République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Magister

Spécialité : Mathématiques

Option : Probabilités Statistique

Thème

Calcul et estimation d'une probabilité de ruine

Présenté par

Bouziane Houria

Soutenu devant le jury composé de :

Mr Hocine Fellag	Professeur	UMMTO	Président
Mr Youcef Berkoun	Maître de conférence (A)	UMMTO	Rappoteur
Mr Djamal Hamadouche	Professeur	UMMTO	Examinateur
Mr Mohand Arezki Boudiba	Maître de conférence (A)	UMMTO	Examinateur

Tizi-Ouzou, Année 2011

Remerciements

Monsieur **Youcef Berkoun**, Maître de conférence à l'UMMTO a été mon rapporteur. La qualité de sa direction, sa rigueur scientifique m'ont permis de mener à bien mon travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma considération et mes sincères remerciements.

Je suis très reconnaissante envers Messieurs **Hocine Fellag**, Professeur à l'UMMTO, **Djamel Hamadouche**, Professeur à l'UMMTO, et **Mohand Arezki Boudiba**, Maître de conférence à l'UMMTO à l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour avoir accepté d'en être membres de jury.

Je remercie chacune et chacun de mes professeurs qui se sont succédés, dès mes premiers pas à la maternelle jusqu'au DES, pour m'éduquer et m'apprendre la science et les bonnes manières. C'est grâce à eux et à leurs encouragements que j'ai pu poursuivre avec réussite mon parcours académique.

Je profite en l'occurence pour exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à Monsieur **Idir Sadani**, pour son aide précieuse et son soutien pendant la réalisation de ce mémoire.

Enfin, j'aimerai remercier mes parents et toute ma famille pour leur soutien moral et matériel et pour les encouragements qu'ils n'ont cessé de m'apporter durant toutes mes études.

Table des matières

Introduction générale

La théorie de la ruine, parfois appelée "théorie collective de risque", est une branche des sciences actuarielles, qui étudie la vulnérabilité d'un assureur à l'insolvabilité basée sur la modélisation mathématique de l'excédent de l'assureur et l'étude de l'évolution des richesses d'une compagnie d'assurance.
La théorie du risque est l'étude des problématiques (à court terme et long terme) d'un portefeuille d'assurance non-vie. Elle regroupe entre autres la théorie de la ruine et la réassurance. La première, quant à elle est l'analyse à long terme de la ruine d'une assurance (non-vie).
La problématique la plus souvent posée dans ce domaine est le calcul de la probabilité de ruine de la compagnie, c'est-à-dire de la probabilité que ses réserves financières passent sous la frontière fatidique du zéro. Ici, une compagnie dite en ruine ne mettra pas automatiquement la clé sous la porte ; le terme de ruine concerne davantage une situation critique où une compagnie ne peut satisfaire à ses engagements vis-à-vis de ses clients, de ses actionnaires ou d'une autorité de contrôle.
De nos jours, avec la multiplicité des sinistres (innodations, tremblements de terre, tsunamis, etc. . .), les assurances doivent avoir une bonne gestion des risques et ce pour faire face au problème d'insuffisance de capital.
L'activité d'assurances requiert de disposer d'un niveau minimum de fonds propres pour absorber les mouvements défavorables des résultats non-anticipés. La détermination de ce montant est devenue une problématique majeure.
La théorie de la ruine a pris naissance en Suede au début du $20^{\text{ème}}$ siècle dans les travaux de l'actuaire suédois Filip Lundberg(1903), relayés par Lundberg(1926) et Harald Cramér (1930). Leurs travaux ont contribué à jeter les bases de la théorie de la ruine.

Le but premier de la théorie de la ruine a donc logiquement été de modéliser l'évolution de la richesse de la compagnie par un processus stochastique, d'évaluer la probabilité de ruine, c'est-à-dire la probabilité que le scénario traduisant un échec se réalise, et d'estimer le niveau de réserve initiale pour rendre cette probabilité de ruine suffisamment faible.
Les modèles de ruine sont des modèles dynamiques en général à temps continu qui décrivent l'évolution des réserves d'une compagnie.
Dans le cadre des assurances, le but est de modéliser l'évolution des réserves en fonction de :
- sa réserve initiale
- des hypothèses faites sur le processus d'arrivée des sinistres et de la distribution des montants.
- des hypothèses sur le processus de rentrée des primes d'assurances.

Dans de nombreux modèles, on dispose d'expressions asymptotiques de la probabilité de ruine, quand le niveau de richesse initial est très élevé. Un des apports de ce mémoire est de proposer des méthodes efficaces de calcul de probabilité de ruine, pour certains modèles, et ce quel que soit le montant de la réserve initiale.

Au cours de cette étude, nous considérons un modèle de risque de la forme

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \tag{0.1}$$

où $R(t)$ est le processus de risque qui modélise le surplus financier d'une compagnie d'assurance au temps t, u est le capital initial, c est le taux auquel sont reçues les primes par unité de temps, et $\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ est le processus de pertes agrégées (que nous appellerons processus de pertes). Le choix de $\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ détermine le processus $R(t)$.
Dans ce mémoire, dans un premier temps, nous considérerons le cas où le processus $(N(t))_t$ est un processus de Poisson (modèle de Cramér-Lundberg) et le cas où c'est un processus de renouvellement (Modèle de Sparre-Andersen). Les modèles de risque Poisson composé (Cramér-Lundberg) et de renouvellement (Sparre-Andersen) sont des modèles classiques utilisés pour décrire le mécanisme d'arrivées des sinistres et de leurs montants.
Le premier à avoir vu le jour, est particulièrement étudié en raison de propriétés qui facilitent son étude, mais il reste finalement assez éloigné de la réalité. Le modèle de Sparre-Andersen est une généralisation du premier.
Une extension du modèle de Sparre-Andersen englobant le modèle classique a été obtenu par Gerber (1970).
Dans ces deux modèles, on suppose que les temps d'arrivée des sinistres et les montants de sinistres sont des variables aléatoires indépendantes.
Cette hypothèse peut s'avérer inadéquate dans certains contextes.
Dans un second temps, on s'intéressera au cas où la dépendance entre montants des sinistres est relaxée (modèle linéaire).
Plusieurs autres choix ont été proposés pour $\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ (modèle perturbé avec diffusion ou avec drift Brownien, modèle Markovien ergodique, etc ...).

Ce mémoire est organisé comme suit :
Dans le premier chapitre, on étudie quelques résultats concernant certains processus et leur propriétés (processus de Poisson, processus de renouvellement, martingale, etc ...).

