REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE

ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI OUZOU

FACULTE DES SCIENCE

Département Mathématique

Mémoire de Master
Recherche Opérationnelle

Thème

La résolution des problèmes de programmation Linéaire avec contraintes bornées

Présente par :

LACHEMOT OUERDIA

Devant le jury D'examen Composé *de :*

CHEBBAH Mohamed

FAHAME Karima

AIDENE Mohamed

2015 /2016

Remerciements

Je tiens tout d’abord à exprimer tous mes remerciements à mon promoteur Mr. AIDENE Mohamed qui a accepté de m’encadrer pour la réalisation de ce modeste travail, et qui m’a orientée dans mon travail.

Je remercie profondément les membres du jury qui ont accepté d’ ´évaluer et de juger mon travail. La présidente Mme FAHAME Karima Examinateurs : Mr CHABBAH mohamed.et Mr AIDENE Mohamed.

Par la même, j’exprime mon extrême gratitude à l’ensemble des enseignants du d´département de mathématiques (option recherche opérationnelle) et particulièrement tous les enseignants qui m’ont assistée durant toute ma formation universitaire.

Finalement, je remercie chaleureusement Mr. AI DEN E Mohamed. qui n’a pas hésité à m’aider durant mes six années à la faculté des sciences.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à:

- La mémoire de Ma chère mère, c'est grâce à elle que je suis arrivée là, je n'oublierai jamais ses conseils et ses encouragements d'affronter les problèmes jusqu'au bout, que dieu l'accueille dans son vaste paradis.

- Mon père, qui m'a élevée avec son plus grand amour, que dieu le garde et le protège de tous les malheurs.

- Mes chères soeures Hayat, Lydia et ma tante chabeha.

- Mes chers frères Ahcene et Nassim.

- Mon trés cher futur mari Nacer que dieu le garde et le protège pour moi.

- A tous ceux qui m'aiment

Ouerdia

Table des matières

Introduction générale

La programmation linéaire constitue un domaine de la programmation mathématique le plus étudié. Elle concerne l'optimisation d'un programme mathématique ou la fonction objectif et les fonctions définissant les contraintes sont linéaires.

Dans la plupart des problèmes pratiques, les variables sont bornées. Une composante x_j est bornée inférieurement par d_{1j} et supérieurement par d_{2j}, où

$d_{1j} < d_{2j}$. Si on note d_1 et d_2 les vecteurs borne inférieure et supérieure respectivement, on obtient les contraintes suivantes

$d_1 \leq x \leq d_2$. La plus simple manière de traiter ces contraintes, consiste à introduire des variables d'écarts x_1 et x_2, on obtient ainsi les contraintes

$x + x_1 = d_2$ et $x - x_2 = d_1$. Dans ce cas le nombre de contraintes d'un problème de programmation linéaire à variables bornées sera augment de n contraintes

$$y_1 = x - d_2$$

$$y_2 = x - d_1$$

Une méthode adaptée du simplexe pour la résolution d'un problème de programmation linéaire à variables bornées, sans introduire de variables d'écarts, a été proposée par R.Gabassov et F.M.Kirrillova durant les années 80 . L'avantage de celle-ci est une méthode de points intérieurs, pour aller plus vite vers le somment optimal, elle permet aussi l'obtention d'une solution approchée et résout des problèmes de contrôle optimal.

Au début de son invention, elle a été appliquée à défférents types de problèmes de programmation mathématique, par la suite à des problèmes de contrôle optimal.

L'optimisation d'un modèle de programmation linéaire à l'aide de l'algorithme adapté et la sdétermination des valeurs marginales des ressources sont deux aspects importants de cet outil puissant qu'est la programmation linéaires pour le gestionnaire.

Dans le premier chapitre, on se propose une méthode directe pour résoudre un problème de programmation linéaire.

Dans le deuxième chapitre, on a résolu un problème programmation linéaire à contraintes bornées par la méthode adaptée.

Chaque partie théorique est suivie par un exemple numérique, et pour cela on a implémente la méthode adaptée sur la machine sous Matlab.

Matlab est un langage de programmation simple et très efficace, beaucoup plus concis. Un exemple : plus besoin de programmer des boucles modifiées un par un les éléments d’une matrice. On peut traiter la matrice comme une simple variable. Matlab contient également une interface graphique puissante, ainsi qu’une grande variété d’algorithmes scientifiques.

Chapitre 1

La méthode adaptée

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on fait une introduction de la méthode directe dite. Méthode adaptée pour résoudre un problème de programmation linéaire à variable bornée. Cette méthode est une méthode de points intérieurs et permet l'obtention d'une solution approche.

1.2 Position du problème

Considérons le problème classique de la programmation linéaire suivant :
Maximiser $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

Sous les contraintes :

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \qquad (1.1) \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n,
\end{aligned}
$$

$$d_{11} \leq x_1 \leq d_{21},\ d_{12} \leq x_2 \leq d_{22},\ \dots,\ d_{1n} \leq x_n \leq d_{2n}.$$

La forme matricielle du problème (1.1) est égale à :

$$F(x) = c'x \rightarrow \max, \qquad (1.2)$$

$$\begin{cases} Ax = b\ , & (1.3) \\ d_1 \leq x \leq d_2\ ; & (1.4) \end{cases}$$

où x, c, d_1, d_2 sont des n-vecteurs, b un m-vecteur réel,

$A = A[I, J] = (a_{ij}, i \in I, j \in J)$ une $m \times n$- matrice ;

$I = \{1,2,\dots, m\}$: l'ensemble des indices des lignes de A,

$J = \{1,2,\dots, n\}$: l'ensemble des indices des colonnes de A,

rang $A = m$, $m \leq n$.

Notons la région réalisable (admissible) par: M={x ∈ R^n:Ax = b ,d_1≤ x ≤ d_2}.

Définition 1 :

Tout vecteur x ∈ R^n vérifiant les contraintes (1.3) et (1.4) est appelé solution réalisable (admissible) du problème (1.2)-(1.4).

- Un plan x° est optimal si :

$c'x^{\circ} = \max_{x \in R^n} c'x.$

Soit ε ≥ 0 donné.

Un plan x^{ε} est appelé ε-optimal (solution approchée) si:

$c'x^{\circ} - c'x^{\varepsilon} \leq \varepsilon.$

Définition 2 : L'ensemble des m indices $J_B \subset J$, $|J_B| = m$ est dit support (appui) du problème (1.2)-(1.4) et la matrice $A_B = A(I, J_B)$ matrice de support (matrice d'appui) si $\det A_B \neq 0$.

De là, en choisissant un support J_B, tout vecteur x(J) peut s'écrire sous la forme $x(J) = (x(J_B), x(J_H))$, $J_H = J \setminus J_B$, où $x(J_B)$ est l'ensemble des composantes sur les indices du support, $x(J_H)$ est l'ensemble des composantes sur les indices hors-support.

De la même manière, la matrice A peut-être décomposée de la manière suivante :

$A(I, J) = (A(I, J_B), A(I, J_H))$

En utilisant cette dernière décomposition le système A.x = b prend la forme :

$A.x = (A(I, J_B)\ ,\ A(I, J_H)).(x(J_B), x(J_H))$

$A.x = A(I, J_B).x(J_B) + A(I, J_H).x(J_H)$

De là comme A_B est inversible, donc on peut calculer les composantes x_B en fonction de x_H :

$$x_B = x(J_B) = A_B^{-1}(b - A_H.x_H),\ \text{où}\ A_H = A(I, J_H),\ \ x_H = x(J_H).$$

Définition 3 : La paire $\{x, J_B\}$ formée du plan x et du support J_B, est appelée support- plan (plan d'appui) du problème (1.2)-(1.4).

Définition 4 : Un support plan $\{x, J_B\}$ est dit non-dégénéré si :

$d_{1j} < x_j < d_{2j}, \ j \in J_B$.

1.3 Accroissement de la fonctionnelle : **Critère d'Optimalité et de Suboptimalité**

Soit $\{x, J_B\}$ un support plan non dégénéré de départ.

Construisons les vecteurs suivants :

$u' = u'(I) = c'_B A_B^{-1}$,

$E' = u'A - c'$,

ou u'et E' sont appelés respectivement vecteurs des potentiels et des estimations.

Par construction, les composantes de support du vecteur E sont nulles :

$E_B = E(J_B) = 0$.

Considérons un autre plan $\bar{x} = x + \Delta x$ et calculons la quantité définissant l'accroissement de la fonctionnelle :

$\Delta F(x) = F(\bar{x}) - F(x) = c'\bar{x} - c'x = c'\Delta x = c'_B \Delta x_B + c'_H \Delta x_H$

Comme $A.x = b$ et $A\bar{x} = b$ alors

$A.\Delta x = 0 \Rightarrow A_B \Delta x_B + A_H \Delta x_H = 0 \Rightarrow \Delta x_B = -A_B^{-1} A_H.\Delta x_H$

En remplaçant Δx_B dans $\Delta F(x)$, on obtient :

$$\Delta F(x) = (- c'_B A_B^{-1} A_H + c'_H)\Delta x_H = \Delta E'_H x_H = - \sum_{j \in J_H} E_j \Delta x_j \qquad (1.5)$$

Comme $\bar{x}$ est un plan admissible alors, l'accroissement Δx vérifie:

$$d_{1j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_{2j} - x_j, \ j \in J_H \qquad (1.6)$$

Le maximum de l'accroissement de la fonctionnelle (1.5) sous les contraintes (1.6) :

$\Delta F(x) = -\sum_{j \in J_H} E_j \Delta x_j \longrightarrow \max$

$d_{1j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_{2j} - x_j,\ j \in J_H$

est atteint pour

$$\begin{cases} \Delta x_j = d_{1j} - x_j \; si \; E_j > 0 \;, \\ \Delta x_j = d_{2i} - x_j, si \; E_j < 0; \\ d_{1j} - x_j \leq x_j \leq d_{2j} - x_j, si \; E_j = 0, j \in J_H, \end{cases}$$

et égal à :

$\beta = \beta(x, J_B) = \sum_{j \in J_H^+} E_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j(x_j - d_{2j}),$

appelée valeur de suboptimalité, où $J_H^+ = \{j \in J_H / E_j > 0\}$;

$J_H^- = \{j \in J_H / E_j < 0\}$.

