République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
Université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou

Faculté des Sciences
Département des Mathématiques

Mémoire de MASTER II

Spécialité : MATHEMATIQUES

Option : Modélisation Mathématique

Intitulé du mémoire

Analyse asymptotique d'un problème aux limites

Réalisé par :

ABBOUD Zakia

Dirigé par :

M^{me} **RAHMANI Leila**

Devant le jury d'examen composé de :

M^r MORSLI	Mohamed	Professeur	UMMTO	Président
M^{me} RAHMANI	Leila	Professeur	UMMTO	Rapporteur
M^{me} TALEB	Lynda	MCB	UMMTO	Examinatrice
M^r MENGUELTI	Ali	MAA	UMMTO	Examinateur

Promotion : 2017 - 2018

Remerciements

Je remercie vivement Mr. M.MORSLI d'avoir accepté de présider le jury. Je remercie également Mme. L.TALEB et Mr. A. MENGUELTI d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nos sincères remerciements à notre chère promotrice, Madame ***Rahmani. L*** *qui nous a fait l'honneur de diriger ce travail, sa gentillesse et ses précieux conseils furent d'un apport considérable.*

Enfin, j'exprime mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, particulièrement à Melle Hanifa MOKHTARI dont l'aide a été précieuse.

Merci infiniment à tous.

Table des matières

Introduction générale

La plupart des phénomènes physiques sont modélisés par des équations ou des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Dans de nombreuses situations, ces modèles font intervenir un ou plusieurs paramètres, qui peuvent soit affecter les différents termes de l'équation ou être liés à la géométrie du domaine. Ces paramètres, bien que très petits, ont souvent une grande influence sur la solution : en les négligeant, on obtient des équations plus simples que l'on sait résoudre, mais parfois, la solution ainsi obtenue ne représente pas la solution exacte dans tout le domaine et certaines conditions aux limites sont perdues. On dit alors qu'il s'agit de phénomène de perturbation singulière.
Quand le petit paramètre est lié au domaine sur lequel sont posées les équations du problème, des difficultés numériques apparaissent lors de la simulation pour la méthode des éléments finis. On fait alors appel aux méthodes asymptotiques afin de simplifier le modèle et de contourner ces difficultés.
Dans ce mémoire, nous nous intéressons à ce type de problèmes. Après un bref rappel d'analyse fonctionnelle, nous introduisons un problème de transmission dépendant d'un petit paramètre ε, pour lequel on effectue une analyse asymptotique. La suite, qui représente l'essentiel de notre travail, est consacrée à l'étude asymptotique de la propagation de la chaleur dans une plaque hétérogène, l'épaisseur de la plaque étant supposée très petite par rapport aux autres dimensions. Cette étude a été faite dans l'article : (voir [2]).
A.C. Carius, A.L. Madureira-Hierarchical modeling of the heat equation in a heterogeneous plate, Mathematical Methods in the Applied Sciences-Vol 38, issue 15, 2014.

Chapitre 1

Éléments d'analyse fonctionnelle et introduction aux perturbations singulières

1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

Nous rappelons ici quelques éléments d'analyse fonctionnelle nécessaires pour notre étude.

1.1.1 Espaces de Sobolev

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 1.1. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \, ; \, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \, , \quad \forall \, i = 1, 2 \cdots \mathrm{n} \right\},$$

où les dérivées $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ sont prises au sens des distributions.
On pose :

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \, .$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p},$$

ou parfois de la norme équivalente $\left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{n} \left\| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$ $\left(\text{si } 1 \leq p < \infty\right)$.
L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2},$$

la norme associée étant :

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}$.

Définition 1.2. Soit $m \geq 2$ un entier et soit p un réel, $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'espace :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{m-1,p}(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall\, i = 1, 2, \cdots, n\right\}.$$

On pose :

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

L'espace $W^{m,p}$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{\alpha=1}^{m}\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)},$$

$D^\alpha u = \dfrac{\partial^\alpha u}{\partial^{\alpha_1}x_1.\partial^{\alpha_2}x_2\cdots\partial^{\alpha_m}x_m}$ est la dérivée de u au sens des distributions, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$.

Théorème 1.1. *(voir [2]) Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors :*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Longleftrightarrow u = 0 \quad sur \quad \partial\Omega.$$

Proposition 1.1. *(Inégalité de Hôlder). Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$. Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int |f.g| \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^p}.$$

Remarque 1.1. Lorsque $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

1.1.2 Inégalités de Poincaré

Théorème 1.2. *(voir [2]) Si Ω est borné, il existe une constante $C > 0$ pour laquelle nous avons l'inégalité*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Théorème 1.3. *(Lax-Milgram). Soient V un espace de Hilbert réel de produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et de norme $\|.\|$.*

Considérons une formulation variationnelle du type :

$$\begin{cases} Trouver \;\; u \in V, \\ a(u,v) = l(v), \qquad \forall\, v \in V. \end{cases}$$

On suppose que :

1) *l est une forme linéaire continue sur V i.e $v \longrightarrow l(v)$ est linéaire de V dans $\mathbb{R}$ et il existe $C > 0$ tel que :*

$$|l(v)| \leq C \|v\|, \quad pour \quad tout \quad v \in V.$$

2) *a est une forme bilinéaire sur V.*

3) *a est continue, c'est à dire il existe $M > 0$ tel que :*

$$|a(u,v)| \leq M \|u\| \|v\|, \quad pour \quad tout \quad v \in V.$$

4) *a est coércive (ou elliptique) c'est à dire, il existe $\alpha > 0$ tel que :*

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in V.$$

Alors il existe un unique élément $u \in V$ tel que :

$$a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V.$$

Proposition 1.2. *On considère les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, et on suppose que la forme bilinéaire a est symétrique :*

$$a(u,v) = a(v,u),$$

soit $J(v)$ l'énergie définie par :

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - l(v).$$

Soit u la solution unique de la formulation variationnelle $a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V$. Alors, u vérifie :

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

1.1.3 Traces

Théorème 1.4. *(Trace). Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. On définit l'application trace γ_0*

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega) \cap \mathcal{C}\left(\partial\overline{\Omega}\right) \\ v &\longrightarrow \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Cette application se prolonge par continuité en une application linéaire de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, notée encore γ_0. En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$, on a :

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ce théorème permet de donner un sens à la valeur d'une fonction H^1 sur le bord $\partial\Omega$.

Théorème 1.5. *(Formule de Green). Soit Ω un ouvert borné régulier. Si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, elles vérifient :*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} u(x)\,v(x)\,\eta_i(x)\,ds,$$

où $\eta = (\eta_i)_{1\leq i\leq N}$ est la normale unité extérieure à $\partial\Omega$.
De même, si $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega \Delta u v dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds.$$

1.2 Introduction aux perturbations singulières

La plupart des phénomènes physiques sont régis par des problèmes aux limites composés d'équations aux dérivées partielles et de conditions au bord. Ces équations peuvent parfois contenir un petit paramètre noté "ε", qui peut avoir une grande influence sur la solution du problème. Les méthodes asymptotiques consistent alors à l'étude de l'effet de ce paramètre.
Souvent, le paramètre "ε" intervient d'une façon telle que l'ordre de l'équation pour $\varepsilon = 0$ est plus petit que celui de celle-ci quand $\varepsilon > 0$. Il y a alors perte de conditions aux limites quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. Dans ce cas, on dit qu'il y a perturbation singulière. Ceci est illustré par l'exemple ci-dessous.

Exemple

Soit le problème aux limites :

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2} \quad 0 < \varepsilon < 1, \\ f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \end{cases} \tag{1.1}$$

où ε est un petit paramètre. Il s'agit de trouver le comportement de la solution $f(y)$ du problème (1.1) lorsque le paramètre ε tend vers 0.

Résolution directe :

La solution générale de l'équation (1.1) est :

$$f = f_0 + f_p,$$

où f_0 est la solution de l'équation homogène et f_p est une solution particulière.
La solution particulière est :

$$f_p = \frac{1}{2}y.$$

La solution de l'équation homogène est :

$$f_0 = Ae^{-y/\varepsilon} + B.$$

La solution générale de l'équation initiale est :

$$f(y) = Ae^{-y/\varepsilon} + B + \frac{1}{2}y. \tag{1.2}$$

L'unique solution du problème (1.1) est :

$$f(y) = \frac{1 - e^{-y/\varepsilon}}{2\left(1 - e^{-1/\varepsilon}\right)} + \frac{y}{2}.$$

On observe que plus ε est petit, plus on déplace la courbe solution de (1.1) vers une droite d'équation : $(y+1)/2$.
On a :

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} f(y) = \frac{y+1}{2}.$$

Si on annule ε dans l'équation (1.1) on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}, \\ f(0) = 0 \quad f(1) = 1 \cdot . \end{cases}$$

Donc

$$f(y) = \frac{y+1}{2}.$$

On voit que l'équation (1.1) change de type, passant d'une équation d'ordre 2 à une équation d'ordre 1, et la seule condition en $y = 1$ est vérifiée et la condition en $y = 0$ n'est pas satisfaite. On est donc en présence d'une perturbation singulière.

Chapitre 2

Analyse asymptotique d'un Problème de transmission

2.1 Formulation du problème

Soit $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ comme indiqué sur la figure 2.1. On désigne par S la frontière commune à Ω_0 et Ω_1 et par Γ la partie restante de la frontière de Ω_0.
On considère le problème de transmission suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f_0 & \text{dans } \Omega_0, \\ -\varepsilon \Delta u_1 = f_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ u_0 = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ u_0 = u_1 & \text{sur } S, \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial \nu_0} = \varepsilon \dfrac{\partial u_1}{\partial \nu_1} & \text{sur } S, \end{cases} \tag{2.1}$$

avec $\nu_0 = -\nu$ et $\nu_1 = \nu$, c'est à dire $\nu_0 = -\nu_1$.

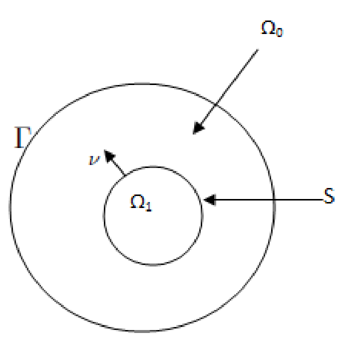

Fig. 2.1 –

2.2 Formulation variationnelle du problème (2.1)

Posons $\Omega = \Omega_0 \cup \overline{\Omega}_1$.
Dans l'ordre d'écrire la formulation variationnelle du problème (2.1), On introduit l'espace fonctionnel suivant :

$$V = \Big\{ (v_0, v_1) \in H^1(\Omega_0) \times H^1(\Omega_1) \ / \ v_0 = v_1 \quad \text{sur} \quad S, \, v_0 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \Big\}.$$

On multiplie la première équation du problème (2.1) par une fonction test v_0 et la deuxième équation par une fonction test v_1, on obtient :

$$\int_{\Omega_0} -\Delta u_0 v_0 dx + \int_{\Omega_1} -\varepsilon \Delta u_1 v_1 dx = \int_{\Omega_0} f_0 v_0 dx + \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx.$$

En utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0 \nabla v_0 dx - \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} v_0 ds + \varepsilon \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla v_1 dx - \varepsilon \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} v_1 ds = \int_{\Omega_0} f_0 v_0 dx + \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx,$$

d'où

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0 \nabla v_0 dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} v_0 ds + \int_{S} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} v_0 ds + \varepsilon \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla v_1 dx - \varepsilon \int_{S} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} v_1 ds = \int_{\Omega_0} f_0 v_0 dx + \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx.$$

En utilisant le fait que $u_0 = 0$ sur Γ, on aura :

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0 \nabla v_0 dx + \varepsilon \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla v_1 dx + \int_{S} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \right) v_0 ds = \int_{\Omega_0} f_0 v_0 dx + \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx,$$

et comme $\nu_0 = -\nu_1$, on écrit :

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0 \nabla v_0 dx + \varepsilon \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla v_1 dx = \int_{\Omega_0} f_0 v_0 dx + \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx.$$

La formulation variationnelle du problème (2.1) est donnée par :

$$\begin{cases} \text{Trouver} \quad (u_0, u_1) \in V \quad \text{telle que,} \\ a_0(u_0, v_0) + \varepsilon a_1(u_1, v_1) = l(v_0) + l(v_1), \quad \forall (v_0, v_1) \in V, \end{cases} \tag{2.2}$$

avec

$$a_0(u_0, v_0) = \int_{\Omega_0} \nabla u_0 \nabla v_0 dx, \qquad a_1(u_1, v_1) = \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla v_1 dx,$$
$$l(v_0) = \int_{\Omega_0} f_0 v_0 dx, \qquad l(v_1) = \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx,$$

et

$$a(u, v) = a_0(u_0, v_0) + \varepsilon a_1(u_1, v_1),$$
$$l(v) = l(v_0) + l(v_1).$$

2.3 Existence et unicité de la solution

Grâce à la théorie de Lax-Milgram, la solution du problème (2.1) existe et unique. En effet :

1 **Continuité de la forme linéaire** $l(.)$

Nous avons, pour tout v dans V :

$$\begin{aligned}
|l(v)| &= |l(v_0)| + |l(v_1)| \\
&\leq \int_{\Omega_0} |f_0 v_0|\, dx + \int_{\Omega_1} |f_1 v_1|\, dx \\
&\leq \|f_0\|_{L^2(\Omega_0)} \|v_0\|_{L^2(\Omega_0)} + \|f_1\|_{L^2(\Omega_1)} \|v_1\|_{L^2(\Omega_1)} \\
&\leq \left[\|f_0\|_{L^2(\Omega_0)} + \|f_1\|_{L^2(\Omega_0)} \right] \left[\|v_0\|_{L^2(\Omega_0)} + \|v_1\|_{L^2(\Omega_1)} \right] \\
&= \left[\|f_0\|_{L^2(\Omega_0)} + \|f_1\|_{L^2(\Omega_0)} \right] \|v\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

d'où la continuité de la forme linéaire $l(.)$ sur V.

