

République Algérienne Démocratique et Populaire

Université Mouloud MAMMARI de Tizi-Ouzou

Faculté du Génie Electrique et d'Informatique

Département d'Electronique



Mémoire

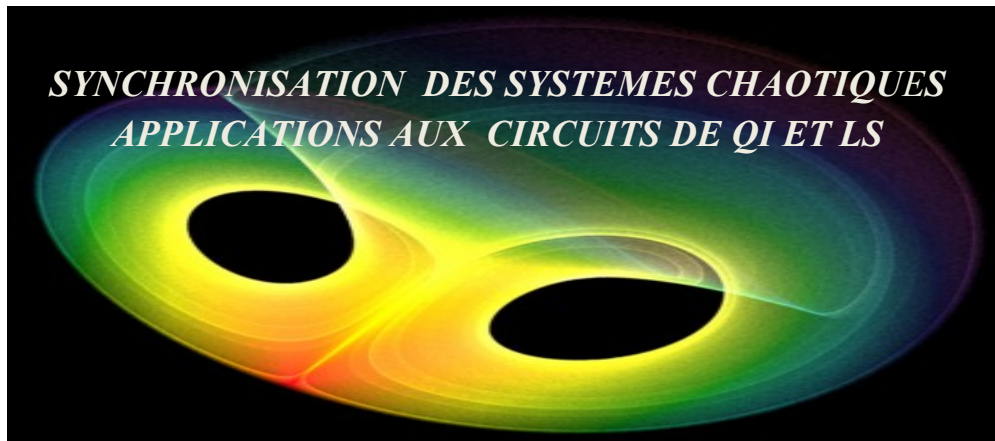
De fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme

d'Ingénieur d'Etat en Electronique

Option : contrôle

Thème



Proposé et dirigé par :
Mr : HAMICHE Hamid

Réalisé par :
M^{lle} : TEBANI Lisa
M^{lle} : TATEM Nadia

Promotion 2007/2008

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents, que je ne remercierai jamais assez pour leurs encouragements, leurs soutiens et leurs tendresses.

A mes sœurs que j'adore, Ouiza, Radia et Faiza sans oublié son fiancé Kamel pour leurs sympathies.

A mon très cher fiancé Toufik pour son aide ces conseils et son soutien, sans oublié toute sa famille.

Et enfin à mes amis(es) : Ali Kabeche, Said Lamri, ouarda saigh, Samia, Lamia et Kahina.

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier notre promoteur Mr Hamiche, à qui nous sommes très reconnaissantes pour ses remarques, ses conseils et sa pleine disponibilité à tout instants.

Nous sommes aussi reconnaissantes envers tous les enseignants pour leurs contributions dans la réussite de nos études, ainsi tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin à réaliser ce modeste travail.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury, devant qui nous avons l'honneur d'exposer notre travail et qui ont pris la peine de lire avec soin ce mémoire, pour juger son contenu et apporter leurs réflexions et leurs critiques scientifiques.

Introduction générale	1
Chapitre I : Etude sur les systèmes non linéaires et la théorie du chaos	
I.1. Introduction	3
I.2. Définition utile	3
I.2.1. Système dynamique	3
I.2.2. Espace d'état	3
I.2.3. Degré de liberté	4
I.2.4. Espace de phase	4
I.2.5. Trajectoire	4
I.2.6. Système autonome	4
I.2.7. Temps continu	5
I.2.8. Temps discret	5
I.2.9. Point fixe ou point d'équilibre	5
I.2.10. Cycle limite	7
I.2.11. Flot	7
I.2.12. Système linéaire	7
I.3. Etudes de systèmes non linéaire	8
I.3.1. Définition	8
a. Cas général	9
b. Cas d'un système linéaire analytique	9
I.4. Méthodes utilisées pour l'étude des systèmes non linéaires	10

I.5. La théorie du chaos	10
I.6. Exemples de systèmes chaotiques	10
I.6.1. Système de Lorenz pour le cas continu	10
I.6.2. Système de Henon pour le cas discret	11
I.7. Caractéristiques du chaos	11
I.7.1. Sensibilité aux conditions initiales	12
I.7.2. Aspect aléatoire	13
I.7.3. Attracteur étrange	14
I.7.4. Dimension fractale de l'attracteur étrange	16
I.7.5. Spectre de puissance et fonction d'auto-corrélation	17
I.7.6. Exposant de Lyapunov	18
I.8. Conclusion	21

Chapitre II : Synchronisation et méthodes de contrôle des systèmes chaotiques

II.1. Introduction	22
II.2. Définition	22
II.3. Positionnement du problème	23
II.4. Concept de synchronisation de Pecora et Carroll	25
II.5. Quelques techniques de cryptage/décryptage	27
II.5.1. Masquage par addition	27

II.5.2. Masquage par décalage	28
II.5.3. Les cryptosystèmes chaotiques	29
II.5.4. Système de communication avec deux lignes de transmission	30
II.6. But du contrôle	32
II.7. Théorèmes utiles	32
II.7.1. Commandabilité	32
II.7.2. Théorème de Cayley-Hamilton	33
II.8. Commande par retour d'état	33
II.9. Notion de retour d'état	34
II.9.1. Système mono-entrée mono-sortie	36
II.9.2. Système multivariable	39
II.10. Conclusion	45
Chapitre III : Application au circuit de QI et au circuit LS	
III.1. Introduction	46
III.2. Synchronisation de deux systèmes identiques	46
III.2.1. Le système de Lorenz-Stenflo	46
III.2.1.1. Formulation	48
III.2.1.2. Résultats de simulation	51
III.2.2. Le système de QI	52
III.2.2.1. Formulation	54
III.2.2.2. Résultats de simulation	57
III.3. Synchronisation de deux systèmes différents LS et QI	58

III.3.1. Résultats de simulation	61
III.4. Conclusion	63
Conclusion générale	64
Annexe	
Bibliographie	

INTRODUCTION :

La recherche mathématique à propos du chaos remonte à 1890, époque à laquelle Henri Poincaré étudie la stabilité du système solaire. En 1970, David Ruelle et Floris Takens commencent à utiliser le concept de chaos pour décrire des phénomènes naturels. Depuis, le nombre de travaux relatifs au chaos a littéralement explosé. Les scientifiques de toutes les disciplines prennent aujourd'hui conscience de la puissance des techniques développées durant cette période pour apprivoiser le chaos. Ils commencent à appliquer ces techniques à un nombre de plus en plus important de problèmes concernant la physique, la chimie, l'écologie et même l'économie. Mais, du désordre, la raison ne peut rien tirer.

Lorsque les mathématiciens se sont intéressés au chaos, c'était pour tenter d'y trouver de l'ordre, et ils y sont parvenus! Créer de l'ordre, voilà bien une des activités principales des mathématiques.

Le chaos des scientifiques n'est donc pas l'informe, et son désordre n'est qu'apparent: il peut être décrit, et il ne doit rien au hasard. Qu'est-ce alors exactement, d'un point de vue scientifique, le chaos ?

La théorie du chaos est une véritable théorie scientifique, qui a su trouver de l'ordre caché sous le désordre apparent. Mais ce nouvel ordre est très différent de l'ordre ancien, au déterminisme implacable d'une dynamique intégrable, quasi-périodique a succédé une description de nature fondamentalement probabiliste, caractérisée par l'existence d'invariants prenant la forme de mesures de probabilités, d'attracteurs, de dimensions fractales..., etc. Toutes les sciences, y compris sociales, sont concernées par ce changement de paradigme.

La théorie du chaos s'attache principalement à la description de ces systèmes à petit nombre de degrés de liberté, souvent très simples à définir, mais dont la dynamique nous apparaît comme très désordonnée.

L'application du chaos aux transmissions numériques fait l'objet d'un intérêt croissant dans la littérature, depuis les résultats de Pecora et Carroll sur la synchronisation du chaos. Les auteurs ont démontré que, malgré l'extrême sensibilité au choix des conditions initiales d'un système chaotique, deux systèmes de dynamiques identiques configurés en maître-esclave sont capables de se synchroniser parfaitement en l'absence de bruit. Cette possibilité résulte du caractère déterministe du chaos, bien qu'en apparence une trajectoire chaotique soit plutôt assimilable à un signal aléatoire.

Les systèmes dynamiques étranges (chaotiques) sont depuis longtemps connus dans le domaine des mathématiques, mais c'est seulement au cours de la dernière décennie que les

applications concrètes se sont multipliées. Notre étude se focalise sur la synchronisation du chaos avec la commande à retour d'état.

Dans cette perspective, Ce mémoire est organisé de la manière suivante. Dans le premier chapitre nous allons présenter les aspects généraux des systèmes dynamiques chaotiques, où nous allons expliquer la notion de chaos ainsi, que toutes les caractéristiques que représente ces systèmes. Dans le deuxième chapitre nous allons introduire deux méthodes de synchronisation. La première consiste à synchroniser deux systèmes chaotiques présenté par Pecora et Carroll, par contre la deuxième est une méthode de contrôle par retour d'état utilisée dont le but de synchronisée deux systèmes chaotique. Le dernier chapitre de ce mémoire est consacré à une application de la commande par retour d'état afin de synchroniser deux systèmes chaotiques, identique où deux systèmes chaotiques différents.

Enfin, nous terminons notre travail par une conclusion générale et quelques perspectives.

I.1. Introduction :

L'étude des systèmes dynamiques non linéaires a connu un essor spectaculaire depuis l'apparition du chaos dans les systèmes déterministes. Les physiciens ont longtemps crus que ce comportement complexe inattendu, survenu dans les expériences était dû au fait que ces systèmes possédaient de nombreuses variables. Mais à partir du début des années 70, il est apparu clairement que des systèmes très simples ne dépendent que d'un petit nombre de variables pouvaient néanmoins avoir des comportements chaotiques.

La technique usuelle pour tester une théorie consiste à effectuer une série d'observation et de comparer le résultat des mesures aux prédictions théoriques. Mais, en présence du chaos, invalide complètement cette démarche, car les prédictions peuvent varier énormément selon les conditions initiales. Une infime erreur d'observation sur celle-ci peut donc entraîner une variation énorme sur les résultats prédits. Cela soulève toute une série de questions intéressantes :

-Comment définir précisément le chaos ?

-Quelles sont les signes du chaos et comment les mesurer ?

-Comment être sûr que les phénomènes que nous considérons comme chaotiques sont réellement chaotiques et pas simplement très compliqués et parfaitement imprédictibles ?

I.2. Définitions utiles :

I.2.1. Système dynamique [1]:

Tout système dont l'évolution dépend du temps, c'est-à-dire, ce système peut être décrit par un ensemble fini d'équations. Cet ensemble d'équations peut prendre des formes diverses (équations différentielles ordinaires, équations aux dérivées partielles...).

I.2.2. Espace d'état [2]:

C'est le recensement des états possibles d'un système dynamique. On peut également le définir comme un espace abstrait, dont chaque variable représente une dimension nécessaire à la description du système à un moment donné.

I.2.3. Degré de liberté [3]:

Il caractérise l'espace d'état, il représente l'ordre qui est égale à la dimension de l'espace d'état, c'est-à-dire le nombre de variables qui le caractérise.

I.2.4. Espace de phase [2] :

L'espace de phase $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ d'un système dynamique est un espace mathématique dont les axes de coordonnées représentent chacun des variables d'état $x_i, i=1 \dots n$, nécessaire pour spécifier entièrement l'état de ce système à chaque instant.

C'est un espace abstrait permettant de disposer sur un repère autant de paramètres nécessaires pour caractériser l'état d'un système. On représente et on caractérise ainsi, en un point l'état du système à un instant donné. A mesure que le système évolue, le point va décrire une courbe dans l'espace des phases.

I.2.5. Trajectoire [2] :

Si on observe l'ensemble des différents états successifs de l'espace d'état, on peut remarquer l'émergence d'une trajectoire dans cet espace. Cette trajectoire est également appelée orbite du système. Il est à noter que si les variables d'état prennent des valeurs réelles, l'orbite d'un système dynamique à temps continu sera une courbe alors que l'orbite d'un système dynamique discret sera représentée par une série de points.

I.2.6. Système autonome [4] :

Un système dynamique non linéaire est dit autonome lorsqu'il ne dépend pas explicitement du temps. Un système autonome est donné ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (I-1)$$

Un système autonome est indépendant de temps initial, alors qu'un système non autonome ne l'est pas. Dans un système autonome, tout instant peut être considéré comme instant initial, et tout état $x(t)$ du système peut être considéré comme un état initial.

I.2.7. Temps continu [4] :

$$\dot{x}(t) = F(x(t), t) \quad (I-2)$$

Où $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ désigne la dynamique du système.

I.2.8. Temps discret [4]:

Comme il a été déjà précisé le système dynamique est dans ce cas représenté par des équations aux différences finies, avec le modèle général suivant :

$$x(k+1) = G(x(k), k) \quad (I-3)$$

Où $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la dynamique du système en temps discret.

I.2.9. Point fixe ou point d'équilibre [4] :

On appelle point fixe ou point d'équilibre du système, le point x^* de l'espace des phases si :

$$f(x^*)=0 \quad \text{et} \quad g(x^*)=0 \quad (I-4)$$

Remarque :

Par un changement de variable $\xi = x - x^*$ on peut ramener le point x^* à l'origine.

Exemple :

Considérons un simple pendule montré dans la figure I-1, où l est la longueur de la corde considérée comme rigide et sans masse, et m représente la masse en mouvement. On note θ l'angle que la corde fait avec la verticale. Afin d'écrire les équations de mouvement, on identifie les forces agissant sur la masse. Ainsi il y a la force gravitationnelle donnée par

$F_g = mg$ où g est l'accélération de la gravité. On suppose aussi que la masse est soumise à une force de résistance de friction proportionnelle à la vitesse de la masse et de coefficient de friction k . d'après la seconde loi de mouvement de Newton, on obtient alors l'équation du mouvement :

$$m l \ddot{\theta} = mg \sin(\theta) - k l \dot{\theta} \quad (I-5)$$

On décrit alors le mouvement dans l'espace d'état non linéaire en choisissant $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$:

$$\dot{x}_1 = x_2 \left\{ \right.$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \quad (I-6)$$

A fin de trouver les points d'équilibre, on pose : $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$:

$$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \end{cases} \quad (I-7)$$

Les points d'équilibre sont alors situés au $(n\pi, 0)$ pour $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, etc. Physiquement, cela correspond à l'existence de deux points d'équilibre $(0,0)$ et $(\pi, 0)$. Mais le pendule peut rester au point $(0,0)$, alors qu'il ne pourra pas maintenir sa position d'équilibre en $(\pi, 0)$.

Ainsi, on dit que le point $(0,0)$ est un point d'équilibre stable tandis que le point $(\pi, 0)$ est un point d'équilibre instable.

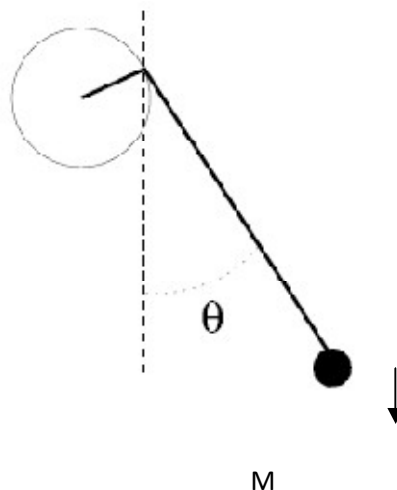


Figure I-1 : Pendule simple

I.2.10. Cycle limite [4] :

Un système non linéaire peut être un siège d'oscillations, caractérisées par leurs amplitudes et leurs fréquences, indépendantes de la condition initiale x_0 , et sans excitation extérieure. Ce siège est appelé cycle limite.

I.2.11. Flot [4] :

Toute solution $\varphi_t(x, y)$ du système autonome (I-1), considérée comme un ensemble de trajectoires avec différentes conditions initiales, est appelée flot dans le plan x - y .

I.2.12. Système linéaire [5] :

Un système linéaire peut être donné par l'expression suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (I-8)$$

Tel que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. A, B, C et D sont des matrices appropriées à coefficients constants.

La notion de linéarité est caractérisée physiquement et mathématiquement par :

$$\begin{array}{ccc} e_1 & \longrightarrow & s_1 \\ e_2 & \longrightarrow & s_2 \\ \cdot & \cdot & \longrightarrow \\ \cdot & \cdot & \xrightarrow{K_1 e_1 + \dots + K_n e_n} \\ \cdot & \cdot & \xrightarrow{K_1 s_1 + \dots + K_n s_n} \end{array} \quad (I-9)$$

Le système est dit linéaire si et seulement si les deux principes suivants sont vérifiés :

- Additivité
- Proportionnalité

I.3. Etudes des systèmes non linéaires [5] [6]:

I.3.1. Définition :

Un système dynamique non linéaire est défini par une équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(t, x, u) \quad (I-10)$$

Où : $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ est un vecteur de dimension n représentant l'état du système, et $u \in V \subseteq \mathbb{R}^p$ représente l'entrée du système. Cette équation est en générale associée à une autre équation désignant le vecteur de sortie :

$$y = h(t, x, u) \quad , \quad y \in \mathbb{R}^m \quad (I-11)$$

Donc un système physique est dit non linéaire, si la relation entre les grandeurs d'entrées et les grandeurs de sorties est un système d'équations différentielles avec des coefficients non constants, qui se présentent sous deux cas :

a. Cas général :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad \text{équation d'état}$$

$$y(t) = h(x(t), u(t)) \quad \text{équation de sortie} \quad (I-12)$$

b. Cas d'un système linéaire analytique :

Dans les cas des systèmes possédant la propriété d'affinité par rapport à l'entrée, leurs représentations d'état se réduit à la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (I-13)$$

$x(t)$, $u(t)$ et $y(t)$ représentent respectivement le vecteur d'état, le vecteur d'entrée et le vecteur de sortie à l'instant t . f , h et g sont des fonctions vectorielles de dimensions n , p et m respectivement.

Exemples :

- $f(x) = x + \exp(-20x^2) \cos(x)$
- $f(x) = 6/2 - \sin(x) + \pi/6 - \sqrt{3}/2$
- $f(x) = \begin{bmatrix} x_1 + \exp(-20x_1^2) \cos x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$

I.4. Méthodes utilisées pour l'étude des systèmes non linéaires [6] :

Parmi les méthodes d'analyses et de synthèses des systèmes non linéaires .Nous pouvons citer celles concernant les asservissements non linéaires à savoir la méthode de plan de phase, la méthode

de l'équivalent du premier harmonique et la méthode de Cypkin pour l'étude des oscillations des asservissements par plus au moins. Les méthodes découlent d'une volonté d'étendre les méthodes d'analyses des asservissements linéaires aux cas non linéaires, une de ces méthodes sera détaillée en annexe.

I.5. La théorie du chaos [7] :

La théorie du chaos est une branche des systèmes dynamiques non linéaires qui étudie et essaie de clarifier le chaos, ce dernier a un comportement irrégulier, désordonné, imprévisible et d'apparence aléatoire tout en étant déterministe, le but donc n'est pas de trouver des solutions précises à des équations, mais d'essayer d'avoir les réponses à des questions sur l'état d'un système au fur et à mesure du temps, on pourra dire que le chaos ne se réfère pas à un état statique de désordre, mais plutôt à un état dynamique d'ordre.

I.6. Exemples des systèmes chaotiques :

I.6.1. Système de Lorenz pour le cas continu :

Le système de Lorenz est un exemple célèbre de système non linéaire donné par la forme (I-12), il présente un comportement chaotique pour certaines valeurs de paramètres. Ce système est défini par les équations et les valeurs numériques suivantes : $a=10$, $r=8/3$ et $b=28$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(y(t) - x(t)) \\ \dot{y}(t) = r x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ \dot{z}(t) = -b z(t) + x(t)y(t) \end{cases} \quad (I-14)$$

I.6.2. Système de Henon pour le cas discret :

Le système de Henon est un modèle proposé en 1976 par le mathématicien Michael Henon. Il se présente sous la forme (I-13), il s'agit d'un système qui introduit les itérations dans le plan. Ces itérations sont définies par les équations et les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} x_{k+1} = a - x_k^2 + by_k \\ y_{k+1} = x_k \end{cases} \quad (I-15)$$

I.7. Caractéristiques du chaos :

Quelques systèmes physiques se comportent de manière chaotique parmi ces systèmes, on peut citer l'atmosphère, un robinet qui goutte, un pendule excité dans un champ magnétique ..., etc. Ces quelques systèmes se démarquent par leurs dimensions et l'origine de leurs mouvements.

Il existe plusieurs définitions possibles du chaos, ces définitions ne sont pas toutes équivalentes, mais elles convergent vers certains points communs caractérisant ainsi le chaos, ci-dessous, nous présentons quelques caractéristiques qui permettent de comprendre le point marquant d'un système chaotique.

Un système chaotique est caractérisé par :

- Sa sensibilité aux conditions initiales.
- Son aspect aléatoire.
- Son attracteur étrange.
- Sa dimension fractale.
- Spectre de puissance et fonction d'auto-corrélation.
- Son exposant de Lyapunov.