L'inégalité suivante est toujours vérifiée :

$\Delta F(x) = F(\bar{x}) - F(x) \leq \beta(x, J_B),\ \forall\ \bar{x} \in M$ et pour $\bar{x} = x^{\circ}$, on obtient

$F(x^{\circ}) - F(x) \leq \beta(x, J_B)$.

De cette dernière inégalité, on déduit le critère suivant :

Théorème 1 :(Critère d'optimalité) les relations

$$\begin{cases} x_j = d_{1j}, si \; E_j > 0; \\ x_j = d_{2j}, si \; E_j < 0; \\ d_{1j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_{2j} - x_j, si \; E_j = 0, j \in j_H. \end{cases} \quad (1.7)$$

Sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité du support plan $\{x, J_B\}$.

Preuve 1.1.

Condition Suffisante (C.S) : On sait que : $\Delta F(x) = F(x^{\circ}) - F(x) \leq \beta(x, J_B)$.

et des relations (1.7), on a :

$F(x^{\circ}) - F(x) \leq \beta(x, J_B) = 0$

$\Rightarrow F(x^{\circ}) \leq F(x) \Rightarrow x$ est optimal.

Condition Nécessaire (C.N) :

Soit $\{x, J_B\}$ un support-plan optimal non dégénéré et supposons que les relations (1.7) ne sont pas vérifiées, c'est-à-dire, il existe un indice $j^{\circ} \in J_H$ tel que :

$E_{j^\circ} > 0$, $x_{j^\circ} > d_{1j^\circ}$ où $E_{j^\circ} < 0$, $x_{j^\circ} < d_{2j^\circ}$.

1^er^ cas : $E_{j^\circ} > 0$, $x_{j^\circ} > d_{1j^\circ}$, $j^{\circ} \in J_H$.

Construisons un nouveau plan $\bar{x}$ de la manière suivante : $\bar{x} = x + \Delta x$

Construisons le vecteur $\bar{x}$ / $A\bar{x} = b$ et $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$.

Construire $\bar{x}$ revient à construire Δx.

Pour cela sur J_H, posons

$$\Delta x = \begin{cases} 0, \ si\ j \in J_H / \ j^\circ \ ; \\ -\theta, \ si\ j = j^\circ \ ; \ avec\ \theta > 0, \end{cases}$$

$A.\Delta x = 0 \Rightarrow \Delta x(J_B) = - A_B^{-1} A_H \Delta x(J_H) = \theta\, A_B^{-1} a_{j^\circ}$,

$\bar{x}$ vérifie $A\bar{x} = b$ et pour que $\bar{x}$ vérifie $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$, il faut prendre un θ suffisamment petit, d'autant plus que le support plan $\{x, J_B\}$ est non dégénéré.

En portant $\bar{x} = x + \Delta x$ dans la formule d'accroissement, on obtient

$\Delta F(x) = F(\bar{x}) - F(x) = \theta.E_{j^\circ} > 0$,

Ce qui contredit l'optimalité de $\{x, J_B\}$.

2^éme^ cas : $E_{j^\circ} < 0$, $x_{j^\circ} < d_{2j^\circ}$.

Construisons un nouveau plan $\bar{x}$ de la manière suivante : $\bar{x} = x + \Delta x$,

θ un réel positif non nul. Il faut trouver $\bar{x}$ tel que :

$A\bar{x} = b$, $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$. Pour cela sur J_H, posons

$$\Delta x_j = \begin{cases} 0, si\ j \in J_H \backslash j^\circ \\ \theta, si\ j = j^\circ ; \ avec\ \theta > 0 \end{cases}$$

$A.\Delta x = 0 \Rightarrow \Delta x(J_B) = A_B^{-1} A_H \Delta x(J_H) = -\theta\, A_B^{-1} a_{j^\circ}$, $\bar{x}$ vérifie $A\bar{x} = b$ et pour que $\bar{x}$ vérifie $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$, il faut prendre un θ suffisamment petit, d'autant plus que le support plan $\{x, J_B\}$ est non dégénéré. En portant $\bar{x} = x + \Delta x$ .dans la formule d'accroissement, on obtient

$\Delta F(x) = F(\bar{x}) - F(x) = -\theta.E_{j^\circ} > 0$

Ce qui contredit l'optimalité de $\{x, J_B\}$.

Théorème2. Critère de Suboptimalitè

Soit $\varepsilon > 0$ donné.

Pour l'optimalité du plan x, il est nécessaire et suffisant de trouver un tel support J_B, pour laquelle la valeur de suboptimalité vérifie l'inégalité suivante :

$\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$.

Preuve 1.2.

Condition Suffisante(C.S) :

Soit $\varepsilon > 0$. On sait que : $F(x^{\circ}) - F(x) \leq \beta(x, J_B)$ et pour $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon \Rightarrow$

$F(x^{\circ}) - F(x) \leq \varepsilon \Rightarrow$ x est ε-optimal.

Condition Nécessaire (C.N) : Faisons une décomposition de $\beta(x, J_B)$:

$$\beta(x, J_B) = \sum_{j\in j_H^+} E_j\left(x_j - d_{1j}\right) + \sum_{j\in j_H^-} E_j(x_j - d_{2j})$$

$$=\sum_{j\in J} E_j x_j - \sum_{j\in J_H^+} E_j d_{1j} - \sum_{j\in J_H^-} E_j d_{2j}$$

$$=E(j)x(j)-\sum_{j\in J_H^+} E_j d_{1j} - \sum_{j\in J_H^-} E_j d_{2j}$$

$$=(u'A - c')x(j) -\sum_{j\in J_H^+} E_j d_{1j} - \sum_{j\in J_H^-} E_j d_{2j}$$

$$=u'Ax - c'x\sum_{j\in J_H^+} E_j d_{1j}-\sum_{j\in J_H^-} E_j d_{2j}$$

$$=u'b - c'x - \sum_{j\in J_H^+} E_j d_{1j} - \sum_{j\in J_H^-} E_j d_{2j}$$

Pour cela, construisons le problème dual du problème primal (1.2)-(1.4) :

$\Phi(\lambda) = bu' - d_1.\upsilon + d_2.\omega \rightarrow \min$

$$\begin{cases} Au' - v + w = c, \\ v \geq 0\,, w \geq 0. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que le vecteur $\lambda = (u, \upsilon, \omega)$ défini de la manière suivante :

$u = y = c_B' A_B^{-1}$,

$\upsilon_j = E_j$, $\omega_j = 0$, si $E_j \geq 0$,

$\upsilon_j = 0$, $\omega_j = -E_j$, si $E_j \leq 0$, $j \in J$,

est un plan dual.

$\beta = \beta(x, J_B) = \sum_{j\in J} E_j x_j - \sum_{j\in J_H^+} E_j d_{1j} - \sum_{j\in J_H^-} E_j d_{2j}$

En introduisant le plan dual défini ci-dessus, on obtient :

$\beta(x, J_B) = E'x - d_1\upsilon + d_2\omega$

$= u'Ax - c'x - d_1\upsilon + d_2\omega$

$= u'Ax - c'x - d_1\upsilon + d_2\omega$

$= b'u - c'x - d_1\upsilon + d_2\omega + c'x^\circ - c'x$

$= (c'x^\circ - c'x) + (b'u - d_1\upsilon + d_2\omega - c'x^\circ)$

$= (c'x^\circ - c'x) + (\Phi(\lambda) - \Phi(\lambda^\circ)) = \beta_x + \beta_B.$

où $\beta_x = (c'x^\circ - c'x)$: est appelée, l'écart (mesure) de la non optimalité du plan x, $\beta_B = (\Phi(\lambda) - \Phi(\lambda^\circ))$: est appelée, l'écart (mesure) de la non optimalité du support J_B.

Pour un support J_B optimal (λ optimal), on aura : $\Phi(\lambda) = \Phi(\lambda^\circ)$

$\Rightarrow \beta(x, J_B) = c'x^\circ - c'x \leq \varepsilon \Rightarrow$ x est ε-optimal

Remarques 1.

A partir de l'expression $\beta_B = (\Phi(\lambda) - \Phi(\lambda^\circ))$, on conclut que l'amélioration du support-plan $\{x, J_B\}$ peut se faire indépendamment des uns et des autres. Le changement du plan x entraine la diminution de β_x. Le changement du support J_B entraine la diminution de β_B.

1. Si $\beta(x, J_B) = 0$, alors x est optimal.

2. Si $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$ alors x est ε-optimal.

3. Si $\beta(x, J_B) > \varepsilon$, alors on passe à l'itération de l'algorithme (au changement du support-plan $\{x, J_B\}$).

1.4 Itération de l'algorithme

L'itération de l'algorithme consiste au changement $\{x, J_B\} \rightarrow \{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ telle que :

$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \leq \beta(x, J_B)$.

En d'autres termes une itération de la méthode adaptée est basée sur la décroissance de la valeur du suboptimalité. Cette itération est constituée de deux procédures :

1) changement du plan.
2) changement du support.

1. La procédure du changement consiste à diminue du changement du plan.

2. La procédure du changement $J_B \rightarrow \bar{J}_B$ consiste à diminue $\beta(\bar{J}_B)$. D'où le changement de plan consiste à augmenter $c'x$ et le changement du support consiste à diminuer $\Phi(\lambda)$.

