

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERRI, Tizi-Ouzou



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Automatique

Mémoire de Fin d'Etudes

En vue de l'obtention du diplôme

D'Ingénieur d'Etat en Automatique

Thème

**DISCRETISATION DES EDPs PAR LA METHODE
SPECTRALE :**

Application à l'équation d'évolution du *snake*

Proposé par : **M^{elle}. CHILALI . O**

Présenté par :

YOUSFI Aghiles

TITAH Abdenour

Dirigé par : **M^{elle} CHILALI . O**

et **M^r MAIDI . A**

Soutenu le : / /2011

Promotion 2011

REMERCIEMENTS

Tout d'abord nous remercions Dieu tout puissant qui nous a armé de courage, de volonté et surtout de patience.

Au terme de ce modeste travail,

Nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance et notre gratitude à *M^{elle}* CHILALI.O pour avoir accepté de nous encadrer, son aide, ses qualités humaines et pour tout ce que nous avons appris en travaillant avec elle.

Nous tenons aussi à remercier notre copromoteur *M^r* MAIDI.A qui nous a encadré et qui tout au long de notre travail nous a fait bénéficier de son savoir, de son aide et de ses conseils.

Que les membres de jury qui nous feront l'honneur d'évaluer notre travail puissent trouver ici l'expression de notre profonde gratitude.

Nous remercions nos familles pour leur soutien, leurs encouragements et leur présence tout au long de nos cursus universitaires.

Dedicaces

Je dédie ce modeste travail :

- ∅ A Dieu le tout puissant.
- ∅ A mes très chers parents.
- ∅ A mes chers frères et sœurs : Nassim, Lila et Djamila.
- ∅ A ma promotrice M^{elle}CHILALI.O.
- ∅ A mon copromoteur M^R MAIDI.A.
- ∅ A mon binôme AGHILES YOUSFI qui sans lui le travail n'aurait pas été fait.
- ∅ A tous mes amis et amies.
- ∅ Et a tous ceux qui me sont chers.

TITAH.ABDENOUR

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail :

Ø A mes chers parents que j'aime beaucoup, Ramdane et smina

Ø A mon frère Ibrahim

Ø A mes sœurs : Lydia et Kassia

Ø A tous mes amis

YOUSFI Aghiles

Sommaire

Sommaire

INTRODUCTION GENERALE	01
Chapitre I : Les équations aux dérivées partielles	01
I.1 Introduction	01
I.2 Définition.....	01
I.3 Classification des EDPs.....	01
I.4 Conditions aux limites et conditions initiales	03
I.4.1 Conditions aux limites	03
I.5 Résolution des équations aux dérivées partielles.....	03
I.5 .1 Approximation des EDPs	05
I.5.1.1 Méthode des différences finies	06
I.5.2 Approximation de la solution.....	08
I.5.2.1 Méthode des fonctions propres	08
I.6 Les EDPS en traitement d'image	10
I.7 conclusion.....	12
Chapitre II : Méthode spectrale	
II.1 Introduction	13
II.2 Interpolation de Lagrange	13
II.3 Méthode des différences finies	15
II.4 La méthode spectrale	17
II.5 Conclusion.....	21
Chapitre III : Les contours actifs	
III.1 Introduction.....	22
III.2 Définition et principe de fonctionnement	22
III.3 Les différents types des contours actifs	23
III.4 Etude du modèle classique(<i>snake</i>) des contours actifs	24

Sommaire

III .4.1 Formulation mathématique.....	24
III .4.2 Energie interne.....	24
III.4.3 Energie externe	25
III.4.4 Processus de minimisation	25
III.4.5 Exemple d'application.....	29
III.4.6 Implémentation classique de <i>Snake</i>	30
III.5 Conclusion	31
 Chapitre IV : Tests et résultats	
IV.1 introduction.....	32
IV.2 Implémentation	32
IV.2.1 Initialisation du contour	33
IV.2.2 Interpolation	33
IV.2.3 Reparamétrisation.....	33
IV.2.4 Critère d'arrêt	33
IV.3 Choix des paramètres de l'approche	33
IV.4 Tests et résultats	34
IV.4.1 Test 1.....	34
IV.4.2 Test 2.....	37
IV.4.3 Test 3.....	38
IV.4.4 Test 4.....	39
IV.4.5 Test 5.....	41
IV.5 Conclusion	42
 CONCLUSION GENERALE.....	44
REFERENCES BIBLIOGRAPHIES.....	

Introduction générale

L'évolution dans les domaines des mathématiques, d'informatique et des techniques de traitement, ont permis d'ouvrir une voie de développement très prometteuse vers le traitement d'images.

Les techniques du traitement d'images ont été développées avec succès, dans divers domaines, car l'objectif attendu de ce traitement est l'extraction d'informations pertinentes, sur les objets présents (leurs formes, leurs natures, dimensions, vitesse, etc.). Il s'agit donc d'un domaine très vaste qui trouve de plus en plus d'applications, notamment dans la reconnaissance d'objet, l'imagerie satellitaire, l'imagerie médicale, etc.

Cependant, malgré ces progrès significatifs, l'image reste aujourd'hui, encore, un sujet difficile et les solutions actuelles ne permettent pas, toujours, de résoudre, de manière satisfaisante, de nombreux problèmes importants.

Récemment, de nouvelles approches, regroupées sous le nom de modèles déformables, ont été proposés dans la littérature. Ces approches se limitent, généralement, sur des propriétés comme la continuité ou la régularité, qui caractérisent le contour d'un objet ; dans ce cas, on parlera plutôt de contours actifs.

Ce contour est caractérisé par une équation d'évolution qui est une équation aux dérivées partielles (EDP). Pour la résolution de cette équation il y'a différentes méthodes : soit par l'approximation de l'EDP (en utilisant la méthode des différences finies) ou bien l'approximation de la solution (par l'utilisation des fonctions propres). Récemment, de nouvelles méthodes de résolution des EDPs sont apparues portant le nom méthodes spectrales. Elles sont basées sur les différents polynômes d'interpolation comme ceux de *Sinc* ou bien de *Lagrange*.

Ainsi, notre travail consiste à appliquer une de ces méthodes spectrale pour la résolution de l'équation d'évolution d'un contour actif. Pour mener à bien notre travail, nous l'avons répartis sur les quatre chapitres suivants :

Le chapitre 1 : présentera des notions sur les équations aux dérivées partielles on commençant par leur définition ainsi les différentes conditions aux limites est on termine le chapitre par la résolution d'une EDP par les différentes méthodes.

Le Chapitre 2 : dans ce chapitre nous étudierons la méthode de résolution des équations aux dérivées partielles qui est la méthode spectrale, ainsi que le polynôme de Lagrange.

Le chapitre 3 : dans ce chapitre, nous allons présenter une étude détaillée sur les contours actifs, en se basant sur le modèle classique (*snake*). Nous verrons, aussi, la résolution de l'équation d'évolution, par la méthode des différences finies puis par la méthode spectrale.

Chapitre 4 : contient les différents tests effectués, les résultats obtenus et leurs interprétations. Nous ferons une comparaison entre l'application des différences finies et la méthode spectrale.

Ce mémoire se terminera par une conclusion générale permettant de rappeler le travail réalisé et d'éventuelles perspectives.

Chapitre I

I.1 Introduction

Ce chapitre présente des notions sur les équations aux dérivées partielles qu'on notera en abrégé les EDP.

Les notions présentées dans ce chapitre concernent la définition d'une EDP, la classification des EDP, les conditions aux limites et les conditions initiales et la résolution des EDP par l'approximation des équations. Dans notre cas, on se limitera à la résolution par la méthode des différences finies.

I.2 Définition

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation faisant intervenir une fonction inconnue de plusieurs variables ainsi que certaines de ses dérivées partielles.

On appelle ordre d'une EDP l'ordre de la plus grande dérivée présente dans l'équation. Une EDP est linéaire si l'équation est linéaire par rapport aux dérivées partielles de la fonction inconnue [1].

I.3 Classification des EDP

On distingue des EDP linéaires et des EDP non linéaires. Les EDP linéaires ne contiennent aucun produit de variable avec elle même ou une de ses dérivées alors que les EDP non linéaires peuvent en posséder [2]. Par exemple :

L'équation de propagation d'ondes suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{I.1})$$

est linéaire, par contre l'équation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{I.2})$$

est non linéaire

Nous nous limitons, dans notre cas, aux EDP du second ordre linéaire à coefficients constants et à deux variables indépendantes x , t (variables d'espace ou temporelle) dont la forme générale s'écrit:

$$a \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f(x, t) \quad (\text{I.3})$$

Où $u(x, t)$ est la fonction recherchée.

On distingue alors 3 classes d'EDP :

I.3.1 Equation elliptique

Si $b^2 - 4ac < 0$

Exemple :

L'équation de Laplace ou de Poisson.

$$\Delta u = f(x, t) \quad (\text{I.4})$$

I.3.2 Equation parabolique

Si $b^2 - 4ac = 0$ (I.5)

Exemple :

Équation de diffusion de la chaleur.

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (\text{I.6})$$

I.3.3 Équation hyperbolique

Si $b^2 - 4ac > 0$

Exemple :

Équation de propagation d'une onde.

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (\text{I.7})$$

I.4 Condition aux limites et condition initiales

On appelle problème aux limites une équation aux dérivées partielles munie de conditions aux limites sur la totalité de la frontière du domaine sur lequel elle est posée.

Le problème est bien posé si pour toute donnée (second membre, domaine, données au bord, etc.), il admet une solution unique et si cette solution dépend continument de la donnée.

1.4.1 Condition aux limites

En mathématiques, une condition aux limites est imposée à une équation différentielle ou à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs des dérivées que la solution doit vérifier sur les frontières ou limites du domaine. Il existe plusieurs types de conditions aux limites parmi les quelles on peut citer les plus rencontrées :

- Conditions aux limites de Dirichlet.
- Conditions aux limites de Neumann.
- Conditions aux limites de Fourier (ou Robin).
- Conditions aux limites mixtes (mêlées).
- Conditions aux limites de Danckwerts.

∅ Dans ce chapitre, on va étudier les conditions aux limites de Dirichlet, Neumann, et mixtes :

Condition aux limites de type Neumann :

Exemple :

$$\begin{cases} \frac{\partial x(0,t)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial x(1,t)}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Condition aux limites de type Dirichlet :

1. Les conditions aux limites de Dirichlet ou la valeur de la variable sont prescrites sur la frontière ou sur une partie de celle-ci :

$$u(x \in \partial\omega, t) = g(x, t).$$

Si $g = 0$, on obtient une condition de Dirichlet homogène. Les conditions aux limites de Dirichlet permettent par exemple de fixer un déplacement ou d'imposer la température T à la surface d'un corps à une valeur $T_0(x, t)$.

On précise que T_0 peut être fonction du temps et de l'espace.

2. Les conditions aux limites de Neumann où l'on fixe la valeur du gradient de la variable dans la direction normale à la frontière :

$$\nabla u_n \frac{\partial u}{\partial N} = g$$

Cette condition permet par exemple d'imposer un flux de chaleur sur une partie du domaine. Si $g = 0$, on obtient la condition de Neumann homogène. Cette condition représente un flux nul, mais il est également utile pour représenter une symétrie de la solution ou une condition de sortie libre peut être également fonction du temps et du point du domaine de calcul.

On peut étendre cette condition au cas vectoriel et par exemple imposer des contraintes sur la frontière pour un corps élastique :

$$\sigma(x \in \partial\omega, t). n(x) = f(x).$$

3. Les conditions limites de Robin ou Fourier ou mixtes font intervenir une combinaison des deux conditions précédentes :

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + b \cdot u = g$$

Elles les généralisent. Les conditions de Dirichlet et de Neumann sont des cas particuliers. Ces conditions de Fourier permettent de représenter les flux en fonction des valeurs de la variable sur la frontière. Elles sont très utiles en modélisation. Elles permettent, par exemple en thermique, de modéliser un échange convectif sur une paroi, en mécanique des fluides, de modéliser l'effet d'une paroi sur l'écoulement ou bien en propagation d'ondes de modéliser les effets d'un matériau absorbant.

I.5 Résolution des équations aux dérivées partielles

I.5.1 Approximation des équations aux dérivées partielles

Pour la résolution de l'équation aux dérivées partielles, on utilise soit l'approximation de l'équation d'où l'utilisation des méthodes de discrétisation suivantes [3] :

Dans le cas de l'approximation de l'équation, on utilise la méthode suivante :

- Les différences finies.

Ou bien l'approximation de la solution de l'équation aux dérivées partielles d'où l'utilisation des méthodes suivantes :

- La méthode des fonctions propres ou la méthode des résidus pondérés.

Les méthodes d'approximation de l'équation :

Examinons rapidement les avantages et les inconvénients de chacune de ces méthodes :

Différence finies :

La méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans le problème continu par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage.

ü **Avantages :** grande simplicité d'écriture et faible cout de calcul.

ü **Inconvénients :** Limitation de la géométrie des domaines de calculs, difficultés de prise en compte des conditions aux limites portant sur les dérivées ou les gradients de la variable inconnue. En général il n'y a pas de résultats de majoration d'erreurs.

Éléments finis :

La méthode des éléments finis consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle (comme minimisation de l'énergie, en général) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points (les nœuds du maillage).

Ü Avantages : traitement possible de géométrie complexes, détermination plus naturelle des conditions aux limites possibilité de démonstration mathématiques de convergence et de majoration d'erreurs.

Ü Inconvénients : Complexité de mise en œuvre et de cout en temps de calcul et en mémoire.

Volumes finis :

La méthode intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatives.

Ü Avantages : permet de traiter des géométries complexes avec des volumes de forme quelconque, détermination plus naturelle des conditions aux limites de type Neumann.

Ü Inconvénient : peu de résultats théoriques de convergence existent.