2. **Continuité de la forme bilinéaire** $a(.,.)$ **:**

Nous avons, pour (u, v) dans V :

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= |a_0(u_0,v_0) + \varepsilon a_1(u_1,v_1)| \\
&\leq \int_{\Omega_0} |\nabla u_0 \nabla v_0|\, dx + \varepsilon \int_{\Omega_1} |\nabla u_1 \nabla v_1|\, dx \\
&\leq \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega_0)} \|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega_0)} + \varepsilon \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega_1)} \|\nabla v_1\|_{L^2(\Omega_1)} \\
&\leq \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega_0)} \|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega_1)} \|\nabla v_1\|_{L^2(\Omega_1)} \qquad (\text{car} \quad \varepsilon < 1) \\
&\leq \left[\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega_1)}\right] \left[\|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\nabla v_1\|_{L^2(\Omega_1)}\right] \\
&\leq \left[\|u_0\|_{H^1(\Omega_0)} + \|u_1\|_{H^1(\Omega_1)}\right] \left[\|v_0\|_{H^1(\Omega_0)} + \|v_1\|_{H^1(\Omega_1)}\right] \\
&= \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

d'où la continuité de la forme bilinéaire $a(.,.)$ sur V.

3. **Coercivité de la forme bilinéaire** $a(.,.)$ **:**

Nous avons, pour tout u dans V :

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= a_0(u_0,u_0) + \varepsilon a_1(u_1,u_1) \\
&= \int_{\Omega_0} \nabla u_0 \nabla u_0 dx + \varepsilon \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla u_1 dx \\
&= \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \varepsilon \|\nabla u_1\|^2_{L^2(\Omega_1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\geq \varepsilon\left[\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega_0)}+\|\nabla u_1\|^2_{L^2(\Omega_1)}\right] \qquad (\text{car} \quad \varepsilon<1)\\&=\varepsilon\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Comme $u\in H^1_0(\Omega)$, alors l'inégalité de Poincaré permet de conclure que :

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)}=\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\left(1+C^2\right)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

d'où

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\geq\frac{1}{1+C^2}\|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Donc

$$a(u,u)\geq\frac{\varepsilon}{1+C^2}\|u\|^2_{H^1(\Omega)},$$

d'où la coercivité de $a(.,.)$.
le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1).
Le problème (2.1) équivaut à la recherche de $u=u_\varepsilon\in V$ solution de :

$$a_0(u_\varepsilon,v)+\varepsilon a_1(u_\varepsilon,v)=(f,v)\quad\forall v\in V, \tag{2.3}$$

avec

$$\begin{aligned}&(f,v)=\int_\Omega fvdx,\\&u_i=\text{restriction de } u_\varepsilon \text{ à } \Omega_i,\quad i=0,1.\end{aligned}$$

En effet, vérifions que si u_ε est solution de (2.3), alors $\{u_0,u_1\}$ est solution de (2.1).
On a :

$$a_0(u_\varepsilon,v)+\varepsilon a_1(u_\varepsilon,v)=\int_{\Omega_0}\nabla u_0\nabla v_0dx+\varepsilon\int_{\Omega_1}\nabla u_1\nabla v_1dx,$$

En utilisant la formule de Green, on obtient :

$$a_0(u_\varepsilon,v)+\varepsilon a_1(u_\varepsilon,v)=-\int_{\Omega_0}\Delta u_0v_0dx+\int_{\partial\Omega_0}\frac{\partial u_0}{\partial\nu}v_0ds-\varepsilon\int_{\Omega_1}\Delta u_1v_1dx+\varepsilon\int_{\partial\Omega_1}\frac{\partial u_1}{\partial\nu}v_1ds,\quad\forall v\in V.$$

En particulier, pour $v_0\in\mathcal{D}(\Omega_0)$ et $v_1\in\mathcal{D}(\Omega_1)$, on aura :

$$a_0(u_\varepsilon,v)+\varepsilon a_1(u_\varepsilon,v)=-\int_{\Omega_0}\Delta u_0v_0dx-\varepsilon\int_{\Omega_1}\Delta u_1v_1dx,\quad\forall v_0\in\mathcal{D}(\Omega_0),\forall v_1\in\mathcal{D}(\Omega_1),$$

ce qui donne :

$$(f,v)=-\int_{\Omega_0}\Delta u_0v_0dx-\varepsilon\int_{\Omega_1}\Delta u_1v_1dx,\quad\forall v_0\in\mathcal{D}(\Omega_0),\forall v_1\in\mathcal{D}(\Omega_1),$$

d'où

$$\int_{\Omega_0}f_0v_0dx=-\int_{\Omega_0}\Delta u_0v_0dx,\quad\forall v_0\in\mathcal{D}(\Omega_0), \tag{2.4}$$

$$\int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx = -\varepsilon \int_{\Omega_1} \Delta u_1 v_1 dx, \quad \forall\, v_1 \in \mathcal{D}\left(\Omega_1\right). \tag{2.5}$$

D'après (2.4), on aura :

$$\int_{\Omega_0} \left(f_0 + \Delta u_0\right) v_0 dx = 0,$$

ce qui implique que :

$$-\Delta u_0 = f_0 \quad \text{dans } \Omega_0. \tag{2.6}$$

D'après (2.5), on aura :

$$\int_{\Omega_1} \left(f_1 + \varepsilon \Delta u_1\right) v_1 dx = 0,$$

ce qui implique que :

$$-\varepsilon \Delta u_1 = f_1 \quad \text{dans } \Omega_1. \tag{2.7}$$

En multipliant (2.6) par une fonction test v_0 et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0 \nabla v_0 dx + \int_S \frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} v_0 ds = \int_{\Omega_0} f_0 v_0 dx,$$

il s'ensuit que :

$$\int_S \frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} v_0 ds + a_0\left(u_\varepsilon, v\right) = \int_{\Omega_0} f_0 v_0 dx.$$

En multipliant (2.7) par une fonction test v_1 et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\varepsilon \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla v_1 dx - \varepsilon \int_S \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} v_1 ds = \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx,$$

donc

$$-\varepsilon \int_S \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} v_1 ds + \varepsilon a_1\left(u_\varepsilon, v\right) = \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx,$$

d'où

$$\int_S \left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \nu}\right) v ds + a_0\left(u_\varepsilon, v\right) + \varepsilon a_1\left(u_\varepsilon, v\right) = \left(f, v\right).$$

D'après (2.3), on déduit que :

$$\int_S \left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \nu}\right) v_0 ds = 0 \quad \forall\, v \in H^1\left(\Omega\right), \tag{2.8}$$

d'où

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} = \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \quad \text{sur } S.$$

De (2.3), on déduit que le problème admet une solution unique.

2.4 Développement asymptotique formel de u_ε

La solution u_ε n'a pas en général de limite dans V lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$. On va chercher un développement asymptotique sous la forme :

$$u_\varepsilon = \frac{u^{-1}}{\varepsilon} + u^0 + \varepsilon u^1 + \cdots + \varepsilon^k u^k + \cdots . \tag{2.9}$$

En injectant (2.9) dans l'équation (2.3), on obtient :

$$a_0\left(\frac{u^{-1}}{\varepsilon} + u^0 + \varepsilon u^1 + \cdots + \varepsilon^k u^k + \cdots ,v\right) + \varepsilon a_1\left(\frac{u^{-1}}{\varepsilon} + u^0 + \varepsilon u^1 + \cdots + \varepsilon^k u^k + \cdots ,v\right) = (f,v)\,,$$

d'où

$$\frac{1}{\varepsilon}a_0\left(u^{-1},v\right) + a_0\left(u^0,v\right) + \varepsilon a_0\left(u^1,v\right) + \cdots + \varepsilon^k a_0\left(u^k,v\right) + \cdots + a_1\left(u^{-1},v\right) + \varepsilon a_1\left(u^0,v\right) + \varepsilon^2 a_1\left(u^1,v\right)$$
$$+ \cdots + \varepsilon^{k+1} a_1\left(u^k,v\right) + \cdots = (f,v)\,.$$

En regroupant les puissances successives de ε, on aura :

$$\frac{1}{\varepsilon}a_0\left(u^{-1},v\right) + \left[a_0\left(u^0,v\right) + a_1\left(u^{-1},v\right)\right] + \varepsilon\left[a_0\left(u^1,v\right) + a_1\left(u^0,v\right)\right] + \cdots = (f,v)\,.$$

par identification, on obtient :

$$a_0\left(u^{-1},v\right) = 0 \qquad \forall\, v \in V, \tag{2.10}$$
$$a_0\left(u^0,v\right) + a_1\left(u^{-1},v\right) = (f,v) \qquad \forall\, v \in V, \tag{2.11}$$
$$a_0\left(u^j,v\right) + a_1\left(u^{j-1},v\right) = 0 \qquad \forall\, v \in V, \quad j = 1,2\cdots \tag{2.12}$$

Pour que (2.10) soit vérifiée, il faut et il suffit que $u^{-1} \in Y_0$. Par restriction de (2.11) et (2.12) à Y_0, on obtient :

$$a_1\left(u^{-1},v\right) = (f,v) \quad \forall\, v \in Y_0, \tag{2.13}$$
$$a_1\left(u^j,v\right) = 0 \quad \forall\, v \in Y_0, \quad j = 1,2\cdots \tag{2.14}$$

De (2.10)-(2.14), on déduit :

$$\left|\begin{array}{l} u^{-1} \in Y_0, \\ a_1\left(u^{-1},v\right) = (f,v) \quad \forall\, v \in Y_0. \end{array}\right. \tag{2.15}$$

$$\left|\begin{array}{ll} a_0\left(u^0,v\right) = (f,v) - a_1\left(u^{-1},v\right) & \forall\, v \in V, \;\; u^0 \in V \\ a_1\left(u^0,v\right) = 0 & \forall\, v \in Y_0, \end{array}\right. \tag{2.16}$$

$$\left|\begin{array}{ll} a_0\left(u^j,v\right) = -a_1\left(u^{j-1},v\right) & \forall\, v \in V, \quad u^j \in V \\ a_1\left(u^j,v\right) = 0 & \forall\, v \in Y_0 \quad i = 1,2\cdots \end{array}\right. \tag{2.17}$$

Notons que :

$$Y_0 = \Big\{ v \in H^1(\Omega) \ / \ v = 0 \ \text{ sur } \ \Omega_0 \Big\},$$

et

$$a_0(u, v) = 0 \qquad \forall\, v \in V \ \text{ si } \ u \in Y_0.$$

2.5 Estimation d'erreur

Théorème 2.1. *La fonction u^ε est la solution de* (2.3)*. Les éléments $u^{-1}, u^0, \cdots, u^j, \cdots$ sont calculés à partir des formules* (2.15), (2.16) *et* (2.17)*. On a :*

$$\left\| u_\varepsilon - \left(\frac{u^{-1}}{\varepsilon} + u^0 + \varepsilon u^1 + \cdots + \varepsilon^j u^j \right) \right\| \leq C \varepsilon^{j+1}, \tag{2.18}$$

où C est une constante indépendante de ε.