Le deuxième chapitre comprend deux parties.
Dans la première partie, on se focalise à deux modèles classiques très utilisés en mathématiques actuarielles : le modèle de Cramér-Lundberg est fondé sur un processus de Poisson et celui de Sparre-Andersen est fondé sur un processus de renouvellement.
Au cours de cette partie, on s'intéresse aussi aux bornes d'une probabilité de ruine en utilisant deux approches différentes (martingale et non-martingale).
Dans le premier modèle, on étudie de façon générale la probabilité de ruine sur un horizon donné (infini et fini), en fonction du montant de réserves initiales dont on met l'accent sur les équations exactes (équations intégro-différentielle, relation à l'aide de transformées de Laplace, formule de Picard-Lefèvre, etc ...) en présentant

quelques cas particuliers permettant d'obtenir des formules explicites pour la probabilité de ruine (en particulier dans le cas Poissonien lorsque les coûts individuels suivent une loi exponentielle), en donnant toutes les approximations les plus utilisées (Cramér-Lundberg, De Vylder, diffusion, etc ...).
Dans la deuxième partie, On va étudier une généralisation du modèle classique qui est le modèle perturbé par un mouvement Brownien (voir Gerber (1970)). Plusieurs auteurs ont étudié ce dernier modèle durant ces dernières années (Dufresne and Gerber (1989), Furrer and Schmidli (1994), Schmidli (1994), Gerber and Landry (1998), Wang and Wu (2000), Wang (2001), Tsai (2001, 2003), Tsai and Willmot (2002a, b), Gerber and Shiu(2003a, b), Zhang and Wang (2003), Shiu and Yin (2003).

Dans le troisième chapitre, on termine notre travail sur un exemple concret en donnant les bornes de la probabilité de ruine dans un modèle linéaire quand les sinistres admettent une représentation de type ARMA.

Nous terminons ce travail par une conclusion générale et proposons quelques prespectives de recherche.

Les notations différent du contexte ou elles apparaissent.

Chapitre 1

Outils Préliminaires

Pour une meilleure compréhension de la notion de probabilité de ruine, il est nécessaire de rappeler certains processus et leur propriétés.

1.1 Quelques notions sur les processus

1.1.1 Processus stochastiques

Définition 1.1. Un processus stochastique $\{X_t,\ t \in T\}$ est une suite de variables aléatoires indéxées par un paramètre t et définies sur un même espace de probabilité $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$.
La variable X_t représente l'état du processus au temps t et l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour cette variable est appelée l'espace des états du processus et sera noté E.

1.1.2 Processus stationnaires

Définition 1.2. Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in T}$ est dit stationnaire au sens strict si sa loi de probabilité est invariante par translation i.e.,
$(X_{t_1}, X_{t_2} \cdots X_{t_n})$ et $(X_{t_1+s}, X_{t_2+s}, X_{t_n+s})$ ont la même loi, $\forall t_1 < t_2 < \cdots < t_n, s \in T$.

Définition 1.3. Un processus stochastique est dit stationnaire au sens large ou faiblement stationnaire si :

1. $E(X(t)) = m < \infty$, indépendant de t.
2. $Var(X(t)) = \sigma^2 < \infty$, indépendant de t.
3. $Cov(X(t), X(s))$ ne dépend que de la différence $\mid t - s \mid$.

1.1.3 Processus à accroissements indépendants

Définition 1.4. Un processus X est dit à accroissements indépendants si :
$\forall t_0 < t_1 < \cdots < t_n \in T$, les variables aléatoires
$(X_{t_1} - X_{t_0}), (X_{t_2} - X_{t_1}), \ldots, (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ sont indépendantes.

1.1.4 Processus à accroissements stationnaires ou Processus homogène

Définition 1.5. Un processus $(X_t)_{t \in T}$ est dit homogène dans le temps si la loi de $(X_{t+s} - X_t)$ ne dépend que de $s, \forall t$.

Définition 1.6 (Processus de comptage).
Un processus stochastique $N = (N_t)_{t \in T = \mathbb{R}_+}$ est dit processus de comptage ou processus de dénombrement si :

1. $N(t) \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+$, $N(0) = 0$.
2. Si $s < t$ alors $N(s) \leq N(t)$
   où $N(t) - N(s)$, représente le nombre d'événements se produisant dans l'intervalle $[s, t]$.

Un des processus de comptage le plus utilisé est le processus de Poisson.

1.1.5 Processus de Poisson

Définition 1.7. Un processus de comptage est dit processus de Poisson si :

$$Pr[N_{dt} = k] = \begin{cases} o(dt) & \text{si } k \geq 2 \\ \lambda(dt) + o(dt) & \text{si } k = 1 \\ 1 - \lambda(dt) + o(dt) & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

où $o(t)$ est une fonction tendant plus vite vers 0 que l'identité, i.e., telle que

$$\lim_{t \to 0} o(t)/t = 0$$

Le coefficient λ est dit taux du processus ou intensité du processus.
On note $P[N_t = k] = P_k(t)$

Remarque 1.1. Le processus de Poisson est un processus à accroissements indépendants et à accroissements stationnaires.

Proposition 1.1 ([64]). *Si $N = (N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$, alors*

$$P_n(t) = e^{-(\lambda t)} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \ k \in \mathbb{N}, \ t \in \mathbb{R}_+$$

i.e., N_t est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λt.

1.1.6 Processus de Poisson composé

Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

- $(N(t);\ t \geq 0)$ est un processus de Poisson d'intensité λ.
- $X_1, X_2, \dots$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de distribution commune F .
- La suite aléatoire $(X_t)_{t\geq 1}$ et le processus $(N(t);\ t \geq 0)$ sont indépendants.

Le processus aléatoire $(S(t);\ t \geq 0)$, défini par :

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

est appelé un processus de Poisson composé d'intensité λ et de distribution F.

On obtient également par conditionnement sur N les premiers moments de S

Proposition 1.2 (Identité de Wald [64]).

$$E[S(t)] = E(N(t))E(X(t))$$

$$Var[S(t)] = Var(X(t))E(N(t)) + E^2(X(t))Var(N(t))$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
E[S(t)] &= E\left[E[X_1(t) + X_2(t) + \cdots + X_{N(t)}(t)/N(t) = k]\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E[X_1(t) + X_2(t) + \cdots + X_{N(t)}(t)/N(t) = k]P[N(t) = k] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E[X_1(t) + X_2(t) + \cdots + X_k(t)]P[N(t) = k] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\big[\sum_{i=1}^{k} X_i(t)\big]P[N(t) = k] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} kE[X(t)]P[N(t) = k] \\
&= E[X(t)]\sum_{k=0}^{\infty} kP[N(t) = k] \\
&= E[X(t)]E[N(t)]
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$E[S(t)] = E[X(t)]E[N(t)]$$

$$
\begin{aligned}
Var[S(t)] &= E[S^2(t)] - E^2[S(t)] \\
&= E[\big(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i(t)\big)^2] - (E[X(t)]E[N(t)])^2 \\
&= E\big[E[\big(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i(t)\big)^2/N(t)=k]\big] - (E[X(t)]E[N(t)])^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\big[E[(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i(t))^2/N(t)=k]\big] - (E[X(t)]E[N(t)])^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E[(\sum_{i=1}^{k} X_i(t))^2]P[N(t)=k] - (E[X(t)]E[N(t)])^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\big[Var(\sum_{i=1}^{k} X_i(t)) + E^2(\sum_{i=1}^{k} X_i(t))\big]P[N(t)=k] \\
&- (E[X(t)]E[N(t)])^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}[kVar[X(t)] + k^2E^2]P[N(t)=k] - (E[X(t)]E[N(t)])^2 \\
&= \big[\sum_{k=0}^{\infty} kVar[X(t)]P[N(t)=k] + \sum_{k=0}^{\infty} k^2E^2\big]P[N(t)=k] \\
&- (E[X(t)]E[N(t)])^2 \\
&= Var[X(t)]E[N(t)] + E^2[(X)]E[(N(t))^2] - E^2[X(t)]E^2[N(t)] \\
&= Var(X)E[N(t)] + E^2[X(t)]Var[N(t)]
\end{aligned}
$$

Ce qui donne

$$Var[S(t)] = Var(X)E[N(t)] + E^2[X(t)]Var[N(t)]$$

$\square$

1.1.7 Lien entre processus de Poisson et la loi exponentielle

On considère un processus de Poisson $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de taux λ.
Soit τ_i le temps de réalisation du $i^{\text{ème}}$ événement.
On pose

$$
\begin{cases}
T_1 = \tau_1, & \tau_0 = 0 \\
T_2 = \tau_2 - \tau_1 & \\
\vdots & \\
T_n = \tau_n - \tau_{n-1}, & \forall n \geq 1
\end{cases}
$$

le temps séparant la réalisation du $n^{\text{ième}}$ événement du $(n-1)^{\text{ième}}$ événement.

