République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
Université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou

Faculté des Sciences
Département des Mathématiques

Mémoire de Master II
Spécialité
MATHÉMATIQUES
Option
Modélisation Mathématique

Thème

Analyse asymptotique d'un problème de renforcement avec couche mince

Réalisé par :

BEDOUHENE Kahina

Devant le jury d'examen composé de :

MORSLI Mohamed	Professeur	UMMTO	Président
RAHMANI Leila	MCA	UMMTO	Rapporteur
SMAALI Mannal	MCB	UMMTO	Examinatrice

Soutenu le 08 / 10/ 2014

Remerciements

Nous remercions, avant tout, le bon Dieu de nous avoir donné le courage et la volonté, pour l'élaboration de ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nos sincères remerciements à notre chère promotrice, Madame ***Rahmani. L*** *qui nous a fait l'honneur de diriger ce travail, sa gentillesse et ses précieux conseils furent d'un apport considérable.*

Nos vifs remerciements vont également au président ainsi qu'aux membres de jury pour l'honneur qu'ils nous font de juger ce travail.

Nous remercions tous les enseignants ayant contribué à notre formation de près ou de loin.

Sans oublier de remercier tous les amis et camarades, pour leurs soutiens et leurs encouragements.

Merci infiniment à tous.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents auxquels je souhaite une longue vie pleine de bonheur, que Dieu les protèges ;
A mes très chers frères : Chabane, Mouloud ;
A mes très chères sœurs : Dahboucha, Nadia, Razika et son époux Mohamed, Fazia et son époux Hocine ;
A ma belle sœur Lynda ;
A ma très chère nièce Dyna ;
A ma très chère tante Fetta ;
A ma très chère amie Hanifa à qui je souhaite la réussite dans la vie et à toute sa famille ;
A toute la promotion 2013/2014 ;
A ceux que j'aime et m'aiment.

Kahina

Table des matières

Introduction générale

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à un problème de renforcement par une couche mince extérieure d'épaisseur ϵ et de conductivité λ. Plus précisément, nous considérons un problème de transmission qui correspond physiquement à un problème stationnaire de diffusion de la chaleur à travers une couche très fine. L'objectif de cette étude est de préciser le comportement asymptotique de la solution quand l'épaisseur ϵ tend vers 0 et λ tend vers 0 ou $+\infty$. Les problèmes limites ainsi obtenus sont posés sur le domaine sans la couche mince et constituent par conséquent une alternative très intéressante pour contourner les difficultés rencontrées lors de la simulation numérique de la solution du problème de départ. Ce genre de littérature a été largement étudié par plusieurs auteurs, utilisant les méthodes variationnelles et effectuant le passage à la limite à partir d'estimations L^2 sur la solution et ses dérivées premières. Les convergences obtenues sont en général faibles.
L'objectif de cette étude, qui est présentée dans le papier [5], consiste à obtenir des convergences fortes dans H^1 et uniformément sur les compactes. Les deux points clés sont l'obtention des estimations L^2 sur les dérivées secondes et l'utilisation de la représentation par la fonction de Green.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Espaces de Sobolev

Dans toute cette section Ω sera un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.1. On appelle espace de Sobolev sur Ω l'espace fonctionnel :

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) \,/\, \forall \alpha \in \mathbb{Z}^N,\ |\alpha|\ \leq k : D^\alpha u \in L^p(\Omega)\right\},$$

où $D^\alpha u$ est la dérivée de u au sens des distributions.
Pour ces dérivées, on pose $\alpha = (\alpha_l,\ \ldots,\ \alpha_N)\,,\ |\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$ et on utilise la notation :

$$D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial^{\alpha_1} x_1,\ \ldots,\ \partial^{\alpha_N} x_N}.$$

On note $H^k = W^{k,2}(\Omega)$.

Théorème 1.1. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) & \to & \mathbb{R}_+ \\ (u,v) & \mapsto & \displaystyle\int_\Omega (uv + \nabla u \nabla v)\, dx, \end{array}$$

est un produit scalaire et munit $H^1(\Omega)$ d'une structure d'espace de Hilbert.
On note $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega u^2 + |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ la norme associée.

Proposition 1.1. (Inégalité de Hölder)
Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$.Alors $f\,g \in L^1(\Omega)$ et

$$\int |f.g| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Remarque 1.1. Lorsque $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Théorème 1.2. (de trace)
Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^\infty$, ou bien $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_+$.On définit l'application trace γ_0

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) &\rightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C(\bar{\partial\Omega}) \\ v &\rightarrow \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Cette application γ_0 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, notée encore γ_0. En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$, on a :

$$\|v\|_{L^2}(\partial\Omega) \leq C\|v\|_{H^1}(\Omega).$$

Proposition 1.2. (Inégalité de Poincaré classique)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans au moins une direction de l'espace, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^1_0(\Omega)$,

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Proposition 1.3. (Inégalité de Poincaré-Wirtinger)
Si Ω est borné et connexe, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\|v - m(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)},$$

où

$$m(v) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v dx,$$

est la valeur moyenne de v sur Ω , le nombre $|\Omega|$ désignant la mesure de Lebesgue du domaine Ω.

Remarque 1.2. Si $m(v) = 0$, on retrouve l'inégalité de Poincaré classique.

Preuve. On suppose que l'inégalité de Poincaré Wirtinger est fausse. Dans ce cas, pour tout entier naturel $n \geq 1$, il existe un élément u_n de $H^1(\Omega)$ tel que :

$$\|u_n - m(u_n)\|_{L^2(\Omega)} > n\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)},$$

où m est la moyenne définie par :

$$m(u_n) = \frac{\displaystyle\int_\Omega u_n dx}{\displaystyle\int_\Omega dx}.$$

On pose $v_n = \dfrac{(u_n - m(u_n))}{\|u_n - m(u_n)\|_{L^2(\Omega)}}$. La suite v_n vérifie l'inégalité :

$$1 = \|v_n\|_{L^2(\Omega)} > n\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.1}$$

Ainsi, la suite v_n est bornée dans $H^1(\Omega)$. Comme Ω est borné régulier, d'après le Théorème de Rellich, on peut extraire de v_n une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$ vers un élément v de $L^2(\Omega)$. Par commodité, on note de nouveau v_n cette suite.Comme v_n est convergente dans $L^2(\Omega)$, c'est une suite de Cauchy de $L^2(\Omega)$. De plus, d'après l'équation (1.1), ∇v_n converge vers 0 dans $L^2(\Omega)$. Ainsi, v_n est une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Comme $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, il est complet : toute suite de Cauchy est convergente et v_n converge dans $H^1(\Omega)$ vers un élément v. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} &= \lim_n \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \lim_n \left(\frac{1}{n}\right) = 0, \\
m(v) &= \lim_n m(v_n) = 0, \\
\|v\|_{L^2(\Omega)} &= \lim_n \|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1.
\end{aligned}$$

Comme $\nabla v = 0$, $m(v) = 0$ et Ω est connexe, v est une constante de moyenne nulle. Ainsi, $v = 0$ et $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$, ce qui est absurde et achève la démonstration de l'inégalité.

Proposition 1.4. (Inégalité de Young)
En mathématiques, la forme standard de l'inégalité de Young (ou inégalité d'Young) affirme que pour tous a et b réels positifs ou nuls et tous p et q réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *(on dit parfois qu'ils sont conjugués), on a :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $a^p = b^q$. *L'inégalité de Young est un cas particulier de l'inégalité arithmético-géométrique. Son nom vient de William Henry Young.*
Un cas simple (relativement fréquent) de l'inégalité de Young est l'inégalité avec des exposants 2 :

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

qui donne également l'inégalité de Young avec δ *(valide pour tout* $\delta > 0$*) :*

$$ab \leq \frac{a^2}{2\delta} + \frac{\delta b^2}{2}.$$

Théorème 1.3. (Ascoli)
Soit (f_n) *une suite de fonctions définies sur un fermé borné* Ω *de* $\mathbb{R}^N$*, à valeurs réelles. On suppose que cette suite de fonctions est équicontinue c'est-à-dire*

$$\textit{pour tout } \epsilon > 0, \textit{ il existe un } \delta > 0, \textit{ tel que si } \|x_1 - x_2\| < \delta, \ \|f_n(x_1) - f_n(x_2)\| < \epsilon, \ \forall n.$$

et qu'il existe un réel M *tel que* $|f_n(x)| < M$ *pour tout* n *de* N *et pour tout* x *de* Ω*. Alors on peut extraire une sous-suite* $(f_u(n))$ *qui converge uniformément sur* Ω *vers une fonction continue* f*.*

Théorème 1.4. (Formule de Green)
Soit Ω *un ouvert borné régulier . Si* u *et* v *sont des fonctions de* $H^1(\Omega)$*, elles vérifient :*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x)ds,$$

où $n = (n_i)_{1\leq i\leq n}$ *est la normale unité extérieure à* $\partial\Omega$*.*
De même, si $u \in H^2(\Omega)$ *et* $v \in H^1(\Omega)$*, on a :*

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x)dx = -\int_\Omega \nabla v(x)\nabla u(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)ds.$$

Théorème 1.5. (Rellich-kondrachov)
On suppose que Ω *est borné et de classe* C^1*. On a :*

1. *Si* $N < 2$ *alors* $H^1(\Omega) \hookrightarrow C\left(\bar{\Omega}\right)$.
2. *Si* $N = 2$ *alors* $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [2, \infty[$.
3. *Si* $N > 2$ *alors* $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in \left[2, \frac{2N}{N-2}\right[$.

Avec injections compactes.
On particulier, on a toujours :

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Donc, on peut déduire que :

$$\mathfrak{D}(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow \mathfrak{D}'(\Omega).$$

1.2 Convergence fort et convergence faible

Définition 1.2. (convergence faible)
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert H, muni du produit scalaire $<\,,\,>_H$, et $x \in H$. On dit que la suite (x_n) converge faiblement vers x et l'on note $x_n \rightharpoonup x$ si

$$\forall h \in H,\ \lim_{n\to+\infty} < x_n,\, h >_H = < x,\, h >_H .$$

Définition 1.3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert H, et $x \in H$. On dit que (x_n) converge fortement vers x et l'on note $x_n \to x$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\|_H = 0,$$

$\|\,.\,\|_H$ étant la norme associée au produit scalaire $<\ .\ >_H$.