Démonstration

Posons :

$$\begin{aligned}
\varphi_\varepsilon &= \frac{u^{-1}}{\varepsilon} + u^0 + \varepsilon u^1 + \cdots + \varepsilon^j u^j,\\
\psi_\varepsilon &= \varphi_\varepsilon + \varepsilon^{j+1} u^{j+1},\\
w_\varepsilon &= u_\varepsilon - \psi_\varepsilon,\\
\pi_\varepsilon(u, v) &= a_0(u, v) + \varepsilon a_1(u, v).
\end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\pi_\varepsilon(\psi_\varepsilon, v) &= a_0(\psi_\varepsilon, v) + \varepsilon a_1(\psi_\varepsilon, v)\\
&= a_0\left(\frac{u^{-1}}{\varepsilon} + u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \cdots + \varepsilon^j u^j + \varepsilon^{j+1} u^{j+1}, v \right)\\
&+ \varepsilon a_1\left(\frac{u^{-1}}{\varepsilon} + u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \cdots + \varepsilon^j u^j + \varepsilon^{j+1} u^{j+1}, v \right)\\
&= \frac{1}{\varepsilon} a_0\left(u^{-1}, v\right) + a_0\left(u^0, v\right) + \varepsilon a_0\left(u^1, v\right) + \varepsilon^2 a_0\left(u^2, v\right) + \cdots + \varepsilon^j a_0\left(u^j, v\right) + \varepsilon^{j+1} a_0\left(u^{j+1}, v\right)\\
&+ a_1\left(u^{-1}, v\right) + \varepsilon a_1\left(u^0, v\right) + \varepsilon^2 a_1\left(u^1, v\right) + \varepsilon^3 a_1\left(u^2, v\right) + \cdots + \varepsilon^{j+1} a_1\left(u^j, v\right) + \varepsilon^{j+2} a_1\left(u^{j+1}, v\right).
\end{aligned}$$

En regroupant les puissances successives de ε, on aura :

$$\begin{aligned}
\pi_\varepsilon(\psi_\varepsilon, v) = \frac{1}{\varepsilon} a_0\left(u^{-1}, v\right) &+ \Big[a_0\left(u^0, v\right) + a_1\left(u^{-1}, v\right) \Big] + \varepsilon \Big[a_0\left(u^1, v\right) + a_1\left(u^0, v\right) \Big]\\
&+ \varepsilon^2 \Big[a_0\left(u^2, v\right) + a_1\left(u^1, v\right) \Big] + \cdots + \varepsilon^{j+1} \Big[a_0\left(u^{j+1}, v\right) + a_1\left(u^j, v\right) \Big] + \varepsilon^{j+2} a_1\left(u^{j+1}, v\right).
\end{aligned}$$

D'après les formules (2.15), (2.16) et (2.16), on a aura :

$$a_0\left(u^{-1}, v\right) = 0,$$

$$\begin{aligned}
&a_0\left(u^0,v\right)+a_1\left(u^{-1},v\right)=(f,v)\,,\\
&a_0\left(u^1,v\right)+a_1\left(u^0,v\right)=0,\\
&a_0\left(u^2,v\right)+a_1\left(u^1,v\right)=0,\\
&\vdots\\
&a_0\left(u^{j+1},v\right)+a_1\left(u^j,v\right)=0.
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\pi_\varepsilon\left(\psi_\varepsilon,v\right)=(f,v)+\varepsilon^{j+2}a_1\left(u^{j+1},v\right),$$

on a aussi :

$$\begin{aligned}
\pi_\varepsilon\left(u_\varepsilon,v\right)&=a_0\left(u_\varepsilon,v\right)+\varepsilon a_1\left(u_\varepsilon,v\right)\\
&=a_0\left(\frac{u^{-1}}{\varepsilon}+u^0+\varepsilon u^1+\varepsilon^2u^2+\cdots+\varepsilon^ju^j+\cdots,v\right)\\
&+\varepsilon a_1\left(\frac{u^{-1}}{\varepsilon}+u^0+\varepsilon u^1+\varepsilon^2u^2+\cdots+\varepsilon^ju^j+\cdots,v\right)\\
&=\frac{1}{\varepsilon}a_0\left(u^{-1},v\right)+a_0\left(u^0,v\right)+\varepsilon a_0\left(u^1,v\right)+\varepsilon^2a_0\left(u^2,v\right)+\cdots+\varepsilon^ja_0\left(u^j,v\right)+\cdots\\
&+a_1\left(u^{-1},v\right)+\varepsilon a_1\left(u^0,v\right)+\varepsilon^2a_1\left(u^1,v\right)+\varepsilon^3a_1\left(u^2,v\right)+\cdots+\varepsilon^{j+1}a_1\left(u^j,v\right)+\cdots.
\end{aligned}$$

En les regroupant en fonction des puissances successives de ε, on obtient :

$$\begin{aligned}
\pi_\varepsilon\left(u_\varepsilon,v\right)=\frac{1}{\varepsilon}a_0\left(u^{-1},v\right)&+\Big[a_0\left(u^0,v\right)+a_1\left(u^{-1},v\right)\Big]+\varepsilon\Big[a_0\left(u^1,v\right)+a_1\left(u^0,v\right)\Big]\\
&+\varepsilon^2\Big[a_0\left(u^2,v\right)+a_1\left(u^1,v\right)\Big]+\cdots.
\end{aligned}$$

D'après les formules (2.15), (2.16) et (2.17), on a :

$$\begin{aligned}
&a_0\left(u^{-1},v\right)=0,\\
&a_0\left(u^0,v\right)+a_1\left(u^{-1},v\right)=(f,v)\,,\\
&a_0\left(u^1,v\right)+a_1\left(u^0,v\right)=0,\\
&a_0\left(u^2,v\right)+a_1\left(u^1,v\right)=0,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

On sait que :

$$\pi_\varepsilon\left(u_\varepsilon,v\right)=(f,v)\,,$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned}
\pi_\varepsilon\left(w_\varepsilon,v\right)&=\pi_\varepsilon\left(u_\varepsilon-\psi_\varepsilon,v\right)\\
&=\pi_\varepsilon\left(u_\varepsilon,v\right)-\pi_\varepsilon\left(\psi_\varepsilon,v\right)
\end{aligned}$$

$$= (f,v) - \left[(f,v) + \varepsilon^{j+2} a_1 \left(u^{j+1}, v\right)\right],$$

ce qui implique :

$$\pi_\varepsilon (w_\varepsilon, v) = -\varepsilon^{j+2} a_1 \left(u^{j+1}, v\right) \qquad \forall\, v \in V. \tag{2.19}$$

Par la coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$, on obtient :

$$\begin{cases} a_0 (v,v) \geq \alpha_0 \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega_0)}, & \alpha_0 > 0, \\ a_1 (v,v) \geq \alpha_1 \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega_1)}, & \alpha_1 > 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

On a : $\|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\nabla v_1\|_{L^2(\Omega_1)}$ est une norme équivalente à $\|\nabla v\|$ sur V.
Prenons $v = w_\varepsilon$ dans (2.19), on obtient :

$$\pi_\varepsilon (w_\varepsilon, w_\varepsilon) = -\varepsilon^{j+2} a_1 \left(u^{j+1}, w_\varepsilon\right),$$

d'où

$$a_0 (w_\varepsilon, w_\varepsilon) + \varepsilon a_1 (w_\varepsilon, w_\varepsilon) = -\varepsilon^{j+2} a_1 \left(u^{j+1}, w_\varepsilon\right).$$

D'après (2.20) on en déduit que :

$$\alpha_0 \|\nabla w_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \alpha_1 \varepsilon \|\nabla w_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_1)} \leq a_0 (w_\varepsilon, w_\varepsilon) + \varepsilon a_1 (w_\varepsilon, w_\varepsilon) = -\varepsilon^{j+2} a_1 \left(u^{j+1}, w_\varepsilon\right),$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} \alpha_0 \|\nabla w_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \alpha_1 \varepsilon \|\nabla w_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_1)} &\leq \varepsilon^{j+2} a_1 \left(u^{j+1}, w_\varepsilon\right) \\ &\leq \varepsilon^{j+2} C' \left\|u^{j+1}\right\|_{H^1(\Omega)} \|w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{(la continuité de } a\text{)} \\ &= \varepsilon^{j+2} C \|w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \quad \left(C = C' \left\|u^{j+1}\right\|\right). \end{aligned}$$

Finalement, on aura :

$$\alpha_0 \|\nabla w_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \alpha_1 \varepsilon \|\nabla w_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_1)} \leq C\varepsilon^{j+2} \|w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}, \tag{2.21}$$

et comme on a :

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_0)} + \alpha\varepsilon \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_1)} &\geq \alpha\varepsilon \left[\|\nabla v\|_{L^2(\Omega_0)} + \alpha\varepsilon \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_1)}\right] \\ &= \alpha\varepsilon \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \alpha\varepsilon \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \alpha = \min(\alpha_0, \alpha_1), \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\alpha_0 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_0)} + \alpha_1 \varepsilon \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_1)} \geq \alpha\varepsilon \|v\|^2_{H^1(\Omega)},$$

donc (2.21) entraîne :

$$\alpha\varepsilon \|w_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{j+2} \|w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)},$$

d'où

$$\|w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{j+1}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} u_\varepsilon - \varphi_\varepsilon &= \frac{u^{-1}}{\varepsilon} + u^0 + \varepsilon u^1 + \cdots + \varepsilon^j u^j + \varepsilon^{j+1} u^{j+1} + \cdots - \left(\frac{u^{-1}}{\varepsilon} + u^0 + \varepsilon u^1 + \cdots + \varepsilon^j u^j \right) \\ &= \varepsilon^{j+1} u^{j+1} + \cdots = w_\varepsilon + \varepsilon^{j+1} u^{j+1}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\|u_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\| = \left\| w_\varepsilon + \varepsilon^{j+1} u^{j+1} \right\| \leq C\varepsilon^{j+1}.$$

Vérifions que les formules (2.15), (2.16) et (2.17) définissent de façon unique $u^{-1}, u^0, u^1 \cdots$.

Calcul de u^{-1} :

Puisque $u^{-1} \in Y_0$:

$$u_0^{-1} = 0. \tag{2.22}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} a_1\left(u^{-1}, v\right) &= (f, v) && \forall\, v \in Y_0, \quad \left(2^{\text{ème}} \text{ équation de } (2.15)\right) \\ a_1\left(u^{-1}, v\right) &= \int_{\Omega_1} \nabla u_1^{-1} \nabla v_1 dx && \forall v \in Y_0. \end{aligned}$$

On a :

$$\int_{\Omega_1} \nabla u_1^{-1} \nabla v_1 dx = \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx.$$

La formule de Green nous permet d'écrire :

$$-\int_{\Omega_1} \Delta u_1^{-1} v_1 dx + \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial u_1^{-1}}{\partial \nu} ds = \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx, \quad \forall\, v_1 \in Y_0.$$

et comme v_1 dans Y_0, on aura :

$$-\int_{\Omega_1} \Delta u_1^{-1} v_1 dx = \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx,$$

ce qui implique que :

$$\int_{\Omega_1} \left(f_1 + \Delta u_1^{-1}\right) v_1 dx = 0.$$

Il s'ensuit que :

$$-\Delta u_1^{-1} = f_1 \quad \text{dans } \Omega_1.$$

Finalement, le problème de Dirichlet s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} u_1^{-1} \in H_0^1\left(\Omega_1\right), \\ -\Delta u_1^{-1} = f_1 \qquad \text{dans } \Omega_1. \end{cases} \tag{2.23}$$

Calcul de u^0 :

On multiplie l'équation (2.23) par une fonction test $v_1 \in H_0^1(\Omega)$, on aura :

$$-\int_{\Omega_1} \Delta u_1^{-1} v_1 dx = \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx.$$

en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega_1} \nabla u_1^{-1} \nabla v_1 dx - \int_S \frac{\partial u_1^{-1}}{\partial \nu} v_1 ds = \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx,$$

d'où

$$-\int_S \frac{\partial u_1^{-1}}{\partial \nu} v_1 ds + a_1\left(u^{-1}, v\right) = \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx. \tag{2.24}$$

D'après la $1^{ère}$ équation de (2.16), on a :

$$a_0\left(u^0, v\right) = (f, v) - a_1\left(u^{-1}, v\right),$$

ce qui implique que :

$$a_1\left(u^{-1}, v\right) = (f, v) - a_0\left(u^0, v\right).$$

En remplaçant cette dernière quantité dans (2.24), on trouve :

$$-\int_S \frac{\partial u_1^{-1}}{\partial \nu} v_1 ds + (f, v) - a_0\left(u^0, v\right) = \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx,$$

ce qui implique que :

$$-a_0\left(u^0, v\right) = \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx + \int_S \frac{\partial u_1^{-1}}{\partial \nu} v_1 ds - (f, v),$$

et comme

$$(f, v) = \int_{\Omega_0} f_0 v_0 dx + \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx,$$

donc, on obtient :

$$-a_0\left(u^0, v\right) = \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx - \int_{\Omega_0} f_0 v_0 dx - \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx + \int_S \frac{\partial u_1^{-1}}{\partial \nu} v_1 ds,$$

alors

$$a_0\left(u^0, v\right) = \int_{\Omega_0} f_0 v_0 dx - \int_S \frac{\partial u_1^{-1}}{\partial \nu} v_0 ds \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.25}$$