Proposition 1.3 ([63]). *Les variables aléatoires T_n sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ.*

La proposition suivante est une généralisation de la proposition 1.3.

Proposition 1.4 ([64]). *Posons* $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$*, alors* S_n *suit une loi* $\Gamma(n, \lambda)$ *où* S_n *est le temps de réalisation du* $n^{\text{ième}}$ *événement.*

1.1.8 Processus Gaussien

Un processus aléatoire est dit Gaussien si tous les vecteurs finidimensionnelles extraits sont Gaussiens.

1.1.9 Processus et fonction de renouvellement

Définition 1.8 (Processus ponctuel). Un processus ponctuel sur $]0, +\infty[$ est une suite $(S_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires réelles, définie sur un même espace de probabilité (Ω, Θ, P), telle que :
$0 < S_1(\omega) < S_2(\omega) < \cdots < S_k(\omega) < \cdots$ et $\lim_{k\to+\infty} S_k(\omega) = +\infty$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Soit F une fonction de répartition continue telle que $F(0) = 0$.
Un processus de renouvellement est un processus ponctuel sur $\mathbb{R}_+$ représentant les instants d'occurrence d'un événement tel que les durées inter-occurrence successives sont des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi, de fonction de répartition F. Un tel processus peut être défini autrement par :

- la suite (X_n) des durées entre les occurrences successives,
- la suite (T_n) des instants d'occurrences

$$\forall n \geq 1, \quad T_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

  T_n est le temps de réalisation du $n^{\text{ième}}$ événement
- le processus de comptage $\{N_t; t \geq 0\}$ où N_t représente le nombre d'occurrences dans l'intervalle $[0, t]$. En effet, on passe du processus de comptage aux instants d'occurrence par la relation suivante

$$\forall n \geq 0, \ (N_t \geq n) = (T_n \leq t) \tag{1.1}$$

En premier lieu, nous cherchons à caractériser la loi de la variable T_n.
Soit F_n la fonction de répartition de la variable T_n.
Bien entendu, nous avons

$$F_1 = F$$

et

$$T_n = T_{n-1} + X_n$$

Nous avons la formule suivante

$$F_2(x) = \int_0^\infty F(x-y)dF(y) = \int_0^x F(x-y)dF(y)$$

De même, nous pouvons écrire

$$F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(x-y)dF(y).$$

De la relation (1.1), nous obtenons la loi de la variable N_t pour tout $t \geq 0$. En effet, nous avons

$$\forall n \geq 0, \quad P(N_t \geq n) = F_n(t).$$

L'espérance de la variable N_t définit une grandeur particulièrement importante appelée fonction de renouvellement.

Définition 1.9. On appelle fonction de renouvellement, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \geq 0, \quad m(t) = E[N_t].$$

Nous pouvons énoncer le résultat suivant.

Proposition 1.5 ([64]).

$$\forall t \geq 0, \quad m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) < \infty.$$

Preuve. Nous avons pour tout $m \leq n$

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-m}(t-y)dF_m(y)$$

Comme F_{n-m} est croissante,

$$\forall y \leq t, \quad F_{n-m}(t-y) \leq F_{n-m}(t)$$

Nous pouvons écrire

$$\forall 1 \leq m \leq n-1, \quad F_n(t) \leq F_{n-m}(t)F_m(t)$$

De même, pour tout $r \geq 1$ et $0 \leq k \leq r-1$

$$F_{nr+k}(t) \leq F_{(n-1)r+k}(t)F_r(t) \leq F_k(t)[F_r(t)]^n$$

Pour tout $t \geq 0$, il existe un $r \geq 1$ tel que $F_r(t) < 1$. Ce qui implique que la série converge au moins aussi vite qu'une série géométrique. □

Remarque 1.2. La fonction de renouvellement est donc définie comme une somme de fonctions de répartition. Cela lui confère un certain nombre de propriétés immédiates. En particulier, la fonction m est croissante, continue à droite et

$$\lim_{t \to \infty} m(t) = +\infty$$

Puisque les T_n sont positives, nous avons $m(0) = 0$.
Enfin, il est utile de remarquer que $m(t)$ est bien définie.

1.1.10 Equations de renouvellement

Proposition 1.6 ([47]). *On considère un processus de renouvellement de fonction de répartition F et de fonction de renouvellement m alors,*

$$\forall t \geq 0, \quad m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)dF(x)$$

Preuve. En conditionnant à l'instant de première occurrence du processus.
Soit $t > 0$, nous avons

$$m(t) = E[E[N(t)/X_1]]$$

Or,

$$E[N(t)/X_1 = x] = \begin{cases} 0 & \text{si } t < x \\ 1 + m(t-x) & \text{si } t \geq x. \end{cases}$$

En intégrant, nous obtenons

$$m(t) = \int_0^\infty E[N(t)/X_1 = x]dF(x) = \int_0^t (1 + m(t-x))dF(x)$$

Ce qui donne

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)dF(x)$$

□

1.1.11 Solution des équations de renouvellement

Soit F une fonction de répartition définie sur $\mathbb{R}_+$ et telle que $F(0) = 0$.
On appelle équation de renouvellement associée à F, toute équation intégrale de la forme

$$\forall t \geq 0, \quad A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x)dF(x)$$

où A est une fonction inconnue et a une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ donnée.

Théorème 1.1 ([64]). *Si a est une fonction bornée définie sur $\mathbb{R}_+$, l'équation de renouvellement associée à F*

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x)dF(x), \quad \forall t \geq 0$$

admet une solution unique, bornée sur tout intervalle fini, donnée par

$$\forall t \geq 0, \quad A(t) = a(t) + \int_0^t a(t-x)dm(x)$$

où m est une fonction de renouvellement.