Théorème 1.6. *Soit H un espace de Hilbert. La boule unité de H est faiblement compacte.De manière équivalente, de toute suite bornée d'un espace de Hilbert, on peut extraire une sous suite faiblement convergente.*

1.3 Fonction de Green

Définition 1.4. (Définition de la fonction de Green)
Considérons une équation aux dérivée partielle linéaire de la forme :

$$\mathcal{L}u(x) = F(x) \quad dans\ \ \Omega, \tag{1.2}$$

Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{L}$ est un opérateur différentiel linéaire. La fonction $u(x)$ est l'inconnue du problème et $F(x)$ est une donnée.
La solution de l'équation (1.2) peut s'écrire formellement :

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1}F(x),$$

où $\mathcal{L}^{-1}$ est l'inverse de l'opérateur $\mathcal{L}$. On définit cet opérateur inverse en utilisant une fonction de Green, soit :

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1}F(x) = -\int_{\Omega} G(x,\, \xi)F(\xi)d\xi, \tag{1.3}$$

où $G(x,\,\xi)$ est la fonction de Green associée à $\mathcal{L}$ (G est le noyau).
On désigne par δ la masse de Dirac, qui est une distribution vérifiant $<\delta,\,\phi>=\phi(0),\ \forall\phi\in\mathfrak{D}(\Omega)$. rappelons que la distribution de dirac vérifie les propriétés :

$$\int_{\mathbb{R}^n}\delta(x)dx=1\quad et\quad \int_{\mathbb{R}^n}\delta(x-\xi)h(\xi)d\xi=h(x).$$

En tenant compte de l'équation (1.3), on obtient :

$$\mathcal{L}u(x)=F(x)=-\int_{\Omega}\mathcal{L}G(x,\,\xi)F(\xi)d\xi,$$

la fonction de Green $G(x,\xi)$ satisfait alors :

$$u(x)=-\int_{\Omega}G(x,\,\xi)f(\xi)d\xi\ \ avec\ \ \mathcal{L}G(x,\,\xi)=-\delta(x-\xi),\ \ x,\,\xi\in\Omega.$$

1.3.1 Fonction de Green pour l'opérateur de Laplace

Considérons l'équation de poisson sur un ouvert borné Ω, de frontière $\partial\Omega=\Sigma$:

$$\Delta u=F\quad dans\ \ \Omega, \tag{1.4}$$

soit n la normale à Σ extérieure à Ω. On a la formule de Green qui s'écrit :

$$\int_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\,dx=\int_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds,$$

et qui donne :

$$\int_{\Omega}u\Delta vdx=\int_{\Omega}Fv+\int_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds.$$

Donc, si on choisit la fonction $v\equiv v(x,\,\xi)$ vérifiant :

$$\Delta v=-\delta(x-\xi),$$

u sera solution de l'équation

$$u(\xi)=-\int_{\Omega}vFdx-\int_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds. \tag{1.5}$$

Si on considère maintenant une autre fonction $v=w(x,\,\xi)$, régulière en ξ et vérifiant $\Delta w=0$ sur Ω, on obtient par la formule de Green

$$\int_{\Sigma}\left(u\frac{\partial w}{\partial n}-w\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds=\int_{\Omega}(u\Delta w-w\Delta u)\,d\Omega=-\int_{\Omega}wfd\Omega. \tag{1.6}$$

En combinant (1.5) et (1.6), on obtient :

$$u(\xi) = -\int_\Omega (v+w)Fd\Omega - \int_\Sigma \left(u\frac{\partial}{\partial n}(v+w) - (v+w)\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds. \tag{1.7}$$

Donc, en prenant $G = v + w$, on aura :

$$\Delta G = -\delta(x-\xi) \quad dans \quad \Omega,$$

et

$$u(\xi) = -\int_\Omega GFd\Omega - \int_\Sigma \left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

1.3.2 Fonction de Green et condition de Dirichlet

Supposons que la solution u du problème (1.4) satisfait une condition de Dirichlet sur le bord Σ, i,e u est solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \Delta u = F & dans \quad \Omega, \\ u \;\; = g & sur \quad \partial\Omega = \Sigma. \end{cases} \tag{1.8}$$

On choisit alors dans le raisonnement précédent les fonctions w et v de sorte à ce qu'on ait $w = -v$ sur Σ. On aura alors $G = 0$ sur Σ et en remplaçant dans l'équation (1.7), on obtient la solution du problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson (1.8) :

$$u(\xi) = -\int_\Omega GFd\Omega - \int_\Sigma g\frac{\partial G}{\partial n} ds,$$

où $G = v + w$ est la fonction de Green associée et qui est solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(x-\xi) & dans \quad \Omega, \\ G \;\; = 0 & sur \quad \Sigma. \end{cases}$$

1.3.3 Fonction de Green et condition de Neumann

Supposons que la solution u du problème (1.4) satisfait une condition de Neumann sur le bord Σ,i,e u est solution du problème :

$$\begin{cases} \Delta u = F & dans \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & sur \quad \Sigma. \end{cases} \tag{1.9}$$

On choisit alors w de sorte à ce qu'on ait $\dfrac{\partial w}{\partial n} = -\dfrac{\partial v}{\partial n}$ sur Σ, i,e $\dfrac{\partial G}{\partial n} = 0$ sur Σ. Malheureusement, le problème de Neumann

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(x-\xi) & dans \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial G}{\partial n} = 0 & sur \quad \Sigma. \end{cases} \tag{1.10}$$

n'admet pas de solution car la condition de compatibilité n'est pas satisfaite. Nous allons alors modifier la fonction G pour avoir un problème bien posé. G sera alors la solution du problème :

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(x-\xi) + c & dans \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial G}{\partial n} = 0 & sur \quad \Sigma. \end{cases} \tag{1.11}$$

où c est une constante. La condition de compatibilité pour le problème de Neumann (1.11) s'écrit :

$$\int_\Omega (-\delta + c)\, d\Omega = \int_\Sigma 0 ds = 0,$$

ce qui donne :

$$c = \frac{1}{|\,\Omega\,|}.$$

En appliquant maintenant la formule de Green :

$$\int_\Omega (G\Delta u - u\Delta G)\, d\Omega = \int_\Sigma \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n} \right) ds,$$

on obtient :

$$u(\xi) = -\int_\Omega GF d\Omega + \int_\Sigma Gg ds + \frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_\Omega u d\Omega.$$

Par conséquent, la solution du problème de Poisson avec condition de Neumann s'écrit :

$$u\,(\xi) = \bar{u} - \int_\Omega GF d\Omega + \int_\Sigma Gg ds,$$

où $\bar{u} = \dfrac{1}{|\,\Omega\,|}\displaystyle\int_\Omega u d\Omega$, et G est la solution du problème :

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta\,(x-\xi) + \dfrac{1}{|\,\Omega\,|} & dans \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial G}{\partial n} = 0 & sur \quad \Sigma. \end{cases}$$

Chapitre 2

Etude d'un Problème de renforcement par une couche mince

Dans ce chapitre, nous étudions un problème de renforcement par une couche mince extérieure d'épaisseur ϵ et de conductivité λ. Nous déterminons les problèmes limites dans le cas de conditions de Neumann sur le bord extérieur, quand ϵ tend vers 0 et λ tend vers 0 ou λ tend vers l'infini.

2.1 Position du problème

Soit Ω_+ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière régulière $\partial\Omega_+ = \Sigma$. On suppose que ce domaine contient le matériau à renforcer, de conductivité finie, normalisée à un. On désigne par Ω_-^ϵ la couche mince de renforcement, d'épaisseur ϵ et de conductivité λ.
L'ouvert Ω_-^ϵ est défini par :

$$\Omega_-^\epsilon = \{\, x_\epsilon \in \mathbb{R}^n : \, x_\epsilon = x + tn_+(x), \ x \in \Sigma, \ 0 < t < \epsilon \} \,,$$

où n_+ est la normale extérieure à Ω_+. Le bord de Ω_-^ϵ est constituée de deux parties, $\partial\Omega_-^\epsilon = \Sigma \cup \Sigma^\epsilon$, où Σ^ϵ est donné par :

$$\Sigma^\epsilon = \{x_\epsilon \in \mathbb{R}^n : \, x_\epsilon = x + \epsilon n_+(x), \ x \in \Sigma\} \,.$$

Le domaine complet est noté par Ω^ϵ, où $\Omega^\epsilon = \Omega_+ \cup \Omega_-^\epsilon \cup \Sigma$ (voir figure 2.1 en dimension 2).

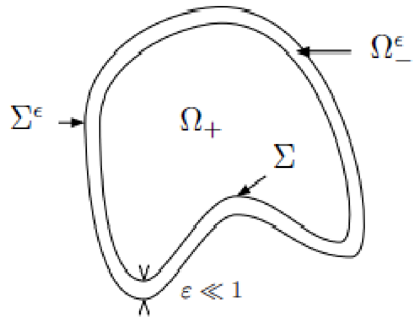

FIGURE 2.1 – Le problème de couche mince en dimension 2

Pour $h = h(\epsilon) = (\epsilon,\ \lambda(\epsilon))$, on considère le problème de transmission suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_+^h & = & f_+ & dans\ \ \Omega_+, \\ -\lambda\Delta u_-^h & = & f_- & dans\ \ \Omega_-^\epsilon, \\ u_+^h & = & u_-^h & sur\ \ \ \Sigma, \\ \dfrac{\partial u_+^h}{\partial n_+} & = & \lambda\dfrac{\partial u_-^h}{\partial n_-} & sur\ \ \ \Sigma, \\ \dfrac{\partial u_-^h}{\partial n_-} & = & 0 & sur\ \ \ \Sigma^\epsilon, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f = (f_+,\ f_-)$ vérifie la condition de compatibilité :

$$\int_{\Omega^\epsilon} f(x)\,dx = 0\ \ pour\ tout\ \ \epsilon > 0,$$

c'est à dire

$$\int_{\Omega_+} f_+(x)\,dx = 0\ \ et\ \ \int_{\Omega_-^\epsilon} f_-(x)\,dx = 0.$$

Le problème (2.1) modélise la propagation da la chaleur dans une structure composée d'une plaque entourée d'une couche mince de conductivité λ. L'objectif de cette étude est d'étudier le comportement asymptotique de la solution $\left(u_+^h,\ u_-^h\right)$ quand $\epsilon \to 0$ et quand :
. λ tend vers 0 (couche mince très peu conductrice).
. λ tend vers $+\infty$ (couche mince très conductrice).
Des modèles limites, posés uniquement sur le domaine Ω_+ seront justifiés et des convergences fortes, seront obtenues dans $H^1(\Omega_+)$.

Remarque 2.1. L'interface de jonction Σ est une hypersurface. Soient $x_0 \in \Sigma$ et V un voisinage suffisant petit de x_0. Pour ϵ assez petit l'application :

$$\begin{aligned} V \cap \Sigma \times [0,\, \epsilon] &\longrightarrow \bar{\Omega}_-^\epsilon \\ (x_\sigma,\, x_n) &\longrightarrow x_\sigma + x_n n_+ (x_\sigma)\,, \end{aligned}$$

est inversible. Ici, x_σ désigne aussi bien un point de l'hypersurface Σ que les $n-1$ coordonnées tangentielles $(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{n-1})$ dans le système de coordonnées locales $(x_\sigma,\, x_n)$ associée à V. Dans ce système de coordonnées locales, Σ est représentée par l'équation

$$x_n = g\,(x_\sigma) = g\,(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{n-1})\,,$$

et Σ^ϵ par :

$$x_n = g\,(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_{n-1}) + \epsilon n_{+n}\,(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{n-1})\,,$$

où n_{+n} est la $n^{éme}$ composante de n_+ dans le repère local et g vérifie $|D^\alpha g| \leq C$, $\forall\, |\alpha| \leq 2$. Pour presque tout $x_n \in [0,\, \epsilon]$, on a :

$$\int_\Sigma f_-\,(x_\sigma,\, x_n)\, dx_\sigma = 0.$$

2.1.1 Formulation variationnelle

On multiplie les deux premières équations du problème (2.1) par une fonction test ϕ Avec $\phi = \phi_+$ sur Ω_+ et $\phi = \phi_-$ sur Ω_-^ϵ, et on intègre sur Ω^ϵ on obtient :

$$\int_{\Omega^\epsilon} -\Delta u^h \phi dx = \int_{\Omega^\epsilon} f \phi dx,$$

ce qui signifie que :

$$\int_{\Omega_+} -\Delta u_+^h \phi_+ dx + \lambda \int_{\Omega_-^\epsilon} -\Delta u_-^h \phi_- dx = \int_{\Omega^\epsilon} f \phi dx.$$