Dans ce mémoire, on se limite à l'utilisation de la méthode des différences finis :

1.5.1.1 Méthode des différences finies

Dans le domaine de l'analyse numérique, on peut être amené à rechercher la solution d'une équation aux dérivées partielles.

Parmi les méthodes de résolutions couramment pratiquées, la méthode des différences finies est la plus facile d'accès. Elle est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18ème siècle (Euler, Taylor, Leibniz...)[4].

Exemple 1 :

Pour illustrer la méthode des différences finies, considérant l'équation suivante :

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2}, z \in [0,1]. \quad (\text{I.8})$$

Avec les conditions aux limites de type Neumann :

$$\begin{cases} \frac{\partial x(0,t)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial x(1,t)}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

La condition initiale est

$$x(z, 0) = x_0(z) \tag{I.10}$$

Décomposons le domaine d'espace $[0,1]$ en N intervalles égaux, correspondant à un pas de discrétisation $\Delta z = \frac{1}{N}$.

Et par définition de la dérivée

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial z} = \frac{x(z_{i+1},t) - x(z_i,t)}{\Delta z} \tag{I.11}$$

Pour les frontières, on utilisant le développement de Taylor, on aura :

Pour $i=0$

$$\frac{\partial x(z_0,t)}{\partial z} = \frac{-3x(z_0,t) + 4x(z_1,t) - x(z_2,t)}{2\Delta z} = 0 \tag{I.12}$$

D'où

$$x(z_0, t) = \frac{4}{3} x(z_1, t) - \frac{1}{3} x(z_2, t) \tag{I.13}$$

Pour $i=N$

$$\frac{\partial x(z_N,t)}{\partial z} = \frac{3x(z_N,t) - 4x(z_{N-1},t) + x(z_{N-2},t)}{2\Delta z} = 0 \tag{I.14}$$

D'où

$$x(z_N, t) = \frac{4}{3} x(z_{N-1}, t) - \frac{1}{3} x(z_{N-2}, t) \tag{I.15}$$

La dérivée seconde est approximée par différences finies centrées :

$$\frac{\partial^2 x(z_i,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{2(\Delta z)^2} [x(z_{i+2},t) - 2x(z_i,t) + x(z_{i-2},t)] \tag{I.16}$$

On remplace dans (I.8)

$$\text{Posant } x(z_i, t) = T_i$$

d'où

$$\dot{T}_i = \frac{1}{2(\Delta z)^2} [T_{i+2} - 2T_i + T_{i-2}] \tag{I.17}$$

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \\ \vdots \\ \dot{T}_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{N-1} \end{bmatrix} \quad (I.18)$$

La méthode des différences finies utilisée est celle de la semi-discrétisation car seul la variable d'espace qui est décomposée, et on a obtenue un système d'équations différentielles ordinaires.

1.5.2 Approximation de la solution de l'équation aux dérivées partielles :

Pour l'approximation de la solution de l'équation aux dérivées partielles, on utilise soit la méthode des fonctions propres ou la méthode des résidus pondérés.

1.5.2.1 Méthode des fonctions propres :

Cette méthode se traduit par la séparation des variables de l'espace et du temps lorsque les fonctions propres et valeurs propres de l'opérateur différentiel spatial de l'équation $\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = A(x(z,t)) + B(u(z,t)), t \in T \text{ et } Z \in \text{Espace}$ sont calculables.

Exemple :

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2} + u(z,t), z \in [0,1] \quad (1.19)$$

$$u(z,t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \tilde{b}_j(t) \phi_j(z) \quad (I.20)$$

$$x(z,t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \tilde{a}_j(t) \phi_j(z) \quad (I.21)$$

Cette méthode permet d'aboutir à un modèle mathématique très simplifié. L'exemple montre les principales étapes de simplification.

Exemple :

Appliquant cette méthode sur l'équation (1.19) :

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2}, z \in [0,1]. \quad (I.22)$$

Les équations (1.20) et (1.21) donnent :

$$x(z,t) = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j(t) \phi_j(z) \quad (I.23)$$

$$u(z,t) = \sum_{j=1}^n \tilde{b}_j(t) \phi_j(z) \quad (I.24)$$

On remplace (I.23) et (I.24) dans (I.22)

$$\frac{\partial \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j(t) \phi_j(z)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j(t) \phi_j(z)}{\partial z^2} + \tilde{b}_j(t) \phi_j(z) \quad (I.25)$$

Pour $k=1 \dots n$

$$\phi_k(z) \frac{\partial \tilde{a}_k(t)}{\partial t} = \tilde{a}_k(t) \frac{\partial^2 \phi_k(z)}{\partial z^2} + \tilde{b}_k(t) \phi_k(z) \quad (I.26)$$

divisant par $\tilde{a}_k(t) \times \phi_k(z)$

$$\frac{1}{\tilde{a}_k} \frac{\partial \tilde{a}_k(t)}{\partial t} = \frac{1}{\phi_k(z)} \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial z^2} + \frac{\tilde{b}_k(t)}{\tilde{a}_k(t)} \quad (I.27)$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{1}{\tilde{a}_k} \frac{d\tilde{a}_k(t)}{dt} - \frac{\tilde{b}_k(t)}{\tilde{a}_k(t)} = -\lambda_k \\ \frac{d^2 \phi_k}{dz^2} = -\phi_k(z) \lambda_k \end{cases} \quad k=1 \dots n \quad (I.28)$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{a}_k(t)}{dt} + \tilde{a}_k(t) \lambda_k = \tilde{b}_k(t) \\ \frac{d^2 \phi_k}{dz^2} + \phi_k(z) \lambda_k = 0 \end{cases} \quad (I.29)$$

tel que λ_k et $\phi_k(z)$ sont les valeurs propres et les fonctions propres respectivement de l'opérateur différentiel spatial et le calcul de ces deux dernières se fait par la résolution de la deuxième équation différentielle (I.29)

la solution est donc

$$\begin{cases} \phi_k(z) = \sqrt{2} \cos k\pi z \\ \lambda_k = k^2 \pi^2 \end{cases} \quad k=1 \dots n \quad (I.30)$$

de (I.29), on a

$$\frac{d\tilde{a}_k(t)}{dt} + \tilde{a}_k(t) \lambda_k = \tilde{b}_k(t) \Rightarrow \frac{d\tilde{a}_k(t)}{dt} = -\lambda_k \tilde{a}_k(t) + \tilde{b}_k(t) \quad (I.31)$$

Donc le modèle de (1.20) est sous la forme suivante :

$$\dot{a}_n(t) = Aa_n(t) + \tilde{b}_k(t) \tag{I.32}$$

tel que

$A = -\lambda_n I_{n \times n}$ Matrice d'état diagonale formée par les valeurs propres λ_n .

et sous la forme matricielle le système s'écrit comme suit :

$$\dot{a}_n(t) = \begin{bmatrix} -\pi^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -4\pi^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -n^2\pi^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \tag{I.33}$$

I.6 Les EDP en traitement d'image

La première EDP a avoir été utilisée en traitement d'image est certainement l'équation de chaleur. Il s'agit d'une EDP parabolique.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u(t, x) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) * S \end{cases} \tag{I.34}$$

L'introduction de cette équation provient de la remarque suivante :

Si u_0 la donnée initiale est suffisamment régulière, la solution explicite (I.34) est donnée par :

$$u(t, x) = \int G_{\sqrt{2t}}(x - y)u_0 dy = (G_{\sqrt{2t}} * u_0)x \tag{I.35}$$

Où G_σ désigne le noyau Gaussien en dimension 2 :

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right) \tag{I.36}$$

L'opérateur de convolution par un noyau positif est une opération de base en traitement d'image. Cela correspond à un filtrage passe-bas.

Les EDPs font leur apparition dans beaucoup d'autres types de traitement d'images tel que la restauration d'image, la segmentation, etc.

On trouve, essentiellement, les EDPs dans une méthode récente de segmentation d'image qui est les contours actifs, ces dernières possèdent une fonction d'évolution permettant au contour initial d'évoluer pour envelopper le contour de l'objet à détecter (Fig.I.1 et Fig.I.2)

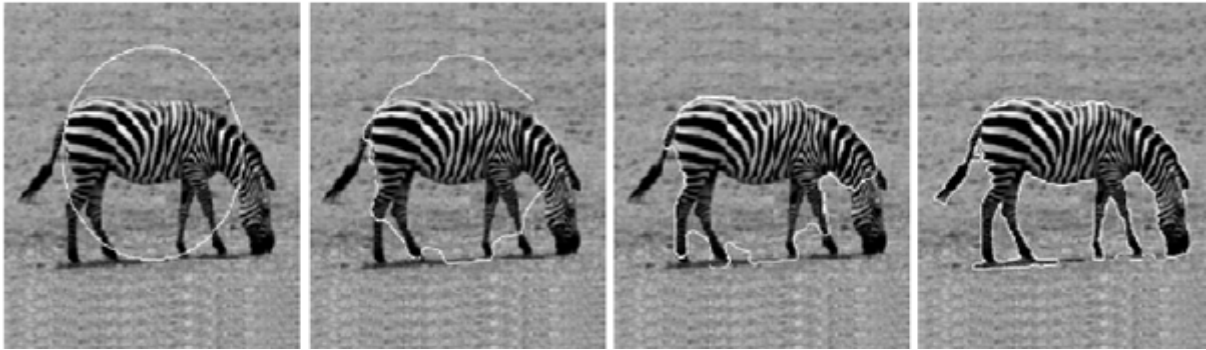


Fig.I.1 Evolution d'un contour actif basé EDP pour détecter la forme du zèbre [8].

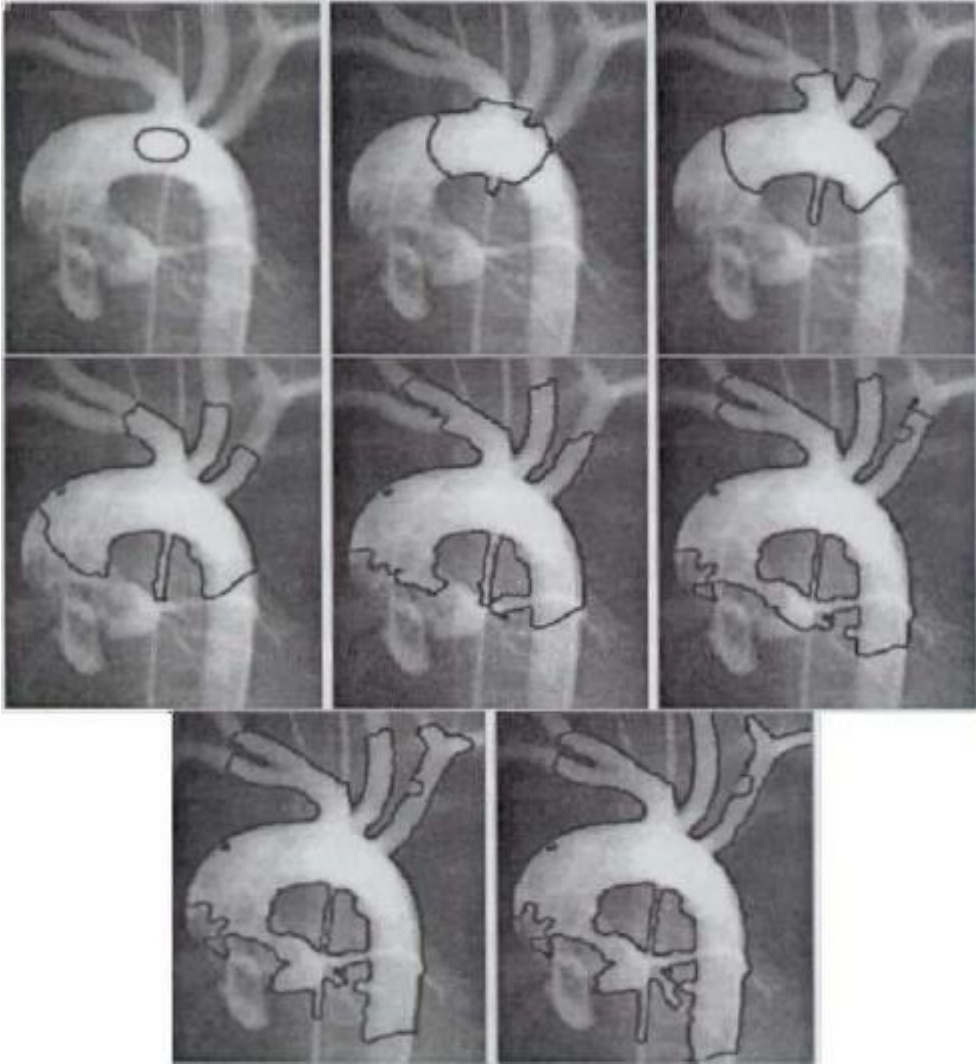


Fig.I.2 Evolution d'un contour actif basé sur les EDP vers les arcs aortiques et les vaisseaux sanguins [8].

I.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé les différentes notions relatives aux équations aux dérivées partielles, et les différentes méthodes utilisés pour la résolution de ce type d'équations tel que : la méthode d'approximation de l'équation et la méthode d'approximation de la solution de l'équation aux dérivées partielles. Nous avons, aussi, pu aborder les EDPs en traitement d'images.

Le chapitre suivant est consacré à une autre méthode de résolution des équations aux dérivées partielles, qui est la méthode spectrale.

Chapitre II

II.1 Introduction

Parmi les nombreuses méthodes utilisées pour la résolution (par discrétisation) des équations aux dérivées partielles on trouve les méthodes spectrales développées par D. Gottlieb et S. Orszag dans les années 1970 offrent une grande précision à moindre coût de calcul. Elles reposent sur l'approximation des solutions d'équation aux dérivées partielles par des séries de Fourier tronquées ou par des polynômes de haut degré élevé. Ces méthodes assurent une bonne précision, au sens où l'ordre de l'erreur entre les solutions des problèmes continu et discret n'est limité que par la régularité de la solution continue.

