamiques. L'idée est de transformer le problème de commande optimale à un problème d'optimisation classique en utilisant la méthode de paramétrisation du vecteur de commande, puis à l'aide de la méthode des itérations variationnelles (VIM), on détermine les expressions analytiques des états. En substituant les expressions des états et de la commande dans le critère à optimiser, on obtient un problème d'optimisation classique dont les paramètres de la loi de commande représentent les variables de décision. Pour la résolution de ce dernier, on utilise la méthode d'optimisation globale d'Aliénor, qui transforme le problème d'optimisation à plusieurs variable de décision à un problème d'optimisation à une seule variable de décisions qui est facile à résoudre.

Le mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre, est consacré à des généralités sur la commande optimale et les différentes méthodes de résolution des problèmes de commande optimale.

Le second chapitre est consacré à des généralités sur l'optimisation statique.

Le troisième chapitre est consacré à la résolution des équations différentielles ordinaires par la méthode des itérations variationnelles (VIM).

Au quatrième chapitre, on présente le principe de la technique de paramétrisation du vecteur de commande et l'approche proposée pour la résolution d'un problème de commande optimale. Ces deux dernières sont illustrées exemples d'application.

Le mémoire se termine par une conclusion générale.



CHAPITRE I

## I.1 Introduction

La conception de la commande d'un système dynamique a pour objectif de déterminer des lois de commandes permettant d'assurer des performances désirées. Mais, souvent, on est amené à optimiser cette commande, c'est le problème de la commande optimale.

Ce chapitre est consacré à la définition et à la formulation sous forme mathématique d'un problème de commande optimale. Les définitions des différentes notions utilisées dans ce domaine sont, également, présentées. [3]

## I.2 Commande optimale

Le problème général de la détermination d'une commande optimale d'un processus peut se résumer comme suit :

Un processus étant donné et défini par son modèle, trouver parmi les commandes admissibles celle qui permet à la fois :

1. De vérifier des conditions initiales et finales données.
2. De satisfaire diverses contraintes imposées.
3. D'optimiser un critère choisi.

Sous forme mathématique, le problème de la commande optimale se résume comme suit :

Soit le système dynamique décrit par l'équation d'état

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (\text{I.1})$$

Cette équation est en général non linéaire. De plus le vecteur de commande doit appartenir à un certain ensemble de vecteurs de commande admissible

$$u(t) \in U(t) \quad (\text{I.2})$$

Une forme courante de ces contraintes est que les variables de commande ne peuvent dépasser en modules des valeurs imposées.

Dans ces conditions, on désire conduire le système d'un état initial  $x(t_0)$  à un état final  $x(t_f)$ , tout en minimalisant la fonction de coût

$$J(x(t), t) = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \quad (\text{I.3})$$

Dans la suite le coût minimal est noté :

$$J^* = \min_{u(t) \in U(t)} J \quad (\text{I.4})$$

### Remarque I.1

1. L'état final  $x(t_f)$  peut être imposé ou non. S'il n'est pas imposé, il doit être défini indirectement par la fonction de coût.
2. Les contraintes sur les variables de commande et les variables d'état introduisent toujours des complications.

## I.3. Formulation du problème de commande optimale

### I.3.1. Modèle du système

Un système dynamique, ou processus, est caractérisé par trois ensembles de variables :

1. Les variables de sortie, en général directement accessibles et regroupées dans un vecteur  $\mathbf{y}$  de dimension  $\mathbf{r}$ .
2. Les variables de commande, regroupées dans un vecteur  $\mathbf{u}$  de dimension  $\mathbf{m}$  et dont le choix permet d'agir sur l'évolution du processus.
3. Les variables internes caractérisant l'état du processus à un instant donné, regroupées dans un vecteur état  $\mathbf{x}(t)$  de dimension  $\mathbf{n}$ . L'instant courant est noté  $t > 0$ .

Dans une modélisation de l'évolution du processus, ces diverses variables sont liées par une équation d'état le plus souvent explicitée sous la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (\text{I.5})$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \quad (\text{I.6})$$

Où  $x(t) \in \mathcal{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathcal{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathcal{R}^r$  et  $t \in \mathcal{R}$

### I.3.2. Conditions terminales

Les conditions terminales caractérisent à la fois l'état initial, c'est-à-dire l'instant où on commence à agir sur le processus, et l'état final, après action de la commande. Par convention, l'instant initial est noté  $t_0$  et l'état initial  $x_0 = x(t_0)$ . De même, l'instant final est noté  $t_f$  et l'état final  $x_f = x(t_f)$ . Les conditions initiale et finale  $x_0$  et  $x_f$  prises aux instants respectifs  $t_0$  et  $t_f$  peuvent être fixées ou non.

### I.3.3. Contraintes instantanées et intégrales

#### I.3.3.1. Contraintes instantanées

Elles caractérisent en général les limitations physiques sur la commande ou sur l'état du processus.

Ce type de contraintes s'exprime par des inégalités de la forme :

$$q(x(t), u(t), t) \leq 0 \quad \text{avec } q \in \mathcal{R}^{n_q} \quad (\text{I.7})$$

Où  $n_q$  est le nombre de contraintes.

On peut également avoir des contraintes de type égalités, les contraintes inégalités peuvent se ramener à des contraintes égalités en introduisant des variables supplémentaires  $v(t)$  et les contraintes (I.7) devient :

$$q(x(t), u(t), t) + v(t) = 0, \quad q \in \mathcal{R}^{nq} \quad (\text{I.8})$$

### I.3.3.2. Contraintes intégrales

Elles sont le plus souvent liées à une limitation des ressources ou à une limitation des résultats de nos actions, Ces contraintes s'expriment sous la forme :

$$\int_{t_0}^{t_f} p(x(t), u(t), t) dt \leq 0, \quad p \in \mathcal{R}^{np} \quad (\text{I.9})$$

Où  $n_p$  est le nombre de contraintes.

Comme dans le cas des contraintes instantanées, une contrainte inégalité peut être remplacée par une contrainte égalité.

### I.3.4. Critère de performances

Le critère d'optimalité peut prendre en compte les valeurs initiale et finale de l'état du processus, comme minimiser l'écart final par rapport à une consigne donnée, ou tenir compte de l'ensemble des valeurs de l'état ou de la commande à chaque instant. La forme la plus générale du critère à optimiser correspond à l'expression :

$$J = r_0(x_0, t_0, x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} r(x(t), u(t), t) dt \quad (\text{I.10})$$

Le terme  $r_0(x_0, t_0, x_f, t_f)$  est appelé partie terminale, permet la prise en compte dans le critère des états, initial et final. Suivant la forme du critère (I.10), on distingue :

**a. Problème de Mayer**

Dans ce cas, le critère ne comporte que la partie terminale, cette dernière exprime l'objectif à optimiser à l'instant final ' $t_f$ '

$$J(x(t)) = \Psi(x(t_f), t_f) \quad (\text{I.11})$$

**b. Problème de Lagrange**

Ce problème ne comporte que la partie intégrale qui exprime l'objectif à optimiser sur tout l'horizon de commande.

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt \quad (\text{I.12})$$

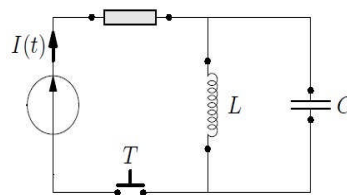
**c. Problème de Bolza**

C'est la combinaison des deux cas précédents

$$J(x(t)) = \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt \quad (\text{I.13})$$

**Remarque I.2**

1. Nous supposons, dans la suite, l'optimisation décrite sous forme d'une minimisation (maximiser revient à minimiser l'opposé).
2. Le choix du critère est très importante et une commande qui minimise un critère donné n'est pas nécessairement intéressante si le critère est mal choisi ou ne tient pas compte des contraintes physiques imposées au système.
3. L'intérêt de la commande optimale découle de la nature même de sa définition : optimiser un critère de notre choix, tout en satisfaisant des conditions de fonctionnement données et des contraintes imposées.

**I.3.5. Exemple illustratif (Circuit électrique)**

**Figure (1.1) :** Circuit électrique

Les variables caractéristiques :

$$u(t) = I(t) \quad (\text{I.14})$$

$$x_1(t) = I_1(t) \quad (\text{I.15})$$

$$x_2(t) = U_c(t) \quad (\text{I.16})$$

Les équations régissant le comportement dynamique du circuit électrique :

$$I(t) = I_1(t) + I_c(t) \quad (\text{I.17})$$

$$U_c(t) = L \frac{dI_1(t)}{dt} \quad (\text{I.18})$$

$$I_c(t) = C \frac{dU_c(t)}{dt} \quad (\text{I.19})$$

On a :

$$\dot{x}_1(t) = \frac{dI_1(t)}{dt} = \frac{1}{L} U_c(t) = \frac{1}{L} x_2(t) \quad (\text{I.20})$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{dU_c(t)}{dt} = \frac{1}{C} I_c(t) = \frac{1}{C} [u(t) - x_1(t)] \quad (\text{I.21})$$

Ce qui donne le modèle d'état suivant :

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{L} x_2(t) \quad (\text{I.22})$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{C} [u(t) - x_1(t)] \quad (\text{I.23})$$

Les conditions terminales sont :

$$x(0) = \begin{bmatrix} I_1(0) \\ U_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.24})$$

$$x(t_f) = \begin{bmatrix} I_1(t_f) \\ U_c(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.25})$$

Le problème consiste à minimiser l'énergie dissipée par l'effet Joule donnée comme suit :

$$E(t) = \int_0^{t_f} R I^2(t) dt = \int_0^{t_f} R u^2(t) dt \quad (\text{I.26})$$

Par conséquent , le problème de commande optimale est formulé comme suit :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^{t_f} R u^2(t) dt \quad (\text{I.27})$$

Sujet à :

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{L} x_2(t) \quad (\text{I.28})$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{C} [u(t) - x_1(t)] \quad (\text{I.29})$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.30})$$

$$x(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.31})$$

#### I.4. Résolution d'un problème de commande optimale

Pour la résolution du problème de commande optimale formulé, plusieurs méthodes ont été proposées :

##### 1. La méthode de calcul des variations

Le calcul des variations est une branche des mathématiques qui permet la recherche de l'optimum d'une fonctionnelle.

Une fonctionnelle  $J$  sur un espace vectoriel  $V$  dans  $\mathfrak{R}$  . Par exemple si  $x(t)$  est une fonction continue sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$  , l'application définit par

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} x(t) dt \quad (\text{I.32})$$

La variation d'une fonctionnelle est donnée comme suit :

$$\Delta J(x(t)) = J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t)) \quad (\text{I.33})$$

Où :  $\delta x(t)$  est une variation de  $x(t)$

En faisant le développement de Taylor jusqu'à l'ordre 2 ou en faisant un calcul direct on peut montrer :

$$\Delta J(x(t), \delta x(t)) \approx g(x(t), \delta x(t)) \|\delta x(t)\| \quad (\text{I.34})$$

## 2. Le principe du minimum de Pontriaguine :

Le principe du minimum est la méthode la plus utilisée pour résoudre un problème de commande optimale, il est développé en utilisant le calcul des variations.