1.4.1 Changement de plan

Soit $\{x, J_B\}$ un support-plan non dégénéré et $\varepsilon \geq 0$ donné, tel que $\beta(x, J_B) > \varepsilon$. Le nouveau plan $\bar{x}$ sera construit de la manière suivante :

$\bar{x} = x + \theta.\ell$

où ℓ est la direction admissible, θ (un réel positif non nul) est le pas admissible maximal le long de la direction ℓ, tel que :

$F(\bar{x}) \geq F(x)$.

Le vecteur de direction $\ell = (\ell(J_B), \ell(J_H))$ est construit comme suit : Sur J_H, on pose $\theta = 1$ et

$$\ell_j = \begin{cases} d_{1j} - x_j, E_j > 0; \\ d_{2j} - x_j, E_j < 0, \\ 0, si \quad E_j = 0; j \in J_H, \end{cases} \qquad (1.8)$$

et $\ell(J_B) = -A_B^{-1}.A_H.\ell(J_H)$ pour avoir $A\bar{x} = b$. Pour que $\bar{x}$ vérifie $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$

il faut calculer

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_{1j} - x_j}{\ell_j}, si\ \ell_j < 0; \\ \frac{d_{2j} - x_j}{\ell_j}, si\ \ell_j > 0, \\ \infty \quad , si\ \ell_j = 0;\ j \in J_B, \end{cases}$$

$\theta_{j^\circ} = \min_{j \in J_B}\{\theta_j\}$, et le pas maximal sera : $\theta^\circ = \min\{1, \theta_{j^\circ}\}$.

De là le nouveau plan sera : $\bar{x} = x + \theta^\circ.\ell$ et la valeur de suboptimalité pour le nouveau plan sera : $\beta(\bar{x}, J_B) = \sum_{j \in J_H^+} E_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j(\bar{x}_j - d_{2j})$

$= \sum_{J \in J_H^+} E_j\big(x + \theta^\circ \ell_j - d_{1j}\big) + \sum_{j \in J_H^-} E_j\big(x + \theta^\circ \ell_j - d_{2j}\big)$

$= \sum_{j \in J_H^+} E_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{J \in J_H^-} E_j(x_j - d_{2j}) + \theta^\circ.\sum_{j \in j_H^+} E_j \ell_j + \theta^\circ.\sum_{j \in J_H^-} E_j \ell_j$

$\beta(\bar{x}, J_B) = \beta(x, J_B) + \theta^\circ \sum_{j \in J_H} E_j \ell_j$.

En remplaçant les ℓ_j donnés par (1.8), on obtient

$\beta(\bar{x}, J_B) = \beta(x, J_B) - \theta^\circ.\beta(x, J_B)$

$\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^\circ)\beta(x, J_B)$.

De cette dernière expression on conclut :

1. Si $\beta(x, J_B) = 0$, alors x est optimal.
2. Si $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$, alors x est ε-optimal.
3. Si $\beta(x, J_B) > \varepsilon$, alors on passe au changement du support $J_B \rightarrow \bar{J}_B$.

1.4.2 Changement du support

1. Changement du support à pas court :

Le changement du support $J_B \rightarrow \bar{J}_B$ consiste à faire un changement du co-plan E vers $\bar{E}$ et du vecteur des potentiels u vers $\bar{u}$ de telle sorte que :

$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \leq \beta(\bar{x}, J_B)$.

Pour cela posons :

$\bar{E}(J) = E(J) + \sigma^\circ.t(J) \in R^n$ (1.9)

$\bar{u}(I) = u(I) + \sigma^\circ.t(I) \in R^n$ (1.10) où t est la direction de diminution de la fonction duale, σ° le pas maximal le long de cette direction. Calcul de t et σ° .En utilisant la définition de E et u on obtient :

$\bar{E} = \bar{u}.A - c' = (u' + \sigma^{\circ}.t'(I)).A - c' = E' + \sigma^{\circ}.t'(I).A$

De là

$t'(J) = t'(I).A(I, J) \Rightarrow t'(J_B) = t'(I).A(I, J_B) \Rightarrow t'(I) = t'(J_B).A_B^{-1}$

ce qui donne :

$t'(J_H) = t'(J_B).A_B^{-1}.A(I, J_H)$

Après calcul du plan $\bar{x} = x + \theta^{\circ}.\ell$, le pas θ° est donné par

$\theta^{\circ} = \min \{1, \theta_{j^{\circ}}\} = \theta_{j^{\circ}}$, $j^{\circ} \in J_B$.

On cherchera un indice $j_1 \in J_H$ qui va entrer dans la base à la place de j°. Pour cela posons :

$$t_j = \begin{cases} -sign(\ell_{j^{\circ}}), si\ j = j_{\circ}\ ; \\ 0, si\ j^{\circ} \in j_B \backslash j^{\circ}\ ; \end{cases}$$

$t'(J_H) = t'(J_B).A_B^{-1}.A(I, J_H)$;

et calculons :

$\sigma^{\circ} = \sigma_{j1} = min_{j \in J_H}\{\sigma_j\}$

$$\sigma_j = \begin{cases} -\frac{E_j}{t_j}, si\ E_j.t_j < 0; \\ 0\ , si\ E_j = 0,\ x_j \neq d_{1j}, t_j > 0\ ou\ E_j = 0, x_j \neq d_{2j}, t_j < 0, j \in J_H; \\ \infty\ , sinon. \end{cases}$$

Le calcul de σ° satisfait $\bar{E}_j .E_j \geq 0$, $\forall$ j $\in$ J.

Le nouveau support est : $\bar{J}_B = (J_B \backslash j_{\circ}) \cup j_1$.

On peut facilement remarquer que $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B)$ est égale à :

$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = \sum_{j \in J_H^+} E_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j(\bar{x}_j - d_{2j})$

où $j_H^+ = \{j \in J_H / \bar{E}_j \geq 0\}$; $\overline{J_H} = \{j \in J_H / \bar{E}_j \leq 0\}$.

En utilisant la relation (1.9) et sur J_B

$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = \sum_{j\in J_H^+} E_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j\in J_H^-} E_j(\bar{x}_j - d_{2j})$

$+\sigma^{\circ}(\sum_{j\in J_H^+} t_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{J\in J_H^-} t_j(\bar{x}_j - d_{2j}))$ (1.11)

$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = (1-\theta^{\circ}).\beta(x, J_B) + \sigma^{\circ}(\sum_{j\in J_H^+} t_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{J\in J_H^-} t_j(\bar{x}_j - d_{2j}))$

$t.\ell = 0$ car $A.\ell = 0$, $t'(J_B) = t'(I).A(I, J_B)$ et $t'(J_H) = t'(J_B).A_B^{-1}.A(I, J_H)$, de plus par construction toutes les composantes de (J_B) sont nulles sauf à l'indice j°.

Posons :

$\alpha = \alpha^{\circ} = \sum_{J\in J_H^+} t_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{J\in J_H^-} t_j(\bar{x}_j - d_{2j}) = -(1-\theta^{\circ})\sum_{j\in J} t_j\ell_j$

$\alpha = \alpha^{\circ} = (1-\theta^{\circ})\, t_{j^{\circ}}.\ell_{j^{\circ}} = \begin{cases} (x_{j^{\circ}} + \ell_{j^{\circ}} - d_{1j^{\circ}}), si\ t_{j^{\circ}} = 1; \\ -(x_{j^{\circ}} + \ell_{j^{\circ}} - d_{2j^{\circ}}), si\ t_{j^{\circ}} = -1, j^{\circ} \in J_H \end{cases}$

Donc :

$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = (1-\theta^{\circ}).\beta(x, J_B) - \sigma^{\circ}.|\alpha^{\circ}|$.

2. Changement du support à pas long :

Le changement du support entraıne la diminution de la fonctionnelle du dual.

Soit $\lambda = (u, \upsilon, \omega)$ est une solution réalisable arbitraire du dual. Dans la suite nous considérons que les composants υ, ω sont définis par le vecteur $E = A'u - c$

$\upsilon_j = E_j$, $\omega_j = 0$, si $E_j \geq 0$; $\upsilon_j = 0$, $\omega_j = -E_j$, si $E_j < 0$, $j \in J$. (1.12)

Parce que la valeur de la fonction du coût dual peut être diminuée sans changer u.

Soit $\lambda(\sigma) = (y(\sigma), \upsilon(\sigma), \omega(\sigma))$, $u(\sigma) = u + \sigma.\Delta u$, $\upsilon(\sigma) = \upsilon + \sigma.\Delta\upsilon$,

$\omega(\sigma) = \omega + \sigma.\Delta\omega$, $\sigma \geq 0$ est une autre solution réalisable dual avec $\upsilon(\sigma)$, $\omega(\sigma)$ a déterminer par le vecteur $E(\sigma) = A'u(\sigma) - c$.

Evidemment, $\sigma\,\Delta E = E(\sigma) - E = \sigma.\, A'\Delta u$. Calculons la valeur de la fonction du coût dual dans une solution réalisable dual $\lambda(\sigma)$:

$\Phi(\lambda(\sigma)) = b'u(\sigma) + d_1'.\upsilon(\sigma) + d_2'.\omega(\sigma)$

$= b'(u + \sigma.\Delta u) - d_1'(\upsilon + \sigma.\Delta\upsilon) + d_2'(\omega + \sigma.\Delta\omega)$,

$= \Phi(\lambda) + \sigma(\Delta u - d'_1.\Delta\upsilon + d'_2.\Delta\omega)$,

$= \Phi(\lambda) + \sigma(\Delta u A x - d'_1.\Delta\upsilon + d'_2.\Delta\omega)$,

$= \Phi(\lambda) + \sigma(\Delta E' x - d'_1.\Delta\upsilon + d'_2.\Delta\omega)$.