Les méthodes spectrales font appel à des séries de Fourier uniquement pour traiter des conditions aux limites périodiques dans une ou plusieurs directions. L'approximation par des polynômes fait appel à des bases de polynômes orthogonaux. Souvent ceux de Tchebyshev ou Legendre (bien que ceux de Tchebyshev présentent des difficultés d'analyse mathématique).

Ce chapitre on est consacré aux méthodes des différences finies et spectrales.

II.2 Interpolation de Lagrange :

L'interpolation de Lagrange est une façon simple et systématique de construire un polynôme de collocation[5]. Etant donné $(n+1)$ points $((x_i, f(x_i)))$ pour $i=0, 1, 2, \dots, n$, on suppose un instant que l'on sait construire $(n+1)$ polynômes $L_i(x)$ de degré n et satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} L_i(x_i) = 1 \quad \forall i \\ L_i(x_j) = 0 \quad \forall j \neq i \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Cela signifie que le polynôme $L_i(x)$ de degré n prend la valeur 1 en x_i et s'annule à tous les autres points de collocation. Nous verrons après comment construire les $L_i(x)$. Dans ces conditions, la fonction $L(x)$ définie par :

$$L(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x) \quad (\text{II.2})$$

est un polynôme de degré n , car chacun des $L_i(x)$ est de degré n . De plus, ce polynôme passe par les $(n+1)$ points de collocation et c'est donc le polynôme recherché. En effet, il est facile de montrer que selon les conditions (II.1):

$$\begin{aligned}
 (x_j) &= f(x_j)L_j(x_j) + \sum_{i=0, j \neq i}^n f(x_i)L_i(x_j) \\
 &= f(x_j) + 0 = f(x_j) \quad \forall j
 \end{aligned}
 \tag{II.3}$$

Le polynôme $L(x)$ passe donc par tous les points de collocation. Puisque ce polynôme est unique, $L(x)$ est bien le polynôme recherché. Il reste à voir comment construire les fonctions $L_i(x)$.

Polynôme de degré 1 :

Il s'agit de déterminer le polynôme de degré 1 dont la courbe (une droite) passe par les deux points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$. On doit donc construire deux polynômes $L_0(x)$ et $L_1(x)$ de degré 1 qui vérifient :

$$\begin{cases} L_0(x_0) = 1 \\ L_0(x_1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L_1(x_0) = 0 \\ L_1(x_1) = 1 \end{cases}
 \tag{II.4}$$

Le polynôme $L_0(x)$ doit s'annuler en $x = x_1$. On pense immédiatement au polynôme $(x - x_1)$ qui s'annule en $x = x_1$, mais qui vaut $(x_0 - x_1)$ en $x = x_0$, il suffit d'effectuer la division appropriée à fin d'obtenir :

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}
 \tag{II.5}$$

Un raisonnement similaire pour $L_1(x)$ donne :

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}
 \tag{II.6}$$

Polynôme de degré n :

On analyse le cas général de la même façon $L_0(x)$ doit s'annuler en $x = x_1, x_2, \dots, x_n$. Il faut donc introduire la fonction :

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)$$

Qui vaut :

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \dots (x_0 - x_n)$$

En $x = x_0$. On a alors, après division :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\dots(x_0-x_n)}
 \tag{II.7}$$

On remarque qu'il y a n facteur de la forme $(x - x_j)$ dans cette expression et qu'il s'agit bien d'un polynôme de degré n . Pour la fonction $L_1(x)$, on pose :

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} \quad (\text{II.8})$$

On note l'absence du terme $(x - x_1)$. L'expression générale pour la fonction $L_i(x)$ est donc :

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \quad (\text{II.9})$$

Où cette fois seule le facteur $(x - x_i)$ est absent. $L_i(x)$ est donc un polynôme de degré n qui vaut 1 en $x = x_i$ et qui s'annule à tous les autres points de collocation. On peut maintenant résumer la situation pour $(n + 1)$ points d'interpolation $((x_i, f(x_i)))$ pour i égale $(0, 1 \dots, n)$, l'unique polynôme d'interpolation de degré n passant par tous ces points peut s'écrire :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x) \quad (\text{II.10})$$

Où les $(n + 1)$ fonctions $L_i(x)$ sont définies par la relation (II.9). C'est la formule de Lagrange.

II.3 Méthode des différences finies

Lorsque les points sont équidistants, les différences divisées deviennent des «différences finies» [7] :

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} \quad (\text{II.11})$$

Où h est la valeur commune des quantités $x_{i+1} - x_i$. Si on définit par récurrence :

$$\nabla f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) \text{ et } \nabla^k f_i = \nabla(\nabla^{k-1} f_i) = \nabla^{k-1} f_{i+1} - \nabla^{k-1} f_i, \quad (\text{II.12})$$

On a des formules plus simples :

$$\nabla^k f_i = f[x_i, \dots, x_{i+k}] k! h^k \quad (\text{II.13})$$

et :

$$p_n(x) = f_0 + s\nabla f_0 + s(s-1)\nabla^2 f_0 + \dots + \frac{s(s-1)\dots(s-(n+1))}{n!} \nabla^n f_0 \quad (\text{II.14})$$

Où :

$$s = \frac{x-a}{h} \text{ avec } h = \frac{b-a}{n} \quad (\text{II.15})$$

$$(0 \leq s \leq n)$$

En effet :

$$\begin{aligned} (x - x_0) \dots (x - x_k) &= sh(sh - h)(sh - 2h) \dots (sh - kh) \\ &= s(s-1)(s-2) \dots (s-k)h^{k+1} \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Différences finie avec le polynôme de Lagrange

$$p(x) = y_{i-1} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2h^2} + y_i \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{-2h^2} + y_{i+1} \frac{(x-x_i)(x-x_{i-1})}{2h^2} \quad (\text{II.17})$$

$$p'(x) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad (\text{II.18})$$

$$p''(x) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{2h} \quad (\text{II.19})$$

II.4 La méthode spectrale

L'idée des méthodes spectrales est similaire à celle de l'utilisation des polynômes de Lagrange pour la détermination des schémas de discrétisation dans le cas des différences finies. On a vu qu'en construisant un polynôme d'ordre n et en faisant des dérivées d'ordre n à des points bien déterminés, on peut facilement déterminer les formules de discrétisation.

Le raisonnement est le même pour les méthodes spectrales où le polynôme à utiliser est obtenu en considérant des notions relatives à l'analyse et synthèse de Fourier.

En analyse de Fourier, un domaine physique discret (non borné) défini par $x \in h\mathbb{Z}$ a son équivalent en espace de Fourier continu (borné) défini par $k \in [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$. Pour la différentiation spectrale, le polynôme d'interpolation est défini comme suit :

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{ikx} \hat{f}(k) dk, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{II.20})$$

$$\hat{f}(k) = h \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{-ikx_j} f(x_j), \quad k \in [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}] \quad (\text{II.21})$$

Cette dernière représente la transformée de Fourier semi discrète.

Comme exemple illustratif, considérons la détermination du polynôme d'interpolation de la fonction de Dirac définie comme suit :

$$\delta_j(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \ (j = 0) \\ 0 & x \neq 0 \ (j \neq 0) \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

et on considère que $x = hj$ avec h est le pas de discrétisation.

La transformée de Fourier semi discrète de la fonction de Dirac obtenu en utilisant (II.21) est :

$$\hat{\delta}(k) = h \quad k \in [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}] \quad (\text{II.23})$$

Par conséquent, d'après la relation (II.20), le polynôme d'interpolation pour cette fonction (ou qui approxime cette dernière) est :

$$p(x) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{ikx} dk = \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{h}\right)}{\frac{\pi x}{h}} = \text{sinc}\left(\frac{\pi x}{h}\right) \quad (\text{II.24})$$

Cette fonction est le sinus cardinal.

Maintenant pour une fonction de Dirac translatée à un point $x_m = hm$, c'est-à-dire :

$$\delta_{j-m} = \begin{cases} 1 & x = x_m, \quad (j=m) \\ 0 & x \neq x_m, \quad (j \neq m) \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

On peut démontrer facilement que le polynôme d'interpolation pour cette fonction est donné comme suit :

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi(x-x_m)}{h}\right)}{\frac{\pi(x-x_m)}{h}}$$

Ainsi, de manière générale, on peut déterminer le polynôme d'interpolation de n'importe quelle fonction.

Maintenant, une fonction mathématique $f(x)$ quelconque peut être écrite sous la forme suivante.

$$f(x_j) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x_m) \delta_{j-m}(x) \quad (\text{II.26})$$

En utilisant la propriété de linéarité de la transformée de Fourier semi discrète, et en tenant de compte de développement précédent, on peut directement déduire le polynôme d'interpolation (ou qui approxime la fonction $f(x)$) comme une combinaison linéaire de sinus cardinal comme suit :

$$p(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x_m) \frac{\sin\left(\frac{\pi(x-x_m)}{h}\right)}{\pi(x-x_m)/h} \quad (\text{II.27})$$

Par conséquent on peut déterminer les points des schémas d'application de la dérivée $f(x)$ comme suit :

$$\dot{p}(x_j) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x_m) \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi(x-x_m)}{h}\right)}{\pi(x-x_m)/h} \right)', \quad x = x_j \quad (\text{II.28})$$

Par exemple pour approximer la première dérivée d'une fonction $f(x)$ au point x_1 en considérant trois points équidistants x_0, x_1 et x_2 , d'après (II.28) on a :

$$\begin{aligned} \dot{f}(x_1) = p(x_1) = f(x_0) & \left[\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi(x-x_0)}{h}\right)}{\frac{\pi(x-x_0)}{h}} \right)' \right]_{x=x_1} + f(x_1) \left[\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi(x-x_1)}{h}\right)}{\frac{\pi(x-x_1)}{h}} \right)' \right]_{x=x_1} \\ & + f(x_2) \left[\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi(x-x_2)}{h}\right)}{\frac{\pi(x-x_2)}{h}} \right)' \right]_{x=x_1} \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

Une autre manière plus simple les calculs, on calcule la dérivée désirée en considérons $x_m = x_0$ ce qui permet de déduire directement le schéma de discrétisation, puis pour retrouver les autres, on fait un décalage. Reprenons, l'exemple précédant et considérons que $x_0 = 0, x_1 = h, \text{ et } x_2 = 2h$, alors

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{h}\right)}{\pi x/h} \right)' \text{ pour } x = jh \text{ on aura } \begin{cases} 0, j = 0 \\ -\frac{1}{ih^2}, j \neq 0 \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

Ce qui donne :

$$\dot{f}(x_0) = f(x_0) \times 0 + f(x_1) \times \frac{1}{h^2} + f(x_2) \times \left(\frac{1}{2h^2}\right). \quad (\text{II.31})$$

Donc sous forme matricielle, il vient :

$$\dot{f}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{h^2} & -\frac{1}{2h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

De la même manière, on peut déduire en faisant un décalage

$$\dot{f}(x_1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h^2} & 0 & -\frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix} \quad (\text{II.33})$$

Et ainsi de suite, donc on peut écrire la dérivée sous la forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{f}(x_0) \\ \dot{f}(x_1) \\ \dot{f}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{h^2} & -\frac{1}{2h^2} \\ -\frac{1}{h^2} & 0 & -\frac{1}{h^2} \\ -\frac{1}{2h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix} \quad (\text{II.34})$$

Dans le cas des différences finies avec un schéma centrée a trois points, on retrouve

$$\begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{h^2} & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix} \tag{II.35}$$

Exemple de calcul de la deuxième dérivée : $S_N = \frac{\sin(\frac{\pi x}{h})}{(\frac{2\pi}{h})\tan(\frac{x}{2})}$

$$S_N'' = \begin{cases} -\frac{\pi^2}{3h^2} - \frac{1}{6} & j = 0 \\ -\frac{(-1)^j}{2 \sin(\frac{jh}{2})^2} & j \neq 0 \end{cases} \tag{II.36}$$

$$\ddot{D} = \frac{(\frac{h}{2})^2 + \frac{1}{2}}{h \tan(\frac{h}{2})^2} - \frac{2(\frac{h}{2})^2 + \frac{1}{2}}{h \tan(h)^2} + \frac{3(\frac{3h}{2})^2 + \frac{1}{2}}{h \tan(\frac{3h}{2})^2} - \frac{4(\frac{2h}{2})^2 + \frac{1}{2}}{h \tan(2h)^2} + \frac{5(\frac{5h}{2})^2 + \frac{1}{2}}{h \tan(\frac{5h}{2})^2} \tag{II.37}$$

Exemple

Différentiation spectrale d'une fonction rugueuse et d'une fonction lisse

$$f(x) = e^{\sin x} \tag{II.38}$$

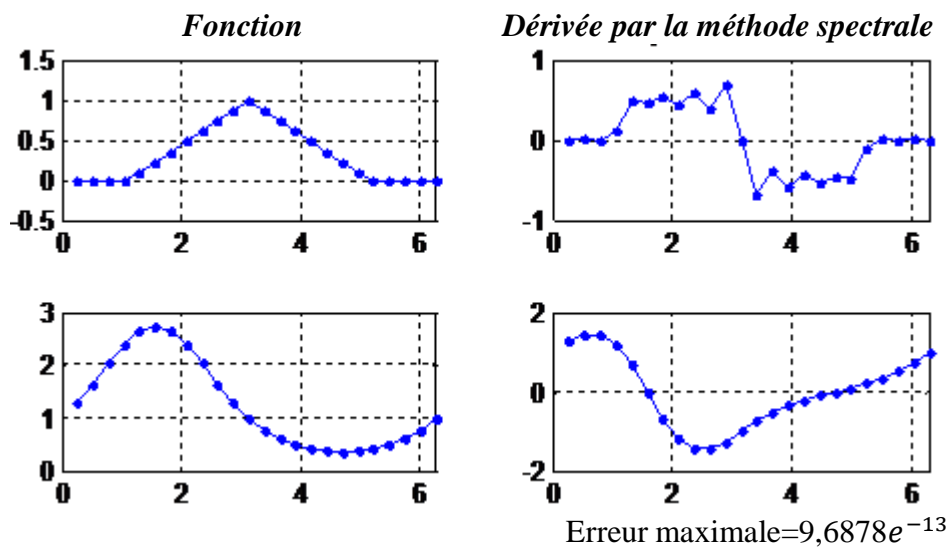


Fig. II.1. différentiation spectrale d'une fonction rugueuse et d'une fonction lisse

Interprétation de la figII.1

La figure illustre l'utilisation de f pour la différentiation spectrale de la fonction dérivée, et la fonction primitive. L'exactitude de la fonction dérivée est insuffisante, parce que la fonction n'est pas lisse, mais l'exactitude de la fonction primitive est remarquable.