En utilisant la formule de Green (formule d'intégration par parties), on obtient :

$$\int_{\Omega_+} \nabla u_+^h \nabla \phi_+ dx - \int_{\partial\Omega_+} \frac{\partial u_+^h}{\partial n_+} \phi_+ ds + \lambda \int_{\Omega_-^\epsilon} \nabla u_-^h \nabla \phi_- dx - \lambda \int_{\partial\Omega_-^\epsilon} \frac{\partial u_-^h}{\partial n_-} \phi_- ds = \int_{\Omega_+} f_+ \phi_+ dx + \int_{\Omega_-^\epsilon} f_- \phi_- dx,$$

ce qui est équivalent à (en tenant compte de la condition de transmission $\dfrac{\partial u_+^h}{\partial n_+} = \lambda \dfrac{\partial u_-^h}{\partial n_-}$)

$$\int_{\Omega_+} \nabla u_+^h \nabla \phi_+ dx + \lambda \int_{\Omega_-^\epsilon} \nabla u_-^h \nabla \phi_- dx = \int_{\Omega^\epsilon} f \phi dx \qquad \forall \phi \in H^1\,(\Omega^\epsilon)\,. \tag{2.2}$$

Alors, la formulation variationnelle associée au problème (2.1), est donnée par :

$$\begin{cases} Trouver \;\; u^h \in V, \\ a\,(u,\,\phi) = l\,(\phi)\,, \;\; \forall \phi \in V, \end{cases} \tag{2.3}$$

avec

$$a\,(u,\,\phi) = \int_{\Omega_+} \nabla u_+^h \nabla \phi_+ dx + \lambda \int_{\Omega_-^\epsilon} \nabla u_-^h \nabla \phi_- dx,$$

et

$$l\,(\phi) = \int_{\Omega^\epsilon} f \phi dx.$$

2.1.2 Existence et unicité de la solution :

1. *La continuité de la forme linéaire l :*

$$\begin{aligned} |l(\phi)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega^\epsilon)} \|\phi\|_{L^2(\Omega^\epsilon)} \\ &\leq C \|\phi\|_{H^1(\Omega^\epsilon)}\,. \end{aligned}$$

2. *La continuité de la forme bilinéaire a :*

$$\begin{aligned} |a(u,\phi)| &\leq \| \nabla u_+^h \|_{L^2(\Omega_+)} \| \nabla \phi_+ \|_{L^2(\Omega_+)} + \lambda \| \nabla u_-^h \|_{L^2(\Omega_-^\epsilon)} \| \nabla \phi_- \|_{L^2(\Omega_-^\epsilon)} \\ &\leq C \left(\| u_+^h \|_{H^1(\Omega_+)} + \| u_-^h \|_{H^1\left(\Omega_-^\epsilon\right)} \right) \left(\| \phi_+ \|_{H^1(\Omega_+)} + \| \phi_- \|_{H^1\left(\Omega_-^\epsilon\right)} \right) \\ &\leq C \| u \|_{H^1(\Omega)} \| \phi \|_{H^1(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

3. *La coercivité de la forme bilinéaire a :*

On a :

$$a(u,u) = \| \nabla u_+^h \|^2_{L^2(\Omega_+)} + \lambda \| \nabla u_-^h \|^2_{L^2(\Omega_-^\epsilon)}\,.$$

Grâce à la condition de compatibilité $\int_{\Omega^\epsilon} f(x)dx = 0$, on peut montrer l'existence et l'unicité d'une solution à moyenne nulle, $\int_{\Omega^\epsilon} udx = 0$. On utilise l'estimation :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega udx \right),$$

on aura alors

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,,$$

donc

$$\begin{aligned}\| \nabla u_+^h \|^2_{L^2(\Omega_+)} + \lambda \| \nabla u_-^h \|^2_{L^2\left(\Omega_-^\epsilon\right)} &\geq C \| u_+^h \|^2_{H^1(\Omega_+)} + \lambda \| u_-^h \|^2_{H^1\left(\Omega_-^\epsilon\right)} \\ &\geq \min(\lambda, C) \left[\| u_+^h \|^2_{H^1(\Omega_+)} + \| u_-^h \|^2_{H^1\left(\Omega_-^\epsilon\right)} \right] \\ &\geq C \| u \|^2_{H^1(\Omega^\epsilon)} .\end{aligned}$$

Alors, le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1).
Si $\overline{u^h}$ est la moyenne de u^h dans Ω^ϵ, on désigne par $v^h = u^h - \overline{u^h}$ la solution de moyenne nulle. On note v_+^h (resp. v_-^h) la restriction de v^h à Ω_+ (resp. à Ω_-^ϵ), on obtient le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{lll} -\Delta v_+^h & = f_+ & dans \;\; \Omega_+, \\ -\lambda \Delta v_-^h & = f_- & dans \;\; \Omega_-^\epsilon, \\ v_+^h & = v_-^h & sur \;\; \Sigma, \\ \dfrac{\partial v_+^h}{\partial n_+} & = \lambda \dfrac{\partial v_-^h}{\partial n_-} & sur \;\; \Sigma, \\ \dfrac{\partial v_-^h}{\partial n_-} & = 0 & sur \;\; \Sigma^\epsilon, \\ \displaystyle\int_{\Omega^\epsilon} v^h d\Omega^\epsilon & = 0. & \end{array}\right. \tag{2.4}$$

Nous allons maintenant obtenir des estimations H^2.
Dans tout ce qui va suivre, on conviendra de désigner par la lettre C toutes les constantes indépendantes de h qui interviendront dans les calculs.

2.1.3 Estimations H^2

Lemme 2.1. *Il existe une constante positive C telle que $\forall \epsilon > 0$ suffisamment petit, $\forall \lambda > 0$, on a :*

$$[i] \quad \int_{\Omega_+} |v_+^h|^2 dx + \int_{\Omega_-^\epsilon} |v_-^h|^2 dx \leq C + C\frac{\epsilon^4}{\lambda^2}.$$

$$[ii] \quad \int_{\Omega_+} |\nabla v_+^h|^2 dx + \lambda \int_{\Omega_-^\epsilon} |\nabla v_-^h|^2 dx \leq C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda}.$$

$$[iii] \quad \int_{\Omega_+} |\nabla^2 v_+^h|^2 dx + \lambda \int_{\Omega_-^\epsilon} |\nabla^2 v_-^h|^2 dx \leq C + C\frac{\epsilon}{\lambda}.$$

Preuve. (i)

Dans la formulation variationnelle (2.2), on pose $\phi = v^h$, donc $\phi_+ = v_+^h$ et $\phi_- = v_-^h$:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_+} |\nabla v_+^h|^2 dx + \lambda \int_{\Omega_-^\epsilon} |\nabla v_-^h|^2 dx &= \int_{\Omega_+} f_+ v_+^h d\Omega_+ + \int_{\Omega_-^\epsilon} f_- v_-^h d\Omega_-^\epsilon \\ &= \int_{\Omega^\varepsilon} |f||v^h| dx \le C\left(\int_{\Omega^\epsilon} |v^h| dx\right). \qquad (2.5)\end{aligned}$$

Soit $x^0 \in \Sigma$ et soit V un voisinage suffisamment petit de x^0 dans $\mathbb{R}^N$. Nous effectuons le changement de coordonnées suivant :

$$(x_\sigma, x_n) \longrightarrow (y_\sigma, y_n)\,,$$

où $y_n = -x_n + g\,(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{n-1})$, $y_i = x_i$ si $i \le n-1$.

Nous avons donc les correspondances :

$$\begin{array}{rcll} V & \longrightarrow & \tilde{V}, & \\ V \cap \Sigma & \longrightarrow & \tilde{V} \cap \tilde{\Sigma} & \subset \{y_n = 0\}, \\ V \cap \Sigma^\epsilon & \longrightarrow & \tilde{V} \cap \tilde{\Sigma^\epsilon} & \subset \{y_n = -\epsilon\}. \end{array}$$

Alors, pour $(y_\sigma,\, y_n) \in \tilde{\Omega_-^\epsilon} \cap \tilde{V}$, nous avons :

$$\int_0^{y_n} \frac{\partial v_-^h}{\partial \xi_n}(y_\sigma,\, \xi_n)\, d\xi_n = v_-^h(y_\sigma,\, y_n) - v_-^h(y_\sigma,\, 0)\,,$$

i,e

$$v_-^h(y_\sigma,\, y_n) = \int_0^{y_n} \frac{\partial v_-^h}{\partial \xi_n}(y_\sigma,\, \xi_n)\, d\xi_n + v_-^h(y_\sigma,\, 0)\,. \qquad (2.6)$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}\left|v_-^h(y_\sigma,\, y_n)\right|^2 &= \left(\int_0^{y_n} \frac{\partial v_-^h}{\partial \xi_n}(y_\sigma,\, \xi_n)\, d\xi_n + v_-^h(y_\sigma,\, 0)\right)^2 \\ &= \left(\int_0^{y_n} \frac{\partial v_-^h}{\partial \xi_n}(y_\sigma,\, \xi_n)\, d\xi_n\right)^2 + \left(v_-^h(y_\sigma,\, 0)\right)^2 \\ &+ 2v_-^h(y_\sigma,\, 0)\int_0^{y_n} \frac{\partial v_-^h}{\partial \xi_n}(y_\sigma,\, \xi_n)\, d\xi_n.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que : $(a-b)^2 \ge 0$ i.e : $2ab \le a^2 + b^2$, il s'ensuit :

$$\left|v_-^h(y_\sigma,\, y_n)\right|^2 \le 2\left(\int_0^{y_n} \frac{\partial v_-^h}{\partial \xi_n}(y_\sigma,\, \xi_n)\, d\xi_n\right)^2 + 2\left(v_-^h(y_\sigma,\, 0)\right)^2.$$

D'autre part, on a :

$$\left|\int_0^{y_n} \frac{\partial v_-^h}{\partial \xi_n} d\xi_n\right| = \left|\int_{y_n}^0 \frac{\partial v_-^h}{\partial \xi_n} d\xi_n\right| \leq \int_{y_n}^0 \left|\frac{\partial v_-^h}{\partial \xi_n}\right| d\xi_n,$$

par Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\left|\int_0^{y_n} \frac{\partial v_-^h}{\partial \xi_n} d\xi_n\right| \leq \left(\int_{y_n}^0 \left(\frac{\partial v_-^h}{\partial \xi_n}\right)^2 d\xi_n\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{y_n}^0 d\xi_n\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il s'ensuit que :

$$\left(\int_0^{y_n} \frac{\partial v_-^h}{\partial \xi_n} d\xi_n\right)^2 \leq \left(\int_{y_n}^0 \left(\frac{\partial v_-^h}{\partial \xi_n}\right)^2 d\xi_n\right)(-y_n),$$

or, $y_n \in]-\epsilon, 0[$ et donc, $-y_n < \epsilon$ et par conséquent

$$\left(\int_0^{y_n} \frac{\partial v_-^h}{\partial \xi_n} d\xi_n\right)^2 \leq \epsilon \int_{y_n}^0 \left(\frac{\partial v_-^h}{\partial \xi_n}\right)^2 d\xi_n,$$

on déduit alors :

$$\left|v_-^h(y_\sigma, y_n)\right|^2 \leq 2\epsilon \int_0^{y_n} \left|\frac{\partial v_-^h}{\partial \xi_n}(y_\sigma, \xi_n)\right|^2 d\xi_n + 2\left|v_-^h(y_\sigma, 0)\right|^2. \tag{2.7}$$