I.7.1. Sensibilité aux conditions initiales :

L'évolution d'un système dynamique chaotique est imprédictible en ce sens qu'elle que soit leurs proximité initiale. Ainsi, deux trajectoires de phases initialement voisines s'écartent toujours l'une de l'autre, et ceci quelle que soit leurs proximité initiales. Il est en particulier claire que la moindre erreur ou simple imprécision sur la condition initiale interdit de décider à tout temps quelle sera la trajectoire effectivement suivie et, en conséquence, de faire une prédiction sur le devenir à long terme du système.

Illustrons ce phénomène de sensibilité aux conditions initiales par une simulation numérique, on affecte à un système chaotique deux conditions initiales très proches. Dans un premier temps, les deux systèmes évoluent de la même manière ; mais, très vite, leurs comportement devient différent [8].

Illustration :

Pour le cas continu :

Lors de la simulation sous MATLAB, nous avons choisis le système donné par (I-14) avec $a=10$; $r=28$; $b=8/3$ et pour des conditions initiales différentes, soit pour :

$(x_0, y_0, z_0) = (10, 10, 20)$ et pour $(x_1, y_1, z_1) = (10.01, 10, 20)$.

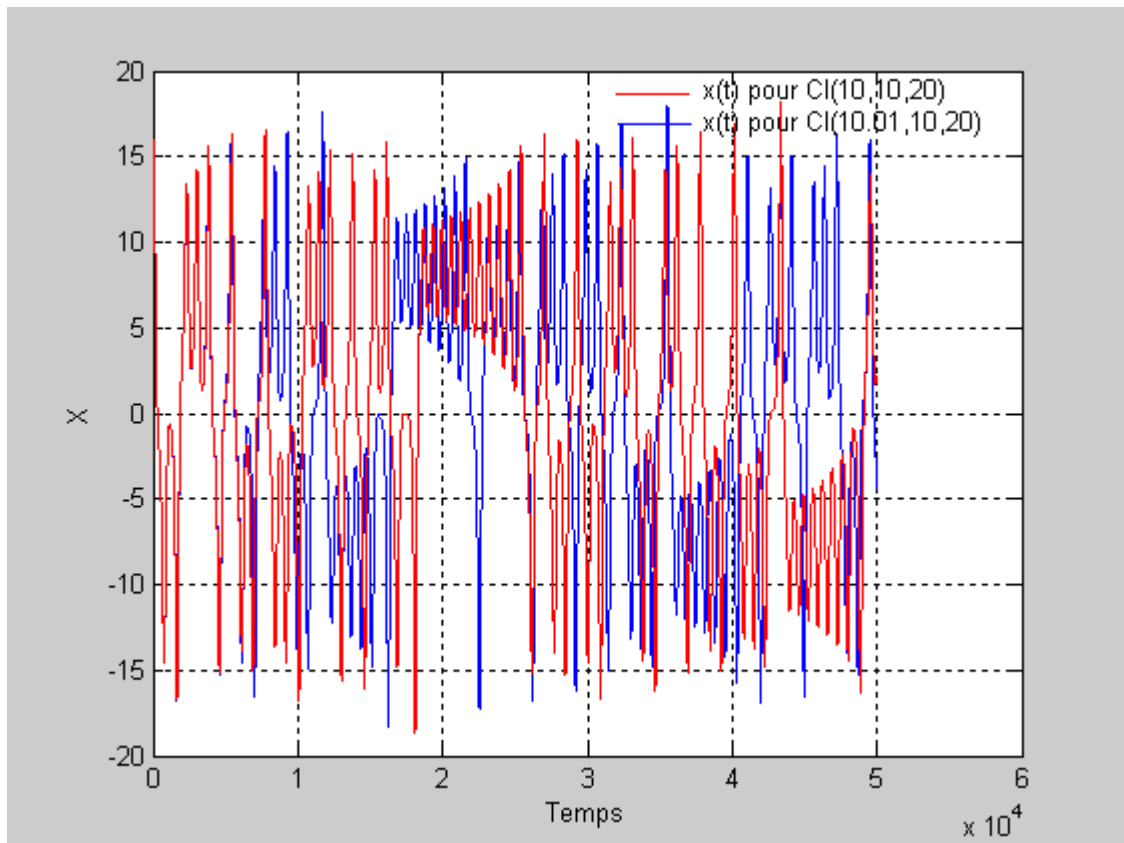


Figure I-2: Illustration de la propriété de la sensibilité aux conditions initiales du signal x du système (I-14).

I.7.2. Aspect aléatoire :

Cependant, une autre caractéristique des systèmes chaotiques peut être observée sur la courbe précédente. En effet, un système chaotique évolue d'une manière qui semble aléatoire.

La courbe suivante permet de comparer une évolution simple, périodique et donc prédictible d'un système classique avec l'évolution plus complexe, non périodique et non prédictible d'un système chaotique.

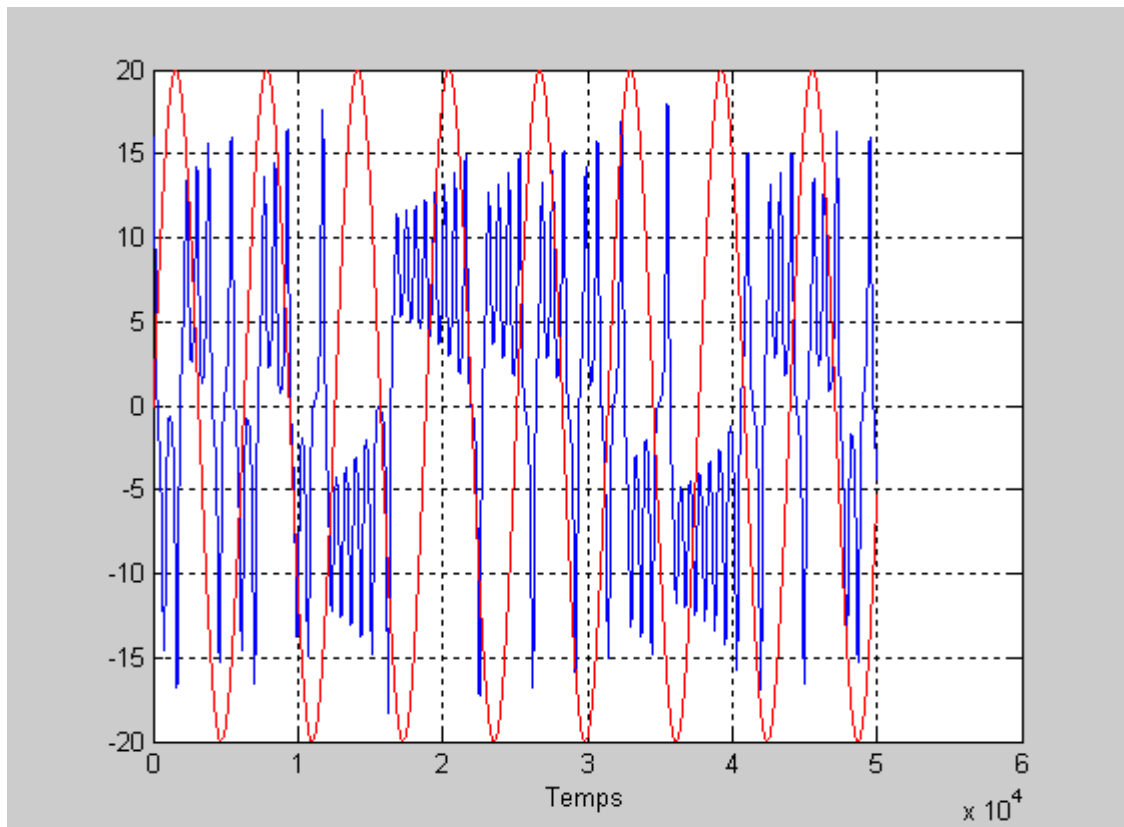


Figure I-3 : Evolution dans le temps du signal de la variable x du système (I-14), comparé à une Sinusoïde.

Notons que les systèmes chaotiques obéissent tout de mêmes aux lois de la physique. Si on se place dans l'approximation de la physique classique, on peut affirmer que le système est totalement déterministe.

Il ne faut donc pas se laisser abuser par le caractère qui semble aléatoire qui ne dénote qu'une complexité du système.

I.7.3. Attracteur étrange [9] :

Un attracteur est la convergence de la trajectoire d'un système dynamique quelconque, lorsqu'on se place dans l'espace des phases. L'attracteur le plus simple est un point, c'est l'attracteur d'un système qui évolue à taux constant, d'autres attracteurs peuvent inclure des cycles qui se répètent au cours du temps.

Dans le premier cas, le mouvement atteint un état stationnaire ; dans le deuxième cas, le mouvement se reproduit continument.

Dans le cas d'un système chaotique, la trajectoire converge vers une région particulière de l'espace appelée attracteur étrange qui est une signature du chaos, c'est ce qui différencie un signal chaotique d'un signal aléatoire, en effet si le mouvement est aléatoire les points de la trajectoire remplissent l'espace de phase de manière aléatoire.

L'étude des attracteurs étranges aboutit à la conclusion, qu'un système peut être régi par des équations déterministes relativement simples, et évoluer de manière telle qu'il ne puisse en pratique être distingué d'un système forcé aléatoire et imprévisible.

Concrètement, si l'on mesure l'état d'un système chaotique à un instant donné, on sait que plus tard, au fil de la trajectoire ; il va se retrouver quelque part sur cet attracteur ; mais, on ne peut pas prédire exactement où, l'attracteur est pourtant toujours le même. Il dépend des caractéristiques physiques du système, s'il ne change pas, pourquoi l'évolution des trajectoires est-elle imprédictible ? La réponse est de nature géométrique : la structure géométrique est infiniment détaillée ; c'est une fractale ou encore une figure auto similaire. On peut la dessiner mais jamais avec tous les détails.

Parmi les attracteurs étranges les plus connus, on trouve l'attracteur de Lorenz.

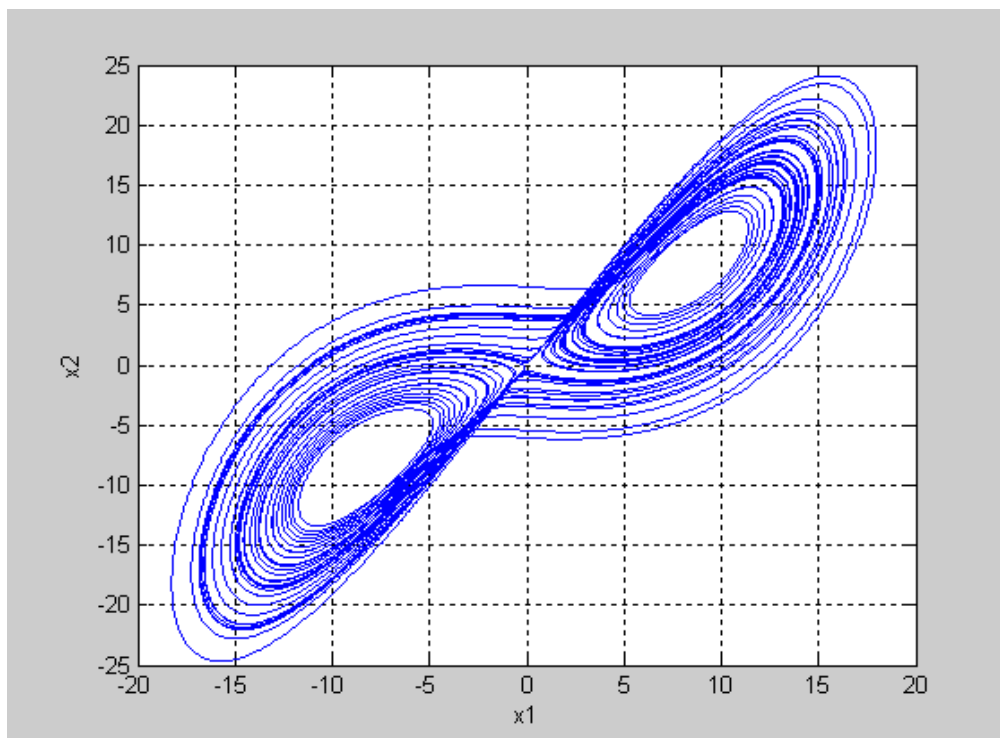


Figure I-4: Attracteur de Lorenz.

I.7.4. Dimension fractale de l'attracteur étrange :

La dimension d'un espace Euclidien correspond au nombre minimum de coordonnées nécessaires, pour spécifier de manière unique la position d'un point ou encore la dimension d'un système dynamique, qui correspond au nombre de variables nécessaires à la présentation de son état.

En géométrie classique, un point est défini par 3 coordonnées que l'on mesure dans un repère d'axes, c'est l'espace euclidien à 3 dimensions, le chaos déterministe introduit une 4^{ème} dimension, la dimension fractale.

Au XX^e siècle, bientôt Mandelbrot remarque qu'un point n'est pas toujours dans un espace à 3 dimensions, il peut se situer dans un espace à 3.3897 dimensions par exemple, c'est la dimension fractale, il existe de nombreuses façons de définir la dimension d'un attracteur, de façon générique, ces dimensions sont appelées dimensions fractales.

Une dimension fractale d'un attracteur n'est pas nécessairement entière, on peut citer parmi les plus connues, la dimension de Hausdorff-Besicovitch, la dimension de corrélation, la dimension d'information, ou encore la dimension de Lyapunov.

La dimension fractale de l'attracteur selon Hausdorff-Besicovitch se présente comme suit :

Soit un ensemble de points dans l'espace des phases à n dimensions, cherchons à recouvrir cet ensemble par des hyper cubes de côté ϵ , soit le nombre minimal de cubes, $N(\epsilon)$ nécessaire à cette opération qui varie comme :

$$N(\epsilon) = \epsilon^{-D} \quad (I-16)$$

D étant la dimension fractale, elle est donnée par :

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)} \quad (I-17)$$

Quand l'arrête ϵ des hyper cubes tends vers 0, autrement dit pour ϵ petit, le nombre minimal de cubes $N(\epsilon)$ nécessaires pour recouvrir l'ensemble de points varie avec ϵ comme ϵ^{-D} .

Dans le cas où l'ensemble se réduit à un point unique alors $N(\epsilon)=1$ donc :

$D=0$ est la dimension de Hausdorff du point. Par exemple, si nous appliquons cette formule à l'attracteur de Lorenz, nous trouvons que $D=2.06$.

1.7.5. Spectre de puissance et fonction d'auto-corrélation :

Parmi les méthodes d'analyse des signaux temporels, la transformée de Fourier est la plus fréquemment utilisée. Elle permet d'identifier et de caractériser les régimes chaotiques. On définit ainsi le spectre de puissance d'un signal $x(t)$ comme le carré de son amplitude de Fourier par unité de temps. L'allure de ce spectre renseigne sur le type de fonctionnement du système étudié.

Le cas le plus simple est celui d'un régime périodique dont le spectre de puissance est formé d'une raie de fréquence f et un ensemble de raies appelés des harmoniques de fréquences $2f, 3f$, etc.

En régime chaotique, le spectre de puissance de l'une des variables du système dynamique comporte une partie continue, traduisant une évolution désordonnée. Malheureusement, ce type de spectre est difficilement différenciable de celui d'un bruit blanc. Cette méthode n'est donc pas suffisante pour identifier un régime chaotique.

Pour estimer ce taux de désordre, il est utile d'introduire la fonction d'auto-corrélation.

$$c(\tau) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)x(t + \tau) dt \quad (1-18)$$

Cette fonction mesure la ressemblance de la variable x , à l'instant t , avec sa valeur à l'instant $t + \tau$. Elle introduit ainsi le taux de similitude du signal avec lui-même quand le temps s'écoule.

Lorsque le régime est chaotique, $c(\tau)$ tend vers zéro quand τ augmente. La fonction d'auto-corrélation temporelle a donc une portée finie ; la similitude temporelle du signal avec lui-même diminue et disparaît même totalement à des instants suffisamment éloignés [7].

I.7.6.Exposant de Lyapunov :

Cette méthode consiste à mesurer la sensibilité aux conditions initiales d'une série temporelle. Par définition, un exposant de Lyapunov est le taux exponentiel moyen de divergence ou de convergence de trajectoires voisines de l'espace des phases. Il mesure le taux local d'expansion de l'espace dans lequel l'expansion est maximale, c'est-à-dire en général vers l'attracteur.

Un attracteur étrange est un attracteur dont l'un au moins de ses exposants de Lyapunov est positif. Autrement dit, le plus grand exposant est positif pour le système chaotique et négatif pour les autres systèmes.

Présentation de la méthode :

On considère un système dynamique non linéaire donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}=f(x, t, u). \\ \dot{y}=g(y, t, v). \end{cases} \quad (I-19)$$

Avec (f, g) : champ de vecteur, $(x, y) \in u \subseteq \mathbb{R}^n$ vecteurs d'état, $(u, v) \in v \subset \mathbb{R}^p$ vecteurs des paramètres et t est la variable temporelle. Soit x_0 et y_0 deux conditions initiales pour ce système.

On note x et y les fonctions du temps telles que $x(t)$ et $y(t)$ représentent respectivement l'état du système à l'instant t est telle que $x(0)=x_0$ et $y(0)=y_0$.

On note d la distance Euclidienne définit comme suit :

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (I-20)$$

$$(x, y) \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

S'il existe à un instant t , une constante réelle λ , et une constante a tel que, Si $I = [0, t]$

$$\forall t \in I \quad d(x(t), y(t)) \approx e^{\lambda t + a} \quad (I-21)$$

Alors λ est appelé exposant de Lyapunov.

Illustration :

Pour les mêmes valeurs de a , r et b du système (I-14) nous obtenons la figure suivante.

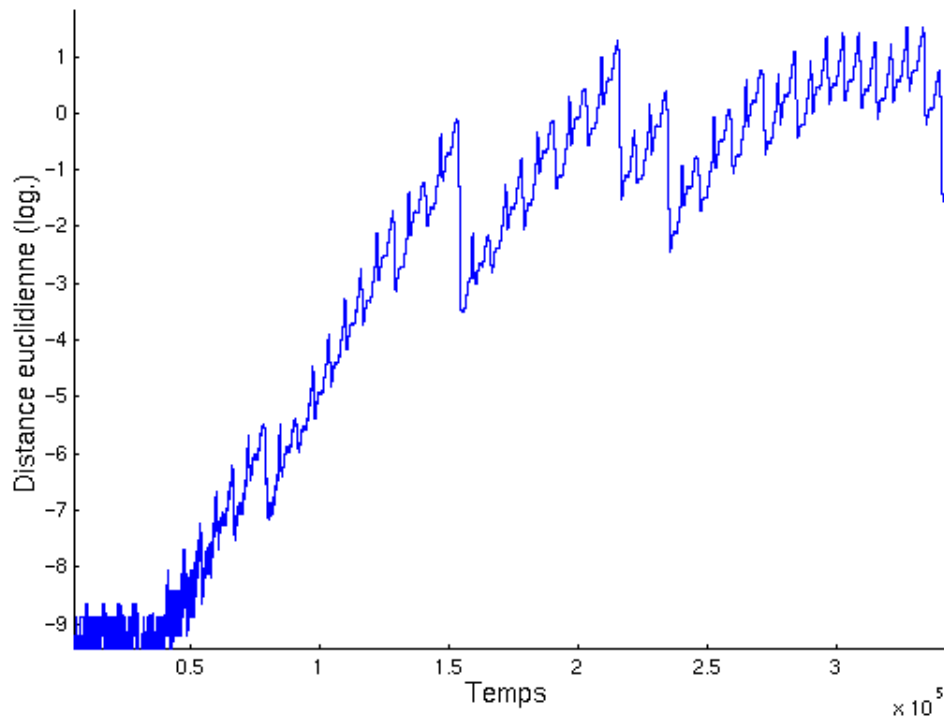


Figure I-7: Détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Lorenz.

Si le spectre de Lyapunov reste une des plus robustes méthodes pour évaluer le comportement dynamique d'un système quelconque, le spectre de fréquence peut donner aussi les indices sur le régime permanent.

Les divers critères permettant de caractériser la dynamique d'un système quelconque sont regroupés dans le tableau suivant :

Régime permanent	Attracteur	Spectre	Exposant Lyapunov
Point d'équilibre	point	Composante continue	$0 > \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$
Périodique	Courbe fermée	Fréquence Fondamentale + harmonique entières	$\lambda_1 = 0$ $0 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$
Quasi-périodique	tore	Composantes Fréquentielles en Rapport irrationnel	$\lambda_1 = \dots = \lambda_i = 0$ $0 > \lambda_{i+1} \geq \dots \geq \lambda_n$
Chaotique	fractale	Spectre large	$\lambda_1 > 0$ $0 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$
Hyper Chaotique	fractale	Spectre large	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ $0 > \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$

Tableau I-1: Classification des régimes permanents en fonction du spectre Lyapunov.

