



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI-OUZOU

FACULTÉ DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET DE L'INFORMATIQUE

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en électronique

Option : Communication

Thème

**ETUDE DE LA METHODE DES MOMENTS :
APPLICATION AUX ANTENNES FILAIRES**

Proposé et dirigé par :

Mr. Hocine. KANANE

Réalisé par :

M^{elle}. AIT OUARABI Micha

M^r. BOUDJEMA Mouloud

REMERCIEMENTS

Nous remercions DIEU tout puissant de nous avoir donné le courage, la force, la connaissance et la persévérance qui nous a permis d'achever ce modeste travail. Sans la bénédiction de dieu rien ne serait.

*Nous tenons tout d'abord à exprimer nos sincères remerciements pour notre enseignant et promoteur **Mr. Kanane.Hocine** pour nous avoir dirigé, aidé et encouragé durant tout le développement de notre projet. Ses conseils et sa disponibilité nous ont permis de progresser, d'élargir nos connaissances et d'améliorer notre travail.*

Nous adressons aussi nos remerciements pour le président ainsi qu'au membres du jury pour avoir accepté d'examiner notre travail .

Egalement nous tenons à remercier tous les enseignants qui ont contribué dans notre formation.

Bien entendu, nous remercions énormément nos parents, nos frères et sœurs qui nous ont soutenus et encouragés durant la réalisation de ce projet, leurs nombreux sacrifices nous ont bien aidés tout au long de nos études.

Nous tenons à remercier nos amis et toutes les personnes qui nous ont aidés de près ou de loin pour accomplir ce travail.

Je dédie ce modeste travail :

- *A la mémoire de mon père que je porterais éternellement dans mon cœur.*
- *Au secret de ma réussite ma très chère mère.*
- *A mes très chères sœurs Djamila et Sadjia ainsi ma belle sœur Noura et le petit Elyas.*
- *A mes très chers frères Mohand, Mariche, Mokrane et Mustapha.*
- *A Celui qui m'est très chère Malek et son ami Hakim*
- *A mes amis(es) en particulier Sonia, Amokrane, Kamel, Marzouk, Tahar, Nouria, Leïla, Siham, Amel, Karima, Sabrina, Malika, Safia, Fazia et Ouiza.*
- *A toute l'équipe de hand ball de M'DOUHA.*
- *A Mouloud et sa famille ainsi que ses amis.*
- *A toute la promotion 2010/2011.*

Je dédie ce modeste travail :

A la mémoire de ma mère.

A mon très cher père.

A mes très chers frères et leurs femmes, mes sœurs et leurs maris ainsi que leurs enfants

A toute ma famille

A TOUS MES AMIS (es)

A Mon BINOME

Sommaire

Introduction générale.....	01
Chapitre I : Antennes et caractéristiques	
Introduction	03
I.1.Les antennes	03
I.1.1 Définition d'une antenne	03
I.1.2 Définition du rayonnement.....	03
I.1.3 Les différentes zones de rayonnement	04
a) La zone Raleigh (zone proche)	05
b) La zone de Fresnel	05
<u>c) La zone Fraunhofer</u>	<u>05</u>
I.1.4 La bande passante.....	05
I.1.5 Expression du champ électromagnétique rayonné par antenne filaire.....	06
a) expression du champ magnétique.....	06
b) expression du champ électrique.....	07
I.2 Caractéristiques d'antennes	08
I.2.1 Vecteur de Poynting	08
I.2.2 Intensité de rayonnement.....	09
I.2.3 Puissance totale rayonnée par une antenne.....	09
I.2.4 Résistance de rayonnement.....	09
I.2.5 Fonction caractéristique de rayonnement, diagramme de rayonnement	10
I.2.6 l'angle d'ouverture à -3dB	12
I.2.7 La directivité.....	12
I.2.8 Le gain d'une antenne	14
I.2.9. Le rendement d'une antenne.....	14
I.2.10 La polarisation du champ rayonnant.....	15
a) polarisation linéaire.....	15
b) polarisation circulaire	15
c) polarisation elliptique.....	15
I.2.11 Impédance d'entrée.....	16
I.2.12 Théorème de réciprocité	17
I.2.13 La puissance colletée à la charge.....	18

I.2.14	Are équivalente	18
I.2.15	La hauteur effective	19
I.2.16	La FEM induite	19
I.3	Les différents types d'antenne	19
I.3.1	Les antennes planaires	19
I.3.2	Les antennes à fente	20
I.3.3	Les antenne à réflecteur	21
I.3.4	Les antennes filaires	21
I.3.5	Le doublet de Hertz	22
14.	Les caractéristiques de l'antenne filaire élémentaire	1
	Conclusion	25

Chapitre II : Equations intégrales régissant les antennes filaires

	Introduction	26
II.1.	Equations de Maxwell	26
II.1.1	Ecriture des équations de Maxwell sous forme différentielle	27
II.1.2.	Ecriture des équations de Maxwell sous forme intégrale	28
	a)Equation de Maxwell-Faraday	28
	b)Equation de Maxwell-Ampère	28
	c)Equation de Maxwell-Gauss	29
	d)Equation du flux magnétique	29
II.2.	Linéarité des équations de Maxwell	29
II.3.	Relation de passage du champ électromagnétique	30
II.4.	Potentiel vecteur et potentiel scalaire issus d'une source de courant électrique	31
II.5.	Potentiel vecteur et potentiel scalaire issus d'une source de courant magnétique	32
II.6.	Champ électrique total et champ magnétique total	34
II.7.	Equations intégrales en champ électrique et magnétique(EFIE et MFIE)	35
II.7.1.	Equation intégrale en champ électrique (EFIE)	36
II.7.2.	Equation intégrale en champ magnétique(MFIE)	38
II.8.	Etablissement des équations intégrales de Pocklington et de Hallen	40
II.8.1.	Equation intégrale de Pocklington	40
II.8.2.	Equation intégrale de Hallen	45
II.9.	Modélisation des sources d'excitation des antennes filaires	46
II.9.1.	Modélisation par espacement(Delta-Gap)	46
II.9.2.	Modélisation par grille magnétique	47

Conclusion	47
------------------	----

Chapitre III : La méthode des moments(MoM)

Introduction.....	50
III.1.Définition.....	50
III.2.Présentation de la méthode des moments.....	52
III.3.Operateur adjoint.....	52
III.4.Propriétés	52
III.5.Operateur inverse.....	53
III.6.Identification de l'operateur adjoint.....	54
III.7.Etablissement de l'operateur inverse.....	55
III.8.Etablissement de la solution.....	56
III.9.Point de raccordement(Point-Matching).....	63
III.10.Choix des fonctions de base et de test.....	65
III.10.1.Méthode de raccordement.....	65
III.10.2.Méthode de sous domaine.....	65
III.10.3.Méthode de Galerkin.....	65
III.11.Approximation de la solution	66
III.12.Exemple de choix de fonction de base et de test.....	66
III.12.1.Fonction de base de sous domaine.....	66
a) La fonction de Dirac.....	66
b) Les fonctions impulsionnelles rectangulaires.....	66
c) Les fonctions triangulaires.....	67
d) Les fonctions en arc sinusoïdales.....	69
III.12.2.Fonction de base de domaine entier.....	70
III.13.Justification des choix des fonctions de base et de test.....	70
Conclusion	76

Chapitre IV : Résolution et résultats numériques

Introduction.....	77
IV.1.Principe de base	77
IV.2.Application de la méthode des moments sur une structure filaire verticale	79
IV.2.1.Résolution de l'équation intégrale de Pocklington	79
IV.2.2.Résolution de l'équation intégrale de Pocklington pour un fil mince	84
IV.2..Résolution numérique de l'équation intégrale de Hallen.....	85

IV.3. Etude paramétrique	87
IV.3. Etude paramétrique	87
IV.3. Etude paramétrique	87
Conclusion générale	93

Depuis l'antiquité, l'homme n'a pas cessé de chercher les différents moyens (parole, gestes, signaux de fumée, documents écrits ...) pour faire véhiculer le message à son correspondant et donc pour communiquer. Ainsi, l'être humain à travers des étapes successives a fourni des efforts intellectuels aussi bien que physiques afin de vaincre les distances et mettre en place une transmission rapide de l'information.

En 1888, la découverte fondamentale des ondes hertziennes a été accompagnée par celle de la première antenne, le doublet d'Hertz vérifiant ainsi la théorie précise de rayonnement de

Maxwell; les mémoires des années 1890 de ce grand physicien (Hertz) sont devenus aujourd'hui des classiques de la physique. Dix ans plus tard, Marconi reconnut pleinement l'extrême intérêt pratique de ces ondes pour les télécommunications.

Grâce à ce nouveau dispositif qui joue l'intermédiaire entre deux milieux de propagation, à savoir le milieu en propagation libre et guidé, des liaisons réalisées sont de plus en plus distantes et très importantes et sont adoptées rapidement dans tous les domaines : militaire et civil.

La connaissance des paramètres d'antenne demeurent essentielle pour bien comprendre leurs qualités. Certaines antennes ont des caractéristiques qui les rendent intéressantes pour certaines applications mais inappropriées pour d'autres. Ces paramètres doivent pouvoir se calculer théoriquement d'après la géométrie de l'antenne. Une étude basée sur le rayonnement électromagnétique à partir des équations de Maxwell sera entreprise.

Dans le présent travail, notre objectif est d'étudier de manière rigoureuse les antennes filaires en établissant les différentes équations qui les régissent afin de déterminer la distribution du courant à partir de laquelle sont déduits le champ électromagnétique rayonné ainsi que les différentes caractéristiques de l'antenne.

Au premier chapitre, nous allons spécifier les différentes zones de rayonnement et établir l'expression du champ électromagnétique rayonné dans la zone en champ lointain, ainsi que les différentes caractéristiques dans cette zone.

Dans le deuxième chapitre, nous allons établir les différentes équations intégrales qui régissent les antennes filaires. En partant des équations de Maxwell, nous définissons les potentiels vecteur et scalaire et nous établirons les équations de Pocklington et d'Hallen. Vu la complexité de leur résolution, nous faisons appel à une méthode numérique qui est la méthode des moments que nous allons appliquer en tenant compte des types d'excitations utilisées.

Le troisième est consacré à la présentation de la méthode des moments (MOM) qui est une méthode de résolution numérique ainsi que les étapes de sa mise en œuvre.

La quatrième partie constitue l'application d'un code de calcul traduisant la méthode des moments en langage *Fortran*. Pour procéder au calcul de grandeurs telles que la distribution du courant, l'impédance d'entrée, diagramme de rayonnement...

Les différents résultats obtenus seront représentés sous forme de tableau et de courbes.

Une conclusion générale clôturera notre travail.

Introduction

L'aventure a commencé en 1884, lorsque Maxwell a démontré mathématiquement l'existence des ondes électromagnétiques.

La première antenne « humaine » fut utilisée par Hertz en 1885 lorsqu'il vérifia l'existence et la propagation de ces ondes. Une boucle ouverte servait à l'émission comme à la réception.

Très vite, ensuite, de nombreux types d'antennes apparaîtront au fur et à mesure que se poursuivra l'exploration des fréquences liée généralement à l'invention des émetteurs capables de les produire.

Dans ce chapitre, nous allons définir les antennes et leurs caractéristiques ainsi que leurs différents types.

I.1) Les antennes

L'antenne a un rôle très important dans la transmission ou la réception des ondes électromagnétiques: elle assure l'interface entre le circuit électrique et le milieu de propagation.

I.1.1) Définition d'une antenne

Une antenne est un élément de la chaîne de transmission. C'est un conducteur parcouru par un courant électrique rayonnant dans l'espace sous forme d'ondes électromagnétique, elle permet le transfert d'énergie électrique générée en énergie électromagnétique rayonnée ou vice-versa. On distingue ainsi l'antenne d'émission et l'antenne de réception.

En émission : en imposant un courant variable dans le temps le long d'un fil, le mouvement accéléré des charges génère un champ électromagnétique rayonné, qui se propage en théorie jusqu'à l'infini. Le rôle de l'antenne d'émission est de transférer la puissance électromagnétique : c'est un transducteur.

En réception : de façon inverse, un champ électromagnétique variable qui tombe sur un fil, induit des mouvements de charges, donc une f.e.m. qui peut être détectée. L'antenne apparait comme un capteur de puissance rayonnée. [1,15]

1.1.2. Définition du rayonnement

Le rayonnement électromagnétique est un phénomène permettant le transport de puissance sans support physique tel que le montre la figure I.1

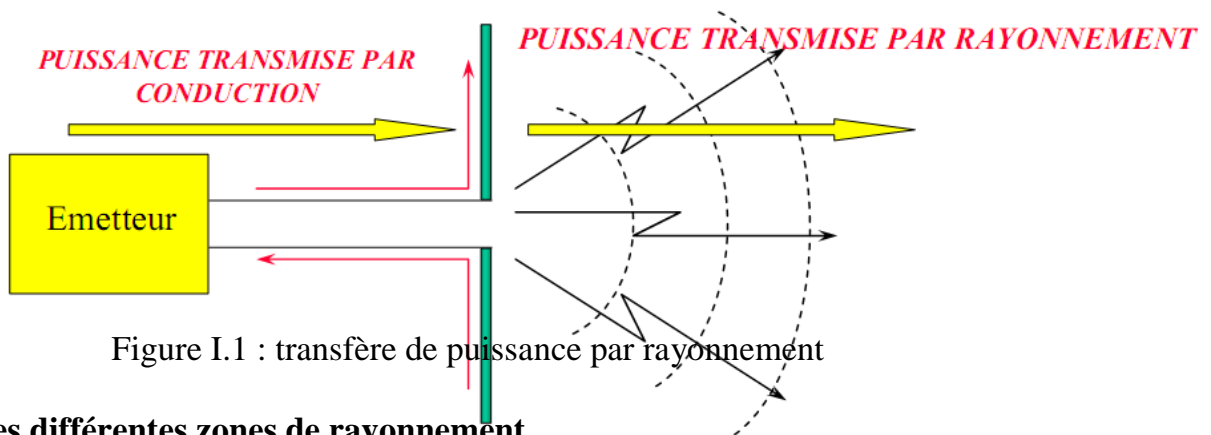
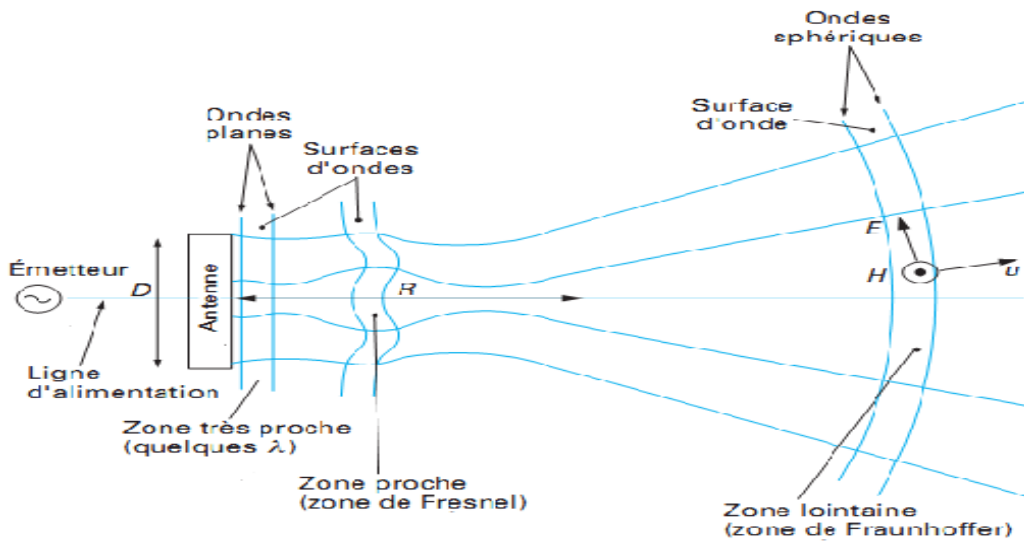


Figure I.1 : transfère de puissance par rayonnement

1.1.3. Les différentes zones de rayonnement

A la réception, les ondes reçues n'arrivent pas en phase, le plus grand déphasage correspond aux ondes extrêmes c'est-à-dire : l'onde reçue par le centre de l'antenne d'émission et celle reçue par le point le plus éloigné. La différence de distance parcourue par les deux ondes extrêmes peut être toujours être ramenée à une fraction de longueur d'onde. [16,17]

En fonction de la valeur maximale de la distance, on distingue trois zones de rayonnement :



Figure

I.2: différentes zones de rayonnement [15]

a). **la zone de Rayleigh (zone très proche)**

Les termes inductifs et électrostatiques sont perpendiculaires au voisinage immédiat de l'antenne. Il y a accumulation d'énergie électrique et magnétique, les champs vectoriels varient peu en fonction de la distance mais ils sont très complexes à analyser.

b). **La zone de Fresnel (zone proche)**

Cette zone est située au delà de la zone très proche, l'expression du champ dans cette zone est très complexe et le calcul est difficile ; c'est une zone qu'on essaie d'éviter au maximum.

c). **zone de Fraunhofer (zone au champ lointain) :**

Cette

zone apparaît après la zone de Fresnel pour $(r \geq 2 \frac{D_{max}^2}{\lambda})$, qui s'étend jusqu'à l'infini, dans cette zone, on peut considérer que les ondes sont localement planes, les champs sont perpendiculaire entre eux et perpendiculaire à la direction de propagation, et ils décroissent en $1/r$ où r : est la distance entre l'antenne et le point d'observation. La connaissance d'un champ suffit pour avoir le champ électromagnétique : l'usage fait qu'on adopte le champ électrique, c'est-à-dire on détermine d'abord le champ électrique puis le champ magnétique se déduit, le champ électrique s'écrit comme suit :

$$\vec{E}_\infty(M) = \frac{e^{-jkr}}{r} \vec{E}(\theta, \varphi) \quad (I.1)$$

$$\vec{H}_\infty(M) = \frac{\vec{U}_r \wedge \vec{E}(M)}{\eta} \quad (I.2)$$

Avec : $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

La zone de Fraunhofer est la zone la plus importante car les antennes sont utilisées pour communiquer à grande distance. [15]

1.1.4. La bande passante

La largeur de la bande passante d'une antenne définit le domaine de fréquence dont laquelle

le rayonnement de l'antenne présente les caractéristiques requise. Le fonctionnement de chaque antenne est définie dans un domaine de fréquence, situé entre deux limites minimum et maximum respectivement f_1 et f_2 . [8]

Par convention la bande passante de l'antenne est définie par la différence entre les deux fréquences :

$$\Delta f = \beta = f_2 - f_1. \quad (I.3)$$

1.1.5. Expression du champ électromagnétique rayonné par une antenne filaire mince en fonction du courant qui la parcourt

D'une façon générale, le champ électromagnétique est produit par un courant variable dans le temps, donc par une accélération ou une décélération de charges électriques. Lorsqu'on considère une antenne (un système rayonnant), le temps de propagation est d'une très grande importance.

Si le courant parcourt une antenne, l'effet de ce courant n'est pas ressentie instantanément au point d'observation M, mais seulement après un intervalle de temps égal au temps nécessaire a la perturbation de parcourir la distance $r=PM$ qui sépare un point courant P de l'antenne et le point d'observation M. voici donc la géométrie du problème :

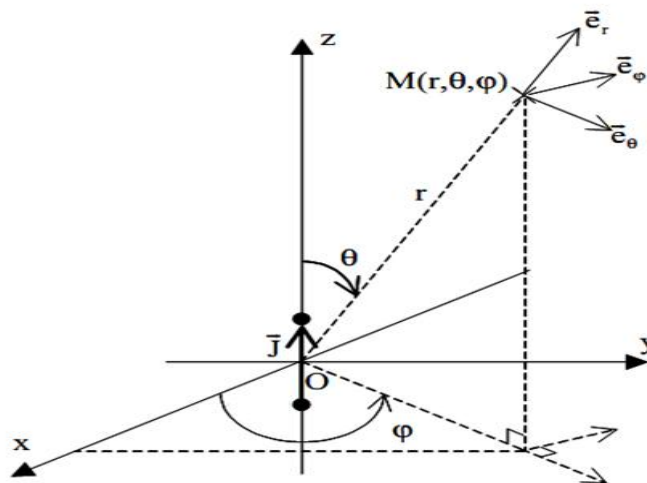


Figure I.3 : antenne élémentaire verticale placée a l'origine o. [15]

Cette antenne est une antenne filaire mince alors :

$$\vec{J}(p) = \vec{I}(p) dl$$

Dans ce cas, l'expression du potentiel vecteur électrique qu'on étudiera d'une façon plus général dans le chapitre II est la suivante :

$$\vec{A}(M) = \int_c \frac{\mu}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{I}(p)e^{-jkr}}{r} dl \quad (\text{I.4})$$

En coordonnées sphériques, on aura :

$$\vec{A}(M) = \begin{cases} A_r = \frac{\mu}{4\pi} Il \frac{e^{-jkr}}{R} \cos \theta \\ A_\theta = \frac{\mu}{4\pi} Il \frac{e^{-jkr}}{R} \sin \theta \\ A_\varphi = 0 \end{cases}$$

-l'expression du champ magnétique \vec{H}

On sait que :

$$\vec{H}(M) = \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M) \quad (\text{I.5})$$

Après calcul, le champ magnétique est réduit a une composante H_φ tel que :

$$\vec{H}(M) = I \frac{l}{4\pi} (1 + jkr) \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \theta \vec{u}_\varphi \quad (\text{I.6})$$

-L'expression du champ électrique \vec{E}

Après calcul du $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}(M)$ le champ $\vec{E}(M)$ s'écrit comme suit:

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} E_r = \frac{I}{4\pi} l \frac{1}{j\omega\epsilon} 2 \cos \theta \frac{e^{-jkr}}{r^3} (1 + jkr) \\ E_\theta = \frac{I}{4\pi} l \frac{1}{j\omega\epsilon} \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r^3} (1 + jkr - k^2 r^2) \\ E_\varphi = 0 \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

L'expression du champ électromagnétique dans la zone de Fraunhofer qui est la zone définie par $Kr \gg 1$

$$\vec{E} = \begin{cases} E_r = 0 \\ E_\theta = \frac{j}{2\lambda} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{e^{-jkr}}{r} Il \sin \theta \\ E_\varphi = 0 \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

$$\vec{H} = \begin{cases} H_r = 0 \\ H_\theta = 0 \\ H_\varphi = \frac{j}{2\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} Il \sin \theta \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

I.2. Caractéristiques d'antennes :

Les caractéristiques d'une antenne sont les mêmes si l'antenne est utilisée en émission ou en réception. Toute antenne est caractérisée par plusieurs paramètres fondamentaux, les principaux sont :

I.2.1. vecteur de poynting:

La densité surfacique de puissance d'une onde électromagnétique est égale à la grandeur du vecteur de poynting :

$$\vec{N}(M,t) = \vec{E}(M,t) \wedge \vec{H}(M,t) \quad (\text{I.10})$$

En régime harmonique du temps, la valeur moyenne du vecteur du Poynting est :

$$\langle \vec{N}(M,t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{H}^*) \quad (\text{I.11})$$

Avec :

\vec{E} : est la partie réelle du champ électrique et \vec{H}^* : le conjugué du champ magnétique. Dans la zone en champ lointain la valeur moyenne peut s'écrire :

$$\langle \vec{N}(M,t) \rangle = \frac{1}{r^2} \frac{1}{2\eta} |\vec{E}(\theta, \varphi)| \vec{u}_r \quad (\text{I.12})$$

I.2.2. Intensité de rayonnement :

l'intensité de rayonnement $\psi(\theta, \varphi)$ est une caractéristique de l'antenne dans la zone en champ lointain. Par définition l'intensité de rayonnement d'une antenne est :

$$\psi(\theta, \varphi) = \left| \langle \vec{N}(\theta, \varphi) \rangle \right| r^2 \quad (\text{I.13})$$

r : est la distance entre l'antenne et le point d'observation M .

Elle peut encore s'exprimer en fonction de $\vec{E}(\theta, \varphi)$

$$\psi(\theta, \varphi) = |\vec{E}(\theta, \varphi)|^2 \quad (\text{I.14})$$

I.2.3. Puissance totale rayonnée par une antenne

Elle est égale au flux de la valeur moyenne du vecteur de poynting à travers une surface fermée quelconque :

$$\begin{aligned} P_r &= \oiint \langle \vec{N}(M,t) \rangle \cdot d\vec{s} \\ P_r &= \oiint \left| \langle \vec{N}(M,t) \rangle \right| \vec{u}_r \cdot d\vec{s} \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

Que l'on peut écrire aussi en fonction de $\vec{E}(\theta, \varphi)$ à partir de l'équation (I.12) comme suit :

$$P_r = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2\eta} |\vec{E}(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (\text{I.16})$$

I.2.4. La résistance de rayonnement

Si on désigne par I le courant qui entre par les bornes d'une antenne ou on a défini la résistance de rayonnement, la puissance rayonnée est égale à :

$$P_r = R_r I_{eff}^2$$

La résistance de rayonnement R_r est liée à la puissance de rayonnement de l'antenne, donc par définition :

$$R_r = \frac{P_r}{I_{eff}^2} = \frac{1}{I_{eff}^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2\eta} |\vec{E}(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (\text{I.17})$$

Pour une antenne, plus grande est sa résistance de rayonnement mieux elle rayonne.

I.2.5.Fonction caractéristique de rayonnement, diagramme de rayonnement

L'antenne isotrope n'existe pas et n'est pas réalisable. En réalité, l'énergie rayonnée par une antenne est répartie inégalement dans l'espace, certaines directions sont privilégiées: ce sont les lobes de rayonnement. Le diagramme de rayonnement d'une antenne permet de visualiser ces lobes dans les trois dimensions, dans le plan horizontal ou dans le plan vertical incluant le lobe le plus important. [18]

soit $\psi(\theta, \varphi)$ l'intensité de rayonnement de l'antenne dans la direction $\Delta(\theta, \varphi)$ et soit $\Delta_0(\theta_0, \varphi_0)$ une direction particulière de l'énergie dont laquelle l'intensité de rayonnement est maximale, et $\psi_0(\theta_0, \varphi_0)$ l'intensité de rayonnement maximale, alors par définition le rapport sans dimension :

$$R(\theta, \varphi) = \frac{\psi(\theta, \varphi)}{\psi_{\max}} \quad (\text{I.18})$$

Est la fonction caractéristique de puissance.

