

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE.  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI, TIZI-OUZOU  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques



**MÉMOIRE DE MASTER**  
en  
**MATHÉMATIQUES**

Spécialité  
Recherche Opérationnelle : Méthodes et modèles de décision

Thème

**Contrôle optimal  
de la traversée d'un fleuve  
Par une barque**

Présenté par

HAKKOUM Sabrina  
FATEH Samia

Travail dirigé par :

MERAKEB ABDELKADER	M. Conf A	UMMTO	Président
AMIROU AHMED	M. Conf B	UMMTO	Examinateur
AIDENE MOHAMED	Professeur	UMMTO	Rapporteur

Soutenu le : 26 /06/2016

# "Contrôle optimal de la traversée d'un fleuve par une barque"

**Résumé :** On s'intéresse dans ce mémoire à l'étude d'un problème de contrôle optimal appelé "problème de Zermelo", qui consiste à étudier le mouvement d'une barque se déplaçant à vitesse constante sur un fleuve en tenant compte de la force du courant.

La résolution de ce problème utilise la méthode de tir simple qui fait partie des méthodes indirectes et qui est basée sur le principe du maximum de Pontryagin, et qui consiste à réduire le problème de contrôle optimal en un problème résolable numériquement.

**Abstract :** In writing this memoir, we are interested in the study of a problem of optimal control verification entitled "Zermelo Problem" which studies the direction of a boat moving at a constant speed (unvarying speed) in a river, taking in consideration the force of the current.

To solve this problem, we use the method of simple shooting that belongs to indirect methods based on the maximum principle of Pontryagin which reduces the problem of optimal control into a numerical solvable problem.

# *Remerciements*

Non remerciements vont avant tout au DIEU qui nous a donné le courage et la volonté de travailler consciencieusement pour l'élaboration de ce mémoire.

Nos remerciements vont aussi à *M<sup>r</sup>*.Mohamed Aidene, professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, d'avoir proposé et accepté de diriger ce travail, pour son aide précieuse, ses remarques constructives, ses conseils, son soutien, et pour son sérieux suivi dans la préparation de ce travail.

Nous remercions également les membres de jury pour avoir accepté de juger notre travail.

Nous exprimons vivement notre gratitude à l'ensemble de nos enseignants qui nous ont suivi inlassablement durant tout notre cursus universitaire.

Enfin, nos meilleurs remerciements vont à tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin, encouragé tout au long de notre parcours universitaire en particulier nos familles et nos amis(es).

## *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail :*

★A toutes les personnes marquantes dans ma vie.

★ Aux gents qui m'on offert la joie et la prospérité, a ces personnes qui n'hésite a n'importe quel moment et n'importe quel condition de me soutenir et de m'encourager afin de relever les défis.

★ Je le dédie à ma mère et à mon cher papa .

★ A mes soeurs et frères .

★Aux anges qui éclairent ma vie "Massicylia", "Imane", "Idris", "Jonas".

★A ma chère Samia (binôme) et sa mère Nna Rezika et à Massil et Cylia.

★A Lynda et Dihia.

★ A une personne spécifique ,et très special pour moi.

★ A mes cousins et cousines, ainsi que toute ma grande famille.

★A toute ma section Recherche Opérationnelle.

SABRINA

## *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail :*

★ A ma très chère mère, pour son aide et son soutien tout au long de mes études, qui n'a pas cessé de prier pour moi et m'encourager, que dieu me la garde.

★ A mes adorables frères Massil et Cylia.

★ A mon fiancé Amar, et à ma belle famille.

★ A toute ma famille et mes amis(es).

★ A ma chère amie Sabrina (binôme), et à toute sa famille surtout Rezika.

★ A toute ma section recherche opérationnelle .

★ A tous ceux qui me sont chers dont je n'ai pas cité les noms et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à ce travail.

Samia

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>4</b>
<b>1 Introduction au contrôle optimal</b>	<b>6</b>
1.1 Introduction . . . . .	6
1.2 Position du problème . . . . .	6
1.3 Définition d'un système de contrôle optimal . . . . .	7
1.3.1 Remarques . . . . .	7
1.4 Objet de la commande . . . . .	7
1.5 Condition initiale du système . . . . .	8
1.6 Objectif du contrôle optimal . . . . .	8
1.7 Classe de commande admissible . . . . .	8
1.7.1 Commande Bang-Bang . . . . .	8
1.7.2 Remarques . . . . .	9
1.8 Critère de qualité . . . . .	9
1.8.1 Les critères physiques de performances des fonctions objectifs . . . . .	10
1.9 Contrôlabilité . . . . .	10
1.10 Contrôle optimal d'un système linéaire . . . . .	11
1.10.1 Ensemble accessible . . . . .	11
1.10.2 Rappel sur la contrôlabilité . . . . .	11
1.10.3 Définition du système de contrôle linéaire . . . . .	12
1.10.4 Condition générale pour la contrôlabilité des systèmes linéaires . . . . .	13
1.10.5 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes . . . . .	13
1.10.6 Contrôlabilité d'un système autonome sans contraintes	14
1.10.7 Contrôlabilité d'un système linéaire autonome avec contraintes	14
1.11 Système de contrôle optimal non-linéaire . . . . .	15
1.11.1 Introduction . . . . .	15

---

1.11.2	Définitions . . . . .	15
1.11.3	Application entrée-sortie . . . . .	16
1.11.4	Contrôlabilité des systèmes non-linéaires . . . . .	18
1.11.5	Ensemble accessible . . . . .	18
1.11.6	Contrôlabilité en temps quelconque et en temps $T$ . . .	19
<b>2</b>	<b>Principe du maximum et méthode de tir simple</b>	<b>21</b>
2.1	Introduction . . . . .	21
2.2	Position du problème . . . . .	23
2.3	Définitions . . . . .	23
2.3.1	Définition 1 . . . . .	23
2.3.2	Définition 2 . . . . .	24
2.3.3	Définition 3 . . . . .	24
2.4	Cas sans contraintes sur le contrôle ( <b>principe du maximum faible</b> ) . . . . .	24
2.4.1	Introduction . . . . .	24
2.4.2	Problème de Lagrange : . . . . .	25
2.4.3	Problème de Mayer-Lagrange . . . . .	27
2.5	Cas avec contraintes sur le contrôle ( <b>Principe du maximum de Pontryagin</b> ) . . . . .	28
2.5.1	Introduction . . . . .	28
2.5.2	Enoncé général . . . . .	28
2.5.3	Problème autonome . . . . .	31
2.6	Méthode de tir simple . . . . .	34
2.6.1	Introduction . . . . .	34
2.6.2	Méthode de tir simple . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Problème de la traversée du fleuve de Zermalo</b>	<b>37</b>
3.1	Biographie . . . . .	37
3.2	Introduction . . . . .	39
3.3	Position du problème . . . . .	39
3.4	Principe du maximum appliqué au problème de Zermalo . . .	40
3.5	Application de la méthode de tir simple . . . . .	42
3.6	Exemple . . . . .	43
3.6.1	Résolution des trois problèmes par la méthode de tir simple sous Matlab . . . . .	48
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>58</b>

**Bibliographie**

# Introduction générale

La théorie du contrôle optimal est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et la dynamique. Elle comporte deux volets : le principe du maximum et l'équation d'hamilton-Jacobi-Bellman. Ceci est une conséquence directe de la programmation dynamique initiée aux états unis par Richard Bellman.

Cette théorie vise à analyser les propriétés des systèmes contrôlés c'est à dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande. Elle permet de déterminer la commande d'un système qui minimise ou maximise un critère de performance éventuellement sous des contraintes de type inégalité sur la commande mais on peut aussi envisager des contraintes de même type sur l'état. Cette théorie est une généralisation de calcul des variations elle fait partie de l'automatique et des mathématiques appliqués. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes directs...etc. D'origine diverses : mécanique, chimie, biologie...etc.

Notre mémoire est organisé de la manière suivante :

Le premier chapitre est une introduction au contrôle optimal dont on va donner des notions de base et aussi l'objectif de cette théorie en première partie puis on va définir les systèmes de contrôle linéaires autonomes et non-autonomes et on va étudier leurs contrôlabilités .

Dans la troisième partie de ce chapitre on s'intéressera aux systèmes de contrôle non-linéaires et leurs contrôlabilités.

Dans le deuxième chapitre, on cherche à résoudre le problème de contrôle optimal à l'aide du principe du maximum et on va s'intéresser aux méthodes de résolutions indirectes : la méthode de tir simple.

Le troisième chapitre sera consacré à une application de cette théorie au "problème de Zermalo" sous plusieurs formes. Une expérimentation de ce problème sera faite à l'aide du logiciel MATLAB.

# Chapitre 1

## Introduction au contrôle optimal

### 1.1 Introduction

Avant de passer à la résolution d'un problème de contrôle optimal, on définit d'abord ses objets et ses éléments de base et on aborde les différents systèmes qui le caractérise, puis on étudie leurs contrôlabilité, et on envisage aussi l'objectif de cette importante théorie.

### 1.2 Position du problème

Lors de leurs fonctionnement, les processus physiques consomment de l'énergie. L'objectif est alors de minimiser cette dépense. Une fois qu'on a déterminé la modélisation mathématique de notre problème physique. Par la description et l'identification des variables qui décrit le comportement de ce système qui évolue dans le temps.

En connaissant :

- La fonction à optimiser.
- L'état.
- Le modèle.
- Les variables(paramètres) du système.

Le problème consiste à déterminer la meilleure commande qui optimise l'objectif.

**Exemple :** une commande en temps optimal est celle qui réalise l'objectif d'un processus en temps le plus court. A l'aide des commandes  $u \in U$  on désire que le système suit une trajectoire bien déterminée qui minimise avec

sa commande un ou plusieurs critères donné à l'avance.

### 1.3 Définition d'un système de contrôle optimal

Un système de contrôle est la donnée d'un espace d'état  $X$  et d'un espace de contrôle  $U$  et une loi d'évolution du type :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(t, x, u) \quad (1)$$

(1) : loi d'évolution.

$x(t) \in X$  : l'état du système à l'instant  $t \in [0, T]$ .

$u(t) \in U$  : la commande choisie.

#### 1.3.1 Remarques

1. La complexité du système de contrôle dépend de la complexité des espaces  $X$ ,  $U$  et la nature de l'équation d'évolution.
2. La distinction majeur est de savoir si  $X$  et  $U$  sont des espaces de dimension finie ou infinie.
3. Quand l'état  $x(t)$  est caractérisé par un nombre fini de paramètres, Ces derniers sont faciles à maîtriser que lorsqu'ils sont en nombre infinie.
4. La principale simplification possible de l'équation d'évolution est de supposer que la valeur de  $f(t, x, u)$  dépend linéairement du couple  $(x, u)$ .

### 1.4 Objet de la commande

On suppose que l'état  $x$  est solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$x(t) \in \mathbb{R}$  : position de l'objet à l'instant  $t$ .

$x(0)$  : position initiale .

$u(t)$  : la commande.

## 1.5 Condition initiale du système

### Définition

La condition initiale du système,  $x_0 = x(0)$  est un vecteur donné dans un plan de phase.  $x(t)$  et  $x(0)$  peuvent représenter physiquement la vitesse, la température,...etc.