En intégrant cette quantité sur $\tilde{\Sigma} \cap \tilde{V}$, on écrit :

$$\int_{\tilde{\Sigma}\cap\tilde{V}} \left|v_-^h(y_\sigma, y_n)\right|^2 ds \leq 2\epsilon \int_{\tilde{\Sigma}\cap\tilde{V}} \int_0^{y_n} \left|\frac{\partial v_-^h}{\partial \xi_n}(y_\sigma, \xi_n)\right|^2 d\xi_n ds + 2\int_{\tilde{\Sigma}\cap\tilde{V}} \left|v_-^h(y_\sigma, 0)\right|^2 ds.$$

Comme :

$$\left|\frac{\partial v_-^h}{\partial \xi_n}(y_\sigma, \xi_n)\right|^2 \leq \left|\nabla v_-^h\right|^2,$$

il s'ensuit que :

$$\int_{\tilde{\Sigma}\cap\tilde{V}} \left|v_-^h(y_\sigma, y_n)\right|^2 ds \leq C\epsilon \int_{\tilde{\Omega}_-^\epsilon\cap\tilde{V}} \left|\nabla v_-^h\right|^2 dy + C\int_{\tilde{\Sigma}\cap\tilde{V}} \left|v_-^h(y_\sigma, 0)\right|^2 ds. \tag{2.8}$$

En intégrant cette quantité par rapport à y_n, sur $]-\epsilon, 0[$, on obtient :

$$\int_{-\epsilon}^0 \int_{\tilde{\Sigma}\cap\tilde{V}} \left|v_-^h(y_\sigma, y_n)\right|^2 ds dy_n \leq C\epsilon \int_{-\epsilon}^0 \int_{\tilde{\Omega}_-^\epsilon\cap\tilde{V}} \left|\nabla v_-^h\right|^2 dy dy_n + C\int_{-\epsilon}^0 \int_{\tilde{\Sigma}\cap\tilde{V}} \left|v_-^h(y_\sigma, 0)\right|^2 ds dy_n,$$

ce qui donne :

$$\int_{\tilde{\Omega}_-^\epsilon\cap\tilde{V}} \left|v_-^h\right|^2 dy \leq C\epsilon^2 \int_{\tilde{\Omega}_-^\epsilon\cap\tilde{V}} \left|\nabla v_-^h\right|^2 dy + C\epsilon \int_{\tilde{\Sigma}\cap\tilde{V}} \left|v_-^h\right|^2 ds. \tag{2.9}$$

Donc, en retournant aux coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, en utilisant un recouvrement fini de l'interface Σ par des ouverts V, (2.8) et (2.9) nous donnent :

$$\int_{\Sigma} \left|v_-^h\left(x_\sigma,\, x_n\right)\right|^2 ds \leq C\epsilon \int_{\Omega_-^\epsilon} \left|\nabla v_-^h\left(x\right)\right|^2 dx + C \int_{\Sigma} \left|v_-^h\left(x_\sigma,\, 0\right)\right|^2 ds, \tag{2.10}$$

et

$$\int_{\Omega_-^\epsilon} \left|v_-^h\left(x\right)\right|^2 dx \leq C\epsilon^2 \int_{\Omega_-^\epsilon} \left|\nabla v_-^h\left(x\right)\right|^2 dx + C\epsilon \int_{\Sigma} \left|v_-^h\left(x_\sigma,\, 0\right)\right|^2 dx_\sigma. \tag{2.11}$$

Par ailleurs, on a les conditions de transmission sur Σ :

$$v_-^h = v_+^h,$$

ce qui donne :

$$\int_{\Sigma} \left|v_-^h\right| ds = \int_{\Sigma} \left|v_+^h\right| ds,$$

et par le théorème de Trace, on a :

$$\int_{\Sigma} \left|v_-^h\right|^2 ds = \int_{\Sigma} \left|v_+^h\right|^2 ds \leq C \int_{\Omega_+} \left|v_+^h\right|^2 dx + C \int_{\Omega_+} \left|\nabla v_+^h\right|^2 dx,$$

C étant une constante indépendante de h.
En combinant avec (2.11), on obtient :

$$\int_{\Omega_-^\epsilon} \left|v_-^h\right|^2 dx \leq C\epsilon^2 \int_{\Omega_-^\epsilon} \left|\nabla v_-^h\right|^2 dx + C\epsilon \int_{\Omega_+} \left|v_+^h\right|^2 dx + C\epsilon \int_{\Omega_+} \left|\nabla v_+^h\right|^2 dx. \tag{2.12}$$

D'autre part,on a :

$$v_+^h = v_+^h - \overline{v_+^h} + \overline{v_+^h},$$

avec

$$\overline{v_+^h} = \frac{1}{|\Omega_+|} \int_{\Omega_+} v_+^h dx,$$

et on a l'inégalité de Poincaré Wintinger :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_+} \left|v_+^h\right|^2 dx &= \int_{\Omega_+} \left|v_+^h - \overline{v_+^h} + \overline{v_+^h}\right|^2 dx \\
&= \int_{\Omega_+} \left|\left(v_+^h - \overline{v_+^h}\right)^2 + \left(\overline{v_+^h}\right)^2 + 2\left(v_+^h - \overline{v_+^h}\right)\left(\overline{v_+^h}\right)\right| dx \\
&\leq \int_{\Omega_+} \left|v_+^h - \overline{v_+^h}\right|^2 + |\Omega_+| \left|\overline{v_+^h}\right|^2 \\
&\leq C \int_{\Omega_+} \left|\nabla v_+^h\right|^2 dx + \frac{1}{|\Omega_+|} \left|\int_{\Omega_+} v_+^h(x) dx\right|^2.
\end{aligned}$$

Mais, on sait que :

$$\int_{\Omega^\epsilon} v^h dx = 0,$$

ce qui signifie que :

$$\int_{\Omega_+} v_+^h dx = -\int_{\Omega_-^\epsilon} v_-^h dx,$$

d'où

$$\left|\int_{\Omega_+} v_+^h (x)\, dx\right|^2 = \left|\int_{\Omega_-^\epsilon} v_-^h (x)\, dx\right|^2 \leq C\epsilon \int_{\Omega_-^\epsilon} \left|v_-^h (x)\right|^2 dx, \tag{2.13}$$

et donc

$$\int_{\Omega_+} \left|v_+^h\right|^2 dx \leq C \int_{\Omega_+} \left|\nabla v_+^h\right|^2 dx + C\epsilon \int_{\Omega_-^\epsilon} \left|v_-^h (x)\right|^2 dx. \tag{2.14}$$

En additionnant (2.12) et (2.14), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_+} \left|v_+^h\right|^2 dx \quad &+ \quad \int_{\Omega_-^\epsilon} \left|v_-^h (x)\right|^2 dx \leq C\epsilon^2 \int_{\Omega_-^\epsilon} \left|\nabla v_-^h\right|^2 dx + C\epsilon \int_{\Omega_+} \left|\nabla v_+^h\right|^2 dx \\ &+ \quad C\epsilon \int_{\Omega_+} \left|v_+^h\right|^2 dx + C \int_{\Omega_+} \left|\nabla v_+^h\right|^2 dx + C\epsilon \int_{\Omega_-^\epsilon} \left|v_-^h (x)\right|^2 dx,\end{aligned}$$

ce qui donne, pour ϵ suffisamment petit :

$$\int_{\Omega^\epsilon} \left|v^h\right|^2 dx \leq C \int_{\Omega_+} \left|\nabla v_+^h\right|^2 dx + C\epsilon^2 \int_{\Omega_-^\epsilon} \left|\nabla v_-^h\right|^2 dx. \tag{2.15}$$

D'après la formule (2.5), nous avons :

$$\int_{\Omega_+} \left|\nabla v_+^h\right|^2 dx \leq C \int_{\Omega_\epsilon} \left|v^h\right|^2 dx,$$

et

$$\lambda \int_{\Omega_-^\epsilon} \left|\nabla v_-^h\right|^2 dx \leq C \int_{\Omega_\epsilon} \left|v^h\right|^2 dx.$$

Il s'ensuit alors :

$$\int_{\Omega^\epsilon} \left|v^h\right|^2 dx \leq C \int_{\Omega^\epsilon} \left|v^h\right| dx + C\frac{\epsilon^2}{\lambda} \int_{\Omega^\epsilon} \left|v^h\right| dx. \tag{2.16}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient donc

$$\forall \delta > 0, \int_{\Omega^\epsilon} \left|v^h\right| dx \leq \frac{1}{\delta} \int_{\Omega^\epsilon} \left|v^h\right|^2 dx + \delta \left|\Omega^\epsilon\right|.$$

Par conséquent $\forall \delta_1,\, \delta_2 > 0$:

$$\int_{\Omega^\epsilon} \left|v^h\right|^2 dx \leq \frac{C}{\delta_1} \int_{\Omega^\epsilon} \left|v^h\right|^2 dx + C\delta_1 + C\frac{\epsilon^2}{\lambda\delta_2} \int_{\Omega^\epsilon} \left|v^h\right|^2 dx + C\delta_2\frac{\epsilon^2}{\lambda}. \tag{2.17}$$

Nous choisissons alors $\delta_1 = 4C$ et $\delta_2 = 4C\frac{\epsilon^2}{\lambda}$, nous obtenons :

$$\int_{\Omega^\epsilon} \left|v^h\right|^2 dx \leq \frac{1}{4}\int_{\Omega^\epsilon} \left|v^h\right|^2 dx + 4C^2 + \frac{1}{4}\int_{\Omega^\epsilon} \left|v^h\right|^2 dx + 4C^2\frac{\epsilon^4}{\lambda^2},$$

ce qui donne :

$$\int_{\Omega^\epsilon} \left|v^h\right|^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega^\epsilon} \left|v^h\right|^2 dx + C + C\frac{\epsilon^4}{\lambda^2},$$

qui s'écrit comme suit :

$$\int_{\Omega_+} \left|v_+^h\right|^2 dx + \int_{\Omega_-^\epsilon} \left|v_-^h\right|^2 dx \leq C + C\frac{\epsilon^4}{\lambda^2},$$

d'où l'estimation (i).

Pour (ii), il suffit de remarquer que :

$$\int_{\Omega_+} \left|v_+^h\right| dx + \int_{\Omega_-^\epsilon} \left|v_-^h\right| dx \;\leq\; C\left(\int_{\Omega_+} \left|v_+^h\right|^2 dx + \int_{\Omega_-^\epsilon} \left|v_-^h\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

et en utilisant (2.5), on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_+} \left|\nabla v_+^h\right|^2 dx + \lambda\int_{\Omega_-^\epsilon} \left|\nabla v_-^h\right|^2 dx &\leq C\left(\int_{\Omega_+} \left|v_+^h\right| dx + \int_{\Omega_-^\epsilon} \left|v_-^h\right| dx\right)\\
&\leq C\left(\int_{\Omega_+} \left|v_+^h\right|^2 dx + \int_{\Omega_-^\epsilon} \left|v_-^h\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda}.
\end{aligned}$$

D'où l'estimation (ii).