Nous remarquons aussi :

$$R(\theta, \varphi) = \frac{\psi(\theta, \varphi)}{\psi_{\max}} = \frac{\frac{1}{2\eta} |\vec{E}(\theta, \varphi)|^2}{\frac{1}{2\eta} |\vec{E}(\theta, \varphi)|_{\max}^2} \quad (\text{I.19})$$

$$\text{Et :} \quad \sqrt{R(\theta, \varphi)} = \frac{|\vec{E}(\theta, \varphi)|}{|\vec{E}(\theta, \varphi)|_{\max}} \quad (\text{I.20})$$

Sa présentation graphique dans l'espace s'appelle surface caractéristique du diagramme de rayonnement en champ électrique.

Remarques :

-La valeur de $R(\theta, \varphi)$ varie entre 0 et 1

-La surface caractéristique de rayonnement ne présente de l'intérêt que si elle est indépendante de la distance, c'est-à-dire dans la zone en champ lointain (Fraunhofer).

-Comme il est Généralement difficile de représenter la forme d'une surface caractéristique dans l'espace à trois dimensions, on se contente souvent de représenter certaines coupes de cette surface, ces coupes s'appellent diagramme de rayonnement ou diagramme de directivité.

L'antenne isotrope, c'est à dire qui rayonne de la même façon dans toutes les directions, est un modèle théorique irréalisable dans la pratique, et en réalité, l'énergie rayonnée par une antenne est répartie inégalement dans l'espace, certaines directions étant privilégiées : ce sont les lobes de rayonnement.

Le diagramme de rayonnement d'une antenne permet de visualiser ces lobes.

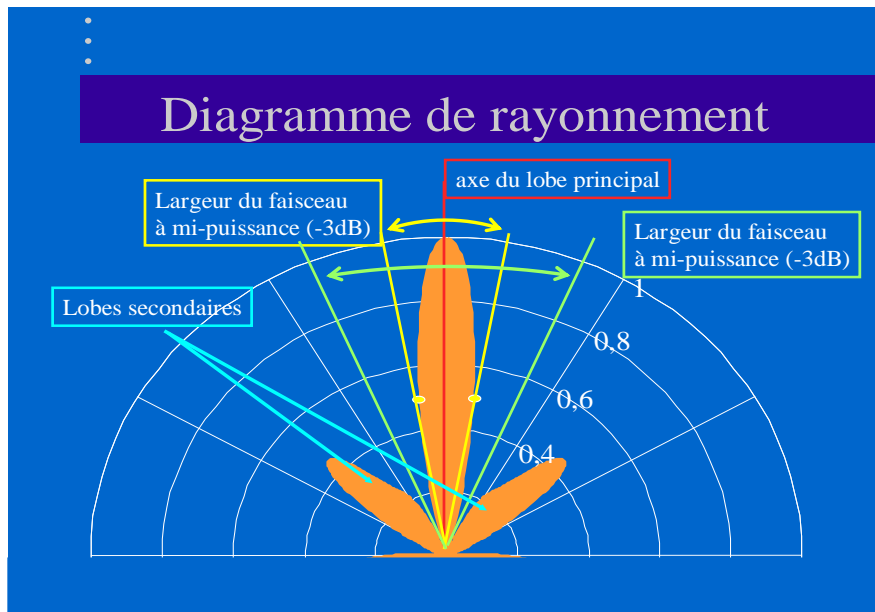


Figure I.4 : Diagramme de rayonnement en 2 dimensions [15]

Cette figure présente les principaux lobes du diagramme de rayonnement:

- ✓ Le lobe principal : c'est le lobe le plus important car il présente la directivité d'une antenne.
- ✓ Les lobes secondaires : ils correspondent à un maximum de la puissance dans une direction autre que la direction privilégiée. Idéalement, ils doivent être le plus faible possible.
- ✓ Le lobe arrière : c'est un lobe secondaire dans la direction opposée à la direction privilégiée de l'antenne (arrière de l'antenne).

L'existence de ces lobes peut être mise au profit pour plusieurs choses :

- Ne capter que ce que l'on veut (avec une marge d'erreur).
- N'émettre qu'à qui on veut (avec une marge d'erreur).

I.2.6 L'angle d'ouverture à -3dB

L'angle d'ouverture à -3dB d'une antenne, est l'angle dans lequel la puissance rayonnée est la moitié (-3dB) de la puissance rayonnée par la direction la plus favorable. Il est donc représentatif de la direction de l'antenne. Plus cet angle est étroit, plus l'antenne est directive.

I.2.7) La directivité :

Avant de définir la directivité, on a besoin de définir un outil mathématique qui est l'angle solide.

a. L'angle solide : l'angle solide, notée Ω , est une notion géométrique qui est dans l'espace (3 dimension), ce qui l'angle, est au plan (2 dimension). Il s'agit d'évaluer une surface d'espace que l'on peut voir dans une direction donnée. Ainsi, l'espace toute entier (sphère depuis son centre) est vu comme angle solide de 4π stéradian. [6]

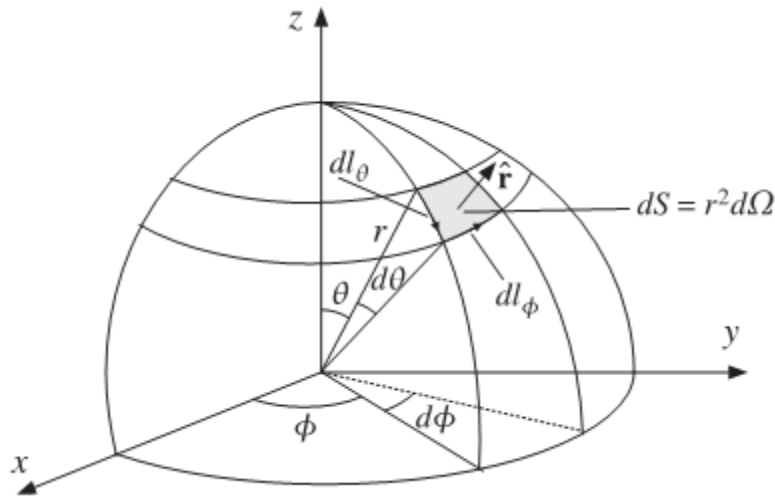


Figure I.5 : représentation d'angle solide. [6]

b. Antenne isotrope : c'est une antenne qui rayonnerait de la même façon dans toutes les directions mais n'existe pas. Néanmoins, elle constitue une référence parfois.

c. la directivité : la directivité d'une antenne $D(\theta, \varphi)$ dans une direction donnée $\Delta(\theta, \varphi)$ est par définition le quotient de l'intensité de rayonnement dans cette direction par la valeur moyenne de cette intensité de rayonnement pour toutes les directions de l'espace c'est-à-dire :

$$\psi_{iso} = \left\langle \frac{P_t}{4\pi} \right\rangle \quad (I.21)$$

Avec : P_t : est la puissance totale rayonnée par l'antenne.

Donc :

$$D(\theta, \varphi) = \frac{\psi(\theta, \varphi)}{\psi_{iso}(\theta, \varphi)} = \frac{\psi(\theta, \varphi)}{\frac{1}{4\pi} \iint \psi(\theta, \varphi) d\Omega} \quad (I.22)$$

L'intégrale du dénominateur, qui est étendue à tout l'espace (4π stéradians) mesure la puissance totale rayonnée par l'antenne.

On la calcule généralement en utilisant les coordonnées sphériques. Comme on a :

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

Donc :

$$D(\theta, \varphi) = \frac{\psi(\theta, \varphi)}{\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \psi(\theta, \varphi) d\theta d\varphi} \quad (I.23)$$



Figure I.6 : représentation de la directivité [15]

1. Rayonnement dans toute la direction.
2. rayonnement max dans une direction donnée.

I.2.8. Le gain d'une antenne :

Le gain d'une antenne est la quantité d'énergie reçue ou émise dans une direction par rapport à la quantité d'énergie reçue ou émise d'une antenne de référence. Cette dernière peut être une antenne isotrope qui possède un diagramme de rayonnement circulaire : on parle alors du gain absolu (isotope) égal à :

$$G(\theta, \varphi) = \eta D(\theta, \varphi) \quad (\text{I.24})$$

Il est exprimé en dB.

Avec η le rendement de l'antenne.

-dans le cas où l'on prend comme référence une source étalon réelle, on parle du gain relatif exprimé en dB :

$$G_R = \frac{G(\theta, \varphi)}{G_0(\theta, \varphi)} \quad (\text{I.25})$$

I.2.9. Le rendement :

Comme tous les circuits à pertes, une fraction plus ou moins appréciable de la puissance fournie se trouve à la sortie. Dans le cas d'une antenne les pertes sont liées à la résistance de perte. Donc, par définition, le rendement est le rapport entre la puissance totale rayonnée et la puissance d'alimentation :

$$\eta_R = \frac{P_r}{P_a} \quad (\text{I.26})$$

Remarques :

-Le plus souvent, surtout en hautes fréquences, le rendement est très voisin de l'unité ($\eta_R=1$) et l'on confond le gain et la directivité.

-L'appellation '**gain**' d'une antenne sans préciser la direction, est réservée au gain dans la direction de rayonnement maximal, il est noté G.

I.2.10 : La polarisation du champ rayonnant :

Le lieu géométrique décrit l'extrémité du vecteur champ électrique est appelé la polarisation électrique. La polarisation d'une onde TEM est le type de trajectoire que décrit l'extrémité du champ E au cours du temps dans le plan transverse. Il existe trois types de polarisation :

a. Polarisation linéaire :

Le champ E n'a qu'une composante variant sinusoïdalement: sa trajectoire est donc un segment de droite. Un dipôle génère classiquement une onde EM polarisée linéairement.

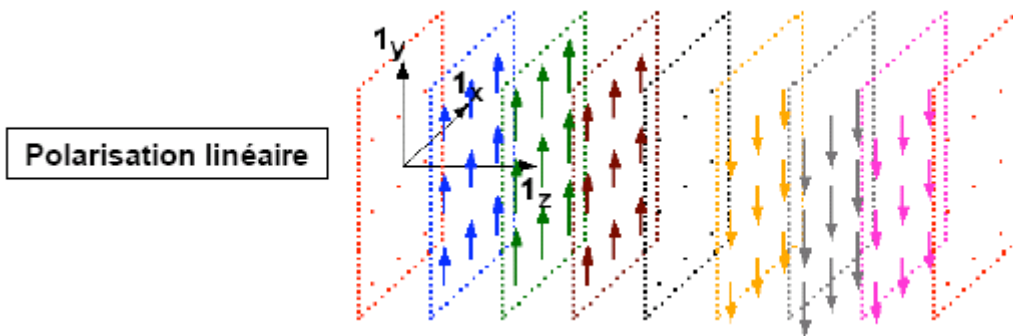


Figure I.7 : polarisation linéaire

b. Polarisation circulaire:

Le champ E a deux composantes E_x et E_y de même amplitude et déphasées de 90 degrés, son extrémité décrit un cercle.

c. Polarisation elliptique :

La polarisation elliptique correspond au cas général d'un champ E comprenant deux composantes E_x et E_y d'amplitudes et de phases quelconques. Ces deux composantes peuvent être d'amplitudes différentes et ne pas être en phase. Il en résulte qu'en chaque point M, l'extrémité du vecteur \vec{E} décrit une ellipse, dont le plan est perpendiculaire à la direction de propagation. [10]

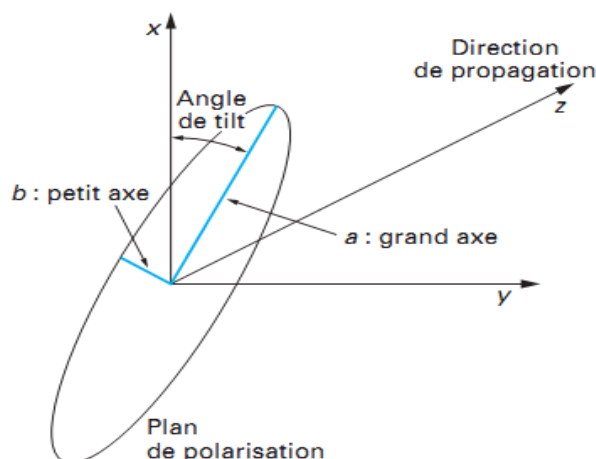


Figure I.8: polarisation elliptique : tracé du champ électrique.

I.2.11. Impédance d'entrée :

Pour évaluer l'impédance d'une antenne, on considère une antenne à l'émission comme une charge à l'entrée où existe un courant I_e , une tension V_e . Le rapport des deux quantités fournit l'impédance d'entrée Z_e :

$$\begin{aligned}
 Z_e &= \frac{V_e}{I_e} = R_e + jX_e \\
 &= R_0 + jX_0
 \end{aligned}
 \tag{I.27}$$

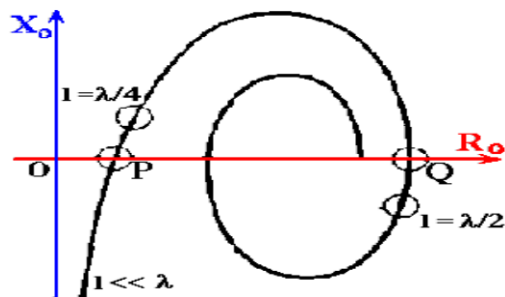


Figure I.9: représentation de l'impédance d'entrée.[15]

La connaissance de cette caractéristique est très importante pour l'adaptation de l'antenne afin d'assurer la meilleure transmission de la puissance.

Les caractéristiques qui vont suivre sont à la réception.

I.2.12. Théorème de réciprocité :

Considérons les deux circuits rayonnants munis de deux accès 1 et 2 :

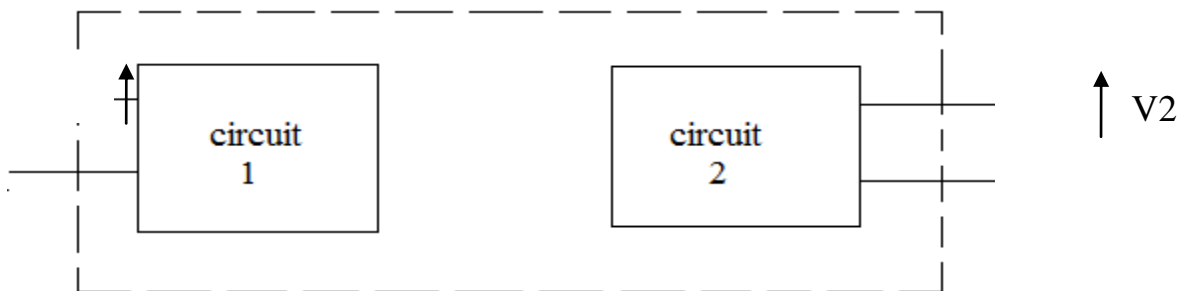


Figure I.10 : théorème de réciprocité

Le théorème de réciprocité pour les systèmes affirme que :

$$Z_{12} = Z_{21} \text{ et donc : } Y_{12} = Y_{21}.$$

La conséquence de ce théorème sur les antennes indique que, ces caractéristiques, sont identiques, que l'antenne soit utilisée à l'émission ou à la réception.

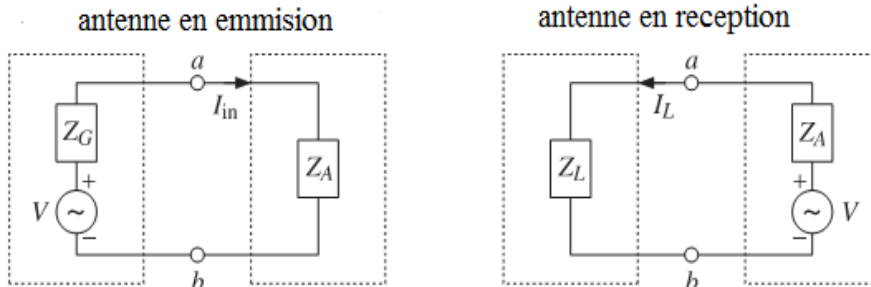


Figure I.11: antenne à la réception et à l'émission.

I.2.13. La puissance collectée à la charge :

Considérons une antenne utilisée en réception, son schéma équivalent est le suivant :

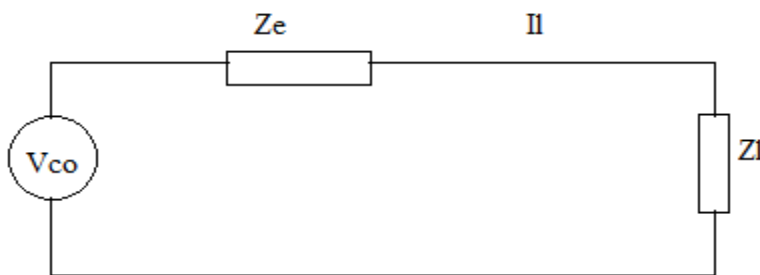


Figure I.12 : schéma équivalent d'une antenne à la réception.

Le courant I_L est donné par ;

$$I_L = \frac{V_{co}}{Z_e + Z_l}$$

La puissance P_L collectée à la charge vaut donc :

$$P_L = \frac{1}{2} R_L |I_L|^2$$

Cette puissance est maximale à la charge, c'est-à-dire :

$Z_e = Z_L$, donc on aura :

$$P_{\max} = \frac{1}{8} \frac{|V_{co}|^2}{R_e} \quad (\text{I.28})$$

I.2.14. Aire équivalente (surface captation d'une antenne) :

C'est une surface fictive, elle est seulement homogène à une surface. On définit l'aire équivalente $A_e(\theta, \varphi)$ de l'antenne de réception par le quotient :

$$A_a(\theta, \varphi) = \frac{P_{L\max}}{\langle \vec{N}(m, t) \rangle} \quad (\text{I.29})$$

Avec :

P_{Lmax} : est la puissance collectée à la charge.

$\langle \vec{N}(M, t) \rangle$: Le vecteur de poynting qui définit la densité de la puissance véhiculée par une onde incidente sur l'antenne.

Si on considère que le rendement η_R est égal à l'unité, on a donc :

$G = \eta_R D \rightarrow G = D$ ou D est la directivité, donc :

$$A_e(\theta, \varphi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} D(\theta, \varphi) \quad (I.30)$$

La donnée de la directivité D qui est une caractéristique à l'émission permet de déduire l'aire équivalente A_e qui est, elle, une caractéristique à la réception.

1.2.15. La hauteur effective :

Soit un champ \vec{E} incident. La hauteur effective d'une antenne, est défini par :

$$h_{eff} = -\frac{V_{co}}{|\vec{E}|} \quad (I.31)$$

Où $|\vec{E}|$: est le module du champ électrique uniforme au niveau de l'antenne de réception et polarisation adéquate.

1.2.16. La f.e.m induite :

C'est la force électromotrice induite en circuit ouvert aux bornes de l'antenne réceptrice, par définition est égale à :

$$V_{c.o} = -\frac{1}{I_s} \int I(\theta, \varphi) \vec{E}_i(\theta, \varphi) \quad (I.32)$$

Où $\vec{E}_i(P)$ est le champ incident dû à l'antenne de réception.

1.3. Les différents types d'antenne :

Afin de comprendre comment s'effectue la transformation entre la puissance guidée et la puissance rayonnée, nous allons présenter un certains nombres d'antenne.

1.3.1. Les antennes planaire :

L'antenne planaire est une antenne dont l'élément rayonnant est une surface conductrice généralement carré, séparée d'un plan réflecteur conducteur par une lame diélectrique. Sa réalisation ressemble a un circuit imprimé double face, elle est donc favorable a une production industrielle. Ces antennes sont spécialement les antennes imprimées ont été beaucoup développées et utilisées ces dernières années pour leurs faible encombrement. D'autre part, la conformation facile et leur compatibilité avec l'intégration du circuit actif, font qu'elles sont particulièrement adaptées pour réaliser des systèmes compacts d'émission-réception.

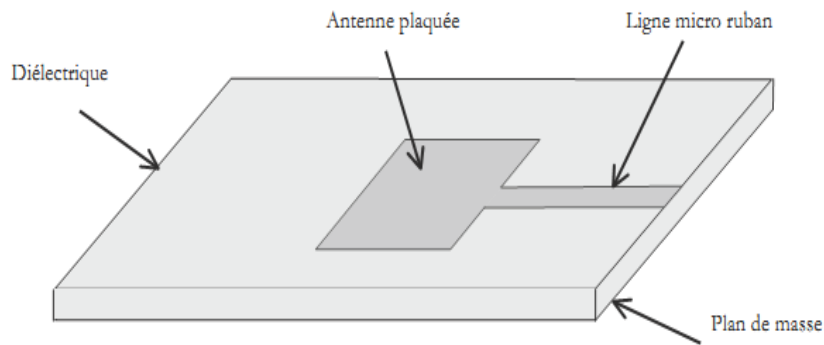


Figure I.13: antenne planaire

1.3.2. Les antennes à fente :

Une telle antenne est constituée d'un assemblage de guide d'onde rectangulaire sur lesquels sont taillées des fentes, régulièrement espacées. Le réseau de source élémentaire ainsi constitué peut être contrôlé finalement en amplitude et en phase en jouant sur la géométrie ou la position des fentes sur le guide.

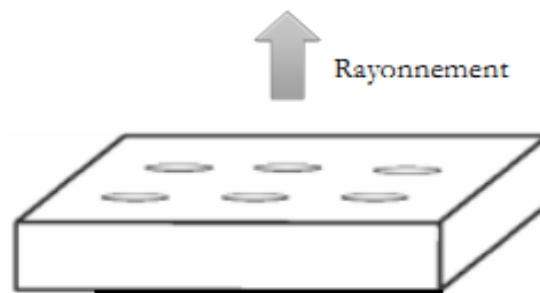


Figure I .14: réseau d'antenne a fente.

1.3.3. Antenne à réflecteur :

L'antenne à relecteur est constituée de la source d'émission associée à une partie métallique réfléchissante, souvent de forme parabolique.

La source, placée au foyer de la parabole envoie l'onde vers le relecteur parabolique. Selon la propriété bien connue de la parabole, tous les rayons sont réfléchis parallèlement. Ce type d'antenne est utilisé pour viser dans une direction très précise, puisque tous les rayons passant par le foyer sortent parallèles. Par décalage de la source dans le plan focal, les rayons parallèles à la sortie du réflecteur, peuvent présenter une inclinaison par rapport à l'axe de la parabole.

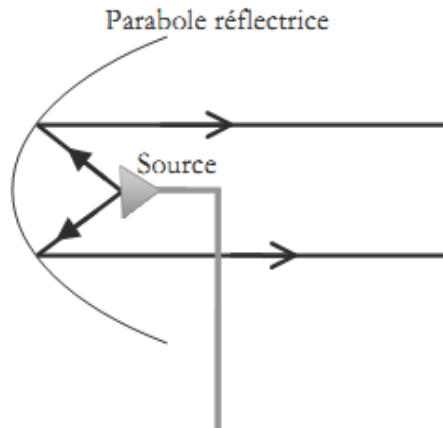


Figure I .15: antenne a réflecteur parabolique

1.3.4. Les antennes filaires :

Elle est constituée par des fils ou de groupement de fils de longueur L parcourus par un courant $J(z)$. Le plus souvent il s'agit d'un dipôle vu comme une ligne de transmission repliée se terminant par un circuit ouvert.

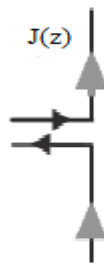


Figure1.16 : exemple d'antenne filaire.

Pour étudier de telles antennes, il suffit de les décomposer en antennes élémentaires (doublet d'Hertz).

1.3.5. Le doublet de Hertz :

Le doublet de Hertz ou l'antenne élémentaire ou le dipôle élémentaire est une antenne filaire mince de forme cylindrique (diamètre $d \ll \lambda$) parcourue par un courant variable dans le temps, d'amplitude complexe associée constante. Pour avoir cette amplitude associée de courant constant tout le long de cette antenne, sa longueur doit donc être très petite devant la longueur d'onde ($l \ll \lambda$), elle doit être munie à ses extrémités de deux plaques métalliques conductrices constituant une charge capacitive, afin d'assurer le courant non nul aux extrémités de l'antenne et de satisfaire l'équation de continuité. Cependant l'étude de cette antenne est d'une très grande importance, car le champ total rayonné de l'antenne filaire mince ou composée s'obtient en calculant la somme vectorielle des champ rayonné par N doublets d'hertz puis faire la somme vectorielle.

