

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU  
FACULTE DES SCIENCES  
DEPARTEMENT MATHÉMATIQUE



## *Mémoire de master*

En mathématiques appliquées

Option : Recherche Opérationnelle

### *Thème*

*Le contrôle optimal et la stabilisation d'un pendule inversé*

Présenté par : M<sup>lle</sup>. SIAGHI Nawal

Proposé et dirigé par:

M<sup>r</sup> M.AIDENE

Membres du jury:

M<sup>r</sup> OUKACHA Brahim,

M<sup>r</sup> AIDENE Mohamed,

M<sup>lle</sup> KARA Fadila,

M<sup>me</sup> MOUSSOUNI Nassima

M.C.A,

Professeur,

M.C.A,

M.A.A,

UMMTO,

UMMTO,

UMMTO,

UMMTO,

President

Rapporteur

Examinatrice.

Examinatrice

Promotion 2011

## REMERCIEMENTS

*Je remercie dieu le tout puissant d'avoir guidé mes pas vers les portes du savoir tout en illuminant mon chemin, et m'avoir donné suffisamment de force et surtout de courage et de persévérance pour mener mon travail à terme.*

*Je tiens tout d'abord à exprimer mes sincères remerciements à mon promoteur Mr M.AIDENE professeur à L'UMMTO qui m'a apporté ses précieux conseils, idées et directives pour la réussite de ce travail.*

*Sans oublier, d'exprimer ma reconnaissance à Mr R. MELLAH, maître de conférences classe A à l'UMMTO, pour ses conseils et son aide précieuse pour la réalisation de ce mémoire.*

*J'ai été profondément honoré que Mr B. OUKACHA, ait accepté d'examiner ce travail et de présider le jury de soutenance de ce mémoire.*

*Mes remerciements vont aussi aux membres du jury, pour l'honneur qu'ils m'accordent en acceptant de juger mon travail.*

*Mes vifs témoignages, à toute personne, ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce projet.*

# *D*édicace

*Je* dédie ce travail

*A* la mémoire de mon très chère PAPA

# Sommaire

---

## Introduction générale

### Chapitre 1 : Rappels sur les équations différentielles

1.1 Introduction.....	5
1.2 Généralité.....	5
1.3 Définitions fondamentales .....	7
1.4 Théorème d'existence et d'unicité .....	8
1.5 Types d'équations différentielles ordinaires.....	8
1.5.1 Équation différentielle à variable séparées.....	8
1.5.2 Équation différentielle homogène.....	9
1.5.3 Équation différentielle linéaire d'ordre 1.....	10
1.6 Résolution numérique des équations différentielle.....	12
1.6.1 Méthode d'Euler .....	12
1.6.2 Méthode de Runge-Kutta.....	13

### Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

2.1 Introduction.....	16
2.2 Position du problème .....	16
2.2.1 Formalisation générale (Problème de Bolza).....	16
2.3 Contrôlabilité.....	17
2.3.1 Ensemble accessible.....	17
2.3.2 Contrôlabilité des systèmes linéaire autonomes .....	18
2.3.3 Contrôlabilité des systèmes non linéaire.....	19
2.4 Temps optimalité.....	21
2.4.1 Existence de trajectoires temps optimale.....	21

# Sommaire

---

2.5 Principe du maximum de Pontriaguine.....	21
2.5.1 Les conditions de transversalité .....	23
2.6 Méthodes numérique en contrôle .....	23
2.6.1 Méthode indirectes.....	24
2.6.2 Rappels sur les méthodes de Newton .....	27
2.6.3 Méthode directes .....	28
2.7 Résolution d'un problème aux deux bouts .....	29
2.7.1 Problème au deux bouts.....	29
2.8 Application numérique : résolution du problème du pendule inversé.....	31
2.8.1 Description et intérêt de l'étude d'un pendule inversé.....	31
2.8.2 Le problème du contrôle optimal du pendule .....	31
2.8.3 Modélisation du système a un degré de liberté.....	32
2.8.4 Application du principe du maximum.....	33
2.8.5 Résolution à l'aide du logiciel MATLAB.....	36
2.9 Conclusion.....	38
Conclusion générale.....	39
Bibliographie.....	40

# Introduction générale

---

Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre appelé le contrôle, et la théorie du contrôle optimale est une extension du calcul des variations, c'est un ensemble de méthodes utilisées pour calculer la politique de contrôle d'un modèle mathématique d'optimisation. La théorie du contrôle optimale est largement dû au travail de Lev Pontriaguin et ses collaborateurs de l'Union Soviétique ainsi qu'à celui de Richard Bellman, Etat-Unis.

La théorie du contrôle optimale est très liée à la mécanique classique, en particulier aux principes variationnels de la mécanique (principe de Fermat, équation d'Euler-Lagrange, ...). Le point clé de cette théorie est le principe du maximum de Pontriaguin, qui donne une condition nécessaire d'optimalité et permet ainsi de calculer les trajectoires optimales.

Le contrôle optimal sert à trouver une loi de commande pour un système donné de telle sorte qu'un certain critère d'optimalité soit atteint. Un problème de commande comprend donc un coût à optimiser, une fonction d'état et une variable de contrôle. Un problème de contrôle optimal se décompose en deux parties : pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable, c'est le problème de contrôlabilité. Pour les systèmes de contrôle linéaire en dimension finie, il existe une caractérisation très simple de la contrôlabilité, apparue dans les années soixante avec les travaux de R.E.Kalman, et pour les systèmes non linéaire, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus difficile. En suite une fois le problème de contrôlabilité résolu, il faut chercher parmi toutes les trajectoires possible celle qui donne le coût minimum (ou maximum). Pour la résolution du problème de contrôle optimal, on dispose de deux grandes classes de méthodes à savoir :

- Les méthodes directes : consistent à discrétiser le problème de contrôle (l'état et la commande) pour tout instant et on se ramène à un problème d'optimisation ainsi obtenu, en se basant, par exemple, sur les méthodes d'Euler, Runge-Kutta ou bien les méthodes de types SQP (méthode de programmation quadratique successive), etc. ces méthodes sont les plus simple à mettre en œuvre.
- Les méthodes indirectes : quant à elles, consiste à appliquer le principe du maximum de Pontriaguin (PMP), qui donne des conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre et se traduisent dans un problème au deux bouts. On cherche ensuite les trajectoires vérifiant ces conditions, ce qui revient en pratique à chercher le zéro d'une certaine fonction de tir associée au problème original. Ces méthodes sont à la fois précises et rapides, mais en revanche elles sont très sensibles à l'initialisation.

Dans ce mémoire on va résoudre le problème du pendule inversé, par une méthode indirecte, pour trouver la meilleure commande qui amène le pendule du point d'équilibre stable (position verticale en bas) au point d'équilibre instable (position verticale en haut) en minimisant le temps.

# Introduction générale

---

Ce mémoire est réparti en deux chapitres :

Chapitre 1 : nous nous sommes attelé à la définition des notions que nous allons utiliser par la suite. Nous donnons aussi quelques méthodes numériques de résolution des équations différentielles.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à la théorie du contrôle optimal et aux méthodes de résolution, avec un exposé de la méthode de tir, qu'on va utiliser pour résoudre le problème du contrôle optimal d'un pendule inversé. Pour ce cas, nous présenterons les résultats numériques obtenus sur MATLAB.

# Chapitre 1 : Rappels sur les équations différentielles

## 1.1 Introduction

Les équations différentielles constituent l'un des chapitres les plus importants de l'analyse, plusieurs problèmes pratiques sont modélisés par des équations différentielles.

Une équation différentielle, en mathématique, est une relation entre, une variable réelle, une fonction inconnue et ses dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de différenciation auquel une des fonctions inconnues a été soumise.

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques, biologiques, ... etc. par conséquent, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

## 1.2 Généralité

Soit  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $\|\cdot\|$  une norme multiplicative sur l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $K$ .

**Définition 1.1** Soit  $A \in M_n(K)$

On définit l'exponentielle de la matrice  $A$  par :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

**Remarque 1.1** la série précédente est convergente dans  $M_n(K)$  du fait que :

$$\left\| \sum_{k=p}^q \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=p}^q \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=p}^q \frac{\|A\|^k}{k!} \leq e^{\|A\|}$$

**Théorème 1.1 [13] (théorème de Cayley – Hamilton)**

Toute matrice carrée  $A$  satisfait sa propre équation caractéristique, c'est-à-dire :

$$\det(A - \lambda I) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Alors :

$$a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 = 0$$

Où

# Chapitre 1 : Rappels sur les équations différentielles

---

$$I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

est la matrice identité.

### **Définition 1.2 (produit scalaire dans $R^n$ )**

Soit  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  deux éléments de  $R^n$ , on appelle produit scalaire de  $X$  et  $Y$  le nombre réel :

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

### **Définition 1.3 (norme et distance euclidiennes)**

Soit  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ .

On appelle norme euclidienne de  $X$ , le nombre réel

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Soit  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  deux éléments de  $R^n$ .

$$d(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

### **Définition 1.4**

Soit  $A \in R^n$

On appelle boule ouverte de centre  $A$  et de rayon  $r > 0$ , l'ensemble noté  $B(A, r)$  défini par :

# Chapitre 1 : Rappels sur les équations différentielles

---

$$B(A, r) = \{X \in \mathbb{R}^n / d(A, X) < r\}$$

On appelle boule fermée de centre  $A$  et de rayon  $r \geq 0$ , l'ensemble noté  $B_f(A, r)$  défini par :

$$B_f(A, r) = \{X \in \mathbb{R}^n / d(A, X) \leq r\}$$

## Définition 1.5

Soit  $\Omega$  une partie de  $\mathbb{R}^n$

On dit que  $\Omega$  est un ensemble ouvert (ou un ouvert) de  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si  $\Omega = \emptyset$  ou si pour tout  $A \in \Omega$ , il existe une boule ouverte de centre  $A$  contenue dans  $\Omega$ , c'est-à-dire :

$$\Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall A \in \Omega, \exists r > 0, B(A, r) \subset \Omega$$

On dit que  $\Omega$  est un ensemble fermé (ou un fermé) de  $\mathbb{R}^n$  si le complémentaire de  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

## 1.3 Définitions fondamentales

**Définition 1.6** soit  $x = \varphi(t)$  une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un intervalle  $I \in \mathbb{R}$ , supposons qu'elle soit dérivable jusqu'à l'ordre  $n$  au moins et que, en tout point  $t \in I$ , il existe entre  $x$  et ses  $n$  premières dérivées une relation de la forme :

$$\phi\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^nx}{dt^n}\right) = 0 \quad (1.1)$$

Cette équation, dans laquelle la fonction  $x = \varphi(t)$  est considérée comme indéterminée est appelée « équation différentielle d'ordre  $n$  »

### Cas particulier

Une équation différentielle d'ordre  $n$  est dite normalisée si elle est de la forme :

# Chapitre 1 : Rappels sur les équations différentielles

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \phi \left( t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} \right) \quad (1.2)$$

**Remarque 1.2** L'équation (1.2) est dite autonome lorsqu'elle ne dépend pas explicitement de la variable temporelle  $t$ , c'est-à-dire lorsqu'elle est de la forme  $\dot{x} = f(x)$ .

