

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud MAMMERI TIZI-OUZOU
Faculté du Génie et de la Construction
Département de Génie Civil



MEMOIRE DE MASTER ACADEMIQUE

Spécialité : génie civil

Option : Structures et Matériaux

SUJET

**ÉTUDE COMPARATIVE DES ÉLÉMENTS FINIS POUTRES DE BERNOULLI ET
DE TIMOSHENKO DANS L'ANALYSE DES OSSATURES PLANES**

Encadré Par :
Dr. S .DRIZI

Présenté par :
FERROUK EL'BACHIR
AIT MELLOULA KACI

Promotion 2014

REMERCIEMENT

Au terme de cette étude, il nous est très agréable d'exprimer toute notre gratitude, notre reconnaissance et nos très vifs remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail de thèse.

Nous remercions Monsieur Saïd DRIZI de nous avoir proposé ce sujet de thèse et pour l'intention qu'il a porté à notre travail.

Nous tiennent à remercions tous les étudiants de la section M₂ structure (2013/2014).

Nous vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner ce travail.

Et pour finir, un immense merci à nous parents et nous familles proches pour leurs soutient et leurs aide durant toutes nous années d'études.

Résumé

Notre propre travail est une étude comparative entre deux approches utilisant deux théories différentes appliquées à l'analyse des ossatures planes en béton armé de type poutre.

L'approche basée sur l'hypothèse de Navier Bernoulli, négligeant complètement les déformations dues à l'effort tranchant. Cette hypothèse est valable pour les poutres fléchies minces suffisamment élancées. Selon cette approche, un programme informatique *poutre_mince2* rédigé en langage fortran 90 est déjà existant. Ce programme permet la simulation du comportement non linéaire en flexion, jusqu'à la rupture, des éléments d'ossatures planes en béton armé.

L'approche basée sur la théorie de Timoshenko pour le calcul des éléments peu élancés et dans lesquels les déformations dues à l'effort tranchant sont non négligeables. Selon cette approche, un programme informatique *poutre_Timoshenko2* rédigé en langage fortran 90 est déjà existant. Il permet la simulation du comportement non linéaire en flexion en tenant compte des déformations de cisaillement, jusqu'à la rupture, des éléments d'ossatures planes en béton armé.

L'objectif de notre travail consiste à étudier les deux approches et de réaliser une étude comparative permettant d'évaluer l'influence des déformations de cisaillement dans les comportements linéaire et non linéaire des éléments fléchis.

Mots clés :

Poutres, ossatures, béton armé, Flexion, moment fléchissant, effort tranchant,

Abstract

Our work is a comparative study between two approaches using two different theories applied to the analysis of planar frames reinforced concrete beam types.

The approach based on the assumption of Bernoulli Navier completely neglecting deformations due to shear. This assumption is valid for thin beams bent sufficiently slender. Under this approach, a computer program written in FORTRAN language `poutre_mince2 90` already exists. This program allows the simulation of the nonlinear flexural behavior until failure, elements of reinforced concrete planar frames.

The approach based on the theory of Timoshenko for the calculation of some slender elements and in which the deformations due to shear are significant. Under this approach, a computer program written in `poutre_Timoshenko2` language FORTRAN 90 is already existing. It allows the simulation of the nonlinear behavior taking into account the bending strain of shear to failure, planar elements in reinforced concrete frames.

The objective of our work is to study the two approaches and to conduct a comparative study to evaluate the influence of shear deformations in linear and nonlinear behavior of the elements bent.

Keywords:

Beams, frames, reinforced concrete, bending, bending moment, shear force.

Indices et notations

$u_0(x)$: Déplacement axial au niveau de l'axe de référence de la poutre

$\theta(x)$: Rotation de la normale de la section transversale d'abscisse x

γ : Rotation due au cisaillement transversal

$u(x, z)$: Déplacement axial selon x

$w(x, z)$: Déplacement transversal selon z

E : Module de Young.

ν : Coefficient de poisson.

ε_{0x} : Déformation longitudinale au niveau de l'axe de référence.

Φ : Courbure.

f_z : Chargement repartit transversal.

f_x : Chargement longitudinal.

H : Hauteur de la section transversale

$b(z)$: Longueur de la section transversale variant avec la hauteur.

$N(x)$: Effort normal de la section transversale d'abscisse x .

$M(x)$: Moment fléchissant dans la section transversale d'abscisse x .

\overline{EA} : Rigidité à l'effort normal (de membrane).

\overline{ES} : Rigidité due au couplage effort normal + flexion.

\overline{EI} : Rigidité à la flexion.

$[K]_e$: Matrice de rigidité élémentaire.

z_j : Ordonnée du milieu de la couche j / à l'axe de référence.

b_j : Largeur du milieu de la couche j .

b_{inf} : Largeur inférieure du trapèze.

b_{sup} : Largeur supérieure du trapèze.

z_{inf} : Position inférieure par rapport à l'axe de référence.

z_{sup} : Position supérieure par rapport à l'axe de référence.

h_{layj} : Epaisseur de la couche j .

blayr : Largeur au niveau du milieu de la couche.

htrap :Hauteur du trapèze en cours (itrap).

[N] :Matrice des fonctions d'interpolation (de forme)

{p}e : Vecteur des forces nodales résultant des efforts intérieurs.

{f }e : Vecteur des forces nodales résultant des efforts repartis.

{F}j :Incrémentation du chargement appliqué

[K(U)] :Matrice de rigidité de la structure dépendant de vecteur{u}.

{F} :Vecteur des forces nodales appliquées à la structure.

{Ψ (U)} : Vecteur des forces résiduelles, à une étape de chargement donné.

{U} : Vecteur des déplacements nodaux.

f (x) : Les valeurs de la fonction f(x) au point de Gauss d'abscisse x de l'élément

αi : Coefficient de pondération correspondant au point de Gauss d'abscisse xi.

f_{bc} : Résistance à la compression du béton.

E_{b0} : Module élastique du béton à la compression.

ε₀ : Déformation correspondant au pic des contraintes.

ε_{cu} :Déformation de rupture de béton.

ε_{s1} : Déformation correspondant à la fin du palier plastique

ε_{s2} : Déformation correspondant à la fin du palier raffermissement

ε_{su} : Déformation de la rupture

σ_e : Limite d'élasticité à 2⁰/₀₀;

E_a :module d'élasticité longitudinale.

P :charge concentrée

τ : Contrainte tangentielle

σ : Contrainte normale

σ_r : Contrainte de rupture.

f_{bt} : Contrainte à la traction de béton

ε_{bft} :Déformation de la fibre la plus tendue

ε_{btu} :Déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu.

E_a :Module longitudinal de l'acier

ε_e :Déformation limite élastique de l'acier

ε_u :Déformation ultime de l'acier.

f_e :Limite élastique des aciers.

f_u :Résistance résiduelle de traction

f_{ft} :Résistance à la traction de composite

ε_u :Déformation ultime

ε_{bt} :Déformation à la rupture du béton en traction

f_{cj} :Résistance du béton à la compression,

E_{b0} :Module initial du béton,

ε_0 : Déformation du pic des contraintes du béton.

η_1 : Déformation de traction correspondant à f_{tj}

η_2 : déformation limite d'élasticité de l'acier le plus tendu

δ :flèche

δ_τ : flèche due au cisaillement

δ_f : flèche de flexion pure

δ_m : Glissement moyen

G : Module d'élasticité transversale.

K : coefficient de correction de cisaillement

A' : section réduite à l'abscisse x de la poutre

A : section réelle à l'abscisse x de la poutre

I : Moment d'inertie de la section par rapport à GZ

Tables des figures

	N° pages
Figure 2.1 : comportement en flexion simple	3
Figure 2.2 :poutre en console sous la flexion.....	5
Figure 2.3 : diagramme des efforts internes.....	5
Figure 2.4 :Comportement à l'effort tranchant.....	6
Figure 2.5 :Etat de contraintes dans une poutre en matériau homogène.....	9
Figure 2.6 : rupture par cisaillement et flexion.....	10
Figure 2.7 :Rupture par cisaillement et compression.....	11
Figure 3.1 : poutre de Timoshenko avant et après déformation	13
Figure 3.2 :Chargement dans le plan xz.....	15
Figure 3.3 :Elément fini de Timoshenko a 2 nœuds	19
Figure 3.4 :Discrétisation des déplacements et rotation.....	19
Figure 3.5 :Elément fini de Timoshenko à 3 nœuds	23
Figure 3.6 :Discrétisation des déplacements et rotation	23
Figure 3.7 : Discrétisation de la section transversale.....	26
Figure 4.1 :Discrétisation par éléments finis poutres.....	29
Figure 4.2 : Tronçon d'un élément poutre plane	30
Figure 4.3 :Hypothèse cinématique : poutre mince de Bernoulli	31
Figure 4.4 :Elément fini à 2 nœuds.....	33
Figure 4.5 : Discrétisation de la section transversale	37
Figure 4.6 : Organigramme de calcul.....	39
Figure 5.1 : Loi de comportement uni-axiale du béton sous contrainte decompression.....	47
Figure 5.2 :Distribution fictive des contraintes dans une section.....	48
Figure 5.3 :Relation entre la contrainte et la déformation instantanée du béton sur le bord tendu - model de Grelat.....	49
Figure 5.4 :Diagramme contrainte déformation d'un acier naturel.....	50

Figure 6.1 : exemple d'une poutre console.....	51
Figure 6.a1 : Courbe charges-Déplacements.....	52
Figure 6.a2 : Courbe Charges-Déplacements.....	53
Figure6.b1 : courbe charge déformation.....	54
Figure 6.b2 : courbe charges –déformations.....	55
Figure 6.c1 : courbe charges –déformations.....	56
Figure 6.c2 Contribution de la flèche de cisaillement à la flèche de flexion en fonction de H/L.....	57
Figure 6.2 : Contribution à la flèche totale en fonction de L/h.....	60
Figure 6.3 : Contribution à la flèche de flexion en fonction de L/h.....	60
Figure 6.4 : Contribution à la flèche totale en fonction de L/h.....	61
Figure6.5 Contribution à la flèche de flexion en fonction en fonction de L/h	62
Figure 6.6 : Données géométriques du la poutre.....	63
Figure 6.7 : Courbe charges-déplacements L=1,5h.....	64
Figure 6.8: Courbe charges-déplacements L=2,5h.....	65
Figure 6.9 : Courbe charges-déplacements L=4h.....	65
Figure6.10 : Courbe charges-déplacements L=10h.....	66
Figure6.11 : Contribution de la flèche de cisaillement a la flèche totale en fonction de L/h.....	66

Liste des tableaux

N° pages

Tableau 6.1 : Caractéristiques du béton.....63

Tableau 6.2 : Caractéristiques des aciers.....63

Table des matières

N° pages

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GENERALE.....	1
1.1 Position du problème.....	1
1.2 Objectif du travail.....	1
1.3 Plan de l'étude.....	2

CHAPITRE 2

APERCU SUR LE COMPORTEMENT DES ELEMENTS DE POUTRES VIS-A-VIS DE LA FLEXION ET DE L'EFFORT TRANCHANT.....

2.1 Introduction.....	3
2.2 Comportement en flexion simple.....	3
2.3 Comportement à l'effort tranchant.....	6
2.4 Aspects du comportement non linéaire.....	8
2.4.1 Modèle de fissuration et rupture en flexion.....	8
2.4.2. Modes de fissuration et rupture en cisaillement.....	9
2.4.3 Rupture par cisaillement et compression.....	10

CHAPITRE 3

Formulation de la poutre de Timoshenko.....

3.1 Introduction.....	12
3.2 Hypothèses de Calcul.....	12
3.3 Hypothèses de Base.....	13
3.4 Relations contraintes-déformations.....	14
3.5 Relations déformations-déplacements.....	14
3.6. Principe des travaux virtuels (P.T.V).....	15

3.6.1	Enoncé du principe des travaux virtuels (P.T.V).....	15
3.6.2	Application du principe des travaux virtuels (P.T.V).....	16
3.6.3	Calcul des efforts internes.....	16
a)	L'effort normal.....	19
b)	Le moment fléchissant.....	17
c)	L'effort tranchant.....	17
3.7	Le coefficient de correction de cisaillement	18
3.8	Modélisation par éléments finis.....	19
3.8.1	Modélisation par éléments finis à deux nœuds.....	19
3.8.1.1	Discrétisation des déplacements et rotation.....	19
3.8.1.2	Expression de la matrice de rigidité $[K]^e$	21
3.8.1.3	Evaluation des forces résiduelles élémentaires.....	21
a)	Calcul des forces nodales équivalentes $\{p\}$ aux efforts internes.....	21
b)	Evaluation des forces nodales équivalentes $\{f\}$ aux efforts répartis.....	22
3.8.2	Modélisation par éléments finis à trois nœuds.....	23
3.8.2.1	Discrétisation des déplacements et rotation.....	23
3.8.2.2	Expression de la matrice de rigidité $[K]^e$	24
3.8.2.3	Matrice Jacobéenne.....	25
3.8.2.4	Nouvelle expression de la matrice de rigidité $[K]^e$	25
3.8.2.5	Problème de blocage par cisaillement $[4]$	25
3.8.2.6	Discrétisation de la section transversale.....	26
3.8.2.7	Evaluation des forces résiduelles élémentaires	28
a)	Calcul des forces nodales équivalentes $\{p\}$ aux efforts internes.....	28
b)	Evaluation des forces nodales équivalentes $\{f\}$ aux efforts répartis....	29

CHAPITRE 4

Formulation de la poutre de Bernoulli.....	31
4.1-Introduction	31
4.2-Hypothese de base	31
4.3-Cinématique	32
4.4-Relation déformations – déplacements.....	34
4.5-Relation efforts – déplacements	34
4.6-Discretisation par élément finis	35
4.7-Discretisation de la section transversale	39
4.8-Evaluation des rigidités de section	39
4.9-Procédure de calcul non linéaire	40
4.10-Organigramme de calcul	41
4.11-Programme de calcul : poutre_mince2	42

CHAPITRE 5

Aperçu sur le comportement non linéaire et modélisation des matériaux.....	43
5-1 Introduction.....	43
5-2 Comportement non linéaire des structures en béton armé.....	43
5-2.1 les non-linéarités matérielles	43
5-2.2 les non-linéarités géométriques.....	43
5-3 Aperçu sur les travaux consacrés à l’analyse non linéaire des ossatures planes en béton armé	44
5-4 Modélisation de comportement des matériaux.....	46
5-4.1 le béton	46
5-4-1-1 Comportement en compression.....	46
5-4-1-2-Comportement de béton en traction.....	48
5-4-2-Comportement de l’acier en traction.....	50

CHAPITRE 6

Etude comparative	51
6-1-Introduction.....	51
6-2-Etude comparative dans le domaine linéaire.....	51
6-2-1-Model BERNOULLI POUTRE MINCE	51
6-2-1-1- Calcul analytique	52
6-2-1-2-Numériquement.....	53
6-2-2-Model de Timoshenko poutre épaisse.....	54
6-2-2-1- Analytiquement.....	54
6-2-2-2-Numériquement pour H constante et F variable.....	55
6-2-3- Comparaison entre les deux modèles de Timoshenko et Bernoulli	56
6-2-4-variation de la flèche d'effort tranchant en fonction de rapport (H/L).....	57
6.3 Etude comparative dans le domaine non linéaire	58
6.3.1 Calcul analytique : Exemple d'une poutre console.....	58
6.3.2 Calcul par simulation numérique.....	61
6.3.3 ETUDE COMPARATIVE DANS LE DOMAINE NON LINEAIRE NUMERIQUEMENT.....	63
6.3.3.1 SIMULATION NUMERIQUE COURBE CHARGE – FLECHE.....	64
CONCLUSION GENERALE	68
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	69

ANNEXES

Annexe A

Annexe B

CHAPITRE1

INTRODUCTION GENERALE

1.1 Position du problème :

Les éléments des structures en béton armé présentent généralement un comportement ductile vis-à-vis des sollicitations de la flexion.

Cependant, lorsqu'ils sont soumis simultanément à la flexion et à l'effort tranchant, leurs comportements et modes de fissuration deviennent plus complexes et dépendent de plusieurs paramètres tels que l'élancement, le type et la densité du ferrailage longitudinal et transversal, la forme de la section transversale etc.

Par ailleurs, les déformations dues à l'effort tranchant et les déplacements qui en résultent, deviennent non négligeables voir importantes dans les éléments peu élancés dont le comportement est gouverné essentiellement par l'effort tranchant.

Pour le calcul et simulation des éléments des ossatures de bâtiments on utilise généralement les modèles basé sur la théorie des poutres.

Dans ce cadre, deux approches sont utilisées :

L'approche basé sur l'hypothèse de Navier Bernoulli, négligeant complètement les déformations dues à l'effort tranchant .cette hypothèse est valable pour les poutres fléchies minces suffisamment élancés.

L'approche basée sur la théorie de Timoshenko pour le calcul des éléments peu élancés et dans lesquels les déformations dues à l'effort tranchant sont non négligeables.

Dans le cas d'un comportement linéaire, et pour des valeurs d'élancements intermédiaires, il serait intéressant de vérifier la validité de l'une ou de l'autre des deux méthodes.

Par ailleurs, dans le domaine non linéaire, les modes de fissuration et de rupture vis-à-vis de l'effort tranchant sont complètement différents de ceux obtenus en flexion.

1.2 Objectif du travail :

L'objectif essentiel de notre travail est de réaliser une étude comparative entre les deux approches, en considérant divers paramètres dont le principal est l'élancement.

Dans le domaine du comportement linéaire, l'étude comparative est réalisée en effectuant des calculs analytiques.

Dans le domaine non linéaire, le calcul analytique n'est plus possible.

On utilise alors, un outil informatique de simulation basé sur la méthode des éléments finis.

Deux programmes sont utilisés :

Le programme « poutre-mince » utilisant des éléments finis poutres basées sur l'hypothèse Navier Bernoulli.

Le programme « Timoshenko » utilisant des éléments finis poutres basées sur la théorie de Timoshenko.

1.3-plan de l'étude :

L'étude est développée comme suit :

Le chapitre 2 présente un aperçu sur le comportement des éléments des poutres vis-à-vis de la flexion et de l'effort tranchant.

Dans Le Chapitre3, on s'intéresse à la formulation et présentation de modèle d'éléments finis type poutre -épaisse a 2 nœuds permettent la modélisation (programme poutre Timoshenko2+++) du comportement en flexion simple jusqu'à rupture de la structure plane, on se base sur la théorie de Timoshenko.

Dans Le Chapitre4, on s'intéresse à la formulation et présentation de modèle d'éléments finis type poutre -mince a 2 nœuds permettent la modélisation (programme poutre-mince2+++) du comportement en flexion simple jusqu'à rupture de la structure plane, on se base sur la théorie de Navier Bernoulli.

Le Chapitre5, on effectue un aperçu sur le comportement non linéaire et modélisation des matériaux.

Dans le Chapitre6, on effectue une étude comparative entre les deux modèles de type poutre, utilisant la théorie de Navier Bernoulli et la théorie de Timoshenko afin de voir leurs fiabilités.

Enfin une conclusion générale termine ce travail, où nous présentons quelques remarques et perspectives à l'issue de cette étude.

CHAPITRE 2

Aperçu sur le comportement des éléments de poutres
vis-à-vis de la flexion et de l'effort tranchant

2.1 INTRODUCTION :

Dans ce chapitre, on présente des rappels théoriques sur le comportement en flexion et cisaillement des poutres droites. On se place dans le cadre de la résistance des matériaux qui nous permet de déterminer :

- Les efforts intérieurs engendrés dans les poutres.
- Les déformations et déplacements qui en résultent.

2.2 Comportement en flexion simple :

Considérons une poutre droite à plan moyen, fléchie dans son plan de symétrie, soumise à un moment fléchissant M porté par l'axe GZ .

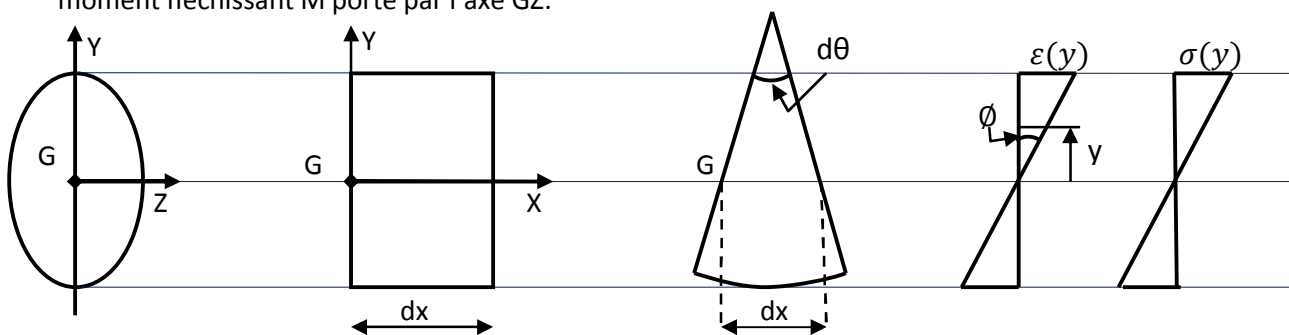


Figure 2.1 : Comportement en flexion simple

Le moment équilibré par la section à l'abscisse x est :

$$M = M(x) = \int_s \sigma y ds$$

$\sigma(y)$ Étant linéaire selon la hauteur, alors :

$$\sigma = ay ; a = \text{Constante}$$

D'où

$$M = \int_s a y^2 ds$$

$$= a \int_s y^2 ds$$

$$= a I \quad \text{D'où} \quad a = \frac{M}{I}$$

$$\text{D'où : } \sigma = \frac{M}{I} y \dots (2.1)$$

Avec : I = moment d'inertie de la section par rapport à GZ.

La déformation longitudinale est linéaire selon la hauteur de la section (hypothèse de planéité de la section après déformation) on a alors

$$\varepsilon = \emptyset y \dots (2.2)$$

Où \emptyset est la courbure de la section a l'abscisse x .

Dans l'hypothèse d'un comportement linéaire on a :

$$\sigma = E\varepsilon \dots (2.3)$$

A partir de (2.2) et (2.3), on peut écrire

$$\emptyset = \frac{\varepsilon}{y} = \frac{\sigma}{Ey}$$

Et en tenant compte de (2.1), on déduit la relation classique :

$$\emptyset = \frac{M}{EI} \dots (2.4)$$

Dans l'hypothèse des petits déplacements et déformations et en l'absence des déformations de cisaillement on a :

$$\emptyset = \frac{d\theta}{dx} \text{ et } \theta = \frac{dw}{dx}$$

Où θ est la rotation de la ligne moyenne de la poutre et w est la flèche de la ligne moyenne à l'abscisse x

L'expression (2.4) peut s'écrire alors :

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x) \dots (2.5)$$

C'est l'équation différentielle de la ligne moyenne de la poutre.

Son intégration permet la détermination de la rotation et de la flèche.

$$\theta(x) = \int \frac{M}{EI} dx \dots (2.6)$$

$$w(x) = \int \frac{M}{EI} x dx \dots (2.7)$$

Exemplé d'une poutre en console :

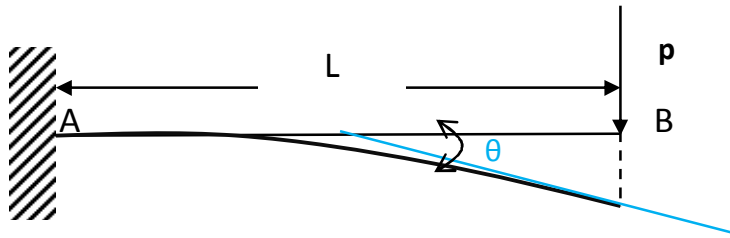


Figure.2.2 poutre en consol sous la flexion

Pour les efforts internes on aura les diagrammes suivants :

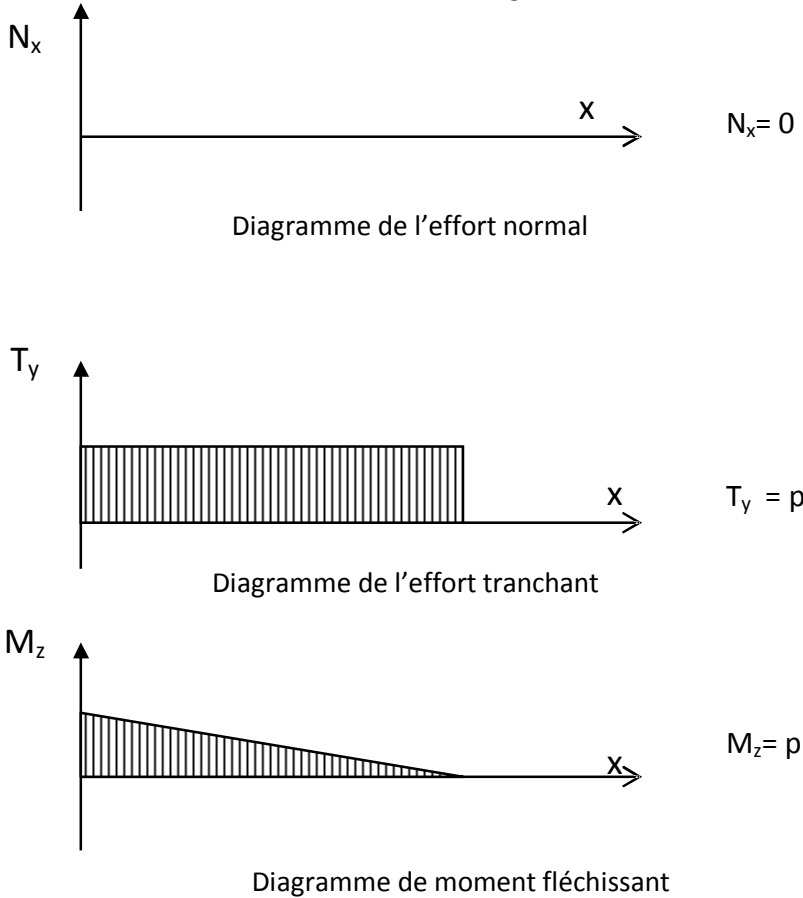


Figure2.3 : Diagramme des efforts internes

Calcul de θ :

De l'équation $\theta = \int_0^L \frac{M}{EI_Z} dx$, on a $M_z = p x$

$$\theta = \int_0^l \frac{px}{EI_Z} dx \quad \theta = \frac{px^2}{2EI_Z} \Big|_0^L \quad (2.8)$$

Calcul de δ :

De l'équation $\delta = \int_0^l \frac{M}{EI_Z} x dx$, On a $M_z = p x$

$$\delta = \int_0^l \frac{px^2}{EI_Z} dx \quad \delta = \frac{px^3}{3EI_Z} \Big|_0^L \quad (2.9)$$

La flèche δ et la rotation θ en B soumise par la flexion est :

$$\delta = \frac{pL^3}{3EI_Z} \quad (2.10) \quad \theta = \frac{pL^2}{2EI_Z} \quad (2.11)$$

2.3 Comportement à l'effort tranchant :

Sous l'effet du cisaillement, les fibres de la poutre subissent des glissements γ liés aux contraintes de cisaillement τ .