Les conditions d'optimalités sont données sous forme d'un système d'équations différentielles ordinaire du 1<sup>er</sup> ordre.

Soit le problème de commande optimale suivant :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt \quad (\text{I.35})$$

sujet à :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (\text{I.36})$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (\text{I.37})$$

$$x(t_f) = x_f \text{ ou libre} \quad (\text{I.38})$$

Pour éliminer cette contrainte, on propose d'introduire le vecteur des variables adjointes  $\lambda(t)$  et de l'intégrer dans le critère et le problème devient :

$$\min_{u(t)} \hat{J}(u(t)) = \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt + \lambda^T(t) [f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)] dt \quad (\text{I.39})$$

Sujet à :

$$x(t_0) = x_0 \quad (\text{I.40})$$

$$x(t_f) = x_f \text{ Ou libre} \quad (\text{I.41})$$

En introduisant la fonction d'Hamilton définit comme suit :

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \varphi(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) f(x(t), u(t), t) \quad (\text{I.42})$$

le critère devient :

$$\min_{u(t)} \hat{J}(u(t)) = \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [H(x(t), u(t), \lambda(t), t) - \lambda^T(t) \dot{x}(t)] dt \quad (\text{I.43})$$

### 3. La commande linéaire quadratique (équation différentielle de Riccati) :

La résolution d'un problème de commande optimale peut être simplifiée en considérant un modèle linéaire à condition que l'hypothèse de linéarité est vérifiée. Désignons par  $x^d(t)$  l'état désiré variable et définissons l'erreur de poursuite :

$$e(t) = x^d(t) - x(t) \quad (\text{I.44})$$

$$\text{le système suivant :} \quad \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (\text{I.45})$$

$$\text{et le critère} \quad J = \frac{1}{2} \int_0^T [[e(t)^T] Q e(t) + [u(t)^T] R u(t)] dt \quad (\text{I.46})$$

Avec  $Q$  et  $R$  sont des matrices définies positives.

En utilisant le principe du minimum :

L'Hamiltonien s'écrit :

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \frac{1}{2} [[e(t)^T] Q e(t) + [u(t)^T] R u(t)] + [\lambda(t)]^T \dot{x}(t) \quad (\text{I.47})$$

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \frac{1}{2} [e(t)]^T Q e(t) + [u(t)]^T R u(t) + [\lambda(t)]^T A x(t) + B u(t) \quad (\text{I.48})$$

Il est minimal pour :

$$\nabla u(t) H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = R u(t) + B^T \lambda(t) = 0 \quad (\text{I.49})$$

La commande optimale est alors :

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T \lambda(t) \quad (\text{I.50})$$

Les équations **d'Hamilton-Pontryagin** s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + Q \begin{bmatrix} 0 \\ x^d(t) \end{bmatrix} \quad (\text{I.51})$$

En considérant :

$$\lambda(t) = K(t) x(t) - V(t) \quad (\text{I.52})$$

La dérivée de  $\lambda(t)$  par rapport au temps :

$$\dot{\lambda}(t) = K(t) \dot{x}(t) + \dot{K}(t) x(t) - \dot{V}(t) \quad (\text{I.53})$$

$$\text{Ce qui donne : } K(t) \dot{x}(t) + \dot{K}(t) x(t) - \dot{V}(t) = -A^T \lambda(t) + Q (x^d(t) - x(t)) \quad (\text{I.54})$$

En remplaçant  $\dot{x}(t)$  et  $\dot{\lambda}(t)$  par leurs équations, on aura :

$$\dot{K}(t) + K(t) A + A^T K(t) - K(t) S K(t) + Q = 0 \quad (\text{I.55})$$

$$\dot{V}(t) + (A^T - K(t) S) V(t) - Q x^d(t) = 0 \quad (\text{I.56})$$

Ces équations définissent  $K(t)$  et  $V(t)$ . La première équation est appelée **équation matricielle de Riccati**. On obtient alors :

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T (K(t)x(t) - V(t)) \quad (\text{I.57})$$

$$\dot{x}(t) = (A - SK(t)) x(t) + SV(t) \quad (\text{I.58})$$

$x(t)$  intervient dans l'expression de  $u^*(t)$ , ce qui permet d'avoir la commande optimale sous forme d'un retour d'état.

On remarque que  $K(t)$  et  $V(t)$  ne dépendent pas de l'état du système, alors la loi de commande trouvée est optimale quelque soit les conditions initiales.

### **I.5. Synthèse d'une commande optimale :**

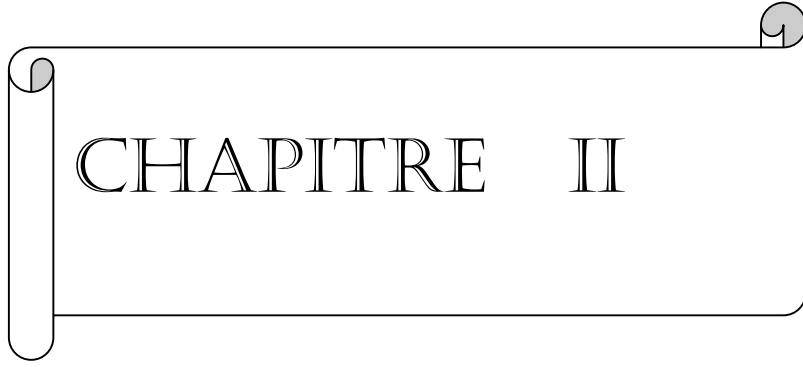
En résumé la synthèse d'une loi de commande optimale passe par les étapes suivantes :

1. Modélisation du procédé à commander.
2. Détermination des diverses contraintes à satisfaire.
3. Choix étudié avec soin du critère à minimiser.
4. Résolution du problème pour déterminer la loi de commande optimale  $u(t)$ .
5. Implémentation de la loi de commande.

### **I.6. conclusion**

Dans ce chapitre nous avons présenté la démarche à suivre pour la formulation mathématique d'un problème de commande optimale et les principales méthodes de résolution.

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter les concepts de base d'un problème d'optimisation et les méthodes de résolution en indiquant les méthodes d'optimisation globale.



CHAPITRE II

## II.1. Introduction

L'optimisation est une branche des mathématiques cherchant à analyser et à résoudre analytiquement ou numériquement les problèmes qui consistent à déterminer le meilleur élément d'un ensemble, au sens critère quantitatif donné. Ce mot vient du latin optimum qui signifie le meilleur.[1]

Un problème de commande optimale peut se ramener à la résolution d'un problème d'optimisation classique.

Ce chapitre est consacré à des généralités sur l'optimisation, après la formulation d'un problème d'optimisation, on donne une classification des méthodes d'optimisation (méthodes locales et méthode globales) .vers la fin on s'intéresse à la méthode d'optimisation globale d'Aliénor.

## II.2. Formulation d'un problème d'optimisation :

Un problème d'optimisation est exprimé comme une fonction objective à une ou plusieurs variables de décision, pour être maximisée ou minimisée sous une certaine contrainte indiquée.

Les fonctions de contraintes définissent le domaine acceptable des variables pour le processus d'optimisation. Les contraintes peuvent être de type égalité ou inégalité, elles permettent la limitation des domaines sur les variables, dans la recherche de la solution optimale.

Un problème d'optimisation de type minimisation et de dimension n peut être formulé de façon générale comme suit :

$$\begin{aligned} & \min_x f(x) && x \in D \subset \mathbb{R}^n \\ \text{Sujet à :} & && \\ & g_i(x) = 0 && 1 \leq i \leq p \\ & h_j(x) \leq 0 && 1 \leq j \leq p \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

$f(x)$  : fonction objectif.

$D$  : domaine admissible.

$x_i$  : Vecteur des variables de décision ( $x_1, x_2 \dots x_n$ ).

$h_j(x)$  : Contraintes inégalité.

$g_i(x)$  : Contraintes égalité.

### II.3. Classification des problèmes d'optimisation:

Suivant la nature de la fonction objectif et des différentes contraintes qui définissent le domaine des solutions admissible  $D$ , on distingue plusieurs types de programmation qui sont résumés dans le tableau II.1

		Fonction objectif		
		Linéaire	Quadratique (Convexe)	Non linéaire
contraintes	Linéaire	Programmation linéaire	programmation quadratique	Programmation non linéaire
	Quadratique (Convexe)	Programmation non linéaire	Programmation convexe	Programmation non linéaire
	Non linéaire	Programmation non linéaire	Programmation non linéaire	Programmation non linéaire

Tableau II.1 : classification des problèmes d'optimisation.

### II.4. Résolution d'un problème d'optimisation

Il existe deux méthodes d'optimisation, méthode locale et méthode globale. En outre un problème d'optimisation peut être avec ou sans contraintes. Dans les deux cas, l'objectif est de trouver des variables de décision qui maximise ou minimise la fonction objective.

#### II.4.1. Optimisation sans contraintes

Il existe de nombreuses méthodes pour la résolution des problèmes d'optimisation sans contraintes, On trouve :

##### a) Méthode graphiques :

Ce type de méthodes s'applique au problème d'optimisation ayant deux variables de décision. On peut toujours ramener un problème à  $n$  variables de décision à un autre problème à deux variables par élimination de variables, par conséquent les contraintes.

Les étapes à suivre sont :

- 1- Représenter le domaine admissible défini par les relations de contraintes inégalités.
- 2- Représenter les contours de la fonction objectif.

- 3- Déterminer le point d'intersection entre la fonction objectif et le domaine admissible dans le sens de l'optimisation.

Les directions d'optimisation sont données comme suit :

$$\min f(x) \rightarrow -\nabla_x f(x) \quad (\text{II.2})$$

$$\max f(x) \rightarrow +\nabla_x f(x_k) \quad (\text{II.3})$$

### a) Méthodes analytiques

Ces méthodes sont basées sur l'existence de dérivée, donc sur la continuité de la fonction objectif. Le point principal consiste à rechercher un extremum en déterminant les points de pente nulle dans toutes les directions qui dépend du gradient de la fonction objectif.

La première étape dans la recherche d'un extremum consiste à rechercher les points critiques qu'on obtient par l'annulation des dérivées partielles de la fonction objective.

Soit  $f(x)$  une fonction des variables réelles, l'optimum est obtenu en résolvant l'équation suivante :

$$\nabla_x f(x) = 0 \quad (\text{II.4})$$

Où  $\nabla_x f(x)$  est le gradient de  $f(x)$ .