II.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a montré comment peut-on déterminer les approximations algébriques des dérivées mathématiques (schémas de discrétisation) en se basant sur les polynômes d'interpolation. Dans le cas des différences, on a utilisé le polynôme de Lagrange. Dans le cas de la méthode spectrale, l'analyse de Fourier a été considérée pour définir un polynôme d'interpolation. Les différentes méthodes ont été illustrées par des exemples d'application.

Chapitre III

III.1 Introduction

Le contour actif, également connu sous le nom de modèle déformable, surface active, Contour et surface déformable, est une courbe, une surface, ou un objet géométrique de dimension supérieure, qui est positionné, initialement, par l'utilisateur et qui se déplace sous certaines contraintes, jusqu'à converger vers une solution plausible du problème considéré.

Cette méthodologie a plusieurs caractéristiques remarquables. Elle est très polyvalente à travers le choix d'une représentation de forme, et l'élaboration de l'équation d'évolution. De ce fait, elle peut être appliquée à de multiples types de données d'entrée (image bidimensionnelles, tridimensionnelles, etc.), et a un large spectre de problème. Elle fut initialement proposée pour la segmentation d'image par *Kass, Witkin et Terzopoulos en 1988*, mais elle s'est révélée efficace dans les nombreux autres contextes (en traitement d'images, vision par ordinateur, etc.).

Ainsi, dans ce chapitre, nous allons revoir toutes les notions concernant les contours actifs en accentuons sur la discrétisation de l'équation d'évolution du modèle initiale des contours actif : le *snake* par les différences finis.

III.2 Définition et principe de fonctionnement

Un contour actif est un ensemble de points qui se déplacent pour épouser une forme. L'idée de base est de faire évoluer une courbe initiale, définie par l'utilisateur, en direction des bords des objets à détecter (Fig. III.1) [11].

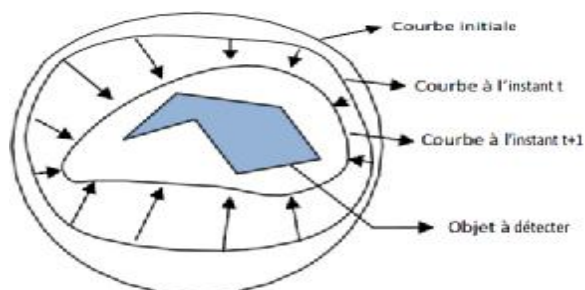


Fig. III.1 Principe des contours actifs.

Le principe de fonctionnement des contours actifs est de faire évoluer, dans l'image, les points du contour Jusqu'à ce qu'il converge vers les zones de fort gradient, tout en conservant des caractéristiques comme la courbure du contour, la répartition de ces points ou d'autres contraintes liées à la disposition de ces points.

Au démarrage de l'algorithme, le contour est disposé uniformément autour de l'objet à détecter puis il va se rétracter pour en épouser au mieux sa forme. De la même manière, un contour actif peut aussi se dilater et tenter de remplir une forme, il sera alors situé à l'intérieur de celle-ci au démarrage de l'algorithme. L'algorithme s'arrêtera lorsqu'il ne sera plus possible d'améliorer le positionnement (critère de déformation est constant ou inférieur à un seuil entre deux itérations successives), ou simplement quand le nombre maximum d'itérations aura été atteint.

On notera qu'il existe trois formes de contours actifs couramment utilisés (Fig. III.2) :

- Les contours actifs fermés : le point de départ est celui de l'arrivée.
- Les contours actifs ouverts à extrémités libres : tous les points sont susceptibles de bouger.
- Les contours actifs ouverts à extrémités fixes : le point de départ et d'arrivée sont fixes dans le temps ainsi que les dérivées premières en ces points.

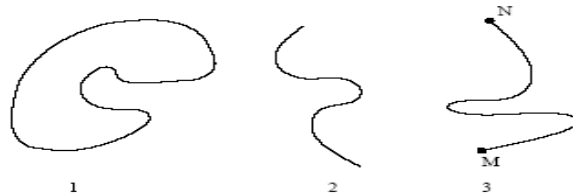


Fig. III.2 Formes de contours actifs.

III.3 Les différents types des contours actifs

Le premier modèle des contours actifs a été proposé par *Kass et al.* En 1988 [11]. Il est nommé le *snake*. Le nom du *snake* lui a été donné à cause de l'apparence de l'évolution du contour. Son principe consiste en l'initialisation d'une courbe, fermée ou non, à proximité des frontières de l'objet à détecté. Cette courbe C , se déplace selon un processus itératif de déformation, contrôlé par un test de convergence. Ainsi, le contour est défini par l'expression mathématique suivante:

$$C(s) \equiv \{v(s)\} = \{x(s), y(s); 0 \leq s \leq 1\} : R^2 \rightarrow R^2 \quad (\text{III.1})$$

Avec : s l'abscisse curviligne et $v(s)$ la position d'un point sur la courbe.

Ensuite, viennent les *contours actifs géométriques*, qui découlent d'une approche dite approche eulérienne, différente de celle de *snake* (classique). Ils sont basés sur la théorie de l'évolution des courbes planes et des équations aux dérivées partielles (EDPs) géométriques. Ces modèles définissent, implicitement, les courbes et les surface comme un ensemble de niveau d'une fonction de plus haute dimension. Le contour est considéré comme une ligne de niveau zéro d'une surface. Ils sont proposés par *Caselles* en 1993 [12].

Le modèle du *contour actif géodésique* a été proposé par *Caselles et al.* En 1997 [3] immédiatement après le contour actif géométrique. Il a « réconcilié » l'approche du *snake* et celui par évolution de courbes. Dans ce modèle, résoudre le problème du contour actif est équivalent à chercher un chemin de distance minimale, appelé *courbe géodésique* [3].

Ces trois types de contours actifs ont été séparées par l'approche employée pour représenter la courbe. Cependant, une autre répartition des contours actifs existe. Elle concerne les forces utilisées pour faire évoluer un contour actif dans une image. Elles sont très diverses et dépendent des caractéristiques de l'objet et du type d'image étudiée [4]. Il est possible de classer ces forces en deux groupes, suivant qu'elles agissent uniquement sur l'information contour ou qu'elles prennent en compte l'information région.

La famille des contours actifs basés contours s'intéresse aux informations concernant les contours des objets. On trouve principalement, le premier modèle de contours actifs, en l'occurrence le *snake* et tous ses dérivés tel le *snake GVF* [13]. Tandis que la famille des contours actifs basés région, s'intéresse aux informations tirées de la surface (la région) des objets. On retrouve dans cette famille le contour actif de *Chan et Vese* [12] par exemple.

III.4 Etude du modèle classique (snake) des contours actifs

III.4.1 Formulation mathématique

Le contour actif peut être décrit par une courbe C, fonction de temps t et de l'abscisse curviligne s, par la généralisation de l'équation (III.1) :

$$\begin{aligned} v: \Omega = [0, 1] &\rightarrow R^2 \\ s \rightarrow C(s) \equiv \{v(s)\} &= (x(s, t), y(s, t)) \end{aligned} \quad (III.2)$$

Avec : $v(s, t)$ est la position d'un point de la courbe à un instant t et (x, y) sont les coordonnées cartésiennes d'un point de l'image (Fig. III.3)

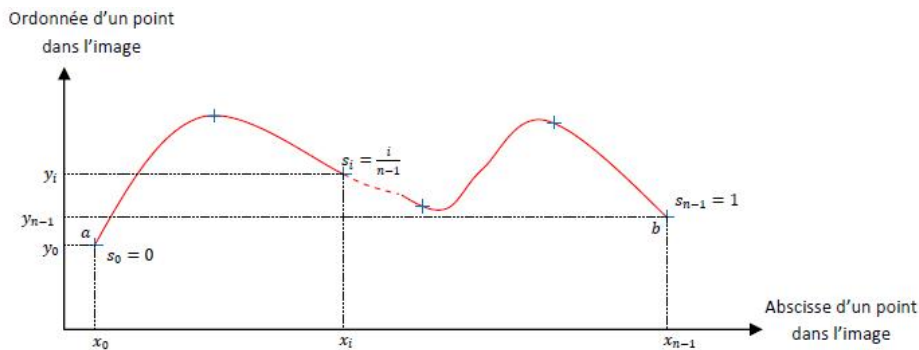


Fig. III.3 Coordonnées cartésiennes et abscisses curvilignes pour un snake de n points.

Le calcul de l'énergie est, ensuite, défini de façon à évoluer suivant deux contraintes :

$$E(v) = E(v)_{int} + E(v)_{ext} \quad (III.3)$$

Avec : $E(v)_{int}$ l'énergie interne du contour.

$E(v)_{ext}$ l'énergie externe du contour.

III.4.2 Energie interne

L'énergie interne détermine la régularité et la forme lisse du contour. Elle sert, aussi, à maintenir la cohérence des points et la raideur de la courbe. L'énergie interne modélise, entre autre, la tension . Elle est définie par la formule suivante [9]:

$$E_{int} = \frac{1}{2} \int_0^1 (\alpha(s) \left| \frac{dv(s)}{ds} \right|^2 + \beta(s) \left| \frac{d^2v(s)}{ds^2} \right|^2) ds \quad (III.4)$$

Avec : v la position de la courbe.

$\frac{dv}{ds}$ la vitesse d'évolution du point.

$\frac{d^2v}{ds^2}$ son accélération.

Cette énergie se compose de 2 termes : un terme du 1^{er} ordre, contrôlé par $\alpha(s)$, qui représente l'élasticité du contour, et un autre terme du second ordre, contrôlé par $\beta(s)$, qui représente la rigidité du contour.

III.4.3 Energie externe

L'énergie externe (ou de contraintes) est définie par l'utilisateur. Elle permet de déterminer les critères d'évolution du contour en fonction de l'image $I(x, y)$. Elle correspond à l'adéquation aux données. C'est l'énergie potentielle liée à l'image. Elle est donnée par l'expression suivante [8] :

$$E_{ext} = \int_0^1 p(v(s)) ds \quad (III.5)$$

Où $p(.)$ est une fonction d'attraction de contour définie sur le plan image. Généralement, elle est donnée par l'expression suivante [9] :

$$P(x, y) = -\lambda \left| \nabla G_\sigma * I(x, y) \right| \quad (III.6)$$

Où G_σ est le filtre de Gauss de variance σ , λ une constante, convenablement, choisie et ∇ est l'opérateur gradient.

III.4.4 Processus de minimisation

L'évolution du contour actif est régit par la minimisation de son énergie totale E_{snake} , donnée par [15] :

$$E_{snake} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(\alpha(s) \left| \frac{dv(s)}{ds} \right|^2 + \beta(s) \left| \frac{d^2v(s)}{ds^2} \right|^2 \right] ds - \lambda \left| \nabla G_\sigma * I(x, y) \right| \quad (III.7)$$

Cette équation intégrale est résolue par plusieurs méthodes. Des méthodes appelées méthodes locales qui cherchent un minimum local (tel que la méthode de la descente du gradient), et celles appelées méthodes globales qui cherchent un minimum global (tel que la programmation dynamique).

- **Rappel sur la méthode de la descente du gradient**

La méthode de la descente du gradient est caractérisée par l'évolution d'une solution initiale v_0 (courbe par exemple), dans la direction de la plus forte pente (énergie par exemple). La solution évolue alors selon l'équation :

$$v_{i+1} = v_i - \Delta t \nabla E_p(v_i) \quad (III.8)$$

Où : Δt est le pas du gradient et $\nabla E_p(v_i)$ est le gradient de l'énergie potentielle.

Cette méthode fait converger vers un minimum local de l'énergie. La solution initiale est donc primordiale. D'autre part, cela fait évoluer le modèle à pas constant.

III.4.5 Implémentation des *snakes* en utilisant les différences finies

Elle consiste à trouver une courbe qui minimise la fonctionnelle d'énergie décrite dans l'équation (III.7). La courbe résolvant ce problème doit satisfaire l'équation d'Euler-Lagrange suivante [15] :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\alpha \frac{\partial v}{\partial s} \right) - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\beta \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right) - \frac{\partial E_{ext}}{\partial s} = 0 \quad (\text{III.9})$$

Pour trouver une solution, le contour est rendu dynamique, en traitant $v(s)$ comme une équation du temps $v(s, t)$, représentant la position. La dérivée partielle par rapport au temps est posée égale à l'équation précédente [10] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial(\alpha(s) \frac{\partial v}{\partial s})}{\partial s} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\beta(s) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right) - \frac{\partial E_{ext}}{\partial s} \\ v(0, s) = v_0(s) \\ \frac{\partial v}{\partial s}(t, 0) = \dot{v}_0 \end{array} \right. \quad (\text{III.10})$$

A l'équilibre, le terme de gauche de l'équation (III.10), tend vers zéro puis s'annule. Donnant, ainsi, une solution à l'équation voulue.