I.8. Conclusion :

En faisant le tour de ce premier chapitre, commençant par l'étude des systèmes non linéaire, passant aux notions de bases et les différentes définitions concernant le chaos déterministe, ainsi que ses caractéristiques, nous pouvons dire que les systèmes chaotiques sont d'une complexité évidente mais, leurs études ainsi que leurs analyses ne sont pas impossible. Nous voudrions aussi souligner le domaine vaste d'application de ces systèmes qui nous pousse jour après jour à aller de l'avant et à pousser un peu plus notre sujet.

Après avoir terminé l'étude des systèmes chaotiques, le chapitre suivant est consacré à la synchronisation de ces systèmes ainsi qu'à leurs contrôles.

II.1. Introduction :

L'emploi d'un signal chaotique dans le domaine des télécommunications pose directement le problème de synchronisation du récepteur, dans le but de dupliquer le signal chaotique employé à l'émetteur.

A première vue, la synchronisation chaotique paraît difficile à réaliser à la différence de la synchronisation classique employée dans les systèmes de télécommunication, où l'on cherche à reproduire juste une période d'oscillation, la synchronisation chaotique présente plus de contraintes [11].

Un signal chaotique se présente sous la forme d'un bruit blanc que ce soit dans le domaine temporel ou le domaine fréquentiel. Ce qui différencie un signal chaotique d'un bruit aléatoire est la notion de déterminisme. En effet, le bruit ne peut être décrit que comme un processus aléatoire alors qu'un système chaotique est représentable par des équations différentielles, ce qui explique qu'il sera possible de synchroniser deux systèmes chaotiques, Pecora et Carroll ont été les premiers en 1989 à synchroniser deux systèmes chaotiques, connu sous le nom de synchronisation identique, développée sur la base de circuits chaotiques couplés, avec l'un maître et l'autre esclave; ces travaux ont ouvert la voie à des applications du chaos aux télécommunications[12].

Ce chapitre se décompose en deux sections. La première section présente le concept de synchronisation du chaos développé par Pecora et Carroll. La seconde section expose les principales lois de contrôle de synchronisation utilisées juste après la méthode de Pecora et Carroll. Parmi ces méthodes, nous allons étudier : la loi de contrôle par retour d'état.

II.2. Définition :

La synchronisation est un phénomène qui caractérise de nombreux systèmes non linéaires. La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système. Rappelons qu'un système chaotique est un système déterministe, extrêmement sensible aux conditions initiales. Par conséquent, typiquement, deux trajectoires issues de deux conditions initiales arbitrairement proches l'une

de l'autre divergent exponentiellement avec le temps. Il s'ensuit que deux systèmes chaotiques ne peuvent se synchroniser (sauf si les conditions initiales sont exactement les mêmes, ce qui est physiquement et numériquement impossible) [13]. A première vue, parler de synchronisation pour les systèmes chaotiques semble donc être surprenant, et on peut penser que le chaos est incontrôlable. Cependant, des recherches récentes ont montré que, l'on pouvait synchroniser deux systèmes chaotiques en les couplant. Ce résultat s'applique dans plusieurs domaines, par exemple pour augmenter la puissance des lasers, synchroniser les sorties d'un circuit électrique, et coder les messages afin de sécuriser les communications [14].

II.3. Positionnement du problème [15] :

La figure II-1 présente l'architecture générale d'un système de communication basé sur le chaos. Un signal $m(t)$ contenant l'information à transmettre est injecté à l'entrée d'un émetteur présentant un comportement chaotique. Celui-ci génère un signal $y(t)$ chaotique qui est transmis au récepteur.

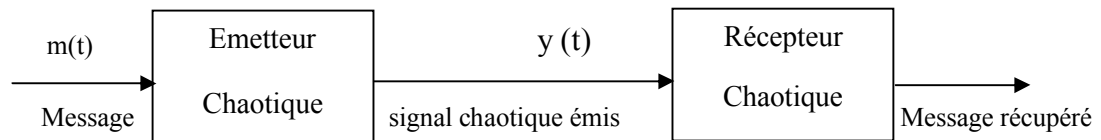


Figure II-1 : Architecture d'un système de communication chaotique.

Le récepteur est piloté par le signal $y(t)$ et réalise l'opération inverse de celle effectuée à l'émission afin de récupérer le message transmis. L'émetteur, pour transmettre le message, on mélange celui-ci avec un signal chaotique. De ce fait, il apparaît difficile pour le récepteur de récupérer l'information contenue dans le signal chaotique. Le récepteur est en général similaire à l'émetteur, et peut présenter un comportement chaotique lorsqu'il n'est pas piloté par le signal $y(t)$. Pour pouvoir extraire l'information du signal reçu, il est nécessaire de synchroniser les deux systèmes.

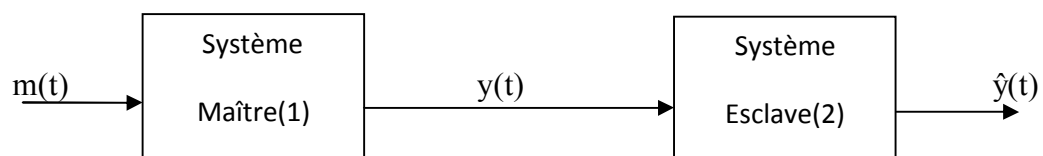


Figure II-2 : Système maître-esclave pour réaliser la synchronisation.

La notion de synchronisation est en général liée à un mouvement périodique. Deux signaux sont synchronisés si leurs périodes ainsi que leurs phases sont identiques. Cette définition n'est plus valable dans le cas des signaux chaotiques. Deux signaux chaotiques seront dits synchronisés s'ils sont asymptotiquement identiques lorsque t tend vers l'infini.

Considérons la figure II-2 dans laquelle, le système (2), dit système esclave, sera synchronisé avec le système (1) (système maître) si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{y}(t) - y(t)| = 0 \quad (\text{II-1})$$

Et ce, quel que soit l'état initial des deux systèmes.

A priori, il paraît impossible d'arriver à synchroniser deux exemplaires d'un même système chaotique. D'une part parce que dans les systèmes réels, il est extrêmement difficile de construire deux circuits à l'identique à cause de la tolérance sur les composants ainsi que du bruit présent dans tout système électronique.

D'autre part, en supposant que l'on dispose de deux circuits identiques, il se pose le problème de la sensibilité aux conditions initiales qui se traduit par une instabilité au sens de Lyapunov. Une infime différence entre les conditions initiales des deux circuits conduira à des signaux totalement différents. Cela signifie que reproduire ces conditions initiales dans un système réel est impossible.

Cependant, dans le cas de la figure II-2, c'est le signal pilote $y(t)$ qui force le système esclave à suivre le comportement du système maître ce qui permet, à terme, une synchronisation entre les systèmes (1) et (2). Nous allons maintenant présenter une méthode basée sur la notion de « maître-esclave » qui permet de réaliser cette synchronisation.

II.4. Concept de synchronisation de Pecora et Carroll :

Pour illustrer la méthode de synchronisation par couplage entre deux systèmes chaotiques, on a choisi de présenter la synchronisation identique proposée par Pecora et Carroll. Celle-ci à l'avantage de représenter une solution simple et performante de synchronisation, dont l'objectif est que l'esclave reproduise le plus fidèlement possible l'état du maître, après un régime transitoire [11].

Considérons un système dynamique autonome, en temps continu, de dimension n , représenté par la relation suivante :

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) \quad (\text{II-2})$$

Où $x = [x_1, \dots, x_n]^T$.

Par la suite, on divise le système initial en deux sous système $\{S_1, S_2\}$:

$$\begin{cases} S_1 : \dot{x}^{\{1\}} = F^{\{1\}}(x^{\{1\}}, x^{\{2\}}) \\ S_2 : \dot{x}^{\{2\}} = F^{\{2\}}(x^{\{1\}}, x^{\{2\}}) \end{cases} \quad (\text{II-3})$$

Avec les états et les dynamiques définis conformément aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} x &= [x^{\{1\}}, x^{\{2\}}]^T \\ x^{\{1\}} &= [x_1, \dots, x_m]^T \\ x^{\{2\}} &= [x_{m+1}, \dots, x_n]^T \end{aligned} \quad (\text{II-4})$$

$$F(x) = [F^{\{1\}}(x); F^{\{2\}}(x)] \quad (\text{II-5})$$

Bien sûr, cette opération peut être réalisée de manière arbitraire avec une réorganisation des variables d'état dans un ordre quelconque. On considère maintenant un deuxième sous système S'_2 caractérisé par une dynamique identique $F^{\{2\}}$, et un vecteur d'état $\hat{x}^{\{2\}}$:

$$S'_2 : \dot{\hat{x}}^{\{2\}} = F^{\{2\}}(x^{\{1\}}, \hat{x}^{\{2\}}) \quad (\text{II-6})$$

On peut dire que ce sous système réplique S'_2 est un candidat susceptible de se synchroniser avec la dynamique complète initiale. Pecora et Carroll ont démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que cette proposition soit vraie est que le sous système

S'_2 soit stable ; hypothèse qui est équivalente avec la condition que l'ensemble des coefficients Lyapunov du sous système S'_2 soient négatifs. Une synchronisation parfaite peut alors être accomplie ; les trajectoires étant asymptotiquement convergentes :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \hat{x}^{\{2\}}(t) - x(t)^{\{2\}} \right| = 0 \quad (\text{II-7})$$

Dans la figure II-3, on représente graphiquement le processus de décomposition en sous systèmes, cette fois avec la notation $y = x^{\{1\}} + n$ de la variable d'état qui commande le système S'_2 , où n est un éventuel bruit additif associé au canal de communication [15].

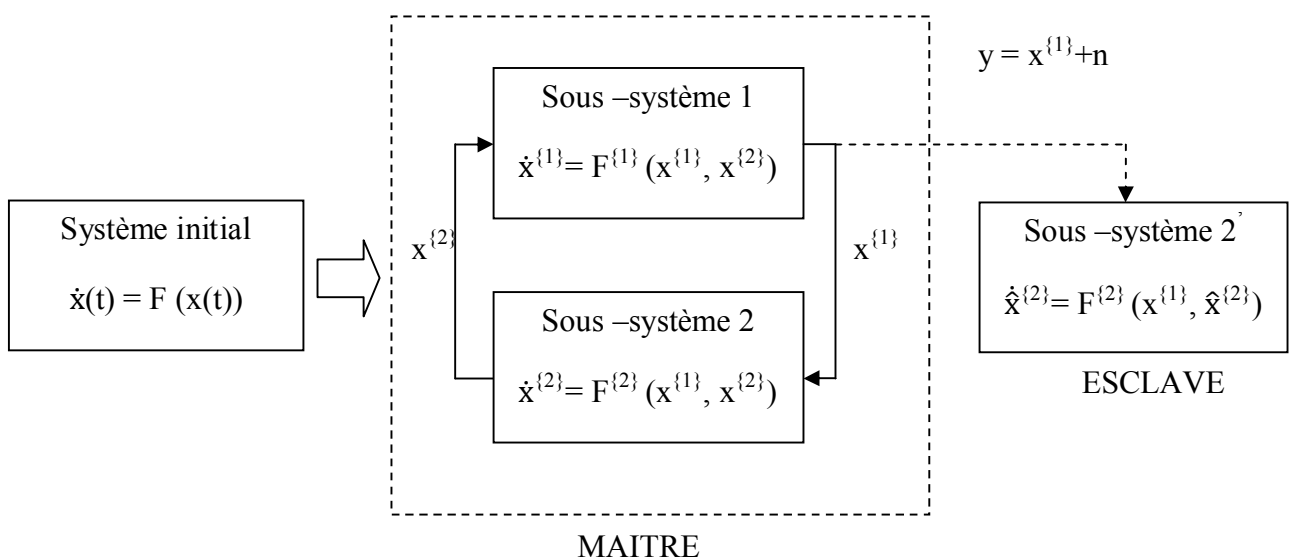


Figure II-3 : Synchronisation Maître-Esclave en utilisant la décomposition en sous systèmes.

On dispose dans la littérature de différents schémas de communications chaotiques nécessitant la synchronisation. Il existe de nombreuses techniques de cryptage/décryptage utilisant comme étape centrale la synchronisation du chaos. Parmi ces techniques, nous citons les quatre principales suivantes [16] :

II.5. Quelques techniques de cryptage /décryptage :

II.5.1. Masquage par addition [13] :

Cette technique développée en 1993 est illustrée par la figure II-4. Elle consiste en deux systèmes chaotiques identiques, l'émetteur et le récepteur. Le signal chaotique $c(t)$ est l'une des variables d'état du système dans l'émetteur. Le message d'information (le signal utile qui doit être crypté) $m(t)$, qui est typiquement très faible devant $c(t)$, est ajouté au signal $c(t)$ et donne le signal transmis $s(t)$. Comme $c(t)$ est très complexe et $m(t)$ est beaucoup plus petit que $c(t)$, alors il est difficile de séparer $m(t)$ du signal $s(t)$ sans connaître $c(t)$.

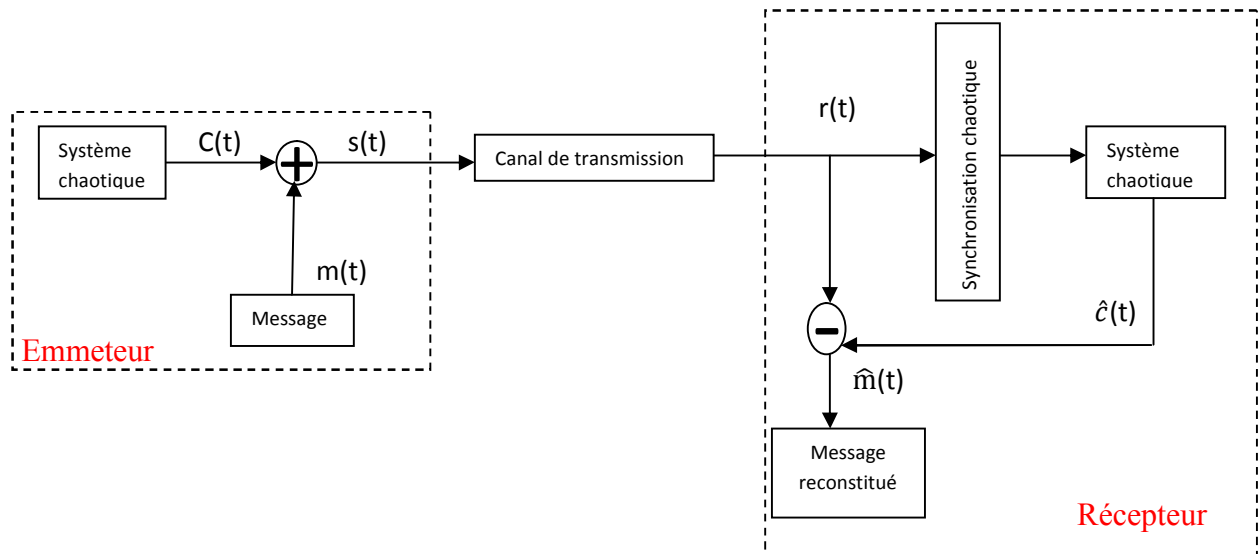


Figure II-4: Schéma de communication par addition.

II.5.2. Masquage par décalage [13] :

La méthode de décalage illustrée par la figure II-5 a été réservée à la transmission de messages numériques. Dans ce schéma de communication, le message d'information est utilisé pour commuter le signal transmis entre deux attracteurs chaotiques statistiquement similaires, qui sont utilisés respectivement pour coder le bit 0 et le bit 1 du message d'information numérique. Ces deux attracteurs sont générés par deux systèmes chaotiques de même structure et de paramètres différents. A la réception, le signal reçu est utilisé pour produire un système chaotique identique à ceux de l'émetteur. Le message d'information est restitué par application d'un filtre passe-bas et ensuite un seuillage de l'erreur de synchronisation $e(t)$.

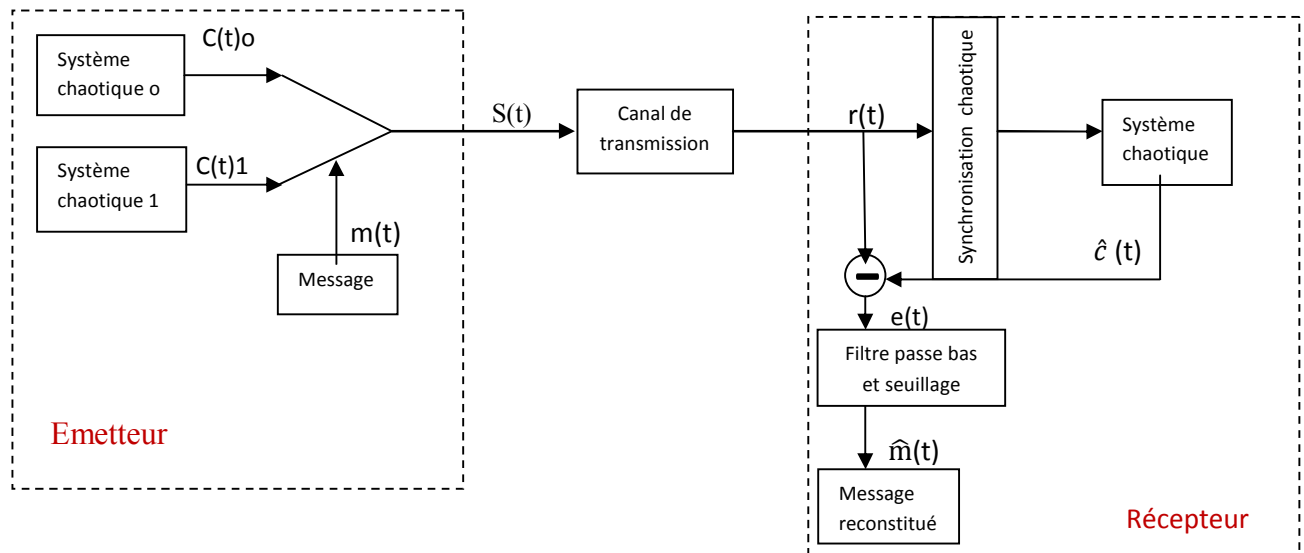


Figure II-5 : Schéma de communication par décalage.

II.5.3. Les cryptosystèmes chaotiques [13] :

Cette génération de systèmes de communication représentée à la figure II-6 a été développée en 1997. Cette méthode combine la technique de cryptographie classique et la synchronisation du chaos afin d'améliorer le degré de sécurité à un niveau beaucoup plus élevé que les précédentes.

Dans un cryptosystème chaotique, le message $m(t)$ est crypté par une règle de cryptage, $e(\cdot)$, avec un signal clé, $k(t)$, qui est généré par le système chaotique de l'émetteur. Le signal masqué, $y(t)$, est ensuite injecté dans le système chaotique afin de changer sa dynamique et la rendre plus complexe. Une autre variable d'état du système chaotique, $s(t)$, est transmise à travers un canal de transmission publique accessible par l'intrus. Puisque l'intrus n'a pas d'accès à la clé chaotique, $k(t)$, alors il est très difficile de déduire $m(t)$ de $s(t)$. Au niveau du récepteur, le signal reçu $r(t)=s(t)+n(t)$, où $n(t)$ est le bruit du canal, est utilisé pour synchroniser les deux systèmes chaotiques de l'émetteur et du récepteur. Une fois que la synchronisation est achevée, les signaux $k(t)$ et $y(t)$ seront reconstruits par $\hat{k}(t)$ et $\hat{y}(t)$ respectivement. En utilisant la règle de décryptage, $d(\cdot)$, et les signaux reconstruits $\hat{k}(t)$ et $\hat{y}(t)$, alors le message d'information peut être restitué par $\hat{m}(t)$.

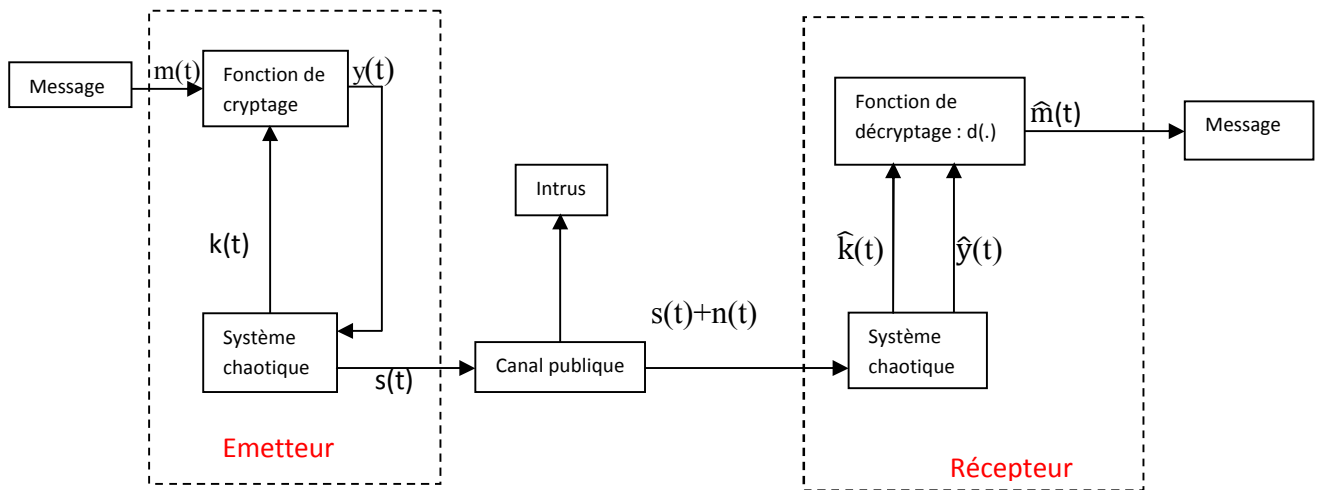


Figure II-6: Schéma de communication en utilisant les cryptosystèmes chaotiques.