#### ▪ Gradient d'une fonction [2]

Soit  $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  une fonction continue. La fonction notée  $\nabla_x f(x): \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  est appelée **gradient** de  $f$  et est défini par

$$\nabla_x f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (\text{II.5})$$

Après avoir calculé le gradient, la deuxième étape consiste à calculer la matrice Hessienne qui est la deuxième dérivée de  $f(x)$  ce qui permet de déterminer la nature des points critiques.

$$\nabla_x^2 f(x^*) \quad (\text{II.6})$$

- $\nabla_x^2 f(x^*) > 0$  , il s'agit d'un minimum.
- $\nabla_x^2 f(x^*) < 0$  , il s'agit d'un maximum.

Où  $x^*$  est le point critique.

- **la matrice Hésienne [2]**

Soit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois différentiable. La fonction notée  $\nabla^2_x f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  est appelée matrice **Hessienne**, elle est définie par :

$$\nabla^2_x f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \quad (\text{II.7})$$

### b) Méthodes numériques

Lorsqu'on ne peut pas résoudre analytiquement l'équation  $\nabla_x f(x) = 0$  alors on va chercher la solution numériquement.

Le principe des méthodes numériques d'optimisation consiste à choisir une solution de départ appelée estimée de la solution noté  $x^{(k)}$  et faire des itérations comme suit

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)} \quad (\text{II.8})$$

$\Delta x^{(k)}$  dépend de la méthode à utiliser.

- **Méthode du gradient**

Cette méthode permet de déterminer le minimum d'une fonction dont on peut calculer le gradient. Lorsqu'on ne dispose pas d'une expression du gradient de la fonction  $f$ , une estimation par une méthode de différence finie peut être utilisée.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha^{(k)} \nabla_x f(x^{(k)}) \quad (\text{II.9})$$

$$p^{(x^{(k)})} = -\alpha^{(k)} \nabla_x f(x^{(k)})$$

$\alpha^{(k)}$  est appelée pas de descente, on peut le déterminer par les deux méthodes suivantes

$$1. \text{ Pas de descente } f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)}) \quad (\text{II.10})$$

$$2. \text{ Pas de descente optimale } \min_{\alpha^{(k)}} f(x^{(k+1)}) \quad (\text{II.11})$$

#### ▪ Méthode du gradient conjugué

La méthode du gradient conjugué est un algorithme pour résoudre des systèmes d'équations linéaires dont la matrice est symétrique définie positive. Cette méthode est une méthode itérative qui converge en un nombre fini d'itérations.

$$p(x^{(k)}) = -\nabla_x f(x^{(k)}) + \beta^{(k)} p(x^{(k-1)}) \quad (\text{II.12})$$

$$\beta^{(0)} = 0$$

$$\beta^{(k)} = \frac{\|\nabla_x f(x^{(k)})\|^2}{\|\nabla_x f(x^{(k-1)})\|^2} \quad (\text{II.13})$$

#### ▪ Method de Newton

L'algorithme de la méthode de Newton peut être résumé comme suit :

Pour  $k = 1, 2, \dots$

$$p(x^{(k)}) = -[-\nabla_x^2 f(x^{(k)})]^{-1} \nabla_x f(x^{(k)}) \quad (\text{II.14})$$

#### ▪ Method de Newton modifié

pour  $k = 1, 2, \dots$

$$p(x^{(k)}) = -\alpha^{(k)} [-\nabla_x^2 f(x^{(k)})]^{-1} \nabla_x f(x^{(k)}) \quad (\text{II.15})$$

$\alpha^{(k)}$  est déterminé en utilisant les mêmes méthodes comme dans le cas de la méthode du gradient

### II.4.2. Optimisation en présence de contrainte

Dans cette partie, on présente les méthodes de recherche de l'optimum en présence de contraintes de type égalité, inégalité ou mixte.[3]

**II.4.2.1. Cas des contraintes égalité [3]**

$$G_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (\text{II.16})$$

Qu'on peut regrouper dans un vecteur  $G(\mathbf{x})$  comme suit :

$$G(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} G_1(\mathbf{x}) \\ G_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ G_p(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.17})$$

Pour résoudre ce problème, on utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_i = 1, \dots, p$ . Cette méthode permet de transformer un problème posé avec contraintes à un autre problème sans contraintes en définissant la fonction de Lagrange suivante :

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i G_i(\mathbf{x}) \quad (\text{II.18})$$

Avec:

$L(\mathbf{x}, \lambda)$ : la fonction de Lagrange

$f(\mathbf{x})$ : la fonction objectif

$\lambda_i(\mathbf{x})$  : multiplicateur de Lagrange

$G_i(\mathbf{x})$  : la contrainte.

Pour résoudre ce problème on doit déterminer les points critiques de la fonction de Lagrange, le gradient du Lagrangien doit être nul :

$$\nabla_{(\mathbf{x}, \lambda)} L(\mathbf{x}, \lambda) = \begin{cases} \nabla_{(\mathbf{x})} L(\mathbf{x}, \lambda) = \begin{cases} \frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_n} = 0 \end{cases} \\ \nabla_{(\lambda)} L(\mathbf{x}, \lambda) = \begin{cases} \frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda_n} = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

**II.4.2.2. Cas des contraintes inégalité [3]**

$$H_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, q \quad (\text{II.20})$$

Qu'on peut regrouper dans un vecteur  $H(x)$  comme suit :

$$H(x) = \begin{bmatrix} H_1(x) \\ H_2(x) \\ \vdots \\ H_q(x) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{II.21})$$

Pour résoudre ce problème on peut utiliser deux méthodes :

**a) La méthode des variables d'écart**

Cette méthode consiste à introduire des variables dites d'écart  $E(x_j)$ ,  $j = n + 1, \dots, n + q$  pour convertir les contraintes de type inégalité  $H_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, q$  à des contraintes de type égalité  $G_j(x) = 0$ ,  $j = 1, \dots, q$  puis utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Plusieurs choix de fonctions d'écart sont possibles, par exemple les variables

$x_j$ ,  $j = n + 1, \dots, n + q$

positives telles que :  $G_j(x) = H_j(x) + x_{n+1} = 0$ ,  $j = 1, \dots, q$ .

**b) La méthode des paramètres de Kuhn-Tucker**

Cette méthode donne directement les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un point critique soit un min ou un max. Elle consiste à introduire les paramètres  $\mu_j$  appelés paramètres de Kuhn-Tucker et à définir la fonction de Lagrange suivante :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^q \mu_j H_j(x) \quad (\text{II.22})$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour les différents problèmes sont résumées dans le tableau suivant :

Contraintes	Minimum	Maximum
$h_j(x) \leq 0$	$\nabla_x L(x, \mu) = 0$ $\nabla_\mu L(x, \mu) \leq 0$ $\mu_j H_j(x) = 0$ $\mu_j \geq 0$	$\nabla_x L(x, \mu) = 0$ $\nabla_\mu L(x, \mu) \leq 0$ $\mu_j H_j(x) = 0$ $\mu_j \leq 0$
$h_j(x) \geq 0$	$\nabla_x L(x, \mu) = 0$ $\nabla_\mu L(x, \mu) \geq 0$ $\mu_j H_j(x) = 0$ $\mu_j \leq 0$	$\nabla_x L(x, \mu) = 0$ $\nabla_\mu L(x, \mu) \geq 0$ $\mu_j H_j(x) = 0$ $\mu_j \geq 0$

**Tableau II.1** : conditions de Kuhn-Tucker

**II.4.2.3. Cas des contraintes mixtes (égalités et inégalités) :**

Les contraintes égalités et inégalités sont données respectivement par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 g_i(x) &= 0, & i &= 1, \dots, p \\
 H_j(x) &\leq 0, & j &= 1, \dots, q
 \end{aligned}
 \tag{II.23}$$

Dans ce cas on introduit un paramètre pour chaque contrainte. Seuls les paramètres relatifs aux contraintes inégalités sont soumis à des conditions de signe ( $\mu_j \geq 0$ ) et doivent s'annuler lorsque la contrainte correspondante n'est pas saturée. On a coutume d'appeler :

- Multiplicateurs de Lagrange, ceux relatifs aux contraintes du type égalité ( $\lambda_i$ ).
- Paramètres de Kuhn-Tucher, ceux relatifs aux contraintes du type inégalité ( $\mu_j$ ).

La fonction de Lagrange s'écrit :

$$\begin{aligned}
 L(x, \lambda, \mu) &= f(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i G_i(x) + \sum_{j=1}^q \mu_j H_j(x) \\
 L(x, \lambda, \mu) &= f(x) + \lambda^T G(x) + \mu^T H(x)
 \end{aligned}
 \tag{II.24}$$

Dans ce cas, on définit le vecteur suivant :  $\check{x} = (x, \lambda)$  et la fonction  $\Phi(\check{x}) = f(x) + \lambda^T G(x)$  le lagrangien peut alors s'écrire comme suit :

$$L(\check{x}, \mu) = \Phi(\check{x}) + \mu^T H(x)
 \tag{II.25}$$

Finalement, le problème revient à rechercher l'optimum de la fonction  $\Phi(\vec{x})$  soumise à des contraintes du type inégalité  $H_j(x) \leq 0$ , le même cas possible résumé dans le **Tableau II.2** restent valables.

La littérature sur l'optimisation décrit pour l'essentiel des méthodes locales qui permettent l'obtention des minimums locaux qui peuvent être certes intéressantes dans une étude préalable des phénomènes mais qu'il faudra de toute façon améliorer pour optimiser au mieux le problème formulé ou modélisé. Quant aux méthodes globales existantes elles sont la plupart de temps des améliorations de méthodes locales que l'on tente de débloquer d'un minimum local pour aller vers un meilleur minimum, espérant qu'en fin, on obtiendra un minimum global. Parmi ces méthodes on retrouve la méthode d'Aliénor développée par l'équipe de recherche « d'yves cherruault » dans les années 80, dont le principe est simple et l'efficacité n'est plus à démontrer

## II.5 Principe de la méthode d'Aliénor :

La méthode d'Aliénor, repose sur une suite de transformations réductrices qui permet de ramener toute fonction de plusieurs variables à une fonction d'une seule variable. On peut alors l'utiliser, pour résoudre les problèmes d'optimisation à plusieurs variables de décision.

Elle a été développée par cherruault et Arthur Guillez en utilisant la première transformation réductrice basée sur la spirale d'Archimède.

Soit le point  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  nous allons d'abord passer en coordonnées polaire.

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \alpha \\ x_2 &= r \sin \alpha \quad \alpha \geq 0 \end{aligned} \quad \text{(II.26)}$$

Puis on relie  $r$  et  $\alpha$  par la spirale d'Archimède :

$$r = a \alpha \quad \text{(II.27)}$$

avec  $a$  est un paramètre fixé destiné à tendre vers 0.

Ainsi les relations deviennent :

$$\begin{aligned} x_1 &= a \alpha \cos(\alpha) \\ x_2 &= a \alpha \sin(\alpha) \end{aligned} \quad \text{(II.28)}$$

Par conséquent, elles permettent d'exprimer  $x_1$  et  $x_2$  en fonction d'une seule variable  $\alpha \geq 0$ .