## 1.6 Objectif du contrôle optimal

Dans un problème de contrôle optimal, le but de la commande consiste à conduire un système dynamique contrôlé d'une position initiale  $x_0 = x(0)$  ( $x_0 \in A_0$ ) à une autre position finale souhaitée  $x^* = x(t^*)$   $x^* \in A_1$  . Ici ( $A_0$  : ensemble de départ et  $A_1$  : ensemble d'arrivée) tout en minimisant ou maximisant un certain coût. Ou bien optimiser le fonctionnement d'un système en fonction de coût, ou de stabiliser un système pour le rendre insensible à certaines perturbations.

## 1.7 Classe de commande admissible

**Définition** : la classe de commande admissible  $U$  est constituée de la fonction mesurable  $u(t)$

$$U = \{u(t), t \in T = [0, T]\}.$$

L'ensemble des commandes admissibles peut être continu ou de type Bang-Bang.

### 1.7.1 Commande Bang-Bang

Soit  $U$  l'ensemble des commandes .

Soit  $U'$  l'ensemble des points extrémaux de  $U$ .

Un contrôle  $u \in U$  est appelé contrôle de type Bang-Bang si  $u \in U'$  prend les valeurs extrémales de  $U$  (ensemble borné).

**Exemple** :  $|U(t)| \leq 1$ , les commandes de Bang-Bang sont  $u(t) = \pm 1$ .

### 1.7.2 Remarques

1. En remplaçant  $u_j$  par  $v_j$  et on posant  $u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j$  et ainsi  $v_j$  est integrable et l'on a  $-1 \leq v_j \leq 1$ .
2. Lorsque  $U$  est borné, il est toujours pratique de se ramener à des commandes entre  $-1$  et  $1$ .
3. Une commande Bang-Bang est une commande qui possède au moins un switch.

## 1.8 Critère de qualité

Le choix d'un critère de qualité est donné par la modélisation mathématique des exigences physiques.

**Définition :** Le critère de qualité est appelé coût ou fonction objectif. Il est décrit par la formule :

$$J(x, u) = g(T, x^*) + \int_0^T f_0(t, x, u)dt$$

Où

$g(T, x^*)$  : coût terminal.

$\int_0^T f_0(t, x, u)dt$  : dépend de l'état du système tout au long du processus.

### Remarques

1.  $g(T, x^*)$  à son importance quand  $T$  est libre, si non elle est constante.
2. Les trajectoires dépendent de temps  $t$  mais surtout des variables de contrôle  $U$ , c'est une fonction d'efficacité de chaque commande sur l'intervalle  $[0, T]$ .

### 1.8.1 Les critères physiques de performances des fonctions objectifs

#### Temps optimal

**Définition** : quand  $g(T, x^*) = 0$  et  $f_0(t, x, u) = 1$  et  $T$  est libre dans l'expression

$$\min_u \left\{ g(T, x^*) + \int_0^T f_0(t, x, u) dt \right\}$$

On parle alors d'un problème terminal en temps optimal.

#### Coût optimal

**Définition** : Lorsque le temps final  $T$  est fixé dans l'expression

$$\min_u \left\{ g(T, x^*) + \int_0^T f_0(t, x, u) dt \right\}$$

on parle alors d'un problème terminal en coût optimal.

#### Remarques :

1. Il existe des problèmes qui combine les deux critères physiques. On parle alors d'un problème de contrôle en temps et en coût optimal (problème de Mayer-Lagrange).
2. Si  $U$  est un contrôle scalaire et  $f_0$  proportionnelle à  $U$  on parle d'un problème de contrôle à coût d'approvisionnement.
3. Lorsque les équations d'état  $\dot{x} = f(x, u)$  ne dépendent pas explicitement de  $t$  on parle de problème autonome.
4. Si  $T$  est présent dans les équations d'état on parle de problème non-autonome.

## 1.9 Contrôlabilité

Le problème de contrôlabilité est de savoir avant de déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible si cette dernière est admissible en d'autres terme existe-il un contrôle  $u$  tel que la trajectoire associée  $x$  à  $u$  ramène le système de  $x_0 \in A_0$  à  $x^* \in A_1$  en temps fini ?

(ici  $x_0$  et  $x^*$  sont quelconques).

Où :

$A_0$  : ensemble de départ.

$A_1$  : ensemble d'arrivée.

Cela veut dire qu'avant la résolution du problème, on s'intéresse à l'existence de sa solution. Cette notion a été introduite par Kalman en 1960 pour des systèmes linéaires de la forme :  $\dot{x} = Ax + bu + r$ .

## 1.10 Contrôle optimal d'un système linéaire

### 1.10.1 Ensemble accessible

#### Définition

Considérons le système contrôlé :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), t \in [0, T]. \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

L'ensemble des points ou des extrémités des solutions du système accessible à partir de  $x_0$  en temps final  $T$  en faisant varier  $u$  est défini par :

$$A_{cc}(x_0, t) = \{x_u(T) / u \in U\}.$$

#### Théorème

Soit le système de contrôle linéaire dans  $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t),$$

où  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  compact, Soit  $T > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  alors  $\forall t \in [0, T]$ ,  $A_{cc}(x_0, t)$  est compact, convexe et varie continûment avec  $t$  sur  $[0, T]$ .

**Démonstration : voir [1].**

### 1.10.2 Rappel sur la contrôlabilité

**Définition :** Un système de contrôle

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t),$$

est dit contrôlable en temps  $T$  si  $A_{cc}(x_0, T) = \mathbb{R}^n$ , c'est à dire  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ , il existe un contrôle  $u$  telle que la trajectoire associée relie  $x_0$  à  $x_1$  en temps  $T$ .

### 1.10.3 Définition du système de contrôle linéaire

Les systèmes de contrôle linéaires sont les plus simples.  
Leurs formulation mathématique est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), t \in [0, T] = I. \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Avec une simplification supplémentaire est de supposer que l'équation d'évolution est une équation différentielle ordinaire linéaire où :

- $I \subset \mathbb{R}$ .
- $A \in L^\infty([0, T], M_n(\mathbb{R}))$  : localement intégrable sur I à valeur dans  $M_n(\mathbb{R})$ .
- $B \in L^\infty([0, T], M_{n,m}(\mathbb{R}))$  : localement intégrable sur I à valeur dans  $M_{n,m}(\mathbb{R})$ .
- $r \in L^\infty([0, T], M_n(\mathbb{R}))$  : localement intégrable sur I à valeur dans  $M_n(\mathbb{R})$ .

Soit  $F(\cdot) = I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  la résolvante du système linéaire homogène  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  définie par :

$$\begin{cases} \dot{F} = A(t)F(t). \\ F(t_0) = Id. \end{cases}$$

$Id$  = matrice identité.

$\forall u$ , le système de contrôle linéaire admet une unique solution  $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolument continue donnée :

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_0^t F(t)F^{-1}(s)(B(s)u(s) + r(s))ds, t \in I.$$

#### Remarques

1.  $\forall t \in I$ , si  $r = 0$  et  $x_0 = 0$ , la solution du système s'écrit :

$$x(t) = F(t) \int_0^t F^{-1}(S)B(s)u(s)ds$$

linéaire en  $u$ .

2. Notre problème est un problème de Cauchy bien posé et le système de contrôle à par conséquent une unique solution.

### 1.10.4 Condition générale pour la contrôlabilité des systèmes linéaires

La première façon de caractériser la contrôlabilité du système linéaire a été décrite par Kalman en 1963 et Ho et Narendra. Le système

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$$

est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice :

$$C(T) = \int_0^T F(t)B(t)B^{-1}(t)F^{-1}(t)dt$$

dite matrice de contrôlabilité est inversible(Gramienne).

**Démonstration : voir [5]**

**Remarque :** Cette condition ne dépend pas de  $x_0$  c'est à dire que si un système linéaire est contrôlable en T depuis  $x_0$  alors il est contrôlable en T depuis tout point.

### 1.10.5 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

#### Définition1

Le système  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$  est dit autonome si les matrices A et B ne dépendent pas de t on dit alors que c'est un système invariant dans le temps.

#### Définition2

Le système autonome  $\dot{x} = Ax + Bu$  où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ , A et B constantes de taille  $n \times n$  et  $n \times m$  respectivement est contrôlable si  $\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ , il existe une commande mesurable bornée  $u(t)$  telle que la trajectoire associée relie  $x_0$  à  $x_1$  en un temps fini T.

**Remarque :** Dans le cas d'un système linéaire autonome, la matrice  $F(t) = e^{At}$  et la solution x du système associé au contrôle u s'écrit :

$$\forall t \in I, x(t) = e^{At}(x_0 + \int_0^t e^{-As}(B(s)u(s) + r(s))ds).$$

### 1.10.6 Contrôlabilité d'un système autonome sans contraintes

Dans le cas d'un système linéaire autonome sans contraintes on fait appel à une caractérisation algébrique de contrôlabilité dû à Kalman qui remonte à 1960.

#### Définition

Soit  $A, B$  deux matrices constantes sur  $[0, T]$  on note :

$$C = (A \setminus B) = (B, AB, \dots, A^{n-1}B) \in M_{n,m}(\mathbb{R}).$$

$C$  est dite matrice de Kalman.

#### Théorème

On suppose que  $\Omega = \mathbb{R}^m$  ( pas de contraintes sur le contrôle). Le système  $x(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t), t \in [0, T]$  est contrôlable en temps  $T$  si et seulement si la matrice de Kalman  $C$  est de rang  $n$  ( condition de Kalman).

**Démonstration : voir [1].**

**Remarque :** La condition de Kalman ne dépend pas de  $T$  et  $x_0$ , c'est un système linéaire autonome et contrôlable en temps  $T$  depuis  $x_0$ , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.

### 1.10.7 Contrôlabilité d'un système linéaire autonome avec contraintes

C'est à dire  $u$  appartient à un sous ensemble  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Les propriétés de contrôlabilité globale sont reliées aux propriétés de stabilité de la matrice  $A$ . Il est clair que si :

- La condition de Kalman est vérifiée.
- $r = 0$  et  $0 \in U$ .
- La matrice  $A$  est stable ( toutes les valeurs propres de  $A$  sont de partie réelle strictement négative ( critère de Hurwitz)).

Alors tout point de  $\mathbb{R}^n$  peut être conduit à l'origine  $(0, 0)$  en temps fini.

**Théorème**

On considère le système  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ,  $B \in \mathbb{R}^n$  et  $u(t) \in U \subset \mathbb{R}$  avec  $0 \in U$ . Alors tout point de  $\mathbb{R}^n$  peut être conduit à l'origine en temps fini si et seulement si  $(A, B)$  vérifie la condition de Kalman et la partie réelle de chaque valeur propre de  $A$  est inférieure ou égale à zéro.

**Remarque :** Pour un système linéaire autonome l'origine  $(0, 0)$  est un état d'équilibre. Selon  $A$  le système peut être stable ou instable. Dans le cas où notre système n'est pas stable, on doit rendre l'origine stable à l'aide d'un contrôle  $U = Kx(t)$  avec  $K$  matrice de  $M_{m,n}(\mathbb{R})$ .

**Théorème**

Si  $(A, B)$  vérifie la condition de Kalman alors il est possible de trouver  $K$  tel que  $A + BK$  vérifie le critère de Hurwitz. Il est de même possible de choisir de toutes les valeurs propres de  $A + BK$  ( théorème de déplacement de pôle).