Proposition 1.7 ([63]). *On considère un processus de renouvellement de fonction de répartition F et on suppose que*

$$E[X_1] = \int_0^\infty x dF(x) < \infty,$$

alors

$$E[T_{N_t+1}] = E[X_1](1 + E[N_t]).$$

Preuve. Posons $A(t) = E[T_{N_t+1}]$
En conditionnant par l'instant de première occurrence du processus, on a

$$E[T_{N_t+1}/X_1 = x] = \begin{cases} x, & t < x \\ x + A(t-x), & t \geq x \end{cases}$$

Après intégration,

$$A(t) = \int_0^t \big(x + A(t-x)\big) dF(x) + \int_t^\infty x dF(x) = E[X_1] + \int_0^t A(t-x) dF(x)$$

D'après la proposition (1.6),

$$A(t) = E[X_1] + E[X_1] \int_0^t dm(t) = E[X_1]\big(1 + m(t)\big)$$

Ce qui donne

$$A(t) = E[T_{N_t+1}] = E[X_1](1 + E[N_t])$$

□

1.1.12 Théorème de renouvellement

Le théorème de renouvellement précise le comportement asymptotique de la solution d'une équation de renouvellement

$$\forall t \geq 0, \quad A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x) dm(x)$$

Théorème 1.2 ([63]). *Soient a une fonction monotone sur $\mathbb{R}_+$ telle que*

$$\int_0^\infty \mid a(t) \mid dt < \infty$$

et F une fonction de répartition continue telle que $F(0) = 0$.
Posons

$$\mu = \int_0^\infty x dF(x)$$

La solution de l'équation de renouvellement

$$\forall t \geq 0, \quad A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x) dm(x)$$

vérifie

$$\lim_{t \to \infty} A(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \int_0^\infty a(t) dt, & \mu < \infty\,; \\ 0, & \mu = \infty. \end{cases}$$

Proposition 1.8.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

Théorème 1.3 (Théorème élémentaire de renouvellement [28]). *On considère un processus de renouvellement de fonction de répartition F et on suppose que*

$$\int_0^\infty x dF(x) < \infty$$

alors,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{E[X_1]}$$

Preuve. La démonstration se fait en deux étapes.

Etape 1

La relation $T_{N(t)+1} > t$ est toujours vérifiée.

D'après la proposition (1.7), nous avons

$$\forall t \geq 0, \quad E[X_1]\big(1 + m(t)\big) > t$$

Ceci implique

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{m(t)}{t} > \frac{1}{E[X_1]} - \frac{1}{t}$$

et

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \geq \frac{1}{E[X_1]}$$

Etape 2

Il s'agit de démontrer que l'on peut " inverser" l'inégalité précédente. Pour ce faire, choisissons un réel $\alpha > 0$ et posons

$$\forall i \geq 1, \quad X_i^\alpha = \min(\alpha, X_i)$$

Considèrons le processus de renouvellement associé à la fonction de répartition des X_i^α. Notons m^α la fonction de renouvellement correspondante. Du fait que

$$X_i^\alpha \leq \alpha$$

$$m(t) \leq m^\alpha(t)$$

et

$$E[T^\alpha_{N^\alpha(t)+1}] \leq t + \alpha$$

Ceci implique que

$$E[X_1^\alpha]\big(1 + m(t)\big) \leq t + \alpha$$

et

$$\frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{E[X_1^\alpha]} + \frac{1}{t}\left(\frac{\alpha}{E[X_1^\alpha]} - 1\right)$$

En faisant tendre α vers l'infini dans l'inégalité précédante, on obtient

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \leq \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{E[X_1^\alpha]} = \frac{1}{E[X_1]}$$

Les inégalités obtenues aux étapes 1 et 2 montrent que la limite existe et que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{E[X_1]}$$

□

1.2 Mouvement Brownien

1.2.1 Mouvement Brownien standard

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un processus $(B_t, t \geq 0)$ sur cet espace.

Définition 1.10. Le processus $\{B_t, t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien standard si :

1. $P(B_0 = 0) = 1$ (le mouvement Brownien est issu de l'origine).
2. $\forall n,\ \forall t_i, 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, les variables $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \cdots, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0})$ sont indépendantes et à accroissement indépendants.
3. $\forall s \leq t,\ B_t - B_s$ est une variable réelle de loi Gaussienne, centrée de variance $(t-s)$.
4. Pour tout (t, s), la variable $B_{t+s} - B_t$ est indépendante de la tribu du passé avant t, soit $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_u,\ u \leq t)$

Définition 1.11. Le processus $\{B_t, t \geq 0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est appelé mouvement Brownien standard si :

1. pour tout $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, les variables aléatoires $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ sont indépendantes (accroissement indépendants).
2. pour tout $i \geq 1$, l'accroissement $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ admet pour loi la loi Gaussienne dans $\mathbb{R}^d$ de moyenne nulle et de matrice de covariance $cov(t_i - t_{i-1})$.

1.2.2 Généralisation

Le processus $(Z_t)_{t\in T}$ défini par $Z_t = a + B_t$ est un mouvement Brownien issu de a.
On dit que $(X_t)_{t\in T}$ est un mouvement Brownien de drift μ et de coefficient de diffusion σ si :

$$X_t = x + \mu t + \sigma B_t$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien.
La variable aléatoire X_t est une variable aléatoire Gaussienne d'espérance $x + \mu t$ et

de variance $\sigma^2 t$.
Pour tout (t, s), la variable aléatoire $X_{t+s} - X_t$ est indépendante de
$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_u,\ u \leq s)$.
Soit $B = (B_t, t \geq 0)$ un mouvement Brownien et $\mathcal{F}_t = \sigma(B_t, t \geq 0)$.

Proposition 1.9 ([64]). *Le processus B est un processus Gaussien, d'espérance nulle et de covariance $cov(B_t, B_s) = s \wedge t = \min(s, t)$.*
Le processus $(X_t)_t$ où $(X_t = x + \mu t + \sigma B_t,\ t \geq 0)$ est un processus Gaussien d'espérance $x + \mu t$ et de covariance
$E[(X_t - E(X_t))(X_s - E(X_s))] = \sigma^2 (s \wedge t) = \sigma^2 \min(s, t)$.

Théorème 1.4 (Théorème de Donsker[64]). *Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi centrée, de variance 1.*
On pose $S_n^* = \sum_{k=1}^{n} X_k$, alors le processus

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} S^*_{[nt]},\ t \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

où $[nt]$ est la partie entière de (nt)
converge en Loi vers un mouvement Brownien quand $n \to \infty$.

1.3 Rappels sur la transformée de Laplace

La transformée de Laplace est un outil analytique fréquemment utilisé dans l'étude des processus aléatoires. En particulier, il est souvent utilisé dans les processus de renouvellement pour résoudre certaines équations fonctionnelles ou différentielles.

Définition 1.12. Une fonction continue f de $\mathbb{R}_+$ est d'ordre exponentiel s'il existe $\alpha > 0$, $t_0 > 0$ et $a > 0$ tels que pour tout $t > t_0$,

$$\mid f(t) \mid \leq a\, e^{\alpha t}$$

Définition 1.13. On appelle transformée de Laplace d'une fonction f d'ordre exponentiel α la fonction L_f définie par :

$$\forall s > \alpha, \quad L_{f(s)} = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

La transformée de Laplace est définie comme un opérateur intégral sur l'ensemble des fonctions exponentielles.