On peut vérifier facilement l'expression suivante pour $\Phi(\lambda(\sigma))$

$\Phi(\lambda(\sigma)) = \Phi(\lambda) + \sigma(\sum_{Ej\leq 0, Ej(\sigma)\leq 0, j\in J} \Delta E_j(x_j - d_2)$

$+\sum_{Ej\geq 0, Ej(\sigma)\geq 0, j\in J} \Delta E_j(x_j - d_1) + \sum_{X\, Ej\geq 0, Ej(\sigma)<0, j\in J}(E_j.\sigma(x_j - d_2) - E_j(x_j - d_1)) + \sum_{Ej\leq 0, Ej(\sigma)>0, j\in}(E_j.\sigma(x_j - d_2) - E_j(x_j - d_2))$ (1.13)

Analysant la formule (1.13), nous concluons que la fonction du coût dual est linéaire par morceau le long des directions Δu et ΔE :

$\Phi(\lambda(\sigma)) = \Phi(\lambda) + \sigma(\sum_{Ej\leq 0, Ej(\sigma)\leq 0, j\in J} \Delta E_j(x_j - d_2)$

$+\sum_{Ej\geq 0, Ej(\sigma)\geq 0, j\in J} \Delta E_j(x_j - d_1))$

Pour $0 \leq \sigma \leq \sigma_1$, $\sigma_1 = \max\{\sigma : E_j(\sigma).E_j \geq 0, j \in J\}$;

$\Phi(\lambda(\sigma)) = \Phi(\lambda(\sigma_1 - 0)) + (\sigma - \sigma_1)(\sum_{Ej\leq 0, Ej(\sigma_1)=0, j\in J} \Delta E_j(x_j - d_2) +$

$$\sum_{Ej\geq 0, Ej\,(\sigma_1)=0, j\in J} \Delta E_j(x_j - d_1))$$

Pour $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, $\sigma_2 = \max\{\sigma \geq \sigma_1 : E_j(\sigma).E_j \geq 0, j \in J\}$;

et ainsi de suite.

Donc, le taux initial de diminution de la fonction du coût dual est égal à :

$\frac{d\Phi(\lambda(\sigma))}{d\sigma}|_{\sigma=+0} = \sum_{E_j\leq 0, Ej(\sigma)\leq 0, j\in J} \Delta E_j(x_j - d_2)$

$+ \sum_{E_j\geq 0, Ej(\sigma)\geq 0, j\in J} \Delta E_j(x_j - d_1)$ (1.14)

et le taux de diminution reçoit des termes non négatifs quand la composante

$E_j + \sigma.\Delta E_j$ change son signe :

$\frac{d\Phi(\lambda(\sigma))}{d\sigma}|_{\sigma=\sigma*+0} = \frac{d\Phi(\lambda(\sigma))}{d\sigma}|_{\sigma=\sigma*-0}$

$= \sum_{Ej\leq 0, Ej(\sigma*)=0, j\in J} \Delta E_j(x_j - d_2) + \sum_{Ej\geq 0, Ej(\sigma*)=0, j\in J} \Delta E_j\left(x_j - d_1\right)$ (1.15)

L'idée du pas long dual consiste à trouver la dimension du pas $\sigma^* \geq 0$ qui minimise la fonction $\Phi(\lambda(\sigma))$, $\sigma \geq 0$.

La méthode adaptée avec un pas long :

La modification de la méthode par rapport à la méthode a pas court consiste à trouver la dimension du pas $\sigma^* \geq 0$ qui minimise la fonction $\Phi(\lambda(\sigma))$, $\sigma \geq 0$.

Calculons les longueurs du pas par les règles :

$$\sigma_j = \begin{cases} -\frac{E_j}{t_j}, si\ E_j.t_j < 0; \\ 0\ , si\ E_j = 0, x_j \neq d_{1j}, t_j > 0\ ou\ E_j = 0, x_j \neq d_{2j}, t_j < 0, j \in J_H\ ; \\ \infty\ , sinon\ . \end{cases}$$

Mettons les pas finis en ordre croissant :

$\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_q$

on a :

$\Phi(\lambda) = b'u - d_1'.\upsilon + d_2'.\omega$.

Posons : $\bar{\lambda} = \lambda(\sigma) = \lambda + \sigma.t$

d'où :

$u(\sigma) = u + \sigma.t$, $\upsilon(\sigma) = \upsilon + \sigma.t$, $\omega(\sigma) = \omega + \sigma.t$,

Calculons la quantité $\Phi(\bar{\lambda})$:

$\Phi(\bar{\lambda}) = \Phi(\lambda(\sigma)) = b'u(\sigma) - d_1'.\upsilon(\sigma) + d_1'.\omega(\sigma)$,

$= b'(u + \sigma.t(I)) - d_1'(\upsilon + \sigma.t(J)) + d_2'(\omega + \sigma.t(J))$

$= b'u - d_1'\upsilon + d_2'\omega + \sigma(b'.t(I) - d_1'.t(J) + d_2'.t(J))$

$= \Phi(\lambda) + \sigma(t'(I).b - t'(J).d_1 + t'(J).d_2)$

$= \Phi(\lambda) + \sigma(t'(J_B).A_B^{-1}.b + t'(J_B)(d_2 - d_1)_B + t'(J_H)(d_2 - d_1)_H)$

$= \Phi(\lambda) + \sigma(t_B'.A_B^{-1}.b + t_B'\ (d_2 - d_1)_B + t_B'.A_B^{-1}.A_H(d_2 - d_1)_H)$

$= \Phi(\lambda) + \sigma.t_B'(A_B^{-1}.b + (d_2 - d_1)_B + A_B^{-1}A_H(d_2 - d_1)_H)$

Pour chaque σ_i, $i = 1,\ldots, q$ calculons $\Phi(\lambda)$ qui correspond aux σ_i.

ordonnons ces $\Phi(\lambda(\sigma_i))$ par ordre croissant :

$\Phi(\lambda(\sigma_1)),\Phi(\lambda(\sigma_2)),\ldots,\Phi(\lambda(\sigma_q))$

l'indice de σ_{q-1} qui correspond à

$\Phi(\lambda(\sigma_{q-1}))$ qui doit entrer dans la base, donc $\sigma_* = \sigma_{q-1}$, et cet indice est égal à j_1, $j_1 \in J_H$

Le nouveau support est : $\bar{J}_B = (J_B \setminus j^\circ) \cup j_1$.

1.5 Algorithme de la méthode

I. Soit $\{x, J_B\}$ un support plan de départ.

II. Calculer :

1. $u' = c'(J_B).A_B^{-1}$.
2. $E' = u'.A - c$.
3. $\beta = \beta(x, J_B) = \sum_{j\in J_H^+} E_j(x - d_{1j}) + \sum_{j\in J_H^-} E_j(x - d_{2j})$.

- Si $\beta = 0$, $\{x, J_B\}$ est optimal, arrêt du processus.
- Si $\beta \le \varepsilon$, $\{x, J_B\}$ est ε-optimal, arrêt du processus.
- Si $\beta > \varepsilon$, on passe à l'itération suivante.

III. Changement de plan

1. Déterminer le vecteur $\ell(J)$.

2. Déterminer le vecteur $\bar{x}(J)$.

3. Calculer $(1 - \theta^\circ)\beta$.

- Si $(1 - \theta^\circ)\beta > \varepsilon$, on passe à l'itération suivante .
- Si $(1 - \theta^\circ)\beta \le \varepsilon$, $\{\bar{x}, J_B\}$ est ε -optimal, arrêt du processus.
- Si $\theta^\circ = 0$, $\{\bar{x}, J_B\}$ est optimal, arrêt du processus.

IV. Changement de support

Calculer le vecteur t.

Calculer $\sigma_{j1} = \min_{j\in J_H}\{\sigma_j\}$

Le nouveau support $\bar{J}_B = (J_B \setminus j^{\circ}) \cup j_1$.

Aller à II (on passe à une nouvelle itération avec $(\{\bar{x}, \bar{J}_B\})$.

1.6 Convergence de la méthode adaptée

Une méthode d'optimisation est dite finie si elle résout un problème en un nombre fini d'itérations. Chaque itération de la méthode adaptée décrite dans la section (1.4) consiste à un nombre fini d'opérations.

Définition 5. On dit qu'un support-plan $\{x, J_B\}$ est très dégénéré si la valeur de la fonctionnelle pour ce support-plan n'augmente pas.

Théorème 3 L'algorithme de la méthode adaptée pour la résolution du problème (1.2)-(1.4) est fini si à chaque itération on a des supports plans non dégénérés.

Chapitre 2

Problème avec des contraintes bornées

2.1 Position du problème

Considérons le problème de programmation linéaire avec contrainte bornés suivant :

Contrainte a maximise :

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max,$$

Sous les contraintes :

$$\begin{aligned} b_{11} &\leq a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_{21}, \\ b_{12} &\leq a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_{22}, \\ b_{1m} &\leq a_{n1}x_1 + a_{n2}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \leq b_{2m}, \\ d_{11} &\leq x_1 \leq d_{21},\ d_{12} \leq x_2 \leq d_{22},\ \ldots,\ d_{1n} \leq x_n \leq d_{2n}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

La forme matricielle du problème (1.2) est égale:

$$\begin{cases} F(x) = c\'x \rightarrow max, \\ b_1 \leq Ax \leq b_2, \\ d_1 \leq x \leq d_2, \end{cases} \tag{2.2}$$

où x, c, d_1, d_2, b_1, b_2 deux vecteurs réels.

A = A[I, J] une m × n-matrice réelle de rang $m \leq n$,

I = {1,2,..., m} : l'ensemble des indices des lignes de A,

J = {1,2,..., n} : l'ensemble des indices des colonnes de A.