Nous avons :

$$a_0\left(u^0, v\right) = \int_{\Omega_0} \nabla u_0^0 \nabla v_0 dx = \int_{\Omega_0} f_0 v_0 dx.$$

En appliquant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0^0 \nabla v_0 dx = -\int_{\Omega_0} \Delta u_0^0 v_0 dx + \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial u_0^0}{\partial \nu} v_0 ds, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

d'où

$$a_0\left(u^0, v\right) = -\int_{\Omega_0} \Delta u_0^0 v_0 dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

En remplaçant cette dernière quantité dans (2.25), on obtient :

$$-\int_{\Omega_0} \Delta u_0^0 v_0 dx = \int_{\Omega_0} f_0 v_0 dx - \int_S \frac{\partial u_1^{-1}}{\partial \nu} v_0 ds \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

et comme $v_0 \in H_0^1(\Omega_0)$ donc $v_0 = 0$ sur S.
D'où

$$-\int_{\Omega_0} \Delta u_0^0 v_0 dx = \int_{\Omega_0} f_0 v_0 dx,$$

ce qui signifie que :

$$\int_{\Omega_0} \left(f_0 + \Delta u_0^0\right) v_0 dx = 0,$$

on déduit que :

$$-\Delta u_0^0 = f_0 \quad \text{dans} \quad \Omega_0.$$

En multipliant cette dernière quantité par une fonction test $v_0 \in H_0^1(\Omega)$, on obtient :

$$-\int_{\Omega_0} \Delta u_0^0 v_0 dx = \int_{\Omega_0} f_0 v_0 dx,$$

en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0^0 \nabla v_0 dx + \int_S \frac{\partial u_0^0}{\partial \nu} v_0 ds = \int_{\Omega_0} f_0 v_0 dx.$$

Il s'ensuit que :

$$a_0\left(u^0, v\right) = \int_{\Omega_0} f_0 v_0 dx - \int_S \frac{\partial u_0^0}{\partial \nu} v_0 ds.$$

D'après (2.25), on trouve :

$$\int_S \frac{\partial u_0^0}{\partial \nu} v_0 ds = \int_S \frac{\partial u_1^{-1}}{\partial \nu} v_0 ds.$$

On aura un problème mêlé avec condition de Dirichlet sur Γ et de Neumann sur S :

$$\begin{cases} -\Delta u_0^0 = f_0 & \text{dans } \Omega_0, \\ u_0^0 = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \dfrac{\partial u_0^0}{\partial \nu} = \dfrac{\partial u_1^{-1}}{\partial \nu} & \text{sur } S. \end{cases} \tag{2.26}$$

Calcul de u_1^0 :

D'après la 2ème équation de (2.16), on a :

$$a_1\left(u^0, v\right) = \int_{\Omega_1} \nabla u_1^0 \nabla v_1 dx = 0.$$

Par application de la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega_1} \nabla u_1^0 \nabla v_1 dx = -\int_{\Omega_1} \Delta u_1^0 v_1 dx + \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial u_1^0}{\partial \nu} v_1 ds = 0, \quad \forall\, v \in H_0^1\left(\Omega\right),$$

d'où

$$-\int_{\Omega_1} \Delta u_1^0 v_1 dx = 0,$$

donc

$$-\Delta u_1^0 = 0 \quad \text{dans } \Omega_1.$$

Puisque $u^0 \in H_0^1\left(\Omega\right)$:

$$u_1^0 = u_0^0 \quad \text{sur } S.$$

On aura le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_1^0 = 0 & \text{dans } \Omega_1, \\ u_1^0 = u_0^0 & \text{sur } S. \end{cases} \tag{2.27}$$

Calcul de u^1 :

On multiplie la 1ère équation de (2.27) par une fonction test v_1 et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$-\int_{\Omega_1} \Delta u_1^0 v_1 dx = \int_{\Omega_1} \nabla u_1^0 \nabla v_1 dx - \int_S \frac{\partial u_1^0}{\partial \nu} v_1 ds = 0,$$

d'où

$$-\int_S \frac{\partial u_1^0}{\partial \nu} v_1 ds + a_1\left(u^0, v\right) = 0,$$

d'après la première équation de (2.17), on a :

$$a_1\left(u^0, v\right) = -a_0\left(u^1, v\right),$$

ce qui signifie que :

$$-\int_S \frac{\partial u_1^0}{\partial \nu} v_1 ds - a_0\left(u^1, v\right) = 0.$$

Donc

$$a_0\left(u^1, v\right) = -\int_S \frac{\partial u_1^0}{\partial \nu} v_1 ds. \tag{2.28}$$

Nous avons :

$$a_0\left(u^1, v\right) = \int_{\Omega_0} \nabla u_0^1 \nabla v_0 dx,$$

l'utilisation de la formule de Green, nous permet d'écrire :

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0^1 \nabla v_0 dx = -\int_{\Omega_0} \Delta u_0^1 v_0 dx + \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial u_0^1}{\partial \nu} v_0 ds, \quad \forall\, v \in V,$$

d'où

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0^1 \nabla v_0 dx = -\int_{\Omega_0} \Delta u_0^1 v_0 dx.$$

En remplaçant cette dernière quantité dans (2.28), on trouve :

$$-\int_{\Omega_0} \Delta u_0^1 v_0 dx + \int_S \frac{\partial u_1^0}{\partial \nu} v_0 ds = 0 \qquad\qquad (v_1 = v_0 \quad \text{sur } S)\,.$$

Finalement, le problème résolu par u_0^1 est donné par :

$$\begin{cases} -\Delta u_0^1 = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ u_0^1 = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \dfrac{\partial u_0^1}{\partial \nu} v_0 = \dfrac{\partial u_1^0}{\partial \nu} v_0 & \text{sur } S. \end{cases} \tag{2.29}$$

D'après la 2$^{\text{ème}}$ équation de (2.17), on a :

$$a_1\left(u^1, v\right) = \int_{\Omega_1} \nabla u_1^1 \nabla v_1 dx = 0,$$

en appliquant la formule de Green, on trouve :

$$\int_{\Omega_1} \nabla u_1^1 \nabla v_1 dx = -\int_{\Omega_1} \Delta u_1^1 v_1 dx + \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial u_1^1}{\partial \nu} v_1 ds = 0 \quad \forall\, v \in V,$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} -\Delta u_1^1 = 0 & \text{dans } \Omega_1, \\ u_1^1 = u_0^1 & \text{sur } S. \end{cases} \tag{2.30}$$

L'estimation (2.18) est valable et donne une estimation de l'erreur dans $H_0^1\left(\Omega\right)$.

Chapitre 3

Modélisation asymptotique de l'équation de la chaleur dans une plaque hétérogène

3.1 Formulation du problème

Nous considérons un modèle décrivant la propagation de la chaleur dans une plaque d'épaisseur 2δ occupant le domaine : $P^\delta = \Omega \times (-\delta, \delta)$ où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$. On désigne par : $\partial P_L^\delta = \partial\Omega \times (-\delta, \delta)$ le côté latéral de la plaque et par $\partial P_\pm^\delta = \Omega \times \{-\delta, \delta\}$ les autres faces constituant le bord de la plaque. Nous notons un point de P^δ par $\underline{x} = (x, x_3)$ où $x = (x_1, x_2) \in \Omega$,

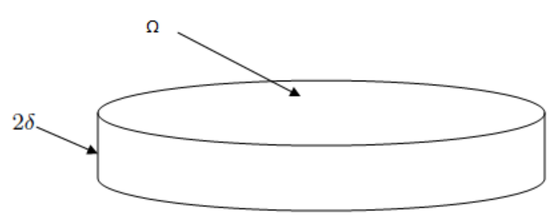

Fig. 3.1

et $\underline{\nabla} = (\nabla, \partial_3)$ où $\nabla = (\partial_1, \partial_2)$. ∂_i indique la dérivée partielle par rapport à x_i et $\partial_{ij} = \partial_i \partial_j$.
Soit $u \in H^1\left(P^\delta\right)$ la solution faible du problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A\underline{\nabla} u^\delta\right) = f^\delta & \text{dans } P^\delta, \\ u^\delta = 0 & \text{dans } \partial P_L^\delta, \\ \dfrac{\partial u^\delta}{\partial \eta} = g^\delta & \text{dans } \partial P_\pm^\delta, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f^\delta : P^\delta \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g^\delta : \partial P_\pm^\delta \longrightarrow \mathbb{R}$. La matrice $A : P^\delta \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times3}_{SYM}$ est donnée par :

$$A\left(\underline{x}\right) = \begin{pmatrix} a\left(x\right) & 0 \\ 0 & a_{33}\left(x\right) \end{pmatrix}$$

où $a : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}_{SYM}$ et $a_{33} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. On fait l'hypothèse que a_{ij}, f^{δ} et g^{δ} sont des fonctions de C^{∞}, avec

$$a(x) = \begin{pmatrix} a(x_1, x_1) & a(x_1, x_2) \\ a(x_2, x_1) & a(x_2, x_2) \end{pmatrix}$$

Supposons qu'il existe des constantes α et β telles que :

$$\alpha \left\|\underline{\xi}\right\|^2 \leq \underline{\xi}.A(\underline{x})\,\xi, \qquad \xi.A(\underline{x})\,\underline{\eta} \leq \beta \left\|\underline{\xi}\right\| \left\|\underline{\eta}\right\|, \tag{3.2}$$

pour tout $\underline{\xi}, \underline{\eta} \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $\underline{x} \in P^{\delta}$.

3.2 Formulation variationnelle du problème (3.1)

Dans l'ordre d'écrire la formulation variationnelle du problème (3.1), on introduit l'espace fonctionnel suivant :

$$V\left(P^{\delta}\right) = \left\{ v \in H^1\left(P^{\delta}\right); \quad v = 0 \;\text{ sur }\; \partial P_L^{\delta} \right\}.$$

On multiplie la première équation du problème (3.1) par une fonction test v, on obtient :

$$-\int_{P^{\delta}} \operatorname{div}\left(A\underline{\nabla} u^{\delta}\right) v d\underline{x} = \int_{P^{\delta}} f^{\delta} v d\underline{x}.$$

En utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{P^{\delta}} A\underline{\nabla} u^{\delta} \underline{\nabla} v d\underline{x} - \int_{\partial P^{\delta}} \left(A\underline{\nabla} u^{\delta}\right) \overrightarrow{\eta} v ds = \int_{P^{\delta}} f^{\delta} v d\underline{x},$$

et comme on a $\partial P^{\delta} = \partial P_{\pm}^{\delta} \cup \partial P_L^{\delta}$, on aura :

$$\int_{P^{\delta}} A\underline{\nabla} u^{\delta} \underline{\nabla} v d\underline{x} - \int_{\partial P_{\pm}^{\delta}} \left(A\underline{\nabla} u^{\delta}\right) \overrightarrow{\eta} v ds - \int_{\partial P_L^{\delta}} \left(A\underline{\nabla} u^{\delta}\right) \overrightarrow{\eta} v ds = \int_{P^{\delta}} f^{\delta} v d\underline{x},$$

on sait que $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla \overrightarrow{u}\, \overrightarrow{\eta}$ et $v = 0$ sur ∂P_L^{δ}. Alors

$$\int_{P^{\delta}} A\underline{\nabla} u^{\delta} \underline{\nabla} v d\underline{x} = \int_{P^{\delta}} f^{\delta} v d\underline{x} + \int_{\partial P_{\pm}^{\delta}} g^{\delta} v ds.$$

La formulation variationnelle associée au problème (3.1), est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver} \quad u \in V \quad \text{telle que,} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall\, v \in V, \end{array} \right. \tag{3.3}$$

avec

$$a(u, v) = \int_{P^{\delta}} A\underline{\nabla} u^{\delta} \underline{\nabla} v d\underline{x},$$

et

$$l(v) = \int_{P^\delta} f^\delta v d\underline{x} + \int_{\partial P^\delta_\pm} g^\delta v ds.$$

Soit $J(v)$ l'énergie définie par :