**Démonstration :** voir[5].

## 1.11 Système de contrôle optimal non-linéaire

### 1.11.1 Introduction

La compréhension des systèmes non-linéaires nécessite l'étude des systèmes linéaires. Les systèmes non-linéaires sont plus riches et leurs études nécessite l'introduction de nouvelles techniques et notions.

### 1.11.2 Définitions

#### Point d'équilibre, trajectoires et définitions

Considérons un système de contrôle non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Avec  $f \in C^1(\mathbb{R}^n * \mathbb{R}^m)$  et  $u(t) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^n)$ , On dit que  $x \in C^0([0, T], \mathbb{R}^n)$

solution du système si :

$$\forall t_1 \leq T, x(t_1) = x_0 + \int_0^{t_1} f(x(t), u(t)) dt.$$

- Les points d'équilibres sont les couples  $(x_e, u_e)$  tel que  $f(x_e, u_e) = 0$ .
- Les trajectoires sont les couples  $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$  où  $\bar{x}(t)$  est la solution pour le contrôle  $\bar{u}(t)$ .

**Remarques :**

1. Etant donné un point d'équilibre, on peut se demander si le système est contrôlable au voisinage de ce point.
2. Etant donné une trajectoire, on peut étudier la contrôlabilité du système au voisinage de cette trajectoire.

**Le test linéaire**

**Définition :** Considérons une trajectoire  $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ . Introduisons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t))y(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}(t), \bar{u}(t))v(t). \\ y(t=0) = y_0. \end{cases}$$

Où :  $y(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $v(t) \in \mathbb{R}^m$ .

Le système est appelé système linéaire autour de la trajectoire.

**Remarques**

1. On peut linéariser un système au voisinage d'un point d'équilibre défini par le couple constant  $(x_e, u_e)$ . On se ramène alors à un système linéaire autonome :

$$\dot{y} = Ay + Bv$$

avec  $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)$  et  $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)$ .

2. Si on linéarise autour d'une véritable trajectoire mouvante, on obtient un système linéaire non-autonome.

### 1.11.3 Application entrée-sortie

**Problème :** Etant donné un point  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , trouver un temps  $T$  et un contrôle  $u$  sur  $[0, T]$  tel que la trajectoire  $x_u$  associée à  $u$  vérifie :  $x_u(0) = x_0$   $x_u(T) = x_1$ .

**Définition**

Soit  $T > 0$ . L'application entrée-sortie en un temps  $T$  du système de contrôle non-linéaire initialisé à  $x_0$  est l'application :

$$E_{x_0, T} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$u \longmapsto x_u(T) = x_1$$

Où :  $x_u(\cdot)$  est solution du système :

$$\begin{cases} \dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t). \\ x_u(0) = x_0. \end{cases}$$

$U$  : L'ensemble des contrôles admissibles c'est à dire l'ensemble des contrôles  $u$  tel que la trajectoire associée est bien définie sur  $[0, T]$ .

**Régularité de l'application entrée-sortie**

La régularité de  $E_T$  dépend de l'espace de départ et de la forme du système.

**Pour un système général**

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t)). \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Où  $f \in C^P$ ,  $P \geq 1$  et  $U$  est le domaine de définition de  $E_T$  (l'ensemble des contrôles dont la trajectoire associée est bien définie sur  $[0, T]$ ). Alors  $U$  est un ouvert de  $L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$  et  $E_T$  est au sens  $L^\infty$ . De plus  $E_T$  est différentielle au sens de Frechet (**voir [2]**) en  $u \in U$  elle est donnée par le système linéarisé en  $u$  de la manière suivante :  $\forall t \in [0, T]$

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_u(t), u(t)), B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, x_u(t), u(t))$$

Le système de contrôle linéaire :

$$\begin{cases} \dot{y}_v(t) = A(t)y_v + B(t)v(t). \\ y_v(0) = 0. \end{cases}$$

C'est un système linéaire le long de la trajectoire  $x_u$ . La différentielle de Frechet de  $E_T$  en  $u$  est une application  $dE_T(u)$  telle que  $\forall v \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$

$$dE_T(u)v = y_v(T) = M(T) + \int_0^T M^{-1}(s)B(S)v(s)dS.$$

Où  $M$  : La résolvante du système linéaire solution de :

$$\begin{cases} \dot{M} = A(t)M(t). \\ M_0 = Id. \end{cases}$$

**Démonstration : voir [1]**

### 1.11.4 Contrôlabilité des systèmes non-linéaires

**Introduction :**

L'étude de la contrôlabilité des systèmes non-linéaires reste une tâche très difficile, cette dernière remonte à près de 50 ans.

Pour cette étude on a tendance à étudier le système linéarisé, la contrôlabilité de ce dernier implique celle du système linéaire d'une manière locale.

L'inconvénient de cette méthode est que la non contrôlabilité du système linéarisé n'implique pas celle du système non-linéaire.

### 1.11.5 Ensemble accessible

**Définition :** l'ensemble accessible en temps  $T$  pour le système de contrôle non linéaire, noté  $A_{cc}(x_0, T)$  est l'ensemble des extrémités en temps  $T$  des solutions du système partant de  $x_0$  au temps  $t = 0$ . Autrement dit c'est l'image de l'application entrée-sortie .

**Théorème**

Considérons le système de contrôle

$$\dot{x} = f(t, x, u), x(0) = x_0$$

où la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $R^{n+m+1}$ , et les contrôles  $u$  appartient à l'ensemble  $U$  des fonctions mesurables à valeur dans un compact  $\omega \subset \mathbb{R}^m$ .

On suppose que :

- $b > 0$  tel que toute trajectoire associée est uniformément bornée par  $b$  sur  $[0, T]$  c'est à dire  $\exists b > 0 \forall u \in U, \forall t \in [0, T] \|x_u(t)\| \leq b$ .
- Pour tout  $(t, x)$ , l'ensemble des vecteurs de vitesses  $v(t, x) = \{f(t, x, u) / u \in \Omega\}$  est convexe.

Alors l'ensemble  $A_{cc}(x_0, t)$  est compact et varie continûment en  $t$  sur  $[0, T]$ .

**Démonstration :** voir[1].

### 1.11.6 Contrôlabilité en temps quelconque et en temps $T$

**Définition :** Le système de contrôle non-linéaire est dit :  
 contrôlable (en temps quelconque) depuis  $x_0$  si  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{T \geq 0} A_{cc}(x_0, T)$   
 contrôlable en temps  $T$  si  $\mathbb{R}^n = A_{cc}(x_0, T)$ .

**Proposition :**

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Avec  $f(x_0, u_0) = 0$ .

On note

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)$$

et

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)$$

si

$$\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$$

alors le système est localement contrôlable en  $x_0$ .

### Théorème

Si le système linéarisé est contrôlable, alors le système non-linéaire  $\dot{x} = f(x, u)$  est contrôlable au voisinage de la trajectoire  $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$  c'est à dire  $\exists r > 0$  tel que  $\forall x_i, x_f \in X$  avec  $|x_i - \bar{x}(0)| \leq r$  et  $|x_f - \bar{x}(T)| \leq r$ ,

il existe un contrôle  $u(t)$  permettant de relier  $x_i$  à  $x_f$  de plus,  $U$  est proche de  $\bar{U}$  dans  $U$ .

**Démonstration : voir[5]**

# Chapitre 2

## Principe du maximum et méthode de tir simple

### 2.1 Introduction

Après avoir résolu le problème de contrôlabilité, alors parmi toutes les trajectoires correspondantes, on cherche celle qui le fait en temps minimal, ou celle qui le fait en minimisant un certain critère, c'est le problème de contrôle optimal.

Il existe deux grandes classes de résolution de ce problème :

- principe du maximum.
- Programmation dynamique.

Dans ce chapitre, on s'intéresse au principe du maximum qui est une généralisation des équations d'Hamilton-Jacobi de calcul des variations et de la condition nécessaire d'extrémum fort de Weirstress. les idées sujacentes a ce principe sont bien plus anciennes , ce principe a été déjà entrevenu par Constantin Carathiodory dès 1935 et plus précisément par Magnus Hestemsen en 1950.

C'est à la base des intuitions de Pontryagin et sous sa direction que ce principe existe aujourd'hui, tout d'abord pour les problèmes de temps minimal. Le principe du maximum de Pontryagin est une condition nécessaire d'optimalité, il donne comme solution une commande en boucle ouverte (fonction de temps).

Il existe plusieurs variantes de ce principe selon que le temps final est fixé ou libre ou les points de départ sont fixés ou doivent satisfaire une contrainte.

Il est important de noter que cette condition à une forme qui diffère essentiellement de celle des équations d'Euler-Lagrange.

La résolution préalable du problème du maximum auxiliaire d'où le terme principe du maximum.

## 2.2 Position du problème

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t, u), \\ x(0) = x_0, x(T) = x_1 \end{cases} \quad (1)$$

et la fonctionnelle à optimiser :

$$J(u) = \int_0^T f_0(t, x, u) dt \rightarrow \min_u \quad (2)$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T]$$

.

Où  $U \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$  : ensemble des commandes admissibles bornées et continues par morceaux sur  $[0, T]$ .

$f_0$  : fonction du coût.

$x_0$  : état initial du système à l'instant 0.

$x_1$  : état final du système à l'instant  $T$ .

Le problème consiste à transférer le point représentatif de l'état  $x_0$  à l'état  $x_1$  tout en minimisant la fonctionnelle  $J$ .

## 2.3 Définitions

### 2.3.1 Définition 1

On peut rassembler les équations (1) et (2) en utilisant la fonction  $H(t, x, p, p_0, u)$  définie sur  $\mathbb{R}^n * \mathbb{R}^n * \bar{\Omega}$  tel que :

$$H(t, x, p, p_0, u) = p_0 f_0(t, x, u) + \langle p, f(t, x, u) \rangle$$

$H(t, x, p, p_0, u)$  est appelée fonction hamiltonienne, où  $\bar{\Omega}$  : la fermeture de  $\Omega$ .

Les fonctions  $H(t, x, p, p_0, u)$  et  $\frac{dH}{dx}(t, x, p, p_0, u)$  sont continue sur  $\mathbb{R}^n * \mathbb{R}^n * \Omega$ .

### 2.3.2 Définition 2

La fonction  $P$  découle de la résolution du système d'équation aux variables auxiliaires  $p_1, p_2, \dots, p_n$  suivant :

$$\dot{p} = - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x^i}(t, x, u) * p_{\alpha}, i = 0, \bar{n} \quad (3)$$

$p(t)$  est appelée : état adjoint (vecteur adjoint) linéaire et homogène .

#### Remarques

1. Quelque soient les conditions initiales correspondantes aux fonctions  $p_i$ , le système (3) admet une solution unique d'après le théorème d'existence et d'unicité. Elle est définie sur  $[0, T]$  tout entier sur lequel est définie la commande  $u(t)$ .
2.  $p_i(t)$  : sont continues et admettent des dérivées continues sauf aux points de discontinuités de la commande  $u(t)$ .

### 2.3.3 Définition 3

Le système d'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p, u) = f(t, x, u) \\ \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x}(t, x, p, u) = -p_0(\frac{\partial f_0}{\partial x}(t, x, p)) - p(\frac{\partial f}{\partial x}(t, x, p)) \end{cases}$$

Est dit système hamiltonien.