Théorème 1.5 ([43]). *Soient f et g deux fonctions d'ordre exponentiel identique α.*
Supposons que

$$\forall s > \alpha, \quad L_{f(s)} = L_{g(s)}$$

alors

$$f = g \quad presque\,partout$$

Exemple 1.1. La transformée de Laplace d'une constante

$$\forall s > 0, \quad L_{1(s)} = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

Exemple 1.2. La transformée de Laplace d'une fonction exponentielle.
Soit $a \in \mathbb{R}$

$$\forall s > a, \quad L_{e^{at}(s)} = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \frac{1}{s-a}$$

Proposition 1.10 ([26]). *Soient f, g deux fonctions d'ordre exponentiel identique α.*
La transformée de Laplace du produit de convolution $(f * g)$ défini par :

$$\forall t > 0, \quad (f * g)(t) = \int_0^t f(t-x) g(x) dx$$

est égale à :

$$\forall s > \alpha, \quad L_{(f*g(s))} = L_{f(s)} L_{g(s)}$$

Preuve.

$$L_{f*g(s)} = \int_0^{\infty} \int_0^t f(t-x) g(x) e^{-st} dx dt$$

En posons $u = t - x \quad$ et $\quad v = x$, on obtient

$$L_{f*g(s)} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(u) g(v) e^{-(u+v)} du dv$$

En utilisant le théorème de Fubini, on a bien :

$$L_{(f*g)(s)} = L_{f(s)} L_{g(s)}$$

□

Proposition 1.11 ([43]). *Soit f une fonction d'ordre exponentiel α, dérivable et de dérivée continue, alors*

$$\forall s > \alpha, \quad L_{f'(s)} = s L_{f(s)} - f(0)$$

Preuve.

$$\forall s > \alpha, \quad L_{f'(s)} = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$L_{f'(s)} = s L_{f(s)} - f(0)$$

□

1.3.1 La transformée de Laplace d'une variable aléatoire positive

Pour une variable aléatoire réelle positive X admettant une fonction de densité f_X, la transformée de Laplace est une notion similaire à la fonction caractéristique. Il s'agit en fait de la transformée de la fonction de densité :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+, \quad L_{X(s)} = E(e^{-sX}) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f_X(x)dx$$

Proposition 1.12 ([64]). *La transformée de Laplace de la fonction de renouvellement est égale à*

$$L_{m(s)} = \frac{L_{F(s)}}{1 - L_{f(s)}} = \frac{L_X(s)}{s(1 - L_X(s))}, \quad \forall s > 0$$

où f est la fonction de densité de la loi de renouvellement et L_X la transformée de cette fonction de densité.

1.4 Les chaînes de Markov

1.4.1 Les chaînes de Markov finies et homogènes à temps discret

Définition 1.14. Une chaîne de Markov à temps discret est un processus stochastique $\{X_n, \ n = 0, 1, \ldots\}$, défini sur un espace d'états E fini ou dénombrable et vérifiant la propriété de Markov

$$P[X_n = i \ / X_0, \cdots, \ X_{n-1}] = P[X_n = i \ / X_{n-1}],$$

pour tout $i \in E$ et quel que soit $n \geq 1$.

Définition 1.15. Une chaîne de Markov à temps discret est homogène (dans le temps) si, $\forall (i, j) \in E^2$ et $\forall n$,

$$P[X_n = j \ / X_{n-1} = i] = P[X_{n+k} = j \ / X_{n+k-1} = i], \ \forall k \geq 0.$$

1.4.2 Probabilité de transition et matrice de transition

Pour une chaîne de Markov homogène $\{X_n, \ n = 0, 1, \ldots\}$, on a

$$P[X_n = j \ / X_{n-1} = i] = P[X_1 = j \ / X_0 = i], \ \ \forall n \geq 1$$

$$P_{ij} = P[X_1 = j \ / X_0 = i], \ \ \forall (i, j) \in E^2$$

où P_{ij} est la probabilité de passer de l'état i à l'état j en une étape.
On associe à une chaîne de Markov homogène finie, une matrice de transition $(P_{ij})_{i,j \in E}$.

1.4.3 Chaîne de Markov à temps continu

Définition 1.16. Un processus $\{X(t),\ t \geq 0\}$ est une chaîne de Markov à temps continu, appelé aussi processus de Markov homogène si et seulement si :
Pour $i, j \in E,\ s \geq 0,\ t \geq 0\ et\ 0 \leq u \leq s$,

$$P(X(t+s) = j/X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s) = P(X(t+s) = j/X(s) = i) = P_{ij}$$

1.4.4 Générateur infinitésimal d'un processus de Markov

On suppose que $\forall (i,j) \in E^2$, la fonction $P_{ij}(.)$ est continue en 0
i.e.,

$$\lim_{t\to 0} P_{ij}(t) = P_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - P_{ii}(t)}{t} = q_i$$

et

$$\lim_{t\to 0} \frac{P_{ij}(t)}{t} = q_{ij}, i \neq j$$

On notera alors que $q_{ii} = -q_i$ et $q_{ij} = P'_{ij}(0)$
On appelle alors générateur infinitésimal de $(X_t)_t$ la matrice $q = (q_{ij})_{i,j\in E}$.

Remarque 1.3. On a

$$\begin{cases} P_{ij}(t) = q_{ij}t + o(t), i \neq j \\ 1 - P_{ii}(t) = q_i t + o(t) \end{cases}$$

q_{ij} est appelé le taux de transition de i vers j, $i \neq j$.

q_i est le taux de transition à partir de i.

1.5 Files d'attente

1.5.1 La notation de Kendall

Pour mieux s'y retrouver dans les nombreuses variantes possibles dans la manière dont fonctionne une file d'attente, on utilise la notation de Kendall qui est donnée par :

$$A/S/P/K/D$$

où :
- A désigne la loi des inter-arrivées.
- S désigne la loi de service.
- P désigne le nombre de serveurs.
- K désigne la capacité du système.
- D désigne la descipline de service.

On utilise seulement la représentation de M / M / s.
La notation M / M / s signifie qu'on est présence d'une file à s guichets.
Le processus $(X_t)_t$ des arrivées est Poissonien de taux λ et le taux de service au guichet est exponentiel de paramètre μ ($D \sim E(\mu)$).
Le processus $(Y_t)_t$ des sorties est Poissonien de taux μ.
Les inter-arrivées sont indépendantes et de même loi .

1.6 Martingales et temps d'attente

Définition 1.17. Soit T un intervalle de $\mathbb{R}$, en général $T = \mathbb{R}_+$, et un processus $(X_t)_{t\in T}$ défini sur le même espace (Ω, Θ, P).
Une filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ est une famille croissante de sous tribus de Θ i.e.,
$\forall s < t,\ \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Définition 1.18. Soit $(X_t)_{t\in T}$ un processus.
$(X_t)_{t\in T}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ si $\forall t,\ X_t \in \mathcal{F}_t$ i.e., X_t et $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

Définition 1.19. Soit $(X_t)_t$ un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$.
On dit que $(X_t)_{t\in T}$ est une martingale si :

1. $(X_t)_t \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Theta)$.
2. $\forall s, t \in T,\ s < t,\ E[X_t/\mathcal{F}_s] = X_s,\ p.s.$

Définition 1.20. $(X_t)_{t\in T}$ est une $\mathcal{F}_t$ sous- martingale (respectivement une $\mathcal{F}_t$ sur-martingale) si :

1. $\forall t,\ (X_t)_t$ est $\mathcal{F}_t$- mesurable.
2. $\forall s, t \in T,\ s < t,\ E[X_t/\mathcal{F}_s] \geq X_s$, p.s (resp. $E[X_t/\mathcal{F}_s] \leq X_s,\ p.s$)