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - l(v).$$

Si u est la solution unique de la formulation variationnelle $a(u,v) = l(v), \quad \forall v \in V$, alors, u vérifie :

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

3.3 Existence et unicité de la solution

Pour pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram il faut vérifier :

1. **Continuité de la forme linéaire** $l(.)$

Pour démontrer la continuité de la forme linéaire $l(.)$, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz et on obtient :

$$\begin{aligned} |l(v)| &= \left| \int_{P^\delta} f^\delta v d\underline{x} + \int_{\partial P^\delta_\pm} g^\delta v \right| ds \\ &\leq \int_{P^\delta} \left| f^\delta v \right| d\underline{x} + \int_{\partial P^\delta_\pm} \left| g^\delta v \right| ds \\ &\leq \left\| f^\delta \right\|_{L^2(P^\delta)} \|v\|_{L^2(P^\delta)} + \left\| g^\delta \right\|_{L^2(\partial P^\delta_\pm)} \|v\|_{L^2(\partial P^\delta_\pm)}. \end{aligned}$$

Par la continuité de l'opérateur de trace, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|v\|_{L^2(\partial P^\delta)} \leq C \|v\|_{H^1(P^\delta)}, \quad \forall v \in H^1(p^\delta),$$

donc, on écrit :

$$\begin{aligned} |l(v)| &\leq \left\| f^\delta \right\|_{L^2(P^\delta)} \|v\|_{H^1(P^\delta)} + \left\| g^\delta \right\|_{L^2(\partial P^\delta_\pm)} \|v\|_{H^1(P^\delta)} \\ &\leq \left[\left\| f^\delta \right\|_{L^2(P^\delta)} + \left\| g^\delta \right\|_{L^2(\partial P^\delta_\pm)} \right] \|v\|_{H^1(P^\delta)}, \end{aligned}$$

ce qui permet d'avoir :

$$|l(v)| \leq C' \|v\|_{H^1(P^\delta)},$$

avec $C' = \left\| f^\delta \right\|_{L^2(P^\delta)} + \left\| g^\delta \right\|_{L^2(\partial P^\delta_\pm)}$.
D'où la continuité de $l(.)$ sur V.

2. **Continuité de la forme bilinéaire** $a(.,.)$ **:**

Pour démontrer la continuité de $a(.,.)$, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz et de (3.2) on obtient :

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &= \left|\int_{P^\delta} A\underline{\nabla} u^\delta \underline{\nabla} v d\underline{x}\right| \\ &\leq \int_{P^\delta} \left|A\underline{\nabla} u^\delta \underline{\nabla} v\right| d\underline{x} \\ &\leq \alpha \left\|u^\delta\right\|_{H^1\left(P^\delta\right)} \|v\|_{H^1\left(P^\delta\right)},\end{aligned}$$

d'où la continuité de $a(.,.)$ sur V.

3. **Coercivité de la forme bilinéaire** $a(.,.)$ **:**

En utilisant (3.2), on obtient :

$$a(u,u) = \int_{P^\delta} A\underline{\nabla} u \underline{\nabla} u d\underline{x} \geq \beta \|\underline{\nabla} u\|^2_{L^2\left(P^\delta\right)},$$

et comme $u \in H_0^1\left(P^\delta\right)$, alors on a l'inégalité de Poincaré :

$$\|u\|^2_{L^2\left(P^\delta\right)} \leq C^2 \|\nabla u\|^2_{L^2\left(P^\delta\right)}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{H^1\left(P^\delta\right)} &= \|u\|^2_{L^2\left(P^\delta\right)} + \|\nabla u\|^2_{L^2\left(P^\delta\right)} \\ &\leq C^2 \|\nabla u\|^2_{L^2\left(P^\delta\right)} + \|\nabla u\|^2_{L^2\left(P^\delta\right)} \\ &\leq \left(C^2+1\right) \|\nabla u\|^2_{L^2\left(P^\delta\right)},\end{aligned}$$

d'où

$$\|\nabla u\|^2_{L^2\left(P^\delta\right)} \geq \frac{1}{C^2+1} \|u\|^2_{H^1\left(P^\delta\right)},$$

donc

$$a(u,u) \geq \frac{\beta}{C^2+1} \|u\|^2_{H^1\left(P^\delta\right)}.$$

D'où la coercivité de $a(.,.)$.
Le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1).
Notre solution modèle $\tilde{u}^\delta$, qui se rapproche de u^δ est définie comme le minimiseur du potentiel d'énergie dans l'espace des fonctions de $V\left(P^\delta\right)$:

$$\tilde{u}^\delta = arg \min_{v \in V_1} J(v).$$

Soit

$$V_1\left(p^\delta\right) = \left\{v \in V\left(P^\delta\right) : \ v(x,x_3) = v_0(x) + x_3 v_1(x),\ v_0,\ v_1 \in H_0^1(\Omega)\right\}.$$

Nous écrivons :

$$\tilde{u}^{\delta}(x, x_3) = w_0(x) + x_3 w_1(x), \quad \forall\, w_0, w_1 \in H_0^1(\Omega). \tag{3.4}$$

On pose :

$$\begin{cases} v & = v_0(x) + x_3 v_1(x), \\ u^{\delta} & = w_0(x) + x_3 w_1(x). \end{cases} \tag{3.5}$$

On remplace (3.5) dans (3.3), on trouve :

$$\int_{P^{\delta}} A\underline{\nabla}\left[w_0(x) + x_3 w_1(x)\right] \underline{\nabla}\left[v_0(x) + x_3 v_1(x)\right] d\underline{x} = \int_{P^{\delta}} f^{\delta}\left[v_0(x) + x_3 v_1(x)\right] d\underline{x}$$
$$+ \int_{\partial P^{\delta}_{\pm}} g^{\delta}\left[v_0(x) + x_3 v_1(x)\right] ds.$$

On aura :

$$\int_{P^{\delta}} A\underline{\nabla} w_0(x)\, \underline{\nabla} v_0(x) + A\underline{\nabla} w_0(x)\, \underline{\nabla} x_3 v_1(x) + A\underline{\nabla} x_3 w_1(x)\, \underline{\nabla} v_0(x) + A\underline{\nabla} x_3 w_1(x)\, \underline{\nabla} x_3 v_1(x)\, d\underline{x}$$
$$= \int_{P^{\delta}} f^{\delta}\left[v_0(x) + x_3 v_1(x)\right] d\underline{x} + \int_{\partial P^{\delta}_{\pm}} g^{\delta}\left[v_0(x) + x_3 v_1(x)\right] ds. \tag{3.6}$$

Nous allons maintenant calculer :

$$\begin{aligned} A\underline{\nabla} w_0(x)\, \underline{\nabla} v_0(x) &= \begin{pmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & a_{33}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla w_0(x) \\ \partial_3 w_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla v_0(x) \\ \partial_3 v_0(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(x) \nabla w_0(x) \\ a_{33}(x) \partial_3 w_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla v_0(x) \\ \partial_3 v_0(x) \end{pmatrix} \\ &= a(x) \nabla w_0(x) \nabla v_0(x) + a_{33}(x) \partial_3 w_0(x) \partial_3 v_0(x), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{P^{\delta}} A\underline{\nabla} w_0(x)\, \underline{\nabla} v_0(x)\, d\underline{x} &= \int_{-\delta}^{\delta} \int_{\Omega} A\underline{\nabla} w_0(x)\, \underline{\nabla} v_0(x)\, d\underline{x} \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} \int_{\Omega} a(x) \nabla w_0(x) \nabla v_0(x)\, d\underline{x} + \int_{-\delta}^{\delta} \int_{\Omega} a_{33}(x) \partial_3 w_0(x) \partial_3 v_0(x)\, d\underline{x}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que : $\partial_3 v_0(x) = \partial_3 w_0(x) = 0$, donc :

$$\int_{P^{\delta}} A\underline{\nabla} w_0(x)\, \underline{\nabla} v_0(x)\, d\underline{x} = \int_{\Omega} a(x) \nabla w_0(x) \nabla v_0(x)\, dx \int_{-\delta}^{\delta} dx_3,$$

ce qui implique que :

$$\int_{P^\delta} A\underline{\nabla} w_0(x)\,\underline{\nabla} v_0(x)\,d\underline{x} = 2\delta \int_\Omega a(x)\,\nabla w_0(x)\,\nabla v_0(x)\,dx \tag{3.7}$$

Calculons :

$$\begin{aligned} A\underline{\nabla} w_0(x)\,\underline{\nabla} x_3 v_1(x) &= \begin{pmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & a_{33}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla w_0(x) \\ \partial_3 w_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla x_3 v_1(x) \\ \partial_3 x_3 v_1(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(x)\,\nabla w_0(x) \\ a_{33}(x)\,\partial_3 w_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla x_3 v_1(x) \\ \partial_3 x_3 v_1(x) \end{pmatrix} \\ &= a(x)\,\nabla w_0(x)\,\nabla x_3 v_1(x) + a_{33}(x)\,\partial_3 w_0(x)\,\partial_3 x_3 v_1(x), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{P^\delta} A\underline{\nabla} w_0(x)\,\underline{\nabla} x_3 v_1(x)\,d\underline{x} &= \int_{-\delta}^{\delta}\int_\Omega A\underline{\nabla} w_0(x)\,\underline{\nabla} x_3 v_1(x)\,d\underline{x} \\ &= \int_{-\delta}^{\delta}\int_\Omega x_3 a(x)\,\nabla w_0(x)\,\nabla v_1(x)\,d\underline{x} + \int_{-\delta}^{\delta}\int_\Omega a_{33}(x)\,\partial_3 w_0(x)\,\partial_3 x_3 v_1(x)\,d\underline{x}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\partial_3 w_0(x) = 0$, on aura :

$$\int_{P^\delta} A\underline{\nabla} w_0(x)\,\underline{\nabla} x_3 v_1(x)\,d\underline{x} = \int_\Omega a(x)\,\nabla w_0(x)\,\nabla v_1(x)\,dx \int_{-\delta}^{\delta} x_3 dx_3,$$

et comme $\left(\int_{-\delta}^{\delta} x_3 dx_3 = 0\right)$, on aura :

$$\int_{P^\delta} A\underline{\nabla} w_0(x)\,\underline{\nabla} x_3 v_1(x)\,d\underline{x} = 0. \tag{3.8}$$

On calcule aussi :

$$\begin{aligned} A\underline{\nabla} x_3 w_1(x)\,\underline{\nabla} v_0(x) &= \begin{pmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & a_{33}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla x_3 w_1(x) \\ \partial_3 x_3 w_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla v_0(x) \\ \partial_3 v_0(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(x)\,\nabla x_3 w_1(x) \\ a_{33}(x)\,\partial_3 x_3 w_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla v_0(x) \\ \partial_3 v_0(x) \end{pmatrix} \\ &= a(x)\,\nabla x_3 w_1(x)\,\nabla v_0(x) + a_{33}(x)\,\partial_3 x_3 w_1(x)\,\partial_3 v_0(x), \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{P^\delta} A\underline{\nabla} x_3 w_1(x)\,\underline{\nabla} v_0(x)\,d\underline{x} = \int_{-\delta}^{\delta}\int_\Omega A\underline{\nabla} x_3 w_1(x)\,\underline{\nabla} v_0(x)\,d\underline{x}$$

$$= \int_{-\delta}^{\delta}\int_{\Omega} a(x)\nabla x_3 w_1(x)\nabla v_0(x)\,d\underline{x} + \int_{-\delta}^{\delta}\int_{\Omega} a_{33}(x)\,\partial_3 x_3 w_1(x)\,\partial_3 v_0(x)\,d\underline{x}.$$

En utilisant le fait que $\partial_3 v_0(x) = 0$, on aura :

$$\int_{P^\delta} A\underline{\nabla} x_3 w_1(x)\,\underline{\nabla} v_0(x)\,d\underline{x} = \int_{\Omega} a(x)\nabla w_1(x)\nabla v_0(x)\,dx \int_{-\delta}^{\delta} x_3 dx_3,$$

et comme $\left(\int_{-\delta}^{\delta} x_3 dx_3 = 0\right)$, on aura :

$$\int_{P^\delta} A\underline{\nabla} x_3 w_1(x)\,\underline{\nabla} v_0(x)\,d\underline{x} = 0. \tag{3.9}$$