I.4. Les caractéristiques de l'antenne élémentaire :

-Le champ rayonné par l'antenne élémentaire à grande distance est :

$$\vec{E}_\infty(M) = j \frac{I l}{2\lambda} \eta \frac{e^{-jk r}}{r} \sin\theta \vec{u}_\theta \quad (I.33)$$

Qu'on peut écrire sous la forme :

$$\vec{E}_\infty(r, \theta, \varphi) = \frac{e^{-jk r}}{r} \vec{E}(\theta, \varphi) \quad (I.34)$$

$$\text{Avec : } |\vec{E}(\theta, \varphi)| = \frac{\eta I l}{\lambda} \sin\theta$$

-La densité surfacique de puissance : la densité surfacique de puissance (vecteur de Poynting) de l'antenne élémentaire est :

$$\begin{aligned} \langle \vec{N}(r, \theta, \varphi) \rangle &= \frac{1}{r^2} \frac{1}{2\eta} |\vec{E}(\theta, \varphi)|^2 \vec{u}_r \\ \langle \vec{N}(r, \theta, \varphi) \rangle &= \frac{1}{r^2} \frac{\eta}{8\lambda} (I l)^2 \sin^2\theta \vec{u}_r \end{aligned} \quad (I.35)$$

-L'intensité de rayonnement de l'antenne élémentaire :

$$\Psi(\theta) = \frac{1}{2\eta} |\vec{E}(\theta, \varphi)|^2$$

$$\Psi(\theta, \varphi) = \frac{\eta (I l)^2}{8 \lambda^2} \sin^2\theta$$

Comme l'antenne a une symétrie cylindrique (Ψ est indépendante de φ) on a donc :

$$\Psi(\theta) = \frac{\eta (I l)^2}{8 \lambda^2} \sin^2\theta \quad (I.36)$$

-la puissance totale rayonnée par l'antenne élémentaire :

$$\begin{aligned} P_r &\triangleq \iint_{00}^{2\pi\pi} \frac{1}{2\eta} |\vec{E}(\theta, \varphi)|^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\ P_r &= \iint_{00}^{2\pi\pi} \frac{\eta (I l)^2}{8 \lambda^2} \sin^2\theta \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \iint_{00}^{2\pi\pi} \frac{\eta (I l)^2}{8 \lambda^2} \sin^3\theta d\theta d\varphi \\ P_r &= \frac{\pi}{3} \eta \left(\frac{I l}{\lambda}\right)^2 I^2 \end{aligned} \quad (I.37)$$

-Sa fonction caractéristique est :

$$R(\theta, \varphi) = \frac{|\vec{E}(\theta, \varphi)|^2}{|\vec{E}(\theta, \varphi)|_{\max}^2} = \frac{\left[\frac{\eta}{2} \frac{1}{\lambda} I |\sin\theta|\right]^2}{\left(\frac{\eta}{2} \frac{1}{\lambda}\right)^2} = |\sin\theta|^2$$

Comme en coordonnée sphérique, θ varie entre 0 et π , donc $\sin\theta$ est toujours positif, on a alors :

$$R(\theta, \varphi) = \sin^2\theta \quad (I.38)$$

Son diagramme de rayonnement est représenté par la figure suivante :

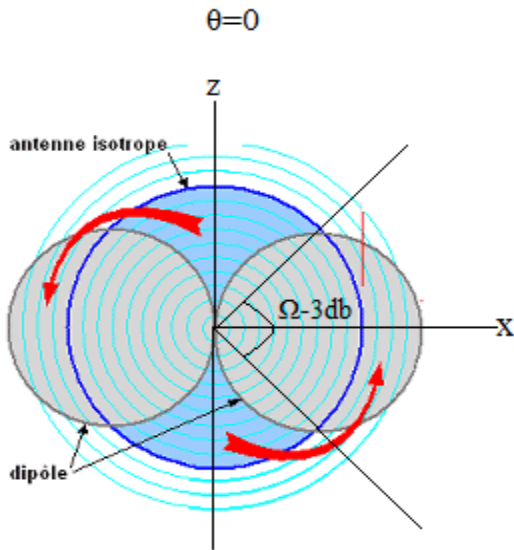


Figure I.18: diagramme de rayonnement d'un dipôle.
 -la directivité de l'antenne élémentaire :
 La directivité de l'antenne élémentaire est donné par :

$$D(\theta) = \frac{4\pi\psi(\theta)}{P_r} = \frac{4\pi\left(\frac{\eta Il^2}{8\lambda^2}\right)\sin^2\theta}{\frac{\pi}{3}\eta\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I^2}$$

$\psi(\theta)$ et P_r étant déjà calculées donc :

$$D(\theta) = \frac{3}{2}\sin^2\theta \quad (I.39)$$

Et : $D_{\max} = \frac{3}{2}$

-la polarisation du champ électrique rayonnée par l'antenne élémentaire :

Le champ est toujours dirigé suivant \vec{u}_θ . C'est donc une polarisation linéaire.

-Son impédance d'entrée :

Lorsque l'antenne est accordée on a $X_e=0$ et : $Z_e = R_r = 80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$

-La hauteur effective :

Ici, par définition, $I_e = I(p) = I'(z)$ amplitude complexe constante, on a alors :

$$h_{\text{eff}} = \int dl \equiv l \rightarrow h_{\text{eff}} = l$$

La hauteur effective de l'antenne élémentaire est égale à sa longueur physique l .

- la f.e.m induite maximale :

$$V_{c.o \max} = -|\vec{E}|h_{\text{eff}}$$

$$V_{c.o \max} = -\frac{\eta Il^2}{2\lambda r}$$

-Aire équivalente de doublet :

L'aire équivalent de doublet de hertz est donnée par :

$$A_e(\theta, \varphi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} D(\theta, \varphi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} \frac{3}{2} \sin^2 \theta$$

- La puissance maximale collectée au niveau de la charge P_{lmax} est donnée par :

$$P_{max} = \frac{1}{8} \frac{|V_{co}|^2}{R_e} = \frac{1}{8} \frac{\left(\frac{\eta Il^2}{2\lambda r}\right)^2}{\frac{2\pi}{3} \eta \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2}$$

Car $R_e \equiv R_r$ donc :

$$P_{lmax} = \frac{3\eta}{64\pi} \left(\frac{Il}{r}\right)^2 \quad (I.40)$$

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons défini les antennes en particulier les antennes filaires et leurs caractéristiques.

Comme il existe une panoplie d'antennes et que leurs études peuvent devenir d'une grande complexité, on se limitera à l'étude de l'antenne filaire. Même si le fil est simple, beaucoup de résultats issus de son étude peuvent être étendu à des structures plus compliquées.

Introduction :

La connaissance d'une distribution volumique, surfacique ou linéique de courant de conduction est à l'origine de la détermination du champ électromagnétique rayonné par l'antenne dans l'espace.

Dans ce chapitre, nous établirons deux équations intégrales classiques à trois dimensions appelées équation intégrodifférentielle de Pocklington et l'équation intégrale de Hallen, qui peuvent être utilisées pour trouver la distribution du courant sur les conducteurs cylindriques plus aisément.

L'équation d'Hallen est généralement restreinte à l'utilisation du modèle source de tension delta gap pour alimenter l'antenne filaire. Par contre, l'équation de Pocklington est plus générale et adaptable à plusieurs types de sources d'alimentation incluant la grille magnétique.

Pour des antennes filaires très minces, la distribution du courant est généralement considérée de forme sinusoïdale. Pour des diamètres finis (généralement pour des diamètres d tel que $d > 0,05\lambda$), la distribution du courant sinusoïdale est représentative mais pas précise. Pour trouver une distribution de courant plus précise sur le cylindre, une équation intégrale est généralement obtenue et résolue.

II.1. Equation de maxwell :

Avant de traiter des cas spécifiques d'antenne, il convient de commencer par le développement des équations électromagnétiques appliquées au rayonnement. La base de ces équations demeure les équations de Maxwell d'où découle tout l'électromagnétisme, ce qui inclut le rayonnement et toutes les caractéristiques d'antennes.

Les équations de Maxwell forment un système axiomatique d'équations dont les champs électrique E et magnétique B sont solutions. Les charges et courants qui sont à l'origine de ces champs constituant les données de ce système d'équations. Il n'est pas question de montrer ce système d'équations.

II.1.1. Ecriture des équations de Maxwell sous forme différentielle :

$$\left[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(M, t) \right] (M, t) = \left[-\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} \right] (M, t) \quad (\text{II.1})$$

$$\left[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}(M, t) \right] (M, t) = \vec{J}(M, t) + \left[\frac{\partial \vec{D}(M, t)}{\partial t} \right] (M, t) \quad (\text{II.2})$$

$$\left[\text{div} \vec{D}(M, t) \right] (M, t) = \rho(M, t) \quad (\text{II.3})$$

$$\left[\text{div} \vec{B}(M, t) \right] (M, t) = 0 \quad (\text{II.4})$$

Ou :

\vec{E} : Champ électrique en (V/m)

\vec{H} : Champ magnétique (A/m)

\vec{B} : Induction magnétique (Tesla)

\vec{D} : Induction électrique (C/m²)

\vec{J} : Densité de courant de conduction (A/m²)

ρ : Densité volumique de charge (C/m³)

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$: Densité de courant de déplacement (A/m^2)

Ces équations doivent être complétées par les relations constitutives du milieu :

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

ε : permittivité diélectrique du milieu [Farad/m][F/m]

μ : perméabilité magnétique du milieu [Henry/m][H/m]

σ : Conductivité électrique du milieu [mho/m]

Chacune de ses équations prise individuellement décrit un effet physique. La forme intégrale des équations de Maxwell permet de reconnaître facilement ces effets. Pour comprendre le contenu physique de ces équations, on les écrit sous forme intégrale.

II. 1.2. Ecriture des Equations de Maxwell sous forme intégrale :

II.1.2.1 : équation de Maxwell- Faraday :

Cette équation est indépendante des sources, sa forme intégrale est obtenue en écrivant :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \\ &\Rightarrow \iint_s \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_s -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

Le théorème de Stokes nous donne

$$\begin{aligned} \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \iint_s -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} \cdot d\vec{s}) \text{ car } \frac{\partial (d\vec{s})}{\partial t} = 0 \\ &\Rightarrow \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\phi}{dt} \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Avec $\phi = \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$ est le flux de l'induction magnétique \vec{B} à travers la surface S

Cette équation décrit tous les phénomènes d'induction et montre qu'un champ magnétique variable peut créer un champ électrique à circulation non nulle

II.1.2.2 : équation de Maxwell- Ampère :

Cette équation relie le champ magnétique à ses sources et au champ électrique, sa forme intégrale est :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \vec{J} \cdot d\vec{s} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \\ &\Rightarrow \iint_s \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_s \vec{J} \cdot d\vec{s} + \iint_s \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \cdot d\vec{s} \\ &\Rightarrow \iint_s \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_s \vec{J} \cdot d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \iint_s \overrightarrow{rot} \vec{H} d\vec{S} = \oint_c \vec{H} d\vec{l}$$

$$\text{Donc: } \oint_c \vec{H} d\vec{l} = I_{tot}$$

(II.6)

Ce qui signifie que la circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé est égale à la somme algébrique des courants traversant une surface quelconque se reposant sur ce contour.

II.1.2. 3 : équation de Maxwell- Gauss :

$$\text{div} \vec{D} = \rho \Rightarrow \text{div} \vec{D} d\tau = \rho d\tau$$

$$\Rightarrow \iiint_{\tau} \text{div} \vec{D} d\tau = \iiint_{\tau} \rho d\tau$$

Le théorème de la divergence nous donne :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iiint_{\tau} \rho d\tau$$

$$\text{Donc: } \oiint_{\Sigma} \epsilon \vec{E} d\vec{S} = \iiint_{\tau} \rho d\tau$$

$$\Rightarrow \oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{\iiint_{\tau} \rho d\tau}{\epsilon} = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

(II.7)

Ce résultat exprime que le flux du champ électrique à travers toute surface fermée est égal à la somme des charges intérieures sur ϵ ce qui est connue sous le nom de théorème de Gauss.

II.1.2. 4 : Equation du flux magnétique :

Cette équation est indépendante des sources. Sa forme intégrale est obtenue en écrivant :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{B} d\tau = 0 \Rightarrow \iiint_{\tau} \text{div} \vec{B} d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

(II.8)

Elle signifie que le flux de l'induction magnétique \vec{B} à travers toute surface fermée Σ est nulle.

C'est une propriété intrinsèque de \vec{B} qui montre que le champ magnétique ne peut diverger à partir de points de l'espace, ou encore qu'il n'existe pas de charges magnétiques.

II.2. Linéarité des équations de Maxwell :

Les

équations de Maxwell sont linéaire vis-à-vis des sources, cette propriété valide

le principe de la superposition relatif à \vec{E} et \vec{B} . En particulier, cette linéarité permet d'utiliser la méthode complexe pour les calculs des champs.

II.3. Relations de passage du champ électromagnétique:

Des problèmes de discontinuité peuvent survenir lorsqu'on passe à une modélisation plus simpliste (surfactive ou encore linéique). Soit M un point d'une surface S séparant deux milieux notés 1 et 2.

On définit le vecteur unitaire \vec{n}_{12} perpendiculaire à S de 1 vers 2 comme indique dans la figure II.1

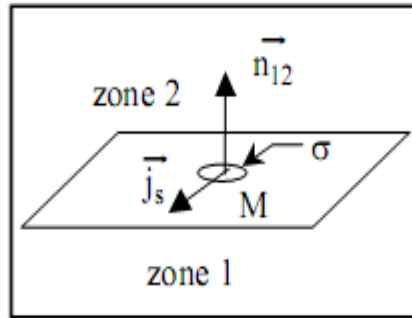


Figure II.1

Soit $\sigma(M)$ la densité surfacique de charges et $\vec{J}_s(M)$, le vecteur densité de courants surfacique au point M

On établit à partir des équations de Maxwell les relations de passage pour \vec{E} et \vec{B} à l'interface:

$$\vec{E}_2(M) - \vec{E}_1(M) = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon} \vec{n}_{12} \quad \text{et} \quad \vec{B}_2(M) - \vec{B}_1(M) = \mu \vec{J}_s(M) \wedge \vec{n}_{12}$$

On retient qu'il y a toujours continuité de la composante tangentielle pour \vec{E} et continuité de la composante normal pour \vec{B} ce qui conduit à:

$$\vec{n} \times \vec{H} = \vec{J}_s$$

$$\vec{n} \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0$$

II.4. Potentiel vecteur \vec{A} et potentiel scalaire V_e électrique issu d'une source de courant électrique

Le potentiel vecteur est très utile pour la résolution des équations du champ électromagnétique Produit par une source de courant électrique.

On a : $\text{div} \vec{B}_A = 0$ implique l'existence d'un vecteur \vec{A} , appelé potentiel vecteur tel que:

$$\vec{B}_A = \text{rot} \vec{A} = \mu \vec{H}_A \tag{II.9}$$

Ce ci est vrais car $\text{div}(\text{rot} \vec{A}) = 0$; on dit que \vec{B}_A dérive d'un potentiel vecteur \vec{A} .

Remplaçons l'équation (II.9) dans l'équation (II.1) on aura :

$$\text{rot} \left(\vec{E}_A + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Or, tout champ de vecteurs à rotationnel nul dérivant d'un gradient, il existe donc un scalaire V_e , appelé potentiel scalaire électrique tel que :

$$\overrightarrow{rot}(-\overrightarrow{grad}V_e) = 0$$

Donc : $\vec{E}_A + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}V_e$

Le signe - étant ici purement conventionnel ; au couple (\vec{E}, \vec{B}) , on vient donc d'associer un couple (\vec{A}, V_e) de potentiels reliés aux champs par :

$$\vec{E}_A = -\overrightarrow{grad}V_e - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{II.10})$$

$$\vec{B}_A = \overrightarrow{rot}\vec{A} = \mu\vec{H}_A \quad (\text{II.11})$$

Maintenant introduisant le vecteur identité défini comme suit :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

Avec : $\Delta\vec{A} = \nabla^2\vec{A}$ le Laplacien vectoriel

Introduisant l'équation (II.11) dans le vecteur identité, on aura :

$$\overrightarrow{rot}(\mu\vec{H}_A) = \overrightarrow{grad}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

Comme : $\overrightarrow{rot}\vec{H}_A = \vec{J} + j\omega\epsilon\vec{E}_A$

On aura : $\vec{J} + j\omega\epsilon\vec{E}_A = \overrightarrow{grad}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

Remplaçons \vec{E}_A par sa valeur déterminé dans l'équation (10), on aura :

$$\begin{aligned} \Delta\vec{A} + K^2\vec{A} &= -\mu\vec{J} + \overrightarrow{grad}(\text{div}\vec{A}) + \overrightarrow{grad}(j\omega\mu\epsilon V_e) \\ \Rightarrow \Delta\vec{A} + K^2\vec{A} &= -\mu\vec{J} + \overrightarrow{grad}(\text{div}\vec{A} + j\omega\mu\epsilon V_e) \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

Avec: $K^2 = \omega^2 \mu\epsilon$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{C} \quad : \text{Nombre d'onde}$$

λ : La longueur d'onde

C : La vitesse de la lumière

Pour définir un vecteur il faut connaître son rotationnel et sa divergence (d'après le théorème d'Helm Holts). Son rotationnel est connu, il nous reste à déterminer sa divergence, comme elle n'est pas imposée et dans le but de simplification on choisit $\text{div}\vec{A}$ tel que :

$$\text{div}\vec{A} + j\omega\mu\epsilon V_e = 0 \quad (\text{II.13})$$

Ce choix est appelé jauge de Lorenz

De l'équation (13) on aura

$$V_e = -\frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \text{div}\vec{A} \quad (\text{II.14})$$

Sous cette condition, les équations (II.12), (II.10) seront réduites à :

$$\Delta\vec{A} + K^2\vec{A} = -\mu\vec{J} \quad (\text{II.15})$$

C'est l'équation de propagation du potentiel vecteur électrique

Et l'équation (II.10) s'écrira comme suit :

$$\vec{E}_A = -\overrightarrow{grad}V_e - j\omega\vec{A} = -j\omega\vec{A} - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon} \overrightarrow{grad}(\text{div}\vec{A}) \quad (\text{II.16})$$

II.5. Potentiel vecteur \vec{F} et potentiel scalaire V_m magnétiques issus d'une source de courant magnétique :

Soient ce qu'on appelle équations de Maxwell généralisées suivantes :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} &= -\vec{M} - \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\text{rot}}\vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \text{div}\vec{D} &= \rho \\ \text{div}\vec{B} &= m\end{aligned}$$

Avec \vec{M} et m sont respectivement, le vecteur densité de courant magnétique et la densité volumique de charge magnétique qui sont toutes les deux fictives.

On a en absence de charges électrique :

$\text{div}\vec{D} = 0$, donc il existe un vecteur \vec{F} qu'on appellera potentiel vecteur magnétique tel que :

$$\vec{E}_F = -\frac{1}{\varepsilon}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F} \quad (\text{II.17})$$

Ce ci est vrais car : $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}) = 0$

Introduisant l'équation (II.15) dans l'équation (II.2) de Maxwell : $(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{H}_F) = j\omega\varepsilon\vec{E}_F$

On aura : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H}_F + j\omega\vec{F}) = 0$

Or, tout champ de vecteurs à rotationnel nul dérivant d'un gradient, il existe donc un scalaire V_m , appelé potentiel scalaire magnétique tel que :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(-\overrightarrow{\text{grad}}V_m) = 0$$

Donc : $\vec{H}_F = -\overrightarrow{\text{grad}}V_m - j\omega\vec{F}$ (II.18)

Utilisons le vecteur identité défini précédâmes, on aura :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}_F = -\frac{1}{\varepsilon}\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}) = -\frac{1}{\varepsilon}[\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{F}) - \Delta\vec{F}] \quad (\text{II.19})$$

Egalisons à l'équation de Maxwell généralise, on aura :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}_F = -\vec{M} - j\omega\mu\vec{H}_F$$

Ce qui mène à :

$$\Delta\vec{F} + j\omega\mu\varepsilon\vec{H} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{F}) - \varepsilon\vec{M} \quad (\text{II.20})$$

Remplaçons l'équation (II.17) dans l'équation (II.20), on trouve :

$$\Delta\vec{F} + K^2\vec{F} = -\varepsilon\vec{M} + \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{F}) + \overrightarrow{\text{grad}}(j\omega\mu\varepsilon V_m) \quad (\text{II.21})$$

Prenons : $\text{div}\vec{F} = -j\omega\mu\varepsilon V_m$ (jauge de Lorenz)

Donc : $V_m = -\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\text{div}\vec{F}$ (II.22)

Avec cette condition on aura:

$$\Delta\vec{F} + K^2\vec{F} = -\varepsilon\vec{M} \quad (\text{II.23})$$

C'est l'équation de propagation du potentiel vecteur magnétique.

Et $\vec{H}_F = -j\omega\vec{F} - \frac{j}{\omega\mu\varepsilon}\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{F})$ (II.24)

II.6. Champ électrique total \vec{E} et champ magnétique total \vec{H} :

Précédemment, nous avons développé des équations qui peuvent être utilisées pour déterminer les champs électrique et magnétique générés par une source de courant électrique ou magnétique. la procédure exige que les fonctions auxiliaires des potentiels vecteurs \vec{A} et \vec{F} générées respectivement par \vec{J} et \vec{M} soient trouvés en premier et les champs \vec{E} et \vec{H} seront déterminés par la suite.

Notons que \vec{J} et \vec{M} sont respectivement les vecteurs densités de courant électrique et magnétique.

Le potentiel vecteur électrique \vec{A} qui est dû à \vec{J} est donné par :

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{\tau'} \vec{J} \frac{e^{-jKR}}{R} d\tau' \quad (\text{II.25})$$

Qui est la solution de l'équation de propagation du potentiel vecteur électrique

Le potentiel vecteur magnétique \vec{F} qui est dû à \vec{M} est donné par :

$$\vec{F} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iiint_{\tau'} \vec{M} \frac{e^{-jKR}}{R} d\tau' \quad (\text{II.26})$$

Avec R : La distance entre la source et le point d'observation.

$d\tau'$: Volume élémentaire considéré à la source

Le champ électrique total \vec{E} est la somme des champs \vec{E}_A et \vec{E}_F et le champ magnétique total H est la somme des champs \vec{H}_A et \vec{H}_F

Remarque :

\vec{E}_A et \vec{H}_F peuvent être calculés directement à partir des équations de Maxwell en prenant respectivement $\vec{J} = 0$ pour \vec{E}_A et $\vec{M} = 0$ pour \vec{H}_F

Calculons \vec{E} :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_A + \vec{E}_F \\ &= -j\omega\vec{A} - j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \frac{1}{\varepsilon} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{F} \end{aligned}$$

$$\text{Or : } -j\omega\vec{A} - j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{H}_A$$

Donc :

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{H}_A - \frac{1}{\varepsilon} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{F} \quad (\text{II.27})$$

Calculons \vec{H} :

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{H}_A + \vec{H}_F \\ &= \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} - j\omega\vec{F} - j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{F}) \end{aligned}$$

$$\text{Or : } \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}_F = j\omega\varepsilon \left[-j\omega\vec{F} - j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{F}) \right] \text{ c'est l'équation de Maxwell généralisée en}$$

prenant $\vec{J} = 0$

$$\text{Donc: } \frac{1}{j\omega\epsilon} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{F} = -j\omega\vec{F} - j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}\vec{F})$$

$$\text{D'ou: } \vec{H} = \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} - \frac{1}{j\omega\mu} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}_F \quad (\text{II.28})$$

II.7. Equations intégrales du champ électrique et magnétique (EFIE et MFIE) :

En général, il y a plusieurs formes d'équations intégrales. Deux des plus connues pour le régime harmonique du temps sont l'équation intégrale en champ électrique (EFIE) et l'équation intégrale en champ magnétique (MFIE). Les deux termes (EFIE) et (MFIE) sont en anglais.

EFIE: Electric Field Integral Equation.

MFIE: Magnetic Field Intégral Equation

L'équation intégrale (EFIE) satisfait la condition aux limites pour le champ électrique tangentiel alors que l'équation intégrale (MFIE) satisfait la condition aux limites relatives à la composante tangentielle du champ magnétique.

II.7.1. Equation intégrale en champ électrique (EFIE) :

L'équation intégrale en champ électrique (EFIE) est basée sur la condition aux limites qui dit que la composante tangentielle du champ sur la surface (S) d'un conducteur parfait d'une antenne ou d'un objet diffractant (antenne de réception) est égale à zéro qui peut s'écrire comme suit :

$$\vec{E}_t^{tot}(r = r_s) = \vec{E}_t^i(r = r_s) + \vec{E}_t^d(r = r_s) = 0 \quad (\text{II.29})$$

Avec :

\vec{E}_t^{tot} Champ électrique tangentiel total

\vec{E}_t^i Champ électrique tangentiel incident

\vec{E}_t^d Champ électrique tangentiel diffracté

Et c'est vrai sur la surface conductrice (S)

De l'équation (II.28) on aura :

$$\vec{E}_t^i(r = r_s) = -\vec{E}_t^d(r = r_s) \quad (\text{II.30})$$

Où la surface (s) est la surface conductrice de l'antenne ou de l'objet diffractant et ($r = r_s$) est la distance de l'origine à un point quelconque de la surface de l'antenne ou du corps diffractant

Le champ incident qui illumine arrive à la surface (S) de l'antenne ou du corps diffractant induit une densité de courant électrique \vec{J}_s sur cette surface, qui lui-même va rayonner et produira un champ électrique appelé champ diffracté.

Si la densité de courant \vec{J}_s est connue, le champ diffracté peut être trouvé en utilisant l'équation (10) comme suit :

$$\vec{E}^d(r) = -\overrightarrow{\text{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Comme: $\text{div} \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0$

$$\text{div} \vec{A} + j\omega\mu\epsilon V = 0 \quad \text{jauge de Lorenz en régime harmonique du temps}$$

$$\Rightarrow V = -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \text{div} \vec{A} = \frac{j}{\omega\mu\epsilon} \text{div} \vec{A}$$

Donc : $\vec{E}^d(r) = -j\omega\vec{A} - j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A})$

$$= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \left[\omega^2 \mu\epsilon \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) \right]$$

Avec : $\vec{A}(r) = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \vec{J}_s(r') \frac{e^{-jKR}}{R} dS'$

$$= \mu \iint_S \vec{J}_s(r') \frac{e^{-jKR}}{4\pi R} dS'$$

On aura donc:

$$\vec{E}^d(r) = -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \omega^2 \mu\epsilon \mu \iint_S \vec{J}_s(r') \frac{e^{-jKR}}{4\pi R} dS' - j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \overrightarrow{\text{grad}} \left[\text{div} \mu \iint_S \vec{J}_s(r') \frac{e^{-jKR}}{4\pi R} dS' \right]$$

En posant $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jKR}}{4\pi R}$ fonction de green et $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$

On aura:

$$\vec{E}^d(r) = -j\omega\mu \iint_S \vec{J}_s(r') G(\vec{r}, \vec{r}') dS' - j \frac{1}{\omega\epsilon} \overrightarrow{\text{grad}} \iint_S \text{div} \vec{J}_s(r') G(\vec{r}, \vec{r}') dS'$$

Posant : $\frac{1}{\omega\epsilon} = \frac{\mu}{\omega\mu\epsilon} = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{\eta}{K}$ avec $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

$$\omega\mu = \frac{\omega\mu\epsilon}{\epsilon} = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \frac{\sqrt{\omega\mu}}{\epsilon} = K\eta \text{ avec } K = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

Donc:

$$\vec{E}^d(r) = -j \frac{\eta}{K} \left[K^2 \iint_S \vec{J}_s(r') G(\vec{r}, \vec{r}') dS' + \overrightarrow{\text{grad}} \iint_S \text{div} \left[\vec{J}_s(r') G(\vec{r}, \vec{r}') \right] dS' \right]$$

Si les points d'observations sont sur la surface de l'antenne ou de l'objet diffractant, c'est-à-dire : $\vec{r} = \vec{r}_s$ et comme : $\vec{E}_t^i(r = r_s) = -\vec{E}_t^d(r = r_s)$ sur la surface (S)

Donc :

$$\vec{E}_t^i(r = r_s) = j \frac{\eta}{K} \left[K^2 \iint_S \vec{J}_s(r') G(\vec{r}_s, \vec{r}') dS' + \overrightarrow{\text{grad}} \iint_S \text{div} \left[\vec{J}_s(r') G(\vec{r}_s, \vec{r}') \right] dS' \right] \quad (\text{II.31})$$

Comme le terme de droite est exprimé en fonction du champ électrique incident, on la nomme équation intégrale en champ électrique (EFIE en anglais).