Notons la région réalisable (admissible) :

$$M = \{x \in R^n : b_1 \leq Ax \leq b_2,\ d_1 \leq x \leq d_2\}.$$

2.2 Définition essentielles

Plan admissible

On appelle plan admissible (ou solution réalisable) du problème (2.2) tout vecteur $x \in M$.

Plan optimal

Tout plan admissible réalisant le maximum de la fonctionnelle F, est dit plan optimal (où solution optimal).

Plan suboptimal

Soit ε un nombre real positif arbitraire.

Tout plan x^{ε} vérifiant l'inégalité $F(x^{\circ}) - F(x^{\varepsilon}) \leq \varepsilon$,est dit plan suboptimal

(où plan ε-optimal) du problème (2 .2), où x° est un plan optimal.

Support plan

Des ensemble I et J, choisissons les sous-ensembles $I_B \subset I$, $J_B \subset J$, $|I_B| = |J_B|$.

Posons $s_B = \{I_B, J_B\}$.

L'ensemble s_B est dit support du problème (2.2) si $\det A(I_B, J_B) \neq 0$.

La matrice $A_B = (I_B, J_B)$ est appelée matrice du support

La paire $\{x, s_B\}$ formée par un plan admissible x, et un support s_B du problème (2. 2) est appelée support plan.

Un support plan $\{x, s_B\}$ du problème (2.2) est dit non dégénéré si seulement si :

$$d_{1j} < x_j < d_{2j},\ \forall\, j \in J_B,$$
$$b_{1i} < a_i x < b_{2i},\ \forall\, i \in I_H.$$

2.3 Formule d'accroissement de la fonctionnelle

Soit $\{x, s_B\}$ un support plan du problème (2. 2), et soit $\bar{x} = x + \Delta x$, un autre plan admissible.

On définit les vecteurs des écarts inferieurs ou supérieurs des contraintes essentielles du problème (2.1):

$W_1(I) = b_1 - Ax,$ (2 .3)

$W_2(I) = b_2 - Ax,$ (2.4)

on notera que pour tout support plan$\{x, s_B\}$, $w_1(I) \leq 0$ et $w_2(I) \geq 0$.

Calculons l'accroissement de la fonctionnelle :

$F(\bar{x}) - F(x) = c'\bar{x} - c'x = c'\Delta x.$

Désignons par $z(I_B) = A(I_B, J)\Delta x(J)$

$z(I_B) = A(I_B, J_B)\Delta x(J) + A(I_B, J_H)\Delta x(J_H)$

$\Delta x(J_B) = A_B^{-1} z(I_B) - A_B^{-1} A(I_B, J_H)\Delta x_H$

$b_1 \leq A\bar{x} \leq b_2$

$b_1 \leq Ax + A\Delta x \leq b_2$

$b_1 - Ax \leq A\Delta x \leq b_2 - Ax$

$b_1(I_B) - A(I_B, J)x(J) \leq A(I_B, J)\Delta x(J) \leq b_2(I_B) - A(I_B, J)x(J)$

$b_1(I_H) - A(I_H, J)x(J) \leq A(I_H, J)\Delta x(J) \leq b_2(I_H) - A(I_H, J)x(J)$

$w_1(I_B, x) \leq z(I_B) \leq w_1(I_B, x)$ (2.5)

$F(\bar{x}) - F(x) = c' \Delta x = c'_B x_B + c'_H \Delta x_H.$ (2.6)

$= c'_B A_B^{-1} z(I_B) - c'_B A_B^{-1} A(I_B, J_H)\Delta x(J_H) + c'_H \Delta x_H.$

Posons $u'(I_B) = c'_B A_B^{-1}$ vecteur des potentiels, $u'(I_H) = 0$.

$E(J) = u'(I_B)A(I_B, J) - c'(J)$ vecteur des estimation.

De là on aura l'accroissement

$\Delta F(x) = F(\bar{x}) - F(x) = u'(I_B)z(I_B) - E(J)\Delta x(J_H)$ (2.7)

le maximum de l'accroissement $\Delta F(x)$, sous les contrainte

$d_{1j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_{2j} - x_j$, $j \in J_H$. (2.8) est atteint pour

$$\begin{cases} \Delta x_j = d_{1j} - x_j \;\; si\ E_j > 0, \\ \quad = d_{2j} - x_j \;\; si\;\; E_j < 0, \\ \quad = 0\ si\;\; E_j = 0\ j \in\ J_H, \\ z_i = w_{1i}\ si\;\; u_i < 0, \\ z_i =\ w_{2i}\ si\;\; u_i > 0, \\ \quad = 0\ si\;\; u_i = 0, i \in I_B, \end{cases}$$

et est égal à $\beta = \beta(x, s_B)$:

$$\beta(x, s_B) = \sum_{i\in I_B^-} u_i w_{1i} + \sum_{i\in I_B^+} u_i w_{2i} + \sum_{j\in J_H^-} E_j(x_j - d_{1j})$$

$$+ \sum_{j\in J_H^+} E_j(x_j - d_{2j}) \qquad (2.9)$$

appelée valeur de suboptimalité ,

où $I_B^-=\{i\in I_B \,/\, u_i < 0\}$, $I_B^+ =\{i \in I_B \,/\, u_i \geq 0\}$, $J_H^-=\{j \in J_H \,/\, E_j < 0\}$ et $J_H^+=\{j \in J_B \,/\, E_j \geq 0\}$

Remarque 3.4 : Pour tout plan admissible $\bar{x}$, du problème (2.2), la valeur de suboptimalité $\beta(x, s_B)$ du support pan $\{x, s_B\}$ vérifie :

$$F(\bar{x}) - F(x) \leq \beta(x, s_B) \qquad (2\ .10)$$

en particulier pour un plan optimal x°, on a :

$$0 \leq F(x^{\circ}) - F(x) \leq \beta(x, s_B) \qquad (2\ .11)$$

2.4 Critère d'optimalité

Théorème 4.1 :

Les conditions

$$\begin{cases} w_{1i} = 0\ si\ u_i < 0\ , i \in I_B, \\ w_{2i} = 0\;\; si\ u_i > 0\ , i \in I_B \\ x_j = d_{2j}\ si\ E_j < 0, j \in J_H, \\ x_j = d_{1j}\ si\ E_j > 0, j \in J_H, \\ x_j \in \left[d_{1j}, d_{2j}\right] si\;\; E_j = 0, j \in J_H, \end{cases} \qquad (2.12)$$

sont suffisantes et dans le cas non dégénérescence elles sont aussi nécessaires

Pour l'optimalité du support plan $\{x, s_B\}$.

Démonstration

Condition suffisante : Soit $\{x, s_B\}$ un support plan du problème (2 .2), pour lequel les conditions (2 .12), sont vérifiées.

En utilisant la relation (2.12), $\beta(x, s_B) = 0$. De là $F(x) \geq F(\bar{x})$ pour tout plan admissible $\bar{x}$, ainsi le support plan $\{x, s_B\}$ est optimal .

Condition nécessaire : Soit $\{x, s_B\}$ un support plan optimal non dégénéré du problème (2 .2), pour lequel les conditions (2 .12) ne sont pas vérifiées, alors

on a les deux cas suivants :

Cas a : $\exists\, j^\circ \in J_H$ tel que $E_{j^\circ} < 0$ et $x_{j^\circ} < d_{2j^\circ}$ ou $E_{j^\circ} > 0$ et $x_{j^\circ} < d_{1j^\circ}$

Cas b : $\exists\, i^\circ \in I_B$ / $u_{i^\circ} < 0$ et $w_{1i^\circ} < 0$ ou $u_{i^\circ} > 0$ et $w_{2i^\circ} > 0$

Construisons, alors un nouveau plan admissible $\bar{x} = x + \theta.\ell$, tel que $F(\bar{x}) > F(x)$ en considérant les cas a et b .

a)-dans ce cas, on pose $\ell_{j^\circ} = \text{sign}(\alpha^\circ)$ où

$$\alpha^\circ = \begin{cases} d_{1j^\circ} - x_{j^\circ} \; si \; E_{j^\circ} > 0 \\ d_{2j^\circ} - x_{j^\circ} \; si \; E_{j^\circ} < 0 \end{cases}, \; \ell_j = 0 \;\forall\, j \in J_H \setminus \{j^\circ\} \;;$$

$\ell(J_B) = A(w(I_B) - A(I_B, J_H))\,\ell(J_H)$ où $\ell(J)$ est donné par la relation (2.7), avec $\Delta w(I) = 0$, ce qui donne

$\ell(J) = A(I, J)(C(I, J_B)A_B^{-1}\, w(I_B) - A(I, J)\,\ell(J_H))$,

$$\text{avec } w_i = \begin{cases} w_{1i} \; si \; u_i < 0, \\ w_{2i} \;\; si \;\; u_i > 0, \\ 0 \; sinon\,. \end{cases}$$

Par construction de $\ell(J_H)$,

on a $\bar{x}_{j^\circ} = \begin{cases} x_{j^\circ} - \theta \; si \; x_{j^\circ} > d_{1j^\circ}, \\ x_{j^\circ} + \theta \; si \; x_{j^\circ} < d_{2j^\circ} \end{cases}$ et $\bar{x}_j = x_j \;\; \forall \, j \in J_H \setminus \{j^\circ\}$,

il existe alors $\theta_1 > 0$ tel que le double inégalité $d_{1j} \leq \bar{x}_j \leq d_{2j}$ soit vérifiée sur J_H

d'autre part, $\{x, s_B\}$ étant non dégénéré, on a $d_{1j} < x_j < d_{2j}$, $\forall \, j \in J_B$,

$b_{1i} \leq a_i x \leq b_{2i}$, $\forall \, i \in I_H$, il existe donc $\theta_2 > 0$ tel que les relations

$d_{1j} \leq \bar{x}_j \leq d_{2j}$ $\forall \, j \in J_B$, et $b_{1i} \leq a_i x \leq b_{2i}$ $\forall \, i \in I_H$, soient vérifiées.