Pour trois variables  $x_1, x_2, x_3$  on relie d'abord  $x_1$  et  $x_2$  par une spirale d'Archimède d'angle  $\alpha_1$  on obtient :

$$\begin{aligned}x_1 &= a \alpha_1 \cos(\alpha_1) \\x_2 &= a \alpha_1 \sin(\alpha_1)\end{aligned}\tag{II.29}$$

Il est clair que  $x_1, x_2, x_3$  s'expriment à l'aide de  $\alpha$ . Ainsi, on obtient une courbe paramétrée  $h(\alpha) = (h_1(\alpha), h_2(\alpha), h_3(\alpha))$

sous la forme :

$$\begin{aligned}x_1 &= a^2 \alpha \cos(\alpha) \cos(a \alpha \cos(\alpha)) \\x_2 &= a^2 \alpha \cos(\alpha) \sin(a \alpha \cos(\alpha)) \\x_3 &= a \alpha \sin(\alpha)\end{aligned}\tag{II.30}$$

d'une façon générale pour  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , on relie deux à deux les variables par des spirales d'Archimède  $\alpha_i$  et on aboutit à des relations

$$x_i = h_i(\alpha), \quad i = 1, \dots, n\tag{II.31}$$

## II. 5.1. Autres transformations réductrices

### La transformation 1 :

$$x_i = \beta \alpha \cos(\rho_i \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n\tag{II.32}$$

où les paramètres  $\alpha_i$ , forment une suite croissante et vérifient les conditions suivantes

$$\frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} < 1 \quad \text{et} \quad \beta > 0\tag{II.33}$$

### La transformation 2 :

$$x_i = \beta \cos(m^i \pi \alpha)\tag{II.34}$$

Avec  $m > 1$

**La transformation 3 :**

$$x_i = \beta \cos(\rho_i \alpha) \quad (\text{II.35})$$

Les paramètres,  $\rho_i, \dots, \rho_{n-1}$  sont choisis proches les uns des autres, tout en constituant une suite lentement croissante, par exemple

$$\rho_{n-1} = \rho_i + \varepsilon \quad (\text{II.36})$$

Avec  $\varepsilon > 0$  et choisi très petit. Le paramètre  $\rho_n$  est choisi comme suit :

$$\rho_n = \pi \sqrt{n-1} \frac{\rho_{n-1}}{\beta} \quad (\text{II.37})$$

**La transformation 4 :**

$$x_i = \beta \cos(w_i \alpha + \varphi_i) \quad (\text{II.38})$$

Où les  $w_i > 0$  forment une suite croissante.  $\varphi_i$  est une suite lentement croissante dont les termes sont proches l'un des autres, par exemple :

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \varepsilon \quad (\text{II.39})$$

Avec  $\varepsilon > 0$  et choisi très petit.

Notons que la dernière transformation réductrice (**II.38**), selon la littérature, assure une très bonne précision par rapport aux autres transformations.

**II.6. Conclusion**

Dans ce chapitre, on a donné un aperçu général sur l'optimisation statique des fonctions à plusieurs variables, nous avons présenté les deux types d'optimisations (local et global). Dans le cas de l'optimisation locale, on a cité les différentes méthodes pour la recherche de l'optimum. Concernant l'optimisation globale, on a présenté la méthode d'Aliénor, cette méthode repose sur une suite de transformations réductrices qui permet de ramener un problème d'optimisation à plusieurs variables de décision à un problème d'optimisation à une seule variable de décision dont l'optimum global est facile à atteindre.





CHAPITRE III

**III.1. Introduction**

La modélisation de la majorité des phénomènes se fait par des équations différentielles. Ces équations sont parfois fortement non linéaire et leurs solution analytique est difficile voir impossible à déterminer par des moyens analytiques. Pour obtenir la solution de ces équations, on fait appel aux méthodes numériques. Dans notre travail on s'intéresse à la méthode des itérations variationnelle. Cette méthode permet d'obtenir une solution exacte ou approchée avec une grande précision même pour les équations qui sont fortement non linéaires.

**III.2. Les équations différentielles ordinaires (EDOs)**

En mathématique, une équation différentielle, est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques, biologiques, etc. Par conséquent, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématique pures qu'en mathématiques appliquées.

**III.2.1. Définition**

Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, d'ordre  $n$  est une relation entre la variable réelle  $t$ , une fonction inconnue  $t \mapsto x(t)$  et ses dérivées  $x', x'', \dots, x^{(n)}$  au point  $t$  définit par

$$F(t, x, x'', \dots, x^{(n)}) \quad (\text{III.1})$$

Où  $F$  n'est pas indépendant de sa dernière variable  $x^{(n)}$ . On prendra  $t$  dans un intervalle  $I$  de  $\mathcal{R}$ . La résolution de cette équation permet de déterminer la fonction continue  $x(t)$  qui vérifie l'équation différentielle ordinaire. [5]

**Remarque (1)**

L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de différentiation auquel une des fonctions inconnues a été soumise.

A titre d'exemple, les équations différentielles suivante

$$y'' + y' = 1 \quad (\text{III.2})$$

$$y''' + y'' - y = 0 \quad (\text{III.3})$$

Sont respectivement des EDOs du deuxième et du troisième ordre.

### III.2.2. Classification des équations différentielles ordinaires

Les équations différentielles ordinaires sont classées comme linéaire et non linéaire, aussi selon l'homogénéité (homogène ou non homogène).

#### III.2.2.1. Equation différentielle ordinaire linéaire et non linéaire

Une équation différentielle de type **(III.1)** d'ordre  $n$  est dite linéaire si elle est de la forme

$$a_n(t)x^n(t) + a_{n-1}(t)x^{n-1}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = g(t) \quad \text{(III.4)}$$

Avec tous les  $x^{(l)}$  de degré 1 et tous les coefficients dépendent que de  $t$ .

Donc, si l'une de ces conditions n'est pas satisfaite, l'équation est non linéaire. [5]

#### III.2.2.2. Equation différentielle ordinaire homogène et non homogène

Une équation différentielle ordinaire est dite homogène si chaque terme de l'équation dépend de la variable dépendante  $x$  (fonction inconnue) ou l'une de ces dérivées si non elle est dite non homogène. [5]

- Une équation différentielle du premier ordre homogène :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0 \quad \text{(III.5)}$$

- Une équation différentielle du premier ordre non homogène :

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 \dot{y} + a_1 + a_0 y = 0 \quad \text{(III.6)}$$

### III.4. Résolution des équations différentielles

Pour la résolution des équations différentielles, il existe plusieurs méthodes : les méthodes analytiques et les méthodes numériques.

#### III.4.1. Méthode analytique

Cette méthode est possible que pour certaines équations différentielles ayant une forme particulière. Par exemple, les équations différentielles du premier ordre ou du second ordre

linéaires. La résolution consiste à faire des manipulations mathématiques suivies des intégrations ordinaires ou par partie. [6]

Les méthodes analytiques ne sont pas suffisantes pour résoudre les problèmes d'équations différentielles et ne sont possibles que dans un nombre de cas très restreints.

La résolution de la plupart des équations différentielles se fait donc par l'utilisation des méthodes numériques

### III.4.2 Méthode Numérique

#### III.4.2.1 Méthode d'Euler [6]

En mathématique, la méthode d'Euler, du mathématicien Leonhard Euler (1707-1783), est une procédure numérique pour résoudre par approximation des équations différentielle du premier ordre munie d'une condition initiale. C'est la plus ancienne et la plus simple des méthodes de résolution numérique des équations différentielles ordinaires. Toutefois, elle est relativement peu utilisée en raison de sa faible précision.

La résolution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad \text{(III.7)}$$

Conduit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= t_i + h \\ y_{i+1} &= y_i + hf(t_i, y_i) \end{aligned} \quad \text{(III.8)}$$

En pratique, la méthode d'Euler n'est pas utilisée car elle n'offre pas une précision suffisante.

$$|y(t_i) - y_i| = \frac{1}{2} h^2 \hat{f}(c, y_i), \quad \text{avec } c \in [t_{i-1}, t_i] \quad \text{(III.9)}$$

Mais cette méthode dite explicite, si la fonction est linéaire, par exemple :

$$y = f(t, \dot{y}) = -ay \quad \text{avec } a > 0 \quad \text{(III.10)}$$

L'équation d'Euler est :

$$y_{i+1} = y_i - ah y_i = (1 - ah)y_i \quad (\text{III.11})$$

Est instable dès que  $h > \frac{2}{a}$ , car dans ce cas  $y_i$  tend vers l'infini lorsque  $i$  tend vers l'infini.

### III.4.2.2 Méthode de Runge-Kutta [6]

Carl Runge (1856-1927) et Martin Kutta (1867-1944) ont proposé de résoudre le problème de cauchy suivant :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à la méthode de Runge-kutta d'ordre 4.

L'algorithme de Runge-kutta d'ordre 4 est donné comme suit :

1. Etant donné un pas de temps  $h$ , une condition initiale  $(t_0, y_0)$  est un nombre maximal d'itération
2. Pour  $0 \leq i \leq N$  :

$$K_1 = hf(t_i, y_i) \quad (\text{III.13})$$

$$K_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \quad (\text{III.14})$$

$$K_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \quad (\text{III.15})$$

$$K_4 = hf(t_i + h, y_i + k_3) \quad (\text{III.16})$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (\text{III.17})$$

$$t_{i+1} = t_i + h \quad (\text{III.18})$$

Ecrire  $t_{i+1}$  et  $y_{i+1}$

3. L'itération se termine quand  $i + 1 = N$  (III.19)

**Remarque III.1**

La méthode de Runge- kutta d'ordre 4 est très fréquemment utilisée car elle nous permet d'obtenir des résultats d'une grande précision. En fait plus l'ordre d'une méthode est élevée, plus elle devient plus précise. [6]

**III.5 Principe de la méthode des itérations variationnelles (VIM)**

Dans cette partie, on présente les différentes étapes à suivre pour illustrer les concepts de base de la méthode de VIM.

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$L(y) + N(y) = g(x) \quad (\text{III.20})$$

Ou  $L(y)$  est un opérateur linéaire,  $N(y)$  est un opérateur non linéaire et  $g(x)$  est le terme non homogène.

Nous pouvons construire une correction fonctionnelle selon la méthode itérative variationnelle suivante :

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda(s) \{Ly(s) + N\tilde{y}_n(s) - g(s)\} ds \quad (\text{III.21})$$

Avec  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange, l'indice  $n$  représente la  $n^{\text{ième}}$  itération.

$\tilde{y}_n(s)$  est considéré comme une variation restreinte c'est-à-dire  $\delta\tilde{y}_n(s) = 0$ , afin d'identifier approximativement le multiplicateur de Lagrange.