Elle peut être utilisée pour donner la densité de courant en un point quelconque $r = r'$ sur l'antenne ou l'objet diffractant (antenne de réception). Il faut noter que l'équation précédente est une équation intégral-différentielle, mais généralement on la nomme équation intégrale.

II.7.2. Equation intégrale en champ magnétique :

L'équation intégrale en champ magnétique (MFIE) est exprimée en fonction du champ magnétique incident, comme elle est basée sur les conditions aux limites qui expriment la densité de courant total induit en tout point $r=r'$ sur la surface du conducteur

$$\begin{aligned} J_s(r') &= J_s(r=r') = \vec{n} \times H^i(r=r') \\ &= \vec{n} [H^i(r=r') + H^d(r=r')] \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

Une fois la densité de courant est connue, le champ magnétique diffracté peut être déterminé à partir de l'équation (II.9) comme suit :

$$\begin{aligned} H^d(r) &= \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A} \\ &= \overrightarrow{\text{rot}} \iint_{S'} \overrightarrow{J}_s(r') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} ds' \\ &= \overrightarrow{\text{rot}} \iint_{S'} \overrightarrow{J}_s(r') G(r, r') ds' \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

Avec : $G(r, r')$ fonction de Green qui s'écrit: $G(r, r') = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}$

$$R = |r - r'|$$

Inter changeons la différentiation et l'intégration et introduisons le vecteur identité dans l'équation (II.32) on aura :

$$\nabla \wedge (J_s G) = G \nabla \wedge J_s - J_s \nabla G$$

$$\text{Où : } \nabla \wedge J_s(r') = 0$$

$$\text{Donc : } \nabla G = -\nabla' G$$

L'équation (II.33) sera réduite à

$$H^d(r') = \iint_s J_s(r') \wedge [\nabla' G(r, r')] ds' \quad (\text{II.34})$$

Sur la surface du conducteur, le champ magnétique tangentiel est discontinu par la densité de courant induite sur la surface.

Par conséquent, la densité de courant est déterminée par l'équation (II.32) et le champ magnétique est donné par l'équation (II.34).

Ainsi on peut écrire :

$$\begin{aligned} J_s(r') &= \vec{n} \wedge \vec{H}^i(r=r') + \lim_{r \rightarrow s} [\vec{n} \wedge \vec{H}^d(r=r')] \\ &= \vec{n} \wedge \vec{H}^i(r=r') + \lim_{r \rightarrow s} \left\{ \vec{n} \wedge \iint_s J_s(r') \wedge [\nabla' G(r, r')] ds' \right\} \end{aligned}$$

Ou :
$$J_s(r') - \lim_{r \rightarrow s} \left\{ \vec{n} \wedge \iint_s J_s(r') \wedge [\nabla' G(r, r')] ds' \right\} = \vec{n} \wedge H^i(r = r') \quad (\text{II.35})$$
 L'équation

(II.35) est appelée équation intégrale en champ magnétique (MFIE) car son terme de droite est exprimé en fonction du champ magnétique incident, elle est valable pour toute surface fermée. La densité de courant peut être déterminée en utilisant l'équation (II.35) et le champ magnétique diffracté peut être calculé en utilisant les intégrales standards de rayonnement.

II.8. Etablissement des équations intégrales de Pocklington et Hallen :

La véritable distribution du courant dans une structure filaire n'est pas sinusoïdale. Pour obtenir une meilleure approximation de cette distribution, nous allons utiliser des équations intégrales désignées sous le nom des équations intégrodifférentielle de Pocklington et l'équation intégrale de Hallen, employées plus commodément pour déterminer la distribution du courant dans les antennes à structure filaire.

II.8.1. Equation intégrale de Pocklington :

Afin d'obtenir ce qu'on appelle l'équation intégrale de Pocklington nous suivons la même procédure que lors de l'établissement de l'équation intégrale en champ électrique (EFIE)

Cependant, chaque étape appliquée aux antennes filaires verticales sera répétée ici pour montrer la simplicité de la méthode. Considérons les figures suivantes

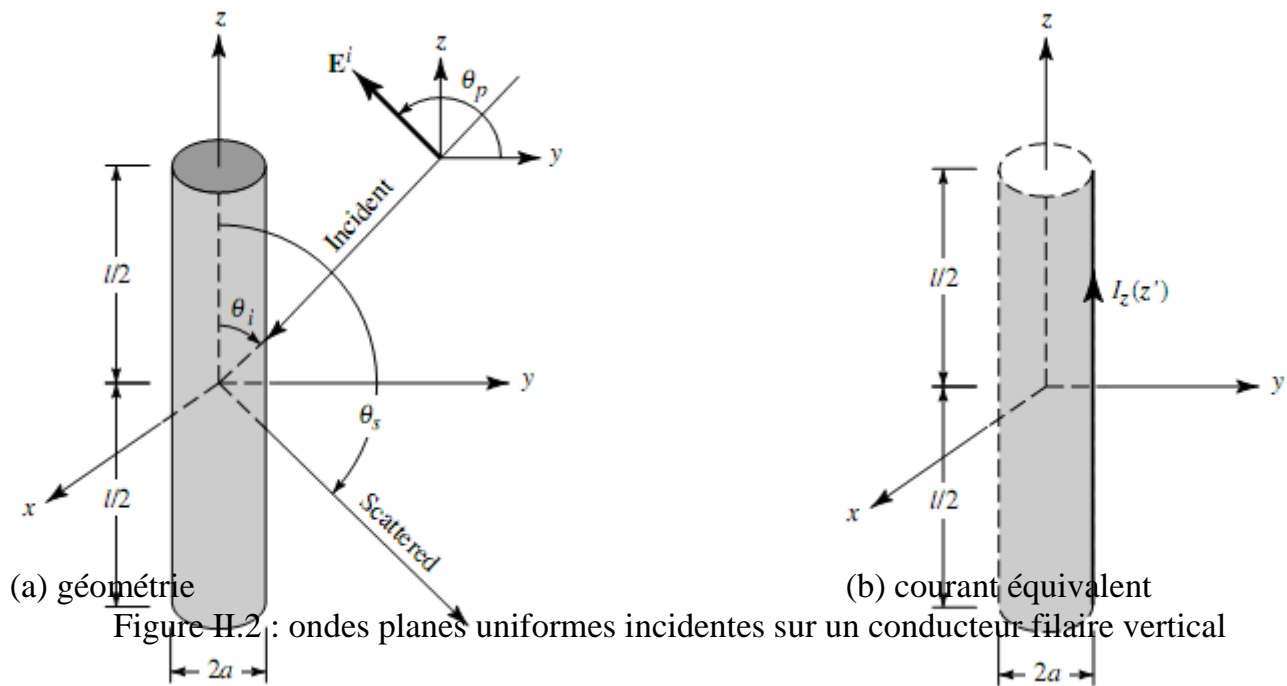


Figure II.2 : ondes planes uniformes incidentes sur un conducteur filaire vertical

L'équation de Pocklington est obtenue en se basant sur la jauge de Lorenz

De l'équation (II.29), on a :
$$\vec{E}_t^i(r = r_s) = -\vec{E}_t^d(r = r_s)$$

On sait que le champ électrique diffracté généré par une densité de courant est donné par l'équation (II.10) comme suit : $\vec{E}^d(r) = -\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Comme la jauge de Lorenz impose que : $V = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \text{div} \vec{A} = \frac{j}{\omega \mu \epsilon} \text{div} \vec{A}$

$$\text{Donc : } \vec{E}^d(r) = \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \left[K^2 \vec{A} + \overrightarrow{grad}(\text{div} \vec{A}) \right] \quad (\text{II.36})$$

Avant de procéder à la dérivation, on doit simplifier le problème :

-On tient compte uniquement d'un courant dans la direction de z ce qui fait que les composante x et y de tous les vecteurs ne sont plus nécessaires

-Les champs incident et diffracté sont symétriques, ce qui est plus vrais lorsque le fil est très mince

A cela, il convient d'ajouter l'énoncée reliée à la nature conductrice du matériau constituant le cylindre.

-Il n'existe que des courants de surface $\vec{J}_s = J_{sz} \vec{a}_z$ sur la structure et le courant circulant sur un segment différentiel dz' situé à la coordonnée z' comme indiqué sur la figure II.3 :

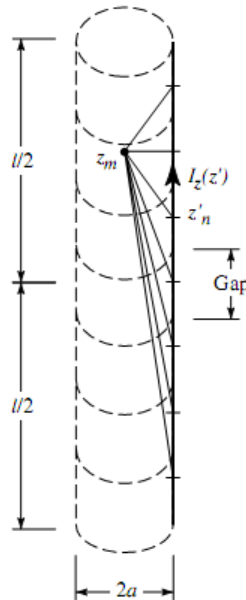


Figure II.3 : segmentation du cylindre et représentation du courant équivalent le long de la surface

$$\text{Ce courant vaut : } 2\pi a J_z = I_z(z') \Rightarrow J_z = \frac{1}{2\pi a} I_z(z') \quad (\text{II.37})$$

Où $I_z(z')$ est équivalent à un courant filamenteux situé à la distance $\rho = a$

Introduisons les hypothèses simplificatrices, la jauge de Lorenz s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \vec{A}_z}{\partial z} = -j\omega\mu\epsilon V$$

$$\text{Et } E_z^d = -\frac{\partial V}{\partial z} - j\omega A_z$$

Ce qui conduit à:

$$E_z^d = \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \left(k^2 A_z + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.38})$$

D'autre part, l'équation (II.24) qu'on réécrit ici en ne conservant que la composante en z

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \iint_{S'} J_{sz}(z') \frac{e^{-jKR}}{R} dS' = \mu \int_{-l/2}^{l/2} J_{sz}(z') \frac{e^{-jKR}}{4\pi R} ad\phi' dz' \quad (\text{II.39})$$

$$= \mu \int_{-l/2}^{l/2} \left(\frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} I_z(z') \frac{e^{-jKR}}{4\pi R} ad\phi' \right) dz' \quad (\text{II.40})$$

$$= \mu \int_{-l/2}^{l/2} I_z(z') \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jKR}}{4\pi R} d\phi' \right) dz' \quad (\text{II.41})$$

$$\text{Avec: } R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = \sqrt{\rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos(\phi - \phi') + (z-z')^2} \quad (\text{II.42})$$

Le point d'observation a pour coordonnées :

$$x = \rho \cos \phi$$

$$y = \rho \sin \phi$$

$$z = z$$

Et le point source qui est forcément sur la surface du cylindre a pour coordonnées :

$$x' = a \cos \phi'$$

$$y' = a \sin \phi'$$

$$z' = z'$$

ρ : La distance radiale pour l'observateur

a : le rayon de l'antenne

l : la longueur de l'antenne

Le passage de l'équation (II.39) à l'équation (II.40) provient de la relation entre la densité de courant surfacique et le courant total défini en (II.37). Quant au passage de l'équation (II.40) à l'équation (II.41) devient systématique

Puisque $I_z(z')$ est indépendant de ϕ' , on remplace alors le segment cylindrique avec un courant surfacique par un segment linéique de courant qui est placé parallèlement à l'axe z aux coordonnées $(\rho = a, \phi')$ tel qu'il a été représenté dans la figure II.3 .

A cause de la symétrie de l'antenne, le champ observé devrait être indépendant de ϕ . Par commodité, on choisit le point d'observation à $\phi = 0$. De plus, on cherche à connaître le courant de surface, donc on évaluera la fonction à $\rho = a$ induit par une source linéique de courant située en $(\rho = a, \phi')$.

Les équations (II.41) et (II.42) vont se réduire à :

$$A_z(\rho = a) = \mu \int_{-l/2}^{l/2} I_z(z') \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jKR}}{R} d\phi' \right] dz'$$

$$= \mu \int_{-l/2}^{l/2} I_z(z') G(z, z') dz'$$

Avec : $G(z, z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jKR}}{R} d\phi'$ la fonction de Green.

$$R(\rho = a) = \sqrt{4a^2 \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right) + (z - z')^2}$$

Pour des observations faites sur la surface, il est maintenant possible de déduire le champ incident produit par l'ensemble des segments en utilisant l'équation (II.30)

$$-E_z^i(\rho = a) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(k^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right) \int_{-l/2}^{l/2} I_z(z') G(z, z') dz' \quad (\text{II.43})$$

En inversant l'ordre des operateurs linéaires de différentiation et d'intégration on aura :

$$-j\omega\epsilon E_z^i(\rho = a) = \int_{-l/2}^{l/2} I_z(z') \left[\left(k^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right) G(z, z') \right] dz' \quad (\text{II.44})$$

Cette dernière équation est connue sous le nom **d'équation intégro-différentielle de Pocklington**. Elle permet de déterminer la source du courant linéique équivalente de la densité de courant surfacique sur le fil, étant donné le champ incident à la surface du fil, ou vice versa.

II.8.2. Supposition d'un fil très fin :

Considérons un fil de plus en plus mince devant la longueur d'onde ($a \ll \lambda$) et ($l \gg a$).

L'observation peut être faite à $\rho = 0$ mais en étant toujours fonction du champ incident à $\rho = a$

On aura maintenant :

$$R = \sqrt{a^2 + (z - z')^2} \quad (\text{II.45})$$

On ne modifie en rien si on déplace le repère cartésien de manière à faire coïncider la source équivalente $I_z(z')$ directement sur l'axe z tel qu'il est indiqué sur la figure II.4. Ainsi

l'observation se fait à $\rho = a$ en fonction du champ incident

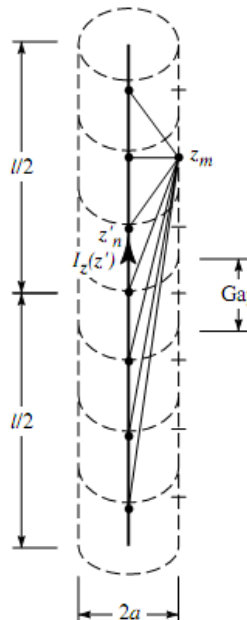


Figure II.4: segmentation du cylindre et représentation du courant équivalent le long du centre

En remarque qu'avec la supposition d'un fil mince, R devient indépendant de ϕ' et la fonction de Green se réduit à :

$$G(z, z') \approx G(z, z') = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad (\text{II.46})$$

Avec cette supposition, l'équation de Pocklington se simplifie davantage jusqu'à s'écrire :

$$-j\omega\epsilon E_z^i(\rho = a) \approx \int_{-l/2}^{l/2} I_z(z') \underbrace{\frac{e^{-jkR}}{4\pi R^5} [(1 + jkR)(2R^2 - 3a^2) + (kaR)^2]}_{K_e(z, z')} dz' \quad (\text{II.47})$$

C'est cette dernière équation qui est souvent programmée dans les algorithmes de la méthode des moments car il suffit d'intégrer numériquement le noyau $K_e(z, z')$ sur chaque segment de la structure (de $z' - \Delta_z/2$ à $z' + \Delta_z/2$) en assumant un courant constant sur le segment

II.8 .3. Equation intégrale d'Hallen :

On se referons toujours à la figure2a, en prenant la longueur du fil très grande devant son rayon ($l \gg a$) et se dernier très petit devant la longueur d'onde ($a \ll \lambda$). Cependant, les conditions aux limites vont faire annuler le champ tangentiel total sur la surface du cylindre et les courants sur les bornes $I_z \left[(z' = \pm l/2) = 0 \right]$. La densité de courant électrique dans le cylindre est dirigée suivant l'axe z ($\vec{J} = \vec{a}_z J_z$) et ($\vec{A} = \vec{a}_z A_z$)

On aura le champ total tangentiel qui s'exprime comme suit :

$$E_z^t = j\omega A_z - j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \omega^2 \mu\epsilon A_z \right] \quad (\text{II.48})$$

Comme le champ tangentiel total s'annule sur la surface du cylindre, l'équation (II.48) se réduit à :

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z = 0 \quad (\text{II.49})$$

A cause de la symétrie de la densité de courant sur le cylindre [$J_z(z') = J_z(-z')$], le potentiel A_z est aussi symétrique [$A_z(z) = A_z(-z')$]. La solution de l'équation (II.43) est donnée par :

$$A_z(z') = -j\sqrt{\mu\epsilon} \left[B_1 \cos(kz) + C_1 \sin(k|z|) \right] \quad (\text{II.50})$$

Où B_1 et C_1 sont des constantes.

On sait que pour un courant linéique, le potentiel A s'exprime comme suit :

$$A = \frac{\mu}{4\pi} \int_c I_l(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} dl' \quad (\text{II.51})$$

Faisons l'égalité entre les équations (II.50) et (II.51), on aura :

$$\int_{-l/2}^{l/2} I_z(z') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dz' = -j \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [B_1 \cos(kz) + C_1 \sin(k|z|)] \quad (\text{II.52})$$

Si une tension V_i est appliquée à l'entrée de l'antenne la constante C_1 vaut $\frac{V_i}{2}$ et la constante B_1 sera déterminée à partir des conditions aux limites quand les courants sur les bornes de l'antenne sont nulles.

L'équation (II.52) est appelée **l'équation intégrale d'Hallen** pour un fil conducteur parfait.

II.9. Modélisation des sources d'excitations des antennes filaires :

Les principales variables dans les problèmes d'antennes filaires sont : l'impédance d'entrée en particulier dans l'endroit d'alimentation, la directivité et le gain.

Pour les antennes filaires, on a besoin de déterminer l'expression du champ incident $E_z^i(\rho = a)$ Il existe deux modèles d'excitations pour représenter le champ $E_z^i(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, -\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2})$ qui sont nommés : modélisation de source par espacement (delta gap) et modélisation par la grille magnétique. la modélisation de la source permettra de déterminer $E_z^i(\rho = a)$.

II.9.1. Modélisation par espacement (delta gap) :

Pour cette modélisation, le dipôle doit être alimenté en son milieu de manière symétrique par une source de tension tel qu'il est indiqué dans la figure II.5.

Dans cette manière d'excitation, le champ électrique appliqué existe seulement dans l'espace entre les borne d'entrée de l'antenne et nul ailleurs.

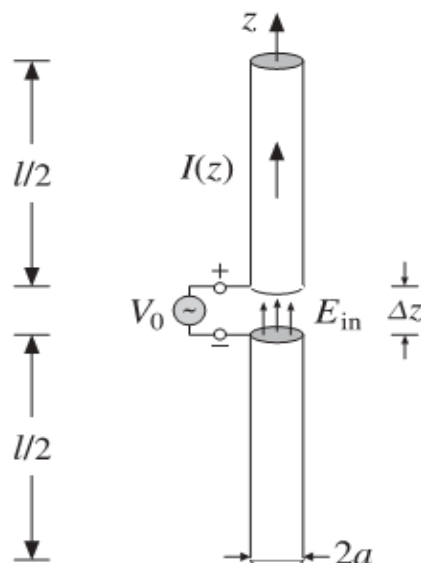


Figure II.5 : Source d'alimentation par espacement.

Le champ électrique dans ce cas peut être trouvé par

$$V_0 = \int_{-\Delta_z/2}^{\Delta_z/2} E_z^i(z) dz$$

Donc on aura:

$$E_z^i(z) = \frac{V_0}{\Delta_z}$$

La modélisation par espacement (delta gap) est la plus simple et la plus utilisée. Cependant, elle est moins précise surtout pour l'estimation de l'impédance d'entrée.

II.9.2. Modélisation par la grille magnétique (magnetic frill) :

La grille magnétique est utilisée comme générateur pour calculer le champ en zone proche et en zone en champ lointain.

Pour employer ce modèle, l'espace d'alimentation est remplacé par une densité de courant magnétique circonférentiellement dirigée qui existe au dessus d'une ouverture annulaire avec un rayon intérieur égal à **a**, habituellement choisit pour être le rayon du fil et un rayon extérieur **b** comme indiqué dans la figure II.6.

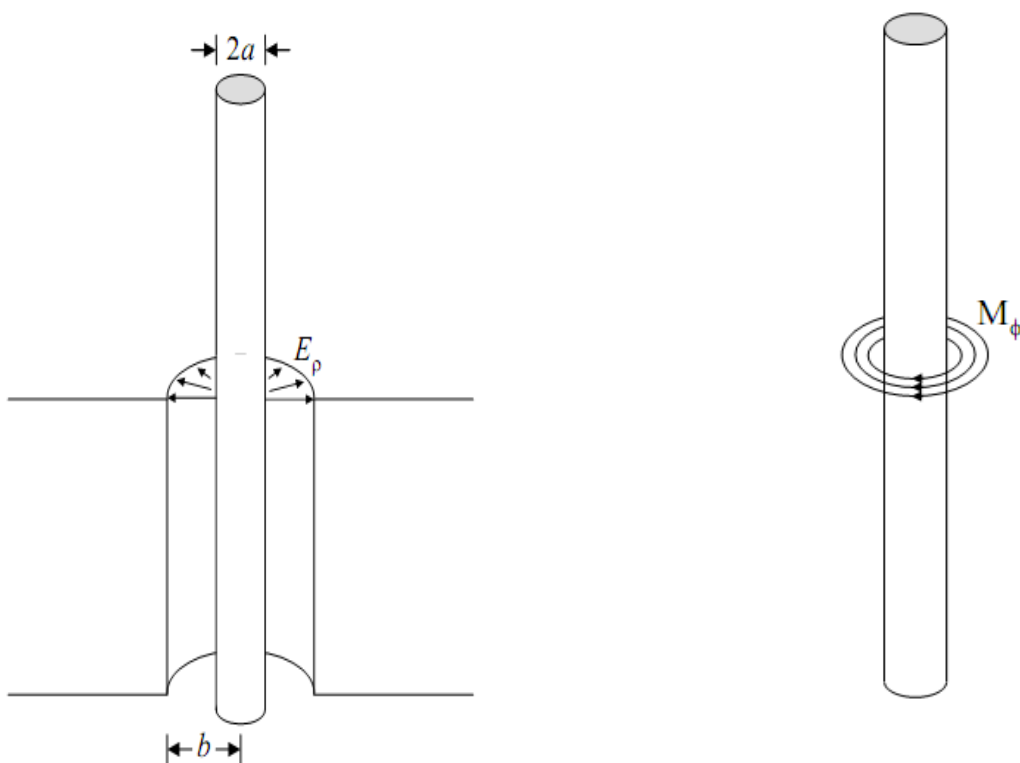


Figure II.6 : Alimentation par grille magnétique

Si on suppose que la distribution du champ est purement TEM, le champ électrique crée par la densité de courant magnétique est donné par :

$$\vec{E}_f(\rho) = \vec{a}_\rho \frac{1}{2\rho \ln(b/a)} \quad a \leq \rho \leq b$$

Par conséquent, la densité de courant magnétique $M_f(\rho)$ équivalente correspondante à la grille magnétique utilisée pour représenter l'ouverture est donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{M}_f(\rho) &= -2\vec{n} \times \vec{E}_f(\rho) \\ &= -2\vec{a}_z \times \vec{a}_\rho E_f(\rho) \\ &= -\vec{a}_\phi \frac{1}{2\rho \ln(b/a)} \quad a \leq \rho \leq b \end{aligned}$$

Ce courant génère un champ électrique le long du fil. Pour une grille magnétique centrée à l'origine, l'intensité du champ électrique dans l'axe du fil ($a \leq \rho \leq b$) est donnée par:

$$E_z^i(\rho=0, -\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2}) = \frac{1}{2 \ln(b/a)} \left[\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} - \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} \right] \quad (\text{II.53})$$

Avec: $E_z^i(\rho=0, -\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2})$ représente l'intensité du champ électrique générée.

$$R_1 = \sqrt{z^2 + a^2}$$

$$R_2 = \sqrt{z^2 + b^2}$$

Le champ électrique est dirigé suivant l'axe z dans l'équation (II.53) devient le nouveau champ incident.

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons établi les équations intégrales de Pocklington et de Hallen pour les antennes filaires minces. La résolution de ces deux équations est à l'origine de la détermination de la distribution du courant qui est d'une très grande importance en vu de la détermination des différentes caractéristiques d'antennes.

Analytiquement, ces deux équations sont très difficiles à résoudre, raison pour laquelle on fait recourir aux méthodes numériques qui sont indispensables et d'un apport considérable pour la résolution de ce genre de problèmes.

Parmi les méthodes numériques existantes, nous allons opter dans notre travail pour la méthode des moments pour son efficacité et sa capacité de s'intégrer à des logiciels de conception assistée par ordinateurs.

Introduction :

La résolution d'un problème d'électromagnétisme en général consiste essentiellement en l'intégration des équations de Maxwell. Ces équations peuvent être posées sous leur forme d'origine différentielle ou sous forme intégrale. Dans les deux cas, il s'agit de l'application d'un opérateur linéaire à une fonction inconnue, qui représentera en général les champs ou les densités de courant. Ces problèmes ont été traités par de nombreuses méthodes numériques qui

différent suivant le domaine de fréquence, la précision voulue et la puissance de l'outil de calcul disponible.[5]

Le problème peut être traité numériquement. Les équations qui régissent l'électromagnétisme ne peuvent être résolues de façon analytique qu'en introduisant des simplifications limitant le domaine de validité du modèle considéré. On a ainsi été amené à développer des méthodes numériques telle que la méthode des moments (Harrington, 1968) qui permettent de remplacer un opérateur linéaire par un système approché d'équations linéaires. Depuis de nombreuses années, le développement des méthodes numériques permet de résoudre des équations intégrales.

Dans ce chapitre nous allons présenter une méthode de résolution numérique des problème a équation intégrales appelé **la méthode des moments** .

III.1.Définition :

La méthode des moments est une technique de résolution fonctionnelle ou intégral-différentielle de l'électromagnétisme qui a été développée dans les années 1960-1966 par M^r Roger F.Harrington.[5]

C'est une procédure numérique de transformation des équation intégrales ou différentielles en un système d'équation linéaire algébrique résolu ensuite par des systèmes d'équations matricielles.