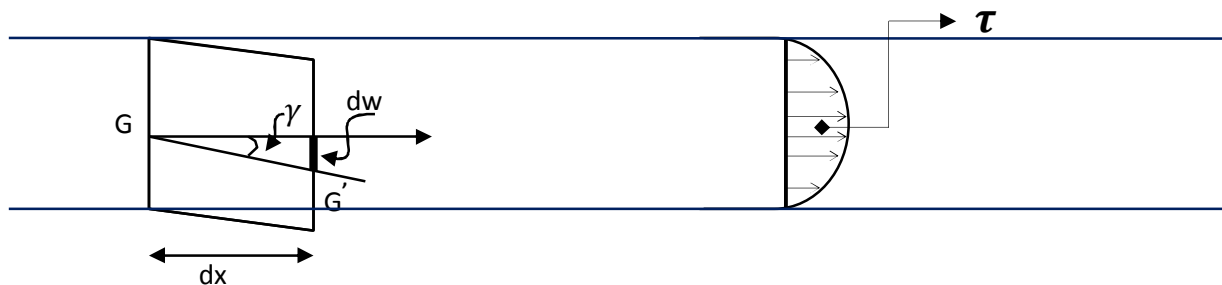


Figure 2.4 : Comportement à l'effort tranchant

Selon la loi de Hooke $\tau = G\gamma \dots (2.12)$

Où G est le module d'élasticité transversale.

Dans l'expression (2.12), les contraintes de cisaillement varient selon la hauteur et par conséquent le glissement γ doit varier (effet de gauchissement).

En supposant que la section reste plane après déformation, on considère un glissement moyen constant sur toute la hauteur de la section on introduit alors un coefficient de cisaillement K.

Le glissement moyen provoque une variation dw de la flèche entre x et $x + dx$.

$$\gamma_m = \frac{dw}{dx} \dots (2.13)$$

D'après (2.12) et en tenant compte de coefficient de correction K, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 T &= \int \tau \, ds \\
 &= \int KG\gamma_m \, ds \\
 &= KG\gamma_m A
 \end{aligned}$$

$$D'où : \frac{dw}{dx} = \frac{T(x)}{GA'} \dots (2.14)$$

Où A' = KxA est la section réduite à l'abscisse x de la poutre

La courbure engendré par le cisaillement est donnée par :

$$\emptyset = \frac{d^2w}{dx^2}$$

$$\emptyset = \frac{1}{GA'} \frac{dT}{dx} \dots (2.15)$$

$$\emptyset = \frac{q}{GA'} \quad \text{Où } q = \frac{dT}{dx}$$

En tenant compte de la flexion et du cisaillement on obtient :

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EI} + \frac{q}{GA'} \dots (2.16)$$

L'intégration de l'équation (2.16) permet d'évaluer la flèche en tenant compte de la flexion et des déformations dues au cisaillement.

Considérant l'exemple précédent de la poutre console :

La flèche en tête de la poutre est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \delta &= \int_0^l \left[\frac{Mx}{EI} + \frac{q}{GA'} \right] dx ; M = Px \text{ et } q = P \\
 &= \int_0^l \left[\frac{Px^2}{EI} + \frac{P}{GA'} \right] dx \text{ Après intégration on obtient} \\
 \delta &= \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pl}{GA'} \dots (2.17)
 \end{aligned}$$

2.4 Aspects du comportement non linéaire :

2.4.1 Modèle de fissuration et rupture en flexion :

Une poutre en béton armé est soumise à plusieurs types de sollicitations agissant simultanément.

Le plus souvent sont retrouvés des efforts de flexion, de torsion, de traction et de cisaillement.

Pour une poutre sollicitée en flexion simple ou composée, les efforts dans une section se décomposent en un moment fléchissant M , un effort normal N et un effort tranchant V qui présente la variation du moment fléchissant le long de la poutre ($v=dM/dx$).

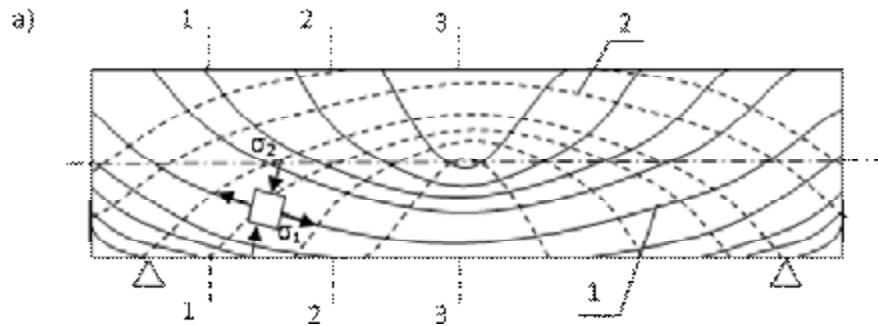
Le moment fléchissant engendre des contraintes normales et l'effort tranchant des contraintes tangentielles.

L'effort tranchant varie dans la hauteur de la section, le cas d'une poutre de section rectangulaire sa variation est parabolique avec un maximum au niveau de centre de gravité [3].

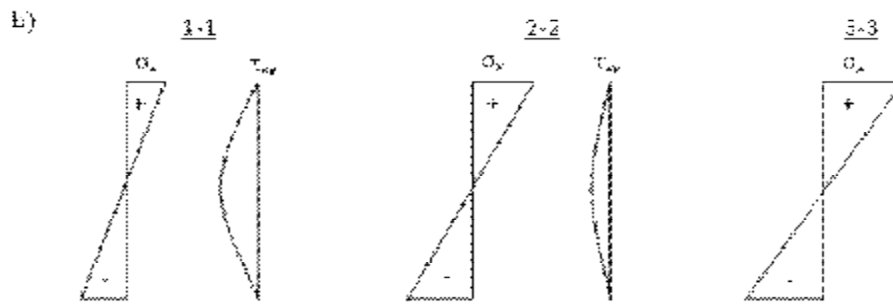
Dans les sections transversales de la zone de cisaillement, pour éléments de constructions tels que les poutres, les contraintes principales σ_1 sont positives (tensions) sur toute la hauteur de la section. Ceci indique que les axes neutres de la flexion et du cisaillement ne se confondent pas.

Dans une poutre non fissurée en béton armé, le système des lignes de force des contraintes principales est presque le même que celui d'une poutre homogène (Fig.2.5). Par contre, à partir de l'apparition des fissures l'état de contrainte dans une poutre en béton armé est entièrement différent et dépend du type et du nombre des fissures inclinées [4]. L'apparition des fissures dans le béton correspond le plus souvent à son caractère de matériau fragile, et la direction des fissures est perpendiculaire à la direction des contraintes de tension [4].

Dans la zone de cisaillement où σ_1 est une contrainte de tension et σ_2 représente la compression, la direction des fissures correspond approximativement à la direction des lignes de force des contraintes de compression [4].



- 1) Direction de la contrainte σ_1 (traction).
- 2) Direction de la contrainte σ_2 (compression).



- a) Schéma d'une poutre avec les lignes de forces des contraintes principales σ_1, σ_2
- b) Diagrammes des contraintes normales et tangentes dans les sections 1-1, 2-2 et 3-3 de la poutre

Figure.2.5 : Etat de contraintes dans une poutre en matériau

Le ferrailage d'une poutre soumise à l'effort tranchant est généralement comme suit :

- ✓ Des armatures longitudinales (barres) pour les contraintes normales de tractions.
- ✓ Des armatures transversales (généralement treillis) pour empêcher les efforts tranchants.

Généralement, dans une poutre en béton armé, les fissures dues aux efforts de cisaillement se forment aux endroits où la contrainte de cisaillement dépasse la résistance du béton en traction. Un effort tranchant crée de la traction oblique et en cas d'insuffisance de l'armature transversale, les fissures se développent. Dans le cas d'une poutre à portée simple, elles se forment dans le tiers de la portée voisine aux appuis et sont inclinées grossièrement à un angle θ généralement admis égal à 45° dans les normes. L'apparition de ce type de fissure démontre un problème lié à des efforts tranchants.

2.4.2. Modes de fissuration et rupture en cisaillement :

Pour ce qui concerne les modes de rupture, plusieurs possibilités sont envisageables, en fonction de la quantité d'armatures longitudinale et transversale, de la forme de la section, de l'adhérence des armatures au béton et du mode d'ancrage des barres au-dessus des appuis, en fonction de la

géométrie de la poutre le rapport l/h est généralement utilisé pour distinguer les différents types de poutre en béton armé, où l est la distance entre l'appui et le point d'application de la charge et h la hauteur effective de la section de la poutre. Ainsi, les poutres sont classées comme suit :

- Poutres très profondes $l/h \leq 1$.
- Poutres profondes $1 < l/h \leq 2.5$.
- Poutres élancées $2.5 < l/h \leq 6$.
- Poutres très élancées $l/h > 6$.

Nous distinguons quelques types de rupture de la zone de cisaillement :

Ce mode de rupture peut intervenir dans les poutres dont l'armature principale est relativement importante et l'armature transversale faible ou même inexistante. La cause de la rupture est la destruction du béton par séparation et glissement dans la zone de compression au-dessus de l'extrémité de la fissure oblique. A cet endroit, un pseudo d'articulation se forme, autour de laquelle a lieu une rotation des deux parties de la poutre séparées par la fissure oblique (fig.2.6), avec un glissement tangentiel simultané.

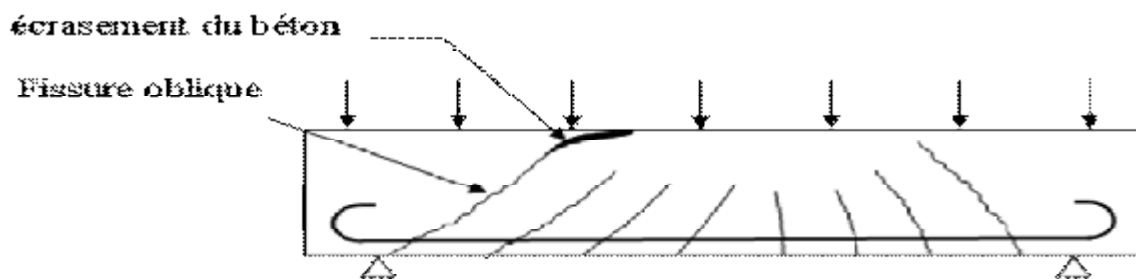


Figure2.6 :Rupture par cisaillement et flexion

2.4.3 Rupture par cisaillement et compression :

Ce mode de rupture peut intervenir dans les poutres dont l'armature principale est relativement importante et l'armature transversale faible ou même inexistante. La cause de la rupture est la destruction du béton par séparation et glissement dans la zone de compression au-dessus de l'extrémité de la fissure oblique. A cet endroit, un pseudo d'articulation se forme, autour de laquelle a lieu une rotation des deux parties de la poutre séparées par la fissure oblique (figure.2.7), avec un glissement tangentiel simultané.

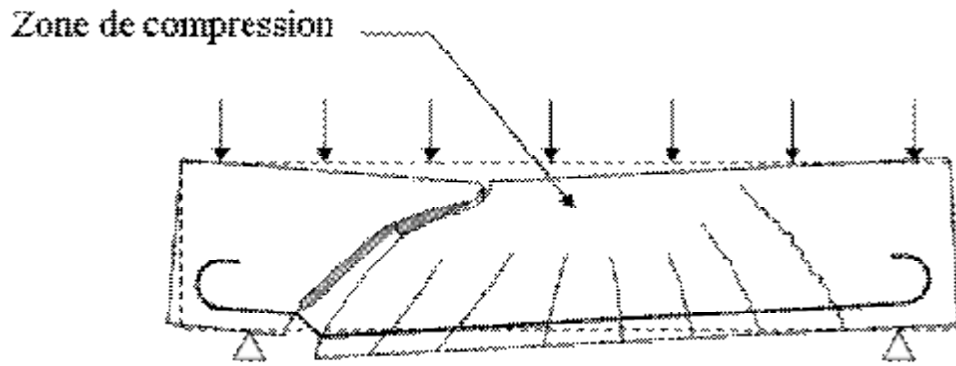


Figure2.7 : Rupture par cisaillement et compression

Chapitre 3

Formulation de la poutre de Timoshenko

3.1 Introduction :

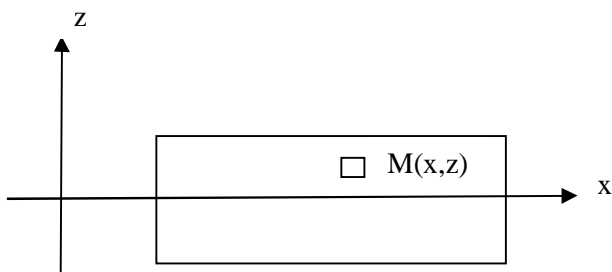
Ce chapitre est consacré à la formulation de la poutre de Timoshenko. Pour cela on présente les relations caractérisant la théorie des poutres droites fléchissant dans un plan, en tenant compte de l'influence des déformations de cisaillement transversal (poutre épaisse) , qu'est basé sur l'hypothèse des poutres droites(pour définir le champ de déplacement).

3.2 Hypothèses de Calcul :

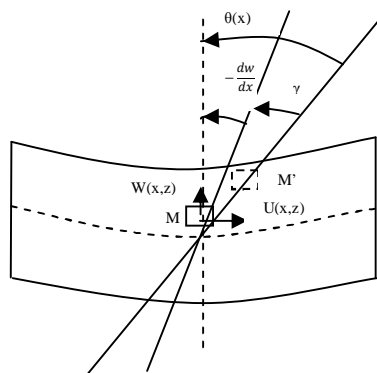
Notre étude est basé sur un élément de poutre plane orienté dans la direction x (dans le plan xz).les hypothèses retenu sont les suivantes :

- L'axe longitudinal de la poutre est droit.
- Le plan xz est le plan principal d'inertie.
- La poutre se déforme dans le plan xz (en membrane, flexion et cisaillement avec l'hypothèse des contraintes planes $\sigma_{zz} = 0$.
- La poutre plane transmet des efforts normaux $N_x(x)$ suivant la direction x , des efforts tranchants $T_z(x)$ suivant la direction z et des moments fléchissant $M_y(x)$ autour de l'axe local y orthogonal au plan xz .
- Les quantités globales caractérisant le comportement d'une poutre se déformant dans le plan xz ne sont fonction que de la variable x , exemple :
 - * Géométrie x , $A(x)$.
 - * Efforts résultantes $N(x)$, $T(x)$ et $M(x)$.
 - * Rigidités élastiques $\overline{EA}(x)$, $\overline{ES}(x)$, $\overline{EI}(x)$ et $\overline{GA}(x)$.
 - * Les déplacements $u(x,z)$, $w(x)$, $\theta(x)$.
 - * Sollicitations : $f_x(x)$ et $f_z(x)$

3.3 Hypothèses de Base :



(a) Poutre de Timoshenko avant déformation



(b) poutre de Timoshenko après déformation.

Figure 3.1 : poutre de Timoshenko avant et après déformation.

Considérons une section d'abscisse x d'une poutre avant et après déformation (figure III.1), soit le point $M(x,z)$ sur la configuration non déformée. Après déformation le point M subit deux déplacements :

- Ø Un déplacement axial $U(x,z)$ selon x .
- Ø Un déplacement transversal $W(x,z)$ selon z .

Tels que :

$$\begin{cases} U(x,z) = u_0(x) - z \cdot \theta(x) \\ W(x,z) = w(x) \end{cases}$$

Ou : $u_0(x) = M_0 M'_0$ est le déplacement axial au niveau de l'axe de référence $z=0$.

$\theta(x)$ est la rotation de la normale de la section transversale D'abscisse x

la rotation γ d'ue au cisaillement transversal est :

$$\gamma(x, z) = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \quad (3.2)$$

$$\gamma(x, z) = -\theta(x) + \frac{dw}{dx} \quad (3.3)$$

$\gamma(x, z) = \gamma(x)$; γ ne dépend que de x .

N.B : on notera γ au lieu de γ_{xz} par simplification.

3.4 Relations contraintes-déformations :

Considérons un état plan de contraintes au point M on appliquons l'hypothèse d'un comportement élastique, linéaire et isotrope :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Avec :

E : module de Young.

ν : Coefficient de poisson.

Dans le cadre de la théorie des poutres, on considère un état de contraintes uni axiales :

$$\Rightarrow \sigma_z = 0 \text{ et } \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x \quad (3.5)$$

En éliminant ε_z de (3.2) et (3.3) on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_x = E \varepsilon_x \\ \tau_{xz} = G \gamma_{xz} \end{cases} \quad (3.6)$$

Avec :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

3.5 Relations déformations-déplacements :

Dans l'hypothèse des petits déplacements et déformations (H.P.P) on a :

$$\varepsilon_x = \frac{du(x, z)}{dx} \quad (3.7)$$

On tenant compte de (3.1), on obtient :

$$\varepsilon_x(x, z) = \frac{du_0(x)}{dx} - z \cdot \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (3.8)$$

On pose :

$\varepsilon_{0x} = \frac{du_0(x)}{dx}$ déformation longitudinale au niveau de l'axe de référence ($z=0$), à l'abscisse x .

$\varnothing = -\frac{d\theta(x)}{dx}$ pseudo courbure de la section à l'abscisse x .

On obtient :

$$\varepsilon_x(x, z) = \varepsilon_{0x} + z \cdot \varnothing \quad (3.9)$$

Remarque :

Si on néglige les déformations de cisaillement $\gamma=0$, alors d'après (3.3) on aura :

$\theta = \frac{dw}{dx}$ et (3.9) devient :

$$\varepsilon_x(x, z) = \varepsilon_{0x} - z \cdot \frac{d^2w}{dx^2} \quad (3.9')$$

Avec : $\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)$: courbure de la section à l'abscisse x .

L'équation (3.9') correspond au cas particulier des poutres minces (hypothèse de Navier – Bernoulli).

3.6 Principe des travaux virtuels (P.T.V) :

3.6.1 Énoncé du principe des travaux virtuels (P.T.V) :

Considérons un tronçon de poutre de Timoshenko de longueur ℓ , de hauteur h et largeur $b(z)$, variant avec la hauteur. On suppose que ce tronçon est soumis à un chargement réparti transversal f_z et longitudinal f_x .

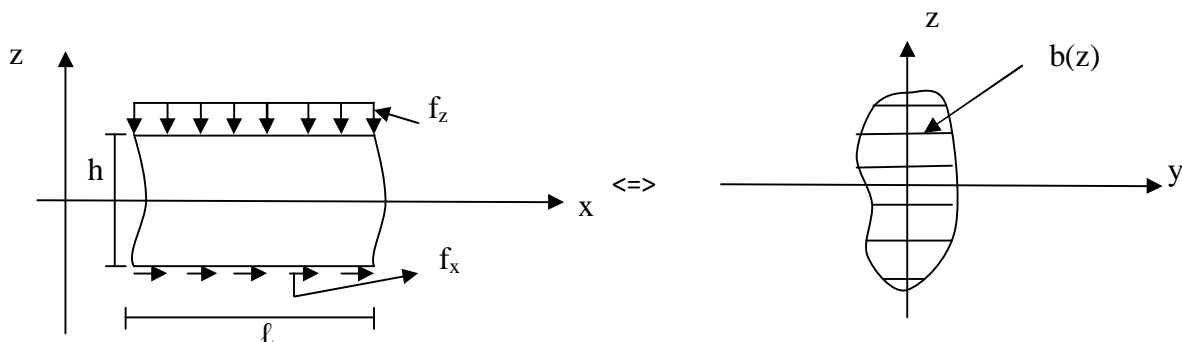


Figure 3.2 : chargement dans le plan xz .

3.6.2 Application du principe des travaux virtuels (P.T.V) :

D'après le principe des travaux virtuels, le travail des efforts intérieurs est égal au travail des efforts extérieurs :

$$W_{int} = W_{ext} \int_0^{\ell} \langle \delta \hat{\varepsilon} \rangle \{ \sigma \} dv = \int_0^{\ell} \delta \hat{w} f_z dx + \int_0^{\ell} \delta \hat{u} f_x dx \forall \delta \hat{\varepsilon}, \delta \hat{w}, \delta \hat{u}$$

Avec : $\delta \hat{\varepsilon}, \delta \hat{w}$ et $\delta \hat{u}$ sont les déformations et déformations virtuels.

On a : $\{ \delta \hat{\varepsilon} \} = \begin{Bmatrix} \delta \hat{\varepsilon}_x \\ \delta \hat{\gamma}_{xz} \end{Bmatrix}$.

$$\Rightarrow \int_0^{\ell} \int_s \langle \delta \hat{\varepsilon}_x, \delta \hat{\gamma}_{xz} \rangle \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} ds \cdot dx - \int_0^{\ell} \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^{\ell} \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

Or : $\delta \hat{\varepsilon}_x = \delta \hat{\varepsilon}_{0x} - z \cdot \frac{\delta d\hat{\theta}}{dx}$ et $\delta \hat{\gamma}_{xz} = \delta \hat{\gamma}$ d'après (3.9) et (3.3).

$$\Rightarrow \int_0^{\ell} \int_s \langle \delta \hat{\varepsilon}_{0x} - z \cdot \frac{\delta d\hat{\theta}}{dx}, \delta \hat{\gamma}_{xz} \rangle \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} ds \cdot dx - \int_0^{\ell} \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^{\ell} \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

$$\int_0^{\ell} \int_s \langle \delta \hat{\varepsilon}_{0x} \sigma_x - z \cdot \frac{\delta d\hat{\theta}}{dx} \sigma_x + \delta \hat{\gamma}_{xz} \tau_{xz} \rangle ds \cdot dx = \int_0^{\ell} \delta \hat{w} f_z dx + \int_0^{\ell} \delta \hat{u} f_x dx$$

$$\int_0^{\ell} \left[\delta \hat{\varepsilon}_{0x} \int_s \sigma_x ds - \frac{\delta d\hat{\theta}}{dx} \int_s \sigma_x \cdot z ds + \delta \hat{\gamma} \int_s \tau_{xz} ds \right] = \int_0^{\ell} \delta \hat{w} f_z dx + \int_0^{\ell} \delta \hat{u} f_x dx \quad (3.10)$$

On pose :

$$\int_s \sigma_x ds = N \text{ l'effort normal dans la section transversale à l'abscisse } x.$$

$$\int_s \sigma_x \cdot z ds = M \text{ le moment fléchissant.} \quad (3.11)$$

$$\int_s \tau_{xz} ds = T \text{ l'effort tranchant.}$$

3.6.3 Calcul des efforts internes :

En tenant compte des expressions de σ_x, τ_{xz} et selon (3.6) on obtient :

a) L'effort normal :

$$\begin{aligned} N &= \int_s \sigma_x ds = \int_s E \varepsilon_x ds \\ &= \int_s E \left(\varepsilon_{0x} - z \cdot \frac{d\theta}{dx} \right) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_s E \varepsilon_{0x} ds - \frac{d\theta}{dx} \int_s E z ds \\
&= \varepsilon_{0x} \int_s E ds - \frac{d\theta}{dx} \int_s E z ds \\
&= \overline{EA} \cdot \varepsilon_{0x} + \overline{ES} \left(-\frac{d\theta}{dx} \right)
\end{aligned}$$

$$N = \overline{EA} \cdot \varepsilon_{0x} + \overline{ES} \theta \quad (3.12)$$

Avec :

$\overline{EA} = \int_s E ds$ Rigidité à l'effort normal ou rigidité de membrane.