II.5.4. Système de communication avec deux lignes de transmission [17] :

Pour cette technique, les deux étapes, synchronisation et cryptage, sont indépendantes. En effet, deux lignes de transmission sont utilisées. La première sert à synchroniser l'émetteur et le récepteur, tandis que la deuxième est utilisée pour le cryptage.

En gros, ce nouveau schéma de communication est composé de trois étapes :

- Cryptage.
- Synchronisation.
- Décryptage.

Dans la première étape, une fonction fortement non linéaire Φ est utilisée pour crypter simultanément le message confidentiel $S(t)$ et l'état chaotique $x(t)$. Le signal crypté $S_c(t)$ est ensuite envoyé à travers un canal de transmission vers le récepteur. Dans la deuxième étape, un signal chaotique $y=h(x)$ est transmis via un deuxième canal de transmission séparé du premier. Ce signal y est utilisé seulement pour la synchronisation, et ne contient aucune information du message $S(t)$. Dans la troisième et la dernière étape, l'estimé $z(t)$ de l'état $x(t)$, généré par le récepteur chaotique (construit par le processus de la synchronisation) et la fonction de décodage Ψ sont utilisés pour reproduire l'estimé approximatif $S_d(t)$ de message confidentiel $S(t)$. Une description systématique de cette procédure est illustrée par la Figure II-7.

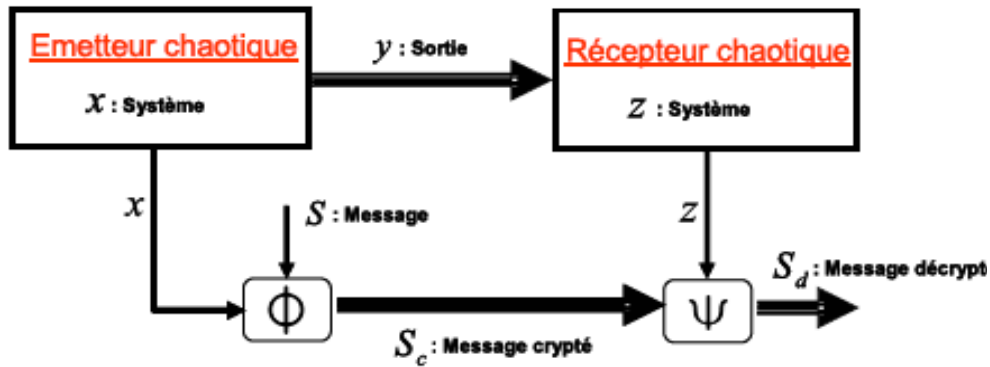


Figure II-7 : Schéma de communication à deux lignes de transmission.

Après la synchronisation de notre système, c'est l'état de sortie obtenu n'est pas celui qu'on cherche ou s'il ne résiste pas aux perturbations, en d'autres termes si ce n'est pas un point de fonctionnement stable du système étudié, il faut apporter en permanence des corrections de trajectoires. Le régime permanent souhaité est souvent un état périodique instable particulier comme il en existe beaucoup dans les systèmes non linéaires potentiellement chaotiques, pour cela nous avons choisi une méthode de contrôle de chaos très simple qui est le contrôle par retour d'état.

II.6. But du contrôle :

Si le contrôle peut revêtir plusieurs formes, il vise toujours à influencer l'évolution du système. On agit donc sur le système dans le but de l'amener à évoluer d'une manière ou d'une autre.

Il existe plusieurs formes de contrôle :

Lors du contrôle d'un système chaotique, on peut agir de diverses manières, selon le but recherché.

Nous pouvons souhaiter qu'un système chaotique reste dans un domaine chaotique. Nous pouvons le forcer à rester chaotique, tout en procédant à des opérations de contrôle convergeant vers ce but. De même, nous pouvons amener un système, à l'origine non chaotique, vers un domaine chaotique. Réciproquement, nous pouvons souhaiter qu'un système chaotique évolue de façon à perdre son caractère chaotique et devenir par exemple périodique.

Quelque soit la méthode choisie, l'idée de contrôle du chaos revient généralement à perturber le système dynamique pour le stabiliser sur une orbite périodique instable noyée dans un attracteur chaotique. Ce qui diffère d'une méthode à l'autre c'est le mode d'élaboration de la perturbation [18].

II.7. Théorèmes utiles :

II.7.1. Commandabilité [19]:

Le concept de commandabilité est très important dans la théorie du contrôle moderne. Ce concept a été introduit par Kalman.

Si à l'instant t_0 le système se trouve à l'état initial $x(t_0) = x_0$, nous disons que cet état est commandable si nous pouvons trouver un temps t_1 fini supérieur à t_0 et une commande $u(t)$ dans l'intervalle $[t_0, t_1]$ qui transfère l'état du système de x_0 à $x(t_1) = x_1$. Nous disons aussi que le système est complètement commandable s'il est commandable quel que soit l'état initial x_0 et l'instant initial t_0 .

Pour les systèmes linéaires et invariants dans le temps, une condition nécessaire et suffisante de commandabilité a été donnée par Kalman et dépend uniquement de la paire (A, B) . Cette condition se résume à ce que la matrice de commandabilité suivante :

$$C = [B, \quad AB, \quad \dots, \quad A^{n-1}B] \quad (\text{II-8})$$

Soit de rang n . Le paramètre n représente la dimension du système.

II.7.2. Théorème de Cayley-Hamilton [19] :

Si la matrice A possède l'équation caractéristique suivante :

$$\Delta(\lambda) = \det (\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (\text{II-9})$$

Alors la matrice A satisfait la relation suivante :

$$\Delta(A) = \det (\lambda I - A) = A^n + A_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I \quad (\text{II-10})$$

II.8. Commande par retour d'état [20]:

La commande par retour d'état, est l'établissement d'une loi de commande capable de conférer au système les performances désirées, donc cette commande consiste principalement à utiliser les états du système pour construire le signal de commande $u(t)$. Grâce à cette commande, on peut résoudre trois principaux problèmes de base de la commande des systèmes à savoir :

- Modifier la dynamique du système.
- Imposer un régime permanent constant aux variables.
- Protéger le système contre les perturbations.

II.9. Notion de retour d'état [20]:

Le retour d'état est le moyen le plus classique d'envisager la commande d'un système modélisé par une représentation d'état. En pratique, la commande par retour d'état suppose que toutes les variables d'état sont accessibles. Cette hypothèse deviendrait évidemment très coûteuse du fait que plus le nombre de variables d'état est élevé, plus le nombre de capteurs nécessaires à leurs mesures augmente. Une alternative à cette contrainte de coût consiste à ne mesurer qu'un nombre réduit de variables d'état.

Pour un système linéaire invariant, dont la représentation d'état est :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases} \quad (\text{II-11})$$

Et sa structure en boucle ouverte est donnée par la figure suivante :

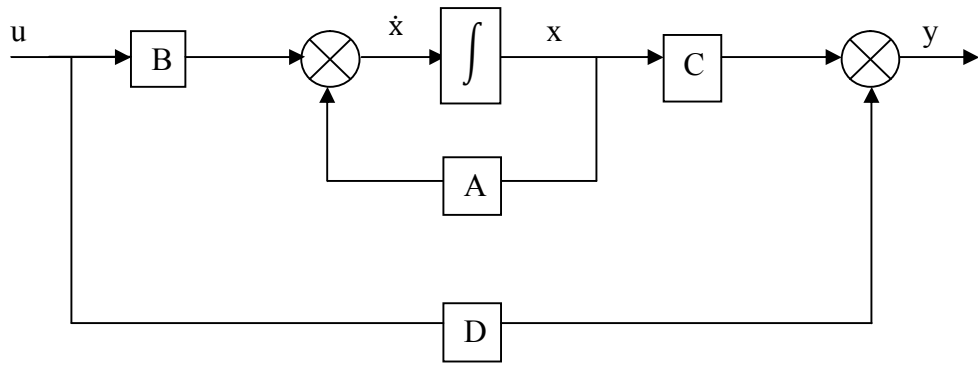


Figure II-8 : Retour d'état en boucle ouverte.

En désignant par $r(t)$ le signal de référence, la commande par retour d'état consiste à choisir la matrice de gain K tel que :

$$u(t) = -K x(t) + N r(t) \quad (\text{II-12})$$

De manière à placer tous les pôles du système en boucle fermée à des positions bien précises imposées par les spécifications du cahier des charges. La matrice N est donnée. Compte tenu de l'expression de la commande $u(t)$ et du modèle du système en boucle ouverte, celui en boucle fermée est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BK) x(t) + BNr(t) \\ y(t) = (C-DK) x(t) + DNr(t) \end{cases} \quad (\text{II-13})$$

Le schéma bloc correspondant est illustré dans la figure suivante :

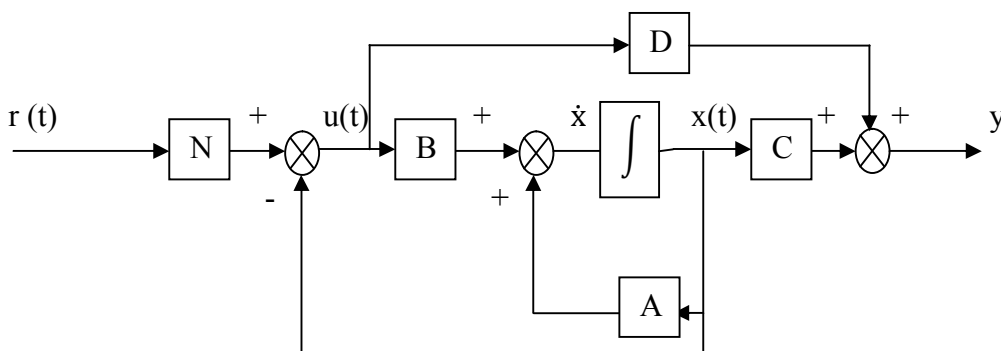


Figure II-9 : Retour d'état en boucle fermé.

En générale, la traduction Des spécifications en pôles n'est pas une chose facile et requiert beaucoup d'expérience de la part du concepteur.

En notant par. $S_i, i=1,2,..,n$; les pôles désirés, le problèmes de la conception de la commande par retour d'état revient alors à la résolution de l'équation algébrique suivante :

$$\begin{aligned}\det (sI - A+BK) &= \prod_{i=1}^n (s + s_i) \\ &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0\end{aligned}\tag{II-14}$$

Pour résoudre ce problème, nous allons considérer le cas scalaire (une grandeur d'entrée une grandeur de sortie) et le cas multi variable (plusieurs grandeurs d'entrées plusieurs grandeurs de sorties).

II.9.1. Système mono-entrée mono-sortie :

Par système mono-entrée mono sortie, on entend tout système qui a une seule grandeur d'entrée ($m=1$) et une seule grandeur de sortie ($p=1$). La dimension n du système peut être quelconque ce qui laisse entendre que $x \in \mathbb{R}^n$. La résolution algébrique de l'équation précédente (II-14) peut être utilisée pour une dimension n réduite ($n \leq 3$). Au-delà de la dimension 4, les calculs deviennent lourds et une autre solution doit être envisagée. Celle-ci consiste en la formule d'Ackermann.

Si $\Delta(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0I$, représente l'équation caractéristique désirée, alors d'après le théorème de Cayley-Hamilton, cette équation est aussi vérifiée par la matrice A , tel que :

$$\Delta(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0I\tag{II-15}$$

La formule d'Ackermann qui permet la détermination de la matrice K dans le cas scalaire est donnée par :

$$K = [0, 0, \dots, 0, 1] C^{-1} \Delta(A) \quad (\text{II-16})$$

Où C la matrice de commandabilité.

La présence de l'inverse de la matrice de la commandabilité s'explique par le fait que le système doit être complètement commandable. Il en résulte alors que la commandabilité du système est une condition nécessaire et suffisante à l'existence de la matrice K.

D'un autre côté, la présence C^{-1} est aussi un inconvénient à la résolution de la formule d'Ackermann. Pour contourner cette difficulté, on procède comme suit :

- trouver la matrice $d^T = (d_1, \dots, d_n)$ en utilisant l'équation suivante :

$$d^T C = [0, \dots, 0, 0, 1] \quad (\text{II-17})$$

- établir la matrice de retour d'état en utilisant la relation suivante :

$$K = d^T \Delta(A) \quad (\text{II-18})$$

Exemple : Placement de pôles d'un système du deuxième ordre

Dans cet exemple, nous cherchons à montrer au lecteur comment procéder lors de la conception de la commande par retour d'état. Pour cela, considérons le système représenté par le modèle d'état suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = [1 \ 0] x(t) \end{cases}$$

On désire avoir des pôles en boucle fermée égale à :

$$s_1 = -1.5 - j1.5$$

$$s_2 = -1.5 + j1.5$$

Le but c'est de trouver la matrice de gain qui répond à cette exigence, pour cela vérifions d'abord la commandabilité du système :

Etudier la commandabilité de ce système revient à déterminer le rang de la matrice C. La dimension de la matrice A étant égale à 2, donc pour que le système considéré soit commandable, il faut et il suffit que le rang de C soit égale à 2. La matrice de commandabilité C est donnée par :

$$C = [B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Le rang de cette matrice est bien 2. Nous concluons donc que le système considéré est bien commandable.

L'équation caractéristique désirée correspondante est :

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= (s + 1.5 + j1.5)(s + 1.5 - j1.5) \\ &= s^2 + 3s + 4.5 \end{aligned}$$

Avec $\Delta(A)$ donné par :

$$\begin{aligned} \Delta(A) &= A^2 + 3A + 4.5I \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4.5 & 0 \\ 0 & 4.5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2.5 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice de Commandabilité c est donnée par :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

La résolution de $(d_1, d_2) C = [0 \ 1]$ nous donne : $d_1=1$ et $d_2=0$. La matrice de retour d'état est alors donnée par :

$$K = d^T \Delta(A) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 4.5 \end{bmatrix} = [2.5 \ 0]$$

Ce qui donne $k_1=2.5$ et $k_2=0$.

II.9.2. Système multivariable :

Par système multi variable, on entend tout système qui a plusieurs grandeurs d'entrées ($m \neq 1$) et plusieurs grandeurs de sorties ($p \neq 1$). La dimension n du système peut être quelconque, ce qui laisse entendre que $x \in \mathbb{R}^n$. Nous sommes dans le cas multi variable et la détermination de la matrice de gain K ($m \times n$) est un problème mal posé du fait que l'on cherche à trouver ($m \times n$) gains pour n pôles spécifiés. Nous discutons, dans le cadre de ce paragraphe, d'une méthode qui consiste à ramener le problème multi variable (plusieurs grandeurs d'entrées plusieurs grandeurs de sorties) à un problème scalaire (une grandeur d'entrée une sortie).

Cette méthode consiste à poser :

$$K = q k^T = \begin{bmatrix} q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_m \end{bmatrix} [k_1, \dots, k_n] \quad (\text{II-19})$$

Où les éléments q_i , $i=1, \dots, m$ sont choisis de manière arbitraire alors que les éléments k_i , $i=1, \dots, n$ sont déterminés à partir des pôles spécifiés.

Dans ce cas, l'équation caractéristique du système en boucle fermée devient :

$$\det(sI - A + BqK^T) = 0 \quad (\text{II-20})$$

La formule d'Ackermann correspondante est alors donnée par :

$$K = [0, 0, \dots, 0, 1] C^{-1} \Delta(A) \quad (\text{II-21})$$

Avec :

$$C = [B q, Abq, \dots, A^{n-1} Bq] \quad (\text{II-22})$$

Cette matrice représente la matrice de commandabilité du système équivalent ayant une seule grandeur d'entrée une seule grandeur de sortie.

Exemple : placement de pôles dans le cas multivariable :

Pour montrer comment résoudre le problème du placement des pôles dans le cas d'un système à plusieurs grandeurs d'entrée plusieurs grandeurs de sortie, nous allons considérer un système de dimension 2 à deux grandeurs d'entrée et une seule grandeur de sortie. Le modèle d'état correspondant à ce système est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ 0] x(t) \end{cases}$$

Supposons que les spécifications désirées sont traduites par les pôles s_1, s_2 qui sont solution de l'équation caractéristique suivante :

$$\Delta(s) = s^2 + (s_1 + s_2)s + s_1 s_2$$

En appliquant le théorème de Cayley-Hamilton, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \Delta(A) &= \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + (s_1 + s_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + (s_1 s_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 + s_1 s_2 & -3 + s_1 + s_2 \\ 6 - 2s_1 - 2s_2 & 7 - 3s_1 - 3s_2 + s_1 s_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En choisissant:

$$K = qK^T = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} [k_1 \ k_2] = \begin{bmatrix} q_1 k_1 & q_2 \\ q_2 k_1 & q_2 k_2 \end{bmatrix}$$

Les éléments q_1 et q_2 doivent être choisis de manière à ce que le système soit commandable, c'est-à-dire :

$$C = [Bq \ ABq] \text{ soit de rang } 2$$

La matrice de commandabilité C est donnée par :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

La matrice C^T est donnée par :

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

L'ordre de C est obtenu en étudiant le produit CC^T dont la valeur est :

$$CC^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 14 \end{bmatrix}$$

Le déterminant de CC^T étant différent de zéro, alors il en résulte que le système est complètement commandable.

En ce qui concerne la commandabilité du système équivalent, on a :

$$C = [Bq \quad ABq] = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & -2q_1 - 3q_2 \end{bmatrix}$$

Le système équivalent est commandable dans le cas où $q_1 \neq 0$ et $q_2 \neq 0$.

En utilisant la formule d'Ackermann, on obtient :

$$K^T = [k_1 \quad k_2] = [0 \quad 1]C^{-1} \Delta(A)$$

$$K^T = A [0 \quad 1] \times \begin{bmatrix} -2q_1 - 3q_2 & -q_2 \\ -q_2 & q_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 + s_1 s_2 & -3 + s_1 + s_2 \\ 6 - 2s_1 - 2s_2 & s_1 - 3s_2 + s_1 s_2 \end{bmatrix}$$

$$K^T = A [-q_2 (-2 + s_1 s_2) + q_1 (6 - 2s_1 - 2s_2) - q_2 (-3s_1 + s_1 + s_2) + q_1 (7 - 3s_1 - 3s_2 + s_1 s_2)]$$

Avec :

$$A = \frac{1}{2q_1^2 + 3q_1 q_2 + q_2^2}$$

Ce qui donne:

$$k_1 = -\frac{1}{2q_1^2 + 3q_1 q_2 + q_2^2} [-q_2 (-2 + s_1 s_2) + q_1 (6 - 2s_1 - 2s_2)]$$

$$k_2 = - \frac{1}{2q_1^2 + 3q_1q_2 + q_2^2} [-q_2(-3s_1 + s_1 + s_2) + q_1(7-3s_1-3s_2 + s_1s_2)]$$

Pour le design du correcteur par retour d'état, la forme commandable se prête bien. Pour montrer ceci, nous allons restreindre au cas d'une seule grandeur d'entrée et d'une seule grandeur de sortie. En effet, si le système est représenté par la forme canonique commandable Suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) = C_c x(t) \end{cases}$$

En choisissant la commande par retour d'état tel que :

$$u(t) = -Kx(t) + Nr(t)$$

où K ($1 \times n$), N (1×1), et $r(t)$ le signal de référence; la représentation d'état du système en boucle fermée est alors donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A_c - B_c K]x(t) + B_c N r(t) \\ y(t) = C_c x(t) \end{cases}$$

L'équation caractéristique correspondante est :

$$\Delta(s) = \det[sI - A_c + B_c k] = s^n + (a_{n-1} + k_n)s^{n-1} + \dots + (a_1 + k_2)s + (a_0 + k_1)$$

D'autre coté, si les spécifications sont traduites par l'équation caractéristique désirée suivante :

$$\Delta(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0 = 0$$

Les gains du correcteur par retour d'état sont déterminés par les relations suivantes :

$$k_{i+1} = d_i - a_i; \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

Pour appliquer ces relations, il faut que le modèle d'état soit sous forme commandable. Dans le cas où le modèle d'état n'est pas sous cette forme, on peut procéder pour le changement de variable suivant :

$$x(t) = Tz(t)$$

En notant par C la matrice de commandabilité

Et par $\Delta(s) = \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$, cette transformation T est :

$$T = CM$$

Où :

$$M = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_1 & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les paramètres a_i , $i = 1, \dots, n-1$ sont les coefficients de l'équation caractéristique suivante :

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

II.10. Conclusion:

Le deuxième chapitre arrive à son terme, nous ne pouvons que le qualifier de très important puisque il traite l'idée d'utilisation du chaos dans les systèmes de communication qui a été inspirée de la découverte de Pecora-Carroll. Ces derniers ont montré que deux systèmes chaotiques identiques avec des conditions initiales différentes peuvent éventuellement se synchroniser s'ils sont couplés d'une certaine manière convenable, c'est-à-dire sous certaines conditions. Le développement des systèmes de communication utilisant le chaos a commencé avec des schémas de synchronisation très simple, visant pour le cryptage et la reconstruction simultanée d'un signal d'information.