**Définition 1.7** Toute fonction  $x = \varphi(t) (t \in I)$  qui vérifie l'équation en tout point de l'intervalle  $I$  est appelée « solution » ou « intégrale » de cette équation.

**Définition 1.8** le graphe  $\Gamma$  d'une solution quelconque d'une équation différentielle est appelé « courbe intégrale ».

**Définition 1.9** Soit l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = f(x, t), t \in [a, b], \quad (1.3)$$

Où  $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

On appelle problème de Cauchy pour l'équation (1.3) le problème avec condition initiales en un point  $t_0 \in [a, b]$  suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t, x), t \in [a, b], \\ x(t_0) = x_0, t_0 \in [a, b], x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.4)$$

Le problème de Cauchy consiste donc à trouver une solution  $x(t)$  de l'équation (1.3)

vérifiant les conditions dite initiale  $(t_0, x_0)$ .

## 1.4 Théorème d'existence et d'unicité

**Théorème 1.3 [13]** si la fonction  $f$  est continue sur  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$  et vérifie la condition de Lipschitz de rapport  $L > 0$  suivante :

# Chapitre 1 : Rappels sur les équations différentielles

$$\forall t \in [a, b]; \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|,$$

alors le problème de Cauchy (1.4) avec la condition initiale  $x(t_0) = x_0$  admet une solution globale unique.

## 1.5 Types d'équations différentielles ordinaires

### 1.5.1 Equation différentielle à variable séparées

Une équation différentielle est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{x} = g(x) \cdot f(t)$$

Pour la résoudre, on intègre les deux membres séparément, sans oublier les constantes d'intégration

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = g(x) \cdot f(t) \implies \frac{dx}{g(x)} = f(t) dt$$

Par intégration, on obtient

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t) dt$$

#### Exemple 1.1

Résolvant l'équation suivante :  $(1+t^2)\dot{x} = -3tx$

On écrit cette équation sous forme différentielle puis on sépare les variables :

$$(1+t^2) \dot{x} = -3tx \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{-3t}{1+t^2} dt$$

Par intégration de cette relation, il vient :

$$\frac{1}{x} dx = \int \frac{-3t}{1+t^2} dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{x} dx = \frac{-3}{2} \int \frac{2t}{1+t^2} dt$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{-3}{2} \ln(1+t^2) + C$$

## Chapitre 1 : Rappels sur les équations différentielles

---

$$x = k(1+t^2)^{\frac{-3}{2}}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est constitué des fonctions

$$x \mapsto k(1+t^2)^{\frac{-3}{2}}, t \in \mathbb{R}$$

### 1.5.2 Equation différentielle homogène

Une équation différentielle est dite homogène lorsqu'on peut la mettre sous la forme

$$\dot{x} = f(x/t) \quad (1.5)$$

Pour sa résolution, on pose

$$y(t) = x(t)/t, \text{ alors:}$$

$$\dot{x} = \dot{y}t + y$$

On reporte ces équations dans l'équation différentielle (1.5) on obtient :

$$\dot{y}t + y = f(y)$$

$$\Leftrightarrow \dot{y} = (f(y) - y)/t$$

qui est une équation différentielle à variable séparée.

### Exemple 1.2

Résolvant l'équation suivante :  $(t^2 + x^2)\dot{x} = xt\dot{x}$  (1.6)

Posons  $y = \frac{x}{t}$  d'où :  $\dot{x} = \dot{y}t + y$

Portons dans l'équation précédente :

$$t^2(1+y^2) = yt^2(\dot{y}t + y)$$

## Chapitre 1 : Rappels sur les équations différentielles

---

$$\Leftrightarrow \dot{y} = \frac{1}{yt} = \frac{dy}{dt} \Leftrightarrow y dy \frac{dt}{t}$$

Par intégration, on obtient :

$$\ln \frac{t}{c} = \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2t^2}, \text{ avec } \frac{t}{c} > 0.$$

$$\begin{aligned} &+ \dot{c} t \sqrt{2 \ln t / c} \\ &\quad - \dot{c} \\ &\quad x = \dot{c} \\ \Leftrightarrow x^2 &= 2t^2 \ln t / c \Leftrightarrow \dot{c} \end{aligned}$$

### 1.5.3 Equation différentielle linéaire d'ordre 1

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation de la forme :

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), (1.7)$$

Où  $a, b$  sont des fonctions de la variable réelle  $t$ , continues sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ .

#### Définition 1.10

On appelle équation homogène (ou sans second membre) associée à l'équation différentielle (1.7) l'équation :

$$\dot{x} = a(t)x, (1.8)$$

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x \Leftrightarrow a(t) dt = \frac{1}{x} dx,$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \int a(t) dt,$$

dont la solution générale s'écrit :

$$x(t) = k e^{\int a(t) dt},$$

où  $k$  est une constante réelle quelconque.

#### Méthode de la variation de la constante

## Chapitre 1 : Rappels sur les équations différentielles

---

On écrit  $x = k(t)e^{\int a(t)dt}$  (1.9)

On trouve  $k(t)$  de telle sorte que (1.9) vérifie (1.7) :

$$\dot{x}(t) = \dot{k}(t)e^{\int a(t)dt} + k(t)a(t)e^{\int a(t)dt}.$$

Posons

$$\alpha(t) = \int a(t) dt$$

$$\dot{x}(t) = \dot{k}(t)e^{\alpha(t)} + k(t)a(t)e^{\alpha(t)}$$

On remplace dans (1.7) alors :

$$\dot{k}(t)e^{\alpha(t)} + k(t)a(t)e^{\alpha(t)} = a(t)k(t)e^{\alpha(t)} + b(t),$$

$$\implies \dot{k}(t)e^{\alpha(t)} = b(t)$$

$$\implies \dot{k}(t) = b(t)e^{-\alpha(t)}$$

C'est-à-dire :  $k(t) = \int b(t)e^{-\alpha(t)} dt$

Puis on remplace dans (1.8) pour trouver la solution.

### **Remarque 1.4**

*Certaines équations non linéaires se ramènent à des équations linéaires par changement de variable, c'est le cas par exemple de l'équation de Bernoulli :*

$$\dot{x} = p(t)x + q(t)x^a,$$

Les fonctions  $p$  et  $q$  étant continues. Lorsque  $a$  vaut 0 ou 1 l'équation est linéaire sinon en posant  $y = x^{-a}$ , on se ramène à l'équation linéaire suivante :

$$\frac{\dot{y}}{1-a} = p(t)y + q(t),$$

### **Remarque 1.5**

# Chapitre 1 : Rappels sur les équations différentielles

Les équations linéaires d'ordre  $P$  se ramènent à des systèmes d'équations d'ordre 1, par exemple l'équation

$$x^{(p)} + a_{p-1}x^{p-1} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x = 0 ,$$

est équivalente au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{p-2} = x_{p-1} \\ \dot{x}_{p-1} = -a_{p-1}x_{p-1} - \dots - a_1x_1 - a_0x. \end{array} \right.$$

en posant :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{p-1} \end{pmatrix} ,$$

On aura :  $\dot{X} = AX$  avec :

$$A = \begin{pmatrix} 01 & 00 \\ 00 & 00 \\ \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots \\ 0. & \ddots \\ -a_0 - a_1 - a_{p-1} \end{pmatrix}$$

## 1.6 Résolution numérique des équations différentielles

Pour résoudre les équations différentielles, il existe plusieurs méthodes : les méthodes analytiques et les méthodes numériques.

Les méthodes analytiques ne sont pas suffisantes pour résoudre les problèmes d'équations différentielles et n'est possible que dans un nombre de cas très restreints.

# Chapitre 1 : Rappels sur les équations différentielles

---

La résolution de la plupart des équations différentielles requiert donc l'utilisation des méthodes numériques, chacune de ces méthodes peut être appliquée à la résolution de la plupart des équations différentielles ; parmi ces méthodes on citera quelques une dans ce qui suit.

## 1.6.1 Méthode d'Euler

La méthode de Leonhard Euler (1707-1783) est une méthode à pas séparé du premier ordre.

Elle consiste à remplacer l'opérateur de dérivation  $d/dx$  par le schéma discret (

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{h}, \text{ c'est la plus simple et la moins précise.}$$

La résolution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.10)$$

conduit au schéma suivant :

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h, \\ x_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i), \end{cases} \quad (1.11)$$

En pratique, la méthode d'Euler n'est pas utilisée car elle n'offre pas une précision suffisante. Cette méthode est convergente et du premier ordre car l'erreur de consistance (de troncature ou de discrétisation), est la différence entre la valeur discrétisée et la valeur exacte :

$$|x(i) - x_i| = \frac{1}{2} h^2 f'(c, x_i), \text{ avec } c \in [t_{i-1}, t_i].$$

mais cette méthode dite explicite est souvent instable c'est le cas si la fonction est linéaire, par exemple :  $\dot{x}(t) = f(x, t) = -ax$ , avec  $a > 0$ .