En effet, à chaque itération n correspond une courbe C^n , définie par un ensemble de vecteurs positions :

$$v^n(s) = \begin{pmatrix} x^n(s) \\ y^n(s) \end{pmatrix} \quad (\text{III.11})$$

Avec:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v^n(s) = v^f(s) \quad (\text{III.12})$$

$x^n(s)$ et $y^n(s)$ sont les coordonnées d'un point de C^n dans le plan image.

On considère, dans ce qui suit, que [15] $\alpha(s) = \alpha = \text{cste}$, $\beta(s) = \text{cste}$ et $\lambda(s) = 1$.

En utilisant les coordonnées cartésiennes $x(s)$ et $y(s)$ telle que $v(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$, on aura :

$$\dot{x} = \frac{dx}{ds}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{ds}, \quad \text{et} \quad \dot{v} = \frac{dv}{ds} \quad (\text{III.13})$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \text{et} \quad \ddot{v} = \frac{d^2v}{ds^2} \quad (\text{III.14})$$

L'équation (III.10) s'écrit, alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau \frac{\partial x}{\partial t} = \alpha \ddot{x} - \beta x^4 - \frac{\partial E_{ext}}{\partial x} \\ \tau \frac{\partial y}{\partial t} = \alpha \ddot{y} - \beta y^4 - \frac{\partial E_{ext}}{\partial y} \end{array} \right. \quad (\text{III.15})$$

Ainsi :

$$\| \dot{v}^2 \| = (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 \quad (\text{III.16})$$

$$\| \ddot{v}^2 \| = (\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 \quad (\text{III.17})$$

L'énergie interne d'un point du contour actif s'écrit donc :

$$E_{int}(v(s)) = \frac{1}{2} (\alpha \| \dot{v} \|^2 + \beta \| \ddot{v} \|^2) \quad (\text{III.18})$$

Des équations(III.16) et (III.7), on obtient :

$$E_{int}(v(s)) = \frac{1}{2} \alpha [(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2] + \beta [(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2] \quad (\text{III.19})$$

Par définition le gradient de l'énergie s'écrit :

$$\nabla E_{snake} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_{snake}}{\partial x} \\ \frac{\partial E_{snake}}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{III.20})$$

En introduisant les équations d'Euler ($\nabla E_{snake} = 0$), pour le calcul du gradient, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_{snake}}{\partial x} = \frac{\partial E_{ext}}{\partial x} - \frac{d}{ds} \left[\frac{\partial E_{int}}{\partial \dot{x}} \right] + \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{\partial E_{int}}{\partial \ddot{x}} \right] \\ \frac{\partial E_{snake}}{\partial y} = \frac{\partial E_{ext}}{\partial y} - \frac{d}{ds} \left[\frac{\partial E_{int}}{\partial \dot{y}} \right] + \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{\partial E_{int}}{\partial \ddot{y}} \right] \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

D'autre part, de l'équation (III.19), on a :

$$\frac{\partial E_{int}}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x} \Rightarrow \frac{d}{ds} \left[\frac{\partial E_{int}}{\partial \dot{x}} \right] = \alpha \ddot{x} \quad (\text{III.22})$$

$$\frac{\partial E_{int}}{\partial \ddot{x}} = \beta \ddot{x} \Rightarrow \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{\partial E_{int}}{\partial \ddot{x}} \right] = \beta x^4 \quad (\text{III.23})$$

On fait le même calcul pour la dérivée par rapport a y.

On remplaçant, dans l'équation (III.21), les termes de dérivées par rapport à x et y, on aura :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_{snake}}{\partial x} = \frac{\partial E_{ext}}{\partial x} - \alpha \ddot{x} + \beta x^4 \\ \frac{\partial E_{snake}}{\partial y} = \frac{\partial E_{ext}}{\partial y} - \alpha \ddot{y} + \beta y^4 \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

De l'équation (III.15) et de l'équation (III.24), on tire :

$$\begin{cases} \tau \frac{\partial x}{\partial t} = - \frac{\partial E_{snake}}{\partial x} \\ \tau \frac{\partial y}{\partial t} = - \frac{\partial E_{snake}}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

Dans ce qui suit, on considère le contour actif comme un ensemble de p points. On choisit une courbe fermée, c'est-à-dire : $v(0) = v(p-1)$. En utilisant les différences finies, les dérivées sont calculées de façon approchée, tel que :

$$\dot{x} = \frac{x_{i+1} - x_i}{h} \simeq x_{i+1} - x_i \quad (\text{III.26.a})$$

$$\ddot{x} = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} \simeq x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} \quad (\text{III.26.b})$$

$$x^{(4)} = \frac{x_{i-2} - 4x_{i-1} + 6x_i - 4x_{i+1} + x_{i+2}}{h^4} \simeq x_{i-2} - 4x_{i-1} + 6x_i - 4x_{i+1} + x_{i+2} \quad (\text{III.26.c})$$

Où h est le pas entre deux points (on pose $h=1$ (un pas d'un pixel)) et $i=0, \dots, p-1$.

Posant :

$$\begin{cases} f_x(i) = \left(\frac{\partial E_{ext}}{\partial x}\right)_{x_i} \\ f_y(i) = \left(\frac{\partial E_{ext}}{\partial y}\right)_{y_i} \end{cases} \quad (\text{III.27})$$

Après la discrétisation, les équations d'Euler deviennent :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial E_{ext}}{\partial x}\right)_{x_i} = \left(\frac{\partial E_{ext}}{\partial x}\right) + \alpha(x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}) + \beta(x_{i-2} - 4x_{i-1} + 6x_i - 4x_{i+1} - x_{i+2}) \\ \left(\frac{\partial E_{ext}}{\partial y}\right)_{y_i} = \left(\frac{\partial E_{ext}}{\partial y}\right) + \alpha(y + 2y_i - y) + \beta(y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} - y_{i+2}) \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

Ces dernières peuvent être mises sous forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} AX + f_x(x, y) = \frac{\partial E_{snake}}{\partial x} \\ AY + f_y(x, y) = \frac{\partial E_{snake}}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

Avec:

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha + 6\beta & -\alpha - 4\beta & \beta & 0 & \dots & 0 & \beta & -\alpha - 4\beta \\ -\alpha - 4\beta & 2\alpha + 6\beta & -\alpha - 4\beta & \beta & 0 & \dots & 0 & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha - 4\beta & \beta & 0 & \dots & \dots & \beta & -\alpha - 4\beta & 2\alpha + 6\beta \end{bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

X est le vecteur composé des points du contour actif et Y le vecteur composé des ordonnées :

$$X = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ x_{p-1} \end{bmatrix}, f_x(x, y) = \begin{bmatrix} f_x(0) \\ \vdots \\ \cdot \\ f_x(p-1) \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ y_{p-1} \end{bmatrix}, f_y(x, y) = \begin{bmatrix} f_y(0) \\ \vdots \\ \cdot \\ f_y(p-1) \end{bmatrix} \quad (\text{III.31})$$

En écrivant l'équation (III.25) sous la forme discrète, on aura

$$\begin{cases} \tau \frac{x^{i+1} - x^i}{h} = -\frac{\partial E_{snake}}{\partial x} \\ \tau \frac{y^{i+1} - y^i}{h} = -\frac{\partial E_{snake}}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X^{i+1} = x^i - \frac{h}{\tau} \frac{\partial E_{snake}}{\partial x} \\ Y^{i+1} = y^i - \frac{h}{\tau} \frac{\partial E_{snake}}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{III.32})$$

On posant $\frac{h}{\tau} = \frac{1}{\gamma}$, on aura :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_{snake}}{\partial x} = -\gamma(X^{i+1} - X^i) \\ \frac{\partial E_{snake}}{\partial y} = -\gamma(Y^{i+1} - Y^i) \end{cases} \quad (III.33)$$

En remplaçant les coordonnées du gradient de l'énergie dans l'équation(III.30), on obtient

$$\begin{cases} AX^{i+1} + \lambda f_x(X^{i+1}, Y^{i+1}) = -\gamma(X^{i+1} - X^i) \\ AY^{i+1} + \lambda f_y(X^{i+1}, Y^{i+1}) = -\gamma(Y^{i+1} - Y^i) \end{cases} \quad (III.34)$$

Avec λ le coefficient de pondération introduit afin de compenser des valeurs élevées de l'énergie externe.

Supposant que les valeurs de f_x et f_y varient peu, entre deux itérations. Ce qui permet de faire les approximations suivantes :

$$\begin{cases} f_x(X^{i+1}, Y^{i+1}) \simeq f_x(X^i, Y^i) \\ f_y(X^{i+1}, Y^{i+1}) \simeq f_y(X^i, Y^i) \end{cases} \quad (III.35)$$

L'équation (III.34) devient :

$$\begin{cases} AX^{i+1} + \lambda f_x(X^i, Y^i) = -\gamma(X^{i+1} - X^i) \\ AY^{i+1} + \lambda f_y(X^i, Y^i) = -\gamma(Y^{i+1} - Y^i) \end{cases} \quad (III.36)$$

D'où :

$$\begin{cases} (A + \gamma I_d)X^{i+1} = \gamma X^i - \lambda f_x(X^i, Y^i) \\ (A + \gamma I_d)Y^{i+1} = \gamma Y^i - \lambda f_y(X^i, Y^i) \end{cases} \quad (III.37)$$

Avec I_d la matrice identité. Apres inversion de la matrice $(A + \gamma I_d)$, on aura une représentation matricielle déterminant la position des pixels du *snake* discrétisé à implémenter :

$$\begin{cases} X^{i+1} = (A + \gamma I_d)^{-1}(\gamma X^i - \lambda f_x(X^i, Y^i)) \\ Y^{i+1} = (A + \gamma I_d)^{-1}(\gamma Y^i - \lambda f_y(X^i, Y^i)) \end{cases} \quad (III.38)$$

A partir de la formulation (III.38), la prise en compte d'énergie externe, autre que le simple gradient utilisé, se fait en remplaçant, simplement, le terme $f(X^i, Y^i)$ par sa nouvelle expression [15].

Ø Exemple

Un exemple de convergence des contours actifs, sur une image test, est présenté sur la figure (III.4) [8]. Le contour actif est initialisé, manuellement, à proximité du contour réel de l'objet à segmenter.

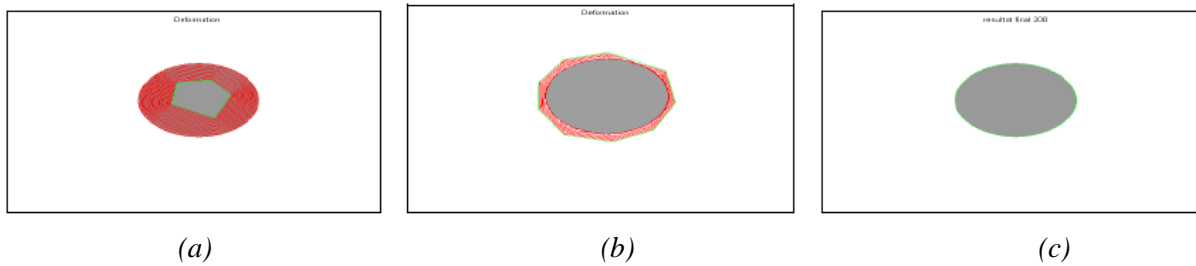


Fig. III.4 : exemple d'un contour actif : (a)-Initialisation a l'intérieur et évolution, (b)-Initialisation a l'extérieur et évolution et (c)-Résultat final.

Si on observe l'évolution de la courbe dans le temps, on constate que le contour actif commence par se contracter sous l'effet de l'énergie interne qui empêche les irrégularités : lissage d'abord, puis rigidité qui ramène les points du contour vers la frontière réelle. Le contour se fixe, enfin, sur les frontières grâce à l'énergie d'attache aux données.

III.4.6 Implémentation des *snakes* en utilisant la méthode spectrale

En utilisant la méthode spectrale, développée dans le chapitre 2, les dérivées sont calculées de façon approchée, tel que :

$$\dot{x} = D^{(2)}x \quad (\text{III.39.a})$$

$$x^{(4)} = D^{(4)}x \quad (\text{III.39.b})$$

D est une matrice d'ordre n . Ce dernier représente le nombre de points de notre contour. $D^{(2)}$ est une matrice de la 2^{ème} dérivée, qu'on va obtenir par la deuxième dérivée de :

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{h}\right)}{\left(\frac{2\pi}{h}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \quad (\text{III.39})$$

$$S_N'' = \begin{cases} -\frac{\pi^2}{3h^2} - \frac{1}{6} & j = 0 \\ -\frac{(-1)^j}{2 \sin\left(\frac{jh}{2}\right)^2} & j \neq 0 \end{cases}$$

Et $D^{(4)}$ on va la chercher par le calcul de la quatrième dérivée de (III.39).

Ainsi, l'équation (III.24), après avoir remplacé la deuxième et la quatrième dérivée par les équations (III.39.a) et (III.39.b), sera comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_{snake}}{\partial x} = \frac{\partial E_{ext}}{\partial x} - \alpha D^{(2)}x + \beta D^{(4)}x \\ \frac{\partial E_{snake}}{\partial y} = \frac{\partial E_{ext}}{\partial y} - \alpha D^{(2)}y + \beta D^{(4)}y \end{cases} \quad (III.41)$$

Nous poserons, dans ce cas :

$$A = \alpha D^{(2)} + \beta D^{(4)} \quad (III.42)$$

A étant une matrice de $n \times n$ dimension. Ainsi, la position des pixels du *snake* discrétisé à implémenter sera de la même forme que l'équation (III.38) avec A qui sera calculé selon l'équation (III.42).