$\overline{ES} = \int_s E \cdot z ds$ Rigidité due au couplage effort normal + flexion.

b) Le moment fléchissant :

$$\begin{aligned}
M &= \int_s \sigma_x \cdot z ds = \int_s E \varepsilon_x \cdot z ds \\
&= \int_s E \left(\varepsilon_{0x} - z \cdot \frac{d\theta}{dx} \right) z ds \\
&= \varepsilon_{0x} \int_s E \cdot z ds - \frac{d\theta}{dx} \int_s E z^2 ds \\
&= \overline{ES} \varepsilon_{0x} - \frac{d\theta}{dx} \overline{EI}
\end{aligned}$$

$$M = \overline{ES} \varepsilon_{0x} + \overline{EI} \theta \quad (3.13)$$

Avec :

$\overline{EI} = \int_s E \cdot z^2 ds$ Rigidité à la flexion.

c) L'effort tranchant :

$$\begin{aligned}
T &= \int_s \tau_{xz} ds = \int_s G \gamma_{xz} ds \\
&= \gamma_{xz} \int_s G \cdot ds
\end{aligned}$$

$$T = \overline{GA} \cdot \gamma_{xz} \quad (3.14)$$

Avec :

$$\overline{GA} = \int_s G \cdot ds \text{ rigidité à l'effort tranchant.}$$

3.7 Le coefficient de correction de cisaillement [4]:

En introduisant le coefficient de correction k dans la formulation de Timoshenko, la relation (3.14) de l'effort tranchant devient :

$$\begin{aligned} T &= k \int_s \tau_{xz} ds = k \int_s G \gamma_{xz} ds \\ &= k \cdot \gamma_{xz} \int_s G \cdot ds \\ &= k \cdot \overline{GA} \cdot \gamma_{xz} \end{aligned}$$

$$T = \overline{GA} \cdot \gamma_{xz} \quad (3.15)$$

Avec :

$$\overline{GA} = \int_s G \cdot ds \text{ Rigidité à l'effort tranchant sans correction.}$$

$$\overline{GA} = k \cdot \overline{GA} \text{ Rigidité à l'effort tranchant corrigée.}$$

On tenant compte des relations (3.12),(3.13) et (3.15) dans l'expression (3.10) du P.T.V,

On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[\delta \hat{\varepsilon}_{0x} \left(\overline{EA} \cdot \varepsilon_{0x} + \overline{ES} \left(-\frac{d\theta}{dx} \right) \right) + \left(-\frac{\delta d\hat{\theta}}{dx} \right) \left(\overline{ES} \varepsilon_{0x} + \overline{EI} \left(-\frac{d\theta}{dx} \right) \right) + \delta \hat{\gamma} \cdot \overline{GA} \cdot \gamma_{xz} \right] \\ = \int_0^l \delta \hat{w} \cdot f_z dx + \int_0^l \delta \hat{u} \cdot f_x dx \quad (3.16) \end{aligned}$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} \int_0^l \left\{ \langle \delta \hat{\varepsilon}_{0x} , \left(-\frac{\delta d\hat{\theta}}{dx} \right) , \delta \hat{\gamma} \rangle \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} & 0 \\ \overline{ES} & \overline{EI} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{GA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ -\frac{d\theta}{dx} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} - \delta \hat{w} \cdot f_z - \delta \hat{u} \cdot f_x \right\} dx \\ = 0 \quad (3.17) \end{aligned}$$

Ou plus simplement :

$$\int_0^l \{ \delta \hat{\varepsilon} [D] \{ \varepsilon \} - \delta \hat{w} \cdot f_z - \delta \hat{u} \cdot f_x \} dx = 0 \quad (3.18)$$

Avec :

$$\langle \delta \hat{\varepsilon} \rangle = \langle \delta \hat{\varepsilon}_{0x} , \left(-\frac{\delta d\hat{\theta}}{dx} \right) , \delta \hat{\gamma} \rangle \quad (3.19)$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_{0x} , \left(-\frac{d\theta}{dx} \right) , \gamma_{xz} \rangle \quad (3.20)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} & 0 \\ \overline{ES} & \overline{EI} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{GA} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

3.8 Modélisation par éléments finis :

3.8.1 Modélisation par éléments finis à deux nœuds :

Cet élément a été étudié par SAIB dans le cadre de son mémoire de Magister [4].
On considère un élément linéaire à deux nœuds, orienté suivant les directions x et z.

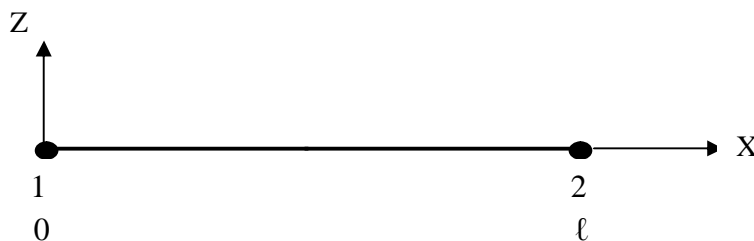


Figure.3.3 : Elément fini de Timoshenko a 2 nœuds

3.8.1.1 Discrétisation des déplacements et rotation :

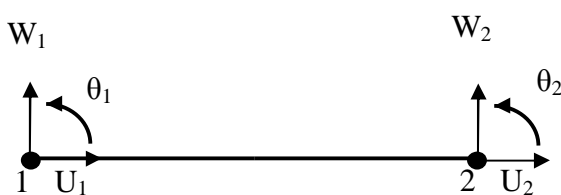


Figure.3.4 : Discrétisation des déplacements et rotation

Les déplacement $u(\xi), w(\xi)$ et la rotation $\theta(\xi)$ sont linéaires en fonction de x .

Le déplacement longitudinal au niveau de l'axe de référence est approximé par :

$$U(\xi) = N_1 U_1 + N_2 U_2 = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) U_i \dots (3.22)$$

Où U_1 et U_2 sont les valeurs de $U(\xi)$ aux nœuds 1 et 2

$$\text{Et } \begin{cases} N_1 = (1 - x/l) \\ N_2 = x/l \end{cases} \dots (3.23)$$

La déformation longitudinale au niveau de l'axe de référence est :

$$\epsilon_{0x} = \frac{dU_0(x)}{dx} = \frac{dU_0(x)}{dx} = -\frac{1}{\ell}u_1 + \frac{1}{\ell}u_2 \quad \dots\dots\dots(3.24)$$

- le déplacement transversal :

$$W(x) = N_1w_1 + N_2w_2 = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi)w_i \quad \dots\dots\dots (3.25)$$

$$D'où : \frac{dw}{dx} = -\frac{1}{\ell}w_1 + \frac{1}{\ell}w_2 \quad \dots\dots(3.26)$$

- la rotation :

$$\theta(\xi) = N_1\theta_1 + N_2\theta_2 = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi)\theta_i \quad \dots\dots\dots (3.27)$$

$$D'où : \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\ell}\theta_1 + \frac{1}{\ell}\theta_2 \quad \dots\dots(3.28)$$

$$Et : \gamma = \frac{dw}{dx} - \theta = \frac{w_2 - w_1}{\ell} - \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\theta_1 - \frac{x}{\ell}\theta_2 \quad \dots\dots (3.29)$$

Pour $x = \ell/2$

$$\gamma(x = \ell/2) = \frac{dw}{dx} - \theta = \frac{w_2 - w_1}{\ell} - \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\theta_1 - \frac{x}{\ell}\theta_2 \quad \dots\dots (3.29)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{0\xi} \\ \gamma \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\ell & 0 & 0 & 1/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\ell & 0 & 0 & -1/\ell \\ 0 & (-1/\ell) & -(1-x/\ell) & 0 & 1/\ell & -x/\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

Avec :

$$[D] = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} & 0 \\ \overline{ES} & \overline{EI} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{GA} \end{bmatrix}$$

Dans :

$$[B] = \begin{bmatrix} -1/\ell & 0 & 0 & 1/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\ell & 0 & 0 & -1/\ell \\ 0 & (-1/\ell) & -(1-x/\ell) & 0 & 1/\ell & -x/\ell \end{bmatrix} \quad \dots\dots(3.31)$$

3.8.1.2 Expression de la matrice de rigidité $[K]^e$:

L'expression du P.T.V est :

$$\int_0^\ell [(\delta \hat{\epsilon})[D]\{\epsilon\} - \delta \hat{w}. f_z - \delta \hat{u}. f_x] dx = 0$$

On aura :

$$[K]^e = \int_0^\ell [B]^t [D] [B] dx \dots\dots\dots(3.32)$$

$$[K]^e = \begin{bmatrix} \overline{EA}/\ell & 0 & -\overline{ES}/\ell & -\overline{ES}/\ell & 0 & \overline{ES}/\ell \\ 0 & \overline{GA}'/\ell & \overline{GA}'/2 & 0 & -\overline{GA}'/\ell & \overline{GA}'/2 \\ -\overline{ES}/\ell & \overline{GA}'/2 & \frac{\overline{EI}}{\ell} + \overline{EA}'\ell/3 & \overline{ES}/\ell & -\overline{GA}'/2 & -\overline{EI}/\ell + \overline{GA}'\ell/6 \\ -\overline{GA}'/\ell & 0 & \overline{ES}/\ell & \overline{EA}'/\ell & 0 & -\overline{ES}/\ell \\ 0 & -\overline{GA}'/\ell & \overline{ES}/\ell & \overline{EA}'/\ell & \overline{GA}'/\ell & -\overline{GA}'/2 \\ \overline{ES}/\ell & \overline{GA}'/2 & -\overline{GA}'/2 & -\overline{ES}/\ell & -\overline{GA}'/2 & \frac{\overline{EI}}{\ell} + \overline{EA}'\ell/3 \end{bmatrix} \dots\dots(3.33)$$

3.8.1.3 Evaluation des forces résiduelles élémentaires :

a) Calcul des forces nodales équivalentes $\{p\}$ aux efforts internes :

$$\{P\}^e = \int_0^\ell [B]^t \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \\ T(x) \end{Bmatrix} dx$$

$$\{P\}^e = \int_0^\ell \begin{bmatrix} -\frac{N(x)}{\ell} \\ \frac{T(x)}{\ell} \\ \frac{M(x)}{\ell} - T(x)(1 - \frac{x}{\ell}) \\ \frac{N(x)}{\ell} \\ \frac{T(x)}{\ell} \\ -\frac{M(x)}{\ell} - T(x)\frac{x}{\ell} \end{bmatrix} dx$$

$$\{P\}^e = \begin{Bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{\ell} \int_0^\ell N(x) dx \\ -\frac{1}{\ell} \int_0^\ell T(x) dx \\ \frac{1}{\ell} \int_0^\ell M(x) dx - \int_0^\ell T(x) dx + \frac{1}{\ell} \int_0^\ell T(x) \cdot x \cdot dx \\ \frac{1}{\ell} \int_0^\ell N(x) dx \\ \frac{1}{\ell} \int_0^\ell T(x) dx \\ -\frac{1}{\ell} \int_0^\ell M(x) dx - \frac{1}{\ell} \int_0^\ell T(x) \cdot x \cdot dx \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

b) Evaluation des forces nodales équivalentes {f} aux efforts répartis :

$$\{f\}^e = \int_0^\ell [N] \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} dx$$

$$\{f\}^e = \int_0^\ell \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ 0 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} dx$$

Sachant que :
$$\begin{cases} N_1 = (1 - x/\ell) \\ N_2 = x/\ell \end{cases}$$

Donc :

$$\{f\}^e = \begin{Bmatrix} \int_0^\ell f_x dx - \frac{1}{\ell} \int_0^\ell f_x \cdot x \cdot dx \\ \int_0^\ell f_z dx - \frac{1}{\ell} \int_0^\ell f_z \cdot x \cdot dx \\ 0 \\ \frac{1}{\ell} \int_0^\ell f_x \cdot x \cdot dx \\ \frac{1}{\ell} \int_0^\ell f_z \cdot x \cdot dx \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

3.8.2 Modélisation par éléments finis à trois nœuds :

Dans le cadre de cette étude, on présente la formulation d'un élément poutre de Timoshenko à 3 nœuds (figure 3.5).

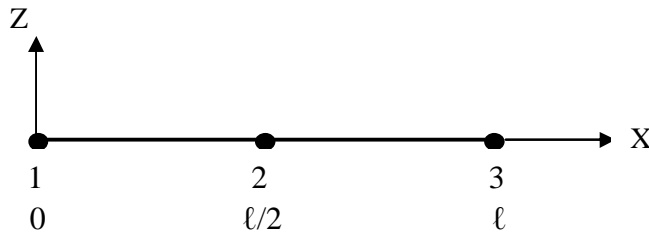


Figure.3.5 :Elément fini de Timoshenko à 3 noeuds

3.8.2.1 Discrétisation des déplacements et rotation :

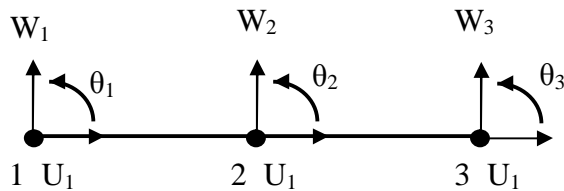


Figure.3.6 :Discrétisation des déplacements et rotation

Les déplacement $u(\xi), w(\xi)$ et la rotation $\theta(\xi)$ sont linéaires en fonction de ξ , avec :

- $\xi = -1$ au nœud 1
- $\xi = 0$ au nœud 2
- $\xi = +1$ au nœud 3

Le déplacement longitudinal au niveau de l'axe de référence est approximé par :

$$U(\xi) = N_1 U_1 + N_2 U_2 + N_3 U_3 = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) U_i \dots (3.35)$$

Où U_1, U_2 et U_3 sont les valeurs de $U(\xi)$ aux nœuds 1, 2 et 3

$$\text{Et } \begin{cases} N_1 = -1/2\xi(1-\xi) \\ N_2 = (1-\xi)(1+\xi) \\ N_3 = 1/2\xi(1+\xi) \end{cases} \dots\dots\dots(3.36)$$

$$\text{Donc : } U(\xi) = -1/2\xi(1-\xi)u_1 + (1-\xi)(1+\xi)u_2 + 1/2\xi(1+\xi)u_3 \dots\dots\dots(3.37)$$

La déformation longitudinale au niveau de l'axe de référence est :

$$\epsilon_{0\xi} = \frac{dU_0(\xi)}{dx} = \frac{dU_0(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = (-1 + 2\xi)/\ell u_1 + (-4\xi)/\ell u_2 + (1 + 2\xi)/\ell u_3 \dots\dots\dots(3.38)$$

- le déplacement transversal :

$$W(\xi) = N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) w_i \quad \dots\dots\dots (3.39)$$

$$D'où : \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = (-1 + 2\xi)/\ell w_1 + (-4\xi)/\ell w_2 + (1 + 2\xi)/\ell w_3 \quad \dots\dots(3.40)$$

- la rotation :

$$\theta(\xi) = N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 + N_3 \theta_3 = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \theta_i \quad \dots\dots\dots (3.41)$$

$$D'où : \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = (-1 + 2\xi)/\ell \theta_1 + (-4\xi)/\ell \theta_2 + (1 + 2\xi)/\ell \theta_3 \quad \dots\dots(3.42)$$

$$\begin{aligned} \text{Et : } \gamma = \frac{dw}{d\xi} - \theta &= (-1 + 2\xi)/\ell w_1 + (-4\xi)/\ell w_2 + (1 + 2\xi)/\ell w_3 + \frac{1}{2}\xi(1 - \xi)\theta_1 \\ &\quad - (1 - \xi)(1 + \xi)\theta_2 - \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)\theta_3 \quad \dots\dots (3.43) \end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0\xi} \\ \theta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1 + 2\xi)/\ell & 0 & 0 & (-4\xi)/\ell & 0 & 0 & (1 + 2\xi)/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 2\xi)/\ell & 0 & 0 & (4\xi) & 0 & 0 & -(1 + 2\xi)/\ell \\ 0 & (-1 + 2\xi)/\ell & \frac{1}{2}\xi(1 - \xi) & 0 & (-4\xi)/\ell & -(1 - \xi)(1 + \xi) & 0 & (1 + 2\xi)/\ell & -\frac{1}{2}\xi(1 + \xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ U_3 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

3.8.2.2. Expression de la matrice de rigidité [K]^e :

L'expression (3.18) du P.T.V est :

$$\int_0^\ell [\langle \delta \hat{\varepsilon} \rangle [D] \{ \varepsilon \} - \delta \hat{w} \cdot f_z - \delta \hat{u} \cdot f_x] dx = 0$$

On aura :

$$\int_0^\ell [\langle \delta \hat{u}_n \rangle [B]^t [D] [B] \{ U_n \} - \delta \hat{w} f_z - \delta \hat{u} f_x] dx = 0$$

$$\int_0^\ell \langle \delta \hat{u}_n \rangle [B]^t [D] [B] \{ U_n \} dx - \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx = 0 \quad \forall \delta \hat{u}_n, \forall \delta \hat{w}, \forall \delta \hat{u}.$$

$$[K]^e = \int_0^\ell [B]^t [D] [B] dx \quad \dots\dots\dots(3.45)$$

Avec :

$$[D] = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} & 0 \\ \overline{ES} & \overline{EI} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{GA} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} (-1 + 2\xi)/\ell & 0 & 0 & (-4\xi)/\ell & 0 & 0 & (1 + 2\xi)/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 2\xi)/\ell & 0 & 0 & (4\xi) & 0 & 0 & -(1 + 2\xi)/\ell \\ 0 & (-1 + 2\xi)/\ell & \frac{1}{2}\xi(1 - \xi) & 0 & (-4\xi)/\ell & -(1 - \xi)(1 + \xi) & 0 & (1 + 2\xi)/\ell & -\frac{1}{2}\xi(1 + \xi) \end{bmatrix} \dots (3.4)$$

3.8.2.3 Matrice Jacobéenne :

Le calcul de la matrice J a pour objectif de faire le passage de coordonnées x au coordonnées ξ .

On à : $x(\xi) = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi)x_i \dots\dots\dots (3.47)$

$$x(\xi) = -1/2\xi(1-\xi)x_1 + (1-\xi)(1+\xi)x_2 + 1/2\xi(1+\xi)x_3$$

calcul de J :

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3$$

AN : $J = (-\frac{1}{2} + \xi)x_1 + (-2\xi)x_2 + (\frac{1}{2} + \xi)x_3$

$$J = \frac{x_3 - x_1}{2} + \xi(x_1 + x_3 - 2x_2)$$

$$J = \frac{x_3 - x_1}{2} = \frac{\ell}{2} \dots\dots\dots (3.48)$$

N.B : $\xi=0$ au milieu de la poutre.

3.8.2.4 Nouvelle expression de la matrice de rigidité $[K]^e$:

En effectuant le passage des coordonnées x aux coordonnées, la matrice $[K]^e$ devient :

$$[K]^e = \int_{-1}^{+1} [B]^t [D] [B] \det J d\xi \dots\dots\dots (3.49)$$

Avec : $dx = \det J d\xi \dots\dots\dots(3.49')$

3.8.2.5 Problème de blocage par cisaillement [4]:

Le phénomène du blocage (verrouillage) par cisaillement pour le cas de la poutre de Timoshenko apparaît quand le rapport ℓ/h est très grand (le cas des poutre élancées). Pour cela plusieurs solutions sont proposées par des chercheurs dont on peut citer :

- Intégration sélective.
- Supposer une déformation de cisaillement constante.

- Enrichir les champs des déplacements...

L'une des solutions retenue pour éviter le blocage par cisaillement est d'utiliser une intégration numérique à trois points de Gauss pour le calcul de la matrice de rigidité [K].

Les valeurs de Gauss retenues pour cette intégration sont mentionnées dans le tableau 3.1 :

n	i	ξ_i	a_i
3	I	0	8/9
	II	$+\sqrt{0.6}$	5/9
	III	$-\sqrt{0.6}$	5/9

Tableau 3.1

Avec :

n : le nombre de point d'intégration.

i : nombre de point.

ξ_i : les coordonnées des points d'intégrations.

a_i : les poids d'intégrations.

3.8.2.6 Discrétisation de la section transversale :

La section transversale est subdivisée en trapèze. Chaque trapèze est subdivisé, lui même en couches horizontales (layers).

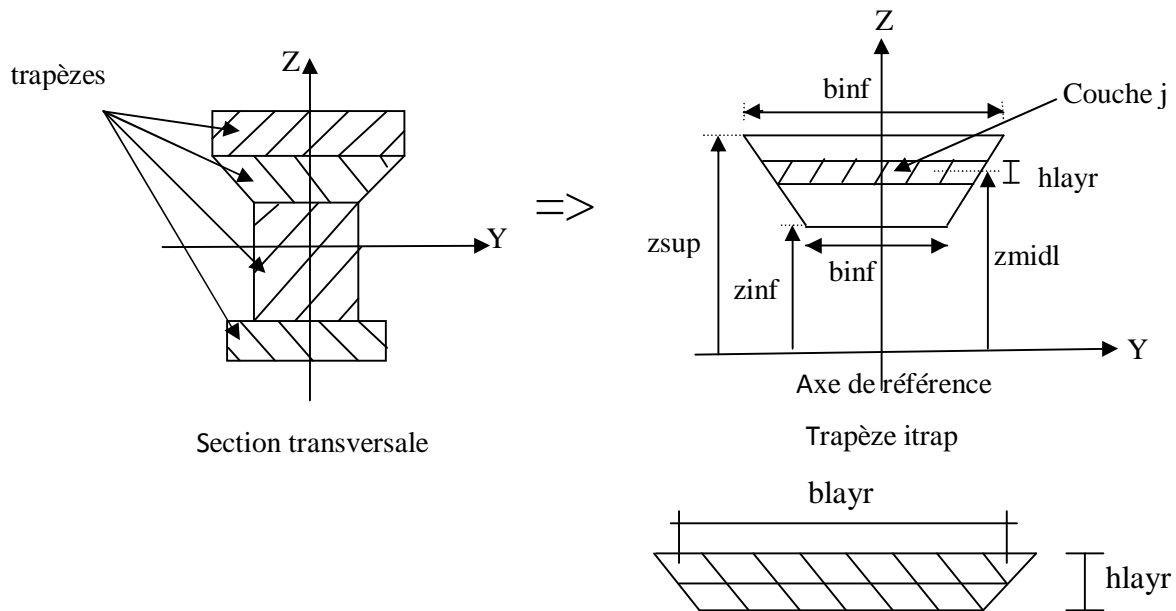


Figure 3.7 : Discrétisation de la section transversale

Chaque trapèze est caractérisé par :

- b_{inf} ———> largeur inférieur du trapèze.
- b_{sup} ———> largeur supérieur du trapèze.
- Z_{inf} ———> position inférieur par rapport à l'axe de référence.
- Z_{sup} ———> position supérieur par rapport à l'axe de référence.

Pour chaque couche, on considère la déformation au milieu de la couche tel que :

- ∅ La position de la couche en cours par rapport à l'axe référence est définie par z_{midj} .

Tel que :

$$z_{midj} = z_{inf} + h_{layr} (j-0.5) \quad (3.50)$$

Avec : h_{layr} est l'épaisseur de la couche j .

- ∅ La déformation longitudinale au milieu de la couche j est :

$$\varepsilon_x(x, z) = \varepsilon_{0x} + z \cdot \emptyset \text{ d'après (3.9)}$$

- ∅ La largeur au niveau du milieu de la couche est :

$$b_{layr} = b_{inf} + (b_{sup} - b_{inf}) \cdot h_{layr} / h_{trap} \cdot (j-0.5). \quad (3.51)$$

Avec : h_{trap} est la hauteur du trapèze en cours (i_{trap}).