Pour démontrer (iii), considérons $\xi \in (\tilde{V})$ telle que $\xi = 1$ dans

$$\tilde{V_0} = \left\{y : |y_i| < \frac{\delta_0}{2}\ 1 \leq i \leq n\right\}.$$

Soit

$$\tilde{u}_+^h = \xi\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\partial^2 \tilde{v}_+^h}{\partial y_l^2},\ u_+^h(x) = \tilde{u}_+^h(y),$$

et

$$\tilde{u}_-^h = \xi\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\partial^2 \tilde{v}_-^h}{\partial y_l^2},\ u_-^h(x) = \tilde{u}_-^h(y).$$

On va prendre $\left(\tilde{u}_+^h, \tilde{u}_-^h\right)$ comme fonction test dans la formulation variationnelle, on aura :

$$\left|\int_{\tilde{\Omega}_+\cap\tilde{V}} \nabla\tilde{v}_+^h \nabla\left(\xi\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\partial^2\tilde{v}_+^h}{\partial y_l^2}\right)dy + \lambda\int_{\tilde{\Omega}_-^\epsilon\cap\tilde{V}} \nabla\tilde{v}_-^h \nabla\left(\xi\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\partial^2\tilde{v}_-^h}{\partial y_l^2}\right)dy\right| \leq C\int_{\tilde{\Omega}^\epsilon\cap\tilde{V}}\sum_{l=1}^{n-1}\left|\frac{\partial\tilde{v}^h}{\partial y_l}\right|dy. \tag{2.18}$$

Car $\left(\left|\int f\left(\xi\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\partial^2\tilde{v}^h}{\partial y_l^2}\right)dx\right| = \left|\int\frac{\partial}{\partial y_l}(f\xi)\frac{\partial\tilde{v}^h}{\partial y_l}dx\right| \leq \int\left|\frac{\partial\tilde{v}^h}{\partial y_l}\right|dx\right)$. En utilisant la formule de Green (formule d'intégration par parties), on obtient :

$$-\int_{\tilde{\Omega}_+\cap\tilde{V}}\Delta\tilde{v}_+^h\left(\xi\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\partial^2\tilde{v}_+^h}{\partial y_l^2}\right)dy - \lambda\int_{\tilde{\Omega}_-^\epsilon\cap\tilde{V}}\Delta\tilde{v}_-^h\left(\xi\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\partial^2\tilde{v}_-^h}{\partial y_l^2}\right)dy \leq C\int_{\tilde{\Omega}^\epsilon\cap\tilde{V}}\sum_{l=1}^{n-1}\left|\frac{\partial\tilde{v}^h}{\partial y_l}\right|dy.$$

Par conséquent, (2.18) donne :

$$\int_{\tilde{\Omega}^\epsilon\cap\tilde{V}}\left|\nabla^2\tilde{v}^h\right|^2dy \leq C\int_{\tilde{\Omega}^\epsilon\cap\tilde{V}}\left(\left|\nabla\tilde{v}^h\right|\left|\hat{\nabla}^2\tilde{v}^h\right| + \left|\nabla\tilde{v}^h\right|\right)dy, \tag{2.19}$$

où $\hat{\nabla}^2$ est le vecteur composantes de $\dfrac{\partial^2}{\partial y_l^2}$, $1 \leq l \leq n-1$.

Par l'inégalité de Young, on a :

$$C\int_{\tilde{\Omega}^\epsilon\cap\tilde{V}}\left|\nabla\tilde{v}^h\right|\left|\hat{\nabla}^2\tilde{v}^h\right| \leq \frac{C}{M}\int_{\tilde{\Omega}^\epsilon\cap\tilde{V}}\left|\hat{\nabla}^2\tilde{v}^h\right|^2 + CM\int_{\tilde{\Omega}^\epsilon\cap\tilde{V}}\left|\nabla\tilde{v}^h\right|^2,\ \forall M > 0.$$

D'après l'estimation (ii) du lemme 2.1, on a :

$$\int_{\tilde{\Omega}^\epsilon\cap\tilde{V}}\left|\hat{\nabla}^2\tilde{v}^h\right|^2dy \leq \frac{1}{M}\int_{\tilde{\Omega}^\epsilon\cap\tilde{V}}\left|\hat{\nabla}^2\tilde{v}^h\right|^2 + CM\left(C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda}\right) + C\left(C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda^2}\right)^{1/2}. \tag{2.20}$$

A partir des equations

$$\Delta\tilde{v}_+^h = f_+ \ \ et\ \ \Delta\tilde{v}_-^h = f_-,$$

on peut estimer le terme restant $\left(\dfrac{\partial^2\tilde{v}^h}{\partial y_n^2}\right)$.

Nous pouvons estimer $\left(\dfrac{\partial^2\tilde{v}^h}{\partial y_n^2}\right)$ en fonction des autres termes. Utiliser cette estimation et (2.20), nous obtenons, après avoir utilisé (ii),

$$\int_{\tilde{\Omega}^\epsilon\cap\tilde{V}}\left|\nabla^2\tilde{v}^h\right|^2dy \leq \frac{1}{M}\int_{\tilde{\Omega}^\epsilon\cap\tilde{V}}\left|\hat{\nabla}^2\tilde{v}^h\right|^2 + C + C\frac{\epsilon}{\lambda}. \tag{2.21}$$

Nous revenons maintenant aux coordonnées x, et on obtient :

$$\int_{\Omega^\epsilon\cap V}\left|\nabla^2\tilde{v}^h\right|^2dx \leq \frac{1}{M}\int_{\Omega^\epsilon\cap V}\left|\nabla^2\tilde{v}^h\right|^2 + C + C\frac{\epsilon}{\lambda}.$$

Nous choisissons alors $M \geq 2C$, nous obtenons :

$$\int_{\Omega_+}\left|\nabla^2 v_+^h\right|^2dx + \lambda\int_{\Omega_-^\epsilon}\left|\nabla^2 v_-^h\right|^2dx \leq C + C\frac{\epsilon}{\lambda}.$$

d'où l'estimation (iii).

2.1.4 Couche de faible conductivité $(\lambda \to 0)$

Nous commençons par prouver un lemme qui sera utilisé par la suite.

Lemme 2.2. *Soit* $u \in H^2\left(\Omega_+ \cup \Omega_-^\epsilon\right) \cap H^1\left(\Omega^\epsilon\right)$ *telle que* $\dfrac{\partial u_-}{\partial n_-} = 0$ *sur la frontière extérieure* Σ^ϵ*. Alors :*

$$\int_\Sigma \left|\frac{\partial u_-}{\partial n_-}\right|^2 dx \leq C\epsilon\left(\int_{\Omega_+} \left|\nabla u_+\right|^2 dx + \int_{\Omega_+} \left|D^2 u_+\right|^2 dx\right) + C\epsilon \int_{\Omega_-^\epsilon} \left|D^2 u_-\right|^2 dx.$$

Preuve. Notons par $n(y)$ le vecteur normal unitaire à $\partial\Omega_-^\epsilon$ au point y.
Soient $x \in \Sigma$ et x_ϵ le point appartenant au bord extérieure Σ^ϵ correspondant. Nous avons :

$$n(x)\nabla u_-(x) = n(x)\nabla u_-(x_\epsilon) + \int_0^\epsilon D\nabla u_-(x + \tau n(x))\, n(x)\, d\tau,$$

D étant la dérivée par rapport à τ. Ainsi

$$\begin{aligned} n(x).\nabla u_-(x) &= n(x).\nabla u_-(x_\epsilon) + n(x)\left(\nabla u_-(x) - \nabla u_-(x_\epsilon)\right) \\ &= \left(n(x) - n(x_\epsilon)\right).\left(\nabla u_-(x_\epsilon) - \nabla u_-(x)\right) + \left(n(x) - n(x_\epsilon)\right).\nabla u_-(x) \\ &+ n(x).\left(\nabla u_-(x) - \nabla u_-(x_\epsilon)\right), \end{aligned}$$

car $n(x_\epsilon).\nabla u_-(x_\epsilon) = 0$.
D'autre part, on a :

$$\left|\nabla u_-(x) - \nabla u_-(x_\epsilon)\right|^2 \leq \epsilon \int_0^\epsilon \left|D^2 u_-(x + \tau n(x))\, n(x)\right|^2 d\tau,$$

et donc

$$\begin{aligned} |n(x).\nabla u_-(x)|^2 &\leq C\epsilon|\left(\nabla u_-(x_\epsilon) - \nabla u_-(x)\right)|^2 + C\epsilon|\nabla u_-(x)|^2 + C|\left(\nabla u_-(x) - \nabla u_-(x_\epsilon)\right)|^2 \\ &\leq C\epsilon|\nabla u_-(x)|^2 + C|\left(\nabla u_-(x_\epsilon) - \nabla u_-(x)\right)|^2 \qquad (2.22) \\ &\leq C\epsilon|\nabla u_-(x)|^2 + C\epsilon\int_0^\epsilon |D^2 u_-(x + \tau n(x))\, n(x)|^2 d\tau. \qquad (2.23) \end{aligned}$$

En intégrant sur Σ, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \left|\frac{\partial u_-}{\partial n_-}(x)\right|^2 dx &\leq C\epsilon\int_\Sigma |\nabla u_-(x)|^2 dx + C\epsilon\int_\Sigma\int_0^\epsilon \left|D^2 u_-(x + \tau n(x))\, n(x)\right|^2 d\tau dx \\ &\leq C\epsilon\int_\Sigma |\nabla u_-(x)|^2 dx + C\epsilon\int_{\Omega_-^\epsilon} \left|D^2 u_-(x)\right|^2 dx. \qquad (2.24) \end{aligned}$$

Mais, on sait que :

$$\left|\nabla u_-(x)\right|^2 = \left|\frac{\partial u_-}{\partial n_-}(x)\right|^2 + \left|\nabla_T u_-(x)\right|^2,$$

où ∇_T est le gradient tangentiel sur Σ.

Donc, on aura :

$$\int_\Sigma \left|\frac{\partial u_-}{\partial n_-}(x)\right|^2 dx \leq C\epsilon \int_\Sigma \left|\nabla_T u_-(x)\right|^2 dx + C\epsilon \int_{\Omega_-^\epsilon} \left|D^2 u_-(x)\right|^2 dx, \tag{2.25}$$

et comme $u \in H^2\left(\Omega_+ \cup \Omega_-^\epsilon\right) \cap H^1(\Omega^\epsilon)$, $\nabla_T u$ est continue à travers Σ, et nous avons :

$$\int_\Sigma \left|\nabla_T u_-(x)\right|^2 dx = \int_\Sigma \left|\nabla_T u_+(x)\right|^2 dx \leq \int_\Sigma \left|\nabla u(x)\right|^2 dx$$

et par le théorème de Trace, on obtient :

$$\int_\Sigma \left|\nabla_T u_-(x)\right|^2 dx \leq C\left(\int_{\Omega_+} \left|\nabla u_+(x)\right|^2 dx + \int_{\Omega_+} \left|D^2 u_+(x)\right|^2 dx\right). \tag{2.26}$$

Finalement, nous obtenons :

$$\int_\Sigma \left|\frac{\partial u_-}{\partial n_-}(x)\right|^2 dx \leq C\epsilon \int_{\Omega_+} \left|\nabla u_+(x)\right|^2 dx + C\epsilon \int_{\Omega_+} \left|D^2 u_+(x)\right|^2 dx + C\epsilon \int_{\Omega_-^\epsilon} \left|D^2 u_-(x)\right|^2 dx, \tag{2.27}$$

d'où le résultat.

Théorème 2.1. *Soit $v_+^{\hat{h}} = u_+^h - \overline{u_+^h}$ où $\overline{u_+^h}$ est la valeur moyenne de u_+^h sur Ω_+. Alors, quand $h \to (0, 0)$, on a :*

(i). $\dfrac{\partial v^{\hat{h}_+}}{\partial n_+} \to 0$ dans $L^2(\partial\Omega_+)$ fortement.