Par la suite, nous avons étudié une méthode de contrôle très simple dont le but d'avoir un point de fonctionnement stable du système étudié, et le régime permanent souhaité, malgré le comportement irrégulier et imprévisible de chaos. Et malgré aussi les différences dans les conditions initiales des systèmes maître-esclave.

Dans le chapitre qui suit, nous allons appliquer la méthode de contrôle étudié précédemment sur deux circuits LS et QI, afin d'arriver à une meilleur synchronisation entre eux.

III.1. Introduction :

L'idée de synchroniser deux systèmes chaotiques dans différentes conditions initiales a été présentée la première fois par Pecora et Carroll en 1989 [15]. La synchronisation du chaos, comme matière importante en science non linéaire, a été largement étudiée dans une variété de champs, tel que la physique [21], la chimie l'écologie [22,23], et la sécurité de la communication [24]..., etc.

Par conséquent, il a été proposé une grande variété d'approches pour la synchronisation des systèmes chaotiques avec la commande linéaire ou non linéaire [25,26], et le contrôle adaptatif [27]..., etc.

Récemment Guoyuan QI et autres [28]. Ont présenté un nouveau système à quatre dimensions (4D), nommé système de QI. Les propriétés de base du nouveau système 4D ont été analysées au moyen d'exposant de Lyapunov. Leurs études prouvent que le système peut produire divers attracteurs chaotiques complexes quand les paramètres du système sont choisis pour les deux cas, c.- à-d. un cas autonome et non autonome.

Dans ce chapitre, la commande linéaire par retour d'état dite commande active est appliquée pour synchroniser deux systèmes identiques de Lorenz-Stenflo (LS) [29], et deux systèmes de QI [28]. Nous présentons également la synchronisation entre le système LS et le système QI en utilisant cette commande. Le chapitre est organisé comme suit : en sections 2.1 et 2.2 respectivement, nous présentons la synchronisation de deux systèmes identiques LS et de deux systèmes QI. Puis une synchronisation entre le système LS et le système QI sera présentée en section 3. Enfin, une conclusion sera donnée en section 4.

III. 2. Synchronisation de deux systèmes identiques :

III.2.1. Le système de Lorenz-Stenflo : [30,29]

Les équations non-linéaires autonomes du système de Lorenz-Stenflo sont données comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha (y-x) + \gamma w \\ \dot{y} = x (r-z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \\ \dot{w} = -x - \alpha w \end{cases} \quad \text{(III-1)}$$

Avec :

($r > 0$), ($\alpha > 0$), ($\gamma > 0$) et ($\beta > 0$) sont respectivement le nombre de Rayleigh, le nombre de Prandtl, le nombre de rotation et le paramètre géométrique. Le système (III-1), détaillé dans [30] est appelé système de Lorenz-Stenflo (LS). Il est semblable à l'équation célèbre de Lorenz, mais diffère de lui par l'introduction du nouveau paramètre γ de commande, et d'une nouvelle variable d'état w , décrivant la rotation d'écoulement. Ainsi le système (III-1) se réduit au système de Lorenz en absence de γ et w .

Quelques comportements dynamiques de l'équation de Lorenz-Stenflo sont rapportés dans [30-31-32].

L'aspect aléatoire du système et ces attracteurs chaotique pour les paramètres suivants :

$\alpha = 1, \beta = 0.7, \gamma = 1.5$ et $r = 26$, sont donnés par les figures suivantes :

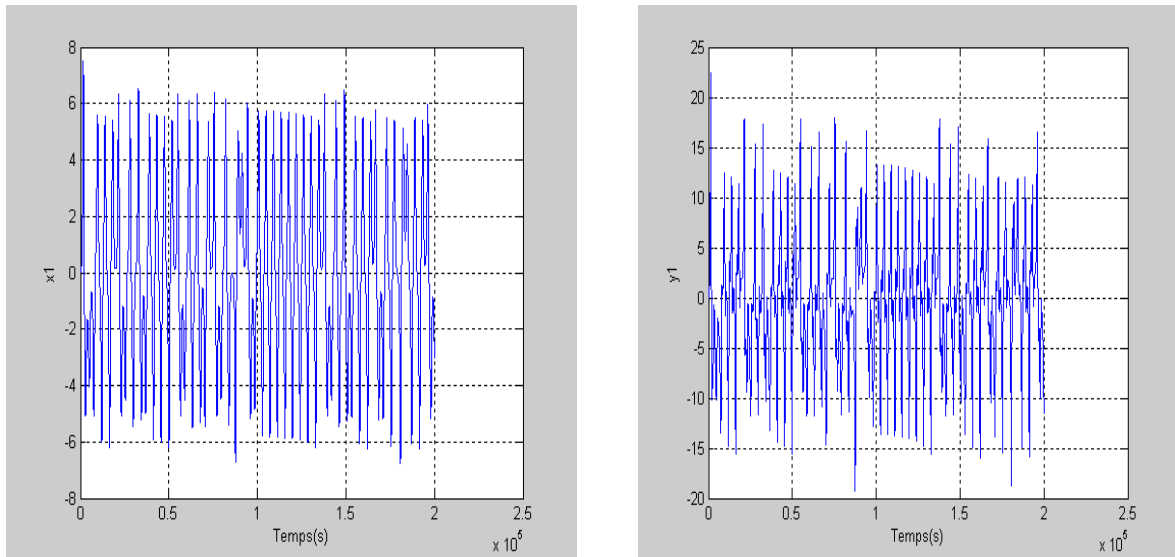


Figure III-1: Aspect aléatoire du système LS.

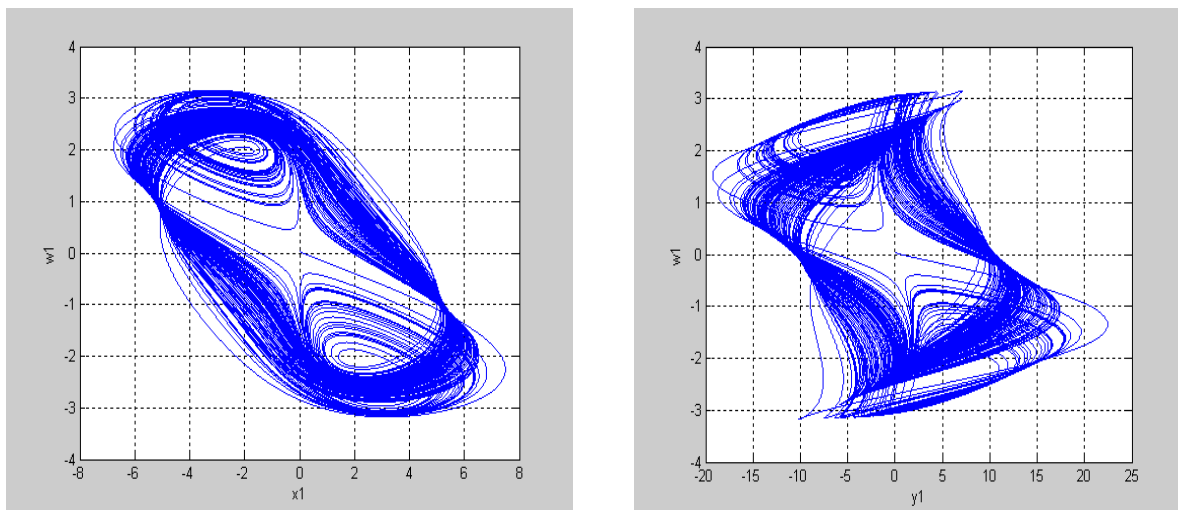


Figure III-2 : Attracteurs étranges du système LS.

III.2.1.1. Formulation :

Considérons un système LS dit système maître donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha (y_1 - x_1) + \gamma w_1 \\ \dot{y}_1 = x_1 (r - z_1) - y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \beta z_1 \\ \dot{w}_1 = -x_1 - \alpha w_1 \end{cases} \quad (\text{III-2})$$

Considérons également un même système dit système esclave défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \alpha (y_2 - x_2) + \gamma w_2 + u_1(t) \\ \dot{y}_2 = x_2 (r - z_2) - y_2 + u_2(t) \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 - \beta z_2 + u_3(t) \\ \dot{w}_2 = -x_2 - \alpha w_2 + u_4(t) \end{cases} \quad (\text{III-3})$$

Avec :

$u = [u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)]^T$ un vecteur commande.

Notre objectif consiste à synchroniser le système maître défini en (III-2) avec le système esclave défini en (III-3).

Définissons d'abord les écarts entre les états de l'esclave et du maître.

Le système d'écart est donné comme suit :

$$\begin{cases} x_3 = x_2 - x_1 \\ y_3 = y_2 - y_1 \\ z_3 = z_2 - z_1 \\ w_3 = w_2 - w_1 \end{cases} \quad (\text{III-4})$$

D'où :

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = \alpha (y_3 - x_3) + \gamma w_3 + u_1(t) \\ \dot{y}_3 = r x_3 - y_3 - x_2 z_2 + x_1 z_1 + u_2(t) \\ \dot{z}_3 = x_2 y_2 - x_1 y_1 - \beta z_3 + u_3(t) \\ \dot{w}_3 = -x_3 - \alpha w_3 + u_4(t) \end{cases} \quad (\text{III-5})$$

Nous remarquons que le système (III-5) est non linéaire. Choisissons d'abord une commande permettant de le linéariser. Cette commande linéarisante est donnée comme suit :

$$\begin{cases} u_1(t) = v_1(t) \\ u_2(t) = x_2 z_2 - x_1 z_1 + v_2(t) \\ u_3(t) = x_2 y_2 + x_1 y_1 + v_3(t) \\ u_4(t) = v_4(t) \end{cases} \quad (\text{III-6})$$

Avec :

$v = [v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t)]^T$ vecteur de commande.

En remplaçant (III-6) dans (III-5), nous obtenons le modèle suivant :

{

$$\begin{aligned}
\dot{x}_3 &= \alpha (y_3 - x_3) + \gamma w_3 + v_1(t) \\
\dot{y}_3 &= rx_3 - y_3 + v_2(t) \\
\dot{z}_3 &= -\beta z_3 + v_3(t) \\
\dot{w}_3 &= -x_3 - \alpha w_3 + v_4(t)
\end{aligned} \tag{III-7}$$

Ainsi, le système (III-7) à commander est un système linéaire en boucle ouverte qui peut s'écrire sous la forme (II-11) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 & \gamma \\ r & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \tag{III-8}$$

Pour assurer la synchronisation entre les deux systèmes maître et esclave, il faut stabiliser le système (III-7), en convergeant exponentiellement le système (III-4) vers zéro quand t tend vers l'infini.

Pour atteindre ce but, appliquons la commande par retour d'état étudié en chapitre II défini par (II-12).

Soit :

$$[v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t)]^T = -K[x_3(t), y_3(t), z_3(t), w_3(t)]^T \tag{III-9}$$

K est une matrice à coefficients constants à choisir avec précaution.

En choisissant K comme suit :

$$-K = \begin{bmatrix} -\alpha + 1 & +\alpha & 0 & +\gamma \\ +r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta + 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\alpha + 1 \end{bmatrix} \tag{III-10}$$

Alors:

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha + 1 & +\alpha & 0 & +\gamma \\ +r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta + 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\alpha + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ w_3 \end{bmatrix} \tag{III-11}$$

En remplaçant (III-11) dans (III-8), nous obtenons le système (III-12) donné en boucle fermée.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 & \gamma \\ r & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha + 1 & +\alpha & 0 & +\gamma \\ +r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta + 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\alpha + 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ w_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III-12})$$

Il est à remarquer que la matrice donnée par (III-12) présente quatre valeurs propres négatives -1, -1, -1 et -1, ce qui implique que tous les états du système (III-12) convergent exponentiellement vers zéro en un temps fini. Donc, la synchronisation des systèmes (III-2) et (III-3) est réalisée.

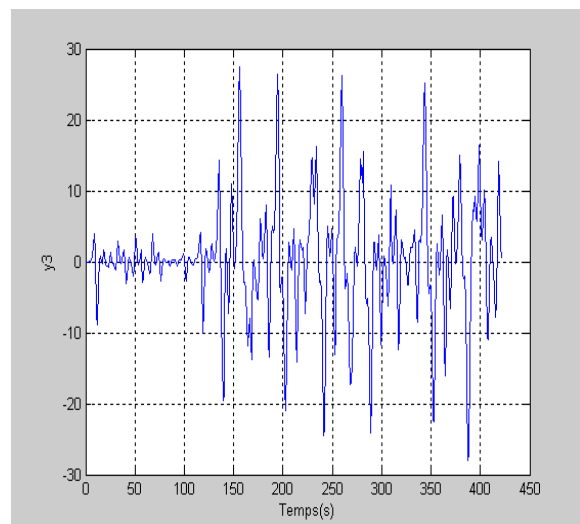
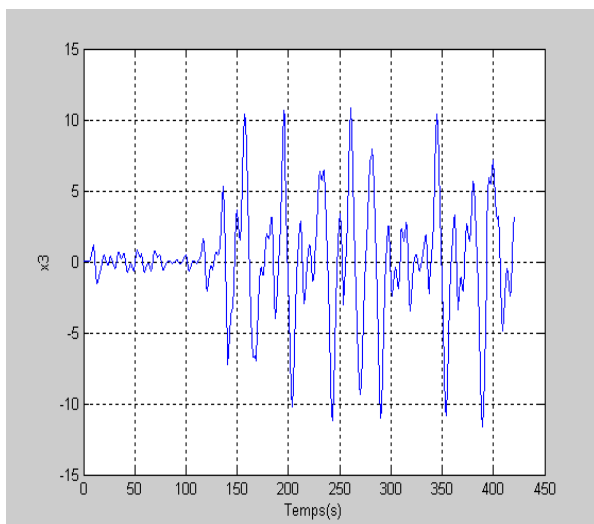
Afin de montrer l'utilité de la commande active, on donnera dans tout ce qui s'en suit la dynamique d'erreur quand la commande est mise hors tension et quand elle est activée.

III.2.1.2 Résultats de simulation :

Les résultats de simulation ont été obtenus en utilisant le logiciel MATLAB version 6.5. Dans ces simulations, on fixe $\alpha=1$, $\beta=0.7$, $\gamma=1.5$ et $r=26$, pour assurer le chaos. Les conditions initiales pour le système LS maître et le système LS esclave sont respectivement : $x_1=0.028$, $y_1=0.02$, $z_1=0.03$, $w_1=0.04$, $x_2=0.01$, $y_2=0.037$, $z_2=0.059$ et $w_2=0.048$. Ainsi, les valeurs initiales des erreurs d'état sont : $x_3= - 0.018$, $y_3=0.017$, $z_3=0.029$, $w_3=0.008$.

Nous commençons à donner les erreurs d'état quand la commande est désactivée comme montré dans la figure III-3. Il est évident que l'écart se développe au début chaotiquement, mais après $t=100s$, les écarts d'état deviennent importants.

Dans la figure III-4, nous montrons la convergence exponentielle des erreurs d'état quand la commande est activée à $t=0$. A partir de $t=20s$ nous remarquons que les écarts d'état s'annulent. Donc les deux systèmes maîtres et esclave sont synchronisés.



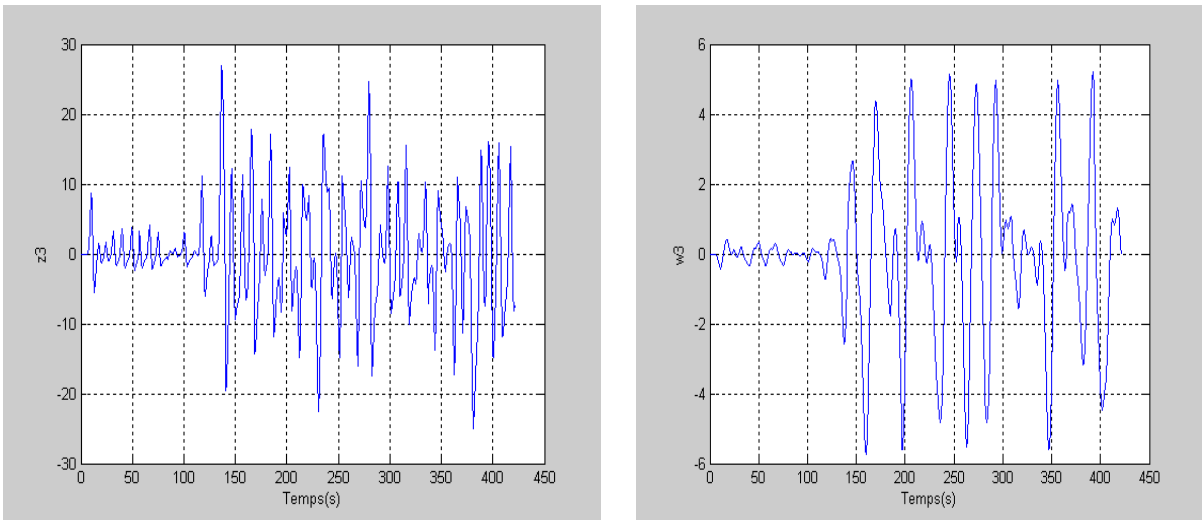


Figure III-3 : Dynamiques d'erreurs (x_3 , y_3 , z_3 , w_3) du système couplé de Lorenz-Stenflo quand la commande active est mise hors tension.

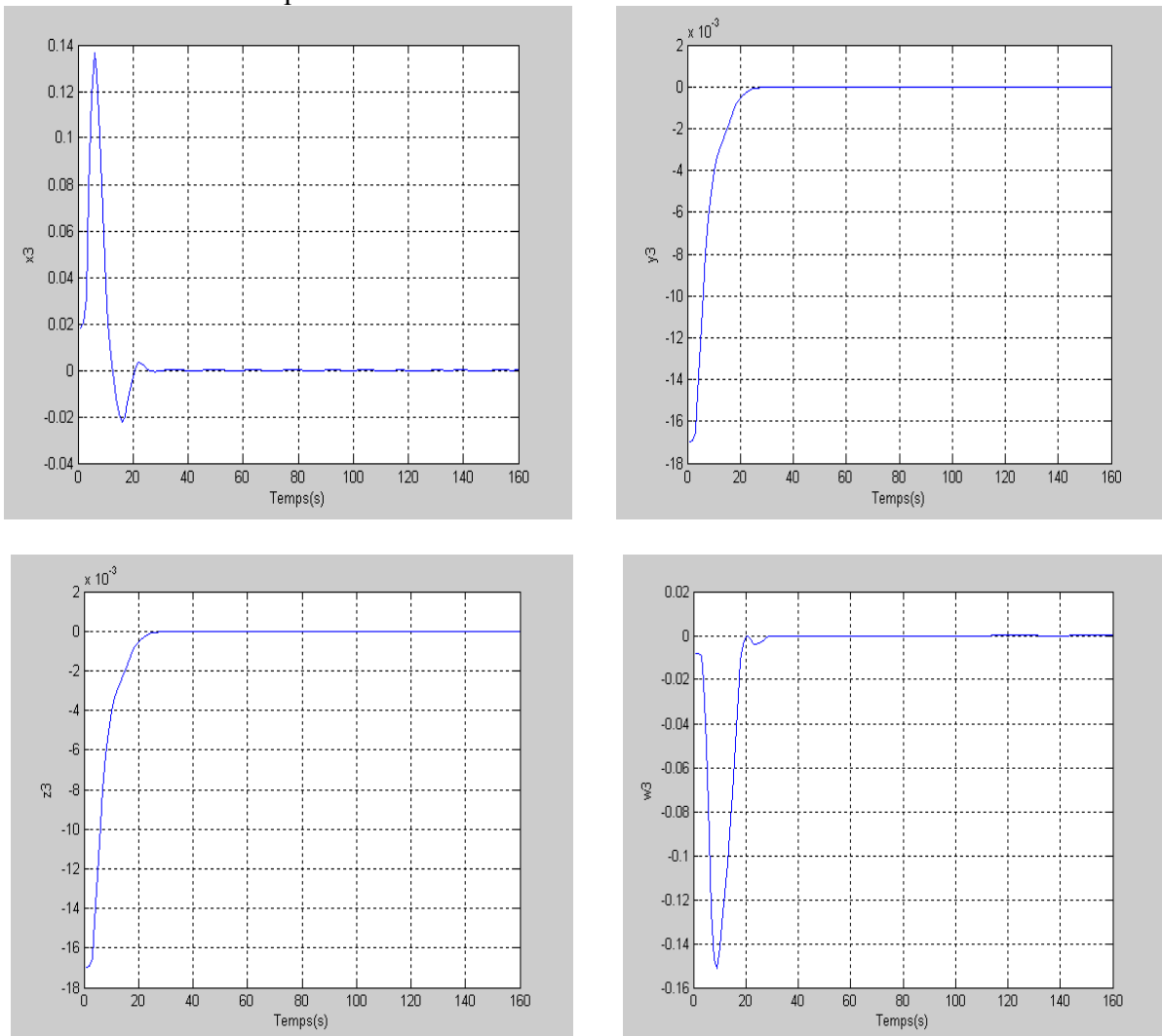


Figure III-4 : Convergences exponentielles des états d'erreurs quand la commande active est actionnée.