Ayant discrétise la section transversale, les quantités \overline{EA} , \overline{ES} , \overline{EI} et \overline{GA} sont calculées comme suit :

$$\overline{EA} = \int_s E ds = \sum_{j=1}^{nc} E_j b_j h_j \quad (3.52)$$

$$\overline{ES} = \int_s E \cdot z ds = \sum_{j=1}^{nc} E_j b_j h_j z_j \quad (3.53)$$

$$\overline{EI} = \int_s E \cdot z^2 ds = \sum_{j=1}^{nc} E_j b_j h_j z_j^2 \quad (3.54)$$

$$\overline{GA} = \int_s G ds = \sum_{j=1}^{nc} G_j b_j h_j \quad (3.55)$$

3.8.2.7 Evaluation des forces résiduelles élémentaires :

a) Calcul des forces nodales équivalentes {p} aux efforts internes :

$$\{P\}^e = \int_{-1}^{+1} [B]^t \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \\ T(x) \end{Bmatrix} dx$$

D'après (3.49') on aura :

$$\{P\}^e = \int_{-1}^{+1} [B]^t \begin{Bmatrix} N(\xi) \\ M(\xi) \\ T(\xi) \end{Bmatrix} \det j. d\xi$$

$$\{P\}^e = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} (-1+2\xi)/e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1+2\xi)/e \\ 0 & (1-2\xi)/e & \frac{1}{2}\xi(1-\xi) \\ (-4\xi)/e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-4\xi)/e \\ 0 & (4\xi)/e & -(1-\xi)(1+\xi) \\ (1+2\xi)/e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+2\xi)/e \\ 0 & -(1+2\xi) & -\frac{1}{2}\xi(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N(\xi) \\ M(\xi) \\ T(\xi) \end{Bmatrix} \frac{e}{2} d\xi$$

$$\{P\}^e = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \frac{(-1+2\xi)}{2} N(\xi) \\ \frac{(-1+2\xi)}{2} T(\xi) \\ \frac{(1-2\xi)}{2} M(\xi) + \frac{e}{4}\xi(1-\xi)T(\xi) \\ (-2\xi)N(\xi) \\ (-2\xi)T(\xi) \\ (2\xi)M(\xi) - \frac{(1-\xi)(1+\xi)e}{2} T(\xi) \\ \frac{(1+2\xi)}{2} N(\xi) \\ \frac{(1+2\xi)}{2} T(\xi) \\ -\frac{(1+2\xi)e}{2} M(\xi) - \frac{e}{4}\xi(1+\xi)T(\xi) \end{bmatrix} d\xi$$

$$\{P\}^e = \begin{Bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ M_2 \\ N_3 \\ T_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (-1 + 2\xi)N(\xi)d\xi \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (-1 + 2\xi)T(\xi)d\xi \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (1 - 2\xi)M(\xi)d\xi + \frac{e}{4} \int_{-1}^{+1} \xi(1 - \xi)T(\xi)d\xi \\ \int_{-1}^{+1} (-2\xi)N(\xi)d\xi \\ \int_{-1}^{+1} (-2\xi)T(\xi)d\xi \\ \int_{-1}^{+1} (-2\xi)M(\xi)d\xi - \frac{e}{2} \int_{-1}^{+1} (1 - \xi)(1 + \xi)T(\xi)d\xi \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (1 + 2\xi)N(\xi)d\xi \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (1 + 2\xi)T(\xi)d\xi \\ -\frac{e}{2} \int_{-1}^{+1} (1 + 2\xi)M(\xi)d\xi - \frac{e}{4} \int_{-1}^{+1} \xi(1 + \xi)T(\xi)d\xi \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

b) Evaluation des forces nodales équivalentes {f} aux efforts répartis :

$$\{f\}^e = \int_0^e [N] \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} dx$$

D'après (3.28') on aura :

$$\{f\}^e = \int_{-1}^{+1} [N] \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} \det j. d\xi$$

$$\{f\}^e = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ 0 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ 0 & 0 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} \det j. d\xi$$

$$\{f\}^e = \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} N_1 f_x \\ N_1 f_z \\ 0 \\ N_2 f_x \\ N_2 f_z \\ 0 \\ N_3 f_x \\ N_3 f_z \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{e}{2} d\xi$$

$$\text{Sachant que : } \begin{cases} N_1 = -1/2\xi(1-\xi) \\ N_2 = (1-\xi)(1+\xi) \\ N_3 = 1/2\xi(1+\xi) \end{cases}$$

Donc :

$$\{f\}^e = \begin{Bmatrix} -\frac{e}{4} \int_{-1}^{+1} \xi(1-\xi) f_x d\xi \\ -\frac{e}{4} \int_{-1}^{+1} \xi(1-\xi) f_z d\xi \\ 0 \\ \int_{-1}^{+1} (1-\xi)(1+\xi) f_x d\xi \\ \int_{-1}^{+1} (1-\xi)(1+\xi) f_z d\xi \\ 0 \\ \frac{e}{4} \int_{-1}^{+1} \xi(1+\xi) f_x d\xi \\ \frac{e}{4} \int_{-1}^{+1} \xi(1+\xi) f_z d\xi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.57)$$

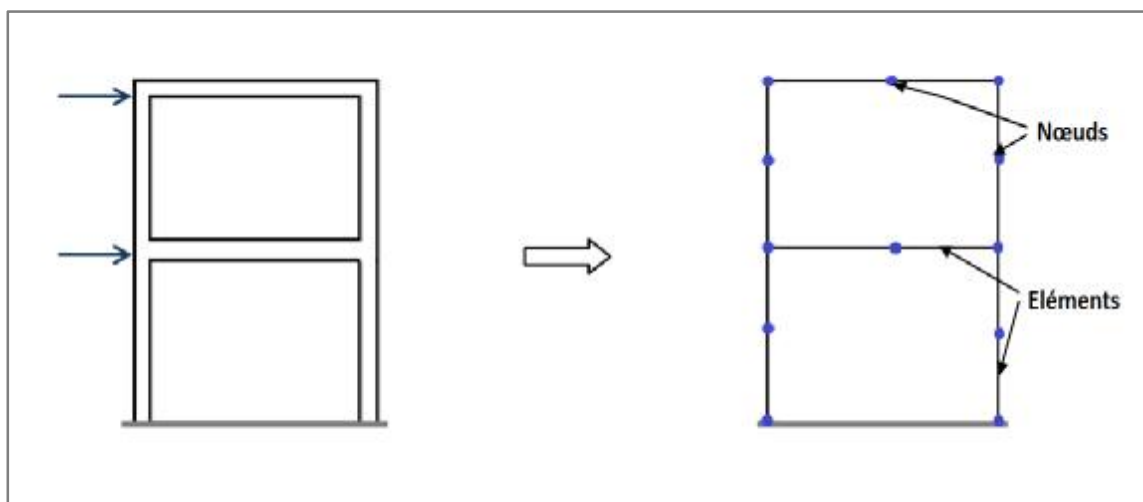
Chapitre 4 : FORMULATION DE LA POUTRE DE BERNOLLI

4.1-Introduction :

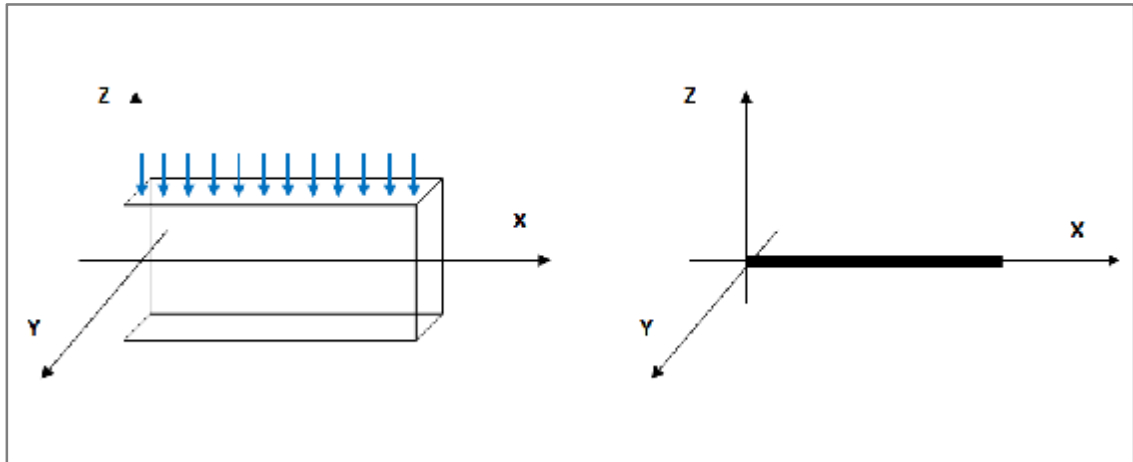
Dans le présent chapitre on s'est intéressé à la présentation d'une méthode d'analyse non linéaire des éléments d'ossatures plane en béton armé, en se basant sur la méthode des éléments finis et l'hypothèse de Navier Bernoulli. L'objectif est de démontrer le procédé d'une formulation qui se concrétise par l'élaboration d'un programme informatique existant, qui nous servira d'outil de calcul par la suite, ce dernier permettra la simulation numérique du comportement non linéaire jusqu'à rupture d'une structure plane quelconque, ainsi il permettra le calcul de la résistance, et des déplacements, afin d'aboutir à l'évaluation des facteurs des ductilités structurales, qui sont définis comme le rapport des déplacements ultimes (à la rupture), sur des déplacements élastiques (c.-à-d. les déplacements à la fin de la phase élastique).

4.2-Hypothese de base :

Pour l'analyse du comportement non linéaire des structures constituées de portiques en béton armé, on se base sur la méthode des éléments finis. La structure est discrétisée en éléments finis de type poutre (figure 4.1).



On s'intéresse à un élément poutre plan orienté selon l'axe longitudinal x et dont les dimensions dans le plan $y-z$ normal à x sont relativement petites par rapport à la dimension longitudinale x .



Dans le cadre de cette étude, on considère l'élément «poutre mince» ou l'élément de Bernoulli, basé sur l'hypothèse de Navier-Bernoulli et fonctionnant en flexion.

On se base sur les hypothèses suivantes :

- § L'élément considéré est une poutre plane droite de section transversale constante et symétrique par rapport au plan x-z.
- § Les chargements agissant sur la poutre, sont appliqués dans le plan de symétrie.
- § La poutre se déforme dans le plan de symétrie x-z.
- § La poutre transmet des efforts normaux $N_x(x)$ suivant x, des effort tranchants $T_z(x)$ suivant z et des moments fléchissant $M_y(x)$ autour de l'axe local y.
- § Les déformations et les déplacements du second ordre sont négligés.
- § Adhérence parfaite entre le béton et les armatures d'acier.
- § Pour un élément « poutre mince », on vérifie l'hypothèse de Navier Bernoulli, les sections planes et droites avant déformation, restent planes et droites après déformation. Par conséquent, les déformations d'effort tranchant sont négligées.

4.3-Cinématique :

Considérons le tronçon de poutre de la figure 4.3, après déformation, le point $M(x,y)$ subit un déplacement axial $u(x,z)$ selon x et un déplacement transversal $w(x,z)$ selon z tels que :

$$u(x, z) = u_0(x) - z \cdot \theta(x) \dots\dots\dots(4.1)$$

$$w(x, z) = w(x) \dots\dots\dots(4.2)$$

Où:

$u_0(x)$ = déplacement axial au niveau de l'axe de référence de la poutre.

$\theta(x)$ = rotation de la normale de la section transversale, d'abscisse x .

Tel que :

$$\theta(x) = -\frac{dw}{dx} + \gamma \dots\dots\dots(4.3)$$

Où

γ :La rotation due au cisaillement transversal.

Dans le cadre de l'hypothèse de Navier- Bernoulli, les déformations dues à l'effort tranchant (ou cisaillement) sont négligées, d'où $\gamma=0$.

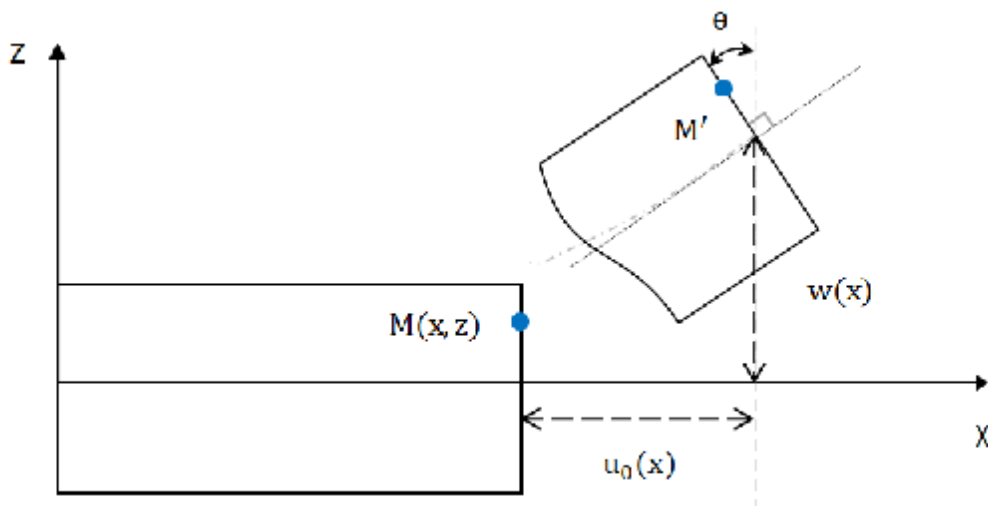
Donc :

$$\theta(x) = -\frac{dw}{dx} \dots\dots\dots(4.4)$$

La relation (4.1) devient :

$$u(x, z) = u_0(x) + z \frac{dw(x)}{dx} \dots\dots\dots(4.5)$$

Cette relation (4.5) exprime l'hypothèse de Navier-Bernoulli valable dans le cas des poutres minces



4.4 Relation déformations – déplacements:

Selon l’hypothèse (Les déformations et les déplacements du second ordre sont négligés) la relation entre déformations et déplacements est linéaire.

$$\varepsilon_x = - \frac{\partial u(x,z)}{\partial x} \dots\dots\dots(4.6)$$

En tenant compte de la relation (4.1) on obtient :

$$\varepsilon_x(x) = \frac{du_0(x)}{dx} - z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \dots\dots\dots(4.7)$$

Ou encore :

$$\varepsilon_x(x) = \varepsilon_0(x) + z\phi(x) \dots\dots\dots(4.8)$$

Avec :

$$\varepsilon_0(x) = \frac{du_0(x)}{dx} \dots\dots\dots(4.9)$$

$$\phi(x) = - \frac{d^2w(x)}{dx^2} \dots\dots\dots(4.10)$$

$\varepsilon_0(x)$: Déformation longitudinale au niveau de l’axe de référence, à l’abscisse x.

$\phi(x)$: Courbure de la section transversale, à l’abscisse x.

4.5 Relation efforts – déplacements :

L’expression de l’effort normal est donné par :

$$N = \overline{EA} \cdot \varepsilon_{0x} + \overline{ES} \cdot \phi \dots\dots\dots(4.11)$$

L’expression de moment fléchissant s’écrit comme suit :

$$M = \overline{ES} \cdot \varepsilon_{0x} + \overline{EI} \cdot \phi \dots\dots\dots(4.12)$$

Finalement les efforts internes N et M, agissant dans la section transversale d’abscisse x de la poutre, sont donnés par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \phi \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(4.13)$$

Avec : $[D] = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4.14)$

Où :

$$\overline{EA} = \int_S E(x, z) dS : \text{Rigidité à l'effort normal (ou de membrane).}$$

$$\overline{ES} = \int_S E(x, z) z dS : \text{Rigidité due ou couplage effort normal – flexion.}$$

$$\overline{EI} = \int_S E(x, z) z^2 dS : \text{Rigidité à la flexion.}$$

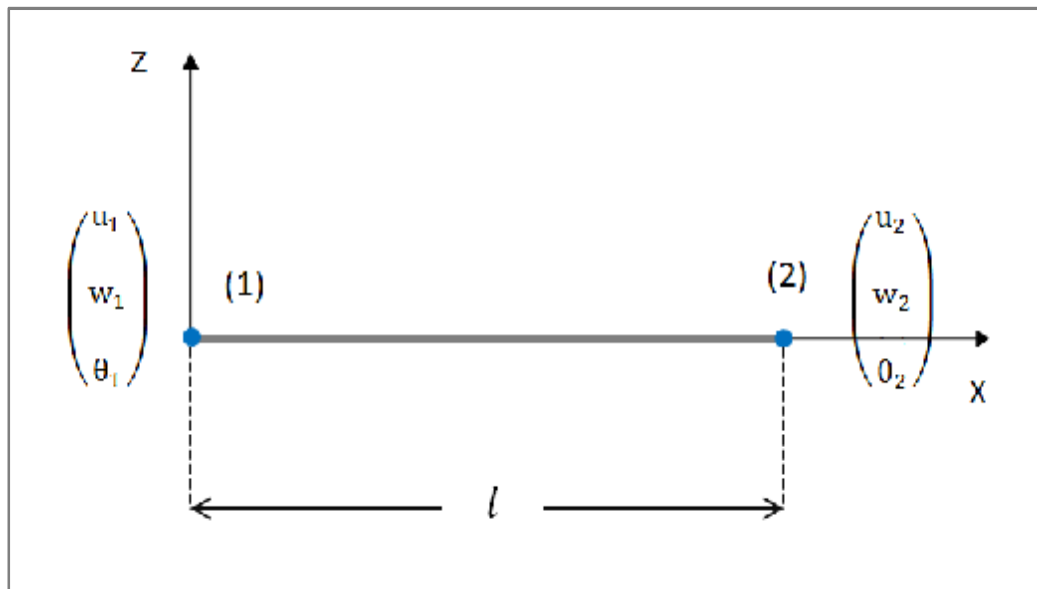
Avec : $E(x, z)$ est le module d'élasticité longitudinal au point $M(x, z)$ de la poutre.

4.6 Discrétisation par élément finis :

La discrétisation est effectuée en utilisant un élément fini poutre à 2 nœuds ayant 3 degrés de liberté par nœud (u, w, θ) (soit 6 d°dI par élément).

Les déplacements sont représentés par un vecteur de dimension 6 x 1 de la manière suivante :

$$u^T = \{u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2\}$$



Le déplacement longitudinal $u_0(x)$ est approché par des fonctions d'interpolation de type Lagrange de degré 1.

$$u_0(x) = N_1 \cdot u_1 + N_4 \cdot u_2 \dots \dots \dots (4.15)$$

Avec : u_1 et u_2 sont les valeurs de déplacement longitudinal aux nœuds 1 et 2 respectivement.

Où :

$$\begin{cases} N_1 = (1 - \frac{x}{l}) \\ N_4 = \frac{x}{l} \end{cases} \dots\dots\dots (4.16)$$

On pose : $\xi = \frac{x}{l}$, les expressions précédentes deviennent.

$$\begin{cases} N_1 = (1 - \xi) \\ N_4 = \xi \end{cases} \dots\dots\dots (4.17)$$

L'expression du déplacement devient :

$$u_0(x) = (1 - \xi) \cdot u_1 + \xi \cdot u_2 \dots\dots\dots (4.18)$$

Le déplacement transversal $w(x)$ est approché par des fonctions d'interpolation de type Hermite de de degré 3.

$$w(x) = N_2 \cdot w_1 + N_3 \cdot \theta_1 + N_5 \cdot w_2 + N_6 \cdot \theta_2 \dots\dots\dots (4.19)$$

Ou bien :

$$w(x) = \langle N_2 \quad N_3 \quad N_5 \quad N_6 \rangle \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (4.19')$$

Les fonctions d'interpolation sont donnes par:

$$\begin{cases} N_2 = 1 - 3 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2 \left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_3 = l \left[\frac{x}{l} - 2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right] \\ N_5 = 3 \left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2 \left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_6 = l \left[-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right] \end{cases} \dots\dots\dots (4.20)$$

Avec :

w_1, w_2 : les valeurs de déplacement transversal aux nœuds 1 et 2 respectivement.

θ_1, θ_2 : les valeurs de la rotation aux nœuds 1 et 2 respectivement.

Ou bien :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_2 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ N_3 = l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ N_5 = 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ N_6 = l(-\xi^2 + \xi^3) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (4.20')$$

L'expression de $w(x)$ s'écrit comme suit :

$$w(x) = \left(1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right) \cdot w_1 + \left(1\left[\frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]\right) \cdot \theta_1 + \left(3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right) \cdot w_2 + \left(1\left[-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]\right) \cdot \theta_2 \dots\dots\dots (4.21)$$

La déformation longitudinale, au niveau de l'axe de référence de l'élément poutre est donnée par :

$$\epsilon_{0x} = \frac{du_0(x)}{dx} = -\frac{1}{l} \cdot u_1 + \frac{1}{l} \cdot u_2 \dots\dots\dots (4.22)$$

La rotation $\theta(x)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\theta(x) = -\frac{dw(x)}{dx} = \left(\frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3}\right) w_1 + l\left(-\frac{1}{l} + \frac{4x}{l^2} - \frac{3x^2}{l^3}\right) \cdot \theta_1 + \left(-\frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3}\right) w_2 + l\left(\frac{2x}{l^2} - \frac{3x^2}{l^3}\right) \cdot \theta_2 \dots\dots\dots (4.23)$$

La courbure $\phi(x)$ est donnée par :

$$\phi(x) = -\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) w_1 + l\left(\frac{4}{l^2} - \frac{6x}{l^3}\right) \cdot \theta_1 + \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right) w_2 + l\left(\frac{2}{l^2} - \frac{3x}{l^3}\right) \cdot \theta_2 \dots\dots\dots (4.24)$$

On déduit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) & \left(\frac{4}{l^1} - \frac{6x}{l^2}\right) & 0 & \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) & \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4.25)$$

Donc la relation entre les déformations de la section transversale à l'abscisse x de l'élément et les déplacements nodaux s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \phi \end{Bmatrix} = [B]\{u_n\} \dots\dots\dots (4.26)$$

Avec :

$$\{u_n\} = \langle u_1 w_1 \theta_1 u_2 w_2 \theta_2 \rangle$$

Et

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{-1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) & \left(\frac{4}{l^1} - \frac{6x}{l^2}\right) & 0 & \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) & \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2}\right) \end{bmatrix}$$

Au niveau de la section transversale, à l'abscisse x de l'élément, la relation entre les efforts internes et les déplacements nodaux sont évalués à partir des relations (4.13), (4.26).

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = [D][B]\{u_n\} \dots\dots\dots (4.27)$$

$$\text{Avec : } [D] = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.14)$$

En utilisant le principe des travaux virtuels, pour cet élément, on définit la matrice de rigidité élémentaire (6 x 6).

$$[K]_e = \int_0^l [B]^T [D] [B] dx = \frac{l}{2} \int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] d\xi \dots\dots\dots (4.28)$$

Le calcul de la matrice de rigidité élémentaire est effectué par intégration numérique en utilisant 3 points de Gauss :

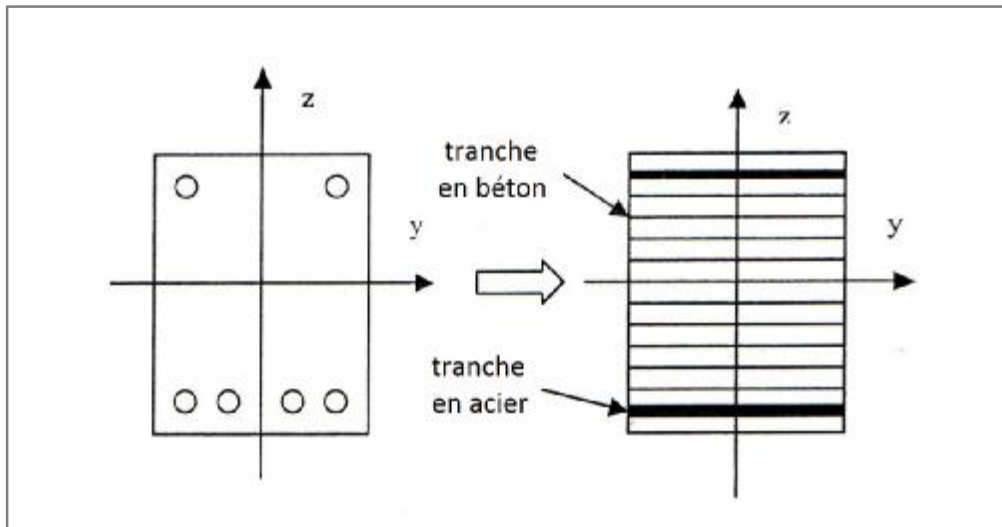
$$\int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] d\xi = \sum_{i=1}^n [B(\xi_i)]^T [D(\xi_i)] [B(\xi_i)] \alpha_i \dots\dots\dots (4.29)$$

Où :

- § n = nombre de point de Gauss (n = 3)
- § ξ_i = abscisse de point de Gauss i
- § α_i = poids d'intégration au point de Gauss i

4.7 Discrétisation de la section transversale :

On utilise une modélisation multicouche, la section est subdivisée en couches ou tranches horizontales, représentant le béton et les lits des armatures en acier.



4.8 Evaluation des rigidités de section :

Les quantités \overline{EA} , \overline{ES} et \overline{EI} sont, alors, évaluées par intégration numériques sur la section transversale :

$$\left. \begin{aligned} \overline{EA} &= \int_0 E(x, z) ds = \sum_{i=1}^n E_i b_i h_i \\ \overline{ES} &= \int_0 E(x, z) z ds = \sum_{i=1}^n E_i z_i b_i h_i \\ \overline{EI} &= \int_0 E(x, z) z^2 ds = \sum_{i=1}^n E_i z_i^2 b_i h_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.30)$$

Où :

- § n = Nombre de couches horizontales discrétisant la section.
- § b_i = Largeur de la couche i.

§ h_i = Hauteur de la couche i .

§ z_i = Position de la couche i par rapport à l'axe de référence.

Connaissant la déformation longitudinale ε_i au niveau de la couche i transversale, on calcule la contrainte normale σ_i , au niveau de cette couche, à partir de la loi de comportement du matériau constituant cette couche. Le module d'élasticité E_i est alors donné par :

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \dots \dots \dots (4.31)$$

4.9 Procédure de calcul non linéaire :

L'analyse non linéaire est effectuée selon une procédure itérative :

1-Pour l'étape $j-1$, correspondant au chargement extérieurs $\{F\}^{j-1}$, on suppose connu l'état de la structure étudiée (déplacement $\{U\}^{j-1}$, forces résiduelles $\{\Psi\}^{j-1}$) l'étape initiale $j=1$ correspond au chargement nul ($\{U\}^0 = \{0\}$ et $\{\Psi\}^0 = \{0\}$).

2-Incrémentation du chargement extérieur.

2.1-

$$\{F\}^j = \{F\}^{j-1} + \{\Delta F\}^j$$

2.2-Début de la procédure itérative $i=1$:

2.3-Incrémentation des forces résiduelles à équilibrer.

$$\{\Psi\}^i = \{\Delta F\}^j + \{\Psi\}^{j-1}$$

3-Evaluation des matrices de rigidité élémentaires $[K]_e^i$, puis assemblage de la matrice de rigidité globale $[K]^i$ en fonction de la solution de l'étape précédente $j-1$.