## 2.4 Cas sans contraintes sur le contrôle (principe du maximum faible)

### 2.4.1 Introduction

La preuve du principe du maximum de Pontryagin est difficile à démontrer dans le cas général (le cas avec contraintes sur le contrôle). En revanche lorsqu'il n ya pas de contraintes sur le contrôle, la preuve est simple et on arrive au principe du maximum dit faible.

### 2.4.2 Problème de Lagrange :

**Définition :**

Le problème de Lagrange est défini comme suit :

$$\begin{cases} C(u) = \int_0^T f_0(t, x(t), u(t))dt & (5) \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) & (4) \end{cases}$$

Où les contrôles  $u(\cdot) \in U$  définis sur  $[0, T]$  et les trajectoires associées doivent vérifiées  $x(0) = x_0$  et  $x(T) = x_1$ .

On cherche des conditions nécessaires d’optimalité pour le système (4) tout en minimisant un coût donné sous la forme (5), avec  $T$  fixé.

**Position du problème de Lagrange**

Associons au système (4) le système augmenté suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \\ \dot{x}_0(t) = f_0(t, x(t), u(t)) \end{cases} \quad (6)$$

**Notations :**  $\tilde{x} = (x, x_0), \tilde{f} = (f, f_0)$

le problème consiste à chercher une trajectoire solution du (6) joignant les points  $\tilde{x} = (x_0, 0)$  et  $\tilde{x}_1 = (x_1, x_0(T))$  et minimisant la dernière coordonnée  $x^0(T)$ .

**Ensemble d’accessibilité**

L’ensemble des états accessibles à partir de  $\tilde{x}_0$  pour le système (6) est  $\tilde{A}_{cc}(\tilde{x}_0, T) = \bigcup_{u(\cdot)} \tilde{x}(t, \tilde{x}_0, u)$ .

**Résolution du problème de Lagrange**

Soit une application :

$$\tilde{p} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

tel que  $(\tilde{x}, \tilde{P}, \tilde{u})$  soit solution du système hamiltonien :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}}(t, \tilde{x}(t), \tilde{p}(t), u(t)) \\ \dot{\tilde{p}}(t) = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}}(t, \tilde{x}(t), \tilde{p}(t), u(t)) \end{cases} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{u}}(t, \tilde{x}(t), \tilde{p}(t), u(t)) = 0 \quad (8)$$

Où  $\tilde{H}(t, \tilde{x}(t), \tilde{p}(t), u(t)) = \langle \tilde{p}, \tilde{f}(t, \tilde{x}, u) \rangle$ .

Soit  $\tilde{p} = (p, p_0) \in (\mathbb{R}^n * \mathbb{R}) \setminus \{0\}$

Où  $p_0$  variable duale du coût.

on obtient :

$$(\dot{p}, \dot{p}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial f^0}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}$$

**Remarque :**  $\dot{p}(t) = 0$  c'est à dire que  $p_0(t)$  est constant sur  $[0, T]$ .

On choisit  $p_0 \leq 0$  (car le vecteur  $\tilde{p}(t)$  est défini à scalaire multiplicatif près).

Par ailleurs :

$$\tilde{H} = \langle \tilde{p}, \tilde{f}(t, x, u) \rangle = pf + p_0 f$$

Donc :

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{u}} = 0 = P \frac{\partial f}{\partial u} + p_0 \frac{\partial f_0}{\partial u}.$$

**Théorème (Principe du maximum faible)**

Soit le contrôle  $u$  associé au système du contrôle (4) et optimal pour le coût (5), alors il existe une application  $p(\cdot)$  absolument continue sur  $[0, T]$ , à valeur dans  $\mathbb{R}^n$  appelée vecteur adjoint, et un réel  $p_0 \leq 0$  tel que le couple  $(p(\cdot), p_0)$  est non trivial, et les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout  $t \in [0, T]$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) & (9) \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) & (10) \\ \frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) = 0 & (11) \end{cases}$$

H est le hamiltonien associé au système (4) et au coût (5).

$$H(t, x, p, p_0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p_0 f_0(t, x, u)$$

### 2.4.3 Problème de Mayer-Lagrange

#### Définition

Le problème de Mayer-Lagrange est défini comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} C(t, u) = \int_0^T f_0(s, x_u(s), u(s)) ds + g(t, x_u(t)) \quad (12) \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (13) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

Où le temps final  $T$  n'est pas fixé.

Les contrôles  $u(\cdot)$  sont dans l'ensemble  $U$  des contrôles admissibles sur  $[0, t_e(u)]$ , telle que  $x(T) \in A_1$ , avec  $A_1$  variété de  $\mathbb{R}^n$ , et de plus  $x(\cdot)$  minimise sur  $[0, T]$  le coût (12). Le problème de contrôle optimal est alors de déterminer une trajectoire solution de (13).

#### Théorème(Principe du maximum faible cas de Mayer-Lagrange)

Si le contrôle  $u$  est optimal sur  $[0, T]$  alors il existe une application  $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  absolument continue et un réel  $p_0 \leq 0$ , tel que le couple  $(p(\cdot), p_0)$  est non trivial, et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) \end{array} \right. \quad (14)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) = 0 \quad (15)$$

Où  $H(t, x, p, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p_0 f_0(t, x, u)$

Si de plus le temps final n'est pas fixé dans le problème de contrôle optimal et si  $u$  est continu au temps  $T$

$$H(T, x(T), p(T), p_0, u(T)) = -p_0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T))$$

## 2.5 Cas avec contraintes sur le contrôle (Principe du maximum de Pontryagin)

### 2.5.1 Introduction

Il existe de nombreuses variantes de ce principe, selon que le temps final est fixé ou libre, que les points de départ sont fixés ou doivent satisfaire une contrainte. Cette version est beaucoup plus difficile à montrer. Elle prend en compte les contraintes sur le contrôle et affirme que cette extrémum est un minimum.

### 2.5.2 Enoncé général

**Théorème :(Pontryagin et al)**

Soit  $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , une commande admissible du problème (13) – (12), et  $x(t)$  la trajectoire correspondante à  $u(t)$  et telle que  $x(0) = x_0$  et  $x(T) = x_1$ . Pour que la commande  $u(t)$  et la trajectoire  $x(t)$  soient optimale il est nécessaire qu'il existe un vecteur fonction  $p(t) = (p_0(t), \dots, p_n(t))$  solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, i = 0, 1, \dots, n \end{cases}$$

continue et identiquement non nul appelé vecteur adjoint, et un réel  $p_0 \leq 0$ , tel que le couple  $(p(\cdot), p_0)$  soit non trivial, et tel que, pour presque tout  $t \in [0, T]$  :

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) \\ \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) \end{aligned}$$

satisfaisant aux conditions du principe du maximum :

$$\max_u H(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) = H(t, x^*(t), p(t), p_0(t), u^*(t)),$$

correspondant aux fonction  $u(t)$  et  $x(t)$  tel que :

i.  $\forall t, 0 \leq t \leq T$ , la fonction  $H(t, x(t), p(t), u)$  de la variable  $u \in U$  atteint au point  $u = u(t)$  son maximum, c'est à dire :

$$H(T, x(t), p(t), u(t)) = M(t, x(t), p(t)) \quad (16)$$

ii. A l'instant final  $T$  soient vérifiées les relations :

$$p_0(T) \leq 0$$

$$M(T, x(T), p(T)) = 0$$

**Démonstration : voir[1]**

Si de plus le temps final pour joindre la cible  $A_1$  n'est pas fixé, on a la condition au temps final T

$$\max_{v \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p_0, v) = -p_0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)) \quad (17)$$

appelée condition de transversalité sur l'Hamiltonien.

Si de plus  $A_0$  et  $A_1$ (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de  $\mathbb{R}^n$  ayant des espaces tangents en  $x(0) \in A_0$  et  $x(T) \in A_1$ , alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux extrémités(ou juste d'une des deux).

$$p_0 \perp T_{x(0)}A_0 \quad (18)$$

$$p(T) - P_0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x(T)}A_1 \quad (19)$$

Les conditions (18)-(19) sont appelées conditions de transversalité sur le vecteur adjoint.

**Remarques**

1. Si les conditions du théorème sont satisfaites par une seule trajectoire joignant  $x_0$  à  $x_1$ , il est clair que la trajectoire optimale doit exister, on peut espérer que la trajectoire trouvée est précisément optimale.
2. Si le contrôle  $u$  est continu au temps T, la condition de maximisation de l'Hamiltonien peut s'écrire :

$$H(T, x(T), p(T), p_0, u(T)) = -p_0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)) \quad (20)$$

3. Si la variété  $M_1$  s'écrit sous la forme :

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_p(x) = 0\},$$

Où les  $F_i$  sont des fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$ , alors la condition (19) se met sous la forme :

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \setminus p(T) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla F_i(x(T)) + p_0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \quad (21)$$

4. Dans les conditions du théorème, on a de plus pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\frac{d}{dt}H(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) = \frac{\partial H}{\partial t}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) \quad (22)$$

En particulier si le système augmenté est autonome c'est à dire si  $f$  et  $f_0$  ne dépendent pas de  $t$ , alors  $H$  ne dépend pas de  $t$ , et on a :

$$\forall t \in [0, T], \max_{v \in \Omega} H(x(t), p(t), p_0, v) = cste$$

5. La convention  $p_0 \leq 0$  conduit au principe du maximum tandis que la convention  $p_0 \geq 0$  conduit au principe du minimum.
6. Dans le cas où  $\Omega = \mathbb{R}^m$  c'est à dire lorsqu'il n'ya pas de contraintes sur le contrôle, la condition de maximum revient à chercher les racines de  $H$  par rapport à  $u$  et on retrouve le principe du maximum faible  $p_0 = -1$ .
7. Le problème important de temps minimal correspond à  $f_0 = 1$  et  $g = 0$ , ou bien à  $f_0 = 0$  et  $g(t, x) = t$ . Dans les deux cas les conditions de transversalité obtenues sont les mêmes.
8. Si le système n'est pas contrôlable, on dit que le problème n'admet pas de solution. Si le système est contrôlable, il existe en général beaucoup de contrôles possibles et pour chacun de ces contrôles correspond une valeur pour  $J$ .
9. L'Hamiltonien est constant le long de la trajectoire et cette constante vaut 0 si le temps terminal  $t^*$  est libre (dans le cas sans contraintes).
10. Si une solution existe, le principe du maximum de pontryagin produit des conditions nécessaires. On cherche des solutions qui satisfait ces conditions et l'on prendra celle qui minimise  $J$ . Il n'a pas de garantie en toute généralité sur l'unicité de la solution optimale. Si l'on ne trouve pas de solutions satisfaisantes toutes les conditions du principe du maximum de pontryagin, alors il n'existe pas de solutions au problème de contrôle optimal.

### Théorème

Toute commande optimale d'un problème terminal de contrôle optimal vérifie le principe du maximum.

**Proposition**

Considérons dans  $\mathbb{R}^n$  le système linéaire autonome  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ , avec  $B \in \mathbb{R}^n$  et  $|u(t)| \leq 1$ , et où la pair (A,B) vérifie la condition de Kalman.

1. Si toute valeur propre de A est réelle, alors tout contrôle extrémal à au plus  $n - 1$  commutation sur  $\mathbb{R}^+$ .
2. Si toute valeur propre de A à une partie imaginaire non nulle, alors tout contrôle extrémal à un nombre infini de commutation sur  $\mathbb{R}^+$ .