Ainsi, la variation de (III.11) devient :

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(s) \{Ly(s) + N\tilde{y}_n(s) - g(s)\} ds \quad (\text{III.22})$$

Etant donné que le terme non linéaire  $\tilde{y}_n$  est considéré comme une variation restreinte  $\delta\tilde{y}_n(s) = 0$ , alors l'équation (III.11) devient

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(s) \{Ly_n(s) - g(s)\} ds \quad (\text{III.23})$$

Les itérations sont exécutées jusqu'à ce qu'on atteigne la convergence, c'est-à-dire  $y_{n+1}(x) \approx y_n(x)$

Cette extrême condition sur  $\delta y_{n+1}(x)$  exige que

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(s) \{Ly(s) - g(s)\} ds = 0 \quad (\text{III.24})$$

En général le multiplicateur de Lagrange peut être aisément identifié en utilisant les conditions stationnaires de l'équation précédente et cela après l'intégration par partie.

Une fois le multiplicateur de Lagrange est identifié, on choisit une fonction sélective  $y_0(t)$  qu'on remplace dans la fonctionnelle pour pouvoir calculer par la suite les itérations successives  $y_{n+1}(x)$  pour  $n \geq 0$  [6]

### III.6. Application de VIM pour la résolution des équations différentielles ordinaires

#### Exemple 1 :

Pour comprendre le principe de la méthode, on considère l'exemple suivant, où le problème et de résoudre cette équation différentielle linéaire :

$$\dot{x}(t) + x - t = 0, \quad x(0) = 1 \quad (\text{III.25})$$

En utilisant la méthode des itérations variationnelle, la formule (III.11) s'écrit :

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) + \int_0^t \lambda(s) (x'_n(s) + x_n(s) - t) ds \quad (\text{III.26})$$

Où  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange pour lequel son expression sera déterminée par la théorie des variations comme suit :

$$\delta x_{n+1} = \delta x_n(x) + \delta \int_0^t \lambda(s) (x'_n(s) + x_n(s) - t) ds \quad (\text{III.27})$$

En tenant compte de la condition de stationnarité  $\delta X_{n+1}(t) = 0$  et en utilisant une intégration par parties du terme en fonction de  $\dot{x}_n(t)$  on aboutit au résultat suivant :

$$\delta x_{n+1}(t) = \delta x_n(t) + \lambda(s) \delta x_n(s) \Big|_{s=x} - \int_0^t \dot{\lambda}(s) \delta x_n(s) ds + \int_0^t \lambda(s) \delta x_n(s) ds \quad \text{(III.28)}$$

La résolution de cette équation donne :

$$\lambda(t) = - e^{(s-t)} \quad \text{(III.29)}$$

La formule d'itération correspondante devient :

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) + \int_0^t - e^{(s-t)} (\dot{x}_n(s) + x_n(s) - s) ds \quad \text{(III.30)}$$

En choisissant comme estimé de départ  $x_0(t)=1$  et on effectuant les itérations, on aura :

A l'itération 0 :

$$x_0(t) = 1 \quad \text{(III.31)}$$

L'itération 1 :

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t - e^{(s-t)} (1 - s) ds \quad \text{(III.32)}$$

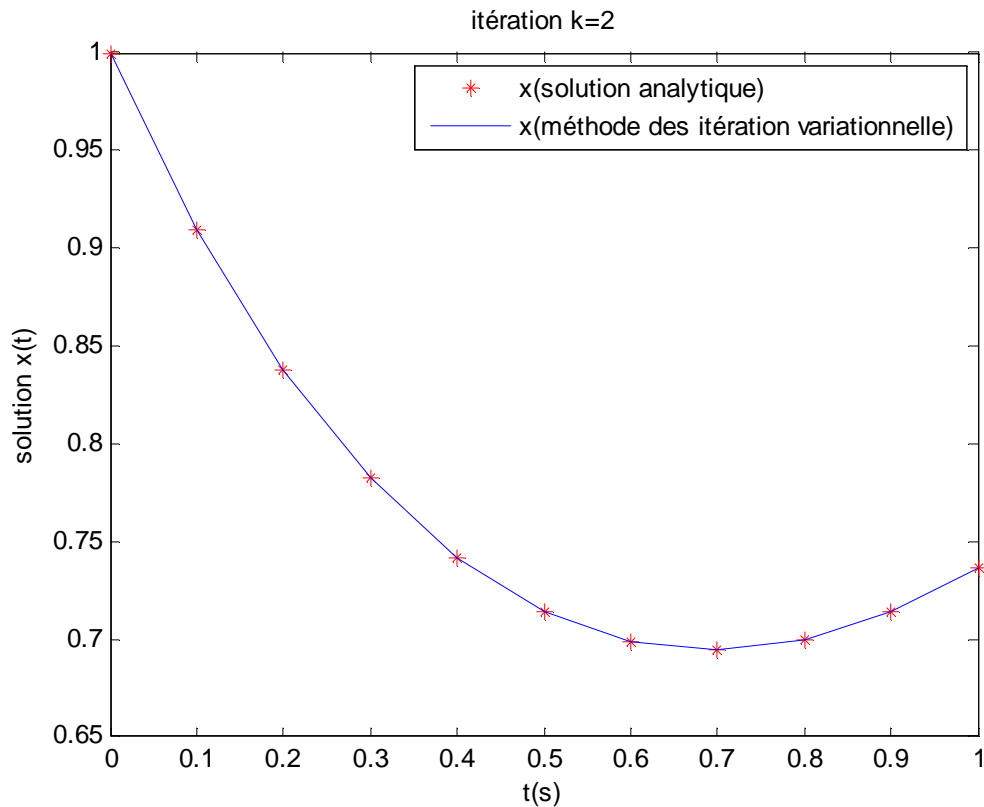
L'itération 2

$$x_1(t) = 2 e^{(-t)} + (t - 1) \quad \text{(III.33)}$$

La solution analytique exacte de l'équation différentielle est :

$$x_1(t) = 2 e^{(-t)} + (t - 1) \quad \text{(III.34)}$$

La figure suivante présente la solution obtenue par la méthode analytique et celle obtenue par la méthode VIM.



**Figure III.2 :** comparaison entre la solution approximée trouvée par la méthode de VIM et la solution exacte trouvée analytiquement.

Le résultat obtenu montre que la solution obtenue par VIM correspond à la solution analytique après deux itérations.

### Exemple 2 :

Soit le système d'équations différentielles ordinaire suivant :

$$\frac{dy_1}{dx} - y_3 + \cos x = 0 \quad (\text{III.35})$$

$$\frac{dy_2}{dx} - y_3 + e^x = 0 \quad (\text{III.36})$$

$$\frac{dy_3}{dx} - y_1 + y_2 = 0 \quad (\text{III.37})$$

La correction fonctionnelle selon VIM de ce système d'équations différentielles donne :

$$y_{1(n+1)}(x) = y_{1(n)}(x) + \int_0^x \lambda_1(s) (\dot{y}_{1(n)}(s) - y_{3(n)}(s) + \cos(s)) ds \quad \text{(III.38)}$$

$$y_{2(n+1)}(x) = y_{2(n)}(x) + \int_0^x \lambda_2(s) (\dot{y}_{2(n)}(s) - y_{3(n)}(s) + e^s) ds \quad \text{(III.39)}$$

$$y_{3(n+1)}(x) = y_{3(n)}(x) + \int_0^x \lambda_3(s) (\dot{y}_{3(n)}(s) - y_{1(n)}(s) + y_{2(n)}(s)) ds \quad \text{(III.40)}$$

Les conditions de stationnarité de la fonction impose d'avoir la variation de  $y_{n+1}$  nulle, c'est-à-dire  $\delta y_{n+1}(x) = 0$

En négligeant les petites variations relatives à la partie non linéaire ( $\delta x_{n+1}(t) = 0$ ) et pour toute variation  $\delta x_n(t)$  on a :

$$\delta y_{1(n+1)}(x) = \delta y_{1(n)}(x) + \int_0^x \lambda_1(s) \delta \dot{y}_{1(n)}(s) ds = 0 \quad \text{(III.41)}$$

$$\delta y_{2(n+1)}(x) = \delta y_{2(n)}(x) + \int_0^x \lambda_2(s) \delta \dot{y}_{2(n)}(s) ds = 0 \quad \text{(III.42)}$$

$$\delta y_{3(n+1)}(x) = \delta y_{3(n)}(x) + \int_0^x \lambda_3(s) \delta \dot{y}_{3(n)}(s) ds = 0 \quad \text{(III.43)}$$

En utilisant une intégration par parties au système en fonction de  $\dot{y}_n(x)$  on aboutit au résultat suivant :

$$\delta y_{1(n+1)}(x) = \delta y_{1(n)}(x) + \lambda_1(s) \delta y_{1(n)}(x) \Big|_x = s - \int_0^x \dot{\lambda}_1(s) \delta y_{1(n)}(s) ds \quad \text{(III.44)}$$

$$\delta y_{2(n+1)}(x) = \delta y_{2(n)}(x) + \lambda_2(s) \delta y_{2(n)}(x) \Big|_x = s - \int_0^x \dot{\lambda}_2(s) \delta y_{2(n)}(s) ds \quad \text{(III.45)}$$

$$\delta y_{3(n+1)}(x) = \delta y_{3(n)}(x) + \lambda_3(s) \delta y_{3(n)}(x) \Big|_x = s - \int_0^x \dot{\lambda}_3(s) \delta y_{3(n)}(s) ds \quad \text{(III.46)}$$

Avec

$$1 + \lambda_1(s) \Big|_{s=x} = 0, \quad \dot{\lambda}_1(s) \Big|_{s=x} = 0 \quad \text{(III.47)}$$

$$1 + \lambda_2(s) \Big|_{s=x} = 0, \quad \dot{\lambda}_2(s) \Big|_{s=x} = 0 \quad \text{(III.48)}$$

$$1 + \lambda_3(s) \Big|_{s=x} = 0, \quad \dot{\lambda}_3(s) \Big|_{s=x} = 0 \quad \text{(III.49)}$$

La résolution de ces équations donne :

$$\lambda_1(s) = -1 \quad \text{(III.50)}$$

$$\lambda_2(s) = -1 \quad \text{(III.51)}$$

$$\lambda_3(s) = -1 \quad \text{(III.52)}$$

Substituant les valeurs du multiplicateur de Lagrange dans la fonctionnelle donne la formule itérative suivante

$$y_{1(n+1)}(x) = y_{1(n)}(x) - \int_0^x (\dot{y}_{1(n)}(s) - y_{3(n)}(s) + \cos(s)) ds \quad \text{(III.53)}$$

$$y_{2(n+1)}(x) = y_{2(n)}(x) - \int_0^x (\dot{y}_{2(n)}(s) - y_{3(n)}(s) + e^s) ds \quad \text{(III.54)}$$

$$y_{3(n+1)}(x) = y_{3(n)}(x) - \int_0^x (\dot{y}_{3(n)}(s) - y_{1(n)}(s) + y_{2(n)}(s)) ds \quad \text{(III.55)}$$