Le schéma d'Euler est :

$$x_{i+1} = x_i - ah \quad x_i = (1 - ah) x_i.$$

Il est instable dès que  $h > 2/a$ , car, dans ce cas,  $x_i$  tend vers l'infini lorsque  $i$  tend vers l'infini.

# Chapitre 1 : Rappels sur les équations différentielles

## 1.6.2 Méthode de Runge-Kutta

Carl Runge (1856-1927) et Martin Kutta (1867-1944) ont proposé en 1895 de résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.12)$$

En introduisant un schéma numérique de la forme :

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h_i, \\ x_{i+1} = x_i + h\phi(x_i, t_i, h_i), \end{cases} \quad (1.13)$$

où la fonction d'incrémentation  $\phi$  est une approximation de  $f(t, x)$  sur l'intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ .

Supposons un entier  $r$ , une matrice  $A$  carrée d'ordre  $r$  et les éléments triangulaires supérieurs sont nuls  $y$  compris la diagonale, et un vecteur  $b = (b_1, b_2, \dots, b_r)$ .

L'algorithme de Runge-Kutta est le suivant :

$$\begin{aligned} & b \\ & h(\dot{c}_1 k_1 + \dots + b_r k_r), \\ & x_{i+1} = x_i + \dot{c} t_{i+1} = t_i + h, \\ & t_i + c_j h, x_i + h(a_{j1} k_1 + \dots + a_{jr} k_r), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \dot{c} \\ & \dot{c} \\ & 1. \\ & k_j = f \dot{c} \\ & \dot{c} \end{aligned}$$

Le vecteur  $b$  vérifie  $b_1 + b_2 + \dots + b_r = 1$ .

Les coefficients  $c_j$  sont les sommes des éléments de la ligne  $j$  de la matrice  $A$ . Dans ces méthodes, le pas  $h$  peut facilement varier  $h_i$ , une méthode de Runge-Kutta est entièrement déterminée par la donnée de l'entier  $r$ , du vecteur  $b$  et de la matrice  $A$ .

**Méthode d'ordre 1 ( $r = 1$ )**

## Chapitre 1 : Rappels sur les équations différentielles

---

Pour  $b=1$  ,  $a_{11}=0$  l'algorithme

$$x_{i+1} = x_i + h(t_i, x_i),$$

Se réduit à la méthode d'Euler.

Pour  $b=1$  ,  $a_{11}=1$  l'algorithme de Runge-Kutta

$$x_{i+1} = x_i + h(t_{i+1}, x_{i+1}),$$

Conduit à la méthode d'Euler rétrogradé (méthode implicite).

**Méthode d'ordre 2** (  $r=2$  )

Pour déterminer toute les méthodes d'ordre 2, cherchons une fonction  $\phi$  de la forme :

$$\phi = b_1 k_1 + b_2 k_2,$$

Où les coefficients  $k_1$  et  $k_2$  sont donnée par :

$$\begin{aligned} & 1. \\ & k_1 = f(t_i, x_i), \\ & k_2 = f(t_i + ch, x_i + ahk_1), \end{aligned} \quad (15)$$

Développons  $x_{i+1}$  au voisinage du point  $(t_i, x_i)$ :

## Chapitre 1 : Rappels sur les équations différentielles

---

$$\begin{aligned}
 & x(t_i) \\
 & t_i, h \\
 & x(t_i) \\
 & t \\
 & x(t_i) \\
 & t_i, h \\
 & t_i, h + f(t_i, x_i) \frac{\partial f}{\partial x} h \\
 & \frac{\partial f}{\partial t} h \\
 & x_{i+1} = x(t_i) + hf(t_i, x_i)
 \end{aligned}$$

En identifiant les deux expressions on obtient :

$$\begin{cases}
 x(t_i) = x_i, \\
 f(t_i, x_i) = (b_1 + b_2) f(t_i, x_i), \\
 \frac{1}{2} f'_t + \frac{1}{2} f'_x f = b_2 \left( c f'_t + a \frac{1}{2} f'_x f \right)
 \end{cases}$$

On en déduit que :  $b_1 + b_2 = 1$  et  $b_2 c = b_2 a = 1/2$  . Soit en posant :  $b_2 = \theta$  et  $b_1 = \theta - 1$  et  $c = a = 1/2$  , on retrouve les trois formes standards.

La méthode d'Euler s'obtient pour  $\theta = 0$

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i)$$

La méthode de Heun (Euler-Cauchy) est obtenue pour  $\theta = 1/2$

$$\begin{cases}
 x_{i+1} = x_i + h(k_1 + k_2)/2, \\
 k_1 = f(t_i, x_i), \\
 k_2 = f(t_i + h, x_i + hk_1)
 \end{cases} \quad (1.16)$$

La méthode de Runge-Kutta (proprement dite) est obtenue pour  $\theta = 1$

## Chapitre 1 : Rappels sur les équations différentielles

---

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h k_2, \\ k_1 = f(t_i, x_i), \\ k_2 = f(t_i + h/2, x_i + h k_1), \end{cases} \quad (1.17)$$

**Méthode d'ordre 3** ( $r=3$ )

L'algorithme de Runge-Kutta correspond au cas  $b = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$  et la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme effectue à chaque pas le calcul de trois facteurs  $k_i$

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h(k_1 + 4k_2 + k_3)/6, \\ k_1 = f(t_i, x_i), \\ k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h k_1}{2}\right), \\ k_3 = f(t_i + h, x_i - h k_1 + 2 h k_2). \end{cases} \quad (1.18)$$

Pour améliorer l'efficacité du calcul, on utilise des méthodes à pas variable, c'est-à-dire des méthodes dans lesquelles le pas  $h$  varie à chaque itération.

Une des méthodes classiques, consiste à employer deux méthodes de Runge-Kutta emboîtées. La première méthode d'ordre  $r$  sert à calculer la solution approchée, tandis que la méthode est d'ordre  $r'$  sert à estimer l'erreur de consistance pour contrôler le pas. On dit que la méthode est d'ordre  $(r', r)$ . Proposée en 1957, la méthode de Merson est la première méthode de Runge-Kutta emboîtée, elle est d'ordre 5 pour le calcul de la solution et d'ordre 4 pour le contrôle du pas, elle consiste à calculer :

## Chapitre 1 : Rappels sur les équations différentielles

---

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_i, x_i), \\k_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{3}, x_i + hk_1/3\right), \\k_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{3}, x_i - \frac{hk_1}{6} + hk_2/6\right), \\k_4 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{hk_1}{8} + \frac{3}{hk_2}\right), \\k_5 &= f\left(t_i + h, x_i + \frac{hk_1}{2} - \frac{3hk_3}{2} + 2hk_1\right), \\x_{i+1} &= x_i + \frac{h(k_1 + 4k_2 + k_3)}{6}, \\x_{i+1}^{\dot{i}} &= x_i + h(k_1 - 3k_3 + 4k_4)/6,\end{aligned}\tag{1.19}$$

L'erreur :  $\Delta = |x_{i+1} - x_{i+1}^{\dot{i}}|$  est évaluée à chaque pas.

# Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

---

## 2.1 Introduction

La théorie du contrôle optimal est une prolongation du calcul des variations. Elle est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique. Elle s'intéresse à l'analyse des propriétés des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final prescrit, en respectant certains critères. L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal).

Pour modéliser on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques, ...etc.

Pour atteindre le but de déplacer le système d'un état initial donnée, vers un état final ; deux questions se posent naturellement :

- Existe-t-il un contrôle ou une commande pour déplacer ce système ? c'est le problème de la contrôlabilité.
- Si la condition précédente est remplie : Existe-t-il un contrôle joignant le point de départ  $x_0$  à  $x_1$  et qui minimise une certaine fonctionnelle  $J(u)$  ? c'est le problème de contrôle optimal.

Les domaines d'application sont multiples : internet et les communications en général, mais aussi le secteur médical, chimique, l'automatique, la robotique (problèmes de coordination des mouvements de robots)...etc.

Le pendule inversé est l'un de ces domaines typiques qui occupent une place importante dans l'industrie comme un outil de transport, d'inspection et d'intervention.

## 2.2 Position du problème

Pour résoudre un problème d'optimisation, il faut d'abord définir un objectif d'où la nécessité d'une définition du problème en terme physique et sa modélisation en termes mathématique. En connaissant la fonction à optimiser  $J(u)$ , le modèle, l'état  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  à chaque instant  $t$ , et les paramètres du système, le problème est de déterminer la meilleure commande  $u$  qui optimise l'objectif.

### 2.2.1 Formulation générale (problème de Bolza)

On appelle problème de contrôle optimal sous forme de Bolza, tout problème noté (P) du type :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J(u(t)) = g(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.1) \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \in [t_0, t_f], \\ u(t) \in U, \\ x(t_0) = x_0, \\ x(t_f) = x_1, \end{array} \right.$$

ici

- $J(u)$  est le critère de qualité (fonction objectif).
- $x(t) = (x_j, j \in J) \in \mathbb{R}^n$  un n- vecteur représentant la position (l'état) du système à l'instant  $t \in [t_0, t_f]$ .
- $g$  est un m-vecteur qui représente la sortie du signal à l'instant  $t_f$  (ensemble d'arrivée).
- $u(t)$  est une commande.
- $x_0$  est la position initiale.
- $x_1$  est la position finale.
- $U \in \mathbb{R}^m$ ,  $U = \{u(t), t \in [t_0, t_f]\}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^m$

Dans le cas linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), t \in [t_0, t_f], \\ x(t_0) = x_0, \end{array} \right.$$

avec  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ .

**Définition 2.1 (commande bang-bang)** soit  $U$  l'ensemble de commande et  $U_e$  l'ensemble des points extrémaux de  $U$ . La commande admissible  $u$  est dite de bang-bang si  $u \in U_e$ , c'est-à-dire  $u$  prend les valeurs extrémales de  $U$ , ensemble borné.

Ainsi, par exemple, si on a  $|u(t)| \leq 1$ , les commande bang-bang sont telle que  $u(t) = \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix}$ .

## Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

**Définition 2.2** Tout contrôle  $u(t), t \in [t_0, t_f]$  vérifiant  $u \in U$  est appelé contrôle admissible. Si en plus il réalise le minimum du coût (2.1) ce contrôle est appelé contrôle optimal.

### 2.3 Contrôlabilité

Le système de Bolza est dit contrôlable si pour chaque paire de point  $x_0$  et  $x_1$  dans  $R^n$ , il existe une commande  $u(t)$  sur un certain intervalle fini  $0 < t < t_1$ , tel que la réponse correspondante (trajectoire)  $x(t)$  transfère l'objet de la position  $x_0$  à la position  $x_1$  en temps final  $t_1$ .

#### 2.3.1 Ensemble accessible

Etant donnée l'état initial  $x_0$ , nous étudions l'ensemble  $Acc(x_0, t_f)$  de tous les points de  $R^n$  auxquels  $x_0$  peut être transféré par les contrôleurs  $u(t)$  sur  $0 < t < t_f$ .

**Définition 2.3 (ensemble accessible)** l'ensemble des points accessible à partir de  $x_0$  en un temps  $t_f$  est défini par :

$$Acc(x_0, t_f) = \{x_u(t_f), u \in L^\infty([0, t_f], U)\},$$

où  $x_u(\cdot)$  est la solution du système contrôlé associée au contrôle  $u$ .

**Corollaire 2.1 [13]**  $Acc(x_0, t_f) = \bigcup_{t \geq 0} Acc(x_0, t)$ , l'ensemble des points accessibles (en temps quelconque), est un sous espace vectoriel de  $R^n$ .

**Démonstration :** une union croissante de sous espace vectoriels de  $R^n$  est un sous espace vectoriel.

#### 2.3.2 Contrôlabilité des systèmes linéaire autonomes

**Définition 2.4** Un système définit par

## Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

---

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), t \in [t_0, t_f], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Est dit non autonome, et il est dit autonome si les matrices  $A(t) = A$  et  $B(t) = B$  sont constantes c'est-à-dire.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), t \in [t_0, t_f], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

**Définition 2.5** le système (2.3) est dit contrôlable en temps  $t_f$  si  $Acc(x_0, t_f) = \mathbb{R}^n$ .

Autrement dit, pour tous  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$  il existe un contrôle  $u$  tel que la trajectoire associée relie  $x_0$  à  $x_1$  en temps  $t_f$  fini.

### **Cas sans contraintes sur le contrôle (condition de Kalman)**

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de la contrôlabilité.

**Théorème 2.1 [13]** on suppose  $U = \mathbb{R}^m$ . Le système (2.3) est contrôlable en temps  $t_f$  (quelconque) si et seulement si la matrice  $C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$  est de rang  $n$ . La matrice  $C$  est appelée matrice de Kalman, et la condition  $rg C = n$  est appelée condition de Kalman.

**Remarque 2.1** la condition de Kalman ne dépend ni de  $t_f$  ni de  $x_0$ . Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps  $t_f$  depuis  $x_0$ , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.

### **Cas avec contraintes sur le contrôle**

**Corollaire 2.2 [13]** sous la condition de Kalman précédente, si  $0 \in U^o$  alors l'ensemble accessible  $Acc(x_0, t)$  en temps  $t$  contient un voisinage du point  $\exp(tA)x_0$ .

**Remarque 2.2** les propriétés de contrôlabilité globale sont reliées aux propriétés de la stabilité de la matrice  $A$ . Par exemple, il est clair que si :

1. La condition de Kalman est remplie,

## Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

- $0 \in U^\circ$
- Toutes les valeurs propres de la matrice  $A$  sont de partie réelle strictement négative (i.e. la matrice  $A$  est stable),

Alors tout point de  $\mathbb{R}^n$  peut être conduit à l'origine en temps fini.

**Théorème 2.2** [13] soit  $b \in \mathbb{R}^n$  et  $U \subset \mathbb{R}$  un intervalle contenant 0 dans son intérieur.

Considérons le système  $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$ , avec  $u(t) \in U$ . Alors tout point de  $\mathbb{R}^n$  peut être conduit à l'origine en temps fini si et seulement si la paire  $(A, b)$  vérifie la condition de Kalman et la partie réelle de chaque valeur propre de  $A$  est inférieur ou égale à 0.

### 2.3.3 Contrôlabilité des systèmes non linéaire

Se prononcer sur cette propriété reste jusqu'à présent une tâche très difficile. Pour étudier la contrôlabilité des systèmes non linéaire, on a tendance à utiliser le système linéarisé partant du fait que la contrôlabilité du système linéarisé implique celle du système non linéaire d'une manière locale. La non contrôlabilité du système linéarisé n'implique pas forcément la non contrôlabilité du système non linéaire.

Considérons un système de contrôle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \in [t_0, t_f], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Etant donnée un point  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , trouver un temps  $t_f$  et un contrôle  $u$  sur  $[0, t_f]$  tel que la trajectoire  $x_u$  associée à  $u$ , vérifie :

$$x_u(0) = x_0, x_u(t_f) = x_1.$$

Ceci conduit à la définition suivante :

**Définition 2.6** soit  $t_f > 0$ . L'application entrée- sortie en temps  $t_f$  du système contrôlé (2.4) initialisé à  $x_0$  est l'application :

$$E_{x_0, t_f} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

## Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

---

$$u \mapsto x_u(t_f),$$

où  $U$  est l'ensemble des contrôles admissible, i.e l'ensemble de contrôles  $u$  tel que la trajectoire associée est bien définie sur  $[0, t_f]$ . Autrement dit, l'application entrée- sortie en temps  $t_f$  associée à un contrôle  $u$  le point final de la trajectoire associée à  $u$ .

**Définition 2.7** l'ensemble accessible en temps  $t_f$  pour le système (2.4), noté  $Acc(x_0, t_f)$ , est l'ensemble des extrémités au temps  $t_f$  des solutions du système partant de  $x_0$  au temps  $t=0$ . Autrement dit c'est l'image de l'application entrée-sortie en temps  $t_f$ .

**Définition 2.8** le système (2.4) est dit contrôlable (en temps quelconque) depuis  $x_0$  si :

$$R^n = \bigcup_{t \geq 0} Acc(x_0, t).$$

Il est dit contrôlable en temps  $t_f$  si  $R^n = Acc(x_0, t_f)$ .

**Définition 2.9** Soit  $x_1 \in R^n$ . On dit que le système est localement contrôlable au voisinage de  $x_1$  en temps  $t_f$  depuis  $x_0$  si  $x_1 \in \partial Acc(x_0, t_f)$ .

où  $\partial Acc(x_0, t_f)$  est la frontière de l'ensemble accessible.

**Lemme 2.1 [13]**

$E_{t_f}$  est différentiable au sens de Fréchet. Sa différentielle est :

$$E_{t_f}(u + \delta u) = E_{t_f}(u) + dE_{t_f}(u) \cdot \delta u + o(\|\delta u\|_{L^\infty}),$$

Par définition :

$$\dot{x}_u = Ax_u + B(u), x_u(0) = x_0$$

$$\dot{x}_{u+\delta u} = Ax_{u+\delta u} + B(u + \delta u), x_{u+\delta u}(0) = x_0$$

On pose

## Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

---

$$\delta x(t) = x_{u+\delta u}(t) - x_u(t)$$

$$\dot{\delta x} = A\delta x + B(u+\delta u) - B(u)\delta x(0) = 0;$$

$$B(u+\delta u) = B(u) + dB(u) \cdot \delta u + o(\|\delta u\|)$$

À l'ordre 1 :

$$\begin{cases} \dot{\delta x} = A\delta x + dB(u) \cdot \delta u(t) \\ \delta x(0) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Le système (2.5) est appelé système linéarisé du système (2.4) le long de  $u(\cdot)$

**Lemme 2.2 [13]** si le système linéarisé est contrôlable, alors le système est localement contrôlable au voisinage de  $x_1$ .

**Théorème 2.3 [13]** Le système

$$\begin{cases} \dot{\delta x} = A\delta x + dB(u) \cdot \delta u(t), \\ \delta x(0) = 0. \end{cases}$$

est localement contrôlable en temps  $t_f$  si et seulement si la matrice

$$\int_0^{t_f} e^{tA} dB(u(t)) dB(u(t))^T e^{tA^T} dt$$

est inversible

où  $A^T$  c'est la transposée de la matrice  $A$ .

**Définition 2.10** soit  $u$  un contrôle défini sur  $[0, t_f]$  tel que sa trajectoire associée  $x_u$  issue de  $x(0) = x_0$  est définie sur  $[0, t_f]$ . On dit que le contrôle  $u$  (ou la trajectoire  $x_u$ ) est singulier sur  $[0, t_f]$  si la différentielle de Fréchet  $dE_{t_f}(u)$  de l'application entrée-sortie au point  $u$  n'est pas surjective. Sinon on dit qu'il est régulier.

## Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

### 2.4 Temps-optimalité

#### 2.4.1 Existence de trajectoires temps-optimale

Il faut tout d'abord formaliser, à l'aide de  $Acc(x_0, t)$ , la notion de temps minimal. Considérons le système contrôlé dans  $R^n$  où les contrôles  $u$  sont à valeur dans un compact d'intérieur non vide  $U \subset R^m$ . Soient  $x_0$  et  $x_1$  deux points de  $R^n$ . Supposons que  $x_1$  soit accessible depuis  $x_0$ , c'est-à-dire qu'il existe au moins une trajectoire reliant  $x_0$  à  $x_1$ , on aimerait caractériser celles qui le font en temps minimal  $t^*$ .