III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la théorie des différents types des contours actifs a fin de mieux comprendre leur principe. Nous avons développé le modèle initiale (*snake*). L'évolution du *snake* est régie par les énergies internes et l'énergie du flux du vecteur du gradient qui représente l'énergie externe. Ces deux énergies dépendent des paramètres qu'il faudra bien choisir de sorte à assurer une bonne convergence du modèle.

Nous allons, dans le chapitre suivant, effectuer quelques tests, consistants à faire varier les valeurs des paramètres et faire une comparaison entre la discrétisation de l'équation d'évolution du *snake* par différences finies et méthode spectrale.

Chapitre IV

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre nous mettrons en pratique l'étude théorique que nous avons abordée dans les chapitres précédents. En effet, nous appliquerons les méthodes spectrales et celles des différences finies pour la résolution de l'équation d'évolution que nous avons obtenue précédemment lors de l'étude du contour actif classique (*snake*). L'implémentation de notre application se fera avec le langage de programmation Matlab sur un *Compac* (processeur : AMD *sempron* (tm), 2.10 GHz de fréquence et 3Go de RAM).

Nos tests vont se porter sur l'étude de l'influence de certains paramètres et les performances de l'application de la méthode spectrale pour la discrétisation de l'équation d'évolution du *snake*.

IV.2 Implémentation

L'implémentation du *snake*, dont l'équation d'évolution est discrétisée par, respectivement, les différences finies et de la méthode spectrale, sera selon les étapes suivantes :

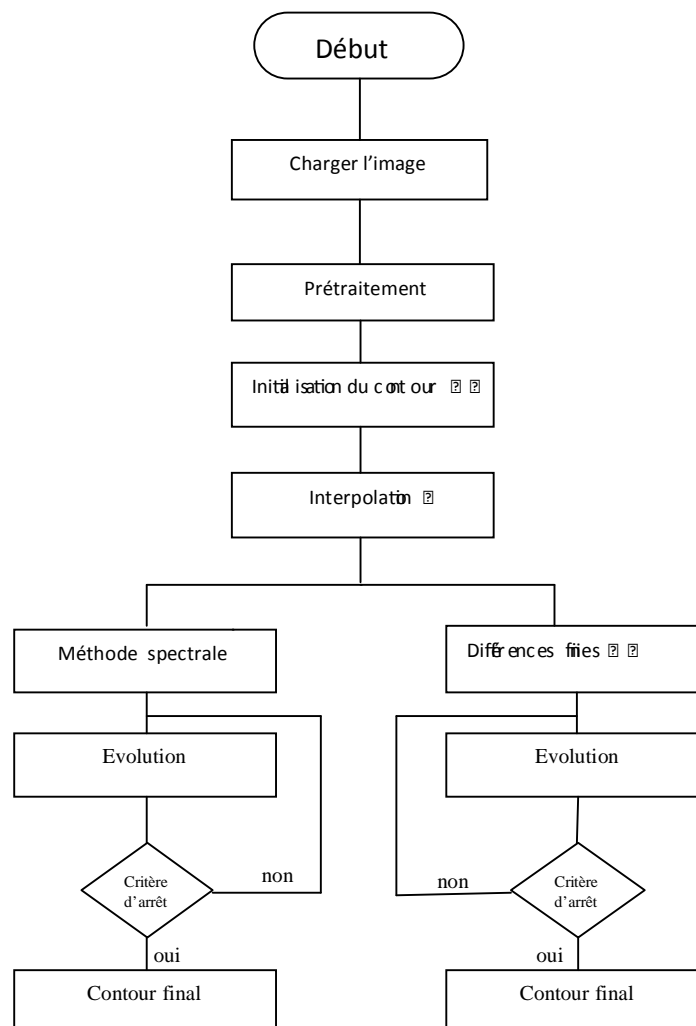


Fig.IV.1 Schéma d'implémentation du *snake* selon le choix de la discrétisation de l'équation d'évolution.

IV.2.1 Initialisation du contour

Cette partie de l'algorithme permet à l'opérateur de choisir les points du contour initial par des simples clics de souris (Fig. IV.2).



Fig. IV.2 Illustration du choix des points du contour initial.

IV.2.2 Interpolation

Après l'initialisation, les points du contour sont interpolés pour produire un *snake* continu. Pour l'interpolation nous avons choisi l'interpolation linéaire.

IV.2.3 Reparamétrisation

Durant la déformation (évolution), deux points voisins peuvent se rapprocher l'un de l'autre ou, au contraire, s'éloigner. L'espacement entre les points varie d'une itération à l'autre. Pour cela, des points seront ajoutés là où cet espacement devient trop important et seront enlevés quand l'espacement est trop faible : c'est la *reparamétrisation* [15]. Pour ce faire, nous définissons deux valeurs de distance (d_{min} et d_{max}) et nous calculons la distance entre deux points successifs par la formule suivante :

$$d = \sqrt{((x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2)} \quad (IV.1)$$

Ainsi, Si $d < d_{min}$ alors l'un de ces points est enlevé. Si $d > d_{max}$ alors un point est ajouté entre ces deux points. Dans notre cas $(d_{min}, d_{max}) = (1 \text{ pixel}, 2 \text{ pixels})$.

IV.2.4 Critère d'arrêt

Dans le cas idéal, le *snake* s'arrête quand le minimum d'énergie est atteint, c'est-à-dire, lorsque les points du *snake* ne bougent pas. Dans notre application, nous avons pris, comme critère d'arrêt, le nombre d'itération qui sera initialisé par l'utilisateur.

Dans la mise en œuvre effective de l'algorithme, le déplacement du *snake* est liée à ses différentes énergies. Les différents paramètres pris en compte influent aussi sur les contours.

IV.3 Choix des paramètres de l'approche

Les différents paramètres du *snake* (décrits au chapitre III) diffèrent d'une image à une autre. Ils sont déterminés, empiriquement, à travers une série de tests, en s'appuyant sur

les caractéristiques de l'objet à détecter dans l'image. Cependant, un petit rappel de ces paramètres et leurs influences aidera, certainement, à mieux comprendre leurs importances.

- **Terme d'élasticité α** : représente la contrainte d'élasticité. Il exprime la faculté, pour chaque point, de s'écarter de ses voisins. Une trop petite valeur, induit une déstabilisation du *snake*. Une valeur très grande rend les nœuds très solidaires entre eux et difficile à s'écarter. Ce qui favorise l'effondrement du *snake* sur lui-même.
- **Terme de rigidité β** : est lié à la rigidité de la courbe. Ainsi, si on veut détecter précisément des angles, on aura tendance à diminuer ce paramètre. Au contraire, si l'on veut privilégier une certaine régularité, un β élevé arrondira les angles.
- **Le pas du temps γ** : est ajusté de telle sorte que le déplacement de chaque nœud ne dépasse pas un ou deux pixels. Le choix du pas du temps γ est donc déterminant pour l'évolution de la courbe. Si γ est trop grand, la courbe risque de passer par-dessus le contour.
- **Le coefficient de la force externe λ** : c'est le poids de cette force par rapport à la force interne. S'il a une grande valeur, la force externe influencera sur l'évolution du *snake* sinon c'est la force interne.

IV.4 Tests et résultats

Pour effectuer nos tests, nous avons choisi un certains nombres d'images (Fig. IV.3). Nous varierons les valeurs des paramètres α (élasticité), β (rigidité), γ (pas du temps) et λ (poids de la force externe), avec un nombre d'itérations N choisi.

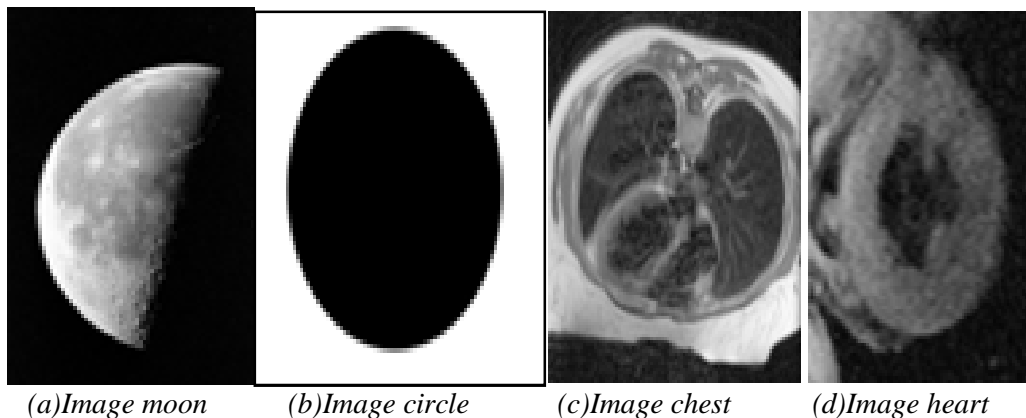


Fig.IV.3 Images utilisées dans nos tests.

IV.4.1 Test 1

Dans ce test, nous avons pris l'image se nommant '*chest*' de taille 211x225. Nous lui avons appliqué l'algorithme de la figure IV.1 sans un prétraitement (Fig. IV.3) et avec un prétraitement (Fig. IV.4). Le prétraitement effectué est le filtrage gaussien. Le nombre de points d'interpolation est de 10 points.

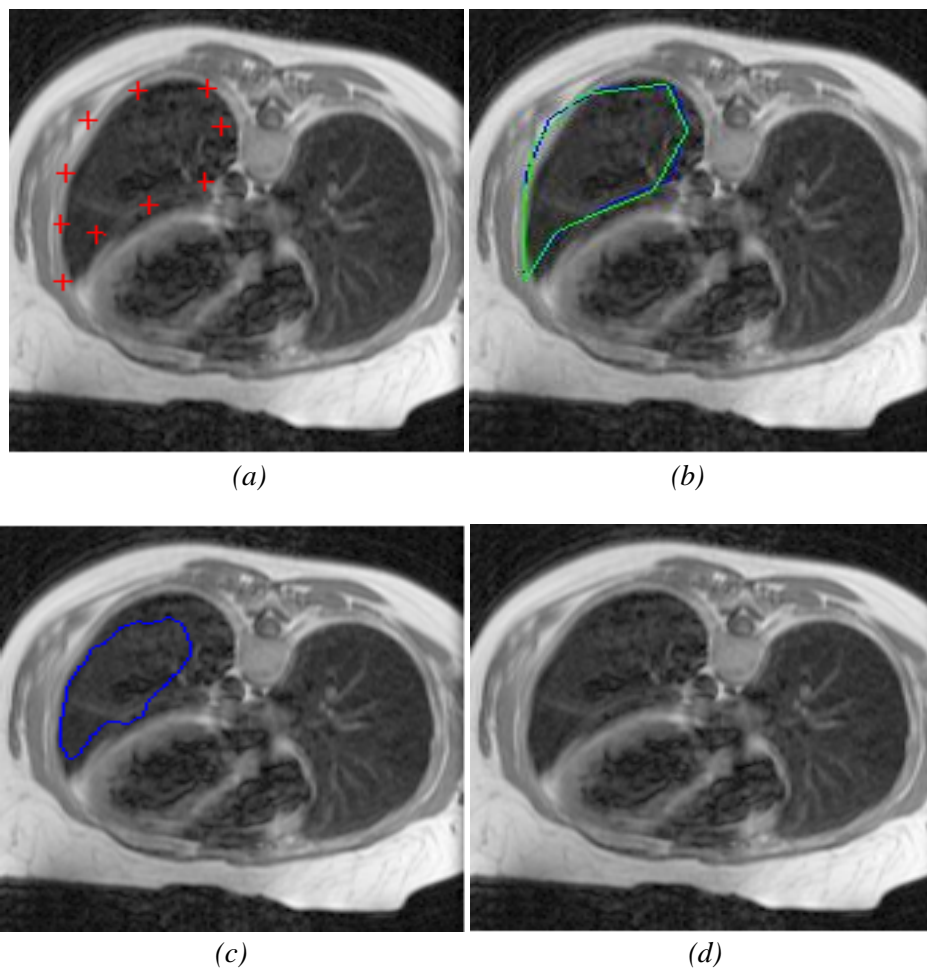


Fig. IV.3 Résultats d'évolution du snake sans prétraitement : (a)-Initialisation, (b)-Interpolation, (c)-résultats avec application des différences finie et (d)-résultats avec application de la méthode spectrale.