4-Resolution du système d'équations :

$$\{K\}^i \{\Delta U\}^i = \{\Psi\}^i$$

5-Cumul du vecteur des déplacements nodaux :

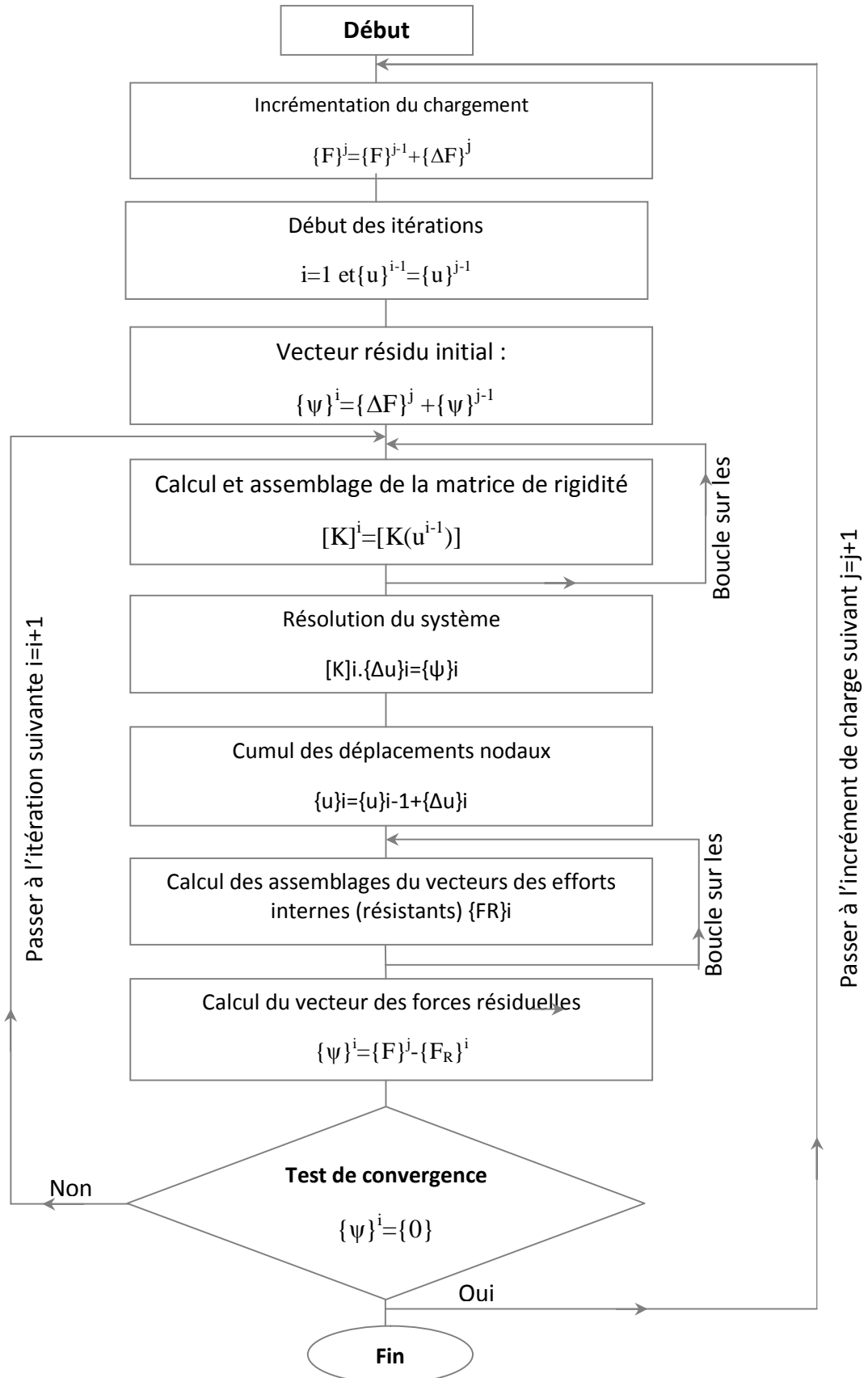
$$\{U\}^i = \{U\}^{i-1} + \{\Delta U\}^i$$

6-Evaluation des forces résiduelles élémentaires $[\Psi]_e^{i+1}$ et assemblage dans le vecteur global des forces résiduelles. **7-**Test de convergence :

7.1-Si convergence, l'étape actuelle est convergente \Rightarrow passage à l'étape (2) pour l'incrément de chargement suivant $j+1$.

7.2-Sinon, passage à l'itération suivante $i+1 \Rightarrow$ revenir à l'étape (3). (si le nombre maximal d'itération est dépassée processus est divergent \Rightarrow arrêt de calcul)

4.10 Organigramme de calcul :



4.11-Programme de calcul : poutre_mince2 :

Sur la base de la Méthode d'analyse présentée auparavant dans ce chapitre, un programme informatique a été déjà élaboré en langage FORTRAN (déjà existant). Le programme informatique est appelé poutre_mince2, cet outil de calcul permettant la simulation numérique du comportement non linéaire d'un élément ou d'une ossature plane en béton armé (courbe charge-déplacement). La présentation de ce programme est mise en évidence en ANNEXE B. La description des principales sous-routines, du fichier de données, des variables du fichier de données, et du fichier résultats y sont bien détaillés.

CHAPITRE 5 : Aperçu sur le comportement non linéaire et modélisation des matériaux

5-1 Introduction :

Dans ce chapitre, on présente quelques travaux de recherches consacrés aux structures planes en béton armé ainsi que le comportement de béton et de l'acier sous différentes sollicitations.

5-2 Comportement non linéaire des structures en béton armé:

Par hypothèse le comportement des structures en béton armé peut être considéré comme linéaire. Sous faibles chargements, cette linéarité peut être traduite par la linéarité entre les contraintes et les déformations (linéarité matérielle) et aussi la linéarité entre les déformations et les déplacements (linéarité géométrique).

Mais dans le cas le plus général, ce comportement n'est plus linéaire, mais il s'agit de comportement non linéaire, les non linéarités sont :

- Géométriques
- Matérielles

5-2.1 les non-linéarités matérielles :

Elles peuvent provenir de la loi de comportement intrinsèque du matériau (loi de comportement élastique parfaitement plastique par exemple), de la fissuration du matériau, du comportement de béton tendu entre les fissures, du mode d'assemblage.

5-2.2 les non-linéarités géométriques :

Il n'y a plus de proportionnalité entre les déformations et les déplacements (les déformations ne sont plus des fonctions linéaires des déplacements).

Les non-linéarités peuvent se traduire soit sous forme :

- De grandes déformations : cas de grandes déformations et des rotations grandes ou petites.
- Grandes rotations : le cas de grandes rotations et des petites déformations.

Les non-linéarités géométriques se produisent lorsque les déplacements deviennent suffisamment importants pour influencer l'analyse du fait des chargements ; ces non linéarités peuvent avoir plusieurs conséquences, comme par exemple le changement de la position de

l'analyse de l'équilibre du système tel que cette dernière devient celle déformée ; donc la prise en compte des effets de la non linéarité géométrique (les effets du second ordre) est indispensable pour l'analyse des structures élancées vis-à-vis du flambement.

5-3 Aperçu sur les travaux consacrés à l'analyse non linéaire des ossatures planes en béton armé :

L'analyse des structures en béton armé a été l'un des grands axes de recherche dans le siècle passé, mais ces études ont vues un grand développement dès la fin des années 60 et le début des années 70 et cela revient essentiellement au développement de l'outil informatique. Plusieurs méthodes ont été développées mais la méthode la plus utilisée et la plus efficace est celle des éléments finis.

Ces méthodes se différencient entre elles en tant que la prise en compte du béton tendu ou non, la prise en compte des effets des non linéarités...

En 1970, **FRANKLIN**(Californie) (d'après [16]), a développé une approche reposant sur un élément de poutre à 3 degrés de liberté par nœud (2 translations, une rotation) dans laquelle il a introduit les effets des non-linéarités matérielles, son étude a été limitée à la théorie du premier ordre des déplacements.

Le premier travail prenant en compte les non linéarités géométriques est attribuable à **GUNNIN** (Austin, 1970) (d'après [16]). L'analyse porte sur un élément de poutre à 6 degrés de liberté. La considération des effets de second ordre n'est qu'approximative.

Pour les non linéarités matérielles l'auteur considère que les rigidités extensionnelle (EA) et flexionnelle (EI) constantes le long de l'élément. Dans ce calcul le béton tendu n'est pas pris en considération.

Au tout début des années 70, **LAZARRO** (d'après [6]) a développé un modèle semblable à celui de **GUINNIN**. **LAZARRO** semble introduire une correction pour prendre en compte la fissuration du béton.

En 1972 **Blaauwendraad** (d'après [6]) est le premier à faire des éléments finis «classiques», issus de la méthode des déplacements. Il introduit les fonctions de forme pour interpoler le champ des déplacements, et en déduire les quantités k_0 , k_1 et k_2 résultants d'une intégration numérique des déformations issues du champ des déplacements.

Un article de **JENNINGS** (d'après [6]) datant en 1968, va être le point de départ d'une série de travaux, la non-linéarité géométrique, en 2D, peut-être prise en compte de façon exacte, grâce à l'additivité et la commutativité des rotations planes.

MENEGOTTO et **PINTO** (Rome 1972, 1974) (d'après [16]) ont développé une Méthode qui tient compte des effets des non-linéarités matérielles dans un repère mobile, lié à la position déformée de l'élément. La prise en compte de ces effets repose sur l'intégration des déformations des sections le long de l'élément. Cette approche aboutit à la formulation de la matrice de flexibilité élémentaire qui, inversée fournit la matrice de rigidité, la section transversal est discrétisé en fibres horizontales et pour ce qui concerne le béton tendue sa résistance est négligée.

GRELAT.A (CEBTP, PARIS 1978) [6] s'inspire du programme de **Menegotto** et **Pinto**, il a introduit pour le béton comprimé la loi de **SARGIN**, ainsi que une forme originale et efficace de tension-stiffening, et valide son programme par de nombreux cas test.

FERRARO-MAIA (CEBTP, 1979) (d'après [16]) poursuit le travail de **GRELAT** au CEBTP, en développant la prise en compte des effets différés et de la précontrainte. Le tracé des câbles est supposé parabolique. L'influence de l'inclinaison des câbles dans la formation de la matrice de rigidité n'est pas considérée.

Ce type d'approche utilisée pour la formation de la matrice de rigidité élémentaire, on le retrouve aussi dans le travail de **CAROL** et **MURCIA** (Barcelone, 1984) (d'après [16])

L'approche par élément fini de type << déplacement >> se poursuit :

Aladstedt (Trondheim, 1975) [6], reprend les fonctions de forme de **Blaauwendraad** en les intégrant dans le cadre de la description lagrangienne.

Dans les années 80 est exactement en 1986 **ESPION** (Bruxelles), (d'après [16]), a fait une approche plus réaliste et plus complète tant sur la prise en compte des non linéarités matérielles que sur la théorie de second ordre des déplacements. L'auteur utilise un élément de poutre à 9 degré de liberté.

Son approche bien que mathématiquement consistante, reste encombrante numériquement. En effet, l'analyse théorique aboutit à la formation de la matrice de rigidité élémentaire (9x9). Elle est donc lourde à étudier numériquement.

ESPION prend en compte la fissuration du béton en introduisant un modèle basé sur la Proposition de **QUAST**. L'auteur considère aussi les effets différés. Son modèle a été Confronté avec de nombreux résultats publiés. En plus des ossatures en béton armé des études numériques ont été effectuées sur les structures métalliques.

En 1984, **Mazars** [12] a mené une étude reposant sur l'application de la mécanique

D'endommagement et de rupture des structures en béton armé. Ce travail tient compte de la fissuration du béton et du béton tendu.

En 1989, **Abou –Ezzi** [12] a utilisé un modèle basé sur la mécanique de l'endommagement afin de rendre compte dans un calcul de structure du comportement non -linéaire du béton. Tandis qu'en 1990, **Kwak** [12] a introduit la non -linéarité matérielle dans ses travaux sur des Structures en appliquant la méthode des éléments finis.

En 1997, **Filippou** et al [12] ont réalisé plusieurs travaux sur l'analyse non -linéaire des Eléments en béton armé sous des charges monotones par la méthode des éléments finis.

En 2000, **Spacone** et **Al** [12] ont mené une analyse non -linéaire d'un élément poutre en Tenant compte de phénomène d'adhérence acier -béton.

Enfin en 2005[12], Ramirez et **Ragueneau** ont étudié l'effet d'adhérence dans la distribution Des fissures dans des éléments en béton armé.

5-4 Modélisation de comportement des matériaux :

5-4.1 le béton :

Le béton est un matériau composite dont la résistance à la compression et à la traction sont très différentes.

5-4-1-1 Comportement en compression :

Les relations qui lient les contraintes aux déformations instantanées des fibres de béton comprimé sont connues à l'âge t quelconque. Ces lois sont définies en fonction des quatre valeurs E_{b0} , F_{cj} , ε_{b0} , ε_u déterminées, à l'âge correspondant au début de l'intervalle étudié, à partir des valeurs à l'âge de la première mise en charge. L'aspect qualitatif de la loi de Comportement contrainte - déformation, prend la forme de la courbe représentée à la (figure 5.1).

La courbe est caractérisée par :

- Une branche ascendante, à concavité vers le bas admettant un module tangent initial, et un σ^2 maximum de contrainte qui correspond à la résistance à la compression F_{cj} ,
- Une branche descendante, commençant par le maximum de la branche ascendante et finie par le point $(\sigma_u, \varepsilon_u)$

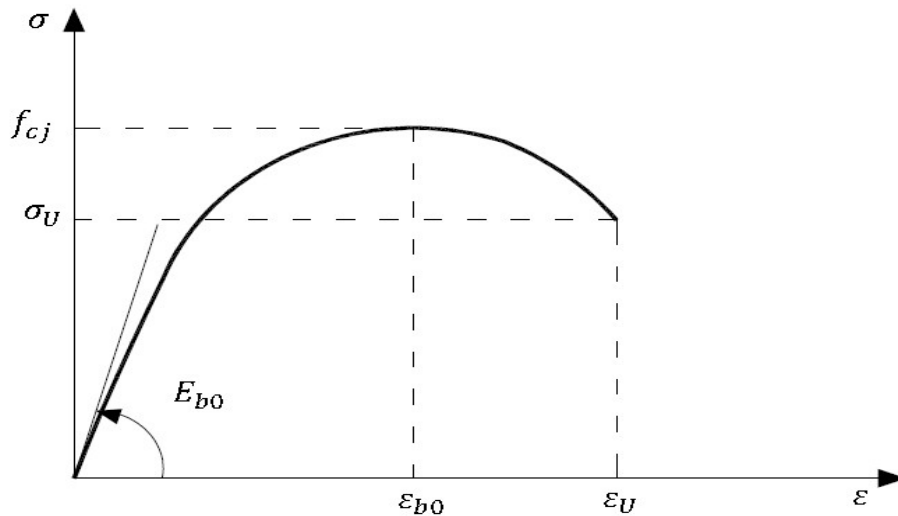


Figure 5.1 Loi de comportement uni-axiale du béton sous contrainte de compression

En général, le comportement du béton comprimé est décrit par la loi de SARGIN, prévue à l'annexe 1 des règles [BPEL 83].

$$\sigma = f_{cj} \frac{K \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}} \right) + (K' - 1) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}} \right)^2}{1 + (K - 2) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}} \right) + K' \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}} \right)^2}$$

Avec : f_{cj} : Résistance à la compression de béton.

ε_{b0} : déformation de pic correspondant à f_{cj}

K, K' : paramètres adimensionnels

$$k = E_{b0} \frac{\varepsilon_{b0}}{f_{cj}}$$

E_{b0} : le module d'élasticité du béton à l'origine.

Le paramètre K influe essentiellement sur l'allure de la branche descendante valeurs usuelles (0 à 2), pour $K'=0$ on obtient des courbes correspondant à des bétons fragiles, avec une descente. Pour $K'=1$ on obtient des courbes assez plates correspondant à des bétons peu fragiles.

Nous pouvons adopter (Nait-rabah, 1990)

$K'=K-1$ pour $f_{cj} < 30\text{MPa}$

$K' = (K-1) \frac{55-f_{cj}}{25}$ pour $30\text{MPa} < f_{cj} < 55\text{MPa}$

5-4-1-2-Comportement de béton en traction :

Dans les calculs les plus usuels en béton armé, la résistance du béton à la traction, ainsi que la contribution du béton tendu entre les fissures sont négligées. Par contre, pour représenter la déformabilité moyenne d'un élément fissuré, le béton tendu entre les fissures contribue à la rigidité de l'élément. La prise en compte de cet effet permet :

- une meilleure appréciation du comportement en service vis à vis des états limites de déformations (flèches, ouverture des fissures ...);
- une estimation correcte de la redistribution des efforts dans les structures hyperstatiques ;
- un meilleur calcul des déplacements dans les structures sensibles aux effets de second ordre.

Modèle de GRELAT

Dans la schématisation adoptée, une section représente une certaine longueur d'élément, qui comportera plusieurs fissures. Il convient donc de lui attribuer un comportement moyen représentatif de l'élément fissuré.

Pour représenter ce comportement moyen, nous affecterons à l'ensemble des fibres du béton tendu d'une section, un module élastique fictif E_{bt} variable au cours du chargement. La zone tendue aura donc, une répartition de contraintes triangulaires.

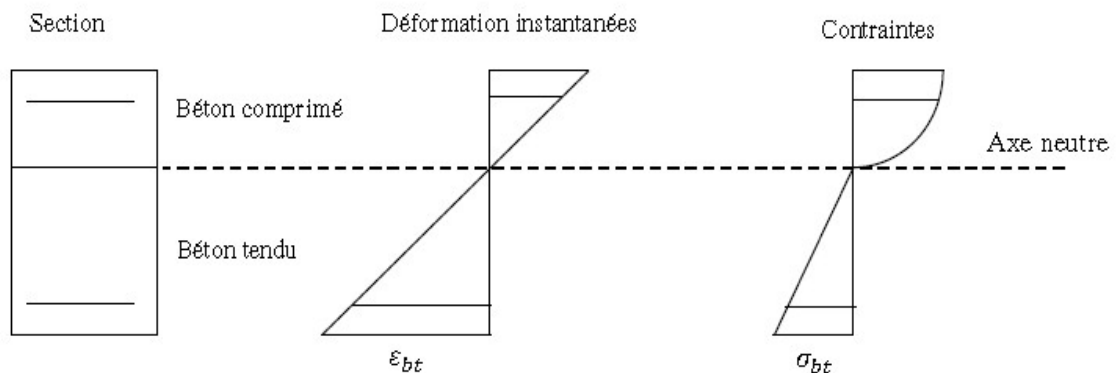


Figure 5.2 Distribution fictive des contraintes dans une section

Le module de déformation E_{bt} est défini à partir de la contrainte et de la déformation du bord tendu.

$$E_{bt} = \frac{\sigma_{bt}}{\varepsilon_{bt}}$$

La participation du béton tendu peut alors être traduite en fonction des limites , correspondant à la résistance à la traction du béton et correspondant à la limite d'écoulement des aciers, de la façon suivante :

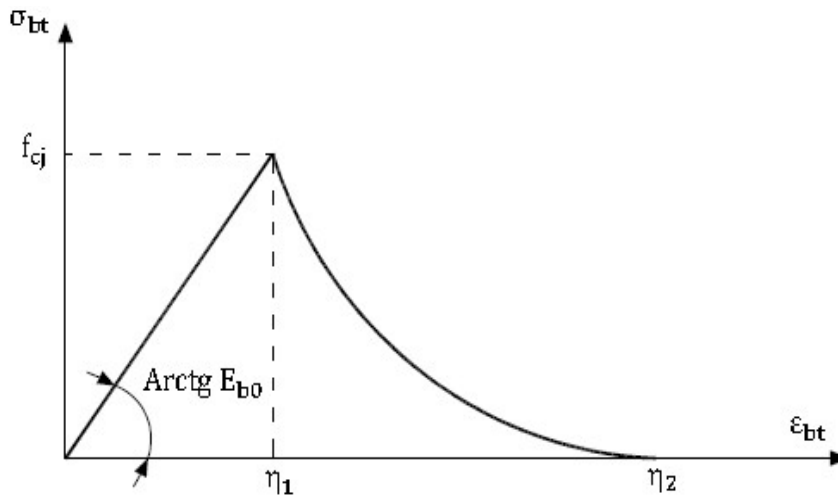


Figure 5.3 Relation entre la contrainte et la déformation instantanée du béton sur le bord tendu -model de Grelat

$|\epsilon_{b0}| \leq \eta_1$: pas de fissuration participation de complète du béton tendue avec le module E_{b0}

$$\sigma = E_{b0} \epsilon_{bt}$$

$\eta_1 < |\epsilon_{b0}| \leq \eta_2$: fissuration avec participation de béton tendu.

$$\sigma_{bt} = -f_{cj} \frac{(\epsilon_{bt} - \eta_2)^2}{(\eta_2 - \eta_1)}$$

$|\epsilon_{bt}| > \eta_2$: fissuration sans participation de béton tendu

$$\sigma_{bt=0}$$

Avec : E_{b0} : module d'élasticité longitudinale du béton ;

f_{tj} : résistance à la traction du béton ;

η_1 : déformation de traction correspondant à f_{tj} ;

η_2 : déformation limite d'élasticité de l'acier le plus tendu.

5-4-2-Comportement de l'acier en traction :

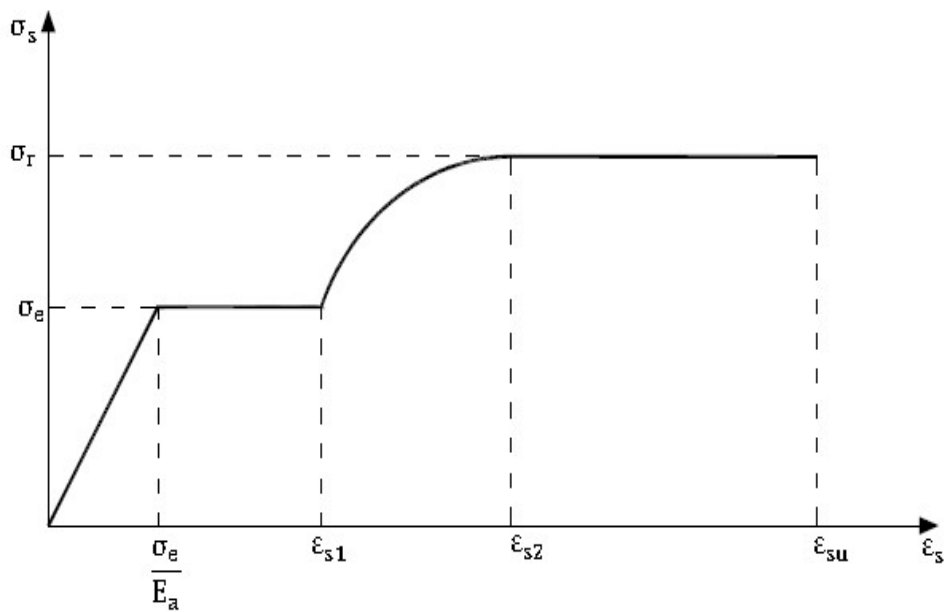


Figure 5.4 Diagramme contrainte déformation d'un acier naturel

Où :

ϵ_{s1} : désigne la déformation correspondant à la fin du palier plastique ;

ϵ_{s2} : désigne la déformation correspondant à la fin du palier raffermisssement ;

ϵ_{su} : désigne la déformation du rupture ;

σ_r : contrainte de rupture ;

σ_e : limite d'élasticité à 2⁰/00 ;

E_a : module d'élasticité longitudinale.

Chapitre 6

Etude comparative

6.1 Introduction :

Dans ce chapitre, on se propose de réaliser une étude comparative entre les modèles d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko. L'étude porte sur l'exemple d'une poutre console.

Dans le domaine du comportement linéaire on effectue des calculs analytique utilisant des expressions classiques établies dans le chapitre 2. on effectue également des simulations numériques à l'aide des programme `poutre_mince2` et `poutre_Timoshenko2`.

Dans le domaine du comportement non linéaire, le calcul n'est plus possible, les calculs sont réaliser uniquement par simulation numérique.

Le paramètre essentiel dans l'étude est l'élancement L/h .

6-2-Etude comparative dans le domaine linéaire :

6-2-1-Model BERNOULLI POUTRE MINCE :

Considérons l'exemple d'une poutre console de longueur L et de section rectangulaire $b \times h$ sollicitée par une force concentré P , appliquée à son extrémité libre figure 6-1.

On suppose que la poutre est constituée d'un matériau élastique linéaire, de module de Young E et de coefficient de poisson ν .

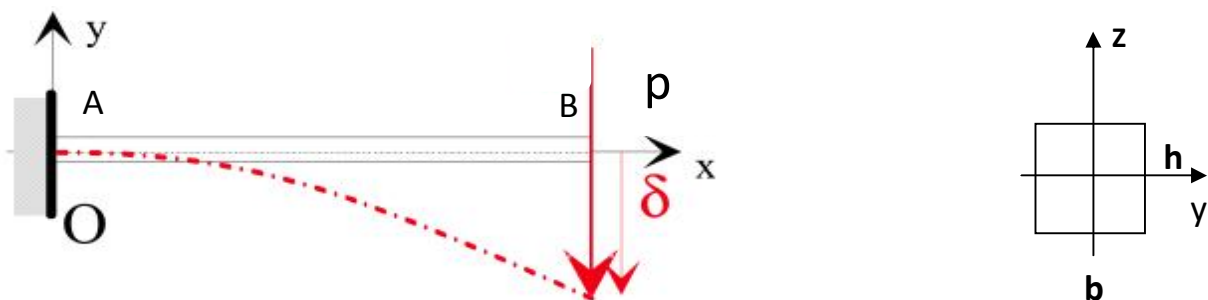


Figure6-1 : exemple d'une poutre console

6-2-1-1-Calcul analytique :

L'application est faite sur une poutre en console **Figure6-1** (dont les démentions suivantes ; h=40cm, L= 120cm et b=25cm soumise à une charge concentré a son extrémité d'intensité P=400kn Avec le module d'élasticité E.

On applique la loi (équations 2.10) de Bernoulli précédemment déterminé :

$$\delta_b = \frac{pL^3}{3EI_Z} \dots\dots\dots (2.10)$$

δ_b : représente la flèche à l'extrémité de la poutre (point B).