Ainsi, pour $\theta = \min\{\theta_1, \theta_2\}$ et par construction de $\ell(J_B)$, le vecteur $\bar{x} = x + \theta.\ell$

devient plan admissible du problème (2 .2).

De la relation (2 .8), on obtient :

$F(\bar{x}) - F(x) = - \theta \; \text{sign}\,(\alpha^\circ) E_{j^\circ} = \theta \, | E_{j^\circ} | > 0$

Car sign (α°) = - sign (E_{j°), ce qui contredit l'optimalité du support plan $\{x, s_B\}$.

On a $\bar{x}(J_H) = x(J_H)$, et comme $\{x, s_B\}$ et non dégénéré, il existe $\theta > 0$ tel que

$d_{1j} \leq x_j + \theta.\ell_j \leq d_{2j}$, $\forall \, j \in J_B$, et $b_{1i} \leq a_i(x + \theta_2.\ell) \leq b_{2i}$, $\forall \, i \in I_H$.

b)- dans ce cas, on pose $\ell(J_H) = 0$, $\ell(J_B) = A_B^{-1}(w(I_B) - A(I_B , J)\, \ell(J))$ où $\ell(J)$

est donne par la relation (2 .7) on obtient avec $\Delta w(I) = 0$, ce qui donne $\{x, s_B\}$

$\ell(J) = A(I, J) C(I, J_B)\, A_B^{-1} w(I_B)$ où $w(I_B) = (w_i = 0, \, i \in I_B \setminus \{i^\circ\}, \, w_{i^\circ} = \text{sign}\,(u_{i^\circ}))$

on a $a_{i^\circ}\bar{x} = a_{i^\circ} x + \theta \; \text{sign}\,(u_{i^\circ}) = \begin{cases} a_{i^\circ}x - \theta \; si \; u_{i^\circ} < 0, \\ a_{i^\circ}x + \theta \; si \; u_{i^\circ} > 0, \end{cases}$

$a_i \bar{x} = a_i x \;\; \forall \, i \in I_B \setminus \{i^\circ\}$;

il existe donc $\theta_1 > 0$ tel que

$$\begin{cases} \bar{w}_{1i^\circ} = b_{1i^\circ} - a_{i^\circ}\bar{x} = (b_{1i^\circ} - a_{i^\circ}\bar{x}) + \theta_1 \;\leq 0 \; si \; u_{i^\circ} < 0, \\ \bar{w}_{2i^\circ} = b_{2i^\circ} - a_{i^\circ}\bar{x} = (b_{2i^\circ} - a_{i^\circ}\bar{x}) - \theta_1 \;\geq 0 \; si \; u_{i^\circ} > 0, \end{cases}$$

d'autre part, étant donné que $\{x, s_B\}$ est non dégénéré, il existe $\theta_2 > 0$ tel que

$d_{1j} \leq x_j + \theta_2 \ell_j \leq d_{2j}$, $\forall \, j \in J_B$, et $b_{1i} \leq a_i(x + \theta_2.\ell) \leq b_{2i}$, $\forall \, i \in I_H$, par conséquent, pour $\theta = \min\{\theta_1, \theta_2\}$, $\bar{x} = x + \theta.\ell$ est un plan admissible du problème (2.2) pour lequel

$F(\bar{x}) - F(x) = \theta\,|u_{i^\circ}| > 0$

ce qui contredit l'optimalité du support plan $\{x, s_B\}$.

2.5 Critère de suboptimalité.

Théorème 5.1 :

Soit $\varepsilon > 0$ donné. L'inégalité

$$\beta(x, s_B) \leq \varepsilon,$$

est suffisante pour l'epsilon optimalité du support plan $\{x, s_B\}$.

Démonstration

Le dual du problème (2.2)

En utilisant la méthode des multiplicateurs de la grange, on obtient le problème dual du problème (2.2), ci-dessous

$$\begin{cases} \Phi(x) = \lambda'\alpha + y'b_2 - z'b_1 - u'd_1 + v'd_2 \rightarrow min \\ -\lambda'(I)c(I,J) + (y' - z')(I)A(I,J) - u'(J) + v'(J) = 0 \\ \lambda'(I)E(I) = 1 \\ x = (\lambda, y, z, u, v);\ \lambda \in R_+^P;\ y, z \in R_+^m; u, v \in R_+^n \end{cases} \qquad (D\ .2)$$

Remarque 5.2: Le vecteur $x = (\boldsymbol{\lambda}, y, z, u, v)$

$$\begin{cases} \lambda(I_H) = 0, \lambda(I) = \gamma(I), \\ y_i = u_i, z_i = 0\ si\ u_i \geq 0, \\ y_i = 0, z_i = -u_i\ si\ u_i < 0, \\ u_i = E_j, v_j = 0\ si\ E_j \geq 0, \\ u_j = 0, v_j = -E_j\ \ si\ E_j < 0, \end{cases} \qquad (2\ .17)$$

est un plan du problème (D.2)

Lemme :

Pour tout support plan $\{x, s_B\}$ du problème (2 .2) on a

$\beta(x, s_B) = \beta(x) + \beta(s_B)$

Preuve :

Pour tout support plan$\{x, s_B\}$, on a :

$\beta(x, s_B) = u'(I_B^-)\, w_1(I_B^-) + u'(I_B^+)\, w_1(I_B^+) + E'(J_H)x(J_H) – E'(J_H^-)d_2(J_H^-)$

$– E'(J_H^+)\, d_1(J_H^+) + \lambda'(I)\, w(I).$

En utilisant la remarque 2.1,cette relation devient

$\beta(x, s_B) = u'\, (I_B^-)\, w_1(I_B^-) + u'(I_B^+)\, w_1(I_B^+) + E'(J)\, x(J) – E(J)\, d_2(J)$

$– E(J)\, d_1(J) + \lambda'(I)\, C(I, J)x(J) + \lambda'(I)\alpha(I) – F(x)$

$\beta(x, s_B) = (\lambda'\alpha + y'b_2 + z'b_1 + u'd_1 + v'd_2 – F(x^\circ)) + (F(x^\circ) – F(x))$

d' où le résultat avec $\beta(x) = F(x^\circ) – F(x)$, et $\beta(s_B) = \boldsymbol{\Phi}\, (x) - F(x^\circ)$

Construisons alors l'itération de la méthode, qui sera constituée de deux étapes

Etape 1(changement du plan)

Construisons un nouveau plan $\bar{x} = x + \theta^\circ.\ell$ où ℓ est une direction admissible au point x et θ° le pas maximal le long de cette direction.

Construisons de la direction admissible.

On pose pour $j \in J_H$ $\ell_j = \begin{cases} d_{1j} - x_j \ si\ E_j > 0, \\ d_{2j} - x_j\ si\ E_j < 0, \\ 0\ si\ E_j = 0, \end{cases}$ (2.7)

$\ell(J)$ est donné par la relation

Si $\theta = 1$:

on a $\Delta w(J) = - \theta\, w(I)$, ce qui donne :

$\ell(J) = A(I, J)[C(I, J_B)A_B^{-1}\, w(I_B) – E(I, J_H)\ell(J_H) + w(I)]$

et on pose $\ell(J_B) = A_B^{-1}[w(I_B) – A(I_B, J_H)\, \ell(J_H) - A(I_B, J)\ell(J)]$, où $w(I_B)$ et défini par : $w_i = \begin{cases} w_{1i}\ si\ u_i < 0, \\ w_{2i}\ si\ u_i > 0, \\ 0\ \ si\ u_i = 0, i \in I_B. \end{cases}$

Calcul du pas maximal θ°

θ° est la valeur maximale de θ, pour laquelle $\bar{x}$(J) vérifie les condition suivantes :

1) $d_{1j} \leq \bar{x}_j \leq d_{2j}\ \ \forall j \in J$,
2) $b_{1i} \leq a_i\bar{x} \leq b_{2i}\ \forall\ i \in I$.

On obtient $\theta^\circ = \min\ \{\theta_{j^\circ}, \theta_{i^\circ}, 1\}$

où $\theta_{j^\circ} = \min_{j\in J}\{\theta_j\}$ avec $\theta_j = \begin{cases} \frac{d_{1j-}x_j}{\ell_j}\ si\ \ell_j < 0, \\ \frac{d_{2j-}x_j}{\ell_j}\ si\ \ell_j > 0, \\ +\infty\ si\ \ell_j = 0, \end{cases}$

$\theta_{i^\circ} = \min_{i\in I_H}\{\theta_i\}$ où $\theta_i = \begin{cases} \frac{b_{1i} - a_i\,x}{a_i\ell}\ si\ a_i\ell < 0, \\ \frac{b_{2i} - a_i\,x}{a_i\ell}\ si\ a_i\,\ell > 0, \\ +\infty\ si\ \ell_j = 0, \end{cases}$

La valeur de suboptimalité du support plan $\{\bar{x}, s_B\}$

Par la relation (2 .12), on obtient : $\beta\ (\bar{x}, s_B) = (1-\theta^\circ)\beta(x, s_B)$.

si $\theta^\circ = 1$, alors $\{\bar{x}, s_B\}$ est optimal, si $\beta(\bar{x}, s_B) \leq \varepsilon$, le support plan est ε-optimal, si $\beta(\bar{x}, s_B) > \varepsilon$ alors on passe au changement du support.