**2.5.3 Problème autonome**

**Problème autonome aux extrémités fixes**

**Position du problème :** Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} J(u) = \int_0^T f_0(t, x(t), u(t))dt \longrightarrow \min, \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0, x(T) = x_1, \end{cases}$$

Où  $x_0, x_1$  sont fixés.

Ce problème est dit autonome car il ne dépend pas explicitement du temps.

**Théorème**

Soit  $u^*(t)$  une commande admissible transférant  $(x_0, 0)$  à  $S = x_1 * [0, T]$  et  $x^*(t)$  la trajectoire correspondante à  $u^*(t)$ , ( $x^*(T) = x_1$ ).

Pour que  $u^*(t)$  et  $x^*(t)$  soient optimales, il est nécessaire qu'il existe un vecteur fonction  $p(t)$  non nul et continu tel que :

1.  $p(t)$  et  $x^*(t)$  soient solutions du système hamiltonien

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x^*(t), p(t), u^*(t))$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x^*(t), p(t), u^*(t))$$

et satisfaisant aux conditions aux limites :  $x^*(0) = x_0, x^*(T) = x_1$ .

2. La fonction hamiltonienne atteint son maximum au point  $u = u^*(t)$ , c'est à dire :

$$\max_{u \in U} H(t, x^*(t), p(t), u) = H(t, x^*(t), p(t), u^*(t))$$

Ou encore :

$$H(t, x^*(t), p(t), u) \leq H(t, x^*(t), p(t), u^*(t)), \forall u \in \Omega.$$

3.  $H(t, x^*(t), p(t), u^*(t)) = 0, \forall t \in [0, T]$ .

### Condition de transversalité

**Introduction :** Les conditions du principe du maximum restent valable pour des problèmes optimaux aux extrémités libres, mais il faut ajouter d'autre relations qui permettraient de déterminer la position des points  $x_0$  et  $x_1$  sur les variété  $A_0$  et  $A_1$ , ces relations sont appelées conditions de transversalité.

**Position du problème :** Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$J(u) = \int_0^T f_0(t, x(t), u(t))dt \longrightarrow \min,$$

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} = f(t, x, u),$$

$$x(0) = x_0, x(T) = x_f \in A_1,$$

Où  $A_0$  et  $A_1$  sont des variétés continûment différentiable de dimension  $r_0, r_1$  respectivement.

Le problème consiste à trouver la commande admissible  $u(t)$  transférant  $x_0 \in A_0$  à la position  $x_1 \in A_1$  et qui minimise la fonctionnelle  $J$ . On appelle un tel problème "problème optimal aux extrémités libres".

### Condition de transversalité sur le vecteur adjoint

**Problème de lagrange** Dans ce cas le coût s'écrit :

$$C(t, u) = \int_0^T f_0(s, x(s), u(s))ds,$$

C'est à dire  $g = 0$  les conditions de transversalité (18) et (19) sur le vecteur adjoint s'écrivent :

$$P(0) \perp T_{x(0)}A_0, P(T) \perp T_{x(T)}A_1.$$

**Remarques :**

- Si  $A_0 = x_0$  la condition initiale (17) devient vide.
- Si au contraire  $A_0 = \mathbb{R}^n$  c'est à dire le point initial n'est pas fixé, on obtient  $p(0) = 0$ .
- Si  $A_1 = \mathbb{R}^n$ , on obtient  $p(T) = 0$  (si le point final est libre alors le vecteur adjoint au temps final est nul).

**Problème de Mayer :** Dans ce cas le coût s'écrit :

$$C(t, u) = g(t, x(t))$$

C'est à dire  $f_0 = 0$  les conditions de transversalité (17), (18), (20) ne se simplifient pas à priori.

Dans le cas  $A_1 = \mathbb{R}^n$  (le point final  $x(T)$  est libre) la condition (18) devient

$$p(T) = p_0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T))$$

Et alors forcément  $p_0 \neq 0$  (on prend alors  $p_0 = -1$ ).

Si  $g$  ne dépend pas du temps on écrit  $p(T) = -\nabla g(x(T))$ .

**Condition de transversalité sur le Hamiltonien**

La condition (17) est satisfaite lorsque le temps final pour atteindre la cible est non fixé. La simplification notable de cette condition est le cas où  $g$  ne dépend pas du temps  $t$  et la condition (17) devient alors :

$$\max_{v \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p_0, v) = 0$$

Ou encore, si  $u$  est continu au temps  $T$ ,

$$H(T, x(T), p(T), p_0, u(T)) = 0.$$

Autrement dit le Hamiltonien s'annule au temps final.

**Remarque :** Si le système augmenté est de plus autonome c'est à dire, si  $f$  et  $f_0$  ne dépendent pas de  $t$ , alors d'après la remarque (4) on a le long d'une extrémale :

$$\forall t \in [0, T], \max_{v \in \Omega} H(x(t), p(t), p_0, v) = 0.$$

**Généralisation des conditions de transversalité :**

Pour écrire les conditions de transversalité associées à un problème de contrôle

plus général, il faut écrire les relations adéquates en terme de multiplicateurs de lagrange.

Considérons un problème de lagrange avec des conditions aux limites mélangées, c'est à dire on cherche une trajectoire solution de  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ , minimisant le coût  $C(T, u) = \int_0^T f_0(t, x(t), u(t))dt$ , et vérifiant les conditions aux limites

$$(x(0), x(T)) \in A,$$

Où A est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

On peut alors montrer **voir [9]** que dans ce cas les conditions de transversalité (18)-(19) sur le vecteur adjoint s'écrivent :

$$(-p(0), p(T)) \perp T_{(x(0), x(T))}A \quad .$$

Un cas important de conditions mélangées est le cas des trajectoires périodiques, c'est à dire  $x(0) = x(T)$  non fixé. Dans ce cas on a :

$$A = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}^n\},$$

et la condition de transversalité donne :

$$p(0) = p(T).$$

Autrement dit, non seulement la trajectoire est périodique mais aussi son relèvement extrémal.

## 2.6 Méthode de tir simple

### 2.6.1 Introduction

Les problèmes de contrôle optimal sont en général non-linéaires, par conséquent la détermination d'une solution analytique n'est pas évidente à priori alors l'utilisation des méthodes numériques est nécessaire pour déterminer une solution.

Dans cette partie on s'intéresse à un type de méthode numérique pour résoudre les problèmes de contrôle optimal qui sont les méthodes indirectes. Elles consistent à résoudre numériquement un problème aux deux bouts (valeurs limites).

Elles sont basées sur une méthode de tir après l'application du principe du maximum de pontyagin.

L'algorithme de tir nécessite l'utilisation de la méthode de Newton, pour plus de détails sur cette méthode **voir[1]**.

### 2.6.2 Méthode de tir simple

On considère le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{aligned} \min J(x, u) &= \int_0^T f_0(t, x, u) dt \\ \dot{x} &= f(t, x, u), \\ x(0) &= x_0 \in A_0, x(T) = x_f \in A_1, \\ u &\in U, \end{aligned}$$

On suppose que  $T$ (temps final) est fixé.

La méthode de tir permet de déterminer la valeur de  $p(0)$  nécessaire à la résolution du problème à résoudre caractérisé par l'application du principe du maximum de pontyagin.

Elle permet de résoudre un système d'équation non-linéaire  $x^{p_0}(T) - x_f = 0$ .  
Où  $x^{p_0}(T)$  résultat de :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ -\frac{dP(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases}$$

Avec  $x(0) = x_0$  et  $p(0) = p_0$ . Si on est capable à partir de la condition du maximum d'Hamiltonien, d'exprimer le contrôle optimal en fonction de  $x(t)$  et de  $p(t)$ ,  $u = H(x, p)$  alors le système différentiel d'état et d'état adjoint peut s'écrire sous la forme :  $\dot{y}(t) = F(t, y(t))$  où  $y(t) = (x(t), p(t))$ .

Les conditions initiales, finales, et les conditions de transversalité, s'écrivent sous la forme :

$$\mathfrak{R}(y(0), y(T)) = 0 \iff \begin{cases} \mathfrak{R}_1(y(0)) = 0. \\ \mathfrak{R}_2(y(T)) = 0. \end{cases}$$

On obtient alors le problème aux deux bouts(valeurs limites)

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = F(t, y(t)) \\ \mathfrak{R}(y(0), y(T)) = 0. \end{cases}$$

On considère le problème de cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = F(t, y(t)) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

On note  $y(t, y_0)$  solution du problème de cauchy dépendant de  $y_0$  et on pose  $S(y_0) = \mathfrak{R}(y(0), y(T, y_0))$  appelée fonction de tir. La résolution du problème aux deux bouts est alors équivalent à la recherche d'un zéro de la fonction de tir  $S(y_0) = 0$  qu'on peut résoudre par la méthode de Newton.

**Remarques**

- Si le temps final  $T$  est libre, on peut se ramener à la formulation précédente, en considérons  $T$  comme une inconnue auxiliaire. On augmente alors la dimension de l'état en considérant l'équation supplémentaire  $\frac{dT}{dt} = 0$ .
- On peut utiliser le même artifice si le contrôle est bang-bang, pour déterminer les temps de commutations il peut cependant s'avérer préférable lorsque le temps final est libre, d'utiliser la condition de transversalité sur l'Hamiltonien.

**Avantage de la méthode de tir simple**

- Méthode rapide de haute précision.
- Ne requiert pas d'hypothèse sur la structure de contrôle.
- Une grande précision et une bonne rapidité de convergence.

**Inconvénient de la méthode de tir simple**

La nécessité de disposer d'un point initial correct permettant la convergence de l'algorithme.

**Conclusion**

La force du principe du maximum est de remener un problème initialement complexe à un problème plus simple celui de maximiser  $H(v)$  pour  $v \in \Omega$ , et donne des conditions nécessaires d'optimalité qui permettent de calculer les trajectoires optimales.

Cependant, il souffre de deux défauts. Le premier est la difficulté de sa mise en oeuvre numérique, le second défaut est l'impossibilité de prendre en compte des contraintes sur l'état.

# Chapitre 3

## Problème de la traversée du fleuve de Zermalo

### 3.1 Biographie

"Ernest Freideric Ferdinand Zermalo", né le 27 juillet 1871 à Berlin. Il a fait ses études secondaires à Berlin qu'il termine en 1889. Ensuite, il suit un cursus universitaire en mathématique, physique et philosophie à Berlin, "Halle" et "Fribourg", qu'il conclut par un doctorat à Berlin, portant sur le calcul des variations. Il reste alors à Berlin en tant qu'assistant de "Max planck", sous la direction de quel il commence à étudier l'hydrodynamique. En 1897, il part pour "Göttingen", où il obtiendra sa thèse d'habilitation en 1899.

En 1900 à lieu à Paris le congrés international des Mathématiciens, où "David Hilbert" énoncera les 23 problèmes majeurs aux quels il souhaite que la communauté s'intéresse. Le premier de ces problèmes à trait à la théorie des ensembles, c'est celui de l'hypothèse du continu, formulé par "Cantor" en 1878, Zermalo commence alors à travailler sur la théorie des ensembles et publie ses premiers résultats en 1902. En 1904, il fait un pas important vers une solution au premier problème de "Hilbert" en prouvant que tout ensemble peut être bien ordonné.