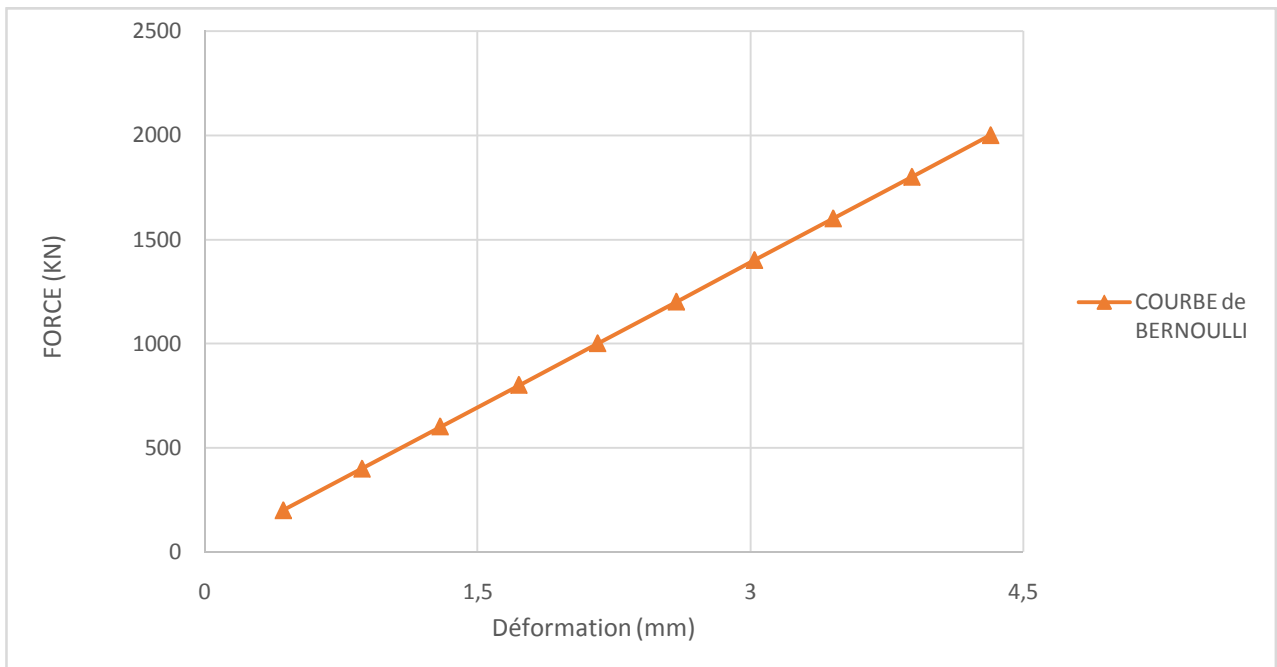


Figure 6.a1 : Courbe charges-Déplacements

Interprétation :

On constate d'après la courbe obtenue est une droite linéaire.

6-2-1-2-Numériquement :

Ü Définition de programme poutre-mince 2 :

Ce programme élaboré en langage FORTRAN 90. Il permet la simulation numérique du comportement statique non linéaire jusqu'à rupture d'une structure plane, constituée d'éléments poutre en béton armé.

Dans cette étape en refait le calcul en utilisant le programme poutre mince 2 :

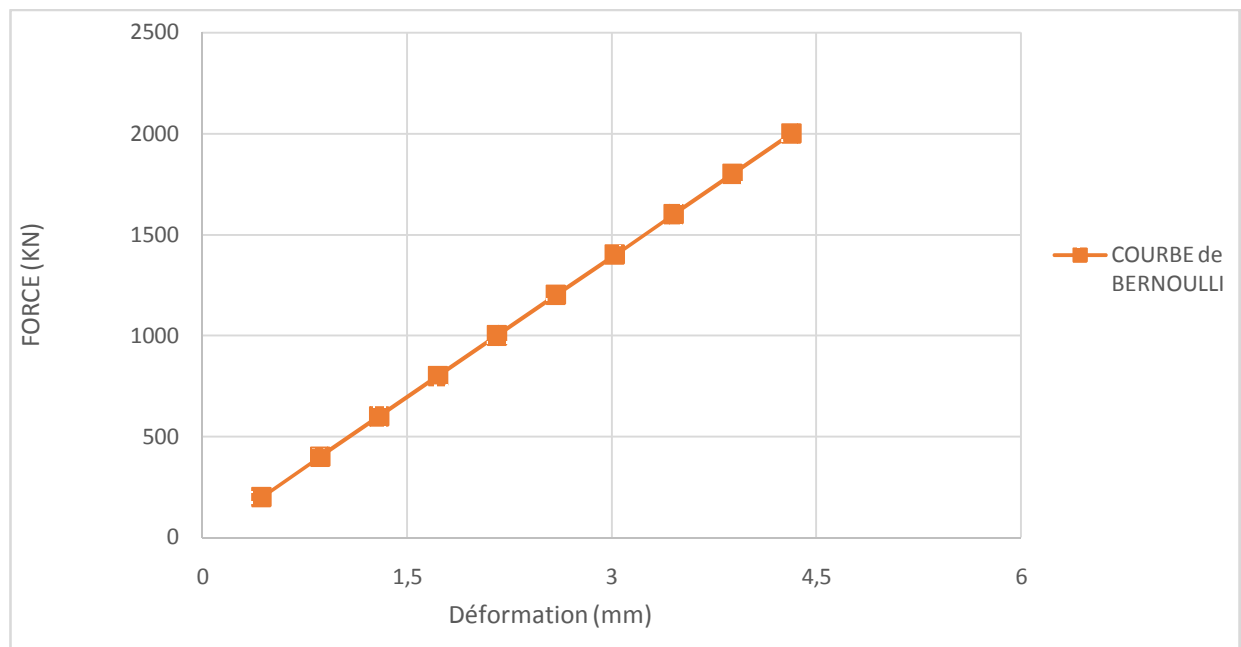


Figure 6.a2 : Courbe Charges-Déplacements

Interprétation :

On constate d'après la courbe obtenue qu'il s'agit d'une droite linéaire.

Conclusion :

On conclut que les résultats numériques sont très proches de ceux obtenus analytiquement.

6-2-2-Model de Timoshenko poutre épaisse :

6-2-2-1-Analytiquement :

L'application est faite sur une poutre en console dont les dimensions suivantes ; $h=40\text{cm}$, $L= 120\text{cm}$ et $b=25\text{cm}$ soumise à une charge concentré à son extrémité d'intensité $P=400\text{kN}$, de module de Young E et de coefficient de poisson ν .

On applique les lois de TIMOSHENKO précédemment déterminé :

D'après l'équation (2.17) la flèche de Timoshenko : $\delta = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{PL}{GA'}$

Avec : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ et $A' = KxA$ tel que : $k = \frac{5}{6}$

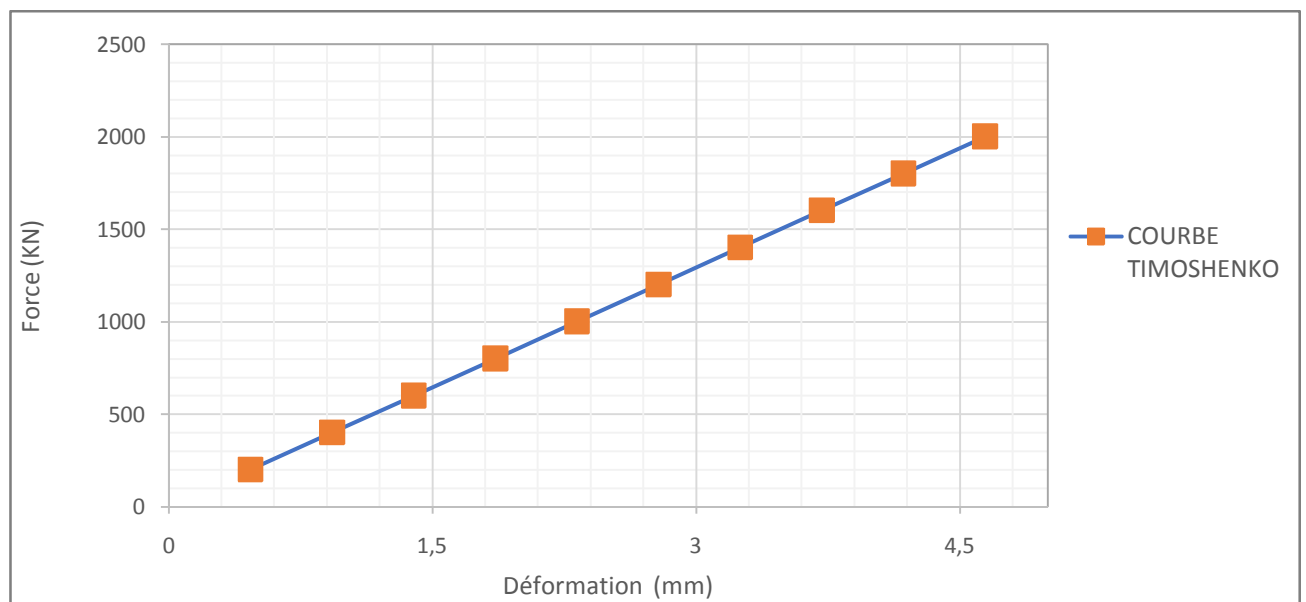


Figure6.b1 :courbe charge déformation

Commentaire :

On constate d'après la courbe obtenue est une droite linéaire.

6-2-2-2-Numériquement pour H constante et F variable :

Ü Définition de programme poutre_timosenko2 :

Ce programme élaboré en langage FORTRAN 90. Il permet la simulation numérique du comportement statique non linéaire jusqu'à rupture d'une structure plane, constituée d'éléments poutre en béton armé.

On prend le même exemple que dans le cas d'analytique :

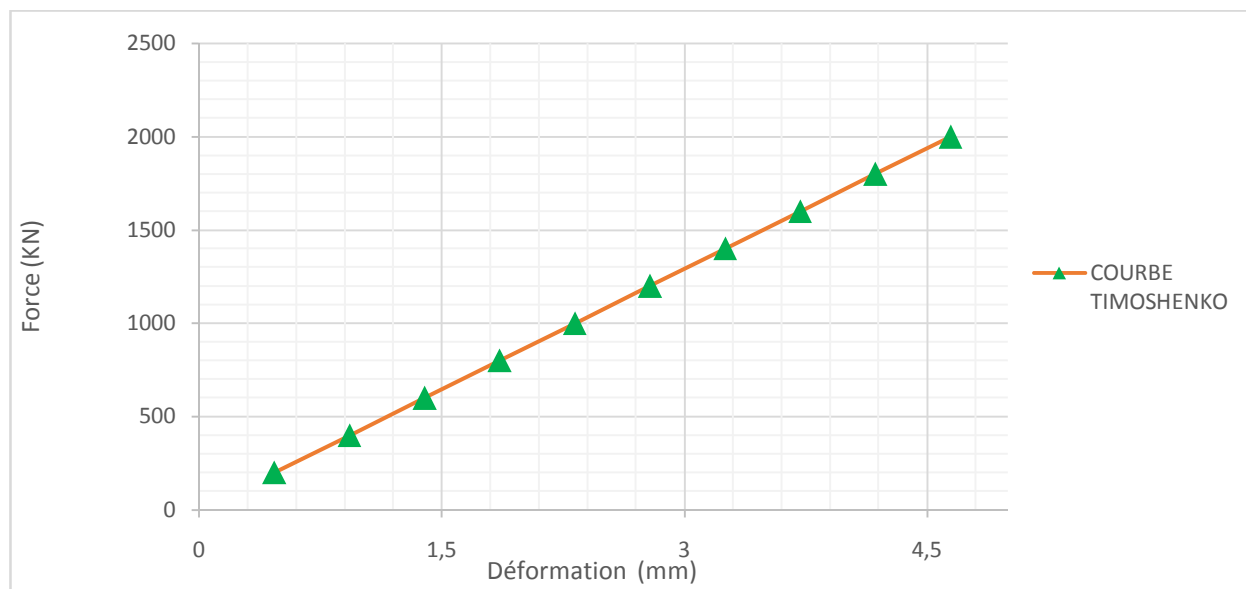


Figure 6.b2 : courbe charges –déformations

Interprétation :

On constate d'après la courbe obtenu est une droite linéaire.

Conclusion :

On conclut que les résultats numériques sont très proches de celles obtenues analytiquement.

6-2-3-Comparaison entre les deux modèles de Timoshenko et Bernoulli :

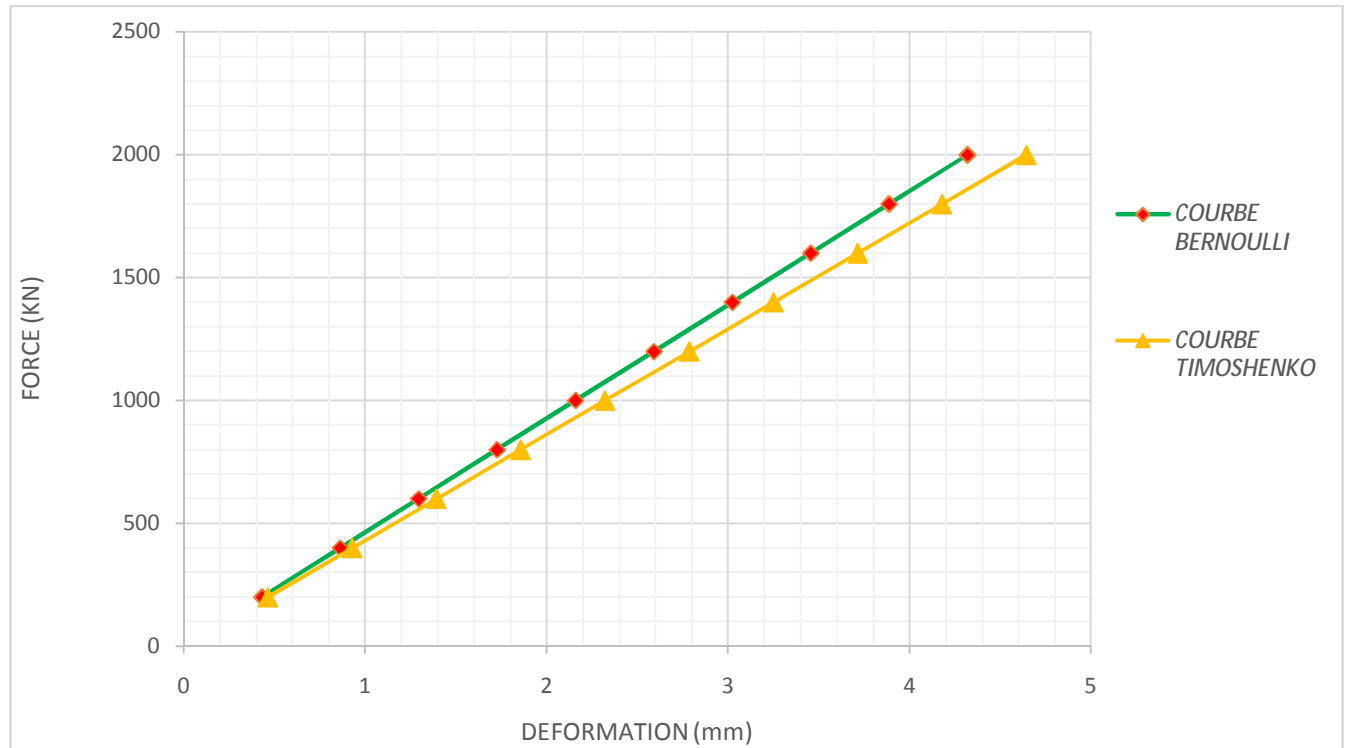
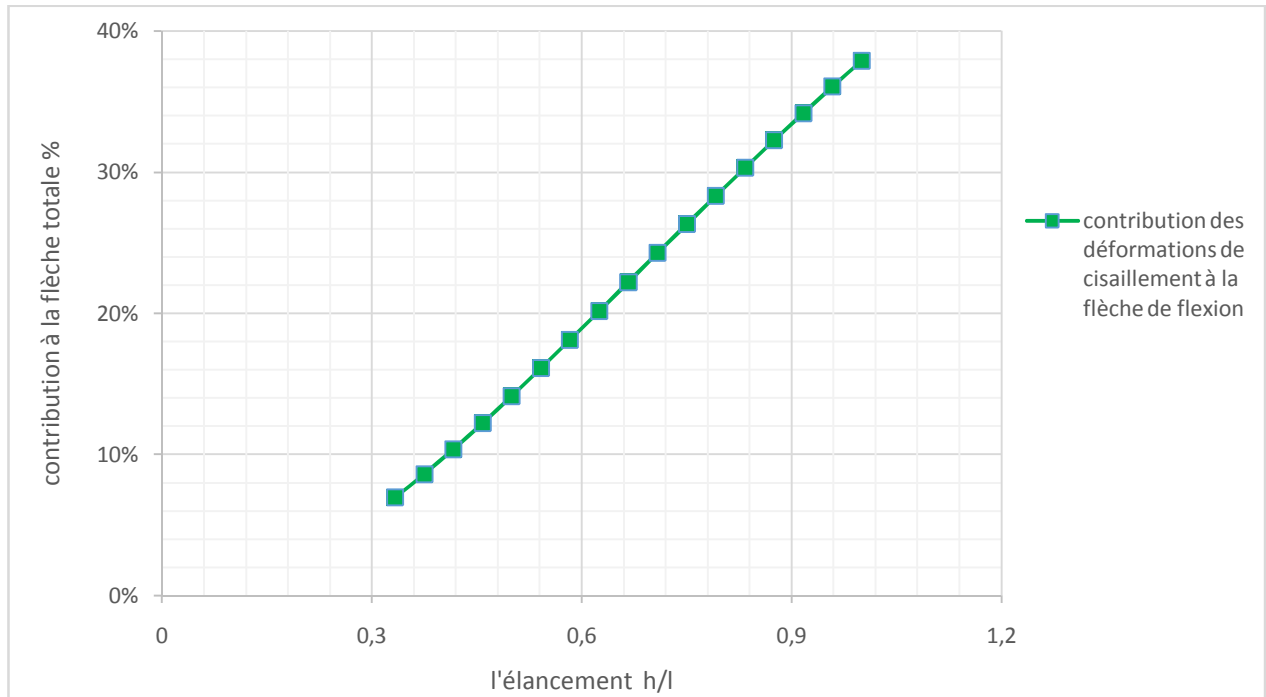


Figure 6.c1 :courbe charges –déformations

Interprétation :

On constate d'après les courbes obtenues, une petite différence due à l'effort tranchant.

6-2-4-variation de la flèche d'effort tranchant en fonction de rapport (H/L) :**Figure 6.c2** Contribution de la flèche de cisaillement à la flèche de flexion en fonction de H/L**Conclusion :**

La contribution de la flèche de cisaillement à la flèche de la flexion augmente avec l'élanement h/L .

6.3 Etude comparative dans le domaine non linéaire :

6.3.1 Calcul analytique : Exemple d'une poutre console

Considérons l'exemple d'une poutre console de longueur L et de section rectangulaire $b \times h$ sollicitée par une force concentrée P , appliquée à son extrémité libre figure 6-1.

On suppose que la poutre est constituée d'un matériau élastique linéaire, de module de Young E et de coefficient de poisson ν .

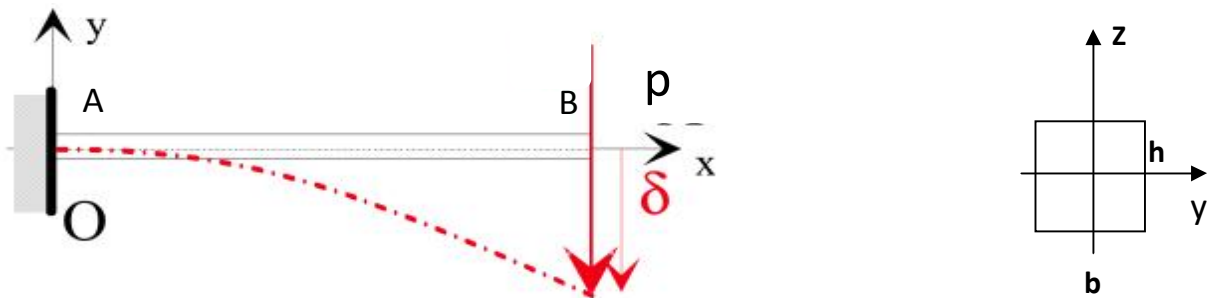


Figure 6.1 : exemple d'une poutre console

Dans le cadre de la théorie des poutres la flèche totale δ en tenant compte des déformations de flexion et de cisaillement est donnée par.

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{GA'}$$

Où :

E : module de Young.

I : moment d'inertie autour de l'axe Z .

G : module d'élasticité transversal tel que $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

A' : Section réduite.

Pour une section $b \times h$ $I = \frac{bh^3}{12}$

$$\text{D'où : } \delta = \frac{PL^3}{3E \frac{bh^3}{12}} + \frac{PL}{K \frac{E}{2(1+\nu)} bh}$$

K : coefficient de correction de cisaillement.

$$\delta = \frac{4P}{Eb} \left(\frac{L}{h}\right)^3 + \frac{2P(1+\nu)}{KEb} \left(\frac{L}{h}\right)$$

On pose : $\delta_f = \frac{4P}{Eb} \left(\frac{L}{h}\right)^3$ (6.1)

$$\delta_T = \frac{2P(1+\nu)}{KEb} \left(\frac{L}{h}\right) \text{ (6.2)}$$

Où :

δ_f : Flèche de flexion

δ_T : Flèche de cisaillement

Et le rapport des flèches donnent : $\frac{\delta_T}{\delta_f} = \frac{(1+\nu)}{2K \left(\frac{L}{h}\right)^2}$

Si on prend $\nu = 0,2$ et $k = 5/6$ (pour une section rectangulaire)

$$\frac{\delta_T}{\delta_f} = \frac{(1,2)}{2 \times \frac{5}{6} \times \left(\frac{L}{h}\right)^2} = 0,72 \left(\frac{h}{L}\right)^2$$

Les contributions des déformations de flexion et de cisaillement à la flèche totale sont donné respectivement, par :

$$\frac{\delta_f}{\delta} = \frac{\delta_f}{\delta_f + \delta_T} = \frac{1}{1 + 0,72 \left(\frac{h}{L}\right)^2}$$

et

$$\frac{\delta_T}{\delta} = \frac{\delta_T}{\delta_f + \delta_T} = \frac{1}{\frac{\delta_f}{\delta_T} + 1} = \frac{0,72 \left(\frac{h}{L}\right)^2}{1 + 0,72 \left(\frac{h}{L}\right)^2}$$

Dans la figure suivante, on représente la variation de la contribution des déformations de flexion et de cisaillement à la flèche totale en fonction de L/h .

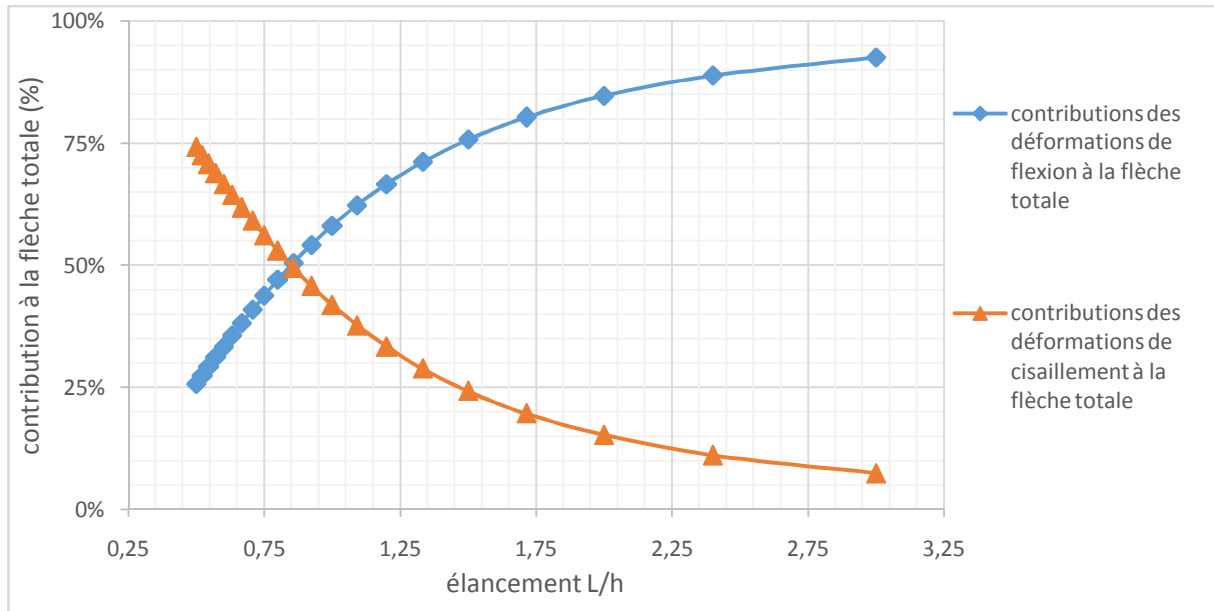


Figure 6.2 Contribution à la flèche totale en fonction de L/h

• **Commentaire :**

On constate d'après les courbes obtenus sur la contribution des flèches de flexion à la flèche totale augmente avec l'élançement, et celle de cisaillement à la flèche totale diminue avec l'élançement.

• **Conclusion :**

On conclut que pour les poutres minces (élançées) la flèche additionnel due à l'effort tranchant est négligeable ce qui n'est pas le cas pour les poutres épaisses (courts).