1.6.1 Théorème d'arrêt - Inégalité de Doob

Définition 1.21. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration. On appelle temps d'arrêt une variable aléatoire $T : T \to [0, \infty[$ telle que $\forall t \geq 0, \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Théorème 1.6 (Théorème d'arrêt [63]). *Soit $(X_t)_t$ une $\mathcal{F}_t$ - martingale et T un $\mathcal{F}_t$- temps d'arrêt p.s. borné (i.e., $T \leq c$ p.s. où c est une constante). Supposons que $(X_t)_t$ est continue à droite.*
Soit $0 \leq s \leq T$, alors

$$E(X_T/\mathcal{F}_s) = X_s \ \ p.s.$$

Le résultat reste vrai :

- *pour une sous-martingale, avec la relation $E(X_T/\mathcal{F}_s) \geq X_s$ p.s.*
- *pour une sur-martingale, avec la relation $E(X_T/\mathcal{F}_s) \leq X_s$ p.s.*

Théorème 1.7 ([63]). *Soit (Y_t) une martingale à trajectoires continues. Supposons que τ soit un temps d'arrêt tel que*

$$P(\tau < \infty) = 1$$

Supposons de plus qu'il existe une constante K telle que $\mid Y_{\tau\wedge t} \mid \leq K$, $\forall t$, alors

$$E[Y_\tau] = E[Y_0]$$

Proposition 1.13 (Inégalité de Doob [63]). *Soit $(X_t)_t$ une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable et continue à droite, $\forall T \geq 0$, $\forall \lambda > 0$,*

$$P(\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t \mid > \lambda) = \frac{1}{\lambda^2} E(X_T^2)$$

1.6.2 Martingale exponentielle

Proposition 1.14 ([63]). *Soit $(X_t)_t$ un Mouvement Brownien standard. Notons*

$$Y_t = \exp(aX_t - ta^2/2), \quad \forall t \geq 0$$

où $a \in \mathbb{R}$, alors $(Y_t)_t$ est une martingale par rapport au mouvement Brownien, i.e., pour $s < t$,

$$E[Y_t/X_r,\ r \leq s] = Y_s$$

1.7 Rappels de probabilité

1.7.1 Mélange de lois exponentielles

Définition 1.22. Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n$ une série de poids non négatifs satisfaisant $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.
Soient $F_1(x), F_2(x), \cdots, F_n(x)$ une suite de fonctions de répartition de lois exponentielles de paramètres $b_1, b_2, \cdots, b_n$.
La fonction de répartition suivante :

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i F_i(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \{1 - \exp(-b_i x)\}$$

est appelée mélange de n distributions exponentielles.
Sa fonction de densité est donnée par :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \exp(-b_i x).$$

La transformée de Laplace du mélange de lois exponentielles est donnée par :

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{b_i}{b_i + x}, \qquad x > - \min_{i=1\cdots n} b_i,$$

Le moment d'ordre k est donné par :

$$E[X^k] = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{k!}{b_i^k}$$

En particulier, on obtient

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^{-1}$$

et

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X] = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{2}{b_i^2} \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^{-1} \right)^2$$

1.7.2 Loi type phase

Définition 1.23.

1. Un état j d'une chaîne de Markov est dit absorbant si le processus ne peut plus quitter cet état une fois qu'il y est entré i.e., $P_{jj}^{(1)} = 1$.
2. Un état j est transient si $\sum_{n \geq 0} P_{jj}^{(n)} < \infty$.

Définition 1.24. Une distribution de type phase est définie par une chaîne de Markov à temps continu finie composée de plusieurs états transitoires (les phases) et d'un état absorbant. Elle correspond à la probabilité d'être dans l'état absorbant en fonction du temps.

Les distributions exponentielles, le mélange d'exponentielles, Erlangian et Coxian appartiennent à cette famille de distribution (voir, Neuts(1981)).
On considère un processus de Markov avec $\{1, 2, \cdots, m\}$ états transitoires, $(m + 1)$ est un état absorbant et Q est le générateur infinitésimal de la forme :

$$Q = \begin{pmatrix} T & t_0 \\ o & 0 \end{pmatrix}$$

Où T est la matrice carrée d'ordre m.
Les diagonales T_{ii} sont nécessairement négatives et le vecteur colonne $t_0 = -Te$ représente les taux auxquels les transitions se font des états transitoires à l'état absorbant où e est le vecteur ligne unitaire.
Supposons que le processus démarre de i avec une probabilité $\alpha_i, \;\; i = 1, \cdots, m + 1$, et posons $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$.
Dans la plus part des cas $\alpha_{m+1} = 0$.
Connaissant la matrice d'intensité et le vecteur de répartition initial, on peut calculer les quantités classique des lois de probabilité :

Proposition 1.15 ([25]). *Soit F une loi phase type de caractéristique (E, α, T). Alors :*

1. *La fonction de répartition du temps absorbant en état $(m+1)$ est donnée par :*

$$F(x) = 1 - \alpha \exp(Tx)e, \quad x \geq 0$$

où $\exp(Tx)$ *est la matrice exponentielle et* $\exp(Tx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Tx)^k}{k!}$.

2. *Sa fonction de densité correspondante est donnée par :*

$$f(x) = F'(x) = \alpha \exp(Tx)t_0, \quad x \geq 0.$$

3. *Sa transformée de Laplace est de la forme :*

$$\Phi_X(s) = E(e^{-sX}) = \alpha(sI - T)^{-1}t_0.$$

4. *Le moment non centré d'ordre n est donnée par :*

$$E(X^n) = \int_0^{\infty} x^n F(dx) = (-1)^n n! \alpha T^{-n} e.$$

1.7.3 Loi Subexponentielle

Définition 1.25. Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ un échantillon d'une variable aléatoire X positive de répartition F tel que $F(x) < 1$, $\forall x > 0$.
On note $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$, la queue de F et
$\overline{F}^{n*}(x) = 1 - F^{n*}(x) = P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n > x)$ la queue de n produit de convolution de F.
F est dite Subexponentielle et on la note par S si elle vérifiée l'une des conditions suivantes :

1. $\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F}^{n*}(x)}{\overline{F}(x)} = n, \quad$ pour $n \geq 2$.
2. $\lim_{x \to \infty} \frac{P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n > x)}{P(\max(X_1 + X_2 + \cdots + X_n > x) > x)} = 1$, pour $n \geq 2$.

Exemples.

Nom	Paramètres	La queue $\overline{F}$ ou de densité f
Pareto	$\alpha,\ k > 0$	$\overline{F}(x) = \left(\dfrac{k}{k+x}\right)^{\alpha}$
Burr	$\alpha,\ k,\ r > 0$	$\overline{F}(x) = \left(\dfrac{k}{k+x^r}\right)^{\alpha}$
Weibull	$0 < r < 1$	$\overline{F}(x) = e^{-x^r}$
"Almost" Exponentielle	$\alpha > 0$	$\overline{F}(x) = e^{-x(\ln x)^{-\alpha}}$
Log-gamma	$\alpha > 0,\ \beta > 0$	$f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}(\ln x)^{\beta-1}x^{-\alpha-1}$
Log-normal	$\mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$	$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Lemme 1.1 ([27]). *Si $F \in S$, alors pour $\epsilon > 0$ il existe une constante D positive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$,*

$$\frac{\overline{F}^{n*}(x)}{\overline{F}(x)} \leq D(1+\epsilon)^n.$$

1.8 Processus linéaire

Un processus linéaire est un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ formé par une combinaison linéaire (non nécessairement finie) de bruits blancs.