Calculons

$$\begin{aligned}
A\underline{\nabla} x_3 w_1(x)\,\underline{\nabla} x_3 v_1(x) &= \begin{pmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & a_{33}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nabla x_3 w_1(x) \\ \partial_3 x_3 w_1(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nabla x_3 v_1(x) \\ \partial_3 x_3 v_1(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a(x)\nabla x_3 w_1(x) \\ a_{33}(x)\,\partial_3 x_3 w_1(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nabla x_3 v_1(x) \\ \partial_3 x_3 v_1(x) \end{pmatrix} \\
&= a(x)\nabla x_3 w_1(x)\nabla x_3 v_1(x) + a_{33}(x)\,\partial_3 x_3 w_1(x)\,\partial_3 x_3 v_1(x),
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_{P^\delta} A\underline{\nabla} x_3 w_1(x)\,\underline{\nabla} x_3 v_1(x)\,d\underline{x} = \int_{-\delta}^{\delta}\int_{\Omega} A\underline{\nabla} x_3 w_1(x)\,\underline{\nabla} x_3 v_1(x)\,d\underline{x}$$
$$= \int_{-\delta}^{\delta}\int_{\Omega} a(x)\nabla x_3 w_1(x)\nabla x_3 v_1(x)\,d\underline{x} + \int_{-\delta}^{\delta}\int_{\Omega} a_{33}(x)\,\partial_3 x_3 w_1(x)\,\partial_3 x_3 v_1(x)\,d\underline{x}.$$

En utilisant le fait que $\partial_3 x_3 v_1(x) = v_1(x)$ $\partial_3 x_3 w_1(x) = w_1(x)$, on aura :

$$\int_{P^\delta} A\underline{\nabla} x_3 w_1(x)\,\underline{\nabla} x_3 v_1(x)\,d\underline{x} = \int_{\Omega} a(x)\nabla w_1(x)\nabla v_1(x)\,dx \int_{-\delta}^{\delta} x_3^2 dx_3 + \int_{\Omega} a_{33}(x)\,w_1(x)\,v_1(x)\,dx \int_{-\delta}^{\delta} dx_3,$$

et comme $\left(\int_{-\delta}^{\delta} x_3^2 dx_3 = \frac{2\delta^3}{3} \text{ et } \int_{-\delta}^{\delta} dx_3 = 2\delta\right)$, on aura :

$$\int_{P^\delta} A\underline{\nabla} x_3 w_1(x)\,\underline{\nabla} x_3 v_1(x)\,d\underline{x} = \frac{2\delta^3}{3}\int_{\Omega} a(x)\nabla w_1(x)\nabla v_1(x)\,dx + 2\delta\int_{\Omega} a_{33}(x)\,w_1(x)\,v_1(x)\,dx. \tag{3.10}$$

On remplace (3.7)-(3.10) dans l'equation (3.6), on obtient :

$$\int_{P^\delta} A\underline{\nabla} w_0(x)\,\underline{\nabla} v_0(x) + A\underline{\nabla} w_0(x)\,\underline{\nabla} x_3 v_1(x) + A\underline{\nabla} x_3 w_1(x)\,\underline{\nabla} v_0(x) + A\underline{\nabla} x_3 w_1(x)\,\underline{\nabla} x_3 v_1(x)\,d\underline{x}$$
$$= 2\delta\int_{\Omega} a(x)\nabla w_0(x)\nabla v_0(x)\,dx + \frac{2\delta^3}{3}\int_{\Omega} a(x)\nabla w_1(x)\nabla v_1(x)\,dx + 2\delta\int_{\Omega} a_{33}(x)\,w_1(x)\,v_1(x)\,dx,$$

donc

$$2\delta\int_{\Omega}a\left(x\right)\nabla w_{0}\left(x\right)\nabla v_{0}\left(x\right)dx+\frac{2\delta^{3}}{3}\int_{\Omega}a\left(x\right)\nabla w_{1}\left(x\right)\nabla v_{1}\left(x\right)dx+2\delta\int_{\Omega}a_{33}\left(x\right)w_{1}\left(x\right)v_{1}\left(x\right)dx$$
$$=\int_{P^{\delta}}f^{\delta}\left[v_{0}\left(x\right)+x_{3}v_{1}\left(x\right)\right]d\underline{x}+\int_{\partial P_{\pm}^{\delta}}g^{\delta}\left[v_{0}\left(x\right)+x_{3}v_{1}\left(x\right)\right]ds.$$

En Particulier, pour $v_1 = 0$, on aura :

$$\begin{aligned}2\delta\int_{\Omega}a\left(x\right)\nabla w_{0}\left(x\right)\nabla v_{0}\left(x\right)dx &=\int_{P^{\delta}}f^{\delta}\left(x,x_{3}\right)v_{0}\left(x\right)d\underline{x}+\int_{\partial P_{\pm}^{\delta}}g^{\delta}\left(x,x_{3}\right)v_{0}\left(x\right)ds\\ &=\int_{\Omega}\int_{-\delta}^{\delta}f^{\delta}(x,x_{3})v_{0}\left(x\right)d\underline{x}+\int_{\Omega\times\{-1,1\}}g^{\delta}(x,x_{3})v_{0}\left(x\right)ds\\ &=\int_{\Omega}\left[\int_{-\delta}^{\delta}f^{\delta}\left(x,x_{3}\right)dx_{3}\right]v_{0}\left(x\right)dx+\int_{\Omega}\left[g^{\delta}(x,\delta)+g^{\delta}\left(x,-\delta\right)\right]v_{0}\left(x\right)ds\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green (formule d'intégration par parties), on obtient :

$$-2\delta\operatorname{div}[a\left(x\right)\nabla w_{0}]=\int_{-\delta}^{\delta}f^{\delta}(x,x_{3})dx_{3}+g^{\delta}(x,\delta)+g^{\delta}\left(x,-\delta\right)\quad\text{dans }\Omega.\tag{3.11}$$

où w_0 est solution de (3.11).
D'autre part, pour $v_0 = 0$, on aura :

$$\frac{2\delta^{3}}{3}\int_{\Omega}a\left(x\right)\nabla w_{1}\left(x\right)\nabla v_{1}\left(x\right)dx+2\delta\int_{\Omega}a_{33}\left(x\right)w_{1}\left(x\right)v_{1}\left(x\right)dx=\int_{P^{\delta}}f^{\delta}\left(x,x_{3}\right)x_{3}v_{1}\left(x\right)d\underline{x}$$
$$+\int_{\partial P_{\pm}^{\delta}}g^{\delta}\left(x,x_{3}\right)x_{3}v_{1}\left(x\right)ds=\int_{\Omega}\int_{-\delta}^{\delta}f^{\delta}\left(x,x_{3}\right)x_{3}v_{1}\left(x\right)d\underline{x}+\int_{\Omega\times\{-1,1\}}g^{\delta}\left(x,x_{3}\right)x_{3}v_{1}\left(x\right)ds$$
$$=\int_{\Omega}\left[\int_{-\delta}^{\delta}f^{\delta}\left(x,x_{3}\right)x_{3}dx_{3}\right]v_{1}\left(x\right)dx+\int_{\Omega}\left[\delta g^{\delta}(x,\delta)-\delta g^{\delta}\left(x,-\delta\right)\right]v_{1}\left(x\right)ds.$$

En utilisant la formule de Green (formule d'intégration par parties), on obtient :

$$-\frac{2\delta^{3}}{3}\operatorname{div}[a\left(x\right)\nabla w_{1}]+2\delta a_{33}\left(x\right)w_{1}\left(x\right)=\int_{-\delta}^{\delta}f^{\delta}\left(x,x_{3}\right)x_{3}dx_{3}+\delta\left[g^{\delta}\left(x,\delta\right)-g^{\delta}\left(x,-\delta\right)\right]\tag{3.12}$$

où w_1 est solution de (3.12).

3.4 Développement asymptotique de la solution

3.4.1 Changement d'échelle

Dans cette section, notre objectif est de construire un développement asymptotique de la solution u^δ. La méthode consiste à se ramener par un changement d'échelle dans P^δ à un problème posé dans un domaine fixe.

$$P=\Omega\times\left(-1,1\right),\quad\partial P_{L}=\partial\Omega\times\left(-1,1\right),\quad\partial P_{\pm}=\Omega\times\left\{-1,1\right\}.$$

On considère le changement de coordonnées suivant :

$$u(\delta)(\underline{\widehat{x}}) = u^\delta(\underline{x}), \quad f(\underline{\widehat{x}}) = f^\delta(\underline{x}), \quad g(\underline{\widehat{x}}) = \delta^{-1} g^\delta(\underline{x}),$$

et

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow \left(x_1, x_2, \delta^{-1} x_3\right),$$
$$\partial_3 \longrightarrow \delta^{-1}\partial_3.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
A\underline{\nabla} u^\delta &= \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & 0 \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 u^\delta \\ \partial_2 u^\delta \\ \partial_3 u^\delta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}(x)\partial_1 u^\delta + a_{12}(x)\partial_2 u^\delta \\ a_{21}(x)\partial_1 u^\delta + a_{22}(x)\partial_2 u^\delta \\ a_{33}(x)\partial_3 u^\delta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On sait que : Si $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{div} V = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3$,

d'où

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\left(A\underline{\nabla} u^\delta\right) &= \mathrm{div}\begin{pmatrix} a_{11}(x)\partial_1 u^\delta + a_{12}(x)\partial_2 u^\delta \\ a_{21}(x)\partial_1 u^\delta + a_{22}(x)\partial_2 u^\delta \\ a_{33}(x)\partial_3 u^\delta \end{pmatrix} \\
&= \partial_1\left(a_{11}(x)\partial_1 u^\delta + a_{12}(x)\partial_2 u^\delta\right) + \partial_2\left(a_{21}(x)\partial_1 u^\delta + a_{22}(x)\partial_2 u^\delta\right) + \partial_3\left(a_{33}(x)\partial_3 u^\delta\right) \\
&= \mathrm{div}\left(a(x)\nabla u^\delta\right) + \partial_3\left(a_{33}(x)\partial_3 u^\delta\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{div}\left(A\underline{\nabla} u^\delta\right) = \mathrm{div}\left(a(x)\nabla u^\delta\right) + \partial_3\left(a_{33}(x)\partial_3 u^\delta\right). \tag{3.13}$$

Après ce changement d'échelle, le problème de transmission (3.1) devient :

$$\begin{cases} \mathrm{div}\left(a(\widehat{x})\nabla u(\delta)\right) + \delta^{-2}\partial_3\left(a_{33}(\widehat{x})\partial_3 u(\delta)\right) = -f & \text{dans} \quad P, \\ u(\delta) = 0 & \text{sur} \quad \partial P_L, \\ \delta^{-1} a_{33}(\widehat{x})\partial_3 u(\delta) = \delta \widehat{x_3} g & \text{sur} \quad \partial P_\pm. \end{cases} \tag{3.14}$$

Maintenant cherchons un développement du type :

$$u(\delta) \sim u_0 + \delta^2 u_2 + \delta^4 u_4 + \cdots. \tag{3.15}$$

En injectant (3.15) dans l'équation (3.14), on obtient :

$$\delta^{-2}\partial_3\left(a_{33}(\widehat{x})\partial_3 u_0\right) + \mathrm{div}\left(a(\widehat{x})\nabla u_0\right) + \delta^2\left[\delta^{-2}\partial_3\left(a_{33}(\widehat{x})\partial_3 u_2\right) + \mathrm{div}\left(a(\widehat{x})\nabla u_2\right)\right]$$

$$+\delta^4\left[\delta^{-2}\partial_3\left(a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_4\right)+\operatorname{div}\left(a\left(\widehat{x}\right)\nabla u_4\right)\right]+\cdots=-f \quad \text{dans} \quad P,$$

et

$$\delta^{-1}a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_0+\delta^2\left[\delta^{-1}a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_2\right]+\delta^4\left[\delta^{-1}a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_4\right]+\cdots=\delta\widehat{x_3}g \quad \text{sur} \quad \partial P_{\pm},$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}&\delta^{-2}\partial_3\left(a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_0\right)+\operatorname{div}\left(a\left(\widehat{x}\right)\nabla u_0\right)+\partial_3\left(a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_2\right)+\delta^2\operatorname{div}\left(a\left(\widehat{x}\right)\nabla u_2\right)\\&+\delta^2\partial_3\left(a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_4\right)+\delta^4\operatorname{div}\left(a\left(\widehat{x}\right)\nabla u_4\right)+\cdots\ =-f \quad \text{dans} \quad P,\end{aligned}$$

et

$$\delta^{-1}a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_0+\delta a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_2+\delta^3 a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_4+\cdots=\delta\widehat{x_3}g \quad \text{sur} \quad \partial P_{\pm}.$$