On peut tracer également la variation de $\frac{\delta_T}{\delta_f}$ en fonction de l'élançement $\frac{L}{h}$

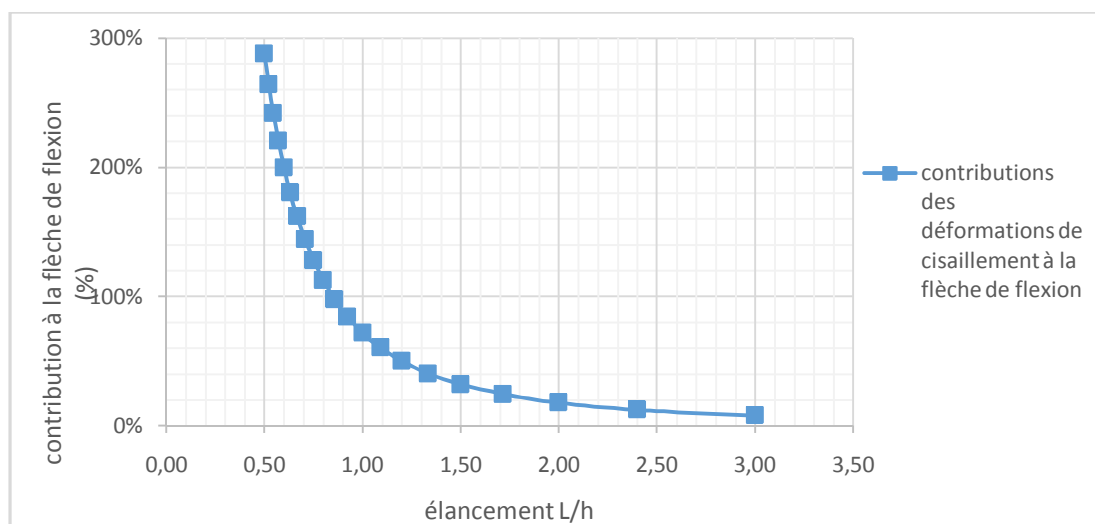


Figure 6.3 Contribution à la flèche de flexion en fonction de L/h

Commentaire :

On constate d'après la courbe obtenue de la contribution des déformations de la flèche de cisaillement à la flèche de flexion diminue avec l'élançement.

6.3.2 Calcul par simulation numérique :

Dans la figure suivante, on représente la variation de la contribution des déformations de flexion et de cisaillement à la flèche totale en fonction de L/h .

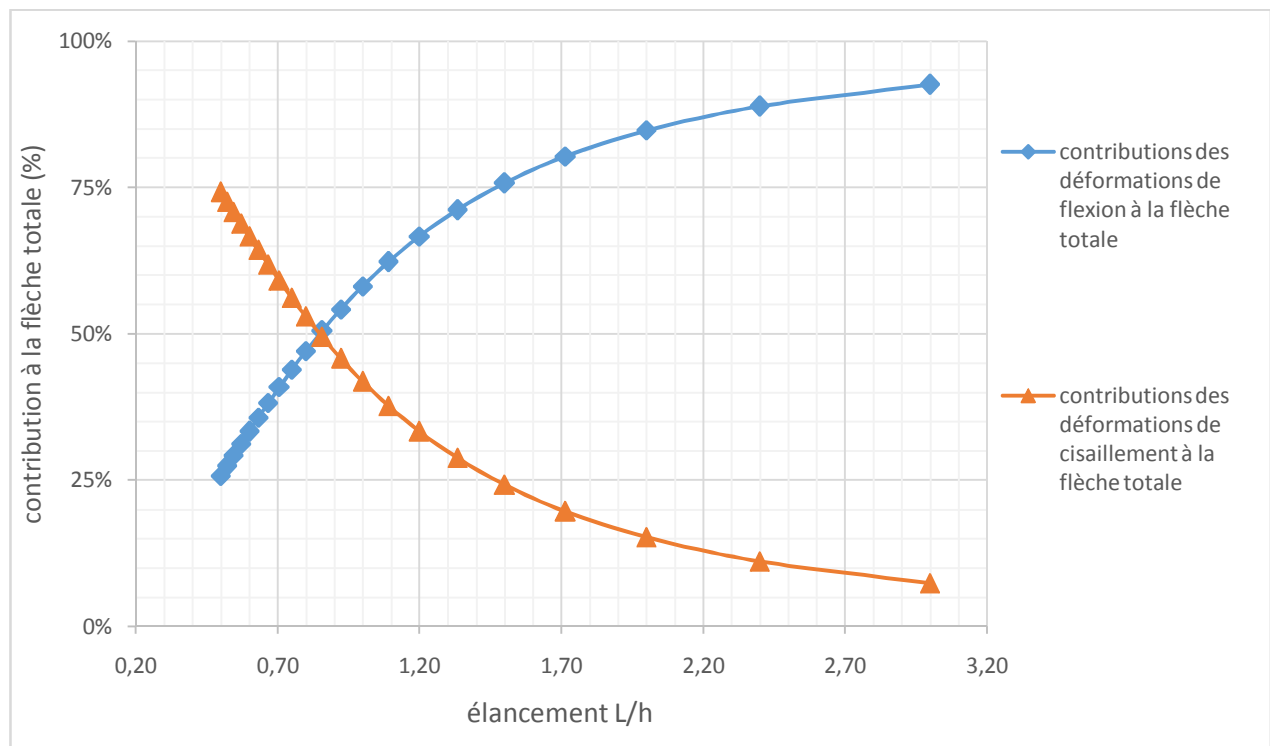


Figure 6.4 Contribution à la flèche totale en fonction de L/h

- **Commentaire :**

On constate d'après les courbes obtenus de la contribution des déformations des flèches flexion à la flèche totale augmente avec l'élançement et celle de cisaillement à la flèche totale diminue avec l'élançement.

- **Conclusion :**

On conclut que pour les poutres minces (élançées) la flèche additionnel due à l'effort tranchant est négligeable ce qui n'est pas le cas pour les poutres épaisses (courts).

On peut tracer également la variation de $\frac{\delta_T}{\delta_f}$ en fonction de L/h

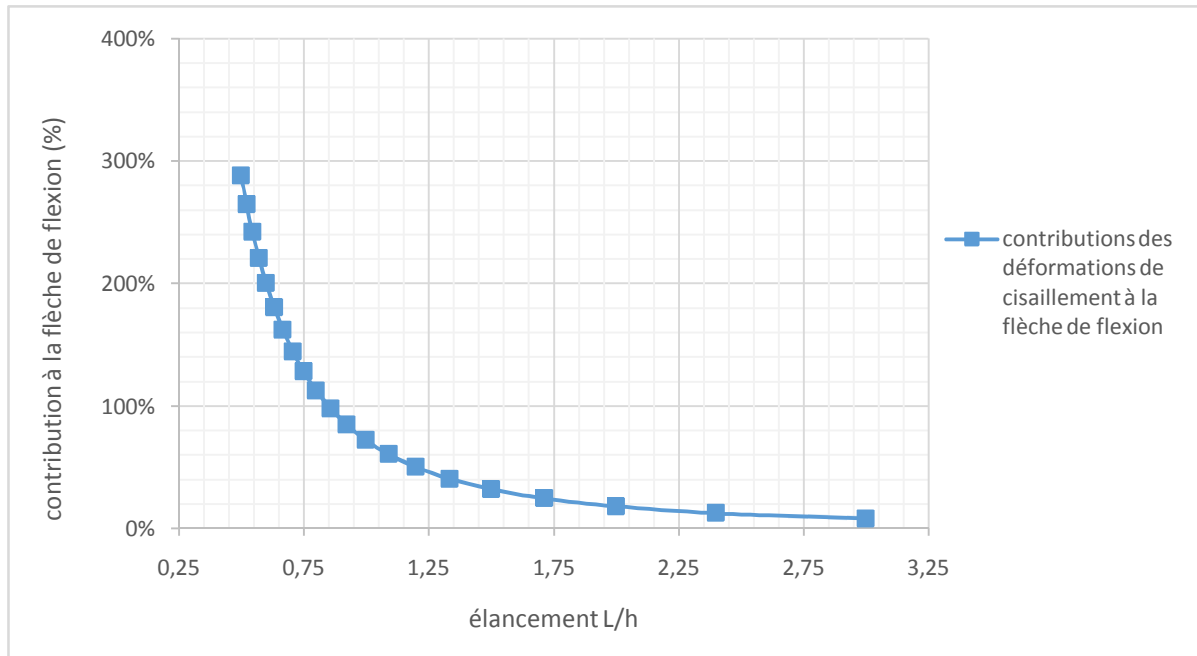


Figure 6.5 Contribution à la flèche de flexion en fonction de L/h

Commentaire :

On constate d'après la courbe obtenue de la contribution des déformations de la flèche de cisaillement à la flèche de flexion diminue avec l'élanement.

6.3.3 ETUDE COMPARATIVE DANS LE DOMAINE NON LINEAIRE NUMERIQUEMENT :

Dans le domaine non linéaire le calcul est fait numériquement à l'aide de deux programmes informatiques basé sur la méthode des éléments finis :

- Le programme poutre_mince2 utilisant des éléments finis poutres basées sur l'hypothèse de Navier-Bernoulli.
- Le programme poutre_Timoshenko2 utilisant des éléments finis poutres basées sur la théorie de Timoshenko.

Exemple :

Considérons l'exemple précédent d'une poutre console en béton armée de longueur L et de section rectangulaire transversal bxh encastré à l'extrémité A et soumise à une charge concentré a son extrémité libre B .les principales caractéristiques des matériaux utilisés sont donnée dans le tableau 6-1.

Caractéristiques du béton	
Module d'élasticité E (MPa)	33x10 ³
Coefficient de poisson	0.2
Résistance en compression fcj(MPa)	42.13
Résistance à la rupture en compression (MPa)	44
Résistance en traction ftj(MPa)	3.05

Tableau6.1 : Caractéristiques du béton

Caractéristiques des aciers	
Les aciers constituant le 1 ^{er} , 2 ^{ieme} lit et le 3 ^{ieme} lit	
Module d'élasticité E (MPa)	200x10 ³
Coefficient de poisson	0.3
Limite d'élasticité (MPa)	447.5
Résistance à la rupture (MPa)	500

Tableau6.2 :Caractéristiques des aciers

La géométrie de la poutre et de la section transversale est représentée dans la figure 6.2 :

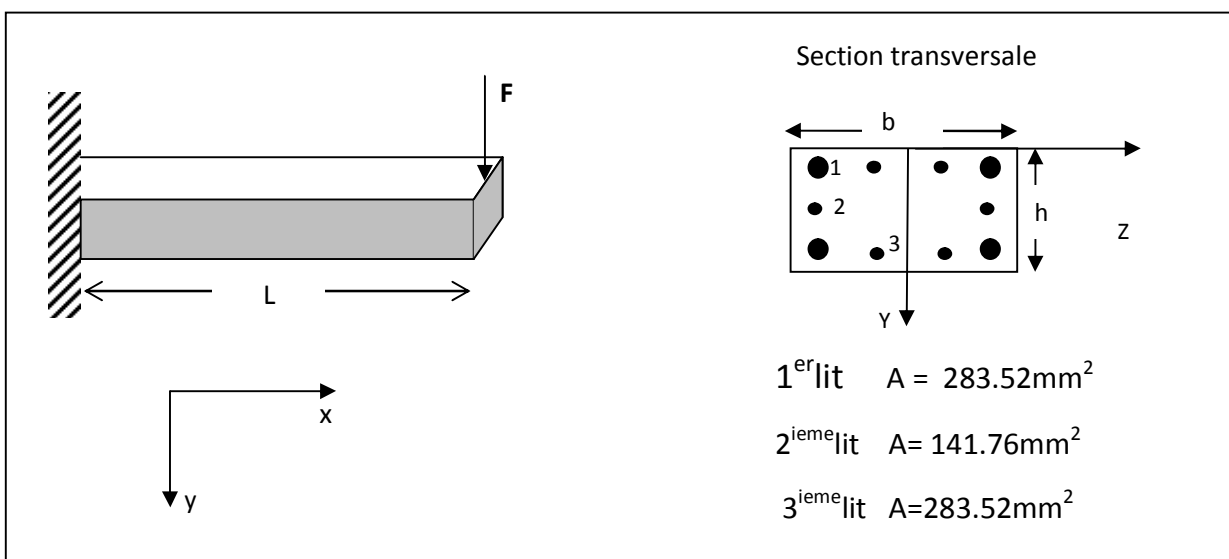


Figure6.6 :Données géométriques de la poutre

6.3.3.1 SIMULATION NUMERIQUE COURBE CHARGE – FLECHE :

On s'intéresse à représenter la courbe charge –flèche

-cas d'une poutre très courte, $L=1.5h$:

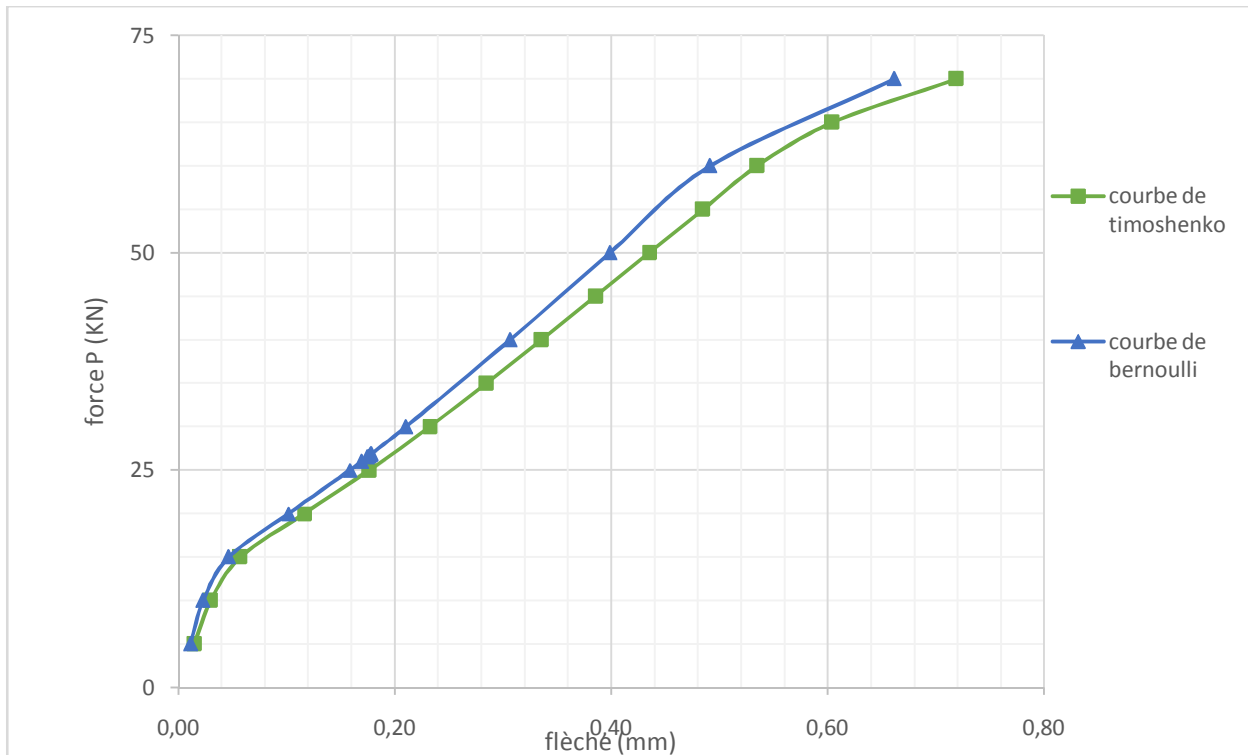


Figure 6.7 : Courbe charges-déplacements $L = 1,5h$

On peut faire les constatations suivantes :

- la différence entre les deux courbes représente la contribution des déformations de cisaillement à la flèche totale. Cette différence reste faible jusqu'à une charge d'environ 25KN, ce qui représente environ 30% de la charge maximale. Au-delà, cette différence devient non négligeable.
- concernant la charge maximale, les deux calculs donnent pratiquement le même résultat. Ceci s'explique par le fait que dans les deux programmes, le comportement est considéré non linéaire en flexion. Par conséquent, dans les deux cas, la rupture obtenue par simulation est toujours en flexion.

-cas de la poutre courte : $L=2.5h$

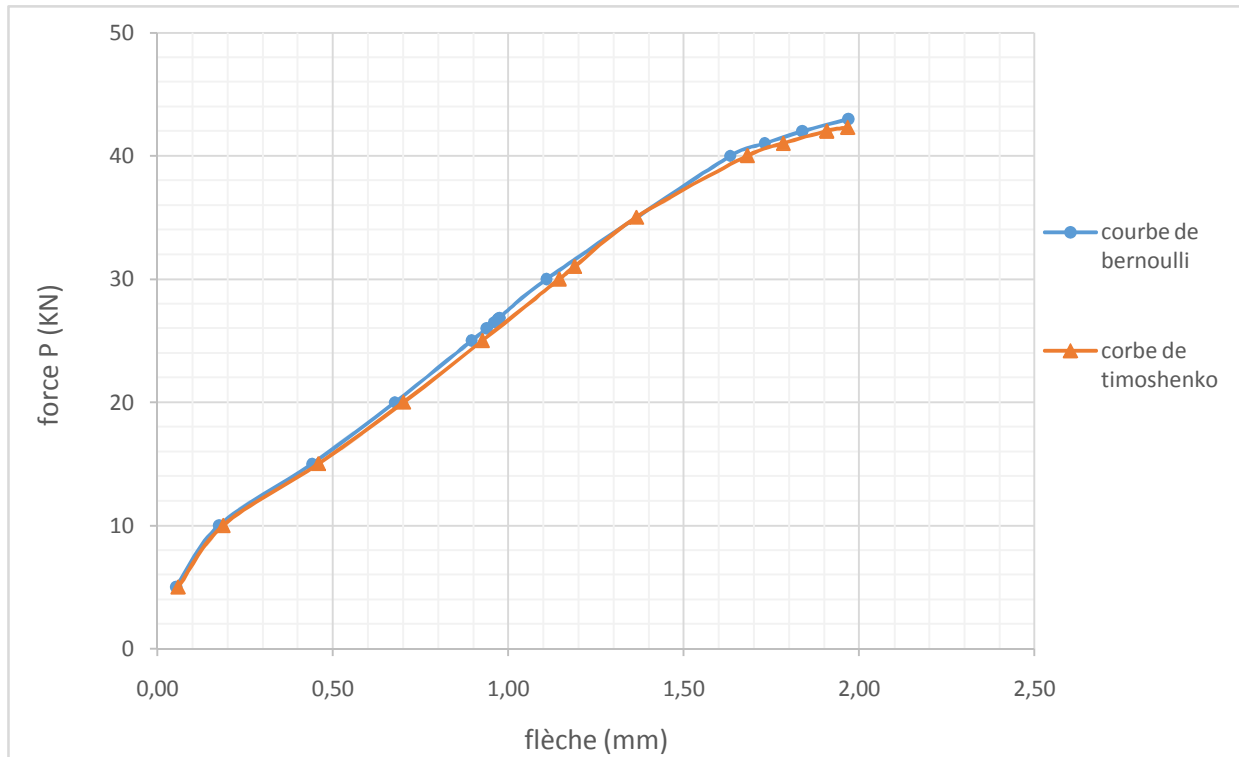


Figure 6.8 : Courbe charges-déplacements $L= 2,5h$

On constate qu'il y a une légère différence entre les deux courbes qui est due aux déformations de cisaillement. Ceci montre que l'influence des déformations de cisaillement devient très faible.

-cas de la poutre élancée : $L=4h$

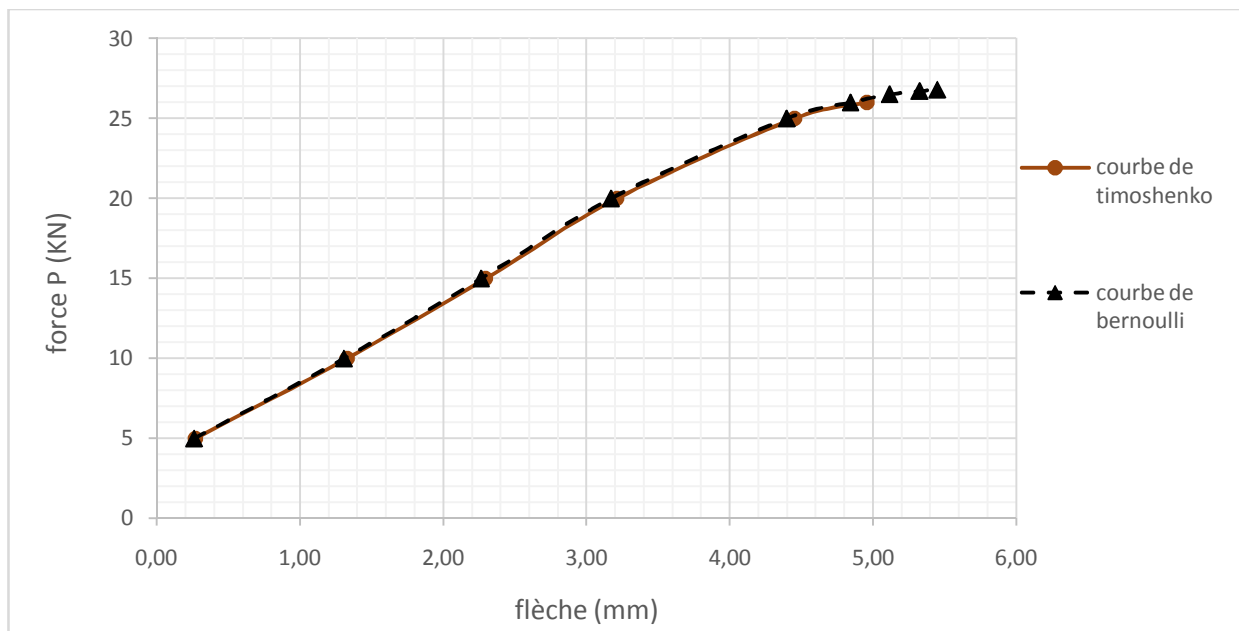


Figure 6.9 : Courbe charges-déplacements $L=4h$

-cas de la poutre élancée : $L=10h$

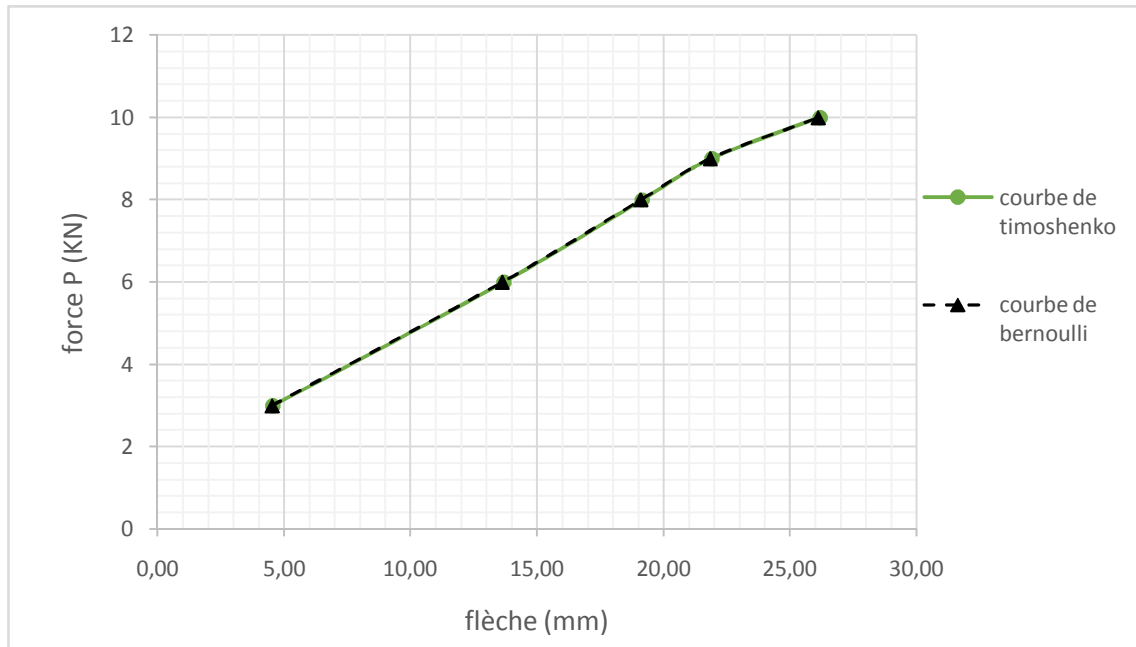


Figure 6.10 : Courbe charges-déplacements $L=10h$

Constatations :

Dans le cas des poutres élancées ($L=4h$ et $L=10h$), l'influence des déformations de cisaillement devient négligeable. En effet, dans les deux cas, les courbes obtenues par les deux calculs sont pratiquement confondues.

Sur la figure 6.7, on a tracé la variation de $\frac{\delta_T}{\delta}$ en fonction de l'élancement :

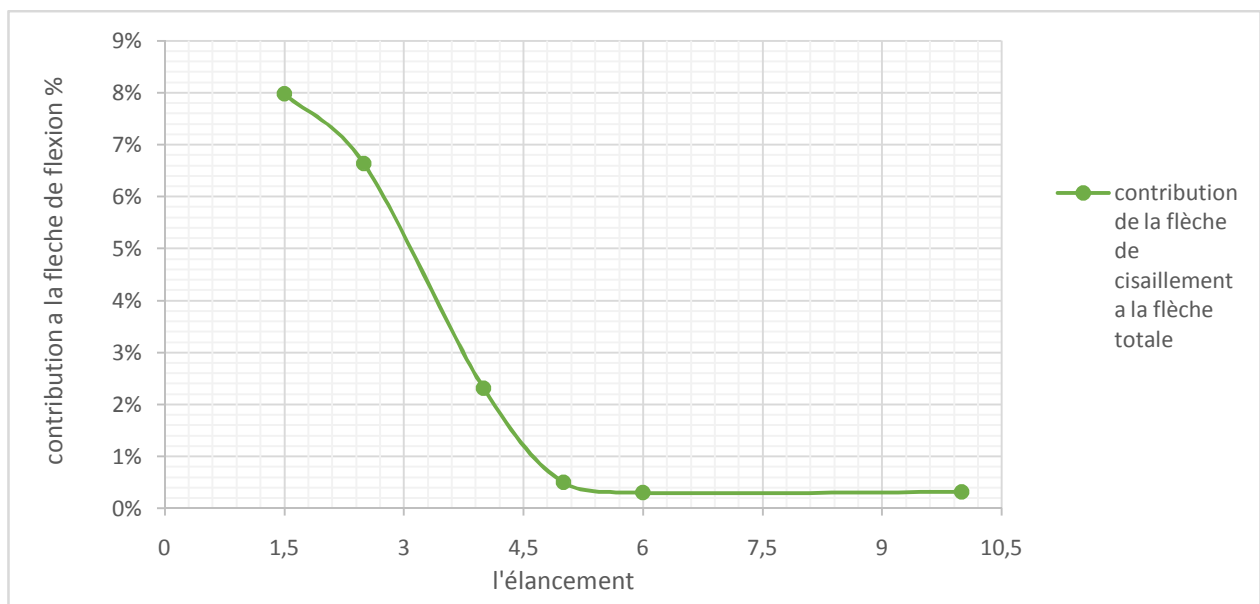


Figure 6.11 : Contribution de la flèche de cisaillement à la flèche totale en fonction de $\frac{L}{h}$

δ_T : La flèche de cisaillement

δ : La flèche de flexion (flèche totale)

Constatations :

La courbe représentée sur la figure 6.7, montre l'évolution de la contribution des déformations de cisaillement à la flèche totale, calculée l'approche de la charge maximale.