On prend comme estimé de départ :

$$y_1(0) = 1 \quad \text{(III.56)}$$

$$y_2(0) = 0 \quad \text{(III.57)}$$

$$y_3(0) = 2 \quad \text{(III.58)}$$

Cette sélection nous permet d'obtenir les approximations consécutives suivantes

Pour  $y_1$  :

$$y_1(0) = 1 \quad \text{(III.59)}$$

$$y_1(1) = 1 + 2x + \sin x \quad \text{(III.60)}$$

$$y_1(2) = -\sin x + \frac{1}{2} x^2 + 2x + 1 \quad \text{(III.61)}$$

Pour  $y_2$ :

$$y_2(0) = 0 \quad \text{(III.62)}$$

$$y_2(1) = 2x - e^x + 1 \quad \text{(III.63)}$$

$$y_2(2) = 2x - e^x - \frac{1}{2} x^2 + 1 \quad \text{(III.64)}$$

Pour  $y_3$ :

$$y_3(0) = 2 \quad \text{(III.65)}$$

$$y_3(1) = 2 + x \quad \text{(III.66)}$$

$$y_3(2) = \cos x - e^x + 2x + 2 \quad \text{(III.67)}$$

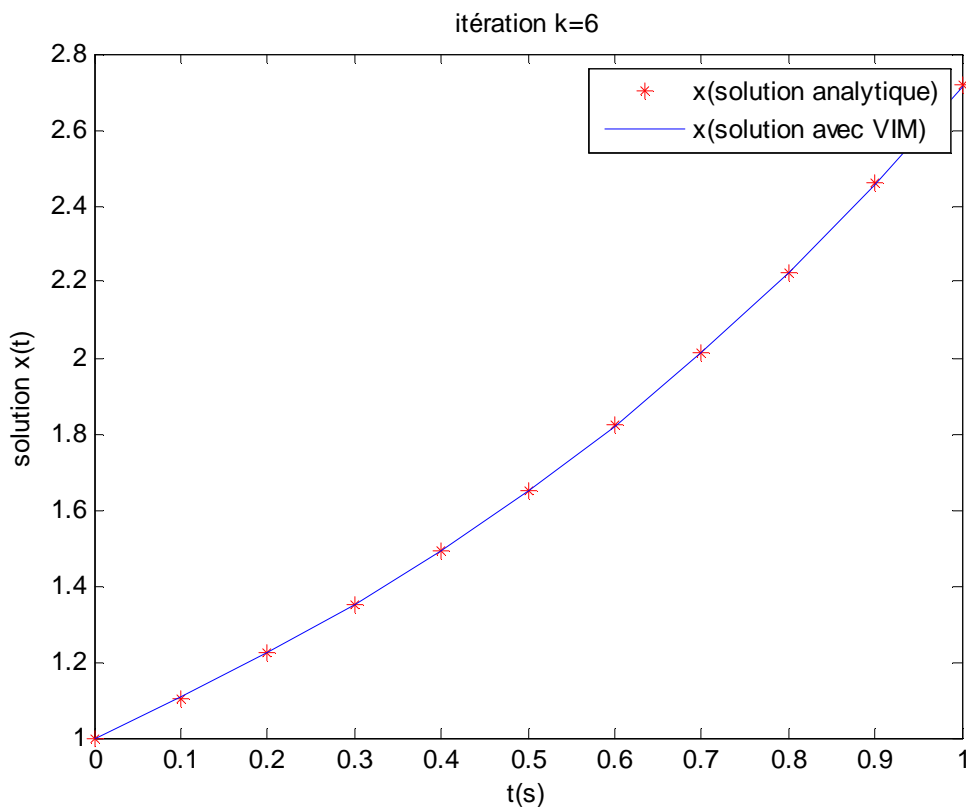
Par conséquent les solutions exactes du problème est :

$$y_1 = e^x \quad \text{(III.68)}$$

$$y_2 = \sin x \quad (\text{III.69})$$

$$y_3 = e^x + \cos x \quad (\text{III.70})$$

La figure suivante illustre la solution analytique et la solution obtenue par VIM après 6 itérations.



La **figure III.3** démontre que la solution approximée trouvée par la méthode des itérations variationnelles (VIM) à la 6<sup>ème</sup> itération correspond avec celle trouvée analytiquement.

### III.7. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté des généralités sur les équations différentielles ordinaires (EDO), ensuite nous avons présenté le principe de la méthode des itérations variationnelle utilisée pour la résolution de ces équations en utilisant des formules itératives.

Le principe de cette méthode consiste à écrire une formule itérative, appelée fonctionnelle de correction, qui permet de calculer des solutions approximatives de la solution de l'équation

différentielles. Cette méthode introduit un multiplicateur de Lagrange qui doit être identifié en écrivant les conditions de stationnarité de la fonctionnelle.

Les deux exemples traités montre que la méthode VIM converge vers la solution exacte avec une très grande précision, d'où l'intérêt de cette méthode.



CHAPITRE IV

### IV.1. Introduction

Le principe de la méthode de paramétrisation du vecteur de commande, utilisée pour la résolution d'un problème de commande optimale consiste à approcher le vecteur de commande par une fonction réelle de la forme suivante :

$$u(t) = \sum_{j=0}^N k_j \vartheta_j(t) \quad (\text{IV.1})$$

Où  $\vartheta_j(t)$  sont des fonctions linéairement indépendantes de l'approximation choisie. Les  $\vartheta_j(t)$  sont connues ou définies pour  $t$  appartenant à l'intervalle de définition de  $u(t)$ , et les  $k_j$  sont des paramètres inconnus à déterminer. Ainsi, rechercher  $u(t)$  revient à trouver les paramètres  $k_j (j = 1, \dots, N)$ .

### IV.2. Les expressions de paramétrisation de la commande :

La technique de paramétrisation consiste à approcher le vecteur de commande par :

Si les paramètres de contrôle doivent être constants durant  $[t_0, t_f]$  alors,

$$u(k, t) = k \quad (\text{IV.2})$$

- Si les paramètres sont sous forme de rampe alors,

$$u(k, t) = k_1 + k_2 t \quad (\text{IV.3})$$

- Si les paramètres sont sous forme de polynôme alors,

$$u(k, t) = k_1 + k_2 t + k_3 t^2 + \dots \quad (\text{IV.4})$$

- Si les paramètres sont sous forme de fonction trigonométrique alors,

$$u(k, t) = k \sin \pi \left[ \frac{t}{(t_f - t_0)} \right] \quad (\text{IV.7})$$

- Si les paramètres sont sous forme des séries de fourrier :

$$u(k, t) = \sum_{i=1}^N \left[ k_{1i} \sin \frac{i\pi t}{(t_f - t_0)} + k_{2i} \cos \frac{i\pi t}{(t_f - t_0)} \right] \quad (\text{IV.8})$$

**Remarque :**

La solution trouvée dans chaque cas serait très différente. Il est souvent désirable d'utiliser peu de paramètre de contrôle que possible pour minimiser le calcul, pourtant l'augmentation du nombre de paramètres peut améliorer l'optimalité du résultat.

Pour expliquer le principe de la paramétrisation du vecteur de commande, on considère le problème de commande optimale suivant :

Le critère :

$$\min_{k_1, \dots, k_N} J = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), \sum_{j=0}^N k_j \vartheta_j(t), t) \quad (\text{IV.9})$$

Le modèle :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \sum_{j=0}^N k_j \vartheta_j(t), t) \quad (\text{IV.10})$$

L'état initial :

$$x(0) = x_0$$

L'objectif est de trouver les valeurs des paramètres  $k$  qui minimise  $J$  en satisfaisant la contrainte dynamique. Les fonctions de contrôle qui sont raisonnable pour une application ne peuvent pas forcément être raisonnables pour une autre.

Les conditions de minimisation de  $J$  :

La condition nécessaire de  $k$  pour minimiser  $J$  est

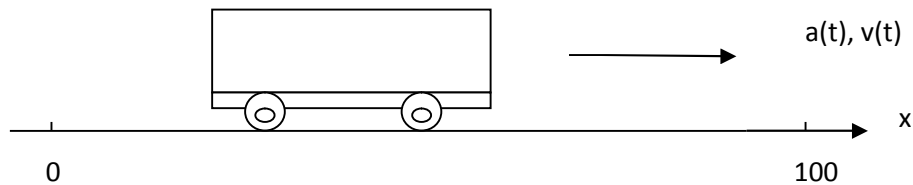
$$\frac{\partial J}{\partial k} = 0 \quad (\text{IV.11})$$

Si en plus

$$\frac{\partial^2 J}{\partial k^2} > 0 \quad (\text{IV.12})$$

Les deux équations fournissent des conditions nécessaires et suffisantes pour un minimum local. Trouver une valeur de  $k$  qui satisfait cette équation n'écarte pas l'existence d'autres valeurs de minimisation locale  $k$  qui produit la valeur la plus basse de  $J$ . La description du problème peut donner assez d'information supplémentaire pour déterminer si un minimum local est global. Pour des problèmes plus difficiles, les évaluations numériques et les méthodes itératives seraient utilisées.

### IV.3. Exemple illustratif (un chariot se déplaçant sur une piste)



A) Un chariot libre se déplace sur une piste sous l'influence d'une force de contrôle constante  $f$ , nous voulons que le chariot parcoure 100 m dans 10 s mais avec la plus petite force possible.

$v_i = 0$ ,  $v_f$  libre, la masse du chariot est  $m$ .

Toutes les forces d'autre que le contrôle sont nulles

- Quelle est la valeur appropriée de  $f$  ?