L'importance de ce résultat fait largement connaître "Zermalo" qui obtient alors un poste de professeur à "Göttingen" en 1905. Toutefois ses démonstrations utilise l'axiome du choix, ce qui ennuie certains mathématiciens, entre autre à cause de l'état de formalisation de la théorie des ensembles à

l'époque. En 1908, Zermalo donne une autre preuve mieux acceptée. A partir de 1905, travaille à l'axiomatisation de la théorie des ensembles, en 1908, il publie ses résultats malgré son échec à prouver la cohérence de son système d'axiomes (ce que "Golden" prouve plus tard impossible). En 1922, "Abraham Adolf Fraenkel" et indépendamment "Thoralf" améliorent les axiomes de Zermalo. Le système final, composé de 10 axiomes, est maintenant connu sous le nom d'axiomes de "Zermalo-Fraenkel" (ZF : c'est actuellement le plus utilisé en théorie des ensembles). En 1910, il quitte "Göttingen" pour une chaire à l'université de Zurich. A l'initiative de "Hilbert" il y obtient un prix pour sa contribution à la théorie des ensembles). En 1913, il publie un article précurseur de la théorie des jeux, qui sera ensuite développé notamment par "John von Neumann" et "Oskar Morgenstern". En 1916, il reçoit le prix "Alfred Ackemann-Tuebner". De santé très fragile, il quitte "Zurich" en 1916 et retourne à "Fribourg", où il obtient un poste honoraire, auquel il renonce en 1935 en raison de sa désapprobation à l'égard de la politique universitaire du régime nazi. Il retrouve son poste en 1946.

## 3.2 Introduction

L'étude du problème de navigation de Zermalo a commencé en 1931 avec les travaux de "Ernest Zermalo" et un certain temps par "Constantin Carathéodory". C'est un problème classique de contrôle optimal. Il traite la caractérisation des trajectoires optimales pour une petite barque traversant un fleuve en présence du courant, tout en considérant que la vitesse relative de la barque est constante dans un fleuve de largeur donnée. Nous supposons également que la vitesse du courant est connue et donnée par une fonction quadratique, et l'état du système est la position  $(x, y)$  de la barque. Le modèle est donné par un système non-linéaire dans  $\mathbb{R}^2$  contrôlé par la direction  $U \in [0, 2\Pi]$  que le capitaine doit contrôler pour réduire au minimum le temps de voyage à l'origine.

## 3.3 Position du problème

Soit le problème de Zermalo modélisé de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(X, U) = \int_0^T f_0(t) dt \rightarrow opt \\ \dot{x}(t) = V \cos u(t) + c(y(t)), \quad x(0) = 0, \\ \dot{y}(t) = V \sin u(t), \quad y(0) = 0, \\ u \in [0, 2\Pi], \quad X = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{array} \right. \quad (1)$$

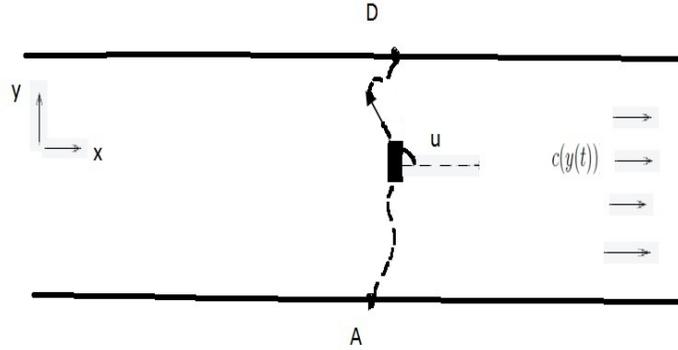
avec  $f_0 = 1$

Où

- $V$  : la vitesse constante de la barque,
- $u$  : l'angle de la barque par rapport à l'axe (ox), est le contrôle,
- $y(0)$  et  $x(0)$  : conditions initiales,
- $x(t)$  : position de descente le long du fleuve,
- $y(t)$  : la distance de la barque à l'origine,
- $c(y(t))$  : la vitesse du courant, elle est donnée par la formule suivante :  
 $c(y(t)) = 1 - 0.1 * (y(t))^2$ . voir 8

Le problème porte sur une barque navigant sur un plan d'eau, provenant d'un point initial  $A$  à un point final  $D$ . La barque est capable d'une vitesse

maximale, nous voulons retirer le meilleur contrôle possible.  $u \in [0, 2\Pi]$  pour atteindre  $D$  dans le temps le moins possible. C'est un problème de temps optimal avec des contraintes terminales, puisque les deux valeurs initiales et finales  $x_0$  et  $y_0$  sont données.



Présentation schématique du problème de Zermalo

### 3.4 Principe du maximum appliqué au problème de Zermalo

Soit le problème de Zermalo donné par (1) :  
la fonction hamiltonienne est donnée par :

$$H(X, p, u, t) = P_1 * V \cos u + P_1 * c(y(t)) + p_2 * V * \sin u - 1$$

Les équations adjointes sont :

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} = -c'(y(t)) * p_1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u(t)} = -p_1 * V * \sin u(t) + p_2 * \cos u(t) = 0$$

Comme

$$v \neq 0 \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{\sin u(t)}{\cos u(t)} = \tan u(t) \Rightarrow \tan u(t) = \frac{p_2}{p_1} \quad \text{et} \quad p_2 = p_1 * \frac{\sin u(t)}{\cos u(t)}$$

$$\begin{aligned} H &= P_1 * V \cos u(t) + P_1 * c(y(t)) + p_1 * V * \sin u(t) * \frac{\sin u(t)}{\cos u(t)} - 1 \\ &= p_1 * V * \left( \cos u(t) + \frac{\sin^2 u(t)}{\cos u(t)} \right) + p_1 * c(y(t)) - 1 \\ &= p_1 * V * \left( \frac{\cos^2 u(t) + \sin^2 u(t)}{\cos u(t)} \right) + p_1 * c(y(t)) - 1 \\ &= p_1 * V * \left( \frac{1}{\cos u(t)} \right) + p_1 * c(y(t)) - 1 \\ &= p_1 * \left( \frac{V}{\cos u(t)} + c(y(t)) \right) - 1 \\ \max_{u(t)} H(X, p, u, t) &= \max_{u(t)} p_1 \left( \frac{V}{\cos u(t)} + c(y(t)) \right) - 1 \\ &= \left( \max_{u(t)} p_1 \left( \frac{V}{\cos u(t)} \right) \right) + p_1 * c(y(t)) - 1 \\ &= -1 + p_1 * c(y(t)) + p_1 * V * \max_{u(t)} \left( \frac{1}{\cos u(t)} \right) \end{aligned}$$

Différenssions  $H$  par rapport à  $t$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= \dot{p}_1 * V * \cos u(t) - p_1 * V * \sin u(t) * \dot{u}(t) + \dot{p}_1 * c(y(t)) + p_1 * c'(y(t)) * \dot{y}(t) \\ &\quad + \dot{p}_2 * V * \sin u(t) + p_2 * V * \sin u(t) + p_2 * V * \cos u(t) * \dot{u}(t) \\ &= \dot{p}_1 (v * \cos u(t) + c(y(t))) + (-p_1 * V * \sin u(t) + p_2 * V * \cos u(t)) \dot{u}(t) + p_1 * c'(y(t)) * \dot{y}(t) \\ &\quad + p_2 * V * \sin u(t) \\ &= \dot{p}_1 * \dot{x} + \dot{p}_2 * \dot{y} + p_1 * c'(y(t)) * \dot{y}(t) \\ &= \dot{p}_1 * \dot{x} + (\dot{p}_2 + p_1 * c'(y(t))) * \dot{t} \\ &= 0 + (\dot{p}_2 - \dot{p}_1) * \dot{y}(t) = 0, \text{ C'est à dire } \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \\ &\Rightarrow H \equiv \text{const}, (H \text{ est constant par rapport au temps}) \end{aligned}$$

Le faite que  $p_1$  est constant, car  $\dot{p} = 0$ , on obtient :

$$A = \frac{V}{\cos u(t)} + c(y(t))$$

Comme  $A$  est constante dans le temps alors le contrôle  $u(t)$  se détermine en fonction de  $y$

$$\cos u(t) = \frac{v}{A - c(y(t))}$$

Delà les équations d'état deviennent

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{V^2}{A - c(y(t))} + c(y(t)) \\ \dot{y} = V * \sqrt{1 - \frac{V^2}{(A - c(y(t)))^2}} \end{cases}$$

**Remarque**

un cas particulier est quand  $c(y(t)) = C$  est indépendamment de  $y(t)$ .  
Donc le chemin optimal est une ligne droite .

**3.5 Application de la méthode de tir simple**

notre problème de Zermalo est donné par : (1)

La connaissance de la fonction de tir permet de considérer que ce problème optimal est entièrement résolu mathématiquement. Nous avons le problème à deux bouts suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = V \cos u(t) + c(y(t)) \\ \dot{y}(t) = V \sin u(t) \\ \dot{p}_1 = 0 \\ \dot{p}_2 = -c'(y(t)) * p_1 \\ x(0) = 0, \quad x(T) = x_f \\ y(0) = 0, \quad y(T) = y_f \end{array} \right.$$

Désignons la fonction  $Z(t) = (X(t), P(t))$  définie dans  $X$  et à valeur dans  $U$ .  
les conditions initiales et les conditions de transversalité se mettent  $h(Z(t), p(T))$   
et d'après le principe du maximum

$$u(t) = \arccos\left(\frac{V}{A - C(y(t))}\right)$$

Posons

$$Z(t) = (x(t), y(t), p_1(t), p_2(t)) = (Z_1(t), Z_2(t), Z_3(t), Z_4(t))$$

Résoudre le problème à deux bouts est équivalent à chercher un zéro de l'équation  $S(Z) = 0$  où la fonction  $S$  est la fonction de tir associée à notre problème et est définie par :

$$S : Z \rightarrow S(Z) = Z(t, 0, 0, h) - x_f = 0.$$

Notre système devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Z}_1 = v * \cos u(t) + c(y(t)) \\ \dot{Z}_2 = V \sin u(t) \\ \dot{Z}_3 = 0 \\ \dot{Z}_4 = -c'(Z_2(t)) * Z_3(t) \\ Z_1(0) = 0, \quad Z_2(0) = 0 \\ Z_3(0) = h_1 \in \mathbb{R}, \quad Z_4(0) = h_2 = \int_0^T C'(Z_2(t)) * Z_3(t) dt \end{array} \right.$$

Soit  $Z(t, 0, 0, h_1, h_2)$  solution du système au temps  $t$  avec les conditions initiales et finales  $(0, 0, h_1, h_2)$ .

Si le temps final est libre :

$$Z(T, 0, 0, h_1, h_2) = \begin{pmatrix} Z_1(T, 0, 0, h_1, h_2) \\ Z_2(T, 0, 0, h_1, h_2) \\ Z_3(T, 0, 0, h_1, h_2) \\ Z_4(T, 0, 0, h_1, h_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Z_{1f} \\ Z_{2f} \\ qlq \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S(Z) = \begin{pmatrix} Z_1(T) - Z_{1f} \\ Z_2(T) - Z_{2f} \\ H(T) = 0 \end{pmatrix},$$

qui est égal à :

$$S(Z) = \begin{pmatrix} Z_1(T) - Z_{1f} \\ Z_2(T) - Z_{2f} \\ Z_3(T, 0, 0, h_1, h_2) * (\frac{V}{\cos u(t)} + V) - 1 \end{pmatrix}$$

### 3.6 Exemple

Le mouvement d'une barque se déplaçant à vitesse constante est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = V \cos u(t) + c(y(t)), x(0) = 0, \\ \dot{y}(t) = V \sin u(t), y(0) = 0, \end{cases}$$

Où  $v$  : la vitesse.