Elle consiste à résoudre l'équation :

$$L(f) = g \tag{III-1}$$

L : un opérateur linéaire

➤ Un opérateur linéaire est une fonction de l'espace vectoriel dans lui-même, il prend un vecteur en entrée et produit un vecteur en sortie. La linéarité veut dire que si L est un opérateur linéaire, a; b deux membres quelconques de l'espace vectoriel et λ, μ deux scalaires, alors :

$$L(\lambda a + \mu b) = \lambda L(a) + \mu L(b)$$

f :est une fonction inconnue à déterminer

g : est une fonction connue.

Le problème d'analyse consiste en la détermination de f quand L et g sont donnés en ramenant le problème intégral à un problème matriciel de la forme $A x = B$, où A est une matrice, x un vecteur inconnu dont on cherche les solutions et B un vecteur connu.

Lorsque c'est possible, l'inversion de la matrice A permet de déterminer les solutions recherchées tel que :

$$x = A^{-1} B$$

Le terme *méthode des moments* dérive du fait que $\int x^n f(x) dx$ est le $N^{\text{ième}}$ moment de $f(x)$. Quand x^n est remplacé par la fonction w_n nous avons une expression similaire à un produit interne.

Nous allons présenter des techniques mathématiques de base pour ramener des équations fonctionnelles aux équations matricielles.

III.2 .Présentation de la méthode des moments :

Les solutions générales seront discutées dans la notation des espaces linéaires et des opérateurs. Pour un problème déterministe de la forme $L(f) = g$ (déterministe veut dire que la solution de(III.1)est unique), nous devons identifier l'opérateur L , son domaine et son rang (la fonction g résultante de l'opération) en outre , nous avons besoin habituellement d'un produit linéaire $\langle f, g \rangle$, qui est un scalaire défini dans l'espace Hilbert.[7]

On appelle espace de Hilbert un espace vectoriel H (réel ou complexe) muni d'un produit scalaire $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$ tel que la semi-norme $x \rightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle}$ soit une norme sur H

qui rend cet espace complet. Si H est un espace Hilbert ,on notera $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pour tout $x \in H$.

parmi ses propriétés :

La linéarité : $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ (III-2)

La distributivité : $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$ (III-3)

L'annulation : $\left\{ \begin{array}{l} \langle f^*, f \rangle > 0 \\ \text{si } f \neq 0 \end{array} \right.$ (III-4)

$$= 0 \quad \text{si } f = 0$$

Ou f , g et h sont des fonctions, α et β sont des scalaires.

* symbolise le complexe conjugué

III.3.L'opérateur adjoint :

Parfois nous aurons besoin d'utiliser un opérateur adjoint noté L^a dont son rang est défini par :

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, L^a g \rangle \quad (\text{III-5})$$

Pour toute f dans le domaine de L , un opérateur est auto-adjoint si $L^a = L$ et le domaine de L^a est le même que celui de L .

III.4.Propriétés :

Les propriétés de la solution dépendent des propriétés de l'opérateur :

- Un opérateur est réel si Lf est réel si f est réel.
- Un opérateur est défini positif si :

$$\langle f^*, Lf \rangle > 0 \quad (\text{III-6})$$

pour toute f dans son domaine.

III.5.L'opérateur inverse :

Si la solution de $L(f) = g$ existe et unique pour toute g , alors l'opérateur inverse L^{-1} existe telle que :

$$f = L^{-1}(g) \quad (\text{III-7})$$

Dans le cas où la fonction g est connue, alors (III-6) représente la solution du problème original. Cependant, $f = L^{-1}(g)$ est une équation non homogène pour g , si f existe et connue, sa solution est $L(f) = g$. Par conséquent L et L^{-1} forment une paire d'opérateur dont chacun est l'inverse de l'autre.

Exemple :

Soit $g(x)$ une fonction connue, trouvons $f(x)$ dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$ qui satisfait :

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} = g(x) \quad (\text{III-8})$$

$$f(0) = f(1) = 0 \quad (\text{III-9})$$

C'est un problème aux valeurs limites pour lequel :

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} \quad (\text{III-10})$$

L'ensemble de L est l'espace de toutes les fonctions g dans l'intervalle $[0,1]$ que nous souhaitons considérer et son domaine est l'espace de toutes les fonctions f dans le même intervalle pour lequel les conditions des valeurs limites sont satisfaites et les dérivées secondaires sont dans le rang de L .

La solution de l'équation (III-8) n'est pas unique à moins que les conditions aux limites sont satisfaites.

Introduisons un produit interne au problème défini comme suit :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad (III-11)$$

Il est facile de montrer que l'équation (III-8) satisfait les postulats (III-2), (III-3) et (III-4) au besoin.

Notons que la définition (III-11) n'est pas unique. Par exemple,

$$\int_0^1 w(x)f(x)g(x)dx \quad (III-12)$$

Où $w(x)$ est une fonction de pondération arbitraire que nous allons définir ultérieurement, accepte un produit interne. Cependant, l'opérateur adjoint dépend du produit interne qu'on pourra choisir pour avoir un opérateur auto-adjoint.

III.6. Identification de l'opérateur adjoint :

Pour calculer l'opérateur adjoint différentiel, on prend la partie gauche de l'équation (III-5) et on intègre par partie pour obtenir la partie droite de la même équation

$$\begin{aligned} \langle Lf, g \rangle &= \int_0^1 \left(-\frac{d^2f}{dx^2}\right)g dx \\ &= \int_0^1 \frac{df}{dx} \frac{dg}{dx} dx - \left[\frac{df}{dx} g \right]_0^1 \\ \langle Lf, g \rangle &= \int_0^1 f \left(-\frac{d^2g}{dx^2}\right) dx + \left[f \frac{dg}{dx} - g \frac{df}{dx} \right]_0^1 \end{aligned} \quad (III-13)$$

Les termes $-\left[\frac{df}{dx} g \right]_0^1$ et $\left[f \frac{dg}{dx} - g \frac{df}{dx} \right]_0^1$ sont les valeurs limite et le domaine de L^a peut être choisi de sorte qu'ils s'annulent, le premier par l'équation (I-9) et le second par $g(0) = g(1) = 0$

(III-14)

Il est donc évident que l'opérateur adjoint de (III-10) pour le produit interne de (I-10) est :

$$L^a = L = -\frac{d^2}{dx^2} \quad (III-15)$$

Comme $L^a = L$ et le domaine de L est celui de L^a , l'opérateur est auto-adjoint. Lf est réel quand f est réel, L est un opérateur réel défini positif. Montrer dans l'équation (III-6) comme suit :

$$\begin{aligned}
\langle f^*, Lf \rangle &= \int_0^1 f^* \left(-\frac{d^2 f}{dx^2} \right) dx \\
\langle f^*, Lf \rangle &= \int_0^1 \frac{df^*}{dx} \frac{df}{dx} dx - \left[f^* \frac{df}{dx} \right]_0^1 \\
&= \int_0^1 \left| \frac{df}{dx} \right|^2 dx
\end{aligned} \tag{III-16}$$

Notons que l'opérateur L est positif même si la fonction f est complexe.

III. 7. Etablissement de l'opérateur inverse :

Plus important que la résolution de n'importe quelle équation particulière, la matrice inverse $[\ell_{mn}]$ donne une représentation de l'opérateur inverse L^{-1} . Nous avons alors une solution (souvent approximative) de $Lf = g$ pour tout g . Dans les problèmes physiques, L représente le système, g l'excitation et f la réponse. La détermination de la matrice $[L^{-1}]$ nous donne donc une solution générale du système, c'est-à-dire la réponse f pour une excitation arbitraire g .

Nous pouvons obtenir l'opérateur inverse L^{-1} à l'aide de la fonction de Green standard tel que :

$$L^{-1}(g) = \int_0^1 G(x, x') g(x') dx' \tag{III-17}$$

Où G est la fonction de Green

$$G(x, x') = \begin{cases} x(1-x') & x \prec x' \\ (1-x)x' & x \succ x' \end{cases}$$

➤ Fonction de Green :

Les fonctions de Green constituent une méthode assez général de résolution d'équations différentielles, ou de transformation d'équations différentielles en équations intégrales.

Soit $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle bornée et continue. On considère l'équation différentielle

$$(Lf)(x) \equiv -f''(x) + q(x)f(x) = h(x) \tag{*}$$

ou h est une fonction donnée (que nous supposons continue par morceaux)

et
$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

L est un opérateur différentiel qui agit sur des fonctions de x (il associe à chaque fonction deux fois différentiable une nouvelle fonction Lf), et son action fait intervenir des dérivées. Dans cette terminologie, l'équation différentielle (*) peut être écrite sous la forme $Lf = h$.

La solution f l'équation (*) est soumise à des conditions aux limites homogènes que nous allons considérer (c'est-à-dire une condition au point $x=a$ et une condition au point $x=b$)

La méthode de la fonction de Green consiste à résoudre, pour chaque $x' \in (a, b)$ fixé, l'équation différentielle suivante :

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \right] G(x, x') = \delta(x - x')$$

Où la fonction de Green G doit satisfaire les mêmes conditions aux limites en $x=a$ et en $x=b$ que la solution f de (*). Si G est trouvé, on peut obtenir la solution f

$$f(x) = \int_a^b G(x, x') h(x') dx'$$

III.8. Etablissement de la solution :

Nous discutons maintenant d'une procédure générale pour résoudre l'équation linéaire appelée la méthode des moments (MoM). [2]

Pour cela considérons l'équation inhomogène :

$$L(f) = g$$

Pour résoudre cette équation par la méthode des moments, nous procédons par les étapes successives suivantes :

1. Choisir un ensemble de N fonctions élémentaires formant une base sur laquelle la fonction inconnue f est décomposée.

Soit f sous forme d'une série de fonction $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ dans le domaine de L telle que

$$f = \sum_n \alpha_n f_n \quad (\text{III-18})$$

Où les α_n sont des constantes. Les f_n sont appelées fonctions de base. Pour obtenir une solution exacte, la somme (III-18) est une somme infinie et pour une solution approchée, (III-18) est une somme finie.

Ainsi, en introduisant (III-18) dans (III-1) on obtient :

$$\sum_n \alpha_n L(f_n) = g \quad (\text{III-19})$$

2. Définir un ensemble de fonctions de pondération ou fonctions test w_1, w_2, \dots du rang de L .

Le choix de ces fonctions s'effectue selon des sous-méthodes que nous citerons ultérieurement.

3. Former le produit scalaire de l'équation à résoudre avec chacune des fonctions test

$$\sum_n \alpha_n \langle w_m, Lf_n \rangle = \langle w_m, g \rangle \quad (\text{III-20})$$

Où $m = 1, 2, 3, \dots$

L'équation (I-14) peut être écrite sous forme matricielle comme :

$$[l_{mm}] [\alpha_n] = [g_m] \quad (\text{III-21})$$

Où :

$$[l_{mn}] = \begin{pmatrix} \langle w_1, Lf_1 \rangle & \langle w_1, Lf_2 \rangle & \cdots \\ \langle w_2, Lf_1 \rangle & \langle w_2, Lf_2 \rangle & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad (\text{III-22})$$

$$[\alpha_n] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (\text{III-23})$$

$$[g_m] = \begin{pmatrix} \langle w_1, g \rangle \\ \langle w_2, g \rangle \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (\text{III-24})$$

Si la matrice $[l]$ est non singulière, son inverse $[l^{-1}]$ existe. Le calcul des $[\alpha_n]$ est donné par :

$$[\alpha_n] = [l_{nm}^{-1}] [g_m] \quad (\text{III-25})$$

et la solution est donnée par (III-18) et peut aussi s'écrire :

$$f = [f_n] [\alpha_n] = [f_n] [l_{nm}^{-1}] [g_m] \quad (\text{III-26})$$

$$\text{Où : } [f_n] = (f_1 \quad f_2 \quad \cdot \quad \cdot) \quad (\text{III-27})$$

Cette solution peut être exacte ou approchée en fonction du choix de f_n et de w_n .

Exemple :

Considérons le problème suivant :

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} = 1 + 4x^2 \quad (\text{III-28})$$

$$\text{Avec } f(0) = f(1) = 0 \quad (\text{III-29})$$

C'est un simple problème de conditions aux limites avec solution exacte :

$$f(x) = \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^4 \quad (\text{III-30})$$

Pour illustrer la procédure, le problème sera reconsidérer par la méthode des moments.

Pour une solution sous forme de séries, choisissons comme fonctions de base:

$$f_n = x - x^{n+1} \quad (\text{III-31})$$

$n = 1, 2, 3, \dots, N$, donc sa série (III-18) est :

$$f = \sum_{n=1}^N \alpha_n (x - x^{n+1}) \quad (\text{III-32})$$

Notons que le terme x dans (III-29) est nécessaire, sinon f_n ne sera pas dans le domaine de L ; c'est-à-dire que les conditions aux limites ne seront pas satisfaites.

Pour les fonction de test choisissons :

$$w_n = f_n = x - x^{n+1} \quad (\text{III-33})$$

Les w_n doivent être dans le domaine de l'opérateur adjoint. Comme L est auto-adjoint pour ce problème, les w_n seront dans le domaine de L , comme le sont celles de (III-33) et les résultats sont :

$$\ell_{mn} = \langle w_m, Lf_n \rangle = \frac{mn}{m+n+1} \quad (\text{III-34})$$

Car $\ell_{mn} = \langle w_m, Lf_n \rangle = \int_0^1 (x - x^{m+1}) \left[-\frac{d^2 f}{dx^2} (x - x^{n+1}) \right] dx$

et $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ est ici le produit interne .

et $g_m = \langle w_m, g \rangle = \int_0^1 (x - x^{m+1})(1+4x^2)dx$

$$g_m = \langle w_m, g \rangle = \frac{m(3m+8)}{2(m+2)(m+4)} \quad (\text{III-35})$$

Pour tout N fixé, les coefficients α_n sont donnés par (III-25) et l'approximation de f par (III-32).

Pour illustrer la convergence, considérons les différentes approximations suivant N croissant.

Pour $N=1$

$$n=1 \quad m=1 \quad \Rightarrow \ell_{11} = \frac{1+1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$

$$g_1 = \frac{1(3+8)}{2(1+2)(1+4)} = \frac{11}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}\alpha_1 = g_1 \Rightarrow \frac{1}{3}\alpha_1 = \frac{11}{30} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{11}{10}$$

Et donc $f = \alpha_1 f_1$

$$f_1 = \frac{11}{10}(x - x^{1+1})$$

$$f(x) = \frac{11}{10}(x - x^2)$$

$$f(x) = \frac{11}{10}x - \frac{11}{10}x^2$$

Pour $N=2$

$$m=1 \quad \text{et} \quad n = \begin{cases} n=1 \\ n=2 \end{cases}$$

$$m=2 \quad \text{et} \quad n = \begin{cases} n=1 \\ n=2 \end{cases}$$

$$[\ell_{mn}] = \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$g_1 = \frac{1(3 \times 1 + 8)}{2(1+2)(1+4)} = \frac{11}{2 \times 3 \times 5} = \frac{11}{30}$$

$$g_2 = \frac{2(3 \times 2 + 8)}{2(2+2)(2+4)} = \frac{14}{24} = \frac{17}{12}$$

$$g_m = \begin{pmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \end{pmatrix}$$

On aura :

$$g_m = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Donc

$$f(x) = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$$

$$f(x) = \frac{1}{10}(x - x^{1+1}) + \frac{2}{3}(x - x^{2+1})$$

$$f(x) = \frac{x}{10} - \frac{x^2}{10} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x^3$$

$$f(x) = \frac{23}{10}x - \frac{x^2}{10} - \frac{2}{3}x^3$$

Pour N=3 :

On aura :

$$m=1 \quad \text{et} \quad n = \begin{cases} n=1 \\ n=2 \\ n=3 \end{cases}$$

$$m=2 \quad \text{et} \quad n = \begin{cases} n=1 \\ n=2 \\ n=3 \end{cases}$$

$$m=3 \quad \text{et} \quad n = \begin{cases} n=1 \\ n=2 \\ n=3 \end{cases}$$

On aura

$$[\ell_{mn}] = \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 3/5 \\ 1/2 & 4/5 & 1 \\ 3/5 & 1 & 9/7 \end{pmatrix}$$

Et

$$g_m = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/30 \\ 7/12 \\ 51/70 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 3/5 \\ 1/2 & 4/5 & 1 \\ 3/5 & 1 & 9/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/30 \\ 7/12 \\ 51/70 \end{pmatrix}$$

Qui donne les différents α_n :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Et donc

$$f(x) = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$$

$$f(x) = \frac{1}{10}(x - x^{1+1}) + 0(x - x^{2+1}) + \frac{1}{3}(x - x^{3+1})$$

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{x^4}{3}$$

$$f(x) = \frac{5}{6}x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3}$$

qui est la solution exacte

Pour N=4 :

Nous trouvons de nouveau la solution exacte et il en est de même pour tout $N \geq 3$ comme illustrer dans la figure III.1[harigton]

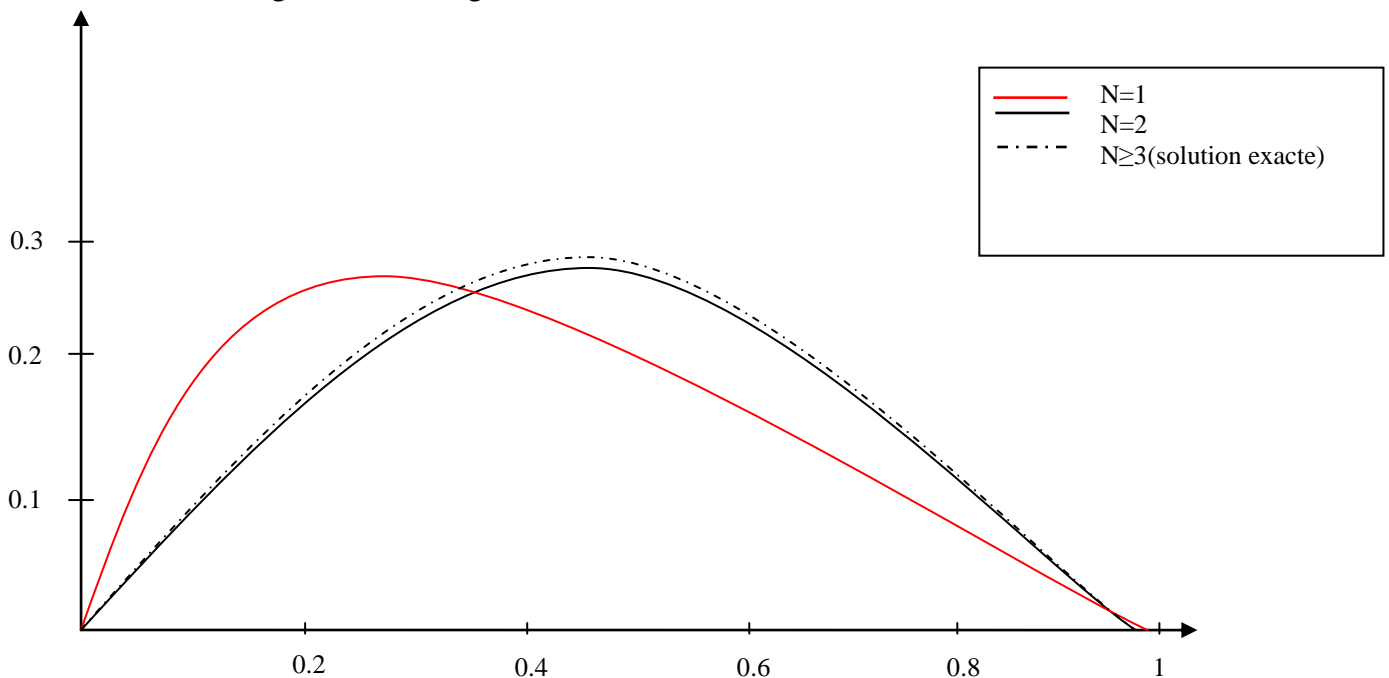


Figure III.1 :solution pour $f_n = x - x^{n+1}$

III.9. Point de raccordement(point matching) :

L'intégrale impliquée dans $l_m = \langle w_m, Lf_n \rangle$ est souvent difficile à calculer dans les problèmes d'intérêt pratiques. Une méthode efficace pour approximer la solution est de choisir que l'équation (III-19) soit satisfaite en certains points du domaine Cette méthode s'appelle le point de raccordement(**point-matching**) . En ce qui concerne la méthode des moments, le point de raccordement consiste à utiliser les fonctions de Dirac comme fonctions tests.[2]

Cette méthode désigné sous le nom de raccordement de point (point matching). Cette méthode présente des avantages significatifs aussi bien que des inconvénients. Un avantage est celui du fait qu'en évaluant les éléments de matrice, aucune intégrale n'est exigée sur la gamme de la fonction d'essai, seulement celles de la fonction de source. L'inconvénient est que les conditions aux limites sont assortis seulement aux endroits discrets dans tout le domaine de solution, leur permettant d'assumer une valeur différente aux que ceux utilisés pour l'essai.

Exemple :[2]

On reconsidère le problème de la section (III.9)posé pour (III.28) et (III.29) .

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \left[-\frac{d^2}{dx^2} (x - x^{n+1}) \right] = 1 + 4x^2 \quad (\text{III.36})$$

Considérons les points :

$$x_m = \frac{m}{N+1} \quad m = 1, 2, 3, \dots, N$$

Qui sont équidistants dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$.

On a donc

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \left[-\frac{d^2}{dx^2} (x - x^{n+1}) \right] = \sum_{n=1}^N \alpha_n n(n+1)x^{n-1} = 1 + 4x^2$$

Pour que (III.36) soit seulement satisfaite aux différents points x_n on aura :

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n n(n+1)x_m^{n-1} = 1 + 4\left(\frac{m}{N+1}\right)^2$$

$$\text{C'est-à-dire : } \sum_{n=1}^N \alpha_n n(n+1)\left(\frac{m}{N+1}\right)^{n-1} = 1 + 4\left(\frac{m}{N+1}\right)^2$$

$$\text{Donc} \quad \ell_{mn} = n(n+1)\left(\frac{m}{N+1}\right)^{n-1}$$

$$\text{Et} \quad g_m = 1 + 4\left(\frac{m}{N+1}\right)^2$$

Notons que ce résultat est équivalent comme si on avait utilisé comme fonction test la fonction suivante :

$$w_m = \delta(x - x_m)$$

Ou $\delta(x)$ est la fonction delta de Dirac, et en appliquant la méthode des moments avec le produit interne (III.11)

$$[\ell_{mn}] = \begin{pmatrix} \langle w_1, Lf_1 \rangle & \langle w_1, Lf_2 \rangle \dots & \langle w_1, Lf_n \rangle \\ \langle w_2, Lf_1 \rangle & \langle w_2, Lf_2 \rangle & \langle w_2, Lf_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_m, Lf_1 \rangle & \langle w_m, Lf_2 \rangle \dots & \langle w_m, Lf_n \rangle \end{pmatrix}$$

$$\ell_{mn} = \langle w_1, Lf_1 \rangle = \int_0^1 \delta(x - x_1) 2dx = 2$$

$$\ell_{mn} = \langle w_m, Lf_n \rangle = \int_0^1 \delta(x - x_m) \left[-\frac{d^2}{dx^2} (x - x^{n+1}) \right] dx$$

$$\ell_{mn} = \langle w_m, Lf_n \rangle = \int_0^1 \delta(x - x_m) n(n+1)x^{n-1} dx = n(n+1)x_m^{n-1}$$

$$\ell_{mn} = n(n+1) \left(\frac{m}{N+1} \right)^{n-1}$$

III.10. Choix des fonctions de base et de test :

Une des tâches principales dans les problèmes pratiques consiste dans le choix des f_n et w_n de sorte à avoir les approximations optimales de (III-24)

Cette solution peut être exacte ou approchée en fonction du choix de f_n et de w_n . Il existe également des sous-méthodes de la méthode des moments (raccordement point par point, par sous-domaines, Galerkin...), selon le choix des fonctions test. Généralement on choisit comme fonctions de base l'ensemble qui a la capacité exactement de représenter et ressembler à la fonction inconnue, tout en réduisant au minimum l'effort fourni pour le calcul.

Selon le choix de ces fonctions on dénombre des sous-méthodes de la méthode des moments.

III.10.1. Méthode de raccordement:

Cette méthode consiste à choisir des fonctions de pondération non nulles en un seul point du domaine considéré. La fonction de pondération $w_n(x)$ est la distribution de Dirac $\delta(x_n)$ au point x_n , $v \in [l, N]$, dit point de raccordement.

Elle a l'avantage d'éviter l'intégration sur le volume.

III.10.2. Méthode sous domaine :

Elle consiste à choisir des fonctions de pondération constantes sur un sous-domaine et nulles partout ailleurs. La fonction $w_n(x) = 1$ de pondération sur certaines zones.

Cette méthode est peu utilisée car le choix des sous-domaines est difficile. De plus, elle nécessite des intégrations sur le volume.

III.10.3. Méthode de Galerkin : Le choix de $w_n = f_n$ s'appelle la méthode de Galerkin.

C'est la méthode la plus utilisée où les fonctions de base elles-mêmes sont employées comme fonctions d'essai. Ceci a l'avantage d'imposer les conditions aux limites dans tout le domaine de solution, au lieu de points discrets.

III.11. Approximation de la solution :

La méthode de représentation approchée de la fonction cherchée f propose de la représenter par sa projection dans un sous-espace de dimension finie $N + 1$ dont une base est définie par les $N+1$ fonctions $f_n(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n(x)$$

Les composantes scalaires α_n deviennent les inconnues du problème et les fonctions de base $f_n(x)$ sont choisies a priori en fonction de la connaissance qu'on peut avoir de la forme de la solution f recherchée.

III.12.Exemple de choix des fonction de base et de test : Théoriquement, il y a beaucoup d'ensembles possibles de fonction de base. Cependant, seulement un nombre limité sont employés dans la pratique. Ces ensembles peuvent être divisés en deux classes générales : Fonctions de base de sous domaine et fonctions de base du domaine entier.