Etape 2(changement de support)

Afin d'améliorer la mesure de non optimalité $\beta(\bar{x}, s_B)$ du support ,construisons une itération duale $(E, x, s_B) \rightarrow (\bar{E}, \bar{x}, \bar{s}_B)$ où $\bar{E} = E + \sigma^\circ t(J)$, $\bar{u} = u + \sigma^\circ t(I)$

avec (t(J), t(I)) une direction admissible au point x et σ° le pas maximal le long de cette direction

Construction de la direction admissible

Construisons la direction admissible (t(J), t(I)) en utilisant les formule (2, 2), (2,3) et (2,4) où $t(I_H)$, $t(J_B)$ sont construisons d'une manière admissible et maximale

Comme suit:

Si $\theta^{\circ} = \theta_{i^\circ}$ on pose $t_{i^\circ} = \text{sign}(a_{i^\circ}\ell)$), $t_i = 0\ \forall\ i \in I_B \setminus \{i_\circ\}$, $t(J_B) = 0$.

Si $\theta^{\circ} = \theta_{j^\circ}$ on pose $t_{j^\circ} = -\ \text{sign}(\ell_{j^\circ})$), $t_j = 0\ \forall\ j \in J_B \setminus \{j_\circ\}$, $t(I_H) = 0$.

L'accroissement dual

On pose $\Delta\boldsymbol{\Phi}(x) = \boldsymbol{\Phi}(\bar{x}) - \boldsymbol{\Phi}(x)$, par définition on a :

$$\Delta\boldsymbol{\Phi}(x) = \sigma^{\circ}(\Delta\lambda'\alpha + \Delta u' b_2 + \Delta z' b_1) - \Delta u' d_1 + \Delta v' d_2$$

En utilisant le pseudo –plan $x(J) = x(J) + \ell(J)$ où $x(J)$ est le plan admissible au début de la première étape de l'itération ; et $\ell(J)$ est la direction admissible construisons à l'étape précédente , l'accroissement dual devient alors :

$$\Delta\boldsymbol{\Phi}(x) = \sigma^{\circ}(\Delta\lambda'\alpha + \Delta u' w_2(x) - \Delta z' w_1(x)) - \Delta u' d_1 + \Delta v' d_2 - \sigma^{\circ}(\Delta u' - \Delta z') Ax$$

mais $\sigma^{\circ}(\Delta u' - \Delta z')A = \Delta E + \sigma^{\circ}\Delta\lambda' C$ et $E'(I)\Delta\boldsymbol{\lambda}(I) = 0$, ainsi on obtient :

$$\Delta\boldsymbol{\Phi}(x) = \sigma^{\circ}\Delta\lambda'(I)\,(\alpha(I) + C(I,J)\,x(J) - E(I)F(x) + \Delta E(J)\,x(J) - \Delta u' d_1 + \Delta v' d_2$$
$$+ \sigma^{\circ}(\Delta u' w_2(x) - \Delta z' w_1(x))$$

Notation : on pose $\beta = \Delta E(J)\,x(J) - \Delta u' d_1 + \Delta v' d_2$, $\Omega = (\Delta u' w_2(x) - \Delta v' w_1(x))$,

et $\gamma = \Delta\lambda'(I)(\alpha(I) + C(I,J)\,x(J) - E(I)\,F(x))$

Calcul du pas maximal $\boldsymbol{\sigma}^{\circ}$

En tenant le compte du signe de E_j et $\bar{E}_J$, on obtient :

$\beta(J_H) = \beta(J_H^{+-}) + \beta(J_H^{-+}) + \beta(J_H^{\circ+}) + \beta(J_H^{\circ-})$ où

$\beta(J_H^{+-}) = \sum_{j\in J_H^{+-}} \bar{E}_J(x_j - d_{2j}) > 0$ avec $J_H^{+-} = \{j \in J_H \,/\, E_j > 0, \bar{E}_J < 0\}$

$\beta(J_H^{-+}) = \sum_{j\in J_H^{-+}} \bar{E}_j\ (x_j - d_{1j}) > 0$ avec $J_H^{-+} = \{j \in J_H \,/\, E_j < 0, \bar{E}_j > 0\}$

$$\beta(J_H^{\circ+}) = \sum_{j\in J_H^{\circ+}} \bar{E}_j(x_j - d_{1j}) \geq 0\ avec\ J_H^{\circ+} = \{j \in J_H \,/\, E_j = 0\,, \bar{E}_j > 0\}$$

$\beta(J_H^{\circ -}) = \sum_{j\in J_H^{\circ -}} \bar{E}_j\,(x_j - d_{2j}) \geq 0$ avec $J_H^{\circ -} = \{j \in J_H \,/\, E_j = 0,\ \bar{E}_j < 0\}$

Donc, pour avoir $\beta(J_H) = 0$ on prend $\sigma_{j1} = \min_{j\in J_H}\{\sigma_j\}$ où

$$\sigma_j = \begin{cases} -\frac{E_j}{t_j}\ si\ E_j t_j < 0, \\ E_j = 0\ si\ \begin{cases} t_j(x_j - d_{1j}), \\ t_j(x_j - d_{2j}), \end{cases} \\ +\infty\ sinon\,. \end{cases}$$

D'autre part, par construction de ℓ(J), on a :

$\Omega(I_B^-) = \sum_{i\in I_B^-} \Delta u_i(b_{2i} - a_i\mathrm{x})$, $\Omega(I_B^+) = \sum_{i\in I_B^+} \Delta z_i(b_{1i} - a_i\mathrm{x})$

Et $\Omega(I_B^{\circ}) = \sum_{i\in I_B^{\circ}} \Delta\, u_i(b_{2i} - a_i\mathrm{x}) - \sum_{i\in I_B^{\circ}} \Delta z_i(b_{1i} - a_i\mathrm{x})$

En tenant compte du signe de u_i et $\bar{u}_i$, on obtient :

$\Omega(I_B^-) = \Omega(I_B^{-\,+}) = \sum_{i\in I_B^{-+}} \bar{u}_i(b_{2i} - a_i\mathrm{x}) > 0$ avec $I_B^{-\,+} = \{i \in I_B \,/\, u_i < 0,\ \bar{u}_i > 0\}$

$\Omega(I_B^+) = \Omega(I_B^{+\,-}) = \sum_{i\in I_B^{+-}} \bar{u}_i(b_{1i} - a_i\mathrm{x}) > 0$ avec $I_B^{+\,-} = \{i \in I_B \,/\, u_i > 0,\ \bar{u}_i < 0\}$

$\Omega(I_B^{\circ}) = \Omega(I_B^{\circ +}) + \Omega(I_B^{\circ -})$ où

$\Omega(I_B^{\circ +}) = \sum_{i\in I_B^{\circ +}} \sigma t_i(b_{2i} - a_i\mathrm{x}) \geq 0$ avec $I_B^{\circ +} = \{i \in I_B \,/\, u_i = 0,\ \bar{u}_i > 0\}$

$\Omega(I_B^{\circ -}) = \sum_{i\in I_B^{\circ -}} \sigma t_i(b_{1i} - a_i\mathrm{x}) \geq 0$ avec $I_B^{\circ -} = \{i \in I_B \,/\, u_i = 0,\ \bar{u}_i < 0\}$

d'où afin d'avoir $\Omega(I_B) = 0$,on prend $\sigma = \sigma_{i1} = \min_{i\in I_B}\{\sigma_i\}$

$$\text{où } \sigma_i = \begin{cases} -\frac{u_i}{t_i}\ si\ u_i t_i < 0, \\ u_i = 0\ si\ \begin{cases} t_i(b_{2i} - a_i x) > 0, \\ t_i(b_{1i} - a_i x) > 0, i \in I_B, \end{cases} \\ +\infty\ sinon\,, \end{cases}$$

d'où $\sigma^{\circ} = \min\{\sigma_{i1}, \sigma_{j1}\}$

Construction du nouveau support

Pour la construction du nouveau $\bar{J}_B$, on considère les cas suivant :

Cas a : $\theta^{\circ} = \theta_{j^{\circ}}$, $j^{\circ} \in J_B$, il y a deux cas possible :

1) $\sigma^{\circ} = \sigma_{1i}$ dans ce cas $\bar{J}_B$ est donné par $\bar{J}_B = J_B$ / $\{j^{\circ}\}$,
   $\bar{I}_B = I_B \setminus \{i_1\}$, $\bar{I} = I$, $\bar{J} = J$
2) $\sigma^{\circ} \neq \sigma_{1i}$ considérons les deux situations suivantes:
   -$\exists$ $j_2 \in J$ / $t(J_B)\, A_B^{-1} A(I, j_2) \neq 0$, alors
   $\bar{I}_B = I_B \setminus \{i_1\}$, $\bar{I} = I$, $\bar{J} = J$

3) $\sigma^{\circ} = \sigma_{j1}$ alors $\bar{J}_B = (J_B \setminus \{j^{\circ}\}) \cup \{j_2\}$, $\bar{I}_B = I_B$,

$\bar{J} = (J \setminus \{j_2\} \cup \{j_1\})$, $\bar{I} = I$.

$t(J_B)\, A_B^{-1} A(I_B, J) = 0$, alors $\sigma^{\circ} = \sigma_{j1}$ et on construit $\bar{J}$ comme suit :

$\bar{J}_B = (J_B \setminus \{j^{\circ}\}) \cup \{j_1\}$, $\bar{I}_B = I_B$, $\bar{J} = J$, $\bar{I} = I$.