(ii). $v_+^{\hat{h}} \to v_+$ uniformément sur les parties compactes de Ω_+, où v_+ est la solution du problème de Neumann suivant :

$$\begin{cases} -\Delta v_+ &= f_+ \quad \text{dans} \quad \Omega_+, \\ \dfrac{\partial v_+}{\partial n_+} &= 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma, \\ \displaystyle\int_{\Omega_+} v_+(x)\, dx &= 0. \end{cases}$$

De plus :

(α) Si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\epsilon}{\lambda}$ est finie, $v_+^{\hat{h}} \to v_+$ dans $H^2(\Omega_+)$ faiblement, donc dans $H^1(\Omega_+)$ fortement.

(β) Si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\epsilon}{\lambda} = +\infty$ mais $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\epsilon^2}{\lambda}$ est finie, $v_+^{\hat{h}} \to v_+$ dans $H^1(\Omega_+)$ faiblement, donc dans $L^2(\Omega_+)$ fortement.

Preuve. (i). Nous avons $\dfrac{\partial v^{\hat{h}_+}}{\partial n_+} = \lambda \dfrac{\partial v^{\hat{h}_-}}{\partial n_-}$ sur Σ. En appliquant le lemme ci-dessus pour v_-^h et en utilisant les estimations du lemme 2.1, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma |\frac{\partial v_+^h}{\partial n_+}(x_\sigma, 0)|^2 ds &= \lambda^2 \int_\Sigma |\frac{\partial v_-^h}{\partial n_-}(x_\sigma, 0)|^2 ds \\
&\leq C\epsilon\lambda^2 \int_{\Omega_+} |\nabla u_+(x)|^2 dx + C\epsilon\lambda^2 \int_{\Omega_+} |D^2 u_+(x)|^2 dx + C\epsilon\lambda^2 \int_{\Omega_-^\epsilon} |D^2 u_-(x)|^2 dx \\
&\leq C\epsilon\lambda^2 \left(C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda}\right) + C\epsilon\lambda^2 \left(C + C\frac{\epsilon}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda} C\epsilon\lambda^2 \left(C + C\frac{\epsilon}{\lambda}\right) \\
&\leq \left(C + C\frac{\epsilon}{\lambda}\right)\left(2C\epsilon\lambda^2 + C\epsilon\lambda\right).
\end{aligned}$$

$\left(Notons\ que\ C + C\dfrac{\epsilon^2}{\lambda} \leq C + C\dfrac{\epsilon}{\lambda}\ \ car\ \ \epsilon^2 \leq \epsilon \right)$.

Dans le cas où $\lambda \to 0$, on aura $\lambda^2 \leq \lambda$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma |\frac{\partial v_+^h}{\partial n_+}(x_\sigma, 0)|^2 ds &\leq \left(C + C\frac{\epsilon}{\lambda}\right)(2C\epsilon\lambda + C\epsilon\lambda) \\
&\leq 3C\epsilon\lambda \left(C + C\frac{\epsilon}{\lambda}\right) \\
&\leq \epsilon\lambda \left(C + C\frac{\epsilon}{\lambda}\right).
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Par passage à la limite, on obtient alors :

$$\int_\Sigma \left|\frac{\partial v_+^h}{\partial n_+}(x_\sigma, 0)\right|^2 ds \to 0, \quad quand \quad h \to (0, 0), \tag{2.29}$$

on déduit alors la convergence forte de la trace de la dérivée normale de v_+^h sur Σ dans $L^2(\Sigma)$.

(ii). Considérons le problème :

$$\begin{cases}
-\Delta v_+ &= f_+ \quad dans \quad \Omega_+, \\
\dfrac{\partial v_+}{\partial n_+} &= 0 \qquad sur \quad \Sigma, \\
\displaystyle\int_{\Omega_+} v_+(x)\, dx &= 0,
\end{cases}$$

avec f_+ fonction donnée, $f_+ \in L^2(\Omega_+)$ telle que $\displaystyle\int_{\Omega_+} f_+ dx = 0$. En utilisant la formule de green :

$$\int_{\Omega_+} \left(u_+^h \Delta v - v\Delta u_+^h\right) dx = \int_\Sigma \left(u_+^h \frac{\partial v}{\partial n_+} - v\frac{\partial u_+^h}{\partial n_+}\right) ds,$$

formellement avec $v = G(.,y)$, où G est la fonction de Green du problème de Neumann pour le laplacien sur Ω_+.

$$\int_{\Omega_+} \left(u_+^h \Delta G(.,y) - G(.,y)\Delta u_+^h \right) dx = \int_{\Sigma} \left(u_+^h \frac{\partial G(.,y)}{\partial n_+} - G(.,y)\frac{\partial u_+^h}{\partial n_+} \right) ds,$$

ce qui est equivalent à :

$$-u_+^h(y) + \frac{1}{mes\Omega_+}\int_{\Omega_+} u_+^h dx + \int_{\Omega_+} G(x,y) f_+(x) dx = -\int_{\Sigma} G(x,z)\frac{\partial u_+^h}{\partial n_+} dS_z,$$

ou encore :

$$u_+^h(x) - \frac{1}{mes\Omega_+}\int_{\Omega_+} u_+^h dy = \int_{\Omega_+} G(x,y) f_+(y) dy + \int_{\Sigma} G(x,z)\frac{\partial u_+^h}{\partial n_+} dS_z.$$

Posons

$$v_+^{\hat{h}} = u_+^h - \overline{u_+^h} = \int_{\Omega_+} G\,(x,\, y)\, f_+\,(y)\, dy + \int_{\Sigma} G\,(x,\, z)\, g\,(z)\, dS_z,$$

avec $g\,(z) = \dfrac{\partial u_+^h}{\partial n_+}\,(z)$.

Maintenant, en considérant (2.29), d'après le théorème d'Ascoli, on déduit qu'il existe une sous-suite, notée $v_+^{\hat{h}}$ qui converge uniformément sur tout compact de Ω_+ vers la limite

$$v_+ = \int_{\Omega_+} G\,(x,\, y)\, f_+\,(y)\, dy.$$

Comme G est la fonction de Green associée au problème Neumann, cela signifie que v_+ est une solution de moyenne nulle $\left(\displaystyle\int_{\Omega_+} v_+ dx = 0\right)$ du problème :

$$\begin{cases} -\Delta v_+ &= f_+ \qquad dans\ \ \Omega_+, \\ \dfrac{\partial v_+}{\partial n_+} &= 0 \qquad\quad sur\ \ \ \Sigma. \end{cases}$$

Par l'unicité de la solution de ce problème, on en déduit que l'ensemble de la séquence converge vers v_+.

(α) Si $\displaystyle\lim_{(\epsilon,\lambda)\to(0,0)} \frac{\epsilon}{\lambda}$ est finie. L'estimation (iii) du lemme 2.1 montre que :

$$\int_{\Omega_+} |\nabla^2 v_+^h|^2 dx \le C + C\frac{\epsilon}{\lambda},$$

on déduit alors que $\|\nabla^2 v_+^h\|^2_{L^2(\Omega_+)}$ est bornée par rapport à ϵ.

De même, l'estimation (ii) du même lemme montre que :

$$\int_{\Omega_+} |\nabla v_+^h|^2 dx \le C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda},$$

or, comme $\lim_{(\epsilon,\lambda)\to(0,0)} \frac{\epsilon}{\lambda}$ est fini alors $\lim_{(\epsilon,\lambda)\to(0,0)} \frac{\epsilon^2}{\lambda} = 0$, ce qui implique que $\|\nabla v_+^h\|^2_{L^2(\Omega_+)}$ est borné par rapport à ϵ. On déduit alors que $\|\nabla v_+^h\|^2_{H^1(\Omega_+)}$ et borné. La suite $\left(\nabla v_+^h\right)_h$ étant alors bornée dans $H^1(\Omega_+)$, on peut en extraire une sous-suite, toujours notée ∇v_+^h, qui converge faiblement dans $H^1(\Omega_+)$ vers $W \in H^1(\Omega_+)$:

$$\nabla v_+^h \rightharpoonup W \quad faiblement \quad dans \quad H^1(\Omega_+).$$

Par l'injection compacte de $H^1(\Omega_+)$ dans $L^2(\Omega_+)$, on déduit que :

$$\nabla v_+^h \to W \;\; dans \;\; L^2(\Omega_+) \quad fort.$$

Mais la convergence dans $L^2(\Omega_+)$ implique la convergence eu sens des distributions ($\mathfrak{D}'(\Omega_+)$), alors :

$$\nabla v_+^h \to W \;\; dans \;\; \mathfrak{D}'(\Omega_+). \tag{2.30}$$

Puisque, on a :

$$v_+^h \to v_+ \;\; dans \;\; \mathfrak{D}',$$

alors :

$$\nabla v_+^h \to \nabla v_+ \;\; dans \;\; \mathfrak{D}'(\Omega_+), \tag{2.31}$$

de (2.30) et (2.31) implique alors que $W = \nabla v_+$. On déduit alors que :

$$\nabla v_+^h \to \nabla v_+ \;\; fortement \; dans \;\; L^2(\Omega_+). \tag{2.32}$$

Par ailleurs, comme $\int_{\Omega_+} v_+ dx = 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} v_+^h - v_+ &= u_+^h - \frac{1}{mes\Omega_+}\int_{\Omega_+} u_+^h dx - v_+ + \frac{1}{mes\Omega_+}\int_{\Omega_+} v_+ dx \\ &= \left(u_+^h - v_+\right) - \frac{1}{mes\Omega_+}\int_{\Omega_+}\left(u_+^h - v_+\right) dx, \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\|v_+^h - v_+\|_{L^2(\Omega_+)} = \left\|\left(u_+^h - v_+\right) - \frac{1}{mes\Omega_+}\int_{\Omega_+}\left(u_+^h - v_+\right) dx\right\|_{L^2(\Omega_+)},$$

et par l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, on obtient :

$$\|v_+^h - v_+\|_{L^2(\Omega_+)} \le C\|\nabla\left(u_+^h - v_+\right)\|_{L^2(\Omega_+)} = C\|\nabla u_+^h - \nabla v_+\|_{L^2(\Omega_+)}.$$

Puisque $\|\nabla v_+^h - \nabla v_+\|_{L^2(\Omega_+)} \to 0$, en déduit que :

$$\|v_+^h - v_+\|_{L^2(\Omega_+)} \to 0,$$

donc

$$v_+^h \to v_+ \ \ fortement\ dans\ \ L^2(\Omega_+). \tag{2.33}$$

D'autre part, nous avons déjà montré que $\|\nabla^2 v_+^h\|^2_{L^2(\Omega_+)}$ est bornée par rapport à ϵ. Donc, à une sous-suite prés, on a :

$$\nabla^2 v_+^h \rightharpoonup l \ \ faiblement\ \ dans\ \ L^2(\Omega_+).$$

Or, comme la convergence dans $L^2(\Omega_+)$ implique la convergence dans $\mathfrak{D}'(\Omega_+)$, on obtient :

$$\nabla^2 v_+^h \to l \quad dans \quad \mathfrak{D}'(\Omega_+).$$

Puisque, on a :

$$v_+^h \to v_+ \quad dans \quad \mathfrak{D}'(\Omega_+),$$

alors :

$$\nabla^2 v_+^h \to \nabla^2 v_+ \quad dans \quad \mathfrak{D}'(\Omega_+),$$

on déduit alors que :

$$\nabla^2 v_+^h \rightharpoonup \nabla^2 v_+ \quad faiblement \quad dans \quad L^2(\Omega_+). \tag{2.34}$$

De (2.32),(2.33) et (2.34), on déduit que :

$$v_+^h \rightharpoonup v_+ \quad faiblement \quad dans \quad H^2(\Omega_+),$$

et par l'injection compacte de $H^2(\Omega_+)$ dans $H^1(\Omega_+)$, on déduit :

$$v_+^h \to v_+ \quad fortement \quad dans \quad H^1(\Omega_+).$$

(β) Examinons maintenant la cas où $\lim\limits_{(\epsilon,\lambda)\to(0,0)} \dfrac{\epsilon}{\lambda} = +\infty$ avec $\lim\limits_{(\epsilon,\lambda)\to(0,0)} \dfrac{\epsilon^2}{\lambda}$ finie.