Définition 1.26. $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus linéaire de moyenne μ s'il peut être écrit sous la forme :

$$X_t = \mu + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \epsilon_{t-k} \tag{1.2}$$

où $(\epsilon)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc, de variance σ_ϵ^2, et la suite des coefficients b_k vérifie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k^2 < \infty \tag{1.3}$$

1.8.1 Processus ARMA

Nous pouvons à présent introduire une classe de processus linéaire qui est très importante dans la modélisation des séries chronologiques, à savoir les processus ARMA (Auto Regressive Moving Average).

Définition 1.27. Un processus linéaire stationnaire $\{X_t\}_t$ est appelé ARMA(p, q), $p \geq 0,\ q \geq 0$ s'il existe des constantes $a_1 \cdots a_p$ ($a_p \neq 0$), $\theta_1 \cdots \theta_q$ ($\theta_q \neq 0$) et un processus $\{\epsilon_t\}_t$ tels que :

$$X_t - \sum_{k=1}^{p} a_k X_{t-k} = \epsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \epsilon_{t-j} \tag{1.4}$$

Le processus $\{\epsilon_t\}_t$ est appelé processus des innovations.

Nous allons nous concentrer sur quelques exemples particuliers de processus ARMA.
Si $p = q = 0$, (1.4) devient $X_t = \epsilon_t$ où $(\epsilon_t)_t$ est un bruit blanc faible.
Les deux grandes catégories de processus ARMA que nous étudierons dans un premier temps sont ceux pour lesquels un des deux paramètres p ou q est nul.

- Si $p = 0$ et $q > 0$, les processus ARMA(0, q), notés MA(q), de la forme

$$X_t = \epsilon_t + \sum_{j=i}^{q} b_k \epsilon_{t-j},$$

sont appelés processus à moyenne mobile d'ordre q.

- Si $p > 0$ et $q = 0$, les processus ARMA(p, 0), notés simplement AR(p), de la forme

$$X_t = \epsilon_t + \sum_{k=i}^{p} a_k \epsilon_{t-k},$$

sont appelés autorégressif d'ordre p.

1.9 Distributions à queues légères et lourdes

1.9.1 Distributions à queues légères

Définition 1.28. Une distribution F_X est dite à queue légère, s'il existe des constantes $a > 0$, $b > 0$, telle que :

$$\overline{F_X}(x) = 1 - F_X(x) \leq ae^{-bx}$$

où d'une manière équivalente :

$$\exists z > 0 \quad tel\ que \quad M_X(z) < \infty$$

avec $M_X(z) = E(e^{xz})$

1.9.2 Distributions à queues lourdes

Définition 1.29. Une distribution F_X est dite à queue lourde si pour tout $a > 0$, $b > 0$:

$$\overline{F}_X(x) > ae^{-bx}$$

où d'une manière équivalente, si

$$\forall z > 0, \quad M_X(z) = \infty$$

1.9.3 Exemples des distributions à queues légères et lourdes

1. Distributions à queues légères

Nom	Paramètres	densité
Exponentielle	$\beta > 0$	$f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$
Gamma	$\alpha > 0, \beta > 0$	$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$
Weibull	$\beta > 0, r \geq 1$	$f_X(x) = \beta r x^{r-1} e^{-\beta x^r}$
mélange exponentiel	$\beta_i > 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$	$f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} \{\alpha_i \beta_i e^{-\beta_i x}\}$

2. Distributions à queues lourdes

Nom	Paramètres	densité
Weibull	$\beta > 0, 0 < r < 1$	$f_X(x) = \beta r x^{r-1} e^{-\beta x^r}$
Log-normal	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$
Pareto	$\alpha > 0, \lambda > 0$	$f_X(x) = \frac{\alpha}{\lambda + x} \left(\frac{\lambda}{\lambda + x} \right)^\alpha$
Burr	$\alpha > 0, \lambda > 0, r > 0$	$f_X(x) = \frac{\alpha r \lambda^\alpha x^{r-1}}{(\lambda + x^r)^{\alpha+1}}$

Chapitre 2

Borne et calcul d'une probabilité de ruine

Dans ce chapitre, on abordera la notion de probabilité de ruine dans les modèles classiques à savoir le modèle de Cramér-Lundberg, le modèle de Sparre-Andersen et leurs généralisations.

Dans le premier modèle, est caractérisé pour le fait qu'on peut utiliser les sinistres par un processus de Poisson, tandis que dans le deuxième, les sinistres suivent un processus de renouvellement.

Le calcul de la probabilité de ruine se fera d'une façon exacte ou approximative.

Première partie

Modèles classiques

2.1 Modèle de Cramér-Lundberg

2.1.1 Description du modèle

Le modèle classique de la théorie de ruine représente l'évolution du résultat d'une compagnie d'assurances au cours du temps. Ce modèle est représenté par le processus de risque ou de réserve $\{R_t;\ t \geq 0\}$ donné par :

$$R_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \tag{2.1}$$

Où

- u est le capital initial ou la réserve.

- Les primes sont supposées être collectées à un taux constant c $(c > 0)$ de telle façon que le revenu soit une fonction linéaire du temps.

- Le montant cumulé des sinistres au temps $t \geq 0$ est représenté par le processus stochastique $\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ avec la convention selon laquelle la somme est nulle si $N(t) = 0$; $N(t)$ est le nombre total d'événements qui surviennent dans l'intervalle $[0, t]$, (où nombre de sinistre) et dans ce modèle $N(t)$ est décrit par un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
  Le montant du $i^{\text{ième}}$ sinistre est modélisé par une variable aléatoire X_i à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Les $\{X_i, i \in \mathbb{N}^*\}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(i.i.d)$ et indépendantes du processus de Poisson $(N(t))_t$.
F_X désignera leur fonction de répartition commune, f_X leur densité, d'espérance supposée finie μ et de variance σ^2.