III.2.2. Le système de QI : [28]

Le deuxième système que nous allons étudier est le système de QI. Les équations non linéaires autonomes de ce système sont données comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y_1 - x_1) + y_1 z_1 w_1 \\ \dot{y} = b(x_1 + y_1) - x_1 z_1 w_1 \\ \dot{z} = -c z_1 + x_1 y_1 w_1 \\ \dot{w} = -d w_1 + x_1 y_1 z_1 \end{cases} \quad (\text{III-13})$$

Avec :

x, y, z, w , sont les variables d'états du système et a, b, c_1, c_2, d sont les paramètres constants positifs tel que $c = (c_1 + c_2) \sin(t)$. L'analyse de ce système a été intensivement étudiée par QI, pour un sous ensemble fixe des paramètres de système. Pour le cas autonome $c_2 = 0$ et le cas non autonome $c_2 \neq 0$.

En particulier, le système QI montre le comportement chaotique pour les paramètres suivants :

$$a = 30, \quad b = 10, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad d = 10.$$

L'aspect aléatoire et l'attracteur chaotique du système de QI avec des conditions initiales de $(x_1, y_1, z_1, w_1) = (0, -0.8, 1.2, 3)$ sont montrées sur les figures III-5 et III-6.

Le schéma électrique ainsi que les valeurs numériques des composants du système de QI sera détaillé en annexe.

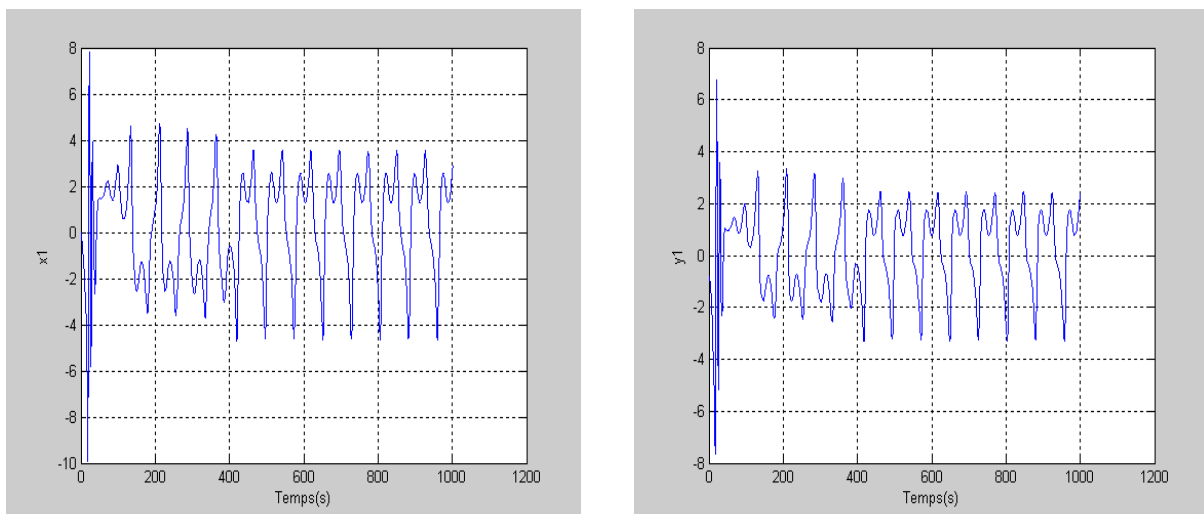


Figure III-5 : Aspect aléatoire du système de QI.

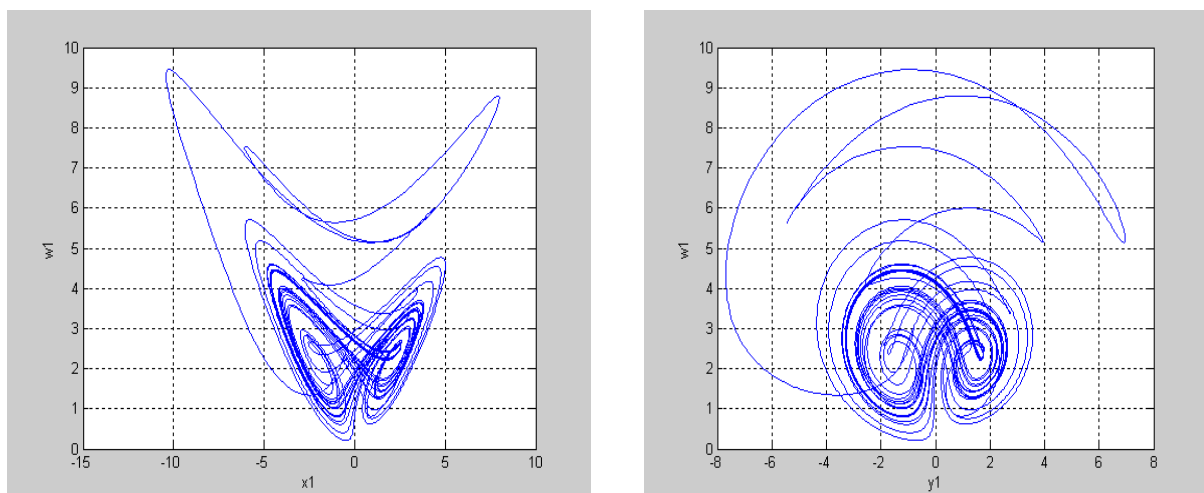


Figure III-6 : Attracteurs du système de QI.

III.2.2.1. Formulation :

Considérons un système QI dit maître donné par :

$$14) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1) + y_1 z_1 w_1 \\ \dot{y}_1 = b(x_1 + y_1) - x_1 z_1 w_1 \\ \dot{z}_1 = -c z_1 + x_1 y_1 w_1 \\ \dot{w}_1 = -d w_1 + x_1 y_1 z_1 \end{cases} \quad (\text{III-14})$$

Considérons également un même système dit esclave défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a(y_2 - x_2) + y_2 z_2 w_2 + u_1(t) \\ \dot{y}_2 = b(x_2 + y_2) - x_2 z_2 w_2 + u_2(t) \\ \dot{z}_2 = -c z_2 + x_2 y_2 w_2 + u_3(t) \\ \dot{w}_2 = -d w_2 + x_2 y_2 z_2 + u_4(t) \end{cases} \quad (\text{III-15})$$

Avec :

$u = [u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)]^T$ un vecteur commande.

Pour réaliser la synchronisation du système maître défini en (III-14) avec le système esclave défini en (III-15).

Définissant d'abord les écarts entre les états de l'esclave et du maître.

Le système d'écart est donné comme suit :

$$\begin{cases} x_3 = x_2 - x_1 \\ y_3 = y_2 - y_1 \\ z_3 = z_2 - z_1 \\ w_3 = w_2 - w_1 \end{cases} \quad (\text{III-16})$$

Après la soustraction de l'équation (III-14) de l'équation (III-15), nous obtenons le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = a(y_3 - x_3) + y_2 z_2 w_2 - y_1 z_1 w_1 + u_1(t) \\ \dot{y}_3 = b(x_3 + y_3) - x_2 z_2 w_2 + x_1 z_1 w_1 + u_2(t) \\ \dot{z}_3 = -c z_3 + x_2 y_2 w_2 - x_1 y_1 w_1 + u_3(t) \\ \dot{w}_3 = -d w_3 + x_2 y_2 z_2 - x_1 y_1 z_1 + u_4(t) \end{cases} \quad (\text{III-17})$$

Nous appliquons d'abord la commande qui permet de linéariser le système (III-17), cette commande est donnée comme suit :

$$\begin{cases} u_1(t) = -y_2 z_2 w_2 + y_1 z_1 w_1 + v_1(t) \\ u_2(t) = x_2 z_2 w_2 - x_1 z_1 w_1 + v_2(t) \\ u_3(t) = -x_2 y_2 w_2 + x_1 y_1 w_1 + v_3(t) \\ u_4(t) = -x_2 y_2 z_2 + x_1 y_1 z_1 + v_4(t) \end{cases} \quad (\text{III-18})$$

Avec :

$v = [v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t)]^T$ vecteur de commande.

En remplaçant (III-18) dans (III-17) nous obtenons le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = a(y_3 - x_3) + v_1(t) \\ \dot{y}_3 = b(x_3 + y_3) + v_2(t) \\ \dot{z}_3 = -c z_3 + v_3(t) \\ \dot{w}_3 = -d w_3 + v_4(t) \end{cases} \quad (\text{III-19})$$

Ainsi, le système (III-19) à commander est un système linéaire en boucle ouverte qui peut s'écrire sous la forme (II-11) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (\text{III-20})$$

Pour assurer la synchronisation entre les deux systèmes maître et esclave, il faut stabiliser le système (III-19), en convergeant exponentiellement le système (III-16) vers zéro quand t tend vers l'infini.

Pour atteindre ce but, appliquons la commande par retour d'état étudié en chapitre II défini par (II-12).

Nous choisissons K comme suit tel que K est une matrice à coefficients constants à choisir avec précaution.

$$-K = \begin{bmatrix} -a + 1 & a & 0 & 0 \\ b & (1 + b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d + 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III-21})$$

Alors:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a + 1 & a & 0 & 0 \\ b & (1 + b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ w_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III-22})$$

En remplaçant (III-22) dans (III-20), nous obtenons le système (III-23) en boucle fermé.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a + 1 & a & 0 & 0 \\ b & (1 + b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d + 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ w_3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ w_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III-23})$$

Il est à remarquer que la matrice donnée par (III-23) présente quatre valeurs propres négatives -1, -1, -1 et -1, ce qui implique que tous les états du système (III-23) convergent exponentiellement vers zéro en un temps fini. Donc, la synchronisation des systèmes (III-14) et (III-15) est réalisée.

III.2.2.2. Résultats de simulation :

Dans ces résultats, les valeurs initiales du système maître de QI et du système esclave sont respectivement : $x_1=0$, $y_1=-0.8$, $z_1=1.2$, $w_1=4$; $x_2=-1$, $y_2=1$, $z_2=2.5$ et $w_2=0.8$.

Commençons à donner les erreurs d'état quand la commande est désactivée comme dans la figure III-7, il est évident que l'écart se développe au début chaotiquement, mais après $t=40s$, l'importance des erreurs d'état deviennent considérablement importantes.

Dans la figure III-8, nous montrons la convergence exponentielle des erreurs d'état quand la commande est activée à $t=0s$. A partir de $t=100s$ nous remarquons que les écarts d'état s'annulent. Donc les deux systèmes maîtres et esclave sont synchronisés.

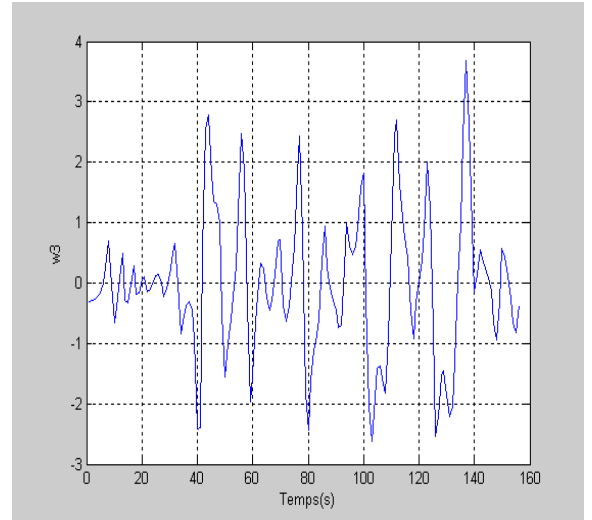
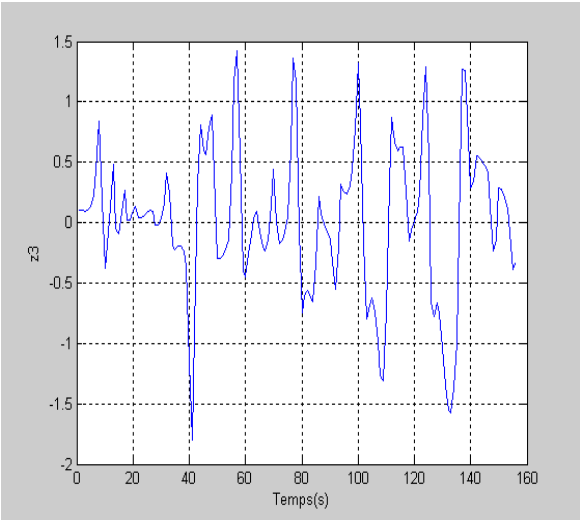
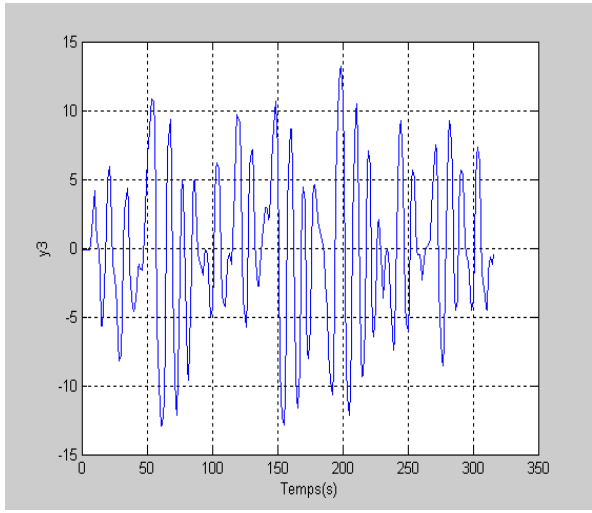
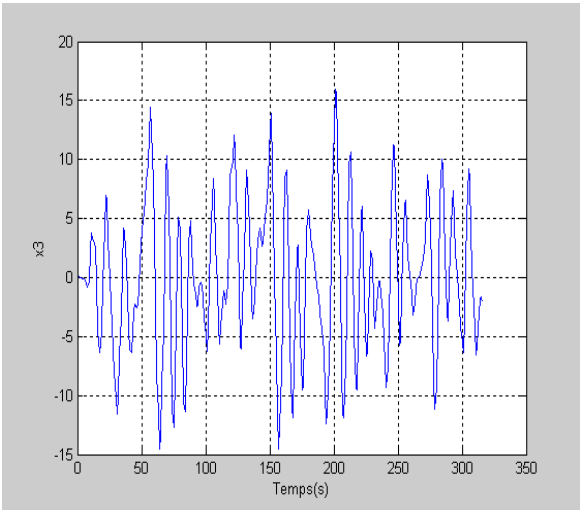
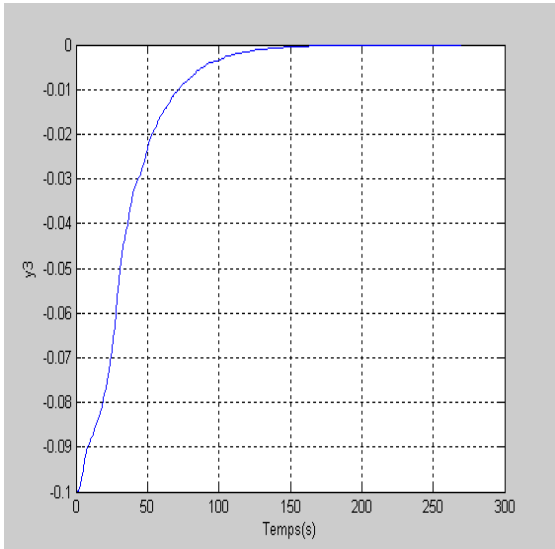
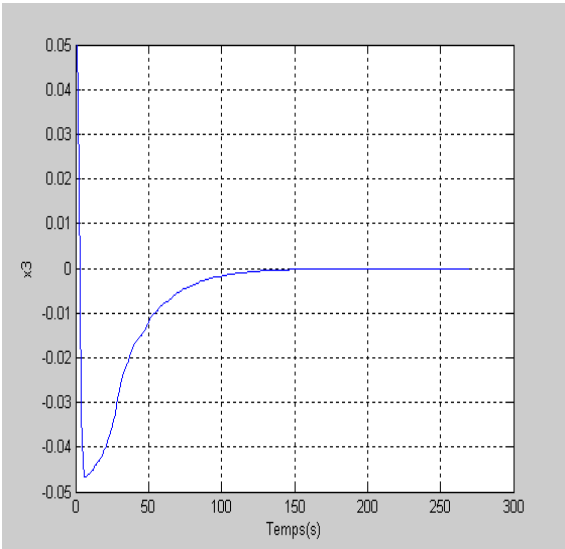


Figure III-7 : Dynamiques d'erreurs (x_3 , y_3 , z_3 , w_3) du système de QI quand la commande active est mise hors tension.



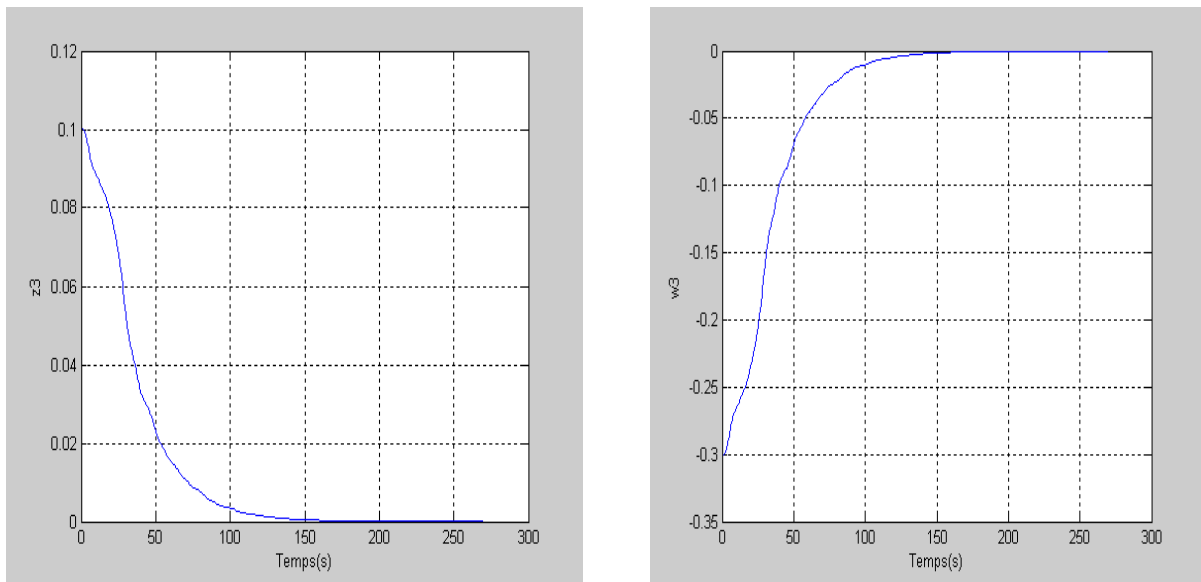


Figure III-8 : Ecart entre les états des systèmes de QI en application de la commande active.

III.3. Synchronisation de deux systèmes différents LS et QI :

Dans cette section, la synchronisation entre le système LS et le système QI sera étudiée. Pour cela, nous choisissons le système LS défini en (III-1) comme système maître et le système QI défini en (III-13) comme système esclave. Ceci implique que quand les deux systèmes maître-esclave sont synchronisés, le système de QI tracera la dynamique du système de LS. Comme dans les sections précédentes, notre but est de concevoir la loi de commande qui fera synchroniser ces deux systèmes.