Les équations d'état sont

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \frac{f}{m} \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

Posons  $x = x_1$ ,  $v = x_2$ ,  $u = \frac{f}{m}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u = k \end{cases} \quad (\text{IV.14})$$

Avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} x_{10} = 0 \\ x_{20} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.15})$$

L'état final désiré à ( $t_f = 10$  s)

$$\begin{cases} x_{1d} = 100 \text{ m} \\ x_{2d} \text{ libre} \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

En intégrant les équations d'état :

$$x_1(t) = k \frac{t^2}{2} \quad \text{et} \quad x_2(t) = kt \quad \text{(IV.17)}$$

Il y a une seule valeur de  $k$  qui donne  $x_1(10) = 100$  m avec  $k = 2$

Il n'y a aucun contrôle admissible qui satisfait les deux buts précédents. On peut fixer un objectif en minimisant le critère quadratique

$$J = q(x_{1f} - 100)^2 + r \int_0^{t_f} u^2 dt \quad \text{(IV.18)}$$

Dans ce simple exemple :

$$J = q(50k - 100)^2 + 10rk^2 \quad \text{(IV.19)}$$

$$\text{Et } \frac{\partial J}{\partial k} = k(500q + 2r) - 100q \quad \text{(IV.20)}$$

$\frac{\partial J}{\partial k} = 0$  , le contrôle paramétrique optimale est :

$$k = \frac{1000q}{(500q+2r)} = \frac{1000(\frac{q}{r})}{(500(\frac{q}{r})+2)} \quad \text{(IV.21)}$$

On paramétrise le vecteur de commande par une constante, le tableau suivant fournit les résultats pour trois choix des facteurs de pondérations du critère

pondérations du critère	Q	100	1	1
	R	1	1	100
Contrôle Paramétrique optimal	K	1.9999	1.9920	1.4286
Etats finals	$x_{1f}$	99.9960	99.6016	71.4286
	$x_{2f}$	19.9992	19.9203	14.2857
L'énergie minimale	$\int u^2 dt$	39.9968	39.6819	39.6819
Le critère	J	39.9984	39.8406	2857.1

**Tableau (IV.1)** Les résultats obtenus avec la paramétrisation par une constante

En étudiant les résultats du tableau (IV.1) obtenus par un programme sous MATLAB pour trois choix des facteurs de pondérations, on remarque que lorsqu'on prend ( $q = 100$ ) et ( $r = 1$ ) et aussi ( $q = r = 1$ ), on aura le critère égale à l'énergie minimale donc la partie terminale est négligée. Par contre si on prend ( $q = 1$ ) et ( $r = 100$ ), on aura les deux parties (terminale et intégrale) considérées dans le critère. Donc dans ce cas, pour minimiser le critère, il faut prendre la valeur de  $q$  beaucoup plus élevée que celle de  $r$ .

B) Supposons que le contrôle admissible est donné sous la forme d'une rampe :

$$u(t) = k_1 + k_2 t \quad (\text{IV.22})$$

Dans ce cas

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = k_1 + k_2 t \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

Et les états sont les suivants :

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{k_1 t^2}{2} + \frac{k_2 t^3}{6} \\ x_2(t) = k_1 t + \frac{k_2 t^2}{2} \end{cases} \quad (\text{IV.24})$$

Le critère prend l'expression suivante :

$$J = q[(50k_1 + 166.7k_2) - 100]^2 + r(10k_1^2 + 100k_1k_2 + 333.3k_2^2) \quad (\text{IV.25})$$

Et le gradient est exprimé par les deux équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial k_1} = k_1(500q + 2r) + k_2(1666.7q + 10r) - 10000q \\ \frac{\partial J}{\partial k_2} = k_1(1666.7q + 10r) + k_2(5555.6q + 66.7r) - 3333.3q \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

Le contrôle de minimisation est défini par  $\frac{\partial J}{\partial k} = 0$ , qui exige que  $\frac{\partial J}{\partial k_1}$  et  $\frac{\partial J}{\partial k_2}$  simultanément égale à zéro.

Ça mène à l'équation

$$\begin{bmatrix} (500q + 2r) & (1666.7q + 10r) \\ (1666.7q + 10r) & (5555.6q + 66.7r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 3333.3 \end{bmatrix} q \quad (\text{IV.27})$$

$$\text{Qui prend la forme :} \quad k = A^{-1}Bq \quad (\text{IV.28})$$

Pour la paramétrisation du vecteur de commande par une droite, le tableau suivant résume les résultats obtenus pour trois choix des facteurs de pondérations du critère.

pondérations du critère	Q	100	1	1
	R	1	1	100
Contrôle Paramétrique optimal	$k_1$	14.4094	3.0127	2.3065
	$k_2$	-3.7227	-0.3056	-0.2305
Etats finals	$x_{1f}$	100.0208	99.7041	76.9163
	$x_{2f}$	-42.0409	14.8477	11.5423
L'énergie minimale	$\int u^2 dt$	1331.6	29.8274	29.8274
Le critère	J	1332.2	29.9180	2307.9

**Tableau (IV.2) :** résultat obtenus pour la paramétrisation par une droite

En étudiant les résultats du tableau (IV.2) obtenus par un programme sous MATLAB pour trois choix des facteurs de pondérations, on remarque que dans ce cas, quand on prend  $(q = 100)$  et  $(r = 1)$  et  $(q = r = 1)$  on aura le critère égale à l'énergie minimale, et pour le choix de  $(q = 1)$  et  $(r = 100)$  les deux parties sont considéré dans le critère. Alors pour minimiser le critère dans ce cas, il faut prendre  $(q = r = 1)$ .

C) Paramétrisation par un polynôme d'ordre trois :

$$u(t) = k_1 + k_2t + k_3t^2 \quad (\text{IV.29})$$

Dans ce cas

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = k_1 + k_2t + k_3t^2 \end{cases} \quad (\text{IV.30})$$

$$\text{Et } \begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}k_1t^2 + \frac{1}{6}k_2t^3 + \frac{1}{12}k_3t^4 \\ x_2(t) = k_1t + \frac{1}{2}k_2t^2 + \frac{1}{3}k_3t^3 \end{cases} \quad \text{(IV.31)}$$

Après avoir remplacé l'expression du vecteur de commande et des états dans l'expression du critère précédente on obtient :

$$J = q((50k_1 + 166.67k_2 + 833.33k_3) - 100)^2 + r \int_0^{t_f} (k_1 + k_2t + k_3t^2)^2 dt \quad \text{(IV.32)}$$

Et le gradient est exprimé par les équations suivantes :  $\nabla J = \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial k_1} \\ \frac{\partial J}{\partial k_2} \\ \frac{\partial J}{\partial k_3} \end{cases} \quad \text{(IV.33)}$

Pour la paramétrisation du vecteur de commande en considérant un polynôme d'ordre 3, le tableau suivant fournit les résultats pour trois choix des facteurs de pondérations du critère

pondérations du critère	Q	100	1	1
	R	1	1	100
Contrôle Paramétrique optimal	k <sub>1</sub>	3.0005	2.9916	2.3082
	k <sub>2</sub>	-0.3003	-0.2995	-0.2310
	k <sub>3</sub>	3.4198e-05	3.4096e-05	2.6307e-05
Etats finals	x <sub>1f</sub>	99.9950	99.6989	76.9222
	x <sub>2f</sub>	14.9989	14.9545	11.5381
L'énergie minimale	$\int u^2 dt$	29.9970	29.8196	17.7511
Le critère	J	29.9979	29.9979	2.3076e+03

**Tableau (IV.3)** Les résultats obtenus avec la paramétrisation par un polynôme d'ordre 3

En étudiant les résultats du tableau (IV.3) obtenus par un programme sous MATLAB pour trois choix des facteurs de pondérations, on remarque que quand on prend ( $q = 100$ ) et ( $r = 1$ ) et ( $q = r = 1$ ) on aura le critère égale à l'énergie minimale et pour ( $q = 1$ ) et ( $r = 100$ ) on aura les deux parties (terminale et intégrale) dans le critère. Alors pour minimiser le critère il faut prendre ( $q = 100$ ) et ( $r = 1$ ) et ( $q = r = 1$ ).

D) Paramétrisation de vecteur de commande par une fonctions trigonométrique :

$$u = k_1 \cos w_1 t + k_2 \sin w_2 t \quad \text{(IV.34)}$$

$$\text{Ou } w_1 = \frac{\pi}{10} \text{ et } w_2 = 2w_1 \quad \text{(IV.35)}$$

Pour toute les valeurs de  $k_1$  et  $k_2$ , l'expression de temps de la vitesse est décrite par :

$$x_2(t) = \frac{k_1}{w_1} \sin w_1 t + \frac{k_2}{w_2} (1 - \cos w_2 t) \quad \text{(IV.36)}$$

L'état initial et final sont donnés par :

$$x_1(t) = k_1 \left[ \frac{1}{w_1^2} (1 - \cos w_1 t) \right] + k_2 \left[ \frac{t}{w_2} - \frac{1}{w_2^2} \sin w_2 t \right] \quad \text{(IV.37)}$$

$$\begin{cases} x_1(10) = k_1 \frac{200}{\pi^2} + k_2 \frac{50}{\pi} \\ x_2(10) = 0 \end{cases} \quad \text{(IV.38)}$$

Le critère est donné par :

$$J = q \left[ \left( k_1 \frac{200}{\pi^2} + k_2 \frac{50}{\pi} \right) - 100 \right]^2 + r \int_0^{t_f} (k_1 \cos w_1 t + k_2 \sin w_2 t)^2 dt \quad \text{(IV.39)}$$

En mettant  $\frac{\partial J}{\partial k} = 0$  donne une équation pour les paramètres de contrôle paramétrique

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[ \left( \frac{80000}{\pi^4} \right) q + 10r \right] & \left[ \left( \frac{20000}{\pi^3} \right) q + \left( \frac{80}{3\pi} \right) r \right] \\ \left[ \left( \frac{20000}{\pi^3} \right) q + \left( \frac{80}{3\pi} \right) r \right] & \left[ \left( \frac{5000}{\pi^2} \right) q + 10r \right] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 40000 \\ \frac{\pi^2}{10000} \end{bmatrix} q \quad \text{(IV.40)}$$

Le tableau suivant présente les résultats obtenus pour trois choix des facteurs de pondérations du critère.

pondérations du critère	Q	100	1	1
	R	1	1	100
Contrôle Paramétrique optimal	$k_1$	5.8012	5.7331	2.6368
	$k_2$	-1.1039	-1.0909	-0.5017
Etats finals	$x_{1f}$	99.9880	98.8139	45.4476
	$x_{2f}$	2.2614e-15	2.2349e-15	1.0279e-15
L'énergie minimale	$\int u^2 dt$	120.0047	117.2030	24.7928
Le critère	J	120.0192	118.6098	5.4552e+03

**Tableau (IV.4)** le résultat pour la paramétrisation par une fonction trigonométrique

En étudiant les résultats du tableau (IV.4) obtenus par un programme sous MATLAB pour trois choix des facteurs de pondérations, on remarque que dans ce cas, lorsqu'on prend ( $q = 100$ ) et ( $r = 1$ ) et aussi ( $q = r = 1$ ) on aura le critère qui est égale à l'énergie minimale par contre lorsqu'on prend ( $q = 1$ ) et ( $r = 100$ ) on aura les deux parties dans le critère. De là, on distingue que pour minimiser le critère il faut choisir ( $q = r = 1$ ).

Pour démontrer la justesse de la méthode, un exemple d'application a été présenté. La convergence de la méthode a été confirmée

#### IV.4. Exemple de résolution d'un problème de commande optimale par la technique de paramétrisation:

Soit le problème de commande optimale suivant :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^1 (u^2 + x^2) dt \quad (\text{IV.41})$$

Sujet à :

$$\dot{x} = -x + u \quad (\text{IV.42})$$

$$x(0) = 0 \quad , \quad x(1) = 1 \quad (\text{IV.43})$$

pour la résolution de ce problème de commande optimale, nous allons appliquer la technique qu'on a expliquée dans les chapitres précédents.