III.12.1-Fonctions de base de sous domaine(domaine Secondaire) : de manière significative en subdivise le domaine en sous domaine tel qu'un rectangle, triangle, ou arc sinusoidal comme le montre les figures :

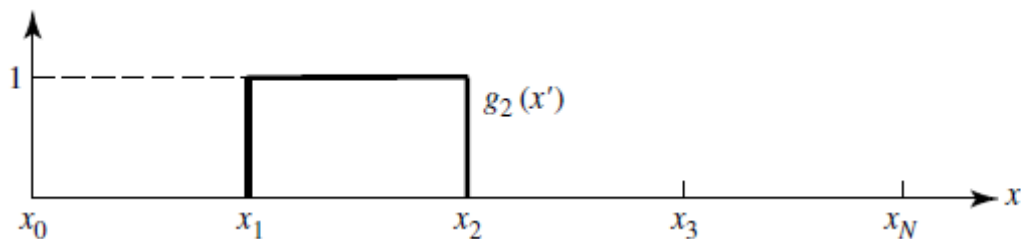
a)**La fonction de Dirac :** Cette fonction est la plus utilisé comme fonction de poids, parce qu'elle réduit en une le nombre d'intégrations : $\int_{\Delta_s} \delta(s - s_m) ds = \begin{cases} 1 & \text{si } s_m \in \Delta_s \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

b) **Les fonctions impulsionnelles rectangulaires :**

Les fonctions impulsionnelles rectangulaires sont données par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x_n \leq x \leq x_{n+1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Ou le domaine est subdivisé en $N-1$ segments égaux



(a) singulière

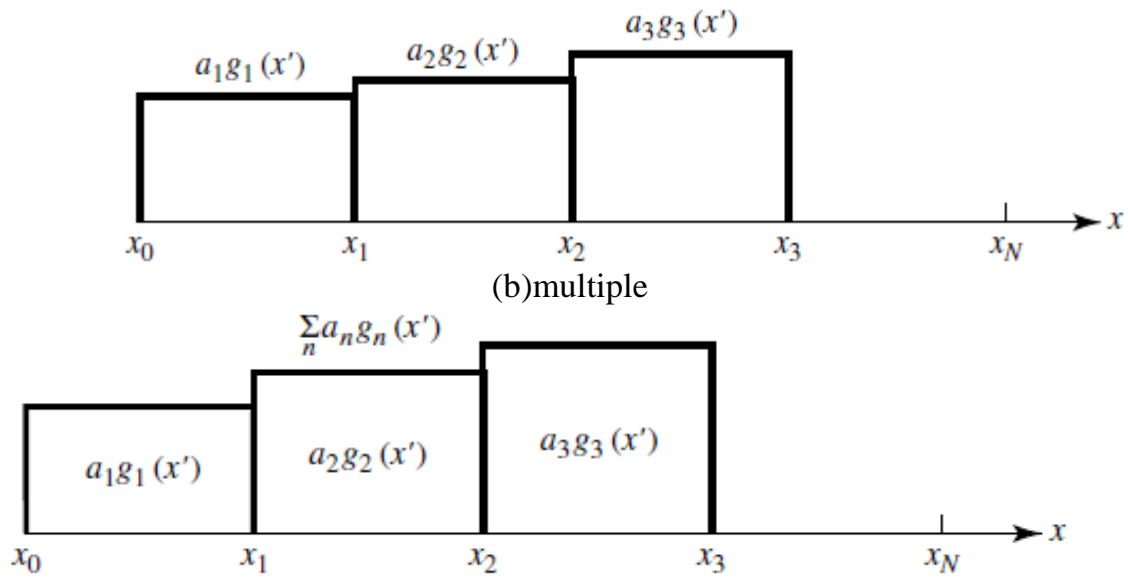


Figure III.2 : fonctions impulsionnelles rectangulaires.[2]

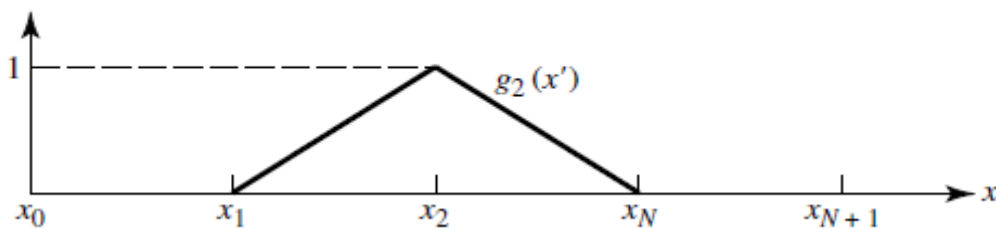
c)Les fonctions triangulaires :

Contrairement aux fonctions d'impulsion qui sont constantes sur un segment simple, les fonctions triangulaires enjambent deux segments et varie de zéro aux points externes à l'unité au centre. Un ensemble de fonctions de triangle est montré sur la figure (I-2). Le domaine a été divisé en N points et N-1 segments représentés par N-2 fonctions de bases.

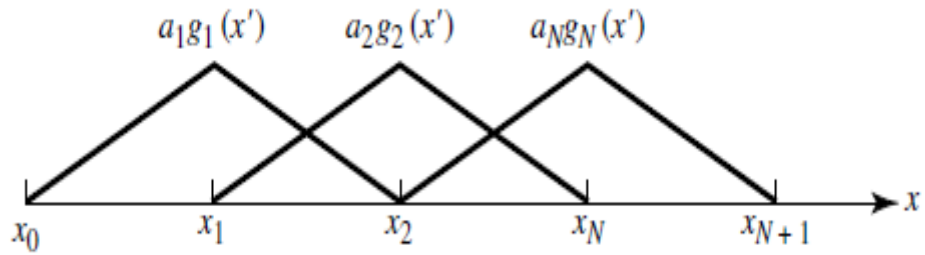
Elles sont données par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ \frac{x_{n+1} - x}{x_{n+1} - x_n} & x_n \leq x \leq x_{n+1} \end{cases}$$

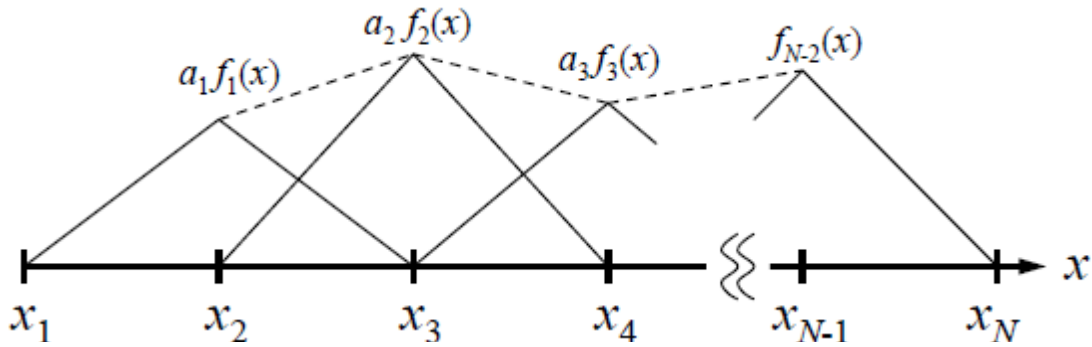
Notons que la configuration de la figure(III-2) force la solution à zéro à x_1 et en x_n . Cette configuration peut être souhaitable quand la valeur de la solution aux extrémités du domaine est connue pour être zéro a priori, toutefois elle ne devrait pas être employé si la solution peut être différente de zéro. Si nous ajoutons à la place un demi triangle au premier et au dernier segment, la solution ne sera plus forcée à zéro. Ceci est illustré sur la figure (III-3), où il y a maintenant un total de N fonctions de base.



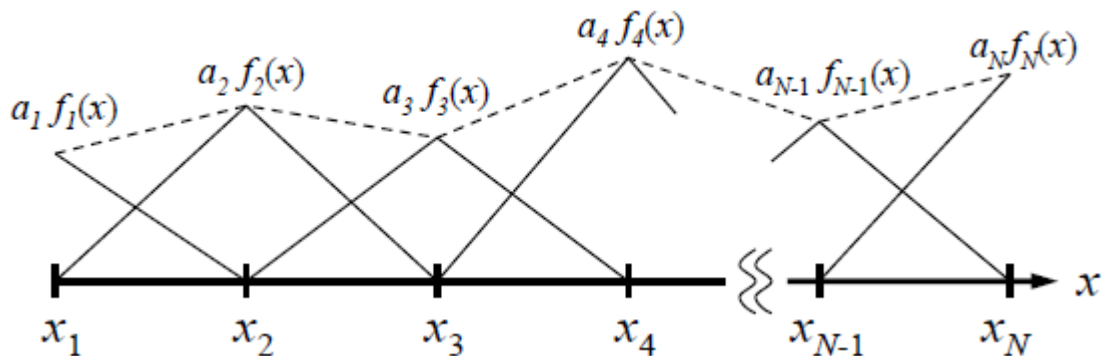
(a)singulière



(b)Multiple[2]



(c)triangulaires



(d) avec demi triangle

Figure III.3 : fonctions triangulaires [2]

d) Les fonctions en arc sinusoidales :

Les fonctions sinusoidales par morceaux sont semblables aux fonctions triangulaires, comme illustré dans la figure (III-4). Elles sont employées souvent dans l'analyse des antennes filaires en raison de leurs capacité de représenter des distributions courantes sinusoidales. Ces fonctions sont définies comme suit :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin k(x - x_{n-1})}{\sin k(x_n - x_{n-1})} & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ \frac{\sin k(x_{n+1} - x)}{\sin k(x_{n+1} - x_n)} & x_n \leq x \leq x_{n+1} \end{cases}$$

Notons que la longueur de segments est généralement beaucoup moins que la période des sinusoïdes.

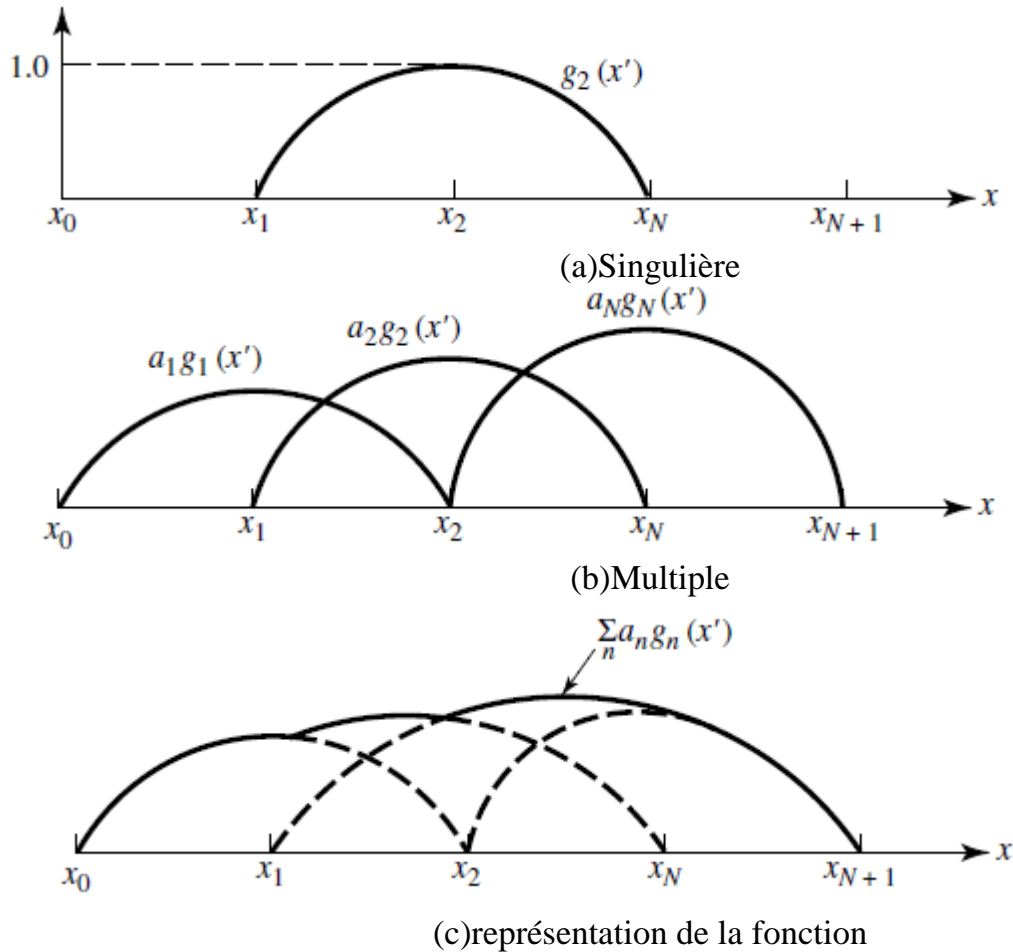


figure III.4 : fonctions en arc-sinusoïde.[2]

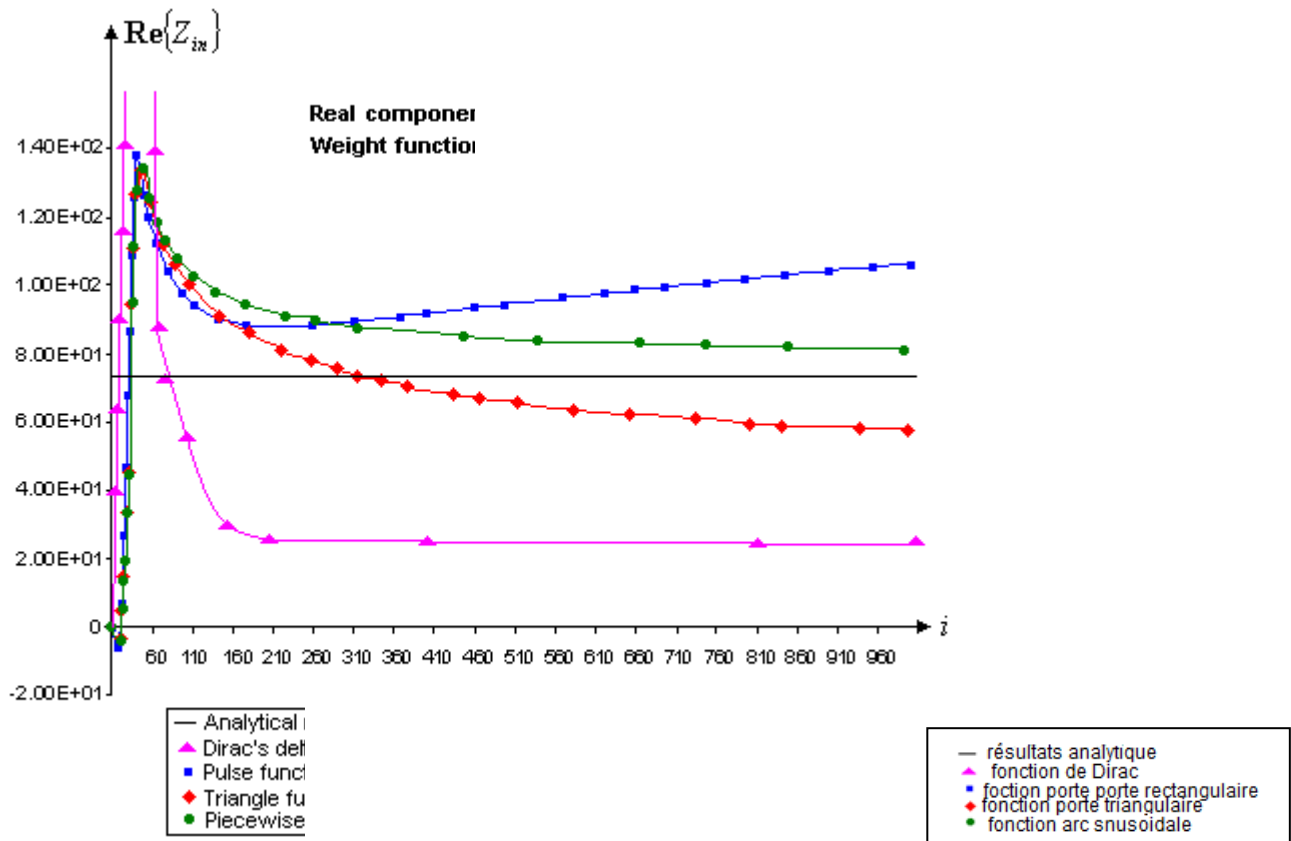
III.12.2- Les fonctions de base de domaine entier :

Comme leurs nom l'indique, sont définis est non nulles sur le domaine entier (tout au long de la structure considérée). Un ensemble commun de base d'entier-domaine est celui des fonctions sinusoïdales. Noter que cet ensemble de base serait particulièrement utile pour modéliser la distribution du courant sur un dipôle de fil, qui est connu pour avoir principalement la distribution sinusoïdale.

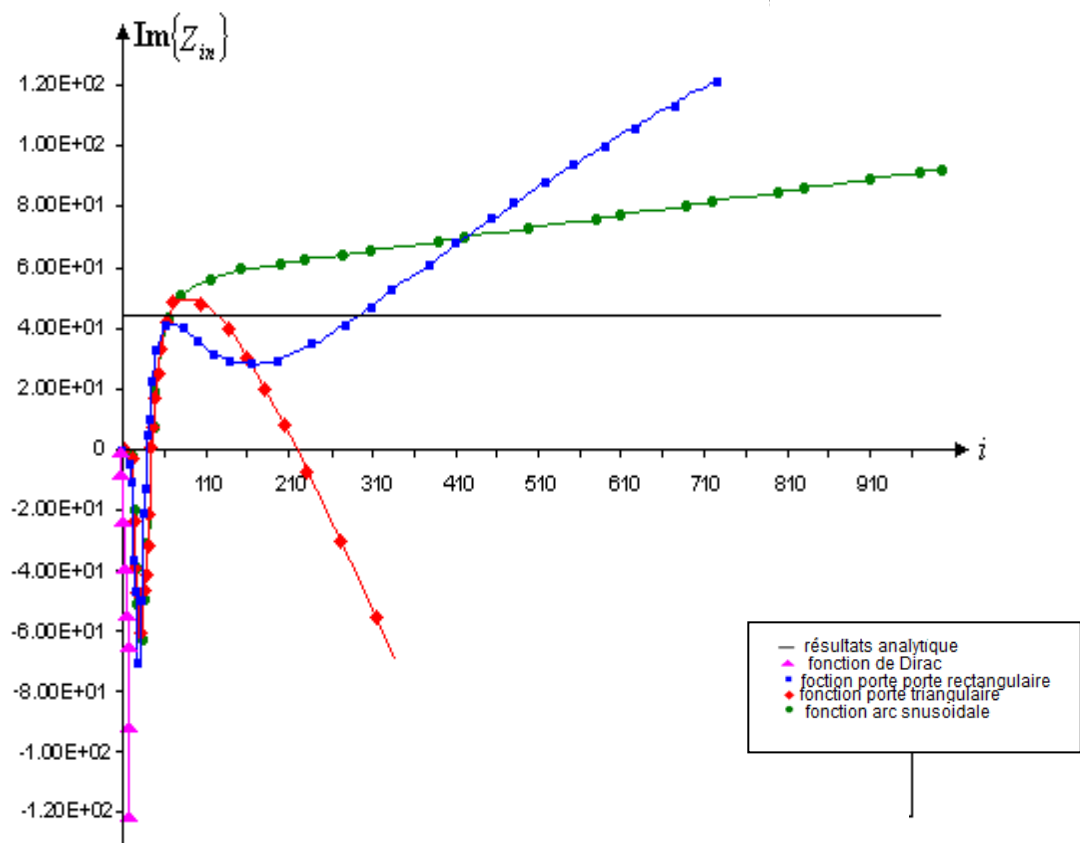
L'avantage principal des fonctions de base d'entier-domaine se situe dans les problèmes où on assume qu'a priori la fonction inconnue suit un modèle connu. Une telle fonction de domaine entier a habituellement la difficulté en modélisant des fonctions inconnues arbitraires ou compliquée. Elles tendent à rapporter des calculs plus compliqués en utilisons le domaine entier en conséquence moins répondues.

III.13. Justification des choix de fonction de base et de test : Nous présentons ici une étude de choix des fonctions de base et de test en faisant les différentes combinaisons possibles des

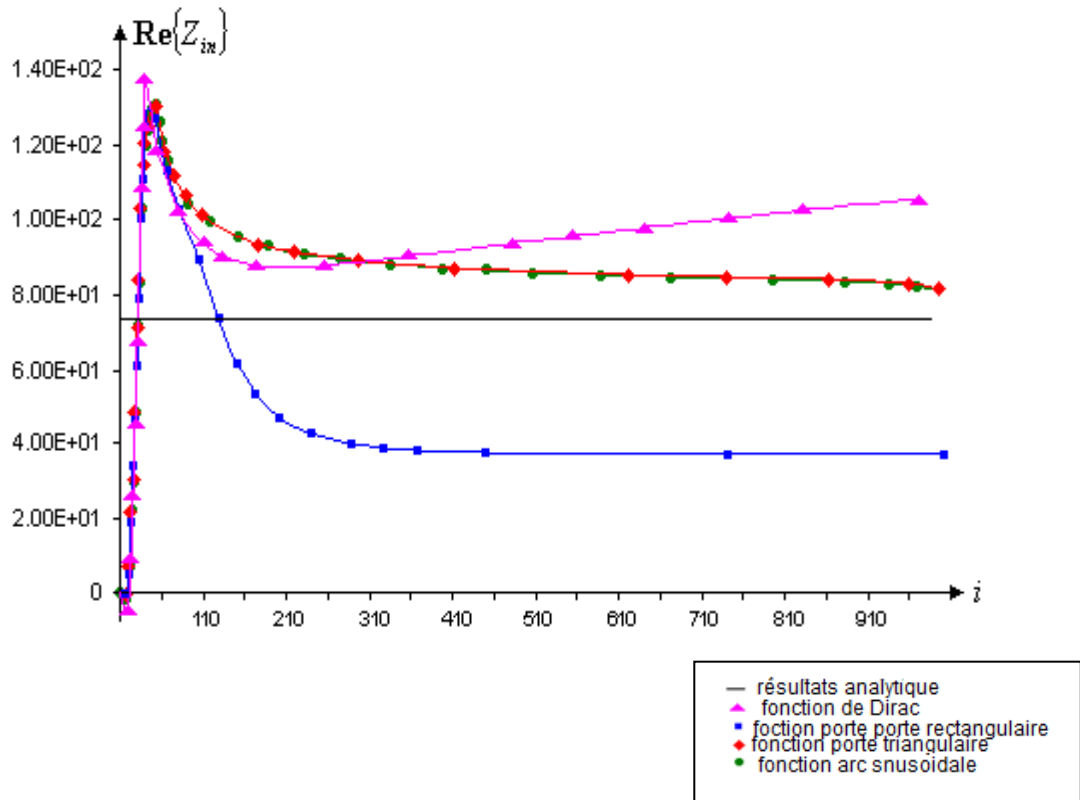
quatre fonctions les plus réponsus comme le montre les différentes figures suivantes :



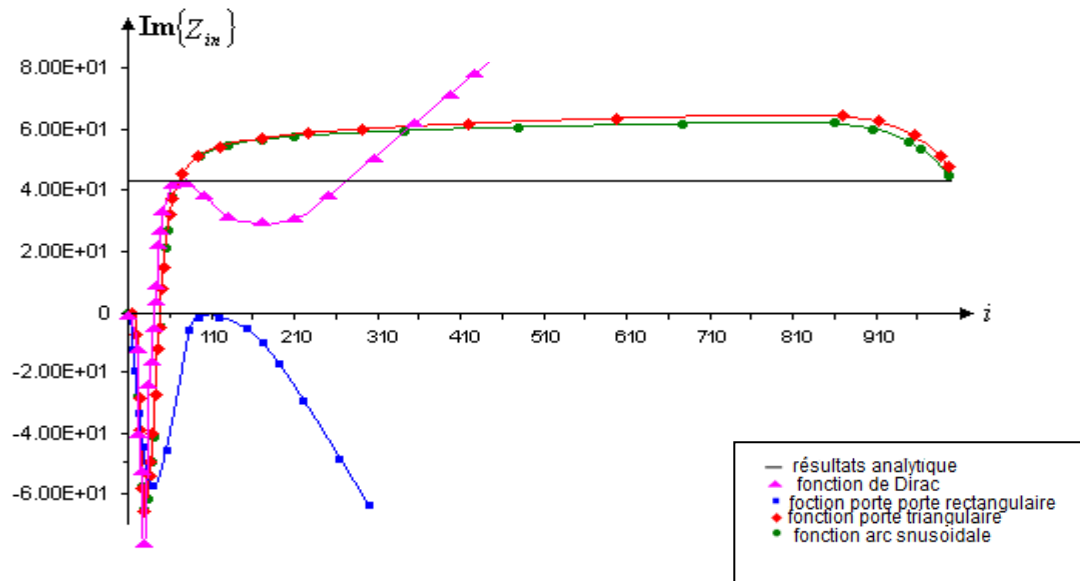
(a). La partie réelle de l'impédance d'entrée



(b).La partie imaginaire l'impédance d'entrée
Figure III.5.Distribution du courant avec la fonction
 de Dirac comme fonction test.[14]