Après la soustraction de (III-1) de (III-13), nous constatons que les écarts sur les états ne sont pas explicitement définis comme avant. Après arrangement, nous obtenons le système dynamique d'erreur suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_3 = - (a + \alpha) x_3 + (a + \alpha) y_3 + \gamma w_3 + a (y_1 - x_1) + \alpha (x_2 - y_2) - \gamma w_2 + y_2 z_2 w_2 + u_1(t) \\ \dot{\hat{y}}_3 = (b + r) x_3 + (b - 1) y_3 + b (x_1 + y_1) - r x_2 + y_2 + x_1 z_1 - x_2 z_2 w_2 + u_2(t) \\ \dot{\hat{z}}_3 = - (c + \beta) z_3 - c z_1 + \beta z_2 - x_1 y_1 + x_2 y_2 z_2 + u_3(t) \\ \dot{\hat{w}}_3 = - x_3 - (d + \alpha) w_3 - d w_1 + x_2 + \alpha w_2 + x_2 y_2 z_2 + u_4(t) \end{cases} \quad (III-24)$$

Appliquons d'abord la commande permettant de linéariser le système (III-24), qui est définie comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = - a (y_1 - x_1) - \alpha (x_2 - y_2) + c w_2 - y_2 z_2 w_2 + v_1(t) \\ u_2 = - b (x_1 + y_1) + r x_2 - y_2 - x_1 z_1 + x_2 z_2 w_2 + v_2(t) \\ u_3 = c z_1 - \beta z_2 + x_1 y_1 - x_2 y_2 w_2 + v_3(t) \end{cases} \quad (III-25)$$

$$u_4 = dw_1 - x_2 - \alpha w_2 - x_2 y_2 z_2 + v_4(t)$$

En remplaçant (III-25) dans (III-24), nous obtenons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = - (a + \alpha) x_3 + (a + \alpha) y_3 + \gamma w_3 + v_1(t) \\ \dot{y}_3 = (b + r) x_3 + (b - 1) y_3 + v_2(t) \\ \dot{z}_3 = - (c + \beta) z_3 + v_3(t) \\ \dot{w}_3 = - x_3 - (d + \alpha) w_3 + v_4(t) \end{cases} \quad (\text{III-26})$$

Ainsi, le système (III-26) à commander est un système linéaire en boucle ouverte qui peut s'écrire sous la forme (II-11) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a + \alpha) & a + \alpha & 0 & \gamma \\ b + r & b - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c + \beta & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -(d + \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (\text{III-27})$$

En choisissant K comme suit :

$$-K = \begin{bmatrix} -(a + \alpha - 1) & (a + \alpha) & 0 & \gamma \\ (b + r) & +b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(c + \beta - 1) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -(d + \alpha - 1) \end{bmatrix} \quad (\text{III-28})$$

Alors:

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a + \alpha - 1) & (a + \alpha) & 0 & \gamma \\ (b + r) & +b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(c + \beta - 1) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -(d + \alpha - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ w_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III-29})$$

En remplaçant (III-29) dans (III-27), nous obtenons le système (III-30) donnée en boucle fermée.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a + \alpha) & a + \alpha & 0 & \gamma \\ b + r & b - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c + \beta & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -(d + \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(a + \alpha - 1) & (a + \alpha) & 0 & \gamma \\ (b + r) & +b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(c + \beta - 1) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -(d + \alpha - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

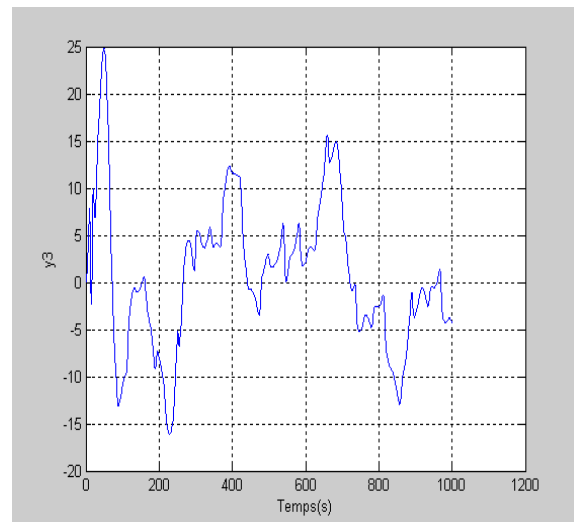
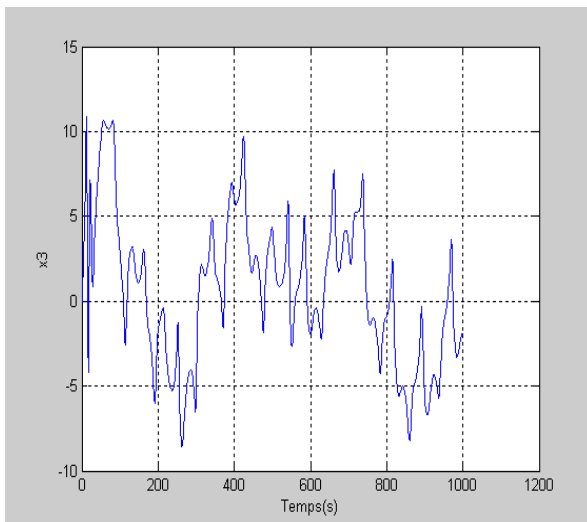
$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ w_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III-30})$$

Nous voyons bien que la matrice donnée par (III-30) présente quatre valeurs propres négatives -1, -1, -1 et -1. Donc, les deux systèmes QI et LS sont synchronisés.

III.3.1. Résultats de simulation :

Dans ces résultats de simulation qui suit, nous avons pris les mêmes valeurs numériques des paramètres pour les deux systèmes maître-esclave défini précédemment. Une simulation est faite quand la commande active est mise hors tension comme dans la figure III-10, Nous voyons bien que les erreurs d'état deviennent considérablement importantes.

Dans la figure III-11, nous montrons la convergence exponentielle des écarts d'état quand la commande est activée à t=0s. A partir de t=20s, nous remarquons que les écarts s'annulent, donc les deux systèmes sont synchronisés.



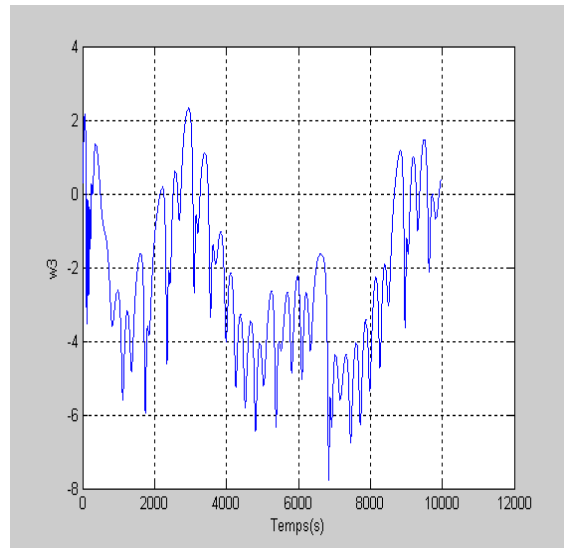
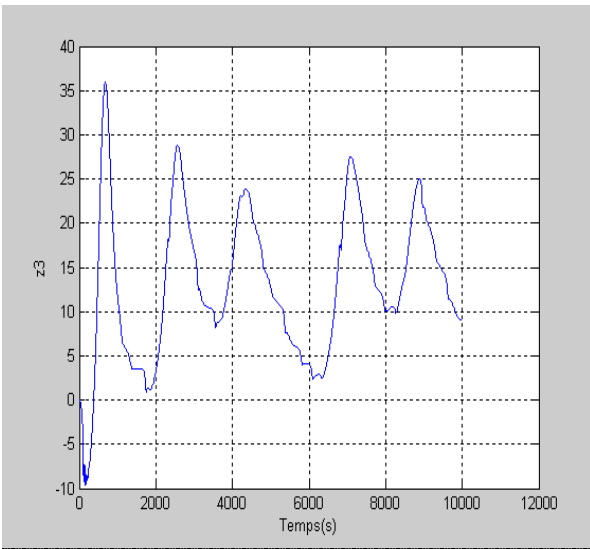


Figure III-10 : Dynamiques d'erreurs (x_3 , y_3 , z_3 , w_3) du système de QI et LS quand la commande active est mise hors tension.

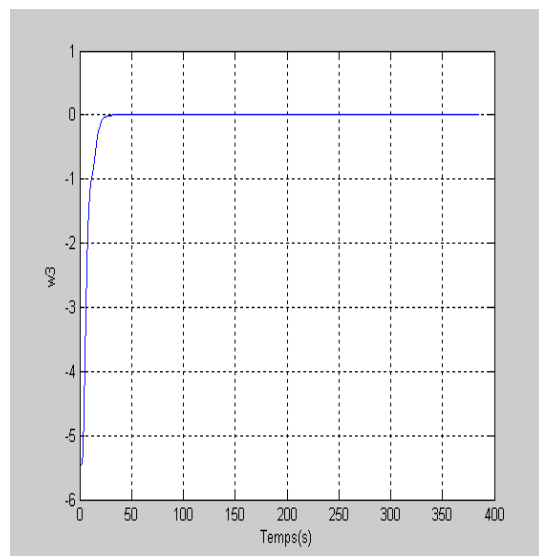
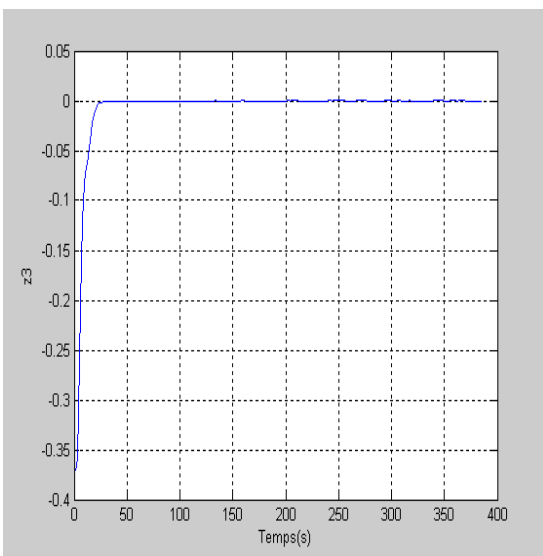
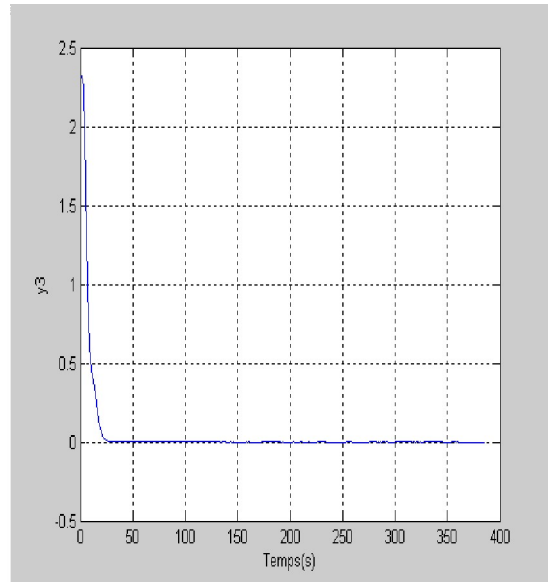
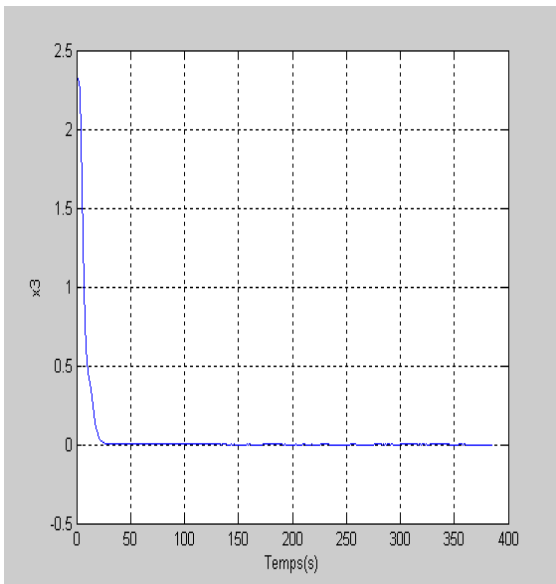


Figure III-11 : Ecart d'état des deux systèmes de QI et LS en application de la commande active.

III.4. Conclusion :

Ce chapitre offre quelques conditions suffisantes pour la synchronisation globale entre deux systèmes maître-esclave, ce dernier illustre la synchronisation de deux systèmes identiques de Lorenz-Stenflo, deux systèmes de QI, et deux systèmes non identiques comprenant le système de Lorenz-Stenflo(en tant que commande) et le système de QI (comme réponse) en employant la technique de commande active. Cette commande peut être facilement conçue selon les conditions données pour assurer la synchronisation globale. Les résultats de simulation montrent la validité et l'utilité de la méthode proposée, car malgré l'extrême sensibilité aux conditions initiales des systèmes chaotiques, leur synchronisation est possible à assurer.

Nous voilà arrivé à terme de notre projet qui a fait l'objet d'une analyse et d'une synchronisation des systèmes chaotiques ainsi que leur contrôle, où nous avons présenté tous les points essentiels concernant ces systèmes, tel que leurs définitions, et leurs caractéristiques. Et on ne peut dire que malgré sa complexité et son désordre, son étude ainsi que sa maîtrise n'est pas impossible.

L'une des contributions principales de notre travail, présentée dans le chapitre 2, réside dans la méthode de synchronisation du chaos, développée par Pecora et Carroll. D'après eux, la synchronisation du système dupliqué avec le système de départ est possible si tous les exposants de Lyapunov du premier sous système sont négatifs lorsqu'il est piloté par le signal chaotique reçu. On peut donc conclure que l'extrême sensibilité aux conditions initiales des systèmes chaotiques n'empêche pas leurs synchronisations. Et selon l'objectif visé on peut choisir une méthode de contrôle de synchronisation qui convient à cet objectif, dans notre travail, nous avons utilisé la méthode de contrôle par retour d'état.

Dans le chapitre 3, nous avons appliqué cette loi de contrôle sur différents systèmes chaotiques. D'après les résultats de simulation obtenus, nous pouvons dire que la présence de cette loi de contrôle parvient à annuler les écarts d'état entre deux systèmes chaotiques (qui peuvent être identiques ou différents) et donc les mieux synchronisé.

En perspectives, notre travail peut être complété par :

- L'application d'autres méthodes de contrôle, comme la méthode de contrôle par retour d'état adaptatif. Qui est utilisée lorsque les paramètres du système chaotique varient en fonction du temps.
- La réalisation pratique (électronique) des deux systèmes chaotiques, aussi l'implémentation de la loi de contrôle pour assurer la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur.
- La conception d'un récepteur en utilisant des observateurs non linéaires tels que les observateurs à modes glissants, adaptatifs..., etc.

Enfin, nous souhaitons vivement que notre travail soit apprécié et fera objet d'une contribution dans le domaine de l'analyse et la synchronisation du chaos.

Bibliographie

- [1]- D. Arzelier et D. Peaucelle, « Systèmes et Asservissement non linéaires, notes de cours technical report », CNRS, CAAS.
- [2]- F. Lamnabhi, Lagarrigue, « Physique théorique ‘mécanique’ », Edition Ellipses Paris, année 1964.
- [3]- M. P. Spiégle, « Théorie et application de la mécanique générale », Edition Herman, année 1983.
- [4]- W. Aggoune, M. Boutayeb, et M. Darouach, « Observers design for a class of non linear systems with time –varying delay », Edition Hermés, année 1999.
- [5]- Y. Granjon, « Automatique, Système linéaire, Non linéaire, à temps continu, à temps discret, représentation d’état », Edition Dunad, année 2001.
- [6]- J. Thurin, « Systèmes Asservis », Edition Eyrolles paris, année 1971.
- [7]- P. Bergé, Y. Pomeau et Ch. Vidal, « L’ordre dans le chaos », Edition Hermann, année 1988.
- [8]- H. Poonith, « Systèmes Automatiques », rapport DEA, INSA, LESIA, SYD, année 2003.
- [9]- J.P. Eckmann, « Mesures dans un système dynamique chaotique », Edition du seuil paris, année 1992.
- [10]- C. Morel, « Analyse et contrôle dynamique chaotique- application à des circuits électroniques non- linéaires », thèse de doctorat, université d’Angers, année 2006.
- [11]- MB. Luca, « Apports du chaos et des estimateurs d’états pour la transmission sécurisée de l’information », thèse de doctorat, université de Bretagne Occidentale, année 2006.
- [12]- A. Layec, « Développement de modèles de chaos pour la simulation des systèmes de communication. Application aux communications chaotiques », thèse de doctorat, université de Limoges, année 2006.
- [13]- A. Zemouche, « L’observation de l’état des systèmes dynamiques non linéaires », thèse de doctorat, université de Louis Pasteur Strasbourg, année 2007.
- [14]- S. Deriviere et M. Alaoui, « Estimation of attractors and synchronization of generalized Lorenz systems », Edition Elsevier, DCDIS Vol. B, 10 No. 6, pp. 833-852, année 2003.

- [15]- L. M. Pecora, T. L. Carroll, « Synchronization in chaotic systems », Edition Elsevier, Phys. Rev. Lett, 64, 821, année 1990.
- [16]- F. Anstett, « Les systèmes dynamiques chaotiques pour le chiffrement : Synthèses et cryptanalyse », thèse de doctorat, université de Henri Poincaré – Nancy 1, année 2006.
- [17]- X. Bavard, L. Larger et J.-P. Goedgebuer, « Influence d'une numérisation de signal sur la synchronisation dans une transmission de données par un chaos analogique », thèse de doctorat, université de Franche Comté, Besançon, année 2002.
- [18]- F. Alin, « Contribution à la prédiction et au contrôle des comportements apériodiques dans les convertisseurs électromécaniques. Application de la théorie du chaos », thèse de doctorat, université de Reims Ardenne, année 2005.
- [19]- V. Minzu, B. Lang, « Commande automatique des systèmes linéaires continus », Edition Marketing, année 2001.
- [20]- El- Kébir Boukas, « Systèmes Asservis », Edition de l'école polytechnique de Montréal, année 1995.
- [21]- M. Lakshmanan, K. Murali, « chaos in nonlinear oscillators: controlling and synchronization », Edition world scientific, année 1996.
- [22]- SL. Han, C. Kerrer, Y. Kuramoto, « Dephasing and bursting in coupled neural oscillators », Edition Elsevier, Phys Rev Lett; 75:3190-3, année 1995.
- [23]- B. Blasius, A. Huppert, L. Stone, « complex dynamics and phase synchronization in spatially extended ecological system », Edition Elsevier, nature; 399: 354-9, année 1999.
- [24]- L. Kocarev, U. Parlitz, « General approach for chaotic synchronization with application to communication », Edition Elsevier, Phys Rev Lett; 76:1816-9, année 1995.
- [25]- TS. Zhou, JH. Lu, JH. GR. Chen, Y. Tang, « Synchronization stability of three chaotic systems with linear coupling », Edition Elsevier, Phys Lett; 301:231-40, année 2002.
- [26]- L. Huang, R. Feng, M. Wang, « Synchronization of chaotic systems via non linear control », Edition Elsevier, Phys Lett; 320:271-5, année 2004.
- [27]- TL. Liao, « Adaptive synchronization of two Lorenz systems », Edition Elsevier, chaos solutions and fractals; 9:1555-61, année 1998.
- [28]- QI, GY et autre, « On a four-dimensional chaotic systems », Edition Elsevier, chaos solutions and fractals; 23:1671-82, année 2005.

[29]- NF. Rulkov, MM. Sushchik, LS. Tsimining, HDI. Abarbanel, « Generalized synchronization in directionally coupled dynamical systems », Edition Elsevier, Phys Rev E;51:980-94, année 1995.

[30]-L. Stenflo,«Generalized Lorenz equations for acoustic-gravity waves in the atmosphere», Edition Elsevier, Physica Scr; 53:83-4, année 1996.

[31]- C. Zhaou , CH. Lai, MY. Yu, « Bifurcation behavior of the generalized Lorenz equations at large rotation numbers », Edition Elsevier, J Math Phys; 38:5225-39, année 1997.

[32]- S. Banerjee, P. Saha, AR. Chowdhury, « On the application of adaptive control and phase synchronization in non linear fluid dynamics »,Edition Elsevier, Int J Nonlinear Mech; 39:25-31, année 2004.

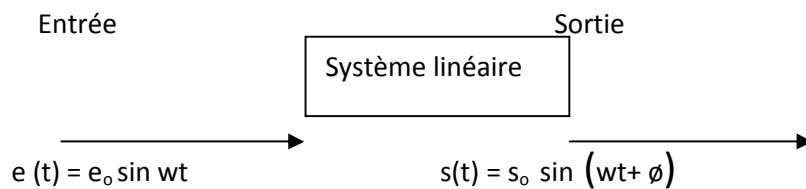
[33]- J.P. Eckman et Ruelle Rev, Mod. Phys.57,617, and reference therein, année 1985.

[34]- « Lyapunov Exponents without rescaling and Reorthogonalization », volume 80, numbers physical Review Letter, 27 Avril 1998.

I. Méthode de l'équivalent du premier harmonique :

La méthode est un essai de généralisation de la notion de fonction de transfert pour le cas des systèmes non linéaires.

Pour un système linéaire d'entrée sinusoïdale $e(t) = e_0 \sin(wt + \phi)$, on a une réponse également sinusoïdale $s(t) = s_0 \sin(wt + \phi)$.



La fonction de transfert est alors définie par :

$$\text{Son module : } A(w) = s_0/e_0$$

$$\text{Sa phase : } \phi$$

Qui ne sont fonction que de la pulsation w et de l'entrée (ils ne dépendent pas de l'amplitude e_0 de cette entrée).