La première étape est la paramétrisation de la commande. pour la paramétrisation, on considère un polynôme d'ordre 2 qui est donné par :

$$u(t) = k_0 + k_1 t + k_2 t^2 \quad (\text{IV.44})$$

Le problème revient à chercher les paramètres  $k_0$ ,  $k_1$ , et  $k_2$  de telle sorte que la commande (IV.44) minimise le critère  $J$ . Le problème de commande optimale prend la forme suivante :

En remplaçant (IV.44) dans le problème (IV.41) et (IV.42) on aura :

$$\min_{u(t)} J(u(t) = \int_0^1 ((k_0 + k_1 t + k_2 t^2)^2 + x^2) dt \quad (\text{IV.45})$$

$$\dot{x} = -x + (k_0 + k_1 t + k_2 t^2) \quad (\text{IV.46})$$

Avec  $k_i$  sont des inconnus, ( $i=0, \dots, 2$ )

Pour la résolution de l'équation différentielle du modèle, on applique la méthode VIM. On prend comme condition initiale  $x_0 = 1$ . L'application de la méthode VIM permet d'avoir la solution de l'état  $x(t)$  en fonction des paramètres  $k_0$  et  $k_2$  en une itération.

En substituant les expressions des états dans le problème de commande optimale précédent, et après l'évaluation de la partie intégrale, le problème devient un problème d'optimisation dans les variables de décisions sont  $k_0$ ,  $k_1$  et  $k_2$ . Pour déterminer la solution de ce problème d'optimisation, on a utilisé la méthode d'optimisation globale d'Aliénor.

La transformation réductrice utilisée est la transformation (II.38) du chapitre (II).

$$x_i = \cos(w_i \alpha + \varphi_i) \quad (\text{II.38})$$

Avec :

$$(w_0 = 100, \varphi_0 = 1)$$

$$(w_1 = 101, \varphi_1 = 1.0005)$$

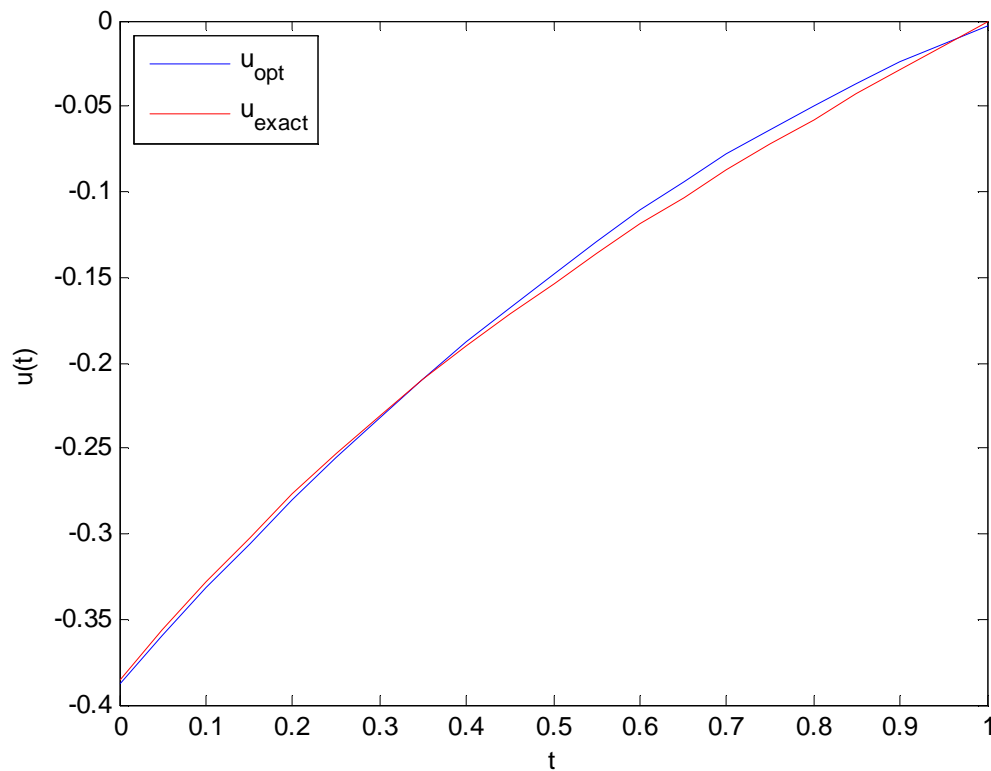
$$(w_2 = 102, \varphi_2 = 1.001)$$

$$k_0 = \beta \cos(w_0 \alpha + \varphi_0) \quad (\text{IV.47})$$

$$k_1 = \beta \cos(w_1 \alpha + \varphi_1) \quad (\text{IV.48})$$

$$k_2 = \beta \cos(w_2 \alpha + \varphi_2) \quad (\text{IV.49})$$

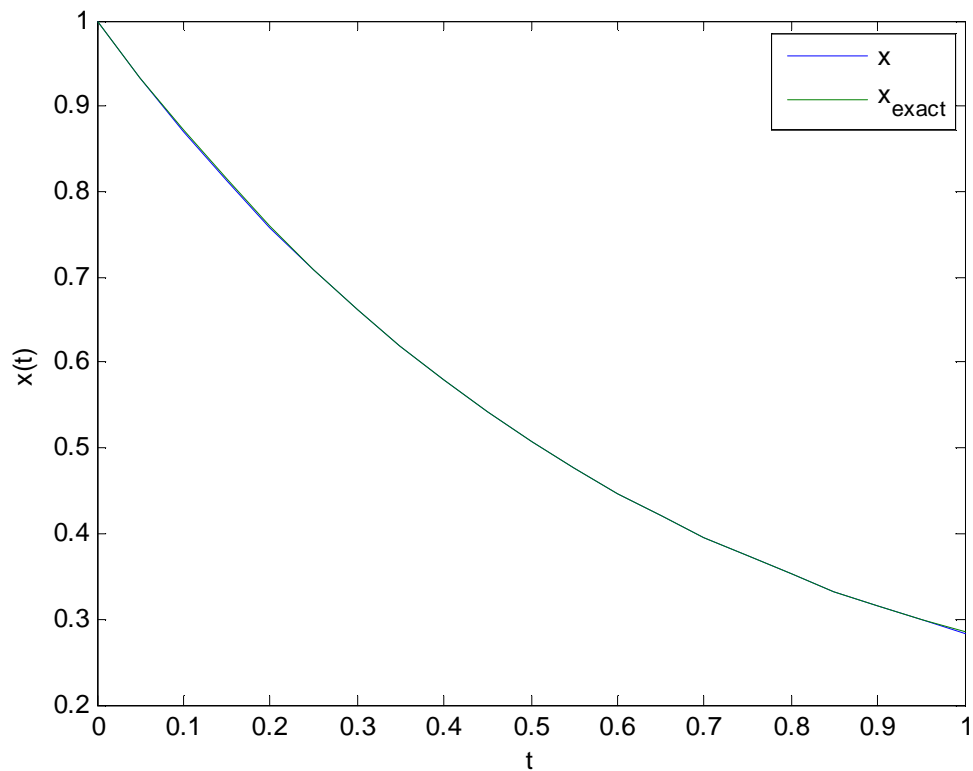
Les résultats de simulations sont donnés par les figures suivantes. La **Figure (IV.I)** donne la loi de commande optimale obtenue par la technique de paramétrisation et celle obtenue par la méthode analytique (exacte). On remarque que les deux solutions sont très proche l'une de l'autre, ce qui montre l'intérêt de la technique de paramétrisation.



**Figure (IV.I) :** Commande optimale

On constate que l'approche proposée donne une solution très proche de la solution exacte.

La **Figure(IV.II)** présente l'évolution de l'état obtenue par la technique de paramétrisation et l'état obtenue par la méthode analytique. On remarque que l'erreur entre les deux états est très faible.



**Figure (IV.II) :** Etat du système

#### IV.5. Conclusion

Dans ce chapitre, on a donné un aperçu général sur le principe de la méthode de paramétrisation du vecteur de commande, et les différentes expressions de paramétrisation de la commande ensuite nous avons étudié un exemple illustratif de résolution d'un problème de commande optimale par les différentes expressions de paramétrisation. Par la suite, on a résolu un problème de commande optimale par la méthode indirecte, qui consiste à le transformer à un problème d'optimisation à l'aide de la technique de paramétrisation, la méthode VIM et la méthode d'Aliénor. La comparaison des résultats obtenus par cette méthode par rapport aux résultats obtenus par la méthode analytique démontre l'intérêt de l'utilisation de la technique de paramétrisation pour la résolution des problèmes de commande optimale.



CONCLUSION GENERALE

## Conclusion générale

Le travail présenté, dans ce mémoire, s'inscrit dans le cadre de la résolution des problèmes de commande optimale en utilisant la technique de paramétrisation du vecteur de commande et la méthode des itérations variationnelles. L'idée consiste à transformer le problème de commande optimale à un problème d'optimisation résolu par la méthode d'optimisation globale d'Alienor.

Nous avons commencé par des généralités sur la commande optimale où on a présenté les notions et les concepts de base pour la formulation mathématique des problèmes de commande optimal, par la suite on a présenté les différentes méthodes de résolution des problèmes de commande optimale.

La suite du travail a été consacrée à l'optimisation d'une manière générale et en particulier à l'optimisation globale. Nous avons utilisé l'une des méthodes d'optimisation globale en l'occurrence la méthode d'Aliénor qui permet d'atteindre l'optimum globale, par conséquent d'avoir la meilleur commande à appliquer au système.

La suite du travail a été consacrée à la résolution des équations différentielles ordinaire en particulier la méthode des itérations variationnelles (VIM).

A la fin du mémoire, nous avons résolu un problème de commande optimal en combinant la technique de paramétrisation et la méthode VIM. La comparaison de la solution obtenue par cette approche avec la solution exacte montre l'intérêt de cette combinaison.

## **Bibliographie :**

[1] **Jean christophe culioli.** « Introduction à l'optimisation ». Editions Ellipse.1994.

[2] **Michel bierlaire.** « Introduction a l'optimisation différentiable » première édition 2006.

[3] **M<sup>r</sup> Idir Ait tyeb.** « Optimisation de la commande de systèmes non linaires en présence de contrainte sur le vecteur d'état ». Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en automatique, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou2005/2006.

[4] **Berkani Samira, Mansour Farida.** « Résolution d'un problème de commande optimale par la méthode d'itération variationnelle ».Mémoire de fin d'études de master en automatique, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou2010.

[5] **Alili Samir, Aliche Djamal, Si Kadri Meziane.** « Résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman par la méthode d'itération variationnelle (VIM) ». Mémoire de fin d'études de master en automatique, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou2013.

[6] **Sam Manel, Tekran Kalef.** « Principe du minimum : identification des conditions initiales des variable adjointes en utilisant la méthode d'itération variationnelle ». Mémoire de fin d'études de master en automatique, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou2010.