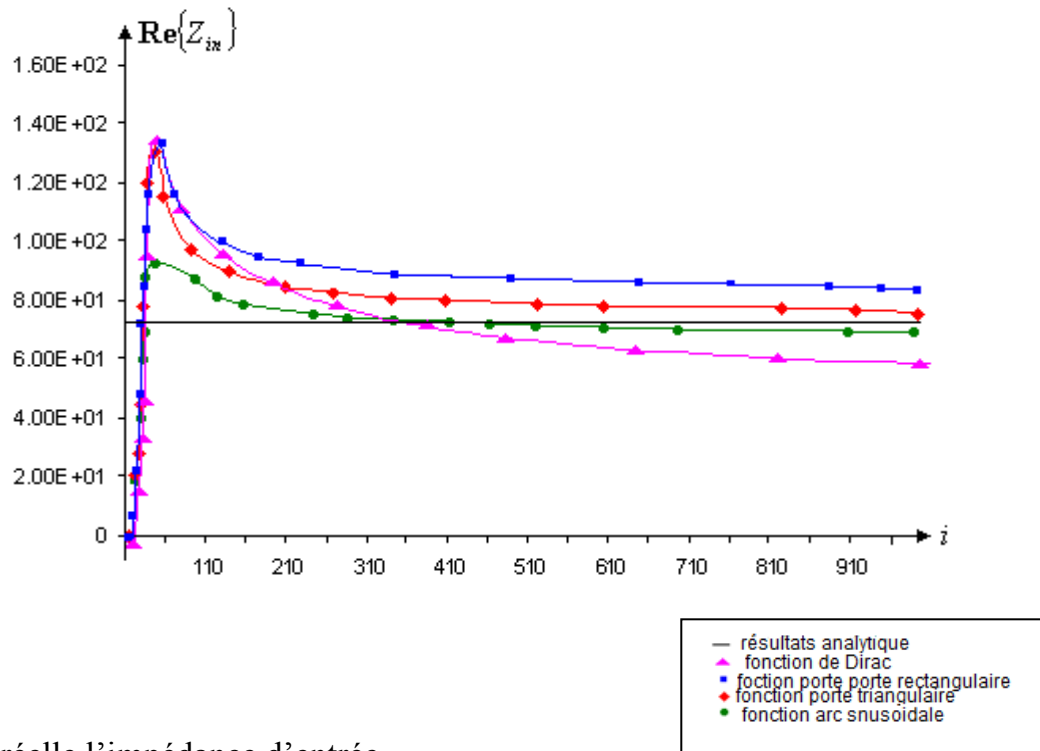


(a).La partie réelle l'impédance d'entrée

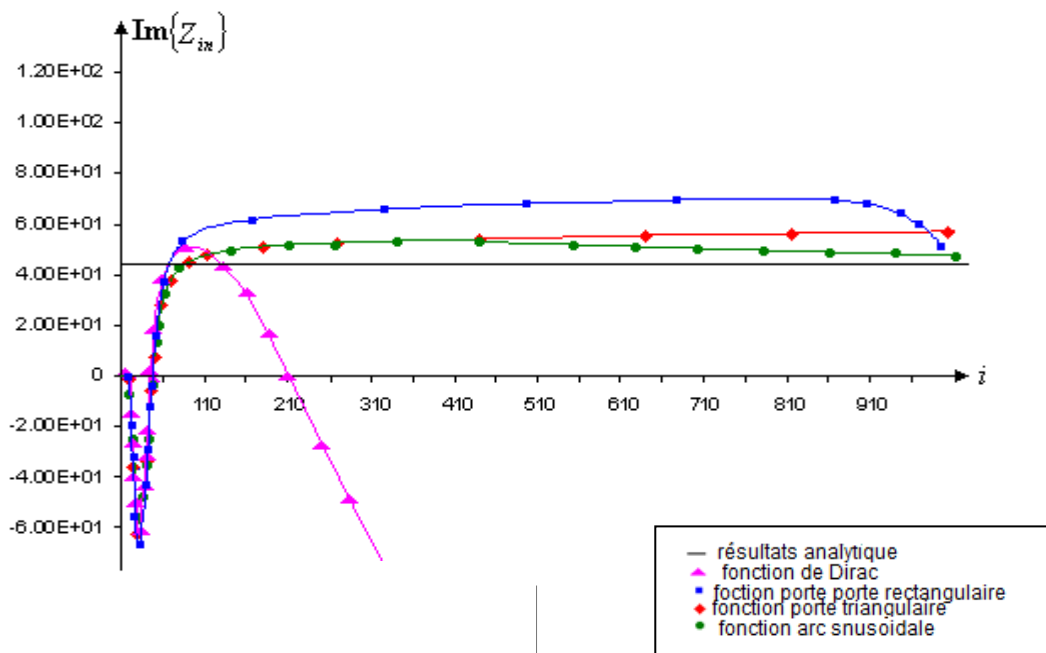


(b).La partie imaginaire l'impédance d'entrée

Figure III.6. Impédance d'entrée avec la fonction impulsion comme fonction test.[14]

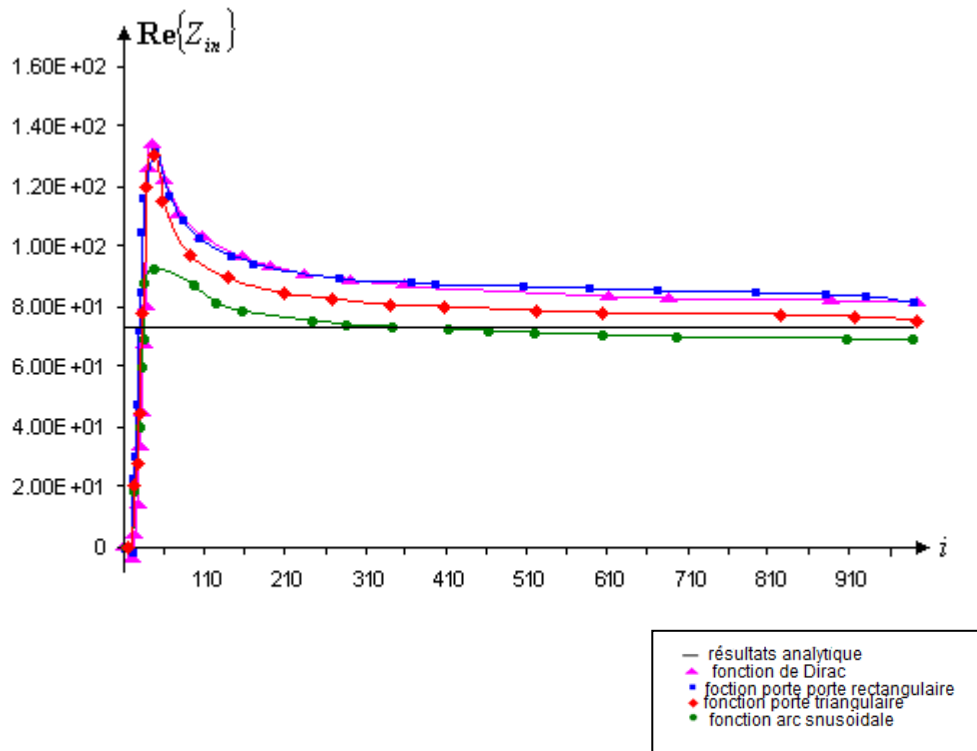


(a).La partie réelle l'impédance d'entrée

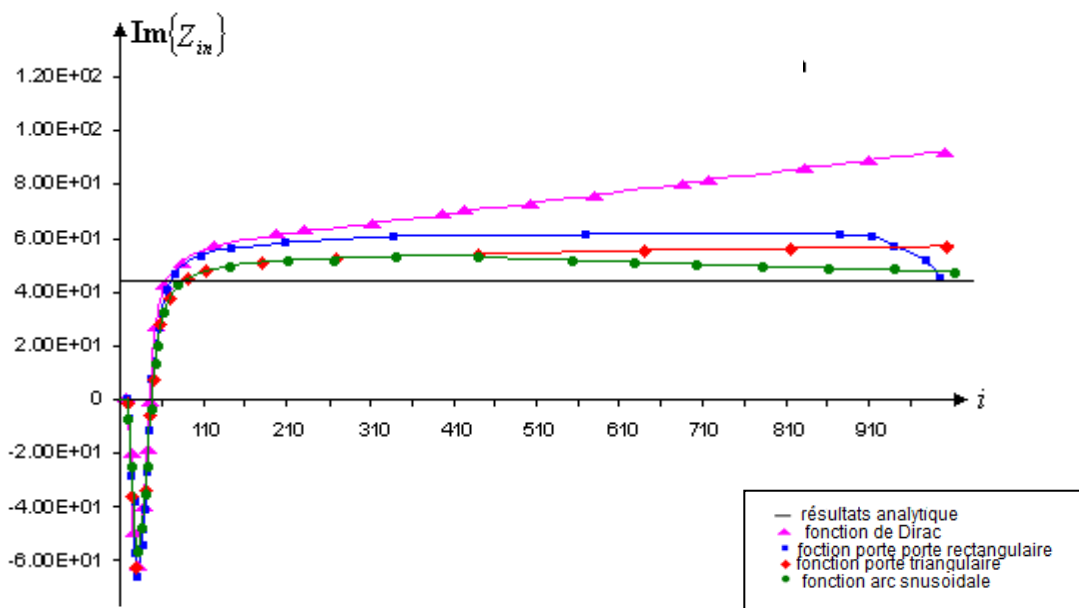


(b).La partie imaginaire l'impédance d'entrée

Figure III.7.Distribution du courant avec la fonction triangulaire comme fonction test.[14]



(a).La partie réelle l'impédance d'entrée



(b).La partie imaginaire l'impédance d'entrée

Figure III.8. Impédance d'entrée avec la fonction sinusoïde comme fonction test.[14]

Les fonctions de poids triangulaires et sinusoidales répondent presque de la même manière, mais le delta de Dirac a un plus haut déviation, principalement pour la fonction de triangle.

Il est très facile de conclure que la meilleure solution est la fonction par morceaux sinusoidale pour tous les deux, la base et les fonctions de poids (procédé de Galerkin), mais le temps informatique est très haut, comparé aux procédures d'impulsion ou de la fonction de Dirac.

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons défini le principe de la méthode des moments d'une façon plus au moins détaillée de point de vue des étapes à suivre pour résoudre un problème d'équations intégrales ou différentielles. Cette méthode sera utilisée dans le cadre de notre travail pour résoudre les différentes équations qui régissent les antennes filaires afin de déterminer leurs différentes caractéristiques .

Introduction :

Les méthodes numériques sont indispensables pour résoudre les problèmes de la physique. En effet, ces problèmes sont souvent très complexes, nécessitent des recours aux ordinateurs pour obtenir des solutions rapides et optimales.

Pour mettre en place une méthode numérique, il faut suivre les étapes suivantes :

- 1) - modéliser le problème, c'est-à-dire le traduire en équations mathématiques
- 2)- vérifier que les équations posées admettent bien une solution. Il ne s'agit pas de vérifier que les équations représentent bien la réalité, mais simplement de voir si ces équations peuvent être résolues.
- 3)- trouver les solutions exactes ou approchées du problème posé en équation. Du fait de la complexité de la plus part des phénomènes observés, il est difficile d'obtenir des solutions analytiques. On a bien souvent recours à des approximations.
- 4)- vérifier si en augmentant la quantité d'information, on s'approche toujours de la solution : c'est l'étude de la convergence.

On se qui concerne notre travail, nous utiliserons la méthode des moments pour déterminer la distribution du courant, l'impédance d'entrée sur une structure filaire en faisant appelle à un programme de calcul écrit en **Fortran**.

IV.1 .Principe de base :

Soit une onde incidente sur un fil conducteur $\vec{E}_i(\rho, \varphi, z)$. Si ce fil est une antenne, le champ incident est produit par l'espace aux points d'alimentation. Une partie sera incidente ailleurs sur la structure et induira un courant de surface de densité $\vec{J}_s(\rho', \varphi', z')$. En segmentant la structure, on peut dire que chaque segment est un élément de courant lequel rayonnera un champ électrostatique référé comme étant le champ diffracté $\vec{E}_d(\rho, \varphi, z)$.

La méthode des moments discrétise et génère les équations pour solutionner le problème suivant : déterminer \vec{J}_s étant donné \vec{E}_i . L'évolution en un point d'un segment (point matching) de l'ensemble des contributions du champ diffracté par tous les autre segments permet de déterminer le courant qui sera induit sur ces autre point de la structure. Cet élément de courant servira à son tour à estimer la contribution de ce segment sur les autres segments.

En gros, il faut donc connaître toutes les interrelations entre les segments. Du courant sous la forme d'une matrice carrée Z de dimension $N \times N$. Ces interrelations font intervenir les valeurs

du champ électrique incident ou du potentiel scalaire que l'on place dans le vecteur V de dimension $N \times 1$. Les valeurs du courant au point d'observation situé sur la surface de la structure pour chaque segment et le vecteur de courant I de dimension $N \times 1$ deviennent les inconnus du système linéaire :

$$ZI = V$$

Dont la solution est bien connue :

$$I = Z^{-1}V$$

Pour appliquer la méthode des moments, la matrice Z est obtenue à partir de l'équation de Pocklington ou d'Hallen tandis que le vecteur V est modélisé selon la source d'alimentation. Puisque les relations entre les segments ne dépendent que de la position relative de l'un par rapport à l'autre, la matrice Z Toeplitz à symétrie non hermitienne c'est-à-dire les éléments d'une même diagonal sont égaux avec $Z_{ij} = Z_{ji}$

A cause de l'analogie évidente avec les équations en circuit électronique, Z est souvent référée comme la matrice des impédances généralisées. De même pour les vecteurs de tension généralisés V et de courants généralisés I . L'analogie s'arrête là car les unités ne sont nullement ceux rencontrés en circuit sauf pour celle du courant généralisé. [5]

IV.2. Application de la méthode des moments sur une structure filaire verticale:

On a à résoudre numériquement les équations intégrales (de Pocklington, de Pocklington pour un fil mince et d'Hallen) que nous avons établi dans le chapitre précédent (chapitre II) :

$$-j\omega\epsilon E_z^i(\rho = a) = \int_{-1/2}^{1/2} I_z(z') \left[\left(k^2 + \frac{d^2}{dz'^2} \right) G(z, z') \right] dz' \quad (\text{IV.1})$$

$$-j\omega\epsilon E_z^i(\rho = a) \approx \int_{-1/2}^{1/2} I_z(z') \underbrace{\frac{e^{-jkR}}{4\pi R^5} \left[(1 + jkR)(2R^2 - 3a^2) + (kaR)^2 \right]}_{K_e(z, z')} dz' \quad (\text{IV.2})$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} I_z(z') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dz' = -j \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[B_1 \cos(kz) + C_1 \sin(k|z|) \right] \quad (\text{IV.3})$$

Ces trois dernières équations ont la forme :

$$L(f) = g \quad (\text{IV.4})$$

Où :

L : Operateur linéaire connu.

G : fonction d'excitation (connue).

f : la réponse (inconnue).

Pour l'équation (IV.1), l'opérateur L est intégrodifférentielle tandis que pour les équations (IV.2) et (IV.3), L est un opérateur intégral. La linéarité de l'opérateur L rend la résolution numérique possible.

IV.2.1. Résolution de l'équation intégrale de Pocklington :

L'équation que nous avons à résoudre peut s'écrire comme suit :

$$E_z^i(z') = L(I(z')) \quad (IV.5)$$

Avec :

$E_z^i(z')$: Composante tangentielle du champ électrique incident à la surface de la structure et qui représente l'excitation appliquée.

L : opérateur intégrodifférentielle issu des équations de Maxwell. A partir de l'équation (IV.1), l'opérateur L est défini comme suit :

$$L(\bullet) = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \int_{-l/2}^{l/2} (\bullet) G(z, z') dz' \quad (IV.6)$$

$I(z')$: Le courant électrique sur l'antenne et représente l'inconnu.

L'antenne est orientée suivant la direction 'z'

Le courant $I_z(z')$ peut être décomposé à l'aide d'une suite de fonctions linéairement indépendantes $f_n(z')$ tel que :

$$I_z(z') = I_1(z') + I_2(z') + \dots + I_N(z') = \sum_{n=1}^N I_n f_n(z') \quad (IV.7)$$

I_n : Composante de la répartition du courant. Elle sont des composantes inconnues que nous allons déterminer.

$f_n(z')$: Fonctions de bases qu'on choisira de manière à simplifier les calculs et leurs domaine est le même que celui de $f(z')$

Ceci suppose une segmentation de l'antenne en N éléments, chaque tronçon de ligne ayant une longueur Δ tel qu'il est indiqué sur la figure IV.1

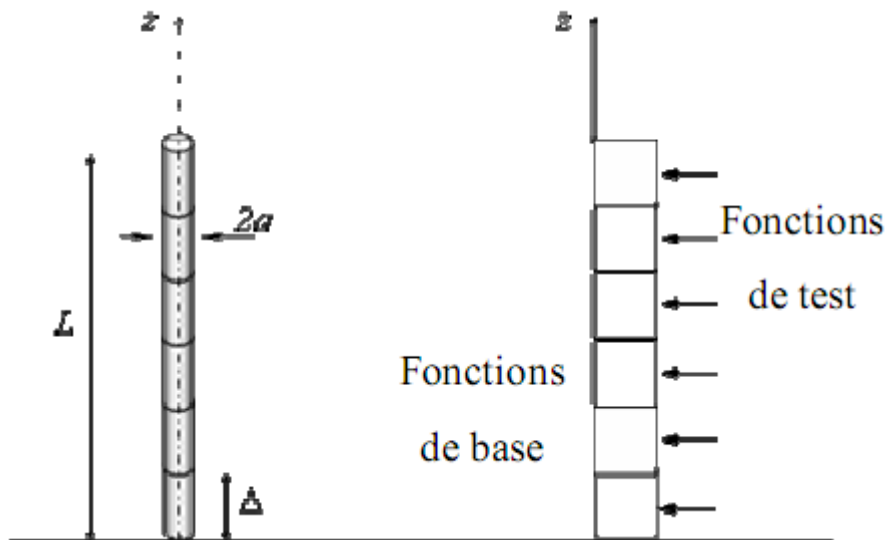


Figure IV.1 : Segmentation d'une structure filaire à l'aide des fonctions bases et de test.

Introduisant l'expression de $I_z(z')$ dans l'équation (IV.5), on aura :

$$\begin{aligned}
 E_z^i(z') &= L \sum_{n=1}^N I_n f_n(z') \\
 &= \sum_{n=1}^N I_n L [f_n(z')] \quad (IV.8)
 \end{aligned}$$

Les fonctions de bases sont choisies de sorte que l'équation (IV.8) puisse être résolue le plus facilement possible, la seule tâche demeurant alors est de trouver les constantes inconnues I_n .

L'expression de l'équation (IV.8) nous mène à une équation à N inconnus, elle seule ne nous suffit pas pour déterminer les I_n . Il est nécessaire d'avoir au moins N équations linéairement indépendantes, ceci peut être accompli par l'évaluation des N points différents ce qui est connu sous le nom des points d'assortissent (point matching).

Pour un segment Δ centre en Z_n , on prend la fonction porte comme fonction de base qui est définie comme suit :

$$f_n(z') = \begin{cases} 1 & \text{si } |z_n - z'| \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (IV.9)$$

La somme de la contribution des différents segments s'écrit comme suit :

$$E_z^i(z') = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sum_{n=1}^N I_n \int_{-l/2}^{l/2} G(z, z') dz' \quad (IV.10)$$

Par l'intermédiaire d'un produit interne (on utilise le produit scalaire), on projette l'équation (IV.10) sur un ensemble de fonctions test w_n qui sont données par la méthode dite point matching, on choisit ces fonctions comme étant fonctions porte qui sont définies comme suit :

$$\delta(z - z_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = z_m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{IV.11})$$

Introduisons le produit scalaire dans l'équation (IV.10) en utilisant la fonction porte comme fonction test, on obtient :

$$\langle w_m, E_z^i(z') \rangle = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \sum_{n=1}^N I_n \left\langle w_m, \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} G(z, z') dz' \right\rangle \quad (\text{IV.12})$$

Le produit scalaire est défini positif sur le domaine de l'opérateur L , il est classiquement défini pour deux fonctions par :

$$\langle f, g \rangle = \int f(x)g(x)dx$$

Donc l'équation (IV.12) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\int_z w_m E_z^i(z) dz = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \sum_{n=1}^N I_n \int_z w_m \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} G(z, z') dz' dz \quad (\text{IV.13})$$

D'où la forme finale de ce produit scalaire suivante :

$$E_z^i(z_m) = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \sum_{n=1}^N I_n \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} G(z, z') dz' \Bigg|_{z=z_m} \quad (\text{IV.14})$$

A présent, nous définissons une matrice tension [V] par son terme général V_m tel que:

$$V_m = E_z^i(z_m) \Delta \quad (\text{IV.15})$$

V_m : Tension entre les deux extrémités de segment Δ centré en z_m

Le système d'équation (IV.14) peut s'écrire sous la forme matricielle comme suit :

$$[V_m] = [Z_{mm}] [I_n] \quad (\text{IV.16})$$

Cette équation peut encor s'écrire :

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{21} & \dots & Z_{1N} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ Z_{N1} & \dots & & Z_{NN} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_z^{i1} \Delta \\ \vdots \\ E_z^{iN} \Delta \end{bmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

$[V_m]$: Vecteur tension généralisé qui représente la tension entre deux extrémités du segment de longueur Δ centré en z_m , c'est une donnée du problème (connue).

$[I_n]$: Vecteur de tension généralisé de terme général inconnu.

$[Z_{mn}]$: Matrices des impédances généralisées qui représente les couplages existant entre les segments constitutifs de la structure.

Le terme général Z_{mn} de la matrice $[Z_{mn}]$ s'écrit :

$$Z_{mn} = -\frac{\Delta}{j\omega\epsilon} \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} G(z, z') dz' \Big|_{z=z_m} \quad (\text{IV.18})$$

Si la matrice $[Z_{mn}]$ n'est pas singulière, elle peut être inversée et le vecteur courant devient :

$$[I_n] = [Z_{mn}]^{-1} [V_m]$$

la répartition du courant le long de l'antenne s'écrit alors :

$$I_z(z') = \sum_{n=1}^N ([Z_{mn}]^{-1} [V_m]) f_n(z') \quad (\text{IV.19})$$

La matrice d'excitation est une donnée du problème, s'écrit différemment selon le régime d'excitation qu'elle décrit (émission ou réception).

IV.2.2. Résolution de l'équation intégrale de Pocklington pour un fil mince :

Pour un fil très fin dont la longueur l est très grande devant son rayon a ($l \gg a$) et ce dernier est très petit devant la longueur d'onde ($a \ll \lambda$)

Avec ces suppositions, l'équation de Pocklington se réduira à l'équation (IV.2)

$$-j\omega\epsilon E_z^i(\rho = a) \approx \int_{-l/2}^{l/2} I_z(z') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R^5} \underbrace{\left[(1 + jkR)(2R^2 - 3a^2) + (kaR)^2 \right]}_{K_e(z, z')} dz'$$

Elle sous la forme de l'équation (IV.5) dont l'opérateur L est un opérateur intégral défini comme suit :

$$L(\bullet) = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \int(\bullet) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R^5} \left[(1 + jkR)(2R^2 - 3a^2) + (kaR)^2 \right] dz \quad (\text{IV.20})$$

Procédons de la même manière que dans la section précédente, on choisit les mêmes fonctions de bases et de tests on aura :

$$\int_z w_n E_z^i(z') dz = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \sum_{n=1}^N I_n \int_z w_n \int_{z_n+\frac{\Delta}{2}}^{z_n+\frac{\Delta}{2}} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R^5} [(1+jkR)(2R^2-3a^2) + (kaR^2)] dz \frac{e^{-jkR}}{4\pi R^5} dz dz' \quad (IV.21)$$

La forme finale de ce produit sera :

$$E_z^i(z_m) = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \sum_{n=1}^N I_n \int_{z_n+\frac{\Delta}{2}}^{z_n+\frac{\Delta}{2}} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R^5} [(1+jkR)(2R^2-3a^2) + (kaR^2)] dz \frac{e^{-jkR}}{4\pi R^5} dz \Bigg|_{z=z_m} \quad (IV.22)$$

Définissons une matrice tension $[V_m]$ par son terme général tel que :

$V_m = E_z^i(z_m)\Delta$: Tension entre les deux extrémités de segment Δ centré en z_m

L'équation (IV.22) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[V_m] = [Z_{mn}] [I_n]$$

Si $[Z_{mn}]$ n'est pas singulière, alors $[Z_{mn}]^{-1}$ existe et :

$$[I_n] = [Z_{mn}]^{-1} [V_m]$$

Avec:

$$[Z_{mn}] = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{z_n-\frac{\Delta}{2}}^{z_n+\frac{\Delta}{2}} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} [(1+jkR)(2R-3a^2) + (kaR^2)] dz \quad (IV.23)$$

IV.2.3. Résolution numérique de l'équation intégrale d'Hallen :

On sait que l'équation intégrale de Hallen s'écrit comme sui

$$\int_{-l/2}^{l/2} I_z(z') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dz' = -j \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [B_1 \cos(kz) + C_1 \sin(k|z|)]$$

Cette équation est sous la forme : $L(f) = g$

Dans ce cas, L est un opérateur différentiel défini comme suit :

$$L(\bullet) = \int_{-l/2}^{l/2} (\bullet) G(z, z') dz' \quad (IV.24)$$

Procédons de la même manière que précédemment, on choisit les mêmes fonctions bases et de test et on introduit le produit interne on aura :

$$-j\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_z w_m [B_1 \cos kz + C_1 \sin k|z|] = \sum_{n=1}^N I_n \int_z w_m \int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} G(z, z') dz dz' \quad (\text{IV25})$$

Donc :

$$-j\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [B_1 \cos kz + C_1 \sin k|z|] = \sum_{n=1}^N I_n \int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} G(z, z') dz' \Bigg|_{z=z_m} \quad (\text{IV.26})$$

Cette équation est sous la forme matricielle suivante:

$$[V_m] = [Z_{nm}] [I_n]$$

Si $[Z_{nm}]$ n'est pas singulière, elle peut être inversée et le vecteur courant peut se calculer comme suit :

$$[I_n] = [Z_{nm}]^{-1} [V_m]$$

$$\text{Et: } I_z(z') = \sum_{n=1}^N ([Z_{nm}]^{-1} [V_m]) f_n(z')$$

$$\text{Avec: } Z_{nm} = \int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dz'$$

$$R = \sqrt{(z_m - z')^2 + a^2}$$

IV.3 :Etude parametrique:

Pour l'application numerique nous allons utiliser un code de calcul traduisant la méthode des moments (MoM) écrit en langage **Fortran** extrait dans[3],il calcul la distribution du courant et l'impédance d'entrée ainsi que le diagramme de rayonnement .

Nous allons utiliser une alimentation $V=1\text{v}$

La figure IV.2 nous montre les différentes commodités d'exécution du programme.