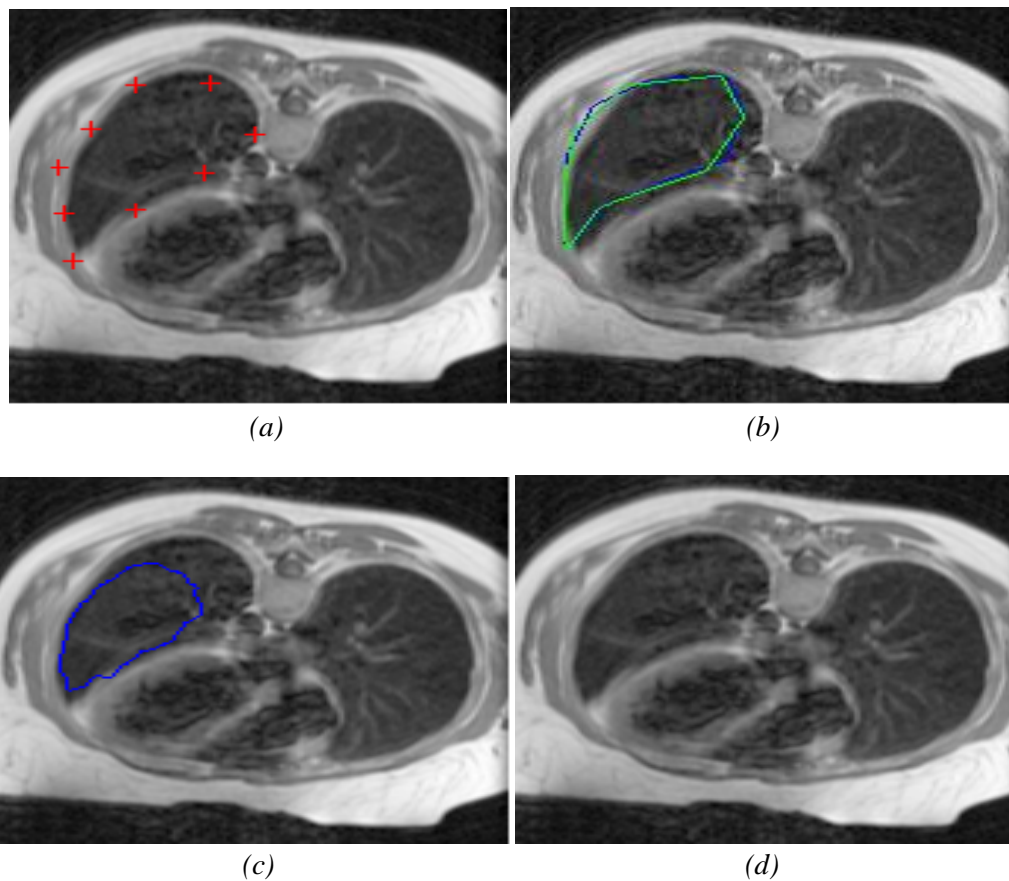


Fig. IV.4 Résultats d'évolution du snake avec prétraitement :(a)-Initialisation, (b)-Interpolation, (c)-résultats avec application des différences finies et (d)-résultats avec application de la méthode spectrale.

Les paramètres choisis, pour ce test, sont donnés dans le tableau IV.1.

Paramètres méthodes	Alpha (α)	Beta (β)	Gamma (γ)	Lambda (λ)	Itérations(N)	Temps(second)
Différences finies	0,4	0,2	1	0,15	20	3.1561
Méthode spectrale	0,4	0,2	1	0,15	20	débordement

Tab. IV.1 Les valeurs des différents paramètres avec prétraitement.

Interprétation des résultats

L'ensemble des résultats obtenus montrent qu'il y a une détection des contours de la région d'intérêt uniquement avec la méthode des différences finies (le résultat est meilleur pour l'image prétraitée) par contre il y a débordement avec la méthode spectrale. Cela est dû, au fait, que la force interne dans l'évolution avec méthode spectrale est très importante. Ce qui permet au *snake* de se déplacer anarchiquement et avec des grands. Pour cela, nous n'avons pas pu visualiser la courbe. Avec un nombre d'itérations réduit on pourrait la visualiser.

IV.4.2 Test 2

Dans ce test, nous avons repris la même image du test précédant avec des nouvelles valeurs des différents paramètres. La figure IV.5 représente les résultats sur l'image sans prétraitement et ceux sur l'image avec prétraitement sont montrés dans la figure IV.6. Ici aussi, le nombre de points d'interpolation est de 10 points.

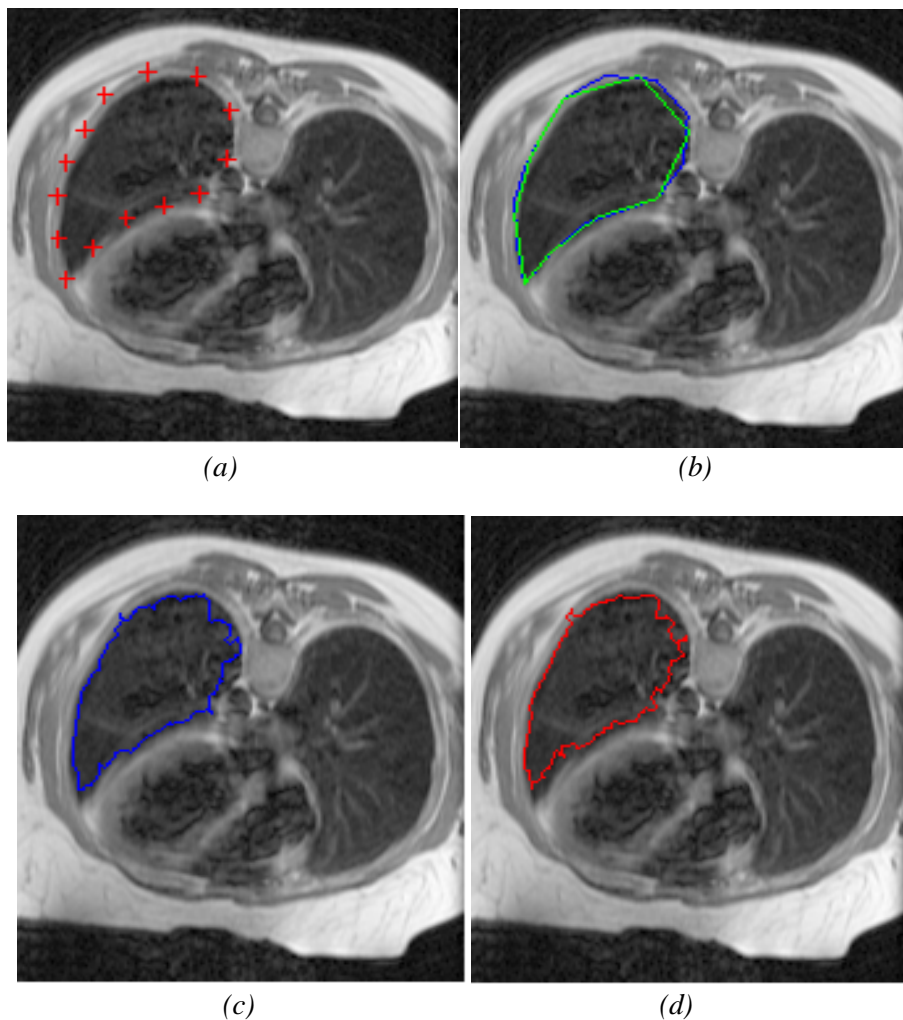


Fig. IV.5 Résultats d'évolution du snake sans prétraitement : (a)-Initialisation, (b)-Interpolation, (c)-résultats avec application des différences finie et (d)-résultats avec application de la méthode spectrale.

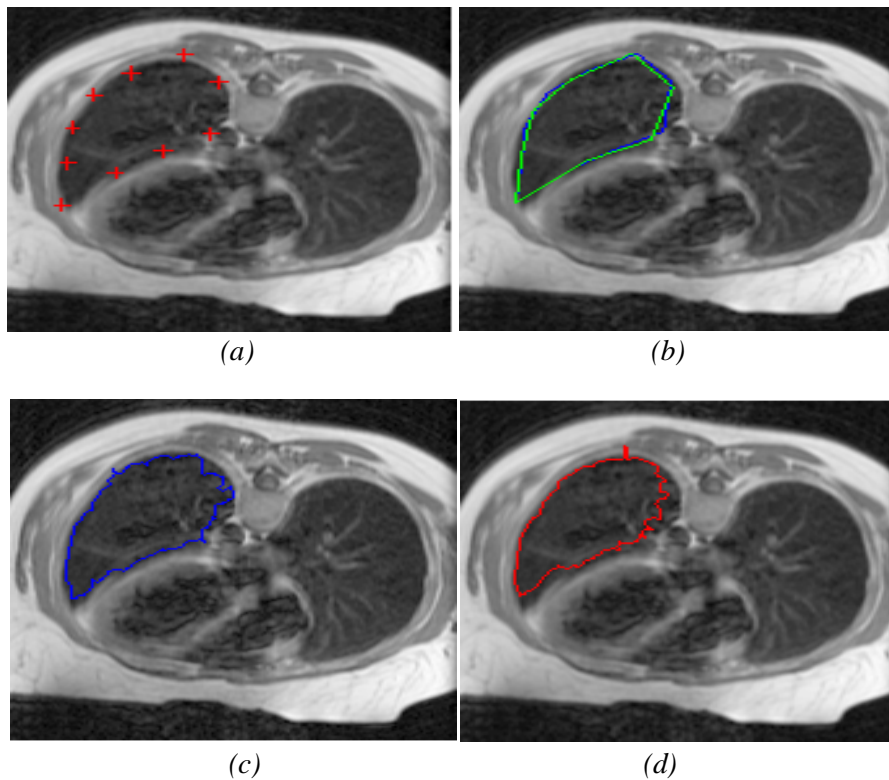


Fig. IV.6 Résultats d'évolution du snake avec prétraitement : (a)-Initialisation, (b)-Interpolation, (c)-résultats avec application des différences finie et (d)-résultats avec application de la méthode spectrale.

Les paramètres choisis, pour ce test, sont donnés dans le tableau IV.2.

Paramètres méthodes	Alpha (α)	Beta (β)	Gamma (γ)	Lamda (λ)	Itérations(N)	Temps(second)
Différences finies	0,00004	0,00002	1	0,15	20	6.7821
Méthode spectrale	0,00004	0,00002	1	0,15	20	2.8886

Tab. IV.2 Les valeurs des différents paramètres avec prétraitement.

Interprétation des résultats

Nous constatons que les résultats dans les deux cas (sans et avec le prétraitement) et pour les deux méthodes (différences finies et méthode spectrale) sont bons par rapport au test précédant. Nous constatons, aussi, que la méthode spectrale est très rapide. Nous pouvons dire qu'un choix judicieux de paramètres est très important et qu'ici les petites valeurs de α et β équilibra l'influence des deux forces (interne et externe) dans la méthode spectrale.

IV.4.3 Test 3

Dans ce test, nous avons pris l'image se nommant 'heart' de taille 160x160. Nous lui avons appliqué l'algorithme de la figure IV.1 après l'avoir prétraité (Fig. IV.7). Le prétraitement effectué est toujours le filtrage gaussien. Le nombre de points d'interpolation est fixé à 20.

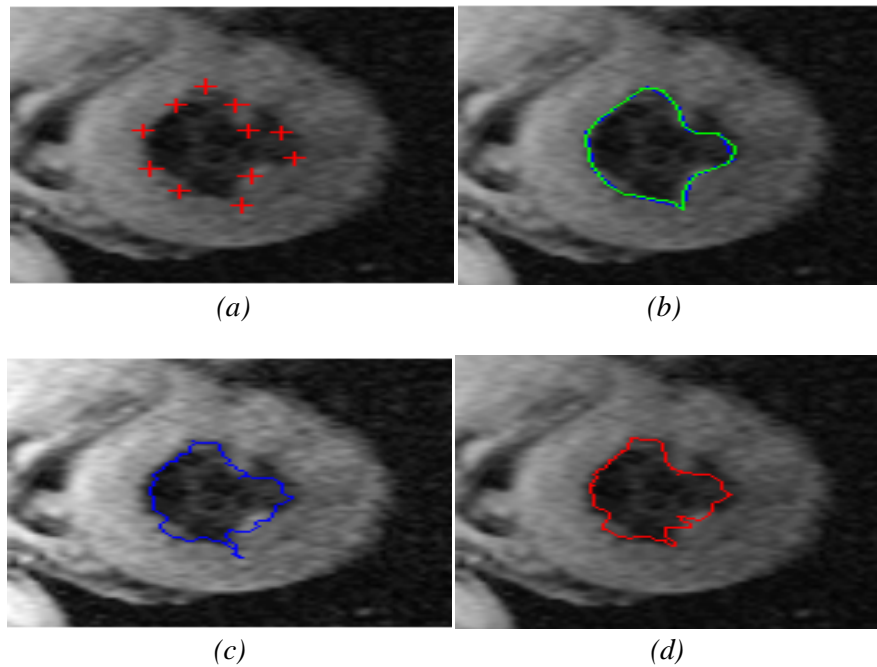


Fig. IV.7 Résultats d'évolution du snake : (a)-Initialisation, (b)-Interpolation, (c)-résultats avec application des différences finie et (d)-résultats avec application de la méthode spectrale.

Les paramètres choisis, pour ce test, sont donnés dans le tableau IV.3.

Paramètres méthodes	Alpha (α)	Beta (β)	Gamma (γ)	Lamda (λ)	Itérations(N)	Temps(second)
Différences finies	0,00004	0,00002	1	0,15	15	2.9678
Méthode spectrale	0,00004	0,00002	1	0,15	15	1.4118

Tab. IV.3 Les valeurs des différents paramètres.

Interprétation des résultats

Nous constatons qu'avec un nombre de points d'interpolations plus élevé, nous avons obtenus une initialisation continue et des bons résultats bien meilleurs, avec les mêmes paramètres que nous avons choisis dans le test 2.

IV.4.4 Test 4

Dans ce test, nous avons pris l'image se nommant 'circle' de taille 256x256. Nous lui avons appliqué la méthode spectrale, après l'avoir prétraité (Fig. IV.8). Le prétraitement effectué est le filtrage gaussien. Ces résultats sont on fonction de tous les paramètres, ainsi que le nombre d'itérations. Le nombre de points d'interpolation est toujours fixé à 20. Les paramètres choisis, pour ce test, sont donnés dans le tableau IV.4.

<i>Paramètres</i> <i>figures</i>	<i>Alpha (α)</i>	<i>Beta (β)</i>	<i>Gamma (γ)</i>	<i>Lamda (λ)</i>	<i>Itérations(N)</i>	<i>Temps (second)</i>
Fig. IV.8.c	0,00003	0,00001	1	0,015	15	7.8242
Fig. IV.8.d	0,003	0	90	0,015	25	11.9510
Fig. IV.8.e	0.3	0.1	20	0.015	25	débordement
Fig. IV.8.f	0.001	0.001	45	0.15	40	19.2213
Fig. IV.8.g	0.001	0.001	45	0.015	40	18.9796
Fig. IV.8.h	0.001	0.000001	10	0.015	40	19.6255

Tab. IV.4 Les valeurs des différents paramètres.