Si  $t^*$  est temps minimal, alors pour tout  $t < t^*$ ,  $x_1 \notin Acc(x_0, t)$  (en effet sinon  $x_1$  serait accessible à partir de  $x_0$  en un temps inférieur à  $t^*$ ). Par conséquent

$$t^* = \inf \{ t > 0 \mid x_1 \in Acc(x_0, t) \}.$$

### 2.5 Principe du maximum de Pontriaguin (PMP)

Il existe deux grandes classes de méthodes de résolution de problèmes de commande optimale :

- Principe du maximum de Pontriaguin (1956) ;
- La programmation dynamique de Bellman ;

Dans cette partie, on s'intéresse au principe du maximum de Pontriaguine qui donne une condition nécessaire d'optimalité pour des systèmes décrit par des équations différentielles ordinaires. Il a été établi à l'origine pour calculer la trajectoire en temps minimale pour l'envoi d'une fusée sur la lune c'est un principe qui généralise les principes du calcul des variations classique, en prenant en compte notamment la contrainte sur le contrôle et les contraintes sur l'état.

Les trajectoires optimales sont sélectionnées parmi une famille de trajectoires dites extrémales qui sont des solutions d'un système Hamiltonien généralisé.

#### *Énoncé général*

#### *Théorème 2.3 [13]*

On considère le système de contrôle dans  $R^n$

## Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

---

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), (2.6)$$

où

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$  et où les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle  $[0, t_f(u)]$  de  $\mathbb{R}^+$  et à valeur dans  $U \subset \mathbb{R}^m$ . On note  $U$ , l'ensemble des contrôles admissibles  $u$  dont les trajectoires associées relient un point initial  $x_0$  à un point final  $x_1$  en temps  $t(u) < t_f(u)$ .

Par ailleurs on définit le coût d'un contrôle  $u$  sur  $[0, t]$  :

$$J(t, u) = g(t, x(t)) + \int_0^t f_0(s, x(s), u(s)) ds$$

$f_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , sont de classe  $C^1$  et  $x(\cdot)$  est la trajectoire solution de (2.6) associée au contrôle  $u$ .

On considère le problème de contrôle optimal suivant :

Déterminer une trajectoire reliant  $x_0$  à  $x_1$  et minimisant le coût  $C(u)$ .

Si le contrôle  $u \in U$  associé à la trajectoire  $x(\cdot)$  est optimal sur  $[0, t_f]$  alors il existe une application

$p(\cdot) : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolument continue appelée vecteur adjoint et un réel  $p^0 \leq 0$ , tel que, le couple  $(p(\cdot), p^0)$  est non trivial, et tel que, pour presque tout  $t \in [0, t_f]$ ,

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), u(t)) = 0,$$

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)),$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)),$$

## Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

---

où

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f_0(t, x, u),$$

est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur  $[0, t_f]$  :

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{\vartheta \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, \vartheta),$$

### 2.5.1 Les conditions de transversalités

#### *Les conditions de transversalité sur le Hamiltonien*

- Si le temps final pour joindre  $x_1$  n'est pas fixé, et le contrôle  $u$  est continu au temps  $t_f$ , on a la condition au temps final  $t_f$  :

$$H(t_f, x(t_f), p(t_f), p^0, u(t_f)) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(t_f, x(t_f)),$$

- Si de plus la fonction  $g$  ne dépend pas du temps, alors la condition de transversalité devient :

$$H(t_f, x(t_f), p(t_f), p^0, u(t_f)) = \dot{c}_0$$

#### *Les conditions de transversalité sur le vecteur adjoint*

Dans ce cas le temps final pour atteindre la cible peut être fixé ou non.

**Cas1 :** le coût  $J(t, u) = g(t, x(t))$

Si  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , i.e le point final est libre alors

$$p(t_f) = p^0 \frac{\partial g}{\partial t} \dot{c}_1$$

**Cas2 :** le coût  $J(t, u) = \int_0^t f_0(s, x(s), u(s)) ds$

Si  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , i.e le point initial n'est pas fixé, on obtient  $p(0) = 0$

## Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

Si  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , i.e le point final est libre alors le vecteur adjoint au temps final est nul

$$p(t_f) = 0.$$

### 2.6 Méthodes numériques en contrôle optimal

On distingue deux types de méthodes numériques en contrôle optimal : les méthodes directes et les méthodes indirectes.

Les méthodes directes consistent à discrétiser l'état et le contrôle, et réduisent le problème à un problème d'optimisation non linéaire (programmation non linéaire). Les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement, par une méthode de tir (shooting method) le problème aux valeurs limites obtenu par application du principe du maximum de Pontriaguine.

Le problème de contrôle optimal est analysé par la méthode indirecte ou utilise les conditions nécessaires du principe du maximum pour sélectionner les trajectoires optimales parmi une famille de trajectoires extrémales, solution d'un système Hamiltonien. Dans cette partie, nous nous intéressons à la définition et l'application de la méthode de tir au contrôle optimal.

#### 2.6.1 Méthodes indirectes

##### Méthode de tir simple

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\min J(t, u) = g(t, x) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x, u) dt,$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), t \in [t_0, t_f] \\ x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_1 \\ p(t_0) = p_0, p(t_f) = p_1, \end{cases}$$

Et supposons que le temps final est fixé.

Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale.

Si l'on est capable, à partir de la condition du maximum, d'exprimer le contrôle extrémal en fonction de  $(x(t), p(t))$ , alors le système extrémal est un système différentiel de la forme  $\dot{z} = F(t, z(t))$ , où  $z(t) = (x(t), p(t))$  et les conditions initiales, finales sous la forme

## Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

$R(z(t_0), z(t_f)) = R(x_0, p_0, x_1, p_1) = 0$ . Finalement on obtient le problème aux valeurs limites suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} = F(t, z(t)), \\ R(z(t_0), z(t_f)) = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

Notons par  $z(t, z_0)$  la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\dot{z} = F(t, z(t)), \quad z(t_0) = z_0.$$

La fonction de tir est alors définie par :

$$G(t_f, z_0) = R(z_0, z(t_f, z_0)).$$

Le problème (2.7) aux valeurs limites est alors équivalent à la résolution du système suivant :

$$G(t_f, z_0) = 0.$$

Il s'agit de déterminer un zéro de la fonction  $G$ . Ceci peut se résoudre par la méthode de Newton.

**Remarque 2.3** si le temps  $t_f$  est libre, on peut se ramener à la formulation précédente en considérant  $t_f$  comme une inconnue auxiliaire. On augmente alors la dimension de l'état

en considérant l'équation supplémentaire  $\frac{dt_f}{dt} = 0$ . On peut utiliser le même artifice si le

contrôle est bang-bang, pour déterminer les temps de commutation. Il peut cependant s'avérer préférable, lorsque le temps final est libre, d'utiliser la condition de transversalité sur le Hamiltonien.

### Méthode de tir multiple

Par rapport à la méthode de tir simple, la méthode de tir multiple découpe l'intervalle

$[t_0, t_f]$  en  $N$  intervalles  $[t_i, t_{i+1}]$ , et se donne comme inconnues les valeurs  $z(t_i)$  au

début de chaque sous intervalles. Il faut prendre en compte des conditions de recollement en chaque temps  $t_i$  (condition de continuité). L'intérêt est d'améliorer la stabilité de la méthode.

## Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

---

De manière plus précise, considérons un problème de contrôle optimal général. L'application du principe du maximum réduit le problème à un problème aux valeurs limites de type :

$$\dot{z} = F(t, z(t)) = \begin{cases} F_0(t, z(t)) & \text{si } t_0 < t < t_1 \\ F_1(t, z(t)) & \text{si } t_1 < t < t_2 \\ \vdots & \\ F_s(t, z(t)) & \text{si } t_s < t < t_f \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $z = (x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$  ( $p$  est le vecteur adjoint), et  $t_1, \dots, t_s \in [t_0, t_f]$ .

### Remarque 2.4

*A priori le temps final  $t_f$  est inconnu. Par ailleurs dans la méthode de tir multiple le nombre  $s$  de commutations doit être fixé, on le détermine lorsque c'est possible par une analyse géométrique du problème.*

La méthode de tir multiple consiste à subdiviser l'intervalle  $[t_0, t_f]$  en  $N$  sous intervalles, la valeur de  $z(t)$  au début de chaque sous intervalles étant inconnue. Plus précisément, soit  $t_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_k < t_f$  une subdivision fixée de l'intervalle  $[t_0, t_f]$ . En tout point  $\sigma_j$  la fonction  $z$  est continue. On peut considérer  $\sigma_j$  comme un point de commutation fixe, sur lequel on a :

$$\begin{array}{c} +\dot{\zeta} \\ \sigma_j \\ -\dot{\zeta} \\ \sigma_j \\ \dot{\zeta} \\ \dot{\zeta} \\ z\dot{\zeta} \\ \dot{\zeta} \end{array}$$

On définit maintenant les nœuds

$$\{\tau_1, \dots, \tau_m\} = \{t_0, t_f\} \cup \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} \cup \{t_1, \dots, t_s\}$$

## Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

---

Finalement on est conduit au problème aux valeurs limites suivant :

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)) = \begin{cases} F_0(t, z(t)) & \text{si } \tau_1 < t < \tau_2 \\ F_1(t, z(t)) & \text{si } \tau_2 < t < \tau_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{m-1}(t, z(t)) & \text{si } \tau_{m-1} < t < \tau_m \end{cases}$$

- $\forall j \in \{2, \dots, m-1\}$  ;  $\begin{matrix} -\dot{\tau}_j \\ \tau_j \\ +\dot{\tau}_j \\ \tau_j \\ \tau_j, z_j \\ r_j \end{matrix}$
- $r_m(\tau_m, z(\tau_1), z(\tau_m)) = 0$

où  $\tau_1 = t_0$  est fixé,  $\tau_m = t_f$ , et les  $r_j$  représentent les conditions intérieures ou limites précédentes.

**Remarque 2.5** On améliore la stabilité de la méthode en augmentant le nombre de nœuds. C'est là en effet le principe de la méthode de tir multiple, par opposition à la méthode tir simple où les erreurs par rapport à la condition initiale évoluent exponentiellement en fonction de  $t_f - t_0$ . Bien sûr dans la méthode de tir multiple, il y a beaucoup plus d'inconnues que dans la méthode de tir simple, mais éventuellement l'intégration du système (2.8) peut se paralléliser.

Posons  $\begin{matrix} +\dot{\tau}_j \\ \tau_j \\ +\dot{z}_j \\ z_j \end{matrix} = z_j$ , et soit  $\begin{matrix} +\dot{t} \\ t, \tau_{j-1}, z_{j-1} \\ z \end{matrix}$  la solution du problème de Cauchy.