Et en les regroupant en fonction des puissances successives de δ, on obtient :

$$\begin{aligned}&\delta^{-2}\partial_3\left(a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_0\right)+\left[\operatorname{div}\left(a\left(\widehat{x}\right)\nabla u_0\right)+\partial_3\left(a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_2\right)\right]+\delta^2\left[\operatorname{div}\left(a\left(\widehat{x}\right)\nabla u_2\right)+\partial_3\left(a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_4\right)\right]\\&+\cdots=-f \quad \text{dans} \quad P, \qquad (3.16)\end{aligned}$$

et

$$\delta^{-1}a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_0+\delta a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_2+\delta^3 a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_4+\cdots=\delta\widehat{x_3}g \quad \text{sur} \quad \partial P_{\pm}. \qquad (3.17)$$

Par identification des puissances successives de δ dans (3.16), on obtient :

$$\begin{aligned}&\partial_3\left(a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_0\right)=0,\\&\operatorname{div}\left(a\left(\widehat{x}\right)\nabla u_0\right)+\partial_3\left(a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_2\right)=-f,\\&div\left(a\left(\widehat{x}\right)\nabla u_2\right)+\partial_3\left(a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_4\right)=0,\\&div\left(a\left(\widehat{x}\right)\nabla u_{2k-2}\right)+\partial_3\left(a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_{2k}\right)=0,\end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\partial_3\left(a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_0\right)=0, \qquad (3.18)$$
$$\partial_3\left(a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_2\right)=-f-\operatorname{div}\left(a\left(\widehat{x}\right)\nabla u_0\right), \qquad (3.19)$$
$$\partial_3\left(a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_4\right)=-\operatorname{div}\left(a\left(\widehat{x}\right)\nabla u_2\right), \qquad (3.20)$$
$$\partial_3\left(a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_{2k}\right)=-\operatorname{div}\left(a\left(\widehat{x}\right)\nabla u_{2k-2}\right) \quad \forall k\geq 2. \qquad (3.21)$$

En identifiant les puissances successives de δ dans (3.17), on obtient :

$$a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_0=0, \quad a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_2=\widehat{x}_3 g, \quad a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_4=0, \quad a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3 u_{2k}=0 \quad \forall k\geq 2. \qquad (3.22)$$

Les équations (3.18)-(3.22) définissent une suite de problèmes de Neumann par rapport à $\widehat{x}_3$ dans $(-1,1)$ et $\widehat{x}$ dans Ω. Nous décomposons :

$$u_{2k}\left(\underline{\widehat{x}}\right) = \overset{\circ}{u}_{2k}\left(\underline{\widehat{x}}\right) + \xi_{2k}\left(\widehat{x}\right), \tag{3.23}$$

avec

$$\int_{-1}^{1} \overset{\circ}{u}_{2k}\left(\widehat{x}, \widehat{x}_3\right) d\widehat{x}_3 = 0.$$

D'après la condition de Dirichlet (3.14), on aura :

$$u_{2k} = 0 \ \text{ sur } \partial P_L$$

C'est-à-dire :

$$\xi_{2k} = 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega, \tag{3.24}$$

$$\overset{\circ}{u}_{2k} = 0 \quad \text{ sur } \partial P_L, \tag{3.25}$$

Cependant, ceci n'est pas possible en général puisque seulement (3.24) peut être imposée. Ainsi (3.25) n'est pas satisfaite en général, ce qui rend nécessaire l'introduction de correcteurs. Notons maintenant que ξ_{2k}, $\overset{\circ}{u}_{2k}$, et u_{2k} sont uniquement déterminés de (3.18)-(3.24).
De (3.18) et (3.22), on obtient $\overset{\circ}{u}_0 = 0$. Pour imposer une condition de compatibilité sur (3.19) et (3.22), alors :

$$\operatorname{div}\left(a\left(\widehat{x}\right)\nabla\xi_0\left(\widehat{x}\right)\right) = -f - \partial_3\left(a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3\xi_2\left(\widehat{x}\right)\right),$$

d'où

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{div}\left(a\left(\widehat{x}\right)\nabla\xi_0\left(\widehat{x}\right)\right) d\widehat{x}_3 = -\int_{-1}^{1} f\left(\widehat{x}, \widehat{x}_3\right) d\widehat{x}_3 - \left[g\left(\widehat{x}, 1\right) + g\left(\widehat{x}, \, -1\right)\right],$$

d'après (3.24), on aura :

$$\begin{cases} -2\operatorname{div}\left(a\left(\widehat{x}\right)\nabla\xi_0\left(\widehat{x}\right)\right) = -\displaystyle\int_{-1}^{1} f\left(\widehat{x}, \widehat{x}_3\right) d\widehat{x}_3 - \left[g\left(\widehat{x}, 1\right) + g\left(\widehat{x}, \, -1\right)\right] & \text{dans } \Omega, \\ \xi_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.26}$$

Puisque $\overset{\circ}{u}_0 = 0$, alors $u_0 = \xi_0$.
En général, à partir de (3.21) et (3.22), on obtient :

$$\partial_3\left[\underbrace{a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_3\xi_{2k}\left(x\right)}_{=0}\right] = -div\left[a\left(\widehat{x}\right)\nabla\xi_{2k-2}\left(x\right)\right] \qquad \forall k \geq 2,$$

d'où

$$-\operatorname{div}\left[a\left(\widehat{x}\right)\xi_{2k-2}\left(x\right)\right] = 0 \qquad \text{dans } \Omega,$$

$$\xi_{2k-2} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Donc $\xi_{2k-2} = 0$ pour tout $k \geq 2$.
De (3.21), (3.22), on obtient :

$$u_0 = \xi_0, \quad u_2 = \overset{\circ}{u}_2 \neq 0, \quad u_4 = \overset{\circ}{u}_4, \text{ etc},$$

d'où

$$u^\delta \sim \xi_0 + \delta^2 \overset{\circ}{u}_2 + \delta^4 \overset{\circ}{u}_4 + \cdots . \tag{3.27}$$

Notons que le premier terme du developpement asymptotique (3.27) correspond à w_0 solution de (3.11).
Puisque $\overset{\circ}{u}_{2k}$ ne disparaît pas sur ∂P_L, nous introduisons le correcteur de limites suivant :

$$U \sim \delta^2 U_2 + \delta^4 U_4 + \cdots$$

où $U_{2k} \in H^1(P)$ est solution du problème :

$$\begin{cases} -\delta^2 \mathrm{div}\left(a\left(\widehat{x}\right) \nabla U_{2k}\right) - a_{33}\left(\widehat{x}\right) \partial_{33} U_{2k} = 0 & \text{dans} \ \ P, \\ U_{2k} = \overset{\circ}{u}_{2k} & \text{sur} \ \ \partial P_L, \\ \dfrac{\partial U_{2k}}{\partial \eta} = 0 & \text{sur} \ \ \partial P_\pm. \end{cases} \tag{3.28}$$

Finalement, nous déduisons que l'expansion asymptotique pour $u(\delta)$ dans P est :

$$u(\delta) \sim \xi_0 + \delta^2 \overset{\circ}{u}_2 - \delta^2 U_2 + \delta^4 \overset{\circ}{u}_4 - \delta^4 U_4 \cdots .$$

3.5 Estimation d'erreur

Nous montrons quelques résultats qui sont nécessaires pour estimer l'erreur de modélisation. Le résultat ci-dessous résulte des estimations classiques.

Lemme 3.1. *Soit ξ_0 et $\overset{\circ}{u}_{2k}$ qui sont défini comme ci-dessus, pour $k \in \mathbb{N}$. Alors il existe une constante C telle que :*

$$\|\xi_0\|_{H^1(\Omega)} + \|\overset{\circ}{u}_{2k}\|_{H^1(P)} \leq C. \tag{3.29}$$

Pour estimer (3.28), nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\delta^2 \mathrm{div}\left[a\left(\widehat{x}\right) \nabla \Psi\right] - a_{33}\left(\widehat{x}\right) \partial_{33} \Psi = 0 & \text{dans } P, \\ \Psi = w & \text{sur } \partial P_L, \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \partial P_\pm, \end{cases} \tag{3.30}$$

où $\Psi \in H^1(P)$.

Lemme 3.2. *Comme dans* (3.30) *supposons aussi que* $\displaystyle\int_{-1}^{1} w(\widehat{x}, \widehat{x}_3)\, d\widehat{x}_3 = 0$ *sur* ∂P_L. *Alors il existe une constante* C *telle que :*

$$\|\Psi\|_{L^2(P)} \leq C \|\partial_3 \Psi\|_{L^2(P)}.$$

Démonstration. A partir des conditions de Neumann sur $\partial P_{\pm}$, il s'ensuit que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \partial_{33}\Psi d\widehat{x}_3 = 0$ dans Ω. Ainsi, en intégrant la première équation dans (3.30) par rapport à $\widehat{x}_3$, on aura :

$$-\delta^2 \int_{-1}^{1} \operatorname{div}\left[a(\widehat{x})\nabla\Psi\right] d\widehat{x}_3 = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

et alors

$$-\delta^2 \operatorname{div}\left[a(\widehat{x})\nabla\overline{\Psi}\right] = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \overline{\Psi} = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

avec

$$\overline{\Psi}(\widehat{x}) = \int_{-1}^{1} \Psi(\widehat{x}, \widehat{x}_3)\, d\widehat{x}_3.$$

Ainsi $\overline{\Psi} \equiv 0$ dans Ω. Ensuite, l'inégalité de Poincaré nous permet d'avoir :

$$\|\Psi\|_{L^2(P)} \leq C \|\partial_3 \Psi\|_{L^2(\Omega)}.$$

□

Lemme 3.3. *Soit* Ψ *la solution de* (3.30), *où* $w \in W^{1,\infty}(P)$. *Alors il existe une constante* C *telle que*

$$\|\underline{\nabla}\,\Psi\|_{L^2(P)} \leq C\delta^{-1/2} \|w\|_{W^{1,\infty}}.$$

Démonstration. Soit $\chi \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ tel que :

$$\chi(\widehat{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \operatorname{dist}(\widehat{x}, \partial\Omega) < \delta, \\ 0 & \text{si } \operatorname{dist}(\widehat{x}, \partial\Omega) > 2\delta, \end{cases} \tag{3.31}$$

et

$$\|\chi\|^2_{L^2(P)} \leq C\delta, \qquad \|\nabla\chi\|^2_{L^2(P)} \leq \frac{C}{\delta}. \tag{3.32}$$

Soit

$$V_w(P) = \left\{ v \in H^1(P) \,:\, v = w \text{ sur } \partial P_L \right\}$$

On multiplie la première équation du problème (3.30) par une fonction test $(\Psi - \chi w) \in V(P)$, on aura :

$$\int_P \delta^2 \operatorname{div}\left[a(\widehat{x})\nabla\Psi\right](\Psi - \chi w)\, d\underline{\widehat{x}} + \int_P a_{33}(\widehat{x})\, \partial_{33}\Psi\, (\Psi - \chi w)\, d\underline{\widehat{x}} = 0.$$

En utilisant la formule de Green (formule d'intégration par parties), on obtient :

$$\delta^2 \int_P a(\widehat{x}) \nabla\Psi\nabla(\Psi - \chi w)\, d\underline{\widehat{x}} + \int_P a_{33}(\widehat{x})\, \partial_3\Psi\partial_3(\Psi - \chi w)\, d\underline{\widehat{x}} = 0,$$

et le fait que : $\nabla(\lambda A + \mu B) = \lambda\nabla A + \mu\nabla B$, on écrit :

$$\delta^2 \int_P a(\widehat{x}) \nabla\Psi[\nabla\Psi - \nabla\chi w]\, d\underline{\widehat{x}} + \int_P a_{33}(\widehat{x})\, \partial_3\Psi\partial_3(\Psi - \chi w)\, d\underline{\widehat{x}} = 0,$$

d'où

$$\delta^2 \int_P a(\widehat{x}) [\nabla\Psi\nabla\Psi - \nabla\Psi\nabla\chi w]\, d\underline{\widehat{x}} + \int_P a_{33}(\widehat{x})\, \partial_3\Psi\partial_3(\Psi - \chi w)\, d\underline{\widehat{x}} = 0,$$

donc

$$\delta^2 \int_P a(\widehat{x}) (\nabla\Psi)^2\, d\underline{\widehat{x}} - \delta^2 \int_P a(\widehat{x}) \nabla\Psi\nabla\chi w d\underline{\widehat{x}} + \int_P a_{33}(\widehat{x})\, \partial_3\Psi\partial_3\Psi d\underline{\widehat{x}} - \int_P a_{33}(\widehat{x})\, \partial_3\Psi\partial_3\chi w d\underline{\widehat{x}} = 0,$$

et comme $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$, on aura :

$$\delta^2 \int_P a(\widehat{x}) (\nabla\Psi)^2\, d\underline{\widehat{x}} - \delta^2 \int_P a(\widehat{x}) [\nabla\Psi w\nabla\chi + \chi\nabla w\nabla\Psi]\, d\underline{\widehat{x}} + \int_P a_{33}(\widehat{x})\, (\partial_3\Psi)^2\, d\underline{\widehat{x}} - \int_P a_{33}(\widehat{x})\, \partial_3\Psi\partial_3\chi w d\underline{\widehat{x}} = 0.$$