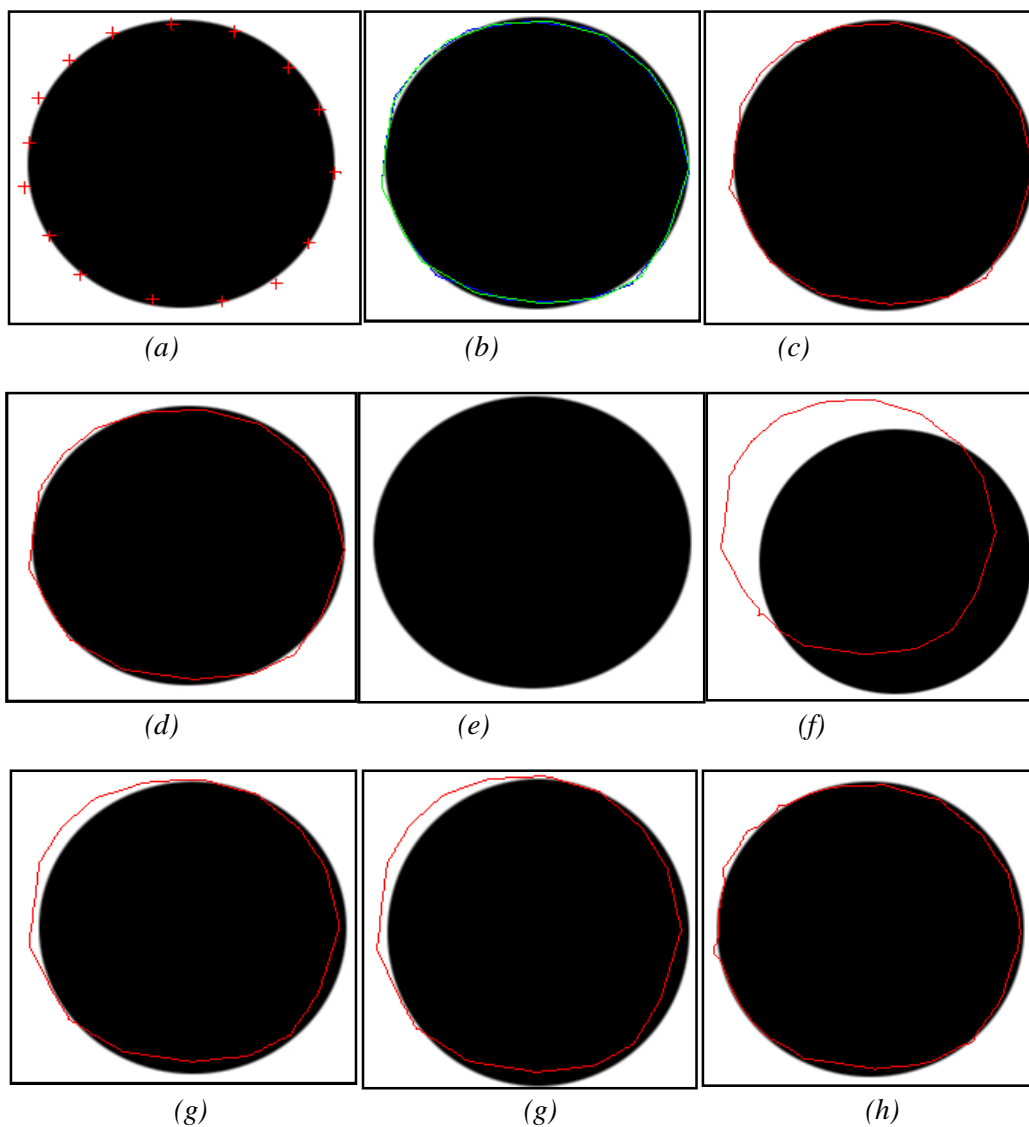


Fig. IV.8 Variations des paramètres pour la méthode spectrale : (a)-Initialisation, (b)-Interpolation et (c, d, e, f, g et h) les résultats d'évolution du snake pour différentes valeurs des paramètres.

Interprétation des résultats

Nous pouvons dire qu'un choix judicieux de paramètres est très important et qu'ici les petites valeurs de α et β équilibra l'influence des deux forces (interne et externe) dans la méthode spectrale. Et nous constatons que le temps de détection des contours de la région d'intérêt avec la méthode spectrale sera plus long lorsqu'on augmente le nombre d'itérations mais par contre nous aurons des résultats assez bons.

IV.4.5 Test 5

Dans ce test, nous avons pris l'image de Matlab, se nommant 'moon', de taille 368x537. Nous lui avons appliqué la méthode spectrale après l'avoir prétraité. Le prétraitement effectué est le filtrage gaussien. Ces résultats sont en fonction de tous les paramètres, ainsi que le nombre d'itérations. Le nombre d'interpolation est toujours fixé à 20. Les paramètres choisis, pour ce test, sont donnés dans le tableau IV.5.

<i>Paramètres figures</i>	<i>Alpha (α)</i>	<i>Beta (β)</i>	<i>Gamma (γ)</i>	<i>Lamda (λ)</i>	<i>Itérations(N)</i>	<i>Temps (second)</i>
Fig. IV.9.c	0,001	0,000001	10	0,015	40	97.2085
Fig. IV.9.d	0,0009	0.00001	1	0,015	10	23.8457
Fig. IV.9.e	0.009	0.00001	8	0.0015	10	21.3416
Fig. IV.9.f	0.009	0.00001	15	0.0015	10	24.1422

Tab. IV.5 Les valeurs des différents paramètres.

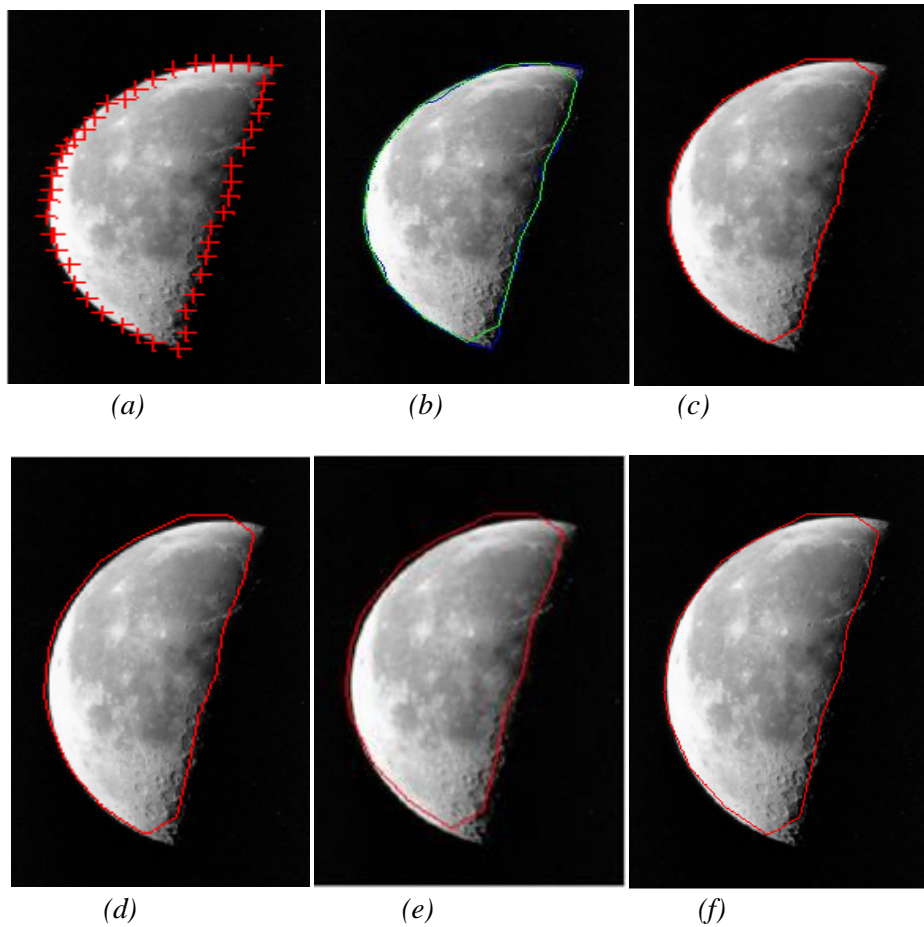


Fig. IV.9 Résultats d'évolution du snake avec la méthode spectrale en fonction des différents paramètres : (a)-Initialisation, (b)-Interpolation, (c, d, e et f)- Les différents résultats avec différents paramètres.

Interprétation des résultats

Nous constatons que la durée de détection des contours de la région d'intérêt, avec la méthode spectrale est plus longue par rapport au test 4, cela est du a la taille de l'image qui est grande. On remarque aussi que la méthode spectrale sera rapide, lorsqu'on donne des petites valeurs aux paramètres Γ (γ) et Λ (λ).

IV.8 Conclusion

Dans ce chapitre notre but est de faire la comparaison pour l'évolution des contours actifs avec les deux méthodes de discrétisation (différences finies et la méthode spectrale). Pour se faire, nous avons effectué une série de tests en faisant varier plusieurs paramètres qui interviennent dans la fonction d'évolution.

Nous avons constaté que lorsque nous prenons α et β de valeurs, relativement, grandes et $\gamma=1$, nous avons obtenu un bon résultat avec la méthode des différences finies après un certain nombre d'itérations. Par contre, avec la méthode spectrale il y a un débordement (non convergence) pour les mêmes valeurs de ces paramètres. Cependant, lorsque nous avons donné des petites valeurs à α et β (d'ordre de 10^{-5}) et $\gamma=1$, nous constatons que les résultats obtenus sont de bons résultats avec un temps assez faible par rapport aux différences finies.

Nous concluons que la méthode spectrale nous donne de bons résultats et à un temps de convergence rapide par rapport à la méthode des différences finies. Ceci est possible, à condition de donner de bonnes valeurs pour les différents paramètres.

Conclusion générale

Conclusion

L'objectif de notre travail était de voir l'effet de la discrétisation de l'équation d'évolution du *snake* par une méthode spectrale.

Après avoir présenté des généralités sur les équations aux dérivées partielles, ainsi que leur utilisation en traitement d'image, nous avons abordé la méthode spectrale. Cette méthode utilise de différents polynômes d'interpolation ainsi que les séries de Fourier discrètes. Nous avons, par la suite, appliqué cette méthode de discrétisation pour l'équation d'évolution du *snake*. Nous avons, d'ailleurs, effectué plusieurs tests pour visualiser l'effet de la méthode spectrale par rapport aux différences finies.

Nous avons pu constater que la discrétisation par méthode spectrale permet une convergence rapide du *snake* par rapport aux différences finies. Cependant, le choix judicieux des paramètres (α , β , λ et γ) reste toujours un problème, tel qu'il a été, déjà, soulevé pour les différences fines. Seulement, il faut savoir que les éléments des matrices de la deuxième et la quatrième dérivée sont grands ; une normalisation de ces valeurs s'avère important et un choix des valeurs petites de β et α est plus que nécessaire (d'ordre de 10^{-5}). De même une bonne initialisation du contour donnera, aussi, un bon résultat. Et éventuellement, le nombre de points d'interpolation.

Notre travail est introductif, d'ailleurs, plusieurs perspectives sont envisageables. En effet, pour ce qui concerne la méthode spectrale, on pourra utiliser l'autre méthode qui utilise le polynôme de *Tchytchev*, par exemple. On pourra aussi améliorer la force externe de notre *snake* en utilisant le GVF, par exemple.

Bibliographie

[1] **Lyes D.**, « Modélisation, Discrétisation et simulation », mémoire d'ingénieur en génie électrique et d'électronique (INELEC), université de Boumerdes.

[2] **Mara Th. A.**, « Maitrise de Physique Mention Physiques et application », télécharger du site :

[3] **Guinot V., Cappelaere B.**, « Méthodes Numériques Appliquées (Résolution des équations différentielle de l'ingénieur) », fichier téléchargé sur internet Polytech' Montpellier STE2.

[4] **Tiguercha S. et Talhajt O.**, « Commande Linéaire Quadratique des Systèmes à Paramètre Distribués basée sur la stratégie de pré-approximation », mémoire d'ingénieur en Automatique UMMTO, 2010.

[5] **Fortin A.**, « Analyse numérique pour l'ingénieur », édition PADIE troisième édition Québec polytechnique de Montréal, pays canada, année1995.

[6] **Documents Internet**

[7] **Documents Internet** www.Dférences finies et polynôme de Lagrange.

[8] **Chilali O.**, « Classification automatique de données utilisant les modèles déformables », Mémoire de magister, Département d'automatique, UMMTO, 2006.

[10] **Piron V.**, «Segmentation du myocarde par modèle déformable en IRAM du petit animal », Thèse DEA, université d'Angers, France, 2002.

[9] **Rousselle J.J.**, « Les contours actifs, une méthode de segmentation. Application a l'imagerie médicale », Thèse Doctorat, université de François Rabelais, Tours, France, 2003.

[11] **Kass M., Witkin A. et Terzopoulos D.**, « *Snakes, Active Contour Model* », International Journal of Computer Vision, vol. 1, no. 4, pp. 321-331, 1988.

[12] **Caselles V.**, « *Geometric Models For Active Contours* », Numerische Mathematik, vol. 66, pp. 1-31, 1993.

[13] **Caselles V. , Kimmel R. , et Sapiro G. ,** « *Geodesic Active Contours* », International Journal of Computer Vision, vol. 1, no. 22, pp. 61-79, 1997.

[14] **Samson C.**, «*Contribution A La Classification D'images Satellitaires Par Approche Variationnelle Et EDP* », Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, France, Septembre 2000

[15] **Akli K. et Hamid.S,** « Initialisation automatique des *snakes* Pour une segmentation d'une image IRM », mémoire d'ingénieur en automatique, UMMTO, 2008.