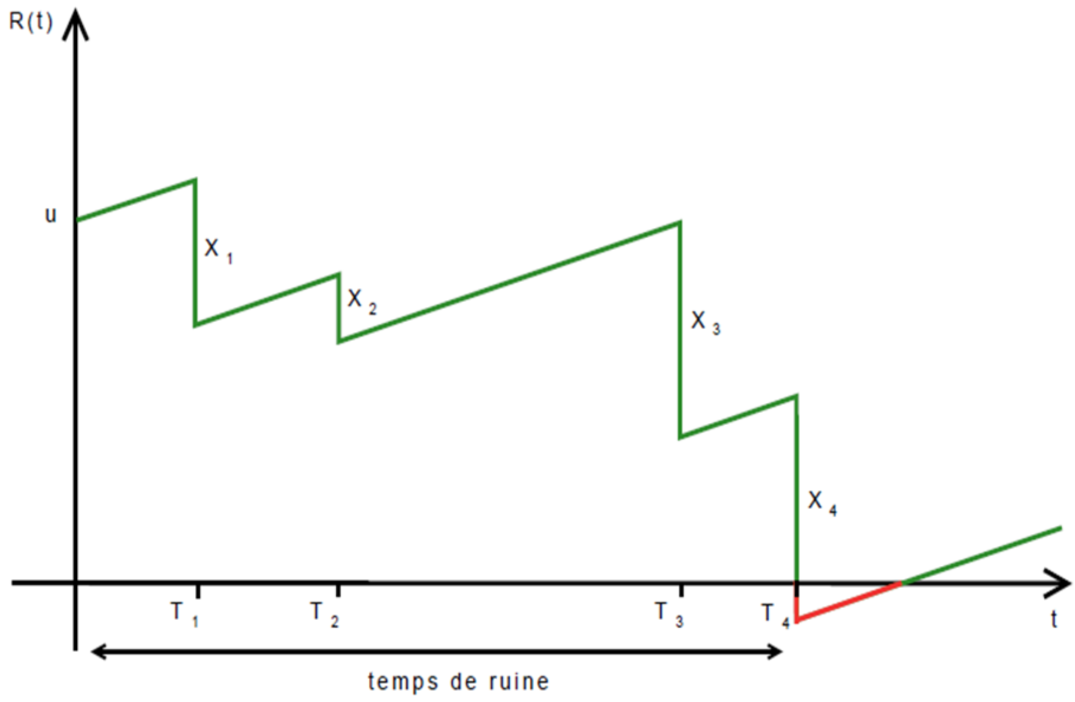

FIG. 2.1 – Trajectoire du processus de risque en fonction du temps

Définition 2.1. Un processus de surplus de sinistres $\{S_t;\ t \geq 0\}$ est défini par :

$$S_t = u - R_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i - ct \tag{2.2}$$

Définition 2.2 (Le temps de ruine).

$$\tau(u) = \inf\{t \geq 0 : R_t < 0\} = \inf\{t \geq 0 : S_t > u\} \tag{2.3}$$

est le premier instant où le processus de réserve devient négatif ou de manière équivalente le processus de surplus excède le niveau u.

La probabilité de ruine peut ainsi être définie à travers le moment de la ruine.
En effet, si on observe la ruine pour le processus $R(t)$, c'est que τ existe et est fini.
Par contre, si on n'observe pas de ruine, alors τ n'existe pas, ou encore $\tau = \infty$.
Soit

$$L = \sup_{0 \leq t < \infty} \{S_t\}$$

et

$$L_T = \sup_{0 \leq t < T} \{S_t\}$$

Avec ces notations, la probabilité de ruine est définie comme suit :

Définition 2.3. La probabilité de ruine sur un horizon infini est donnée par :

$$\Psi(u) = P(\tau(u) < \infty / R_0 = u) = P(L > u / R_0 = u) \tag{2.4}$$

Définition 2.4. La probabilité de ruine sur un horizon fini T est donnée par :

$$\Psi(u, T) = P(\tau(u) \leq T / R_0 = u) = P(L_T > u / R_0 = u). \tag{2.5}$$

La relation entre ces deux probabilités de ruine est donnée par :

$$\lim_{T \to \infty} \Psi(u, T) = \Psi(u). \tag{2.6}$$

Les probabilités de non-ruine (ou de survie) correspondantes sont notées :

$$\varphi(u) = 1 - \Psi(u)$$

et

$$\varphi(u, T) = 1 - \Psi(u, T)$$

2.1.2 Lien entre probabilité de ruine et les équations intégro-différentielles

Puisque $\Psi(u) = P(L > u / R_0 = u)$ alors

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= P(\sup_{n \geq 1} S_n \leq u) \\
&= P(S_n \leq u, \quad n \geq 1) \\
&= P(S_n - S_1 \leq u - S_1, \quad S_1 \leq u, \quad n \geq 2) \\
&= P(S_n - S_1 \leq u - (x - ct), \quad S_1 \leq u, \quad n \geq 2) \\
&= P(S_1 \leq u) P(S_n - S_1 \leq u - (x - ct) / S_1 \leq u, n \geq 2) \\
&= \int_0^\infty P(S_n - S_1 \leq u - (x - ct) / S_1 \leq u, n \geq 2) f_{S_1}(t) dt \\
&= \int_0^\infty P(S_n \leq u - x + ct / S_1 \leq u, n \geq 1) f_{S_1}(t) dt \\
&= \int_0^\infty f_{S_1}(t) \int_0^{u+ct} \varphi(u - x + ct) dF_X(x) dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^{u+ct} f_{S_1}(t) \varphi(u - x + ct) dF_X(x) dt
\end{aligned}$$

2.1.3 Le coefficient de sécurité

Soit un processus $\{Y_t; t \geq 0\}$ défini par :

$$Y_t = ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i \tag{2.7}$$

Le risque moyen sur un intervalle $[0, t]$ est égal à :

$$E[Y_t] = ct - \mu E[N_t] = (c - \lambda\mu) t$$

Nous appelons $(c - \lambda\mu)$ le coefficient de sécurité.

Définition 2.5. Notons par

$$\theta = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$$

θ est dit coefficient de sécurité relatif.

On note $\mu^{(n)} = E(X^n)$, $\quad \mu = \mu^{(1)} = E(X)$, $\rho = \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{1}{1+\theta}$,
alors on a :

Proposition 2.1 ([4]).

1. *$E(S(t)) = t(\lambda\mu - c) = tc(\rho - 1)$.*
2. *$Var(S(t)) = t\lambda\mu^{(2)}$.*
3. *$E(e^{uS(t)}) = e^{t\kappa(u)}$ où $\kappa(u) = \frac{\lambda}{c}(M_X(u) - 1) - u$.*
4. *Le cumulant d'ordre k de $S(t)$ est $t\lambda\mu^{(k)}$ pour $k \geq 2$.*

Par la loi des grands nombres on a :

Proposition 2.2 ([4]).

1. *$S(t)/t \overset{p.s.}{\to} \rho - c$ quand $t \to \infty$.*
2. *Si $\theta < 0, S(t) \to +\infty$ p.s.*
3. *Si $\theta > 0, S(t) \to -\infty$ p.s.*
4. *Si $\theta = 0$, $\liminf\limits_{t\to\infty} S(t) = -\infty, \limsup\limits_{t\to\infty} S(t) = +\infty$.*

Proposition 2.3 ([4]).

- *Si $\theta > 0, R_t \to +\infty$ p.s, quand $t \to +\infty$, dans ce cas, la probabilité de non-ruine est alors non nulle. L'activité est donc rentable.*
- *Si $\theta < 0, R_t \to -\infty$ p.s, quand $t \to +\infty$, et par conséquant $\Psi(u) = 1$, dans ce cas l'activité n'est pas rentable.*

Preuve.

$$\frac{S(t)}{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - ct}{t} \overset{p.s.}{\to} \rho - c, \quad t \to +\infty.$$

Si $\theta < 0$, alors

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{S(t)}{t} > 0,$$

ce qui implique $S(t) \to +\infty$ p.s.
D'où

$$\Psi(u) = 1.$$

Si $\theta > 0$, alors
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{S(t)}{t} < 0,$$
ce qui implique $S(t) \to -\infty$ p.s.

D'où
$$\Psi(u) = 1.$$

$\square$

Dans toute la suite, on supposera donc θ est positif.

Lemme 2.1 ([4]). *Si $nh \leq t \leq (n+1)h$, alors*

$$S_{nh} - h \leq S_t \leq S_{(n+1)h} + h$$

2.1.4 Exposant de Lundberg

Pour les distributions à queues légères, le coefficient d'ajustement appelé aussi l'exposant de Lundberg joue un rôle important dans le calcul de la probabilité de ruine. Soit
$$\