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), z(\tau_{j-1}) = z_{j-1}$$

On a

## Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

---

$$\begin{array}{c}
 -\dot{\lambda} \\
 \tau_j \\
 \dot{\lambda} \\
 +\dot{\lambda} \\
 -\dot{\lambda}, \tau_{j-1}, z_{j-1} \\
 \tau_j \\
 z \dot{\lambda}
 \end{array}$$

Les conditions intérieures et frontières s'écrivent

$$\forall j \in \{2, \dots, m-1\} ; \quad \begin{array}{c}
 +\dot{\lambda} \\
 -\dot{\lambda}, \tau_{j-1}, z_{j-1} \\
 +\dot{\lambda} \\
 \tau_j, z_j \\
 \dot{\lambda} \\
 \tau_j, z \dot{\lambda} \\
 r_j \dot{\lambda}
 \end{array} \quad (2.9)$$

$$\begin{array}{c}
 +\dot{\lambda} \\
 -\dot{\lambda}, \tau_{m-1}, z_{m-1} \\
 +\dot{\lambda}, z(\tau_m) = 0 \\
 \tau_m, z_1 \\
 r_m \dot{\lambda}
 \end{array}$$

Posons maintenant

$$\begin{array}{c}
 +\dot{\lambda}, \tau_{m-1} \\
 T \\
 +\dot{\lambda}, \tau_1, z_2 \dot{\lambda} R^{(2n+1)(m-1)} \\
 z_1 \\
 \dot{\lambda} \\
 Z = \dot{\lambda}
 \end{array}$$

(où  $z \in R^{2n}$ ). Alors les conditions (2.9) sont vérifiées si :

$$\begin{aligned}
 & + \dot{z} \\
 - \dot{z}, \tau_{m-1}, z_{m-1}^{\dot{z}} \\
 & + \dot{z}, z(\tau_m^{\dot{z}}) \\
 & + \dot{z} \\
 - \dot{z}, \tau_1, z_1^{\dot{z}} \\
 \tau_2, z_2^{\dot{z}, z(\tau_2^{\dot{z}})} \\
 & \dot{z} \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \dot{z} \\
 & + \dot{z} \\
 - \dot{z}, \tau_{m-2}, z_{m-2}^{\dot{z}} \\
 \tau_m, z_{m-1}^{\dot{z}, z(\tau_{m-1}^{\dot{z}})} \\
 r_{m-1}(\dot{z}) = 0 \\
 \tau_m, z_1^{\dot{z}} r_2^{\dot{z}} \\
 & \dot{z} \\
 r_m^{\dot{z}} \\
 & \dot{z} \\
 & \dot{z} \\
 G(Z) = \dot{z}
 \end{aligned}$$

On s'est donc ramené à déterminer un zéro de la fonction  $G$ , qui est définie sur un espace vectoriel dont la dimension est proportionnelle au nombre de points de commutation et de points de la subdivision. L'équation  $G=0$  peut alors être résolue itérativement par une méthode du type Newton.

### 2.5.2 Rappels sur la méthode de Newton

Il s'agit de résoudre numériquement  $G(z)=0$ , où  $G(z):R^p \rightarrow R^p$  est une fonction de classe  $C^1$ . L'idée de base est la suivante : si  $z_k$  est proche d'un zéro  $z$  de  $G$ , alors

$$0 = G(z) = G(z_k) + dG(z_k) \cdot (z - z_k) + o(z - z_k)$$

On est alors amené à considérer la suite définie par récurrence

$$z_{k+1} = z_k - (dG(z_k))^{-1} \cdot G(z_k),$$

Un point initial  $z_0 \in R^p$  étant choisi, et on espère que  $z_k$  converge vers le zéro  $z$ .

Ceci suppose donc le calcul de l'inverse de la matrice Jacobienne de  $G$ , ce qui doit être évité numériquement. Il s'agit alors, à chaque étape, de résoudre l'équation

## Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

$$G(z_k) + dG(z_k) \cdot d_k = 0$$

Où  $d_k$  est appelée direction de descente, et on pose  $z_{k+1} = z_k + d_k$

Sous des hypothèses générales, l'algorithme de Newton converge, et la convergence est quadratique. Il existe de nombreuses variantes de la méthode Newton : méthode de descente, de quasi Newton, de Newton quadratique, etc.

Cette méthode permet, en général, une détermination très précise d'un zéro (d'une solution). Pour faire converger la méthode, il faut que le point initial  $z_0$  soit suffisamment proche de la solution recherchée  $z^*$ . Ceci suppose donc que pour déterminer le zéro  $z^*$ , il faut avoir au préalable une idée approximative de la valeur de  $z^*$ .

Du point de vue contrôle optimal, cela signifie que, pour appliquer une méthode de tir, il faut avoir une idée a priori de la trajectoire optimale cherchée. Ceci peut sembler paradoxal, mais il existe des moyens de se donner une approximation, même grossière de cette trajectoire optimale. Il s'agit là en tout cas d'une caractéristique majeure des méthodes de tir : elles sont très précises mais requièrent une connaissance a priori (plus au moins grossière) de la trajectoire optimale cherchée.

### 2.6.3 Méthodes directes

Les méthodes directes consistent à transformer le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie.

#### *Discrétisation totale : tir direct*

C'est la méthode la plus évidente lorsqu'on aborde un problème de contrôle, en se ramenant à un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie (ou problème de programmation linéaire) de la forme

$$\min_{Z \in C} F(Z) \quad (2.10)$$

$$\text{où } Z = (x_1, \dots, x_N, u_1, \dots, u_n), \text{ et } C = \{Z \mid g_i(Z) = 0, i \in \{1, \dots, r\}\}$$

$$g_j(Z) \leq 0, j \in \{r+1, \dots, m\}, \quad (2.11)$$

Plus précisément, la méthode consiste à choisir les contrôles dans un espace de dimension finie, et à utiliser une méthode d'intégration numérique des équations différentielles.

Considérons donc une subdivision  $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$  de l'intervalle  $[t_0, t_f]$ . Réduisons l'espace des contrôles en considérant (par exemple) des contrôles constants par morceaux

## Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

---

selon cette subdivision. Par ailleurs, choisissons une discrétisation de l'équation différentielle, par exemple choisissons ici pour simplifier la méthode d'Euler explicite. On obtient alors, en posant  $h_i \dot{t}_{i+1} - t_i$ , on obtient

$$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i).$$

La discrétisation précédente conduit donc au problème de programmation non linéaire :

$$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i), i = 0, \dots, N - 1$$

$$\min C(x_0, \dots, x_N, u_0, \dots, u_N),$$

$$u_i \in U, i = 0, \dots, N - 1$$

i.e un problème de type (2.10).

### **Remarque 2.6**

*Cette méthode est très simple à mettre en œuvre. De plus l'introduction d'éventuelles contraintes sur l'état ne pose aucun problème.*

Le tableau suivant résume les caractéristiques des méthodes directes et indirectes :

<i>Méthodes directes</i>	<i>Méthodes indirectes</i>
mise en œuvre simple sans connaissance à priori	connaissance à priori
peu sensible au choix de la condition initial	Très sensible au choix de la condition initiale
Facilité de la prise en compte de contraintes sur l'état	Difficulté théorique de la prise en compte de contraintes sur l'état
Contrôle (globalement) optimaux en boucles fermée	Contrôle (localement) optimaux en boucle ouverte
Précision numérique basse ou moyenne	Très grande précision numérique
Efficacité en basse dimension	Efficace en toute dimension
Gourmandise en mémoire	Calculs parallélisables
Problème des minima locaux	Petit domaine de convergence

## Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

### 2.7 Résolution d'un problème aux deux bouts

Considérons le problème terminal de contrôle optimal à instants fixés suivant :

$$\begin{aligned}
 & t_0, x(t_0), \\
 & g(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) \text{ objectif} \\
 (p) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \min \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \text{ dynamique} \\ u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, \text{ contrôle admissible} \\ \psi_0(t_0, x(t_0)) = 0 \in \mathbb{R}^{n_0}, \text{ conditions initiales} \\ \psi_f(t_f, x(t_f)) = 0 \in \mathbb{R}^{n_1}, \text{ conditions finales} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

#### 2.7.1 Problème aux deux bouts

La condition nécessaire d'optimalité (PMP) nous conduit à un système différentiel à  $2n$  équations avec  $n_0 + n_1$  paramètres ( $\mu_0$  et  $\mu_1$ ) et à  $2n + n_0 + n_1$  conditions initiales et terminales suivant :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\
 & t, x(t), u(t) \\
 u(t) &= h(p(t)) \\
 & \dot{h} \\
 h_0(x(t_0)) &= 0 \\
 & \dot{h} \\
 h_1(x(t_f)) &= 0 \\
 \dot{p}(t) &= -f_x^t(t, x(t), u(t))p(t) - g_x \dot{h} \\
 & (p) \dot{h}
 \end{aligned}$$

où  $u(t) = h(p(t))$  est donnée par la minimisation de l'Hamiltonien, et la fonction  $\phi$

$$\phi : (t_0, x_0, t_f, x_f, \mu_0, \mu_1) \mapsto g(t_0, x_0, t_f, x_f) + \langle \psi_0(t_0, x(t_0)), \mu_0 \rangle + \langle \psi_f(t_f, x(t_f)), \mu_1 \rangle .$$

En posant  $y(t)$  le couple état-état adjoint  $(y(t) = (x(t), p(t)))$  et  $\varphi$  la dynamique du couple état-état adjoint donnée par le système Hamiltonien et en éliminant les paramètres,  $\mu_0$  et  $\mu_1$  nous sommes conduits à un problème aux deux bouts TPBVP (Two Points Boundary Value Problem) suivant :

## Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

---

$$(TPBVP) \begin{cases} \dot{y}(t) = \phi(y) = \varphi(t, y(t)) \text{ pp sur } [t_0, t_f] \\ c_0(t_0, y(t_0)) = 0 \text{ conditions aux limites en } t_0 \\ c_f(t_f, y(t_f)) = 0 \text{ conditions aux limites en } t_f \end{cases}$$

### Remarque 2.7

Ces conditions aux limites  $c_0$  et  $c_f$  correspondent aux conditions de transversalité mentionnées ci-dessus, qui contiennent les conditions initiales et finales de (P), en plus des conditions sur l'état adjoint  $P$ .