Cette contribution est notable pour une poutre très courte (de l'ordre de 8% de la flèche totale). Elle diminue avec l'élançement et devient très faible (de l'ordre de 0.5% de la flèche totale) pour un élançement $L > 4,5h$ environ.

Conclusion générale

Dans les ossatures de bâtiments, les éléments structuraux (poutres, poteaux, portiques) peuvent être soumis simultanément à des sollicitations de flexion et d'effort tranchant.

Les déformations et déplacements engendrés par le cisaillement sont négligeable dans les éléments élancé mais devient important voir prépondérant dans les éléments courts ou peut élancés.

Dans le cadre de ce travaille on s'est intéressée à la modélisation et à la simulation des éléments d'ossatures en se basant sur deux modèles :

- Le modèle de Navier Bernoulli, négligent complètement les déformations de cisaillement.
- le modèle de Timoshenko, pour les éléments courts, tenant en compte les déformations de cisaillement.

Une étude comparative entre les deux modèles est réalisée en considérant comme paramètre essentiel l'élancement.

Dans le domaine de comportement linéaire, on a effectué deux type de calcule.

- un calcule analytique.
- un calcule par simulation numérique.

Dans le domaine non linéaire, l'étude est effectuée on utilisant deux programmes de simulation numérique.

- Le programme poutre-mince2 permet la simulation de comportement non linéaire jusqu'à la rupture, d'un élément fléchie de type poutre.
- le programme poutre_timoshenko2 permet la simulation de comportement numérique en flexion jusqu'à la rupture en tenant compte des déformations de cisaillement.

Les résultats des calculs montrent que les déformations de cisaillement restent négligeables pour les élément élancés de l'ordre de 0,5 % pour un élancement de $\frac{L}{h} = 4,5h$ mais augmentent sensiblement pour les éléments courts de l'ordre de 8 % pour un élancement de $\frac{L}{h} = 1,5h$.

En perspective, on propose de compléter ce travaille par une étude comparative en considérant le mode de fissuration et de rupture en flexion et également à l'effort tranchant ceci en considérant d'autres paramètre d'étude tel que la forme de la section, le ferrailage transversale ...etc.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **Grelat A.** (1978), « Analyse non linéaire des ossatures hyperstatiques en béton armé », Thèse de docteur Ingénieur, Université Paris VI.
- [2] **SAAD M.** (2011) « Influence du pourcentage d'acier sur le comportement post-Fissuration du béton armé en traction » Thèse de docteur d'état, Université MOULOUDMAMMERI de Tizi-Ouzou.
- [3] **GAGLIARDINI O.** (2004), «< cours de béton armé >> IUP GCI3 option OS Année 2004/05. UJF-Grenoble I.
- [4] **KAOUANE T.** (2011), «< modélisation du comportement en cisaillement jusqu'à rupture des sections de poutres en béton armé et précontraint >>, Thèse de MAGISTER Université MOULOUD MAMMERI De Tizi Ouzou.
- [5] **OUBRAHAM C.** (2012) « simulation du comportement instantané et différé d'une zone Fléchie en béton armé » ; Thèse de MAGISTER, Université MOULOUD MAMMERI De Tizi Ouzou.
- [6] **Florent ROBERT** (1999), «< contribution à l'analyse non linéaire géométrique et matérielle des ossatures spatiales en Génie civil (application aux ouvrages d'Arts)>>, thèse de doctorat, institut national des sciences appliquées de LYON.
- [7] **KAOUANE.M** (2011), «< Analyse des contraintes mécaniques et de la fissuration des éléments en béton armé sous l'effet thermomécanique >>; Thèse de MAGISTER, Université MOULOUD MAMMERI De Tizi Ouzou.
- [8] **SI Salem .A.** (2012) «< Modélisation du béton tendu fissuré dans le calcul en flexion d'une zone en béton armé >>, Thèse de Master recherche, Université MOULOUD MAMMERI De Tizi Ouzou.
- [9] **Belhocine .M.** (2009), «< Ductilité des éléments structuraux de bâtiments en béton armé >>, Thèse de MAGISTER, Université MOULOUD MAMMERI De Tizi Ouzou.
- [10] **GHANNOUM.W** (1998), «< Size effect on shear strength of reinforced concrete beam >> Mémoire de Master, école normale supérieure de Cachan.
- [11] **NGUYEN.X.H.** (2006), «< Vulnérabilité des structures en béton armé à voiles Porteurs >>, Thèse de doctorat, institut nationale polytechnique de Grenoble.
- [12] **Meziane R.** (2008) «< modélisation et simulation du comportement non-linéaire des structures planes, en béton armé et béton de fibres, par des éléments finis poutres. >> Mémoire de magister, département de génie civil, université de mouloud Mammeri de Tizi Ouzou.
- [13] **BAEL** Règles et techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en Béton armé aux états limite, fascicule 62 du CCTG, règlement français.
- [14] **NGUYEN. X. H.** (2006), «< Vulnérabilité des structures en béton armé à voiles Porteurs: expérimentation et modélisation >>, thèse de doctorat, institut nationale polytechnique de Grenoble.

- [15] **Drizi. S , S. Kaci, C.Oubraham, F.Amiar, M.Belhocine**, << Simulation du comportement instantané et différé d'une zone en béton armé>>, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.
- [16] **O.NAIT RABAH (1990)**; << Simulation Numérique du comportement non linéaire des ossatures spatiales ; application aux structures en béton armé, en béton précontraint et mixtes >> ; Thèse de doctorat-Ecole centrale de PARIS.
- [17] **HAMMOUM. H**, (1998) << simulation numérique du comportement non-linéaire des structures planes, >>. Mémoire de magister, département de génie civil, université demouloud Mammeri de Tizi Ouzou.
- [18] **GOURI DHATT, GILBERT TOUZOT**, (1984), << une présentation de la méthode des éléments finis>>, DEUXIEME EDITION.
- [19] **Charles E. Augarde**, (1998), << generation of shape functions for straight beamelements >> Department of Engineering Science, University of Oxford, Parks Road, Oxford, U.
- [20] : **SAIB Nacera**, prise en compte de l'effort tranchant dans la modélisation par élément finis des structures planes en béton armé, Mémoire de Magister, 2008.
- [21] **GHERBI Khaled** :ÉVALUATION DE LA DUCTILITÉ SECTIONNELLE ET SRTUCTURALE DES ÉLÉMENTS FLÉCHIS EN BÉTON ARMÉ, MÉMOIRE DE MASTER ACADÉMIQUE ,2013.
- [22]**DEBIT Belaid** : ÉTUDE COMPARATIVE DE MODÈLES D'ÉLÉMENTS, FINIS DE TYPE POUTRE EN BÉTON ARMÉMÉMOIRE DE MASTER ACADÉMIQUE, 2013.
- [23] : **F. J . Vecchio**, Analysis of Shear Critical Reinforced concrete Beams, ACI StructuralJournal, Juillet 2000.VECCHIO .F . J, M.B.EMARA, Shear déformation in reinforced concrete frames,ACI Structural Journal, Janvier-Février 1992.
- [24] : **KACHI.M.S**, Modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres à précontrainte extérieur, Thèse de Doctorat, Novembre 2006.

ANNEXE A

Présentation du programme poutre_mince2 :

Ce programme élaboré en langage Fortran 90. Il permet la simulation numérique du comportement statique non linéaire jusqu'à rupture d'une structure plane, constituée d'éléments poutres en béton armé.

A.1-Organigramme général du bloc calcul :

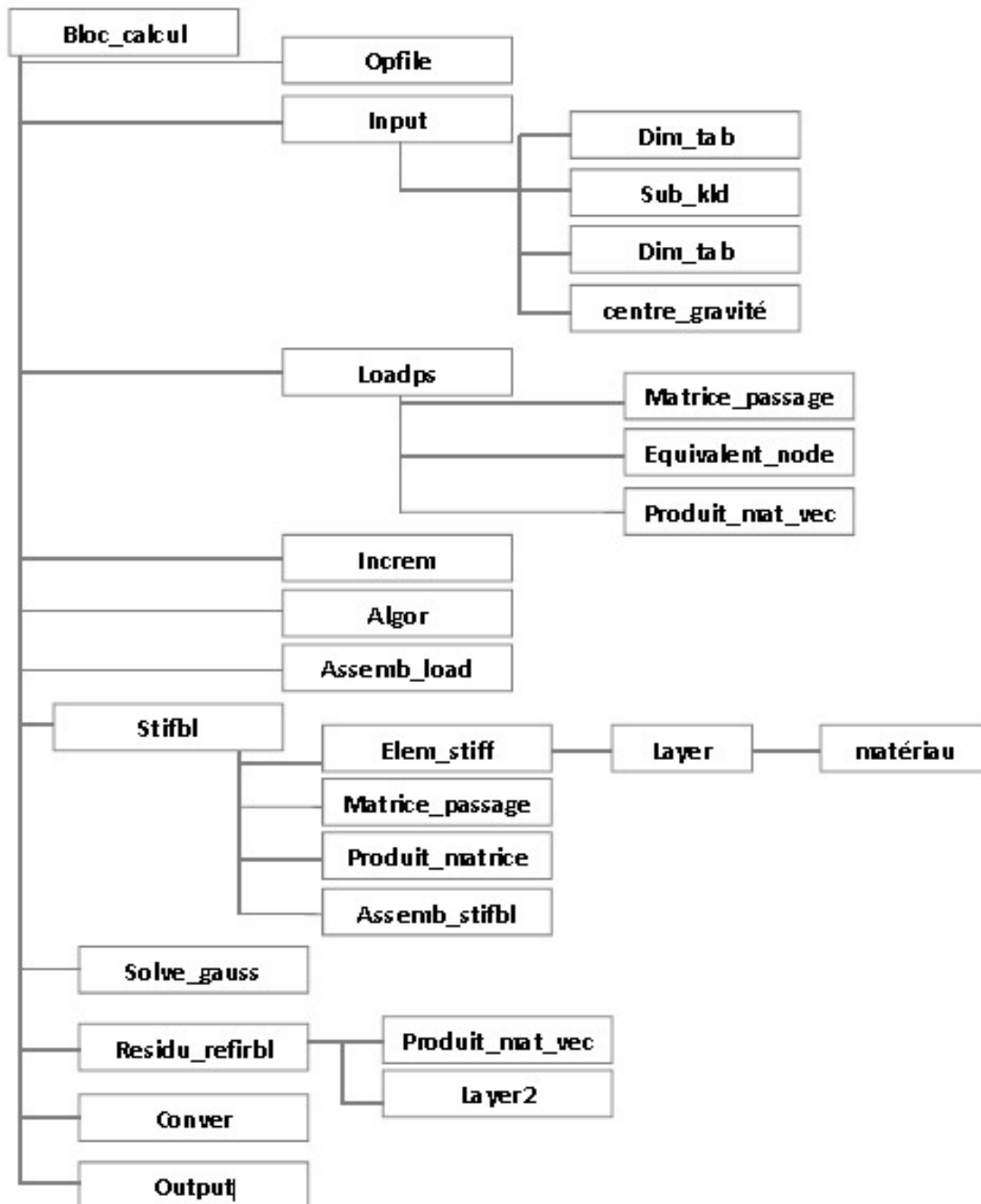


Figure A.1 : Organigramme détaillé du bloc calcul.

A.2-Description des différentes sous-routines :

Dans ce qui suit, on décrit brièvement les différentes sous-routines constituant le programme poutre _ mince :

1-Sous-routines opfile :

Ouverture du fichier de données finp et création du fichier des résultats fout.

2-Sous-routines input :

Lecture des principales données du problème.

3-Sous-routines dim _ tab (itab) :

Dimensionnement et initialisation des tableaux et vecteurs.

4- Sous-routinesub _ kld :

Calcul du vecteur kld de localisation des débuts de colonnes dans la matrice de rigidité globale (stockage en ligne de ciel)

5-Sous-routine centre _ gravite :

Calcul de la position du centre de gravité de la section par rapport à l'axe de référence.

6-Sous-routine loadps :

Lecture du chargement puis évaluation des forces nodales, pour chaque élément dans le vecteur "rload".

7-Sous-routine équivalent–node :

Calcul du vecteur des forces nodales équivalentes dues aux charges réparties sur l'élément en cours.

8-Sous-routine matrice–passage :

Calcul de la matrice de passage.

9-Sous-routine produit_ matrice :

Calcul du produit de deux matrices $A (l \times m) * B (m \times n)$

10-Sous-routine produit_ mat_ vect :

Calcul du produit d'une matrice par un vecteur $A (l \times m) * v (m)$

11-Sous-routine increm :

Lecture et incrémentation du chargement appliqué.

12- Subroutinealgor :

Calcul du paramètre kresl de l'algorithme de résolution en fonction de la valeur du paramètre nalgo.

13- Subroutineassemb_load :

Assemblage du chargement dans le vecteur global « gload ».

14-Subroutine stifbl :

calcul et assemblage de la matrice de rigidité élémentaire.

15-Subroutine elem_stiff :

Calcul de la matrice de rigidité élémentaire estif (6x6) pour un élément poutre mince plane à 2 nœuds.

16-Subroutine assem_stifbl :

Assemblage des matrices élémentaire dans la matrice globale. « gstif » (en ligne de ciel)

17-Subroutine layer :

calcul des valeurs EA, ES, et EI par intégration sur la hauteur de la section transversale de l'élément en cours.

18-Subroutine solve_gauss :

Résolution du système d'équations par la méthode d'élimination de gauss (la matrice de rigidité étant stockée en ligne de ciel), cumul des déplacements et réactions.

19-Subroutine residu_reforbl :

Calcul des forces nodales équivalentes

20-Subroutine layer 2 :

Calcul des valeurs des efforts N et M au point igauss de la section transversale de l'élément en cours.

21-Subroutine matériau :

Loi de comportement relation contrainte – déformation.

22-Subroutine conver :

Test de convergence pour le calcul itératif. 23-Subroutine output :

Sortie des résultats :

- Déplacements nodaux

- Efforts internes N, T, M.

- Réactions aux appuis.

-Exemple fichier de donnée

début_titre

\$

\$ essai de Low et Moehle 1987 cite par spacone

\$ console en beton arme, soumise a la flexion simple

\$ discretisation en 16 elements

fin_titre

donnees_globales

17 16 1 1 3 1 2 10 10 2 1

elements

1 1 1 1 2

2 1 1 2 3

3 1 1 3 4

4 1 1 4 5

5 1 1 5 6

6 1 1 6 7

7 1 1 7 8

8 1 1 8 9

9 1 1 9 10

10 1 1 10 11

11 1 1 11 12

12 1 1 12 13

13 1 1 13 14

14 1 1 14 15

15 1 1 15 16

16 1 1 16 17

coordonnees

1 0. 0.

2 32.124 0.

3	64.248	0.
4	96.372	0.
5	128.496	0.
6	160.62	0.
7	192.744	0.
8	224.868	0.
9	256.992	0.
10	289.116	0.
11	321.24	0.
12	353.364	0.
13	385.488	0.
14	417.612	0.
15	449.736	0.
16	481.86	0.
17	514.	0.

section

1	127.	1	3	
165.	165.	0.	127.	1
35.	283.52	2		
63.5	141.76	2		
92.	283.52	2		

conditions_limites

1	111	0.	0.	0.
---	-----	----	----	----

matériaux

1	2	33000.	0.2	42.13	40.	0.002	0.0035	3.05	0.001	1	3
2	3	200000.	0.3	447.5	500.	0.010	0.	0.	0.	0.	0.

charges

1 0

charges_nodales

1

17 0. -10000. 0.

increment

0.5 0.05 100 2

0.5 0.05 100 2

0.5 0.05 100 2

0.5 0.05 100 2

0.5 0.05 100 2

0.1 0.05 100 2

0.05 0.05 100 2

0.02 0.05 100 2

0.01 0.05 100 2

0.005 0.05 100 2

ANNEXE B

Présentation du programme poutre_timoshenko2 :

Ce programme élaboré en langage Fortran 90. Il permet la simulation numérique du comportement statique non linéaire jusqu'à rupture d'une structure plane tenant compte des déformations de cisaillement, constituée d'éléments poutres en béton armé.

B.1-Organigramme général du bloc calcul :

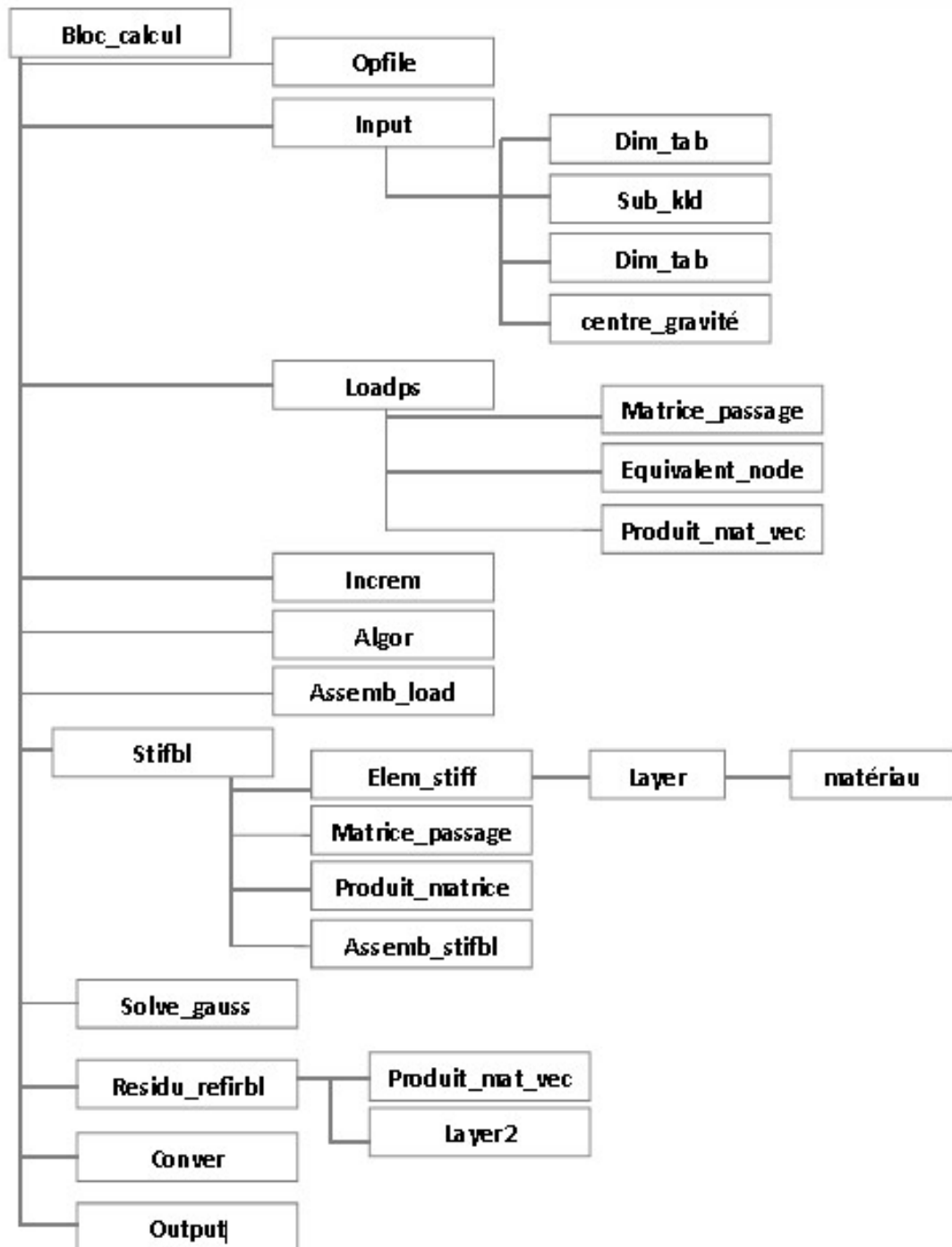


Figure B.1 : Organigramme détaillé du bloc calcul

B.2-Description des différentes sous-routines :

Dans ce qui suit, on décrit brièvement les différentes sous-routines constituant le programme poutre _ mince :

1-Sous-routines opfile :

Ouverture du fichier de données finp et création du fichier des résultats fout.

2-Sous-routines input :

Lecture des principales données du problème.

3-Sous-routines dim _ tab (itab) :

Dimensionnement et initialisation des tableaux et vecteurs.

4- Sous-routinesub _ kld :

Calcul du vecteur kld de localisation des débuts de colonnes dans la matrice de rigidité globale (stockage en ligne de ciel)

5-Sous-routine centre _ gravite :

Calcul de la position du centre de gravité de la section par rapport à l'axe de référence.

6-Sous-routine loadps :

Lecture du chargement puis évaluation des forces nodales, pour chaque élément dans le vecteur "rload".

7-Sous-routine équivalent-node :

Calcul du vecteur des forces nodales équivalentes dues aux charges réparties sur l'élément en cours.

8-Sous-routine matrice-passage :

Calcul de la matrice de passage.

9-Sous-routine produit_ matrice :

Calcul du produit de deux matrices $A (l \times m) * B (m \times n)$

10-Sous-routine produit_ mat_ vect :

Calcul du produit d'une matrice par un vecteur $A (l \times m) * v (m)$

11-Subroutine increm :

Lecture et incrémentation du chargement appliqué.

12- Subroutinealgor :

Calcul du paramètre kresl de l'algorithme de résolution en fonction de la valeur du paramètre nalgo.

13- Subroutineassemb_load :

Assemblage du chargement dans le vecteur global « gload ».

14-Subroutine stifbl :

calcul et assemblage de la matrice de rigidité élémentaire.

15-Subroutine elem_stiff :

Calcul de la matrice de rigidité élémentaire estif (6x6) pour un élément poutre minceplane à 2 noeuds.

16-Subroutine assem_stifbl :

Assemblage des matrices élémentaire dans la matrice globale. « gstif » (en ligne de ciel)

17-Subroutine layer :

calcul des valeurs EA, ES, et EI par intégration sur la hauteur de la sectiontransversale de l'élément en cours.

18-Subroutine solve_gauss :

Résolution du système d'équations par la méthode d'élimination de gauss (la matricede rigidité étant stockée en ligne de ciel), cumul des déplacements et réactions.

19-Subroutine residu_reforbl :

Calcul des forces nodales équivalentes

20-Subroutine layer 2 :

Calcul des valeurs des efforts N et M au point igauss de la section transversale del'élément en cours.

21-Subroutine matériau :

Loi de comportement relation contrainte – déformation.

22-Subroutine conver :

Test de convergence pour le calcul itératif.

23-Subroutine output :

Sortie des résultats :

- Déplacements nodaux
- Efforts internes N, T, M.
- Réactions aux appuis.
- Exemple fichier de donnée

début_titre

\$

\$ essai de Low et Moehle 1987 cite par spacone

\$ console en beton arme, soumise a la flexion simple

\$ discretisation en 16 elements

fin_titre

donnees_globales

17 16 1 1 3 1 2 10 10 2

elements

1 1 1 2

2 1 2 3

3 1 3 4

4 1 4 5

5 1 5 6

6 1 6 7

7 1 7 8

8 1 8 9

9 1 9 10

10 1 10 11

11 1 11 12

12 1 12 13

13 1 13 14
14 1 14 15
15 1 15 16
16 1 16 17

coordonnees

1 0. 0.
2 32.124 0.
3 64.248 0.
4 96.372 0.
5 128.496 0.
6 160.62 0.
7 192.744 0.
8 224.868 0.
9 256.992 0.
10 289.116 0.
11 321.24 0.
12 353.364 0.
13 385.488 0.
14 417.612 0.
15 449.736 0.
16 481.86 0.
17 514. 0.

section

1 127. 1 3 1
165. 165. 0. 127. 1
35. 283.52 2
63.5 141.76 2
92. 283.52 2
0.0053 0.0053 2 2

conditions_limites

1 111 0. 0. 0.

materiaux

1 2 33000. 0.2 42.13 40. 0.002 0.0035 3.05 0.001 1 3

2 3 200000. 0.3 447.5 500. 0.010 0. 0. 0. 0. 0.

charges

1 0

charges_nodales

1

17 0. 10000. 0.

increment

0.5 0.05 100 2

0.5 0.05 100 2

0.5 0.05 100 2

0.5 0.05 100 2

0.5 0.05 100 2

0.1 0.05 100 2

0.1 0.05 100 2

0.1 0.05 100 2

0.1 0.05 100 2

0.1 0.05 100 2