Dans cette situation on a $\lim\limits_{(\epsilon,\lambda)\to(0,0)} \dfrac{\epsilon^2}{\lambda^2}$ est finie et les estimations (i) et (ii) du lemme 2.1 montrent alors que v_+^h et ∇v_+^h sont bornées dans $L^2(\Omega_+)$. On déduit alors que v_+^h est bornée dans $H^1(\Omega_+)$. Il s'ensuit qu'on peut extraire une sous suite v_+^h qui converge faiblement dans $H^1(\Omega_+)$:

$$v_+^h \rightharpoonup W \quad dans \quad H^1(\Omega_+),$$

et par l'injection compacte de $H^1(\Omega_+)$ dans $L^2(\Omega_+)$, on obtient :

$$v_+^h \to W \quad dans \quad L^2(\Omega_+).$$

Comme la convergence dans $L^2(\Omega_+)$ implique la convergence dans $\mathfrak{D}'(\Omega_+)$, alors :

$$v_+^h \to W \quad dans \quad \mathfrak{D}'(\Omega_+),$$

ce qui a pour conséquence $v_+^h = W$. On déduit alors que :

$$v_+^h \to v_+ \quad fortement\ dans \quad L^2(\Omega_+).$$

2.1.5 Couche de forte conductivité

Dans ce qui suit, nous allons étudier le cas où la conductivité λ de la couche mince tend vers $+\infty$. Nous allons identifier le problème limite quand le paramètre ϵ tend vers 0.

Changement d'échelle :

Avant d'effectuer un passage à la limite dans notre problème quand $\epsilon \to 0$, nous allons procéder à une dilatation de la couche mince d'un rapport $\dfrac{1}{\epsilon}$ dans la direction de x_n. Le domaine Ω_-^ϵ sera alors transformé en un ouvert indépendant de ϵ.
Soit (V, ψ) une carte locale de Σ, $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cap V$ et $\tilde{\Omega}_-^\epsilon = \Omega_-^\epsilon \cap V$. On effectue le changement d'échelle suivant :

$$\begin{array}{rcl} \Omega_-^\epsilon = \Sigma \times \left]0,\, \epsilon\right[& \to & \Sigma \times \left]0,\, 1\right[\\ (x_\sigma,\, x_n) & \to & \left(x_\sigma,\, y_n = \dfrac{x_n}{\epsilon}\right). \end{array}$$

On désigne par $\tilde{\Omega}_-$ (respectivement $\tilde{\Omega}$) l'image de $\tilde{\Omega}_-^\epsilon$(respectivement $\tilde{\Omega}^\epsilon$) par cette transformation.
Toute fonction u sera transformée en la fonction $\tilde{u}$ par :

$$\tilde{u}(y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_{n-1}, y_n) = u(y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_{n-1},\, \epsilon y_n).$$

On notera le gradient de la fonction v par $\nabla v = (\nabla_T v,\, \nabla_n v)$, avec

$$\nabla_T v = \left(\frac{\partial v}{\partial y_1},\, \ldots,\, \frac{\partial v}{\partial y_{n-1}},\, 0\right),$$

le gradient tangentiel et

$$\nabla_n v = \left(0,\, \ldots,\, 0,\, \frac{\partial v}{\partial y_n}\right),$$

le gradient normal dans le système des coordonnées locales.

Le problème limite :

Introduisons l'espace fonctionnel $V_2(\Omega_+)$ défini par :

$$V_2(\Omega_+) = \{\phi \in H^1(\Omega_+), \nabla_T \phi \in L^2(\Sigma)\}.$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Soit* $h = (\epsilon, \lambda) \to (0, \infty)$ *et* $\alpha = \lim_{h \to (0, \infty)} \epsilon\lambda$.
(i) *Si* $0 \leq \alpha < +\infty$.
Alors $v_+^h \to v_+$ *dans* $H^2(\Omega_+)$ *faiblement, dans* $H^1(\Omega_+)$ *fortement, avec* $v_+ \in V_2(\Omega_+)$*, est la solution du problème :*

$$\int_{\Omega_+} \nabla v_+ \nabla \phi_+ dx + \alpha \int_\Sigma \nabla_T v_+ \nabla_T \phi_+ dx = \int_{\Omega_+} f_+ \phi_+ dx, \quad \forall \phi \in V_2(\Omega_+),$$

Autrement dit, v_+ *est la solution variationnelle du problème :*

$$\begin{cases} -\Delta v_+ & = & f_+ \quad dans \;\; \Omega_+, \\ \dfrac{\partial v_+}{\partial n_+} + \alpha \triangle_T v_+ & = & 0 \quad sur \quad \Sigma, \\ \displaystyle\int_{\Omega_+} v_+(x)\, dx & = & 0, \end{cases}$$

où ∇_T *est le gradient tangentiel sur* Σ *et* Δ_T *représente l'opérateur de Laplace sur* Σ.
(ii) *Si* $\alpha = +\infty$*, alors*
$v_+^h \to v_+$ *dans* $H^2(\Omega_+)$ *faiblement avec*

$$v_+ = w_+ - \frac{1}{|\Omega_+|} \int_{\Omega_+} w_+ dx,$$

où $w_+ \in H_0^1(\Omega_+)$ *est la solution du problème de Dirichlet :*

$$\begin{cases} -\Delta w_+ & = & f_+ \quad dans \;\; \Omega_+, \\ w_+ & = & 0 \quad sur \;\; \Sigma. \end{cases}$$

Remarque 2.2. Si on fait formellement $\alpha \to +\infty$ ci-dessus, on obtient $\triangle_T v_+ = 0$, car v_+ est constante sur Σ.

Preuve. (i) D'après le lemme 2.1, il est clair que la séquence v_+^h est bornée dans $H^2(\Omega_+)$ et converge faiblement vers $v_+ \in H^2(\Omega_+) \subset V_2(\Omega_+)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\|\nabla v_-^h\|^2_{L^2(\tilde{\Omega}_-^\epsilon)} &= \int_{\tilde{\Omega}_-^\epsilon} |\nabla v_-^h|^2 d\tilde{\Omega}_-^\epsilon \\
&= \int_{\tilde{\Omega}_-^\epsilon} \left(|\nabla_T v_-^h|^2 + |\nabla_n v_-^h|^2\right) d\tilde{\Omega}_-^\epsilon \\
&= \epsilon \int_{\tilde{\Omega}_-} |\nabla_T v_-^h|^2 d\tilde{\Omega}_- + \epsilon^{-1} \int_{\tilde{\Omega}_-} |\nabla_n v_-^h|^2 d\tilde{\Omega}_- \\
&= \epsilon \|\nabla_T v_-^h\|^2_{L^2(\tilde{\Omega}_-)} + \epsilon^{-1} \|\nabla_n v_-^h\|^2_{L^2(\tilde{\Omega}_-)}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'estimation (ii) du lemme 2.1 :

$$\int_{\Omega_+} |\nabla v_+^h|^2 dx + \lambda \int_{\Omega_-^\epsilon} |\nabla v_-^h|^2 dx \leq C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda},$$

donc

$$\lambda \int_{\Omega_-^\epsilon} |\nabla v_-^h|^2 dx \leq C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda},$$

ce qui signifie que :

$$\lambda\epsilon \|\nabla_T v_-^h\|^2_{L^2(\tilde{\Omega}_-)} + \lambda\epsilon^{-1} \|\nabla_n v_-^h\|^2_{L^2(\tilde{\Omega}_-)} \leq C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda},$$

donc

$$(\lambda\epsilon) \|\nabla_T v_-^h\|^2_{L^2(\tilde{\Omega}_-)} \leq C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda}. \tag{2.35}$$

$$(\lambda\epsilon) \|\nabla_n v_-^h\|^2_{L^2(\tilde{\Omega}_-)} \leq \epsilon^2 \left(C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda}\right). \tag{2.36}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_-^\epsilon} |\nabla^2 v_-^h|^2 &= \int_{\Omega_-^\epsilon} |\nabla_T^2 v_-^h|^2 + \int_{\Omega_-^\epsilon} |\nabla_n^2 v_-^h|^2 \\
&= \epsilon \int_{\tilde{\Omega}_-} |\nabla_T^2 v_-^h|^2 + \frac{1}{\epsilon^4} \int_{\tilde{\Omega}_-} |\nabla_n^2 v_-^h|^2 \\
&= \epsilon \|\nabla_T^2 v_-^h\|^2_{L^2(\tilde{\Omega}_-)} + \epsilon^{-3} \|\nabla_n^2 v_-^h\|^2_{L^2(\tilde{\Omega}_-)}.
\end{aligned}$$

On a :

$$\epsilon \|\nabla_T^2 v_-^h\|^2_{L^2(\tilde{\Omega}_-)} \leq \|\nabla^2 v_-^h\|^2_{L^2(\tilde{\Omega}_-^\epsilon)}, \tag{2.37}$$

et

$$\epsilon^{-3} \|\nabla_n^2 v_-^h\|^2_{L^2(\tilde{\Omega}_-)} \leq \|\nabla^2 v_-^h\|^2_{L^2(\tilde{\Omega}_-^\epsilon)}. \tag{2.38}$$

On multiplie (2.37) par λ, on obtient :

$$(\lambda\epsilon)\|\nabla_T^2 v_-^h\|^2_{L^2(\tilde{\Omega}_-)} \leq \lambda\|\nabla^2 v_-^h\|^2_{L^2(\tilde{\Omega}_-^\epsilon)}. \tag{2.39}$$

D'après l'estimation (iii) du lemme 2.1, on a :

$$\lambda\|\nabla^2 v_-^h\|^2_{L^2(\tilde{\Omega}_-^\epsilon)} \leq C + C\frac{\epsilon}{\lambda},$$

comme $\epsilon \to 0$ et $\lambda \to +\infty$, on obtient :

$$(\lambda\epsilon)\int_{\tilde{\Omega}_-} |\nabla^2 v_-^h|^2 dy \leq \lambda\int_{\tilde{\Omega}_-^\epsilon} |\nabla^2 v_-^h|^2 dx \leq C.$$

D'après (2.12) on a :

$$\int_{\tilde{\Omega}_-^\epsilon} |v_-^h|^2 dx \leq C\epsilon^2\int_{\tilde{\Omega}_-^\epsilon} |\nabla v_-^h|^2 dx + C\epsilon\int_{\tilde{\Omega}_+} |\nabla v_+^h|^2 dx + C\epsilon\int_{\tilde{\Omega}_+} |v_+^h|^2 dx,$$

ce qui donne après le changement d'échelle :

$$\epsilon\int_{\tilde{\Omega}_-} |v_-^h|^2 dx \leq C\epsilon^2\int_{\tilde{\Omega}_-^\epsilon} |\nabla v_-^h|^2 dx + C\epsilon\int_{\tilde{\Omega}_+} |\nabla v_+^h|^2 dx + C\epsilon\int_{\tilde{\Omega}_+} |v_+^h|^2 dx.$$

Les estimations (i) et (ii) du lemme 2.1, nous donnent :

$$\epsilon\int_{\tilde{\Omega}_-} |v_-^h|^2 dx \leq C\frac{\epsilon^2}{\lambda}\left(C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda}\right) + C\epsilon\left(C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda}\right) + C\epsilon\left(C + C\frac{\epsilon^4}{\lambda^2}\right),$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{\Omega}_-} |v_-^h|^2 dx &\leq C\frac{\epsilon}{\lambda}\left(C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda}\right) + C\left(C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda}\right) + C\left(C + C\frac{\epsilon^4}{\lambda^2}\right)\\
&\leq C\frac{\epsilon}{\lambda}\left(C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda}\right) + C^2 + C^2\frac{\epsilon^2}{\lambda} + C^2 + C^2\frac{\epsilon^4}{\lambda^2}\\
&\leq C\frac{\epsilon}{\lambda}\left(C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda}\right) + C\frac{\epsilon}{\lambda}\left(C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda}\right).\epsilon + 2C^2.
\end{aligned}$$

Comme on a $\epsilon < 1$ pour ϵ suffisamment petit, donc

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{\Omega}_-} |v_-^h|^2 dx &\leq C\frac{\epsilon}{\lambda}\left(C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda}\right) + C\frac{\epsilon}{\lambda}\left(C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda}\right) + 2C^2\\
&\leq 2C\frac{\epsilon}{\lambda}\left(C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda}\right) + 2C^2,
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\tilde{\Omega}_-} |v_-^h|^2 dx \leq C\frac{\epsilon}{\lambda}\left(C + C\frac{\epsilon^2}{\lambda}\right) + C. \tag{2.40}$$

Rappelons que C désigne plusieurs constantes indépendantes de ϵ qui ne sont pas forcément égales.