Cas b : $\theta^{\circ} = \theta_{i^{\circ}}$, deux cas sont aussi possibles dans ce cas :

1) $\sigma^{\circ} = \sigma_{i1}$ alors on pose $\bar{J}_B = J_B$, $\bar{I}_B = (I_B \setminus \{i_1\}) \cup \{i_{\circ}\}$, $\bar{J} = J$,
   $\bar{I} = I$
2) $\sigma^{\circ} \neq \sigma_{i1}$ considérons les deux situations suivantes:
   $\exists$ $j_2 \in J$ / $t(I_H)\, [A(I_H, J_B) A_B^{-1} A(I_B, j_2) - A(I_H, j_2)] \neq 0$.
3) $\sigma^{\circ} = \sigma_{j1}$ alors $\bar{J}_B = J_B$, $\bar{I}_B = I_B \cup \{i_{\circ}\}$, $\bar{J} = (J \setminus \{j_2\}) \cup \{j_1\}$,
   $\bar{I} = I$
   $t(I_H)[A(I_H, J_B) A_B^{-1} A(I_B, J) - A(I_H, J) = 0$, alors $\sigma^{\circ} = \sigma_{j1}$ et $\bar{J}$ est construit comme suit: $\bar{J}_B = J_B \cup \{j_1\}$, $\bar{I}_B = I_B \cup \{i_{\circ}\}$, $\bar{J} = J$, $\bar{I} = I$.

   La construction du nouveau support, termine à l'itération et nous permet ainsi de construire l'algorithme.

2.6 Algorithme :

Soit $\{x, s_B\}$ un support plan du problème (2 .2), en calculer la valeur de suboptimalité du support plan $\{x, s_B\}$ où

$$\beta(x, s_B) = \sum_{j \in J_H^-} E_j(x_j - d_{2j}) + \sum_{j \in J_H^+} E_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{i \in I_B^-} u_i\, w_{1i} + \sum_{i \in I_B^+} u_i\, w_{2i}$$

Si $\beta(x, s_B) = 0$, $\{x, s_B\}$ est optimal, arrêt du processus.
Si $\beta(x, s_B) \leq \varepsilon$, $\{x, s_B\}$ est ε-optimal, arrêt du processus.

Si $\beta(x, s_B) > \varepsilon$, on passe à l'itération

(1)-construire $\ell(J)$ / $\ell_j = \begin{cases} d_{2i} - x_j \; si \; E_j < 0, \\ d_{1i} - x_j \; si \; E_j > 0 \\ 0 \; si \; E_j = 0, \end{cases}$, $J \in J_H$.

$\ell(J_B) = A_B^{-1}[w(I_B) - A(I_B, J_H)\,\ell(J_H) - A(I_B, J)\,\ell(J)]$

où $w(I_B)$ est défini par $w_i = \begin{cases} w_{1i} \; si \; u_i < 0, \\ w_{2i} \; si \; u_i > 0, \\ 0 \; si \; u_i = 0, i \in I_B \end{cases}$

calculer $\theta^{\circ} = \min\{1, \theta_{i^\circ}, \theta_{j^\circ}\}$

avec $\theta_{j^\circ} = \min_{j \in J_B}\{\theta_j\}$ où $\theta_j = \begin{cases} \frac{d_{1j} - x_j}{\ell_j} \; si \; \ell_j < 0, \\ \frac{d_{2j} - x_j}{\ell_j} \; si \; \ell_j > 0, \\ +\infty \; si \; \ell_j = 0. \end{cases}$

et $\theta_{i^\circ} = \min_{i \in I_H}(\theta_i)$ où $\theta_i = \begin{cases} \frac{b_{1i} - a_i x}{a_i \ell} \; si \; a_i\ell < 0, \\ \frac{b_{2i} - a_i x}{a_i \ell} \; si \; a_i\ell > 0, \\ +\infty \; si \; a_i\ell = 0. \end{cases}$

Si $\theta^{\circ} = 1$ arrêt de processus.

Si $(1 - \theta^{\circ})\beta(x, s_B) \leq \varepsilon$ arrêt de processus.

Si $(1 - \theta^{\circ})\,\beta(x, s_B) > \varepsilon$ on passe à l'itération suivant.

Exemple :

Soit le problème suivant:

$$F(x_1,x_2)= 2x_1+x_2 \rightarrow \max$$

Sous les contraintes suivantes

$$\begin{cases} 2 \leq x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ -2 \leq -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 1 \leq x_1 \leq 3 \\ 1 \leq x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Où n = 2, m = 2 , I={1 ,2} , J={1 ,2}, I_B={2} ,J_B={2} , I_H={1}, J_H ={1}

x = (2, 1).

A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, A_B =[1], A_H=[1] , det A_B =1 $\neq 0$.

On calcule le vecteur des potentiels

u = $c_B A_B^{-1}$, u= [1]1=1, u =1>0.

$u(I_B)$= u(1) =0, $u(I_H)$= u(2) =1.

On a $w_{2i}= b_{2i}$ - A (I, J) x(J) $\Rightarrow w_{22} = b_{22}$ - A (2, J) x(J) = 1 – (-1, 1)$\binom{2}{1}$= 2

w_{22}= 2.

On calcule le vecteur des estimations

$E_j = uA_j - c_j$, E_1=1.[1] - 2= -1 , E_1 = -1< 0 j $\in J_H$.

E_j = 0 si j $\in J_B$.

$\beta(x, s_B) = E_1 (x_1 - d_{21}) + u\, w_{22}$ = (-1)(2 - 1) + 2 = 1 > ε

On passe Changement du plan x $\longrightarrow \bar{x} + \theta.\ell$

<u>Sur J_H</u> : on pose θ =1

$\ell(J_H)= \ell_1 = d_{21} - x_1$= 1 - 2 = -1, j $\in J_H$

<u>Sur I_B</u> : on pose $\theta = 1$

$b_1(I_B) \leq A(I_B, J)\, \bar{x}(J) \leq b_2(I_B)$

$b_1(I_B) \leq A(I_B, J)\, (x + \theta.\ell\,) \leq b_2(I_B)$

$b_1(I_B) \leq A(I_B, J)\, x + A(I_B,J)\, \ell \leq b_2(I_B)$

$b_1(I_B) - A(I_B, J)\, x \leq A(I_B,J)\, \ell \leq b_2(I_B) - A(I_B, J)\, x$

$w_1(I_B) \leq A(I_B, J_B)\, \ell_B + A(I_H, J_H)\, \ell_H \leq w_2(I_B)$

$w_1(I_B) - A(I_H, J_H).\, \ell_H \leq A(I_B, J_B)\, .\, \ell_B \leq w_2(I_B) - A(I_H, J_H).\, \ell_H$

$[w_1(I_B) - A(I_H, J_H).\ell_H\,]A_B^{-1} \leq \ell_B \leq [w_2(I_B) - A(I_H, J_H).\ell_H]A_B^{-1}$

On a u > 0 on va calcul $w_2(I_B)$

$W_2(I_B) = b_2 – A(2, J)\, x(J) = 1 –(-1\, ,1)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}= 2$

$\ell_B = [w_2(I_B) - A(I_H, J_H)\, \ell_H\,]\, A_B^{-1}=[\, 2 – [1](-1)][1] = 3$

$\ell=(\ell_B, \ell_H) = (-1, 3)$

<u>Sur I_H</u> : on cherche θ_{i°

$b_1(I_H) \leq A(I_H,J)\, \bar{x}(J) \leq b_2(I_H)$

$b_1(I_H) \leq A(I_H,J)\, (x + \theta.\ell) \leq b_2(I_H)$

$b_1(I_H) \leq A(I_H,J)\, x + A(I_H,J)\theta.\, \ell \leq b_2(I_H)$

$2 \leq(2, 1)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + (1, 2)\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\theta \leq 6$

$-2\leq 5\theta \leq 2$

$\theta_{i^\circ} = \frac{2}{5}$

<u>Sur J_B</u> :

$d_1(J_B) \leq \bar{x}(J_B) \leq d_2(J_B)$

$d_{1j} \leq x_j + \theta.\ell_j \leq d_{2j}$

$d_{1j} - x_j \leq \theta.\ell_j \leq d_{2j} - x_j$

$d_{12} - x_2 \leq \theta.\ell_2 \leq d_{22} - x_2$

on a $\ell_2 = 3 > 0$ donc $\theta_{j°} = \frac{d_{22} - x_2}{l_2} = \frac{1}{3}$

$\theta_{j°} = \frac{1}{3}$

$\theta^{°} = \min \{1, \theta_{i°}, \theta_{j°}\} = \min \{1, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}\} = \frac{1}{3}$, $\theta^{°} = \frac{1}{3}$

$\bar{x} = x + \theta.\ell = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$

$\beta(\bar{x}, s_B) = E_1 (\bar{x}_1 - d_{21}) + u\ \bar{w}_{22}$

$\bar{w}_{22} = b_2 - A(2, J)\bar{x}(J) = 1 - (-1,1)\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{5}{3}$

$\beta(\bar{x}, s_B) = (-1)(-\frac{2}{3} - 1) - \frac{5}{3} = 0$, $\{\bar{x}, s_B\}$ est optimal

Conclusion

Notre objectif a été de donner une description claire du problème de la programmation linéaire `a variables bornées. Il s’agit d’un problème d’une grande importance en pratique, car dans la plupart des problèmes pratiques les variables sont bornées.

Ce chapitre a été consacré à la méthode de résolution adoptée pour résoudre ce problème, une définition complète de cette méthode qui est la méthode adaptée a été donnée tout au long de ce chapitre, la dernière partie de ce chapitre illustre cette implémentation, et donne une description minutieuse du programme sous Matlab, ainsi que les résultats obtenus.

Bibliographie

[1] M.Chebbah. Résolution et implémentation d'un problème min max en contrôlé optimal, Thèse de Magister Université Tizi-Ouzou ,2006.

[2] Melle Hamdous saliha. Méthode de Résolution de problème min max en Programmation Linéaire, Thèse de Magister Université Tizi-Ouzou, 2010 .

[3] R.Gabasov Adaptive method of solving linear programming problems, Byelorussian State University, Minsk, Belarus 1980.

[4] R.Gabasov et F.M Kirillova Linear Programming Methods, Edition de l'université de Minsk 1980.

[5]Melle Oukacha Ouazna. Probleme d'analyse de sensibilité en Programmation Linéaire. Thèse de Master 2. Université Tizi-Ouzou, 201 3.