En utilisant (3.2), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\delta^2 \|\nabla\Psi\|^2_{L^2(P)} + \|\partial_3\Psi\|^2_{L^2(P)} \\
&\leq \delta^2 \|w\nabla\Psi\|_{L^2(P)} \|\nabla\chi\|_{L^2(P)} + \delta^2 \|\nabla\Psi\nabla w\|_{L^2(P)} \|\chi\|_{L^2(P)} + \|\partial_3\Psi\partial_3 w\|_{L^2(P)} \|\chi\|_{L^2(P)} \\
&\leq \delta^2 \|w\|_{W^{1,\infty}(P)} \|\nabla\Psi\|_{L^2(P)} C\delta^{-1/2} + \|\partial_3 w\|_{L^\infty(P)} \|\partial_3\Psi\|_{L^2(P)} C\delta^{1/2} \\
&\leq C\delta^{3/2} \|w\|_{W^{1,\infty}(P)} \|\nabla\Psi\|_{L^2(P)} + C\delta^{1/2} \|\partial_3 w\|_{L^\infty(P)} \|\partial_3\Psi\|_{L^2(P)} \\
&\leq C\delta^{1/2} \left[\delta \|w\|_{W^{1,\infty}(P)} \|\nabla\Psi\|_{L^2(P)} + \|\partial_3 w\|_{L^\infty(P)} \|\partial_3\Psi\|_{L^2(P)}\right] \\
&\leq C\delta^{1/2} \left[\delta \|\nabla\Psi\|_{L^2(P)} + \|\partial_3\Psi\|_{L^2(P)}\right] \|w\|_{W^{1,\infty}(P)} \\
&\leq C\delta^{1/2} \left[\delta^2 \|\nabla\Psi\|^2_{L^2(P)} + \|\partial_3\Psi\|^2_{L^2(P)}\right]^{1/2} \|w\|_{W^{1,\infty}(P)},
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\frac{\delta^2 \|\nabla\Psi\|^2_{L^2(P)} + \|\partial_3\Psi\|^2_{L^2(P)}}{\left[\delta^2 \|\nabla\Psi\|^2_{L^2(P)} + \|\partial_3\Psi\|^2_{L^2(P)}\right]^{1/2}} \leq C\delta^{1/2} \|w\|_{W^{1,\infty}(P)},$$

d'où

$$\left[\delta^2 \|\nabla\Psi\|^2_{L^2(P)} + \|\partial_3\Psi\|^2_{L^2(P)}\right]^{1/2} \leq C\delta^{1/2} \|w\|_{W^{1,\infty}(P)},$$

ce qui signifie que :

$$\delta \|\nabla\Psi\|_{L^2(P)} + \|\partial_3\Psi\|_{L^2(P)} \leq C\delta^{1/2} \|w\|_{W^{1,\infty}(P)},$$

donc

$$\|\nabla\Psi\|_{L^2(P)} + \|\partial_3\Psi\|_{L^2(P)} \leq C\delta^{-1/2} \|w\|_{W^{1,\infty}(P)}.$$

Finalement, on obtient :

$$\|\underline{\nabla}\Psi\|_{L^2(P)} \leq C\delta^{-1/2} \|w\|_{W^{1,\infty}(P)} .$$

$\square$

Lemme 3.4. *Soit $F \in L^2(P)$ et $\phi \in H^1(P)$ solution faible de*

$$\begin{cases} -\delta^2 div\left[a\left(\widehat{x}\right)\nabla\phi\right] - a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_{33}\phi = F & dans \quad P, \\ \phi = 0 & sur \quad \partial P_L, \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\eta} = 0 & sur \quad \partial P_{\pm}. \end{cases} \tag{3.33}$$

Alors il existe une constante C telle que

$$\|\phi\|_{H^1(P)} \leq C\delta^{-2} \|F\|_{L^2(P)} .$$

Démonstration. On multiplie la première équation du problème (3.33) par une fonction test v, on obtient :

$$-\delta^2 \int_P \operatorname{div}\left[a\left(\widehat{x}\right)\nabla\phi\right] v d\underline{\widehat{x}} - \int_P a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_{33}\phi v d\underline{\widehat{x}} = \int_P F v d\underline{\widehat{x}}.$$

On intègre par partie, on obtient :

$$\delta^2 \int_P a\left(\widehat{x}\right)\nabla\phi\nabla v d\underline{\widehat{x}} - \int_{\partial P} a\left(\widehat{x}\right)\nabla\phi\overrightarrow{\eta} v ds + \int_P a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_{33}\phi\nabla v d\underline{\widehat{x}} = \int_P F v d\underline{\widehat{x}},$$

et comme on a $\partial P = \partial P_{\pm} \cup \partial P_L$, on aura :

$$\delta^2 \int_P a\left(\widehat{x}\right)\nabla\phi\nabla v d\underline{\widehat{x}} - \int_{\partial P_L} a\left(\widehat{x}\right)\nabla\phi\overrightarrow{\eta} v ds - \int_{\partial P_{\pm}} a\left(\widehat{x}\right)\nabla\phi\overrightarrow{\eta} v ds + \int_P a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_{33}\phi\nabla v d\underline{\widehat{x}} = \int_P F v d\underline{\widehat{x}},$$

on a $\dfrac{\partial\phi}{\partial\eta} = \nabla\phi\overrightarrow{\eta} = 0$, d'où

$$\delta^2 \int_P a\left(\widehat{x}\right)\nabla\phi\nabla v d\underline{\widehat{x}} + \int_P a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_{33}\phi\nabla v d\underline{\widehat{x}} = \int_P F v d\underline{\widehat{x}} \quad \forall\ v \in V(P).$$

Soit $v = \phi$, d'après (3.2) et l'inégalité de Cauchy-schwartz, on aura :

$$\delta^2 \|\nabla\phi\|^2_{L^2(P)} + \|\partial_3\phi\|^2_{L^2(P)} \leq C \|F\|_{L^2(P)} \|\phi\|_{L^2(P)} ,$$

d'où

$$\|\nabla\phi\|^2_{L^2(P)} + \|\partial_3\phi\|^2_{L^2(P)} \leq C\delta^{-2} \|F\|_{L^2(P)} \|\phi\|_{L^2(P)} .$$

Puisque $\phi|_{\partial P_L} = 0$, l'inégalité de Poincaré est vraie et $\|\underline{\nabla}\phi\|^2_{L^2(P)} \leq C\delta^{-2} \|F\|_{L^2(P)} \|\phi\|_{L^2(P)}$. $\square$

En utilisant les lemmes (3.2) et (3.3), nous obtenons une estimation pour la solution de (3.28).

Corollaire 3.1. *Supposons que* $U_{2k}, k \in \mathbb{N}$, *résolvent* (3.28). *Alors*

$$\|U_{2k}\|_{H^1(P)} \leq C\delta^{-1/2}.$$

Nous estimons ensuite le résidu $r = u^\delta - \left(\zeta_0 + \delta^2 \mathring{u}_2\right)$. *Nous notons d'abord que*

$$\begin{cases} -\delta^2 div\left[a\left(\widehat{x}\right)\nabla r\right] - a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_{33} r = \delta^4 a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_{33}\mathring{u}_4 & dans \quad P, \\ r = -\delta^2 \mathring{u}_2 & sur \quad \partial P_L, \\ \dfrac{\partial r}{\partial \eta} = 0 & sur \quad \partial P_\pm. \end{cases}$$

Le résultat suivant est valide.

Théorème 3.1. *Soit* r *défini comme ci-dessus. Alors il existe une constante* C *telle que*

$$\|r\|_{H^1(P)} \leq C\delta^{3/2}. \tag{3.34}$$

Démonstration. D'près les Lemmes (3.2), (3.3) et (3.4), on aura :

$$\|r\|_{H^1(P)} \leq C\left(\delta^{-1/2}\left\|\delta^2\mathring{u}_2\right\|_{W^{1,\infty}(P)} + \delta^{-2}\left\|\delta^4 a_{33}\left(\widehat{x}\right)\partial_{33}\mathring{u}_4\right\|_{L^2(P)}\right) \leq C\delta^{3/2},$$

d'où le résultat. □

Le résultat suivant présente une estimation de la différence entre u^δ et le premier terme du l'expansion asymptotique.

Corollaire 3.2. *Soit* u^δ *la solution de* (3.1) *et* ζ_0 *solution de* (3.26), *alors*

$$\left\|u^\delta - \zeta_0\right\|_{H^1(P)} \leq C\delta^{3/2}.$$

Démonstration. En ajoutant et en retranchant $\delta^2\mathring{u}_2$, en utilisant (3.29) et (3.34), on obtient :

$$\begin{aligned} \left\|u^\delta - \zeta_0\right\|_{H^1(P)} &\leq \left\|u^\delta - \zeta_0 - \delta^2\mathring{u}_2 + \delta^2\mathring{u}_2\right\|_{H^1(P)} \\ &\leq \left\|u^\delta - \left(\zeta_0 + \delta^2\mathring{u}_2\right)\right\|_{H^1(P)} + \delta^2\left\|\mathring{u}_2\right\|_{H^1(P)} \\ &\leq C\delta^{3/2} + C\delta^2. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.5. *Soit* $w_1 \in H_0^1\left(\Omega\right)$ *la solution de* (3.12). *Alors*

$$\|w_1\|_{H^1(\Omega)} \leq C\delta^{1/2}.$$

Remarque 3.1. Il est également possible de montrer le résultat ci-dessus en modifiant les preuves du lemme (3.3) et (3.4).
D'après le lemme (3.5), nous avons

$$\left\|\delta\widehat{x}_3 w_1\right\|_{H^1(\Omega)} \leq C\delta^{3/2}.$$

Soit

$$\tilde{u}\left(\delta\right)\left(\underline{\widehat{x}}\right) = \tilde{u}^{\delta}\left(\underline{x}\right) = \xi_0\left(\widehat{x}\right) + \delta\widehat{x}_3 w_1\left(\widehat{x}\right),$$

on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{u}\left(\delta\right) - u\left(\delta\right) &= \tilde{u}\left(\delta\right) - \xi_0 + \xi_0 - u\left(\delta\right) \\
&= \xi_0\left(\widehat{x}\right) + \delta\widehat{x}_3 w_1\left(\widehat{x}\right) + \xi_0 - u\left(\delta\right) \\
&= \delta\widehat{x}_3 w_1\left(\widehat{x}\right) - \left(u\left(\delta\right) - \xi_0\right),
\end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
\left\|\tilde{u}\left(\delta\right) - u\left(\delta\right)\right\|_{H^1(P)} &= \left\|\delta\widehat{x}_3 w_1\left(\widehat{x}\right) - \left(u\left(\delta\right) - \xi_0\right)\right\|_{H^1(P)} \\
&\leq \left\|\delta\widehat{x}_3 w_1\left(\widehat{x}\right)\right\|_{H^1(P)} + \left\|u\left(\delta\right) - \xi_0\right\|_{H^1(P)} \\
&\leq \delta C\delta^{1/2} + C\delta^{3/2} \\
&\leq C\delta^{3/2} + C\delta^{3/2} \\
&\leq C\delta^{3/2}.
\end{aligned}$$

Théorème 3.2. *Soit $u\left(\delta\right)$ la solution de (3.14) et $\widetilde{u}\left(\delta\right)$ la solution du modèle. Alors il existe une constante C indépendante de δ telle que*

$$\left\|\widetilde{u}\left(\delta\right) - u\left(\delta\right)\right\|_{H^1(P)} \leq C\delta^{3/2}.$$

Bibliographie

[1] A.C. Carius et A.L. Madureira. *Hierarchical modeling of the heat equation in a heterogeneous plate*, Mathematical Methods in the Applied Sciences-Vol 38, issue 15, 2014.

[2] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle (Théorie et applications)* Masson Paris. 1983.

[3] J.L. Lions. *Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal*. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[4] Lagrée, Pierre-Yves. *Méthodes Multi Echelles : Développements Asymptotiques Raccordés.*

[5] P.G.Ciarlet. *Mathematical elasticity : Theory of plates*. North-Holland. 1988.

[6] Sanchez-hubert, et E-Sanchez Palencia.*Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*. Masson. 1992.