On a alors, v_-^h bornée dans $H^2\left(\tilde{\Omega}_-\right)$. Par conséquent, lorsque $h \to (0, +\infty)$ il existe une sous-suite $v_-^h \in H^2\left(\tilde{\Omega}_-\right)$ telle que :

$$v_-^h \rightharpoonup v_- \quad faiblement \quad dans \quad H^2\left(\tilde{\Omega}_-\right). \tag{2.41}$$

Par l'injection compacte de $H^2\left(\tilde{\Omega}_-\right)$ dans $H^1\left(\tilde{\Omega}_-\right)$, on obtient :

$$v_-^h \to v_- \quad fortement \quad dans \quad H^1\left(\tilde{\Omega}_-\right).$$

D'après (2.38), $\nabla_n v_-^h \to 0$ fortement dans $L^2\left(\tilde{\Omega}_-\right)$ donc v_- ne dépend pas de la variable normale.

En utilisant les conditions de transmission $v_-^h = v_+^h$, $\nabla_T v_-^h = \nabla_T v_+^h$ et le fait que $\nabla_T v_-^h \to \nabla_T v_-$ fortement dans $L^2\left(\tilde{\Omega}_-\right)$, on obtient :

$$\nabla_T v_- = \nabla_T v_+ \in L^2(\Sigma).$$

En prenant un recouvrement fini de Σ, nous définissons donc une fonction v_- sur tout l'ensemble Ω_-^ϵ par $v_-(x_t) = v_-(x_\sigma)$ pour presque tous les $x_t = x_\sigma + tn_+(x_\sigma)$ et tels que :

$$\nabla_T v_-^h \to \nabla_T v_- \quad dans \quad L^2(\Sigma) \quad et \quad \nabla_T v_- = \nabla_T v_+.$$

Soit maintenant $\phi_+ \in V_2(\Omega_+)$, arbitraire. Nous la prolongeons à Ω_-^ϵ en posant pour tout $x \in \Omega_-^\epsilon$:

$$x = x_\sigma + tn(x_\sigma),$$

et en définissant ce prolongement à Ω_-^ϵ par :

$$\phi_-(x) = \phi(x_\sigma).$$

La fonction ϕ définie par :

$$\begin{cases} \phi_+ \quad sur \;\; \Omega_+, \\ \\ \phi_- \quad sur \;\; \Omega_-^\epsilon, \end{cases}$$

appartient alors à l'espace $H^1(\Omega_-^\epsilon)$. En prenant ϕ comme fonction test dans la formulation variationnelle, on écrit :

$$\int_{\Omega_+} \nabla v_+^h \nabla \phi_+ dx + \lambda \int_{\Omega_-^\epsilon} \nabla v_-^h \nabla \phi_- dx = \int_{\Omega_+} f_+ \phi_+ dx + \int_{\Omega_-^\epsilon} f_- \phi_- dx \qquad \forall \phi \in V_2.$$

Comme $\nabla_n \phi_- = 0$, on obtient :

$$\int_{\Omega_+} \nabla v_+^h \nabla \phi_+ dx + \lambda \int_{\Omega_-^\epsilon} \nabla_T v_-^h \nabla_T \phi_- dx = \int_{\Omega_+} f_+ \phi_+ dx + \int_{\Omega_-^\epsilon} f_- \phi_- dx. \qquad \forall \phi \in V_2.$$

Nous allons maintenant effectuer un passage à la limite dans cette formulation variationnelle. On a :

$$\nabla v_+^h \to \nabla v_+ \quad fortment\ dans \quad L^2(\Omega_+),$$

et donc :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_+} (\nabla v_+^h - \nabla v_+) \nabla \phi_+ dx \right| &\leq \int_{\Omega_+} |(\nabla v_+^h - \nabla v_+) \nabla \phi_+| dx \\ &\leq \|\nabla v_+^h - \nabla v_+\|_{L^2(\Omega_+)} \|\nabla \phi_+ dx\|_{L^2(\Omega_+)} \to 0. \end{aligned}$$

On déduit alors que :

$$\int_{\Omega_+} \nabla v_+^h \nabla \phi_+ dx \to \int_{\Omega_+} \nabla v_+ \nabla \phi_+ dx.$$

Par ailleurs, on a :

$$\lambda \left| \int_{\tilde{\Omega}_-^\epsilon} \left(\nabla_T v_-^h - \nabla_T v_- \right) \nabla_T \phi_- dx \right| \leq \lambda \int_{\tilde{\Omega}_-^\epsilon} | \left(\nabla_T v_-^h - \nabla_T v_- \right) \nabla_T \phi_- | dx,$$

ce qui donne, en écrivant les intégrales sur l'ouvert dilaté $\tilde{\Omega}_-$:

$$\lambda \epsilon \int_{\tilde{\Omega}_-} | \left(\nabla_T v_-^h - \nabla_T v_- \right) \nabla_T \phi_- | dy \leq \lambda \epsilon \|\nabla_T v_-^h - \nabla_T v_-\|_{L^2\left(\tilde{\Omega}_-\right)} \|\nabla_T \phi_-\|_{L^2\left(\tilde{\Omega}_-\right)} \longrightarrow 0.$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\lambda \int_{\Omega_-^\epsilon} \left(\nabla_T v_-^h - \nabla_T v_- \right) \nabla_T \phi_- dx \longrightarrow 0.$$

D'autre part, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega_-^\epsilon} \nabla_T v_-^h \nabla_T \phi_- dx &= \lambda \int_{\Omega_-^\epsilon} \nabla_T v_-^h \nabla_T \phi_- dx + \lambda \int_{\Omega_-^\epsilon} \nabla_T v_- \nabla_T \phi_- dx - \lambda \int_{\Omega_-^\epsilon} \nabla_T v_- \nabla_T \phi_- dx \\ &= \lambda \int_{\Omega_-^\epsilon} (\nabla_T v_-^h \nabla_T \phi_- - \nabla_T v_- \nabla_T \phi_-) dx + \epsilon \lambda \int_{\Sigma} \nabla_T v_- \nabla_T \phi_- dx_\sigma, \end{aligned}$$

en passant à la limite

$$\lambda \int_{\Omega_-^\epsilon} \nabla_T v_-^h \nabla_T \phi_- dx \longrightarrow \alpha \int_\Sigma \nabla_T v_- \nabla_T \phi_- dx_\sigma,$$

d'où le résultat.

(ii) Si $\alpha = +\infty$, on aura :

$$v_-^h \longrightarrow v_- \quad faiblement \quad dans \quad H^1(\Omega_-),$$

avec $\nabla_T v_- = 0$, et $\nabla_n v_- = 0$, ce qui donne :

$$v_- = c,$$

où c est une constante.

Par conséquent $v_+ = v_- = c$ sur Σ. D'autre part, par la formule (2.11) ou (2.12), on déduit que :

$$\|v_-^h\|^2_{L^2(\Omega_-^\epsilon)} \to 0,$$

donc

$$\int_{\Omega_-^\epsilon} v_-^h(x)\, dx \to 0.$$

Mais, on sait que :

$$\int_{\Omega_+} v_+^h(x)\, dx = \int_{\Omega_-^\epsilon} v_-^h(x)\, dx \quad et \quad v_+^h \to v_+ \quad dans \quad L^2(\Omega_+),$$

ce qui signifie que :

$$\int_{\Omega_+} v_+(x)\, dx = 0.$$

Par conséquent, v_+ est la solution du problème suivant dans $H^1(\Omega_+)$:

$$\begin{cases} -\Delta v_+ &= f_+ \ dans \ \Omega_+, \\ v_+|_{\partial\Omega_+} &= c, \\ \int_{\Omega_+} v_+ &= 0. \end{cases}$$

Soit maintenant $w_+ = v_+ - c$. Alors $w_+ \in H_0^1(\Omega_+)$ et est solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta w_+ = f_+ \quad dans \ \Omega_+, \\ w_+ = 0 \quad sur \ \partial\Omega_+. \end{cases}$$

On sait que ce problème admet une solution unique $w_+ \in H_0^1(\Omega_+)$. Nous avons :

$$\int_{\Omega_+} w_+ dx = \int_{\Omega_+} (v_+ - c)\, dx = \int_{\Omega_+} v_+ dx - c|\Omega_+|,$$

donc

$$c = \frac{1}{|\Omega_+|} \int_{\Omega_+} w_+ dx.$$

Par conséquent,

$$v_+ = w_+ + \frac{1}{|\Omega_+|} \int_{\Omega_+} w_+ dx.$$

Conclusion générale

Nous nous sommes intéressés dans cette étude à la propagation de la chaleur dans une structure hétérogène comportant une couche mince. Des modèles limites ont été justifiés quand l'épaisseur de la couche tend vers 0 et quand sa conductivité λ tend vers 0 ou $+\infty$, des convergences fortes dans H^1 ont été démontrées. Notons que la condition aux limites imposée à la frontière extérieure dans le problème de transmission est de type Neumann : L'analyse effectuée peut se généraliser à d'autres conditions (ex : conditions mixtes, voir[5]). Elle peut aussi s'adapter aux problèmes semi-linéaires (voir[5]) et non linéaires et aussi à d'autres modèles physiques.

Bibliographie

[1] Brézis, H. Caffarelli (L.A.), Friedman (A.), *Reinforcement problems for elliptic equations and variational inequalities*, Annali di Matematica Pura et Applicata **3** (1980), 219-246.

[2] Brézis, H. *Analyse fonctionnelle (Théorie et applications)* Masson Paris. 1983.

[3] Dautray, R. Lions J.L., *Analyse mathématique et calcul numérique **2-4**, Masson Paris. 1985*

[4] Doneddu, A. *Géométrie différentielle. Intégrales multiples **6** Vuibert Paris. 1978.*

[5] Mongi, M. Samadi, H. *Linear and semi-linear reinforcement problems by thin layers*, Z. angew. Math. Phys. **54** (2003), 349-375.

[6] Sanchez-Hubert, et E-Sanchez Palencia. *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation.* Masson. 1992.