Etendons ce procédé à un organe non linéaire :

On considère un organe non linéaire quelconque à l'entrée duquel on applique un signal sinusoïdal $x(t) = x_1 \sin wt$.





La réponse $w(t)$ n'est pas sinusoïdale, mais seulement, en général périodique, de même période que l'entrée : $T = 2\pi/\omega$.

Et sa décomposition en série de Fourier donnera :

$$w(t) = w_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} w_n \sin(n\omega t + \phi_n) \quad (\text{A-1})$$

$$w(t) = w_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(n\omega t) + b_n \cos(n\omega t) \quad (\text{A-2})$$

Où les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$w_0 = \omega/\pi \int_0^T w(t) dt \quad (\text{A-3})$$

$$a_n = \omega/\pi \int_0^T w(t) \sin(n\omega t) dt \quad (\text{A-4})$$

$$b_n = \omega/\pi \int_0^T w(t) \cos(n\omega t) dt \quad (\text{A-5})$$

L'approximation du premier harmonique consiste à considérer seulement le premier harmonique :

$$w(t) = w_1 \sin(\omega t + \psi_1) \quad (\text{A-6})$$

et à oublier les autres harmoniques, supposés filtrés par un système linéaire situé en aval de la non linéarité :

$$w(t) = w_1 \sin(\omega t + \psi_1) \quad (\text{A-7})$$

Par analogie avec le cas linéaire, on peut alors définir la “ fonction de transfert généralisée “ :

$$N(x_1, \omega) \quad (\text{A-8})$$

- Par son module : $M_1(x_1, \omega) = \frac{w_1}{x_1}$

- Par sa phase : $\psi_1(x_1, \omega)$.

Ce qui donne avec une écriture plus condensée :

$$N(x_1, \omega) = \frac{w_1}{x_1} e^{j\psi_1} \quad (\text{A-9})$$

Nous retiendrons les deux différences essentielles avec le cas linéaire :

-La définition de la fonction de transfert exige une approximation dont nous devons vérifier la validité.

- La fonction de transfert obtenue dépend non seulement de la pulsation ω , mais aussi de l'amplitude x_1 de l'entrée.

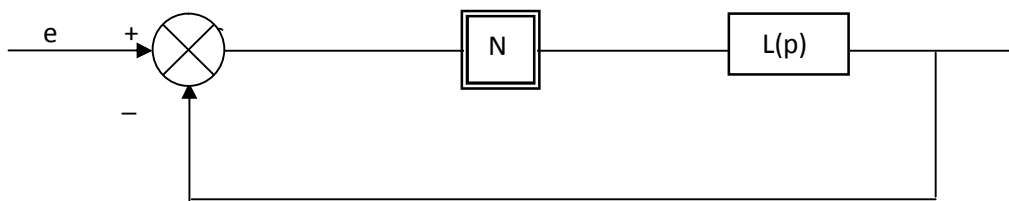
I.1. Condition de validité de la méthode pour un système asservi :

La méthode de l'approximation du premier harmonique ne peut être appliquée que si les deux conditions suivantes sont respectées :

Première condition : condition de séparabilité

L'asservissement considéré possède un seul organe non linéaire, qu'il est possible d'isoler, les autres organes peuvent être considérés au moins approximativement, comme linéaires.

L'asservissement peut être étudié sous la forme suivante :



Avec : N : organe non linéaire.

L (p) : fonction de transfert de la partie linéaire du système.

Deuxième condition : condition de filtrage

La partie linéaire L(p) est un filtre passe-bas à bande suffisamment étroite pour que l'on puisse négliger la contribution, au signal de sortie s(t), des harmoniques de w (t) d'ordre supérieur à 1.

II. Circuit électrique du système de QI :

Un circuit électronique a été conçu pour réaliser le système chaotique de QI, comme il est montré en figure (B-1). Le circuit se compose de 4 blocs pour effectuer l'intégration des quatre variables d'états x_i , $i=1, \dots, 4$, respectivement. Ce circuit possède 8 multiplieurs analogiques, qui réalisent 4 produits cubiques, 15 amplificateurs opérationnels, et quelques résistances et capacités, pour effectuer l'addition, la soustraction, la multiplication, et les opérations d'intégration. Ce circuit exécute les équations originales directement, et prend en considération la tension de

fonctionnement des amplificateurs opérationnels et les multiplieurs analogiques, aussi bien que leur propriété de saturation.

Dans la figure (B-1), il en a quelques résistances et quelques condensateurs ajustables ; ils sont :

R7, R10, R14, et R28, C1, C2, C3, C4.

Et toutes les autres résistances sont fixées comme expliqué si dessus :

R1, R2, R3, R4, R8, R9, R15, R17, R18, R20, R22, R26, R27, R30, R32, R33 = 10 k ; R5, R6, R16, R23, R31 = 100 k ; R11, R12, R13, R19, R21, R25, R29 = 1 k.

Résistances ajustable :

R7 = 28.57 k ; R10 = 35 k ; R14, R28, R24 = 10 k.

Condensateurs ajustable :

C1, C2, C3, C4 = 1nF,

Avec : a = 30, b = 10, c = 1, d = 10 dans le système (III-13)

Multiplieurs :

AD633, AMP-OP : KF347.

Nous avons :

$$\begin{cases}
 \dot{X}_1 = \frac{1000}{R7}(X_2 - X_1) + X_2X_3X_4 \\
 \dot{X}_2 = \frac{100}{R14}(X_2 + X_1) + X_1X_3X_4 \\
 \dot{X}_3 = -\frac{10}{R24}X_3 + X_1X_2X_4 \\
 \dot{X}_4 = -\frac{100}{R28}X_4 + X_1X_2X_3
 \end{cases} \quad (B-1)$$

Comparant (III-13) avec (B-1) nous obtiendrons :

$R7 = 1000/a \text{ (K}\Omega\text{)}, \quad R10 = a \text{ (K}\Omega\text{)},$

$R14 = 100/b \text{ (K}\Omega\text{)}, \quad R24 = 10/c \text{ (K}\Omega\text{)},$

$R28 = 100/d \text{ (K}\Omega\text{)}$

Le circuit du système est illustré dans la figure suivante :

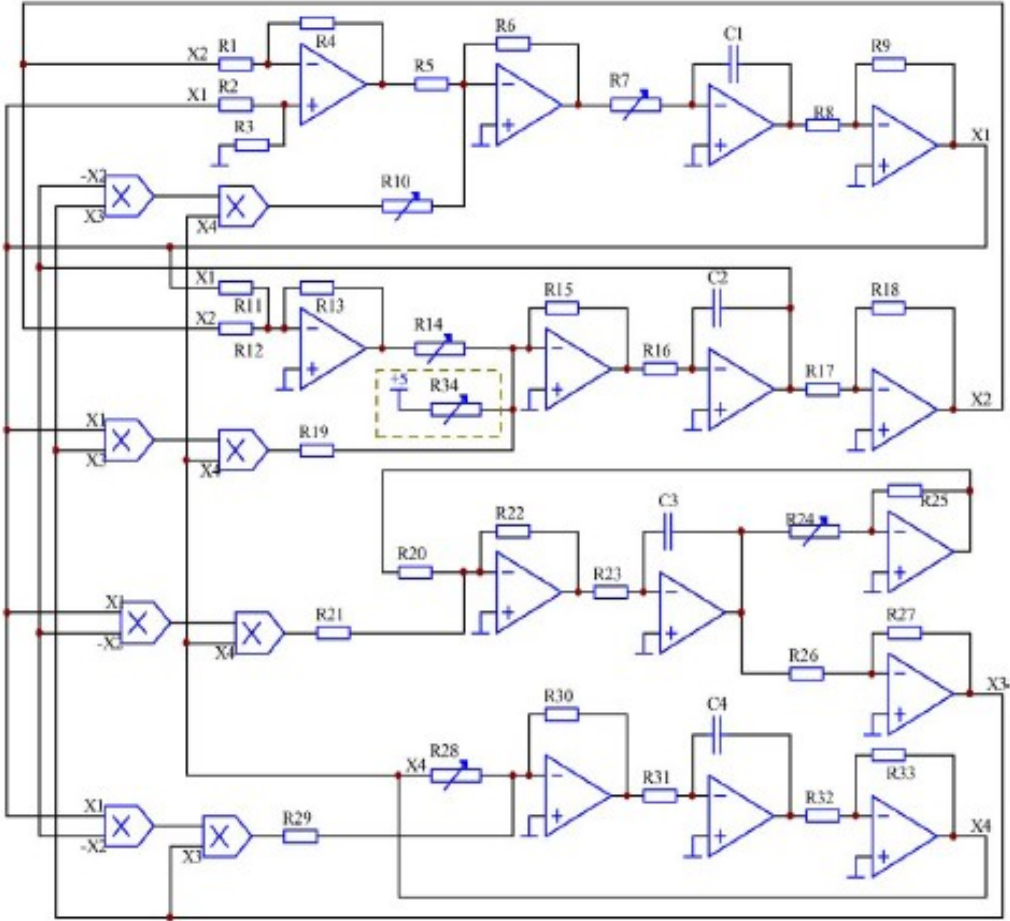


Figure B-1: Le circuit de QI (où tous les dispositifs actifs sont alimentés par ± 14 volts).

III. Présentation de la méthode par décomposition QR pour le calcul de l'exposant de Lyapunov :

Considérons un système dynamique à temps continu de degré n :

$$\frac{dz}{dt} = F(z, t) \quad (\text{C-1})$$

Où : $z = (z_1, \dots, z_n)$ et F est un champ de vecteur de dimension n .

Soit :

$$Z(t) = z(t) - z_0(t) \quad (\text{C-2})$$

$Z(t)$, représente la déviation de la trajectoire $z_0(t)$.

Linéarisons l'équation (C-1), autour de cette trajectoire nous obtenons :

$$\frac{dz}{dt} = DF(z_0(t), t)z \quad (\text{C-3})$$

Où DF représente la matrice jacobienne $n \times n$, en intégrant l'équation linéarisée le long de la trajectoire rapporte la carte tangente $M(z_0(t), t)$, qui prend les variables initiales Z^{in} dans l'évolution des variables dans le temps.

$Z(t) = M(t)Z^{\text{in}}$ [la dépendance de M dans la trajectoire $z_0(t)$ est évidente car on a

$Z(t) = z(t) - z_0(t)$].

Soit Λ une matrice de dimension $n \times n$ donnée par :

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} (MM')^{(1/2)t} \quad (C-4)$$

Les exposants de Lyapunov sont alors égaux au logarithme des valeurs propres de Λ [33].

Il est clair que la matrice M est d'une grande importance dans l'évaluation des exposants de Lyapunov, son équation d'évolution peut facilement être dérivée comme suit :

$$\frac{dM}{dt} = DF M \quad (C-5)$$

La question qui se pose maintenant est de savoir comment déterminer la matrice M , plusieurs méthodes sont proposées pour cet effet, dans notre travail nous choisissons la méthode par décomposition Q,R [34] pour sa simplicité d'utilisation.

Présentation de la méthode Q,R :

Dans cette méthode la matrice est écrite sous forme d'un produit matriciel :

$$M = Q^* R \quad (C-6)$$

Q : représente une matrice orthogonale $n \times n$.

R : représente une matrice triangulaire supérieure avec les éléments diagonaux qui sont positifs.

En substituant l'équation (C-6) dans (C-5) nous aurons :

$$\dot{Q}R + Q\dot{R} = DFQR \quad (C-7)$$

En multipliant l'équation ci-dessus par Q' et R^{-1} respectivement pour la droite et la gauche ; nous aurons :

$$Q'\dot{Q} + \dot{R}R^{-1} = Q'DFQ \quad (C-8)$$

\dot{Q} : représente la dérivée par rapport au temps de Q.

\dot{R} : représente la dérivée par rapport au temps de R.

Notons que $Q^{-1}\dot{Q}$ est une matrice antisymétrique pour n'importe quelle matrice orthogonale Q, et $\dot{R}R^{-1}$ reste une matrice triangulaire supérieure.

Représentation de la matrice Q :

Comme nous le savons déjà Q est une matrice orthogonale, donc on peut la représenter comme un produit de $\frac{n(n-1)}{2}$ matrices orthogonales, chacune de ce qui correspond à une simple rotation dans le plan (i,j) tel que (i<j). Notons la matrice correspondante à cette rotation de $o^{(i,j)}$, les éléments de cette matrice sont donnés par :

$$\begin{aligned} o_{kl}^{(i,j)} &= 1 \text{ si } k = l \neq i, j ; \\ &= \cos(\theta) \text{ si } k = l = i \text{ ou } j \\ &= \sin(\theta) \text{ si } k = i, l = j \\ &= -\sin(\theta) \text{ si } k = j, l = i \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned} \tag{C-9}$$

Avec θ est un angle variable.

La matrice Q est représentée par $o_{kl}^{(i,j)}$ comme suit :

$$Q = o^{(12)} o^{(13)} \dots o^{(ln)} o^{(23)} \dots o^{(n-1,n)}.$$

D'où la matrice Q est paramétrée par $\frac{n(n-1)}{2}$ angles que représentons par $\theta_i [i= 1, \dots, \frac{n(n-1)}{2}]$. Ces angles seront représentés collectivement par θ .

Représentation de la matrice R :

Nous avons vu que la matrice R est triangulaire supérieure qui à des éléments diagonaux positifs elle est représentée comme suit :

$$R = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & r_{12} & \dots & \dots & r_{1n} \\ 0 & e^{\lambda_2} & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} \quad (\text{C-10})$$

Les quantités λ_i seront vues devenir intimement apparentées aux exposants de Lyapunov. Nos équations finales seront en termes de λ_i qui va apparaître dans l'exposant. Les quantités r_{ij} représentent les termes supra- diagonaux de la matrice R.

En utilisant les représentations de Q et R nous obtenons :

$$Q'Q = \begin{bmatrix} 0 & -f_1(\dot{\theta}) & \dots & -f_{n-1}(\dot{\theta}) \\ f_1(\dot{\theta}) & 0 & \dots & -f_{2n-3}(\dot{\theta}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n-1}(\dot{\theta}) & \dots & \frac{f_{n(n-1)}(\dot{\theta})}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C-11})$$

Et :

$$R'R^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & r'_{12} & \dots & \dots & r'_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & r'_{23} & \dots & r'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\text{C-12})$$

Ici chacune des $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions f_i dépend (en principe) des $\dot{\theta}_i$ de tous les angles qui ont été utilisés pour représenter Q. en fait ces fonctions, dépendent seulement d'un sous ensemble de ces angles. Les quantités r'_{ij} ne sont pas concernés par $\dot{\theta}_i$ d'ailleurs elles ne seront pas représentées dans les équations finales.

En substituant (C-11) et (C-12) dans (C-8) nous obtenons :

$$Q'DFQ = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 & r''_{12} & \dots & \dots & r''_{1n} \\ f_1(\dot{\theta}) & \dot{\lambda}_2 & r''_{23} & \dots & r''_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ f_{n-1}(\dot{\theta}) & \dots & \dots & f_{n(n-1)/2}(\dot{\theta}) & \dot{\lambda}_n \end{bmatrix} \quad (C-13)$$

Notons la matrice $Q'DFQ$ par S est comparant les éléments diagonaux des deux cotés de l'équation(C-13) nous aurons :

$$\dot{\lambda} = S_{ii} \text{ tel que } i = 1,2,\dots,n. \quad (C-14)$$

On a aussi :

$$\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2 + \dots \dot{\lambda}_n = \text{tr}(S) \quad (C-15)$$

Notons la matrice jacobienne DF par $[DF]_{ij} = df_{ij}$, nous pouvons évaluer la matrice S pour obtenir l'équation (C-16)

$$\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2 + \dots \dot{\lambda}_n = df_{11} + df_{22} + \dots + df_{nn}. \quad (C-16)$$

Ainsi, les exposants de Lyapunov peuvent être obtenus en résolvant l'équation différentielle (C-14), pour (t) très grand, étant donné que le côté droit dépend des angles θ_i , nous avons besoin aussi des équations différentielles qui régissent l'évolution de ces angles.

Les équations différentielles pour les angles peuvent être obtenus par comparaison des éléments sub-diagonaux de l'équation (C-13) cela va nous donner :

$$f_1(\dot{\theta}) = s_{21} ; f_2(\dot{\theta}) = s_{31}; \dots ; f_{n(n-1)/2}(\dot{\theta}) = s_{n,n-1}. \quad (C-17)$$

Cet ensemble d'équations différentielles peut être transformé en une forme plus appropriée:

$$\dot{\theta}_i = g_i(\theta), \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2} \quad (C-18)$$

Où les équations de (θ_i) sont découplées des équations pour λ_i . Ceci évite le problème de dégénération de spectre Lyapunov.

En résolvant les équations (C-14) et (C-18) pour un système à $n(n+1)/2$ équations différentielles nous aurons les exposants Lyapunov.

Remarque :

Pour avoir les premiers m exposants de Lyapunov nous devons résoudre les m $(2n-m+1)/2$ équations différentielles ce qui est mieux que de résoudre n $(n-1)/2$ (qui est le nombre total d'équations) pour $m < n$. Ceci est un grand avantage de la méthode QR ajouté au fait qu'elle est très facile à programmer.

Illustration :

Lors de la simulation sous MATLAB, nous avons pris : $a = 10$; $r = 28$; $b = 8/3$ des valeurs pour lesquelles le système de Lorenz présente un comportement chaotique.

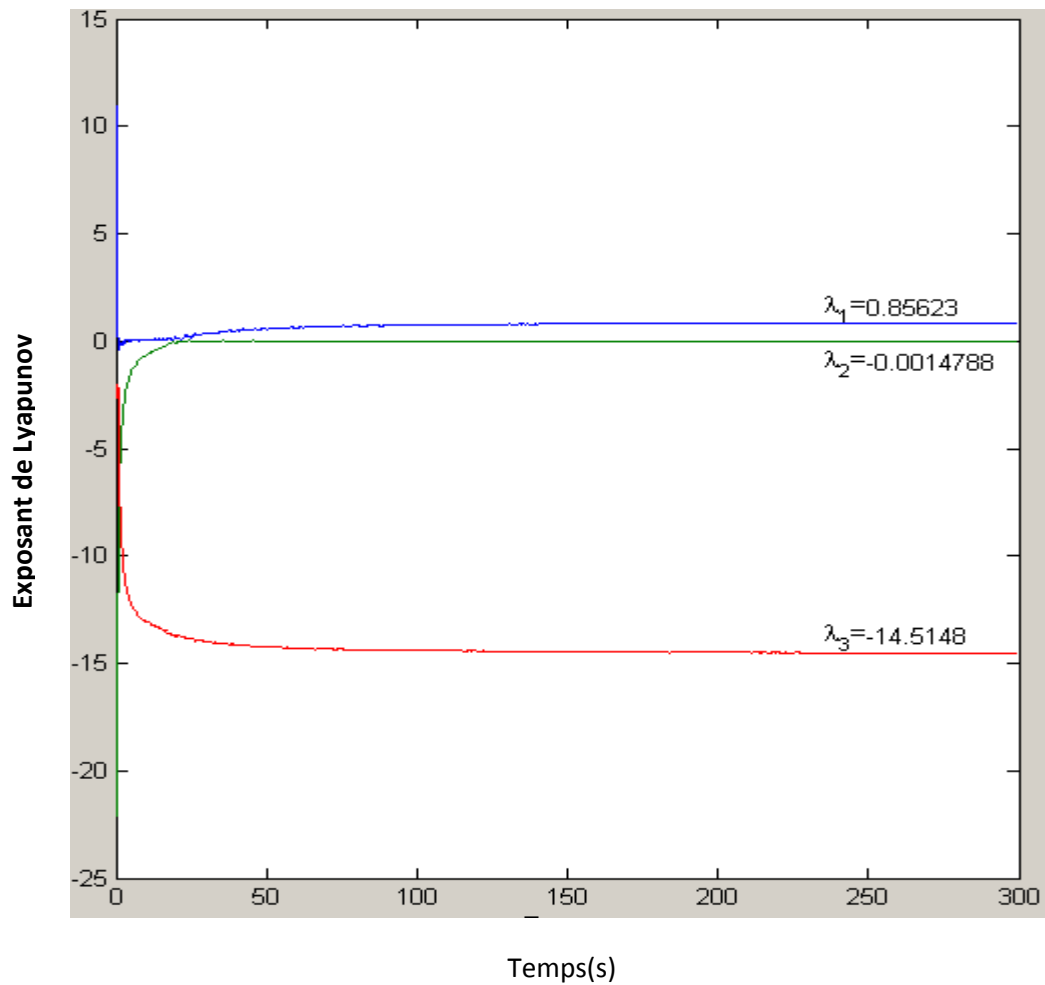


Figure C-1 : Représentation des exposants de Lyapunov.

Tableau récapitulatif des différents types d'attracteurs obtenus selon le signe des exposants de Lyapunov.

Type d'attracteur	Signe des exposants
Point fixe	(-, -, -)
Cycle limite	(0, -, -)
Tore	(0, 0, -)
Attracteur étrange	(+, 0, -)