$u(t)$  : l'angle de la barque par rapport à l'axe  $(ox)$ , est le contrôle.

1. Supposons que pour tout  $y$  on ait  $c(y(t)) > V$ .

Quelle est la loi optimale permettant de minimiser le déport  $x(T)$  pour atteindre la berge opposé ?.

2. Résoudre le problème de temps minimal pour atteindre la berge opposé.

3. Résoudre le problème de temps minimal pour atteindre un point  $M$  de la berge opposé.

**Solution**

**Premier problème**  $min x_1(T), T \text{ libre}, x_2(T) = l$

$$H = p_1(V \cos u(t) + c(y(t))) + p_2(V \sin u(t)),$$

$$\dot{p}_x = \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x c'(y(t))$$

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = l\}$$

$$(p(T) - p^0 \frac{\partial f}{\partial x}(T, x(T))) \perp T_{x(T)} M_1$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} p_1(T) \\ p_2(T) \end{pmatrix} - p^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \perp T_{x(T)} M_1$$

$$p_1(T) = p^0, p_x(T) = -\frac{\partial x(T)}{\partial x} = -1$$

$$T \text{ libre} \Rightarrow H(T) = 0.$$

$$\max_u \Rightarrow \max_v (p_1 \cos u(t) + p_2 \sin u(t)), v \geq 0$$

$$\begin{cases} \cos u = \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \\ \sin u = \frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \end{cases}$$

$$\dot{p}_1 = 0 \Rightarrow p_x = cste = p^0.$$

**Lemme :**  $p^0 \neq 0$ . Par absurde si  $p^0 = 0 \Rightarrow p_1 = 0 \Rightarrow p_2 = c \Rightarrow p_2(t)v \sin u(t) = 0 \Rightarrow p_2 = 0$ .

**Système autonome**

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u} = 0 \Rightarrow H = cste \Rightarrow t_f \text{ libre} \Rightarrow H(T) = 0 \Rightarrow H(t) \equiv 0.$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow p_1 = -1 \\ 0 \equiv H &= -c(y(t)) + V\sqrt{p_1^2 + p_2^2} = -c(y(t)) + V\sqrt{1 + p_2^2} \\ &\Rightarrow \sqrt{1 + p_2^2} = \frac{c(y)}{V} \Rightarrow \cos u(t) = \frac{-V}{c(y(t))} \implies u = \arccos \frac{-V}{c(y(t))} \end{aligned}$$

Si  $V > c(y(t))$  : pas de solution.

### Calcul du temps final

$\min_{y(T)=l} x(T)$ ,  $T$  libre.

$$\begin{aligned} u &= \arccos \frac{-V}{c(y(t))}, \quad x(T) = x_f, \quad y(T) = y_f. \\ \dot{x} &= V \cos(\arccos(\frac{-V}{c(y(t))})) + c(y(t)) = \frac{-V^2}{c(y(t))} + c(y(t)). \\ \dot{y} &= V \sin(\arccos(\frac{-V}{c(y(t))})) = Va, \quad \text{avec } a = \sin(\arccos(\frac{-V}{c(y(t))})). \\ &\begin{cases} x = (\frac{-V^2}{c(y(t))} + c(y(t)))t + c_1. \\ y = (Va)t + c_2. \end{cases} \\ x(T) &= (\frac{-V^2}{c(y(t))} + c(y(t)))T + c_1 = x_f \quad (1) \\ y(T) &= (Va)T + c_2 = y_f \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{De (1)} \Rightarrow T = \frac{x_f - c_1}{\frac{-V^2}{c(y(t))} + c(y(t))}.$$

$$\text{De (2)} \Rightarrow T = \frac{y_f - c_2}{Va}.$$

2<sup>eme</sup> **Problème**  $\min T, y(T) = l$

$$H = p_x * V * \cos u(t) + p_x * c(y(t)) + p_2 * V * \sin u(t) + p^0$$

$$p_1 = 0$$

$$\cos u(t) = 0 \Rightarrow u = \frac{\Pi}{2}$$

Calcul du temps final  $\min T, y(T) = l$

$$x(T) = x_f, \quad y(T) = y_f, \quad u = \frac{\Pi}{2}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = V * \cos u(t) + c(y(t)) \\ \dot{y} = V * \sin u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = V * \cos u(t) + c(y(t)) \\ \dot{y} = V * \sin u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = V * \cos(\frac{\Pi}{2}) + c(y(t)) \\ \dot{y} = V * \sin(\frac{\Pi}{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = c(y(t)) \\ \dot{y} = V \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = c(y(t))t + c_1 \\ y = Vt + c_2 \end{cases}$$

$$x(T) = c(y(T)) + c_1$$

$$\Rightarrow T = \frac{x(T) - c_1}{c(y(T))}$$

$$y(T) = V * T + c_2$$

$$T = \frac{y(T) - c_2}{V}$$

### 3<sup>eme</sup> Problème

$$\min T, \quad x(T) = x_f, \quad y(T) = y_f, \quad T \text{ libre}$$

$$\dot{p}_1 = 0 \Rightarrow p_1(t) = \text{constante}$$

$$\begin{aligned}
 H(T) = 0 &\Rightarrow p_1 c(y) + V \sqrt{p_1^2 + p_2^2} + p^0 \\
 &\Rightarrow \cos u(t) = \frac{-p_1 V}{p_1 c(y(t)) + p^0}
 \end{aligned}$$

1<sup>er</sup> cas :

$$p^0 \neq 0, \quad p^0 = -1 \Rightarrow \cos u(t) = \frac{-p_1 V}{p_1 c(y(t)) - 1}$$

$u$  dépend de  $p_1$  qui est le degré de liberté  $\rightsquigarrow x(T) = x_f$

2<sup>eme</sup> cas :

$$p_0 = 0 : \quad \cos u(t) = \frac{-p_1 V}{p_1 c(y(t))} = -\frac{V}{c(y(t))}$$

Cas(1) contrôle de départ.

**Calcul du temps final :**

$$u = \arccos\left(\frac{p_1 V}{1 - p_1 c(y(t))}\right), \quad x(T) = x_f \quad y(T) = y_f$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{x} = V \cos\left(\arccos\left(\frac{p_1 V}{1 - p_1 c(y(t))}\right)\right) + c(y(t)) = \frac{p_1 V^2}{1 - p_1 c(y(t))} + c(y(t)) \\
 y = V \sin\left(\arccos\left(\frac{p_1 V}{1 - p_1 c(y(t))}\right)\right) = Va \\
 \text{Avec } a = \sin\left(\arccos\left(\frac{p_1 V}{1 - p_1 c(y(t))}\right)\right)
 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \left(\frac{p_1 V^2}{1 - p_1 c(y(t))} + c(y(t))\right) * t + c_1 \\
 (Va)t + c_2
 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x(T) = \left(\frac{p_1 v}{1 - p_1 c(y(t))} + c(y(t))\right) * T + c_1 \quad (1) \\
 y(T) = (Va) * T + c_2 \quad (2)
 \end{array} \right.$$

$$\text{De (1)} \Rightarrow T = \frac{x(t) - c_1}{\frac{p_1 v^2}{1 - p_1 c(y(t))} + c(y(t))}$$

$$\text{De (2)} \Rightarrow T = \frac{y(t) - c_2}{Va}$$

### 3.6.1 Résolution des trois problèmes par la méthode de tir simple sous Matlab

#### 1<sup>er</sup> problème

Dans le premier problème le contrôle  $u = \arccos\left(-\frac{v}{c(y(t))}\right)$

On pose  $v = 20m/s$  et  $c(y(t)) = -0.1 * y(t)^2 + 1$  (**voir[8]**).

On désire aller du point  $(0, 0)$  vers  $(100, 20)$  avec  $t_f$  libre.

On se ramène à un problème de tir simple, le programme suivant est effectué sous Matlab :

function premier problème

```
clearall; clf; clc;
```

```
global x0;
```

```
x0 = [0; 0]; P0 = [0.5; 1.5]; tf = 10;
```

```
% Calcul de P0 et tf
```

```
options = optimset('Display','iter','LargeScale','on');
```

```
[P0tf, FVAL, EXITFLAG] = fsolve(@S, [P0; tf], options);
```

```
EXITFLAG%1 si la methode converge, -1 sinon
```

```
%Trace des trajectoires optimales
```

```

options = odeset('AbsTol', 1e - 9, 'RelTol', 1e - 9);

[t, y] = ode45(@sys, [0; P0tf(3)], [x0; P0tf(1); P0tf(2)], options);

subplot(231); plot(t, y(:, 1)); title('Trajectoire x(t)'); grid on

subplot(232); plot(t, y(:, 2)); title('Trajectoire y(t)'); grid on

subplot(234); plot(t, y(:, 3)); title('Trajectoire p1(t)'); grid on

subplot(235); plot(t, y(:, 4)); title('Trajectoire p2(t)'); grid on

for i = 1 : 20

y(:, 5) = acsc(-2/(-0.1 * i^2 + 1))

subplot(233); plot(t, y(:, 5)); title('Contrôle'); grid on

end

t(end)

%====Définition de la fonction de tir=====

function Yzero = S(Y)

global x0;

options = odeset('AbsTol', 1e - 9, 'RelTol', 1e - 9);

[t, y] = ode113(@sys, [0; Y(3)], [x0; Y(1); Y(2)], options);

for t = 0 : 20

HamEnd = y(end, 3) * ((-4/(-0.1 * t^2 + 1)) + (-0.1 * t^2 + 1)) + (y(end, 4)) *
(2 * sin(acsc(-2/(-0.1 * t^2 + 1))));

end

```

```
Yzero = [y(end, 1) - 100
```

```
y(end, 2) - 20
```

```
HamEnd];
```

```
%=====systeme extremal=====
```

```
function ydot = sys(t, y)
```

```
for t = 0 : 20
```

```
u = acsc(-2/(-0.1 * t2 + 1))
```

```
ydot = [(-4/(-0.1 * t2 + 1)) + (0.1 * t2 + 1)
```

```
2 * (sin(acsc(-2/(-0.1 * t2 + 1)))]
```

```
0
```

```
y(3) * (2 * 0.1 * t + 2)]
```

```
end;
```

les résultats sont donnés par la figures 1 :

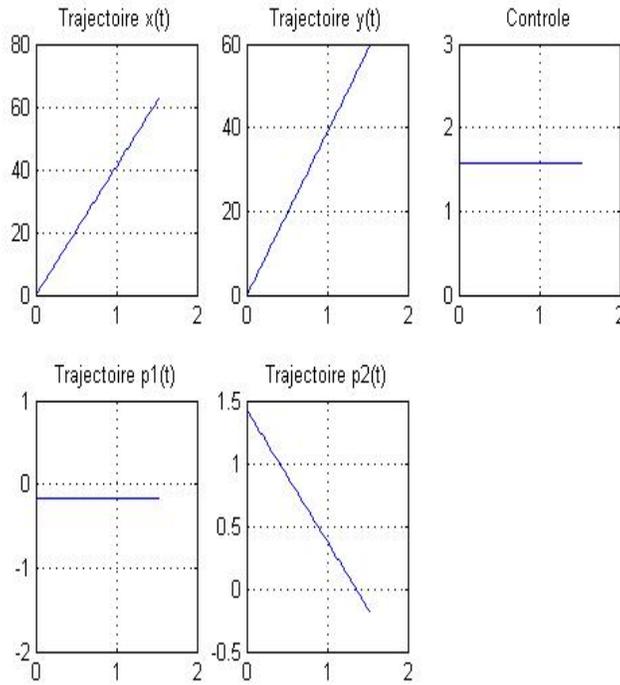


fig.1. Résultats de la méthode de tir

Le temps minimum pour atteindre le point(100, 20) calculé par Matlab est  $ans = 1.4237 + 0.0000i$ .