### Problème à valeur initiale et méthode de tir

Nous allons maintenant définir la méthode de tir pour résoudre ce problème aux deux bouts.

Posons  $y(\cdot; z)$  la solution du système à valeur initiale IVP (initial value problem) suivant :

$$(IVP) \begin{cases} \dot{y}(t) = \phi(y) = \varphi(t, y(t)) \text{ pp sur } [t_0, t_f] \\ y(t_0) = z \text{ valeur initiale} \end{cases}$$

On introduit maintenant une application  $G$  appelée fonction de tir, qui à la valeur initiale  $z$  associe la valeur des conditions aux limites en  $t_f$  pour la solution correspondante de (IVP), définie par :

$$G: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$z \mapsto G(z) = \begin{pmatrix} R_0(z) \\ R_f(y(t_f; z)) \end{pmatrix}$$

Trouver un zéro de la fonction de tir  $G$  est alors équivalent à la résolution de problème (TPBVP), et donne ainsi une solution de (P).

### Remarque 2.8

L'algorithme de résolution numérique de problème TPBVP sera complètement défini si on se donne :

1. L'algorithme de résolution de  $G(z) = 0$
2. L'algorithme d'intégration d'un système différentiel à valeur initiale pour calculer la fonction de tir  $G$ .

## Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

---

### 2.8 Application numérique : résolution du problème du pendule inversé

Nous présenterons dans cette partie, en premier lieu un modèle non linéaire d'un système classique utilisé en automatique, plus particulièrement dans les applications de commande : le pendule inversé qui est une plateforme d'essai qui pose un problème d'instabilité à l'angle

$$\theta = \pi$$

Par la suite nous développerons un modèle dynamique qui sera présenté sous forme d'équations différentielles déduites à partir des équations de Lagrange. Puis, nous appliquerons la méthode de tir simple pour résoudre le problème en temps minimum.

#### 2.8.1 Description et intérêt d'étude d'un pendule inversé

Le pendule inversé est un pendule simple, il est composé d'une tige d'aluminium à l'extrémité de laquelle est vissée une masselotte de forme cylindrique. C'est un système instable, et possède des non linéarités non négligeables dues à sa structure dynamique et aux forces de friction. C'est pourquoi il est souvent utilisé dans des laboratoires de commandes pour illustrer et vérifier l'exécution et l'efficacité de divers (lois) techniques de commandes.

L'étude du pendule inversé a beaucoup d'importance. Il y a plusieurs raisons à cela :

- L'homme est un pendule double inversé dont les deux axes de rotation principaux sont les chevilles et les hanches. Quand nous sommes en position debout, nos articulations travaillent sans arrêt pour nous y maintenir. Les spécialistes qui travaillent à la réalisation de prothèses pour les hanches sont amenés à utiliser le modèle du pendule double inversé pour calculer l'ensemble des contraintes qui sont soumises à la prothèse.
- Dans le même ordre d'idée, la robotique utilise ce genre de concept.
- On voit apparaître des moyens de locomotion dotés de deux roues montées sur un même axe sur lequel on est en position debout. On accélère en se penchant en avant et en ralenti en se penchant en arrière. Le système est le même que le pendule inversé.
- Les étudiants en automatique, en robotique... font des laboratoires de recherche avec ce genre de dispositif. Par ce qu'ils font intervenir beaucoup de notions intéressantes pour eux : programmation, automatisation, mécanique....

#### 2.8.2 Le problème du contrôle optimal du pendule

Le but de la manipulation du pendule consiste à le maintenir en équilibre vertical en haut, c'est-à-dire, d'amener le pendule de la position d'équilibre stable  $x_0 = (0, 0)$ , à la position d'équilibre instable  $x_1 = (\pi, 0)$  en temps minimum.

### 2.8.3 Modélisation du système à un degré de liberté

Soient :

$\theta$  : L'angle formé entre la tige et la verticale ;

$m$ : La masse du pendule ;

$l$  : La longueur de la tige (1m) ;

$g$  : Intensité de la pesanteur ( $10\text{m/s}^2$ ) ;

On note les dérivées temporelles par un point :

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \text{ et } \ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}$$

Pour modéliser le système on utilise la méthode de Lagrange définie par les équations suivantes :

$$\begin{cases} L = E_c - E_p \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\xi}_j} = F_j \end{cases}$$

$\xi$  Degré de liberté, dans ce cas  $\theta(t)$ ,

$D$  Energie dissipée par frottement,

$F$  Force généralisée dans le sens du degré de liberté,

$E_c$  Energie cinétique,

$E_p$  Energie potentielle

L'énergie cinétique du pendule est donnée par :

$$E_c = \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2}$$

L'énergie potentielle du centre de gravité de la tige:

$$E_p = mgl(1 - \cos\theta)$$

**Equation de Lagrange pour le degré de liberté**  $\xi(t) = \theta(t)$

L'équation de Lagrangien du système est :

$$\begin{cases} L = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl(1 - \cos\theta) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = F \end{cases}$$

La dérivée partielle du Lagrangien suivant  $\dot{\theta}$  et  $t$  s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (ml^2\dot{\theta} + mgl\sin\theta(t)) = F(t)$$

$$\implies ml^2\ddot{\theta}(t) + mgl\cos\theta(t) = F(t)$$

La dynamique du second ordre de l'angle d'écartement du pendule par rapport à la verticale, en commandant le pendule par  $F(t)$  est:

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{-g}{l} \sin\theta(t) + \frac{1}{ml^2} F(t) \quad (2.12)$$

En donnant la contrainte sur la commande :

$$|F| = F_0, \quad \text{où } F_0: \text{ est une constante donnée}$$

posons :

$$u = \frac{F}{F_0}, k = \frac{F_0}{mgl}, (2.13)$$

avec  $|u(t)| \leq 1$ .

Réécrivant l'équation (2.12)

$$\dot{\theta} = -g \sin \theta + kgu(t) \quad (2.14)$$

### 2.8.3 Application du principe du maximum

Dont le but d'amener le pendule modélisé par  $\dot{\theta} = -g \sin \theta + kgu(t)$  du point initial  $x_0$  au point final  $x_f$  en temps minimum, on reformule le problème de contrôle optimale qui minimise la fonction suivante :

$$J(u) = \int_0^{t_f} dt = t_f \rightarrow \min$$

Dans l'espace de phases, on pose :

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = -g \sin x + kgu(t),$$

avec  $(\theta = x, \dot{\theta} = \dot{y})$

Le problème à résoudre est égal à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min (J(u)) = \int_0^{t_f} dt = t_f \\ \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g \sin x + kgu(t), \\ |u(t)| \leq 1, t \in [0, t_f], \\ (x(0), y(0)) = (0, 0), \\ (x(t_f), y(t_f)) = (\pi, 0), \end{array} \right.$$

avec  $k = 0.5, g = 10 \text{ m/s}^2$

Dans ce cas le Hamiltonien s'écrit

## Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

---

$$H(t, x, p, u) = (p_1, p_2) \begin{pmatrix} y(t) \\ -g \sin x(t) + kg u(t) \end{pmatrix},$$

$$H(t, x, p, u) = p_1 y(t) - g p_2 \sin x(t) + kg p_2 u(t).$$

Comme  $p_2$  ne s'annule sur aucun intervalle, on en déduit que presque partout,

$$\begin{matrix} p \\ (\dot{x}, \dot{z}) \\ u(t) = \text{sign } \dot{z} \end{matrix}$$

Lest états adjoints sont donnés par

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = g p_2 \cos x(t), \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_1, \end{cases}$$

### *Application de la méthode de tir*

La méthode de tir simple permet de trouver la commande et la trajectoire associée, là où le principe du maximum s'avère impuissant.

Il existe une fonction  $z(t) = (x(t), p(t))$  définie dans  $U$ , et les conditions initiales, finales et les conditions de transversalités, se mettent sous la forme :

$$h(z(t), p(t))$$

définit toutes les trajectoires optimales, et d'après le principe du maximum on a

$$u(t) = \text{sign}(p_2(t))$$

La connaissance de la fonction de tir permet de considérer que se problème optimal est entièrement résolu mathématiquement.

Nous avons le problème aux deux bouts suivant :

## Chapitre 2 : méthodes de contrôle optimal et application

---

$$(TPBVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -g \sin x(t) + kgu(t) \\ \dot{p}_1(t) = gp_2(t) \cos x(t) \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t) \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \\ x(t_f) = \pi, y(t_f) = 0 \end{cases}$$

En posant  $z(t) = (x(t), y(t), p_1(t), p_2(t)) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t))$ . Résoudre le problème (TPBVP) est alors équivalent à rechercher un zéro de l'équation  $G(z) = 0$  où la fonction  $G$  est la fonction de tir associée à notre problème et est défini par :

$$G: R^4 \rightarrow R^4$$

$$z \mapsto G(z) = z(t, 0, h),$$

où  $z(t, 0, h)$  est la solution du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = -g \sin z_1(t) + gku(t) \\ \dot{z}_3(t) = gz_3(t) \cos z_1(t) \\ \dot{z}_4(t) = -z_3(t) \\ z_1(0) = 0; z_2(0) = 0, \\ z_3(0) = h_1 \in R, z_4(0) = h_2 \in R. \end{cases}$$

Soit  $z(t, 0, 0, h_1, h_2)$  une solution du système au temps  $t$  avec les conditions initiales  $(0, 0, h_1, h_2)$

Dans notre cas, le temps final  $t_f$  est libre, on doit avoir :

$$z(t_f, 0, 0, h_1, h_2) = \begin{pmatrix} z_1(t_f, 0, 0, h_1, h_2) \\ z_2(t_f, 0, 0, h_1, h_2) \\ z_3(t_f, 0, 0, h_1, h_2) \\ z_4(t_f, 0, 0, h_1, h_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ \text{libre} \\ \text{libre} \end{pmatrix}$$