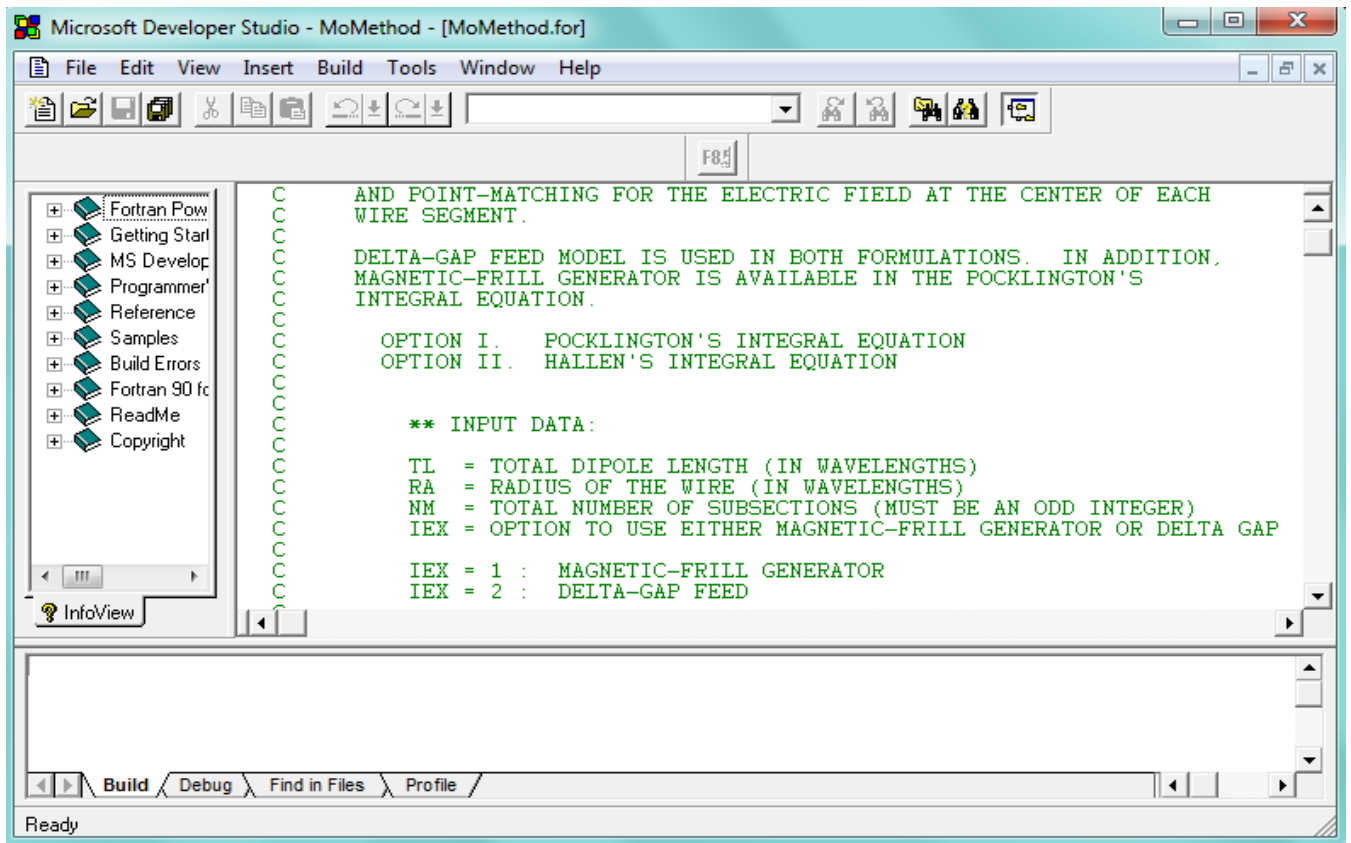


Figure IV.2 : Injection du programme dans la station du Fortran.

Nous allons donner quelque exemples en faisant varier un paramètre a la fois soit la fonction (Pocklington ou Hallen), soit le nombre de subdivisions NM, soit la longueur du dipole TL ou son rayon R ou bien le type d'excitation comme le montre la figure IV.3

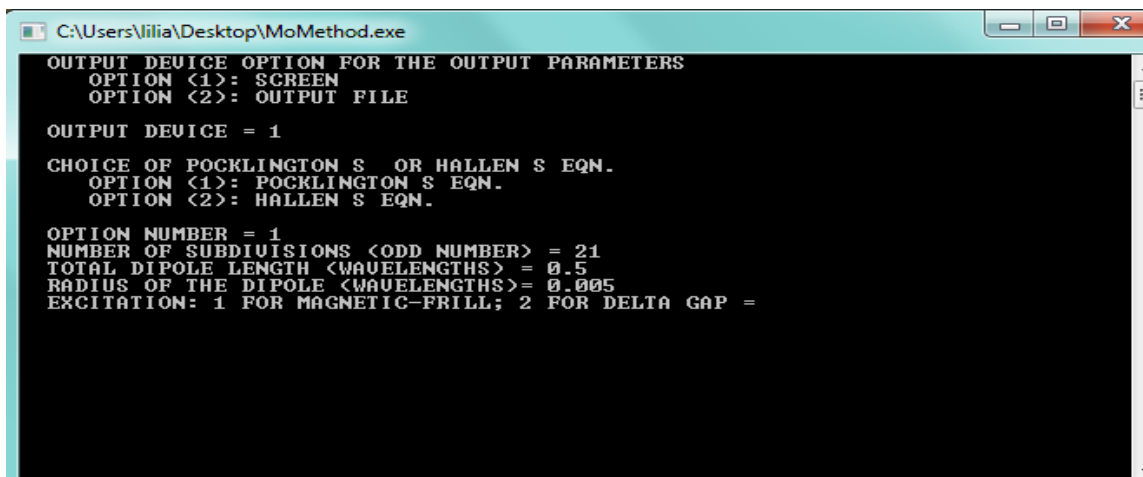


Figure IV.3 : Choix des paramètres de l'antenne
Les résultats de l'exécution seront présentés dans ce qui suit .

Exemple d'exécution :

Exemple 1 : $L = 0.45\lambda$, $N = 41$, $R = 0.001\lambda$.

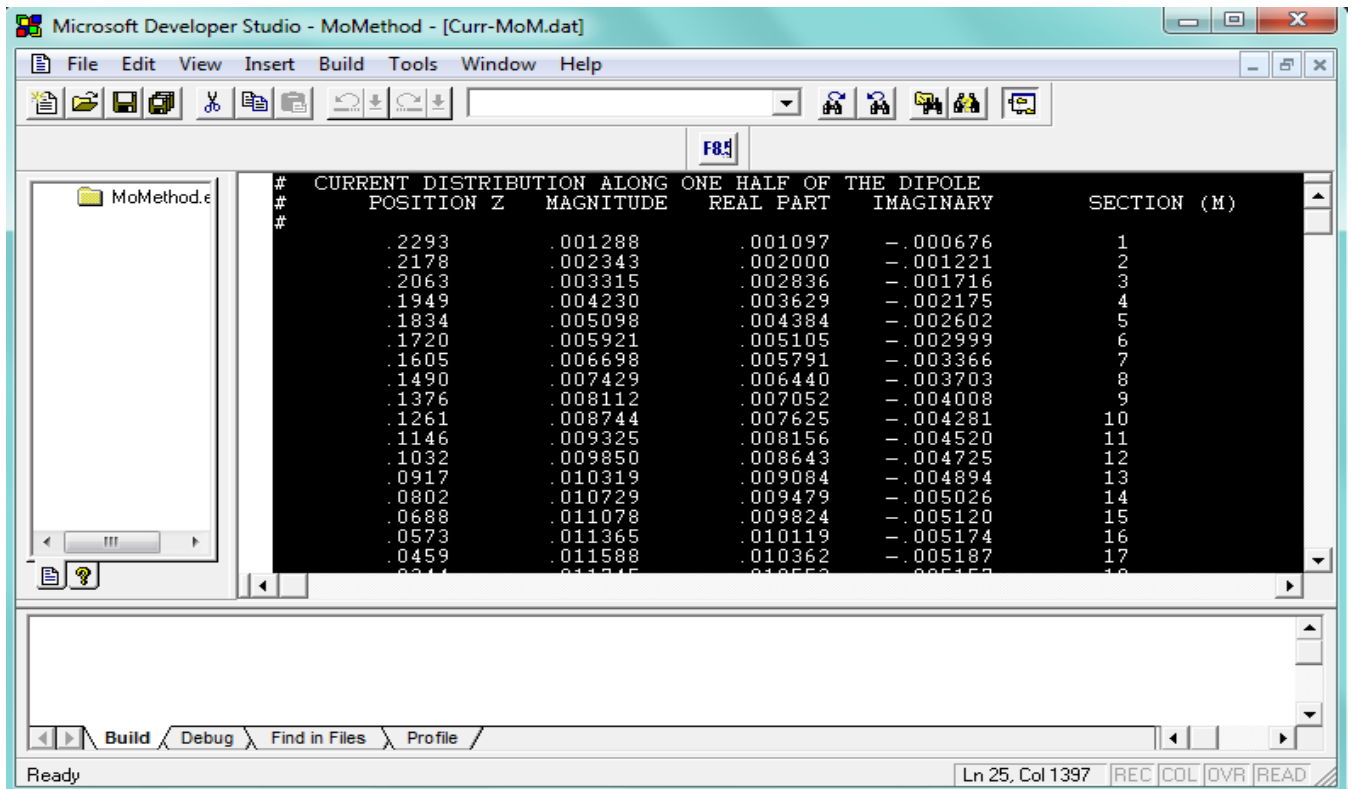


Figure IV.4. Distribution du courant

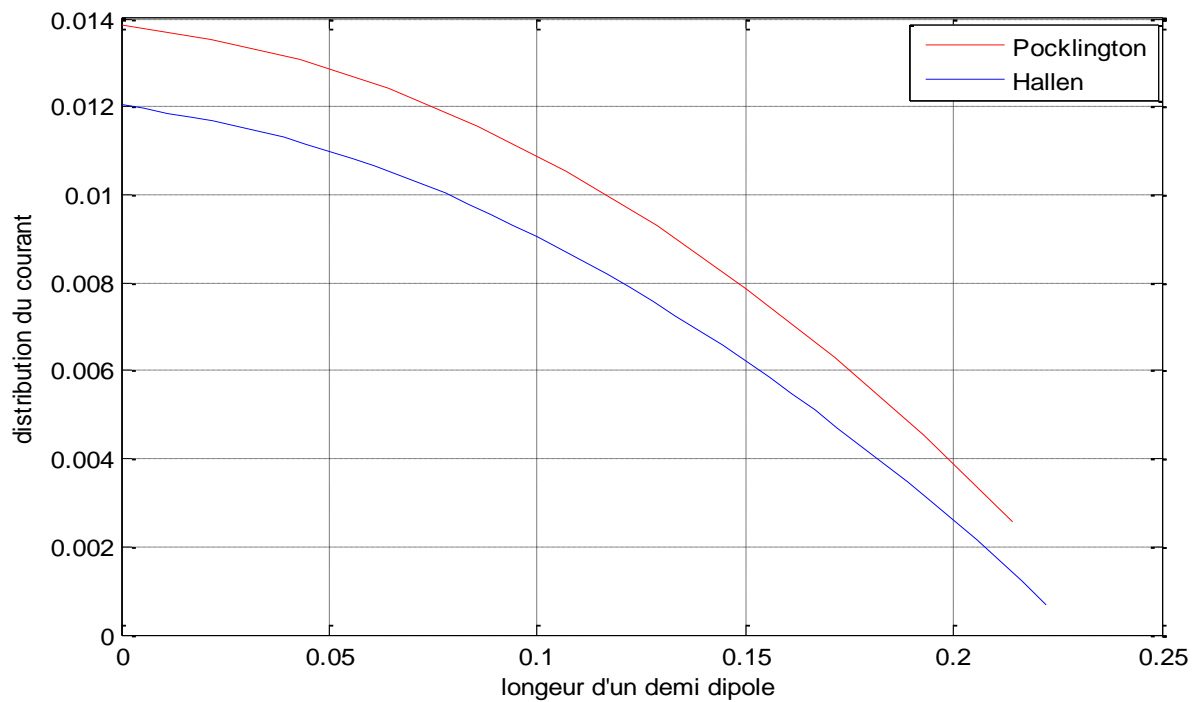


Figure IV.5 : Représentation de la distribution du courant avec source par espacement.

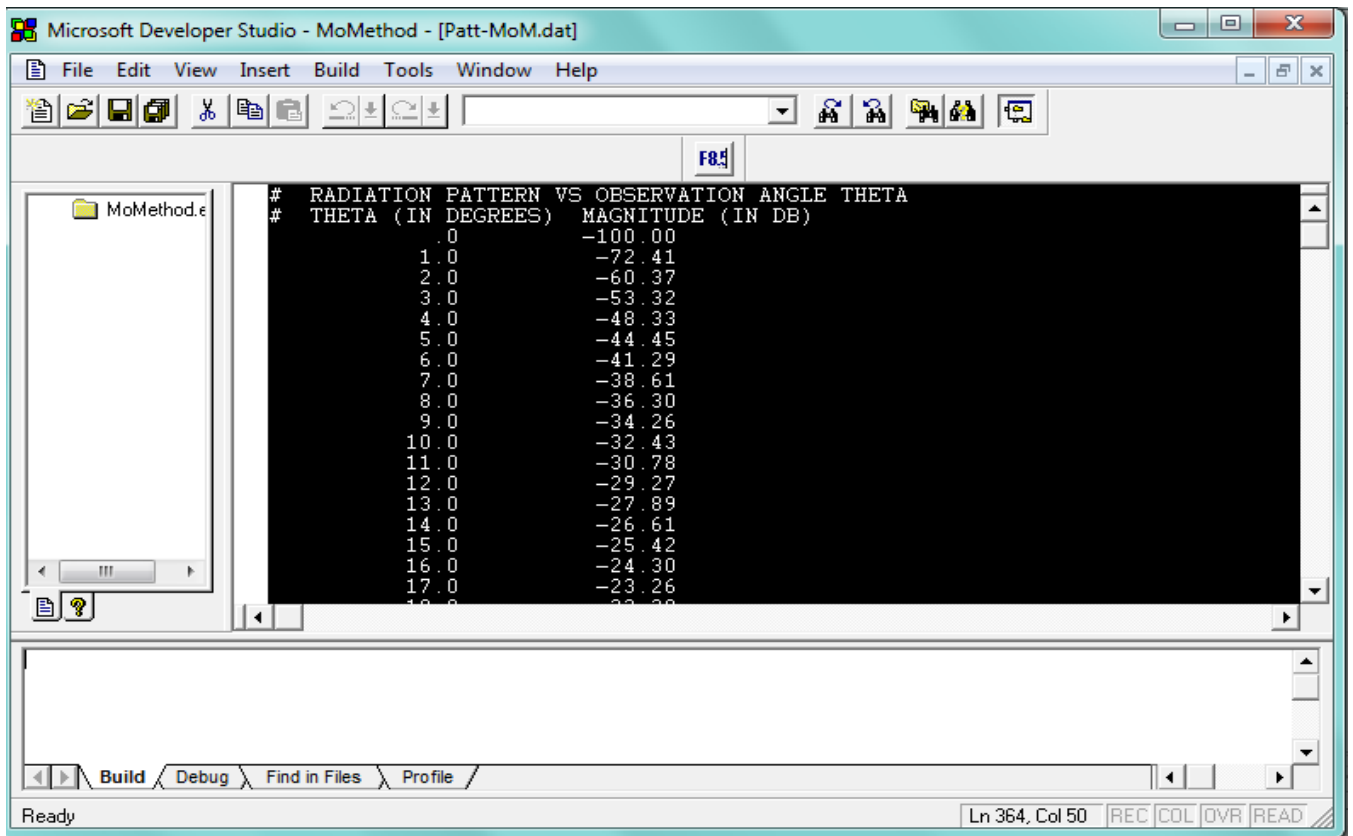


Figure IV.6. Résultats numérique du diagramme de rayonnement

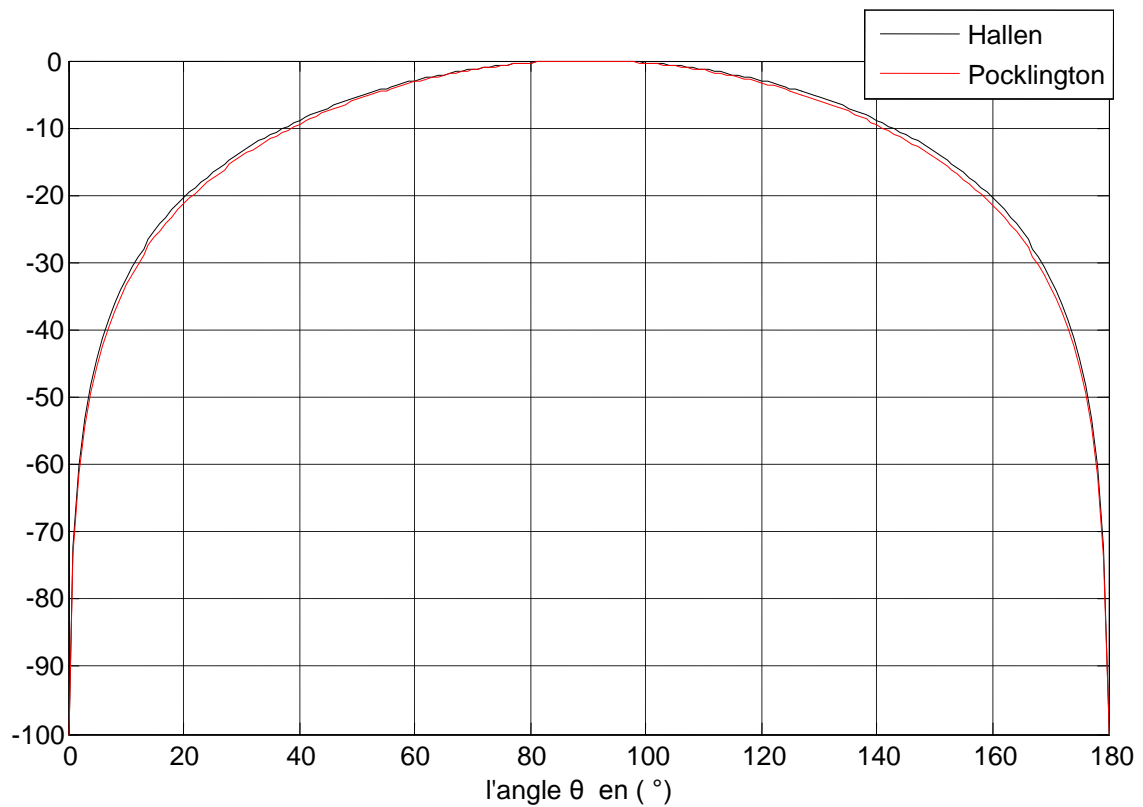
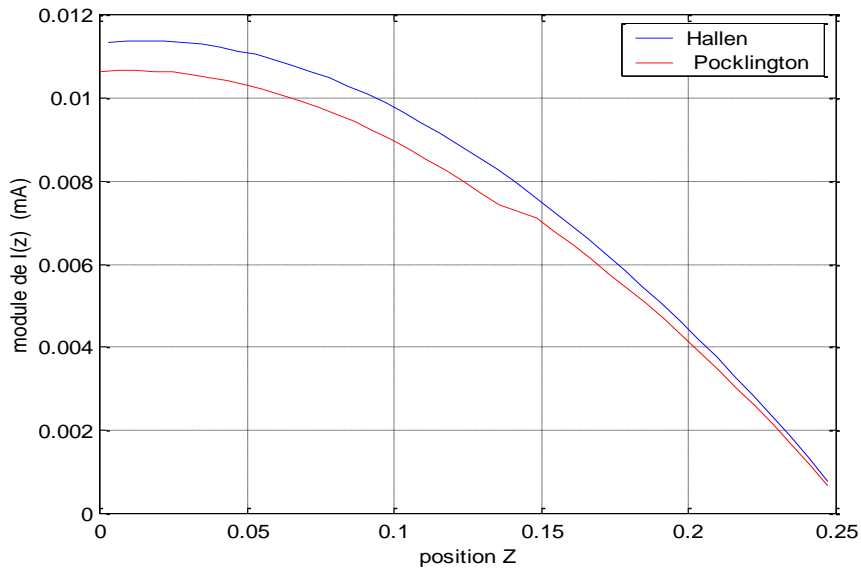


Figure IV.7. Représentation du diagramme de rayonnement

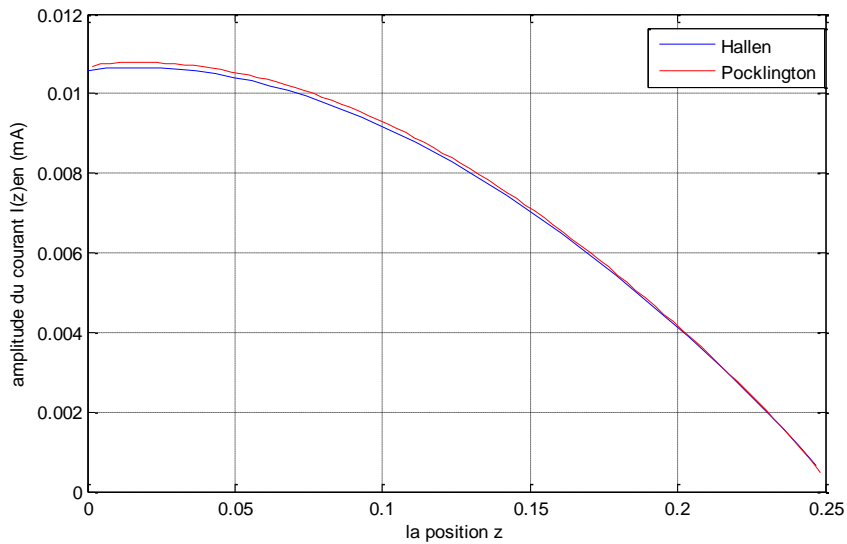
Remarque :

L'impédance d'entrée est calculée directement par le programme, elle s'affiche dans la boîte de dialogue directement après exécution.

Exemple 2 : $L=0.5\lambda$, $R=0.001\lambda$, $N=41$



(a) Distribution du courant pour $N = 41$



(b) Distribution du courant pour $N = 81$

Discussion : La solution de Hallen converge pour les deux valeurs de N , mais celle de Pocklington converge seulement pour $N= 80$ pour l'antenne de moitié-longueur d'onde. Ces résultats sont les même trouver dans la littérature [6] .

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons déterminer théoriquement le noyau des équations intégrales de Pocklington et d'Hallen qui sont programmés dans l'algorithme de la MoM.

Le choix de nombre de segments influe sur les résultats, plus il est grand plus en a une distribution plus précise mais le calcul est numériser donc on doit tenir compte du facteur temps qui est le plus important dans les calculs.

Les résultats numériques nous ont permis de déterminer la distribution du courant exacte.

Conclusion générale :

Ce travail consiste en la détermination de la distribution du courant dans les antennes filaires qui est souvent approximées à une forme sinusoïdale. Pour les fils de diamètre fini ($d > 0.05\lambda$), la distribution du courant est représentative mais pas précise. Pour trouver la distribution précise sur un fil cylindrique, deux équations intégrales ont été établies et résolues par une méthode numérique qui est la méthode des moments.

Traduite par un code de calcul écrit en Fortran, la méthode des moments nous a permis de déterminer la distribution du courant exacte en procédant par une segmentation théorique du fil conducteur, le courant est déterminé en chaque point. Cette méthode numérique nous calcule aussi l'impédance d'entrée de l'antenne filaire et son diagramme de rayonnement.

Aussi simple qu'elle soit sa structure, beaucoup de résultats obtenus pour l'antenne filaire peuvent être étendus à des structures plus complexes.

Une réalisation expérimentale nous aurait été d'un grand apport quand à la comparaison des résultats et l'approfondissement de l'étude.

Mots clés :

Rayonnement, distribution, équations intégrales, Pocklington, Hallen, méthode numérique, fonction de base, fonction test.

Résumé

La découverte fondamentale des ondes hertziennes a été accompagnée de celle de la première antenne. La découverte de ces ondes, présente l'extrême intérêt pratique pour les télécommunications.

Grace à ce nouveau dispositif qui joue l'intermédiaire entre deux milieux de propagation, des liaisons réalisées sont de plus en plus distantes et très importantes et sont adoptées rapidement dans tous les domaines .

Dans le présent travail, notre objectif est d'étudier de manière rigoureuse les antennes filaires en établissant les différentes équations qui les régissent afin de déterminer la distribution du courant à partir de laquelle sont déduits le champ électromagnétique rayonné ainsi que les différentes caractéristiques d'antenne.

Ce travail consiste en la détermination de la distribution du courant dans les antennes filaires qui est souvent approximées à une forme sinusoïdale. Pour les fils de diamètre fini ($d > 0.05\lambda$), la distribution du courant est représentative mais pas précise. Pour trouver la distribution précise sur un fil cylindrique, deux équations intégrales ont été établies et résolues par une méthode numérique qui est la méthode des moments.

Traduite par un code de calcul écrit en Fortran, la méthode des moments nous a permis de déterminer la distribution du courant exacte en procédant par une segmentation théorique du fil conducteur, le courant est déterminé en chaque points.

Bibliographie :

- [1] Odile Picon et Coll., «Les antennes : théories, conception et application », Edition Dunod, Paris ,2009.
- [2] Roger F.Harrington, « Field computation by moment methods », Edition Donald G. Dudley, Arizona 1993.
- [3] Constantine A.Balanis «Antenna theory: Analysis and design »Edition John Wiley & Sons INC 1997.
- [4] Domenic Grenier, « Antennes et propagation radio », produit Par LATEX Canada, 2011.
- [5] Walton C.Gibson, «The method of moment in electromagnetic», Edition Taylor & Francis group, USA, 2008.
- [6] Jophocles J.Orfanidis, ««electromagnetics waves and antennas», USA, 2002.
- [7] Bahram.H, «Mathématique pour la physique», Université Grenoble, 2011.
- [8] G.Dubost et S.Zisler, «antenne à large bande : théorie et application», Edition Masson, Paris, 1976.
- [9]Reinaldo Perez, « Interference into circuit», Edition Academic Press, California 1998.
- [10] «Électrodynamique classique»
- [11] Alain Meritet, «Optimisation des antennes filaires », rapport de recherche 1980.
- [12] Ramesh Garg, «Analytical and computational methods in electromagnetic», Edition Artech House, London, 2008.
- [13] Jophocles J.Orfanidis, «Electromagnetic waves and antennas», USA, 2004.
- [14]J.Sosa-Pedroza,V.Barrera-Figueroa et J .Lopez-Bonilla «Pocklington equation and the method of moments», communiqué par le prof.Dr.M.Iqbal Choudhary,2005.
- [15] Technique d'ingénieur
- [16] Frederic.B, «Introduction à l'analyse fonctionnelle et applications», Université Libre de Bruxelles, 2009
- [17] Tomas. Amiligan, «Modern antenna», Edition John Willy & New Jersey 2005
- [18]John Kraus,«Antenna», Edition Tata Mc-Hill
- [19]Roger-Charles House, «les antennes fondamentaux », Edition Dunod.