**2<sup>eme</sup> problème**

Dans le deuxième problème le contrôle  $u = \frac{\Pi}{2}$

On pose  $v = 2m/s$  et  $c(y(t)) = -0.1 * y(t)^2 + 1$ (voir[8]).

On désire aller du point (0, 0) vers (100, 20) avec  $t_f = 3$  .

On se ramène à un problème de tir simple, le programme suivant est effectué sous Matlab :

function deuxième problème

```
clearall; clf; clc
```

```
global x0 tf;
```

```
x0 = [0; 0]; tf = 3; p0 = [0.5; 0.5];
```

```
% Calcul du zéro de la fonction de tir
```

```
options = optimset('Display','iter','Algorithm','levenberg-marquardt');
```

```
[p0f, FVAL, EXITFLAG] = fsolve(@S, p0, options);
```

```
p0f, FVAL, EXITFLAG
```

```
% Tracé des trajectoires optimales
```

```
options = odeset('AbsTol', 1e-9, 'RelTol', 1e-9);
```

```
[t, y] = ode45(@sys, [0; tf], [x0; p0f], options);
```

```
subplot(231); plot(t, y(:, 1)); title('trajectoiredex(t)'); grid on
```

```
subplot(232); plot(t, y(:, 2)); title('trajectoiredey(t)'); grid on
```

```
subplot(233); plot(t, y(:, 3)); title('trajectoiredep1(t)'); grid on
```

```
subplot(234); plot(t, y(:, 4)); title('trajectoiredep2(t)'); grid on
```

```
% Trajectoire du contrôle optimal
```

```
for i = 0 : 20
```

```
y(:, 5) = pi/2
```

```
end;
```

```
subplot(235); plot(t, y(:, 5)); title('trajectoire de u(t)'); grid on

% Définition de la fonction de tir

function Yzero = S(Y)

global x0 tf;

options = odeset('AbsTol', 1e-9, 'RelTol', 1e-9);

[t, y] = ode45(@sys, [0; tf], [x0; Y], options);

Yzero = [y(end, 1) - 100

y(end, 2) - 20];

% Système extremal

function ydot = sys(t, y)

for t = 0 : 20

    u = pi/2

    ydot = [-0.1 * t^2 + 1

2 * sin(pi/2)

0

y(3) * (2 * 0.1 * t)];

end
```

les résultats sont donnés par la figure 2 :

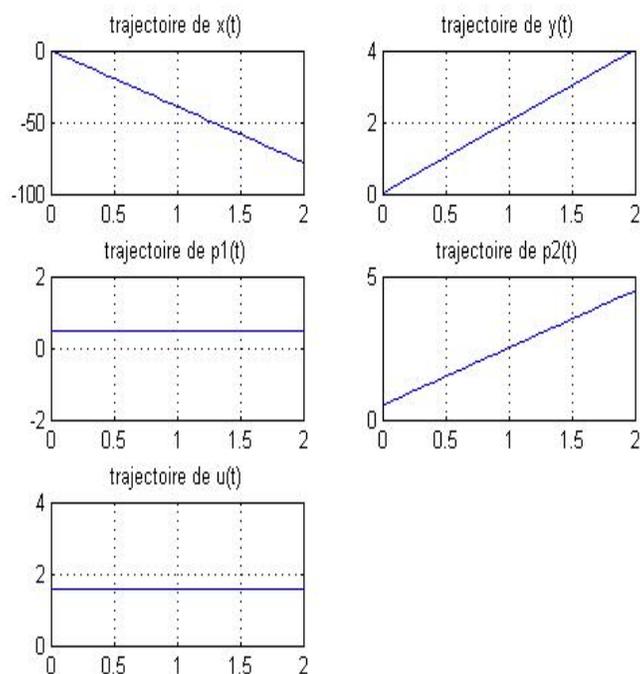


fig.2. Résultats de la méthode de tir

### 3<sup>ème</sup> problème

Dans le troisième problème le contrôle  $u = \frac{p_1 v}{1 - p_1 c(y(t))}$

On pose  $v = 2 \text{ m/s}$  et  $c(y(t)) = -0.1 * y(t)^2 + 1$  (voir [8]).

On désire aller du point  $(0, 0)$  vers  $(100, 20)$  avec temps final libre.

On se ramène à un problème de tir simple, le programme suivant est effectué sous Matlab :

```
function troisième_probleme

clearall; clf; clc;

global x0;

x0 = [0; 0]; P0 = [0.5; 1.5]; tf = 5;

% Calcul de P0 et tf

options = optimset('Display','iter','LargeScale','on');

[P0tf, FVAL, EXITFLAG] = fsolve(@S, [P0; tf], options);

EXITFLAG % 1 si la methode converge, -1 sinon

% Trace des trajectoires optimales

options = odeset('AbsTol', 1e - 9, 'RelTol', 1e - 9);

[t, y] = ode45(@sys, [0; P0tf(3)], [x0; P0tf(1); P0tf(2)], options);

subplot(231); plot(t, y(:, 1)); title('Trajectoire x(t)'); grid on

subplot(232); plot(t, y(:, 2)); title('Trajectoire y(t)'); grid on

subplot(234); plot(t, y(:, 3)); title('Trajectoire p1(t)'); grid on

subplot(235); plot(t, y(:, 4)); title('Trajectoire p2(t)'); grid on

for i = 1 : 20

y(:, 5) = acsc(-2 * y(3)/(y(3) * (-0.1 * i^2 + 1) - 1))

end

subplot(233); plot(t, y(:, 5)); title('Contrôle'); grid on
```

```

t(end)

%=====Definition de la fonction de tir=====

function Yzero = S(Y)

global x0;

options = odeset('AbsTol', 1e - 9, 'RelTol', 1e - 9);

[t, y] = ode113(@sys, [0; Y(3)], [x0; Y(1); Y(2)], options);

for t = 1 : 20

    HamEnd = y(end, 3) * ((-4 * y(end, 3))/(y(end, 3) * (-0.1 * t^2) - 1)) +
    y(end, 3) * (-0.1 * t^2 + 1) + (y(end, 4)) * (2 * sin(acsc(-2 * y(end, 3)/(y(end, 3) *
    (-0.1 * t^2 + 1) - 1)))));

    Yzero = [y(end, 1) - 100

    y(end, 2) - 20

    HamEnd];

end;

%=====systeme extremal=====

function ydot = sys(t, y)

for t = 0 : 20

    u = acsc(-2 * y(3)/(y(3) * (-0.1 * t^2 + 1) - 1))

    ydot = [(-4 * y(3))/(y(3) * (-0.1 * t^2 + 1) - 1) + (-0.1 * t^2 + 1)

    2 * (sin(acsc((-2 * y(3))/y(3) * (-0.1 * t^2 + 1) - 1)))]

```

0

```
y(3) * (0.1 * 2 * t)];
```

```
end
```

les résultats sont donnés par la figures 3 :

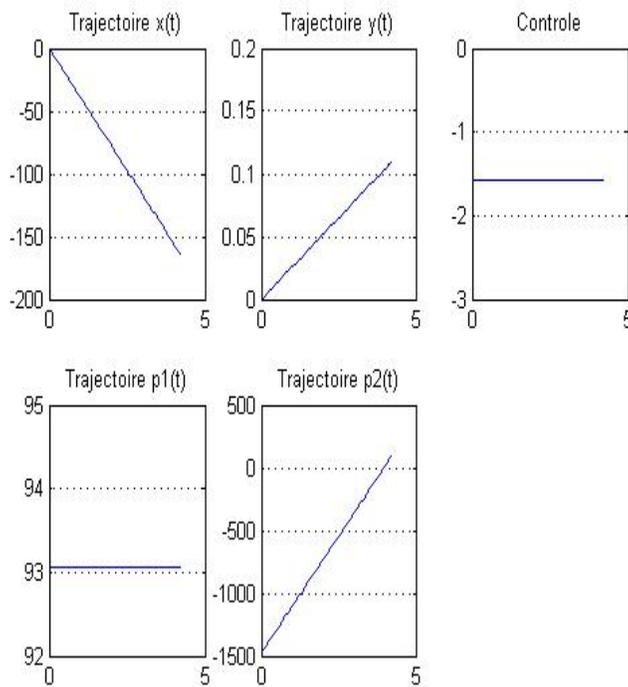


fig.3. Résultats de la méthode de tir

Le temps minimum pour atteindre le point(100, 20) calculé par Matlab est  $4.2135 - 0.0000i$ .

# Conclusion Générale

Notre objectif dans ce memoire est l'étude d'un porblème de contrôle optimal non linéaire sans contraintes sur l'état. En premier lieu on a présenter quelques concepts de bases de la théorie de contrôle optimal et quelques définitions de bases et les différents systèmes de contrôle optimal.

Ensuite nous nous sommes intéressés à l'étude et la présentation du principe du maximum dans deux cas différents le premier est celui de sans contraintes sur le contrôle, et le deuxième est celui avec contraintes sur le contrôle. Ainsi que les conditions de transversalité.

On a aussi présentés une méthode de résolution des problèmes de contrôle optimal. Elle fait partie des méthodes indirectes qui est la méthode de tir simple basée sur le principe du maximum, elle est précise et rapide.

La dernière partie est consacré à l'étude de problème de Zermalo. Après l'avoir modélisé mathématiquement, on lui applique le principe du maximum et la méthode de tir simple.

En fin on a donnés un exemple qu'on a résolu sous Matlab en utilisant la méthode de tir simple.

# Bibliographie

- [1] Emmanuel Trélat, "Contrôle optimal : théorie et applications", 2008.
- [2] Daya Ouidja, "Principe du maximum et méthode de tir", 2011.
- [3] Kahina Louadj , "Résolution de problèmes paramétrés de contrôle optimal", 2012.
- [4] Merakeb Abdelkader Achemine Farida, "COURS DE CONTÔRLE OPTIMAL : aspects théoriques et numériques", 2013/2014.
- [5] Frédéric Marbach, "Introduction au domaine de recherche", Octobre 2012.
- [6] Titouche Saliha, "Résolution d'un problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état".
- [7] Aliouche Keltouma Ramdani Hayet, "Étude d'un problème de contrôle en temps optimal avec interdépendance sur les contraintes d'entrée", 2012.
- [8] Nadia MEGDICH, "Méthode Anti-dissipatives pour les Equations Hamilton Jacobi Bellman" , Université Paris 6, 2008.
- [9] A. Agrachev, Y. Sachkov, "Control theory from the geometric viewpoint, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 87, Control Theory and Optimization", II, Springer-Verlag, Berlin, 2004.