On définit la fonction de tir suivante :

$$z_1(\dot{z}_1) - \pi \frac{z_2(t_f)}{H(t_f)}$$

$$G(z) = \dot{z}$$

Qui est égale à

$$G(z) = \begin{pmatrix} z_1(t_f, 0, 0, h_1, h_2) - \pi \\ z_2(t_f, 0, 0, h_1, h_2) - 0 \\ z_2(t_f, 0, 0, h_1, h_2) z_3(t_f, 0, 0, h_1, h_2) - g z_4(t_f, 0, 0, h_1, h_2) \sin z_1(t_f, 0, 0, h_1, h_2) + |k g z_4(t_f, 0, 0, h_1, h_2) u(t)| - 1 \end{pmatrix}$$

Car  $(x(t_f), y(t_f)) = (\pi, 0)$  et  $\max H = z_3(t) z_2(t) - g z_4(t) \sin z_1(t) + |k g z_4(t) u(t)| - 1$

le fait que le temps final est libre nous donne :

$$\begin{aligned} (\dot{z}_1) \sin z_1(t_f) + |k g z_4(t_f) u(t_f)| - 1 &= 0 \\ H(t_f) = z_3(t_f) z_2(t_f) - g z_4 \dot{z}_1 & \end{aligned}$$

### 2.8.4 Résolution à l'aide du logiciel MATLAB

MATLAB est une abréviation de MATrix LABoratory écrit à l'origine, en fortran, par C.Moler.

MATLAB est un logiciel commercial de calcul interactif. Il permet de réaliser des simulations numériques basées sur des algorithmes d'analyse numérique. Il peut donc être utilisé pour la résolution approchée d'équations différentielles, d'équations aux dérivées partielles ou de systèmes linéaires, ... etc. avec ses fonctions spécialisées, MATLAB peut être considéré comme un langage de programmation adapté pour les problèmes scientifiques.

Le programme suivant est effectué sous MATLAB, on utilise la méthode de Newton, implémentée dans la Toolbox Optim de MATLAB, il s'agit de la routine fsolve.m.

## Chapitre2 : méthodes de contrôle optimal et application

---

```
function penduleinverse

% le problème du pendule inversé résolu par la méthode de tir simple,
% en utilisant fsolve, pour le système de contrôle
%  $\dot{x}=y$ ,  $\dot{y}=-10*\sin y+5*u$ ,  $|u|\leq 1$ .
% pour aller de la position stable (0,0) à la position instable ( $\pi$ , 0) en temps minimal.

clear all ; clf ; clc ; format long ;

global x0 ; x0=[0;0] ;
P0=[1;1] ; tf=7;

% Calcul de P0,tf
options=optimset('Display','iter','LargeScale','on');
[P0tf, FVAL, EXITFLAG]=fsolve(@F,[P0;tf],options);

EXITFLAG % 1 si la methode converge, -1 sinon

options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9) ;
[t,z] = ode45(@sys,[0;P0tf(3)],[x0;P0tf(1);P0tf(2)],options) ;
subplot(221) ; plot(t,z(:,1)) ; axis square ; title('Angle(rad)') ;
subplot(222) ; plot(t,sign(z(:,4))) ; axis square ; title('Contrôle') ;
subplot(223) ; plot(z(:,1),z(:,2)) ; axis square ; title('vitesse-angle') ;
subplot(224) ; plot(t,z(:,2)) ; axis square ; title('vitesse angulaire(rad/s)') ;
t(end)          %2.39831558034425
z(1,3)
z(1,4)

%-----

function Xzero=F(X)
global x0 ;
options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9) ;
[t,z] = ode113(@sys,[0;X(3)],[x0;X(1);X(2)],options) ;
HamEnd = z(end,3)*z(end,2)-10*z(end,4)*sin(z(end,1))+5*abs(z(end,4))-1 ;
Xzero = [ z(end,1)-pi
          z(end,2)
          HamEnd   ] ;
```

## Chapitre2 : méthodes de contrôle optimal et application

%-----

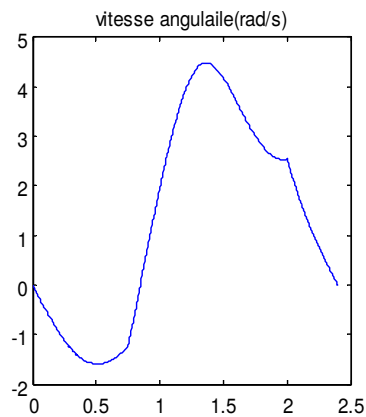
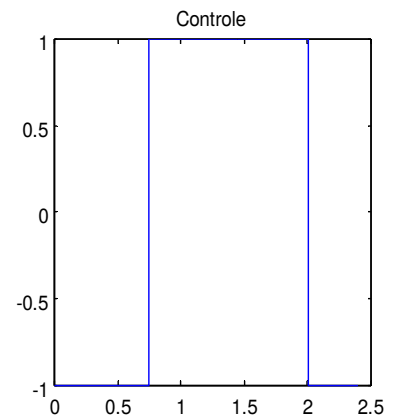
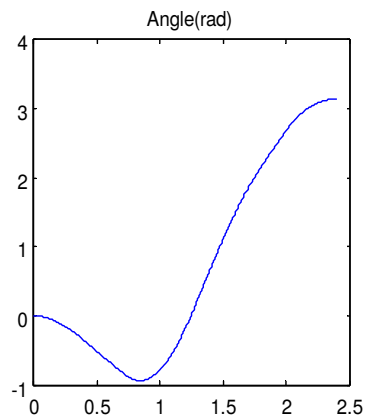
```
function zdot=sys(t,z)
```

```
u=sign(z(4)) ;
```

```
zdot = [ z(2)
```

```
    -10*sin(z(1))+5*u  
    10*z(4)*cos(z(1))  
    -z(3) ] ;
```

La résolution obtenu grâce à MATLAB est donnée ci-dessus



## Chapitre2 : méthodes de contrôle optimal et application

---

*Figure2.1 : la commande optimale pour amener le pendule du point  $(0,0)$  au point  $(\pi, 0)$*

### **2.9 Conclusion**

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à la théorie de contrôle optimal où nous avons développé certains éléments de base de cette théorie, en portant intérêt particulier à la contrôlabilité et les méthodes de résolution. Et à la fin on a résolu un problème de contrôle optimal en temps minimum avec une méthode indirecte (tir simple) basé sur le principe du maximum. Un handicap majeur de cette méthode est le choix du point initiale, d'où il faut être capable de deviner de bonne conditions initiales pour faire converger la méthode tir.

# Chapitre 1

*Rappels sur les équations différentielles*

## Chapitre 2

*Méthodes de Contrôle optimal et application*

## Bibliographie

---

- [1] Adrian Biran et Moshe Breiner. *MATLAB pour l'ingénieur*. Version 6 et 7, Pearson Education 2004.
- [2] F.L.Chernousko, S.A.Reshmin. *Time optimal swing-up Feedback Control of a pendulum*. Springer Science + Business Media B.V 2006.
- [3] Jean-Pierre Denailly. *Analyse numérique et équations différentielles. EDP sciences.2006*.
- [4] N.Dhang and S.Majumdar. *Optimal Control of inverted pendulum using finite element method*. Pergamon 1997.
- [5] Lawrence C.Evans. *An introduction to mathematical optimal control theory*. Minneapolis, Minnesota, August 1967.
- [6] Jean-Max Huré, D.Pelat. *Méthodes numériques, élément d'un premier parcours algorithmes*, Paris 2002.
- [7] Jean-Thierry Lapresté. *Introduction à MATLAB*, ellipses édition marketing S.A 2005.
- [8] E.B.Lee et L.Markus. *Foundation of optimal control theory*. Minneapolis Minnesota, August 1967.
- [9] Pierre Martinon. *Résolution numérique de problèmes de contrôle optimal par une méthode homotopique simpliciale*. Thèse de doctorat 2005.
- [10] J.Quinet. *Cours élémentaire de mathématiques supérieures*. Tome 4, Equation différentielles, Dunod 6<sup>ième</sup> édition 1977.
- [11] S.A.Reshmin. *Finding the principal Bifurcation value of the maximum control torque in the problem of optimal control synthesis for a pendulum*, Pleiades Publishing ltd 2008.

- [12] Swiesh P.Sethi, Gerald L.Thompson. *Optimal Control theory, Application to management science and economics*. Suresh P.Sethi, Gerald L.Tompson 2<sup>nd</sup> edition.2006
- [13] Emmanuel Trélat. *Contrôle optimal : théorie et application*. Vuibert, collection mathématique concrètes 2005.

## Conclusion générale

---

L'objectif de ce travail est de trouver la commande optimale pour amener le pendule inversé de son état d'équilibre stable, à l'état d'équilibre instable en temps minimum.

Pour ce faire, on a présenté d'abord une introduction générale aux équations différentielles, car la modélisation d'un système de contrôle peut avoir recours à des équations différentielles, et on a abordé quelques méthodes de résolution des problèmes de contrôle optimale (méthodes directes et indirects). Et pour résoudre le problème du pendule, on a choisit une méthode indirecte (tir simple) basée sur le principe du maximum qui nous a permet d'obtenir un problème aux valeurs limites, qu'on peut résoudre par la méthode de tir. Les méthodes indirectes sont réputées pour leur rapidité et leur précision dans le traitement des problèmes de contrôle optimal. En effet, ces méthodes transforment le problème de contrôle original en un problème qui consiste à résoudre un système d'équations différentielles non linéaire. La contrepartie à la précision de celles-ci est en générale la difficulté d'initialisation des algorithmes correspondants, En générale nous traitons cette difficulté par une démarche homotopique (ou continuation) qu'on trouve dans [10].

En perspective de ce travail, il est souhaitable de raffiner l'étude pour l'application de cette méthode à des exemples pratique plus complexe, comme par exemple :

- Etude du problème du pendule inversé sur un chariot.
- Etude des problèmes avec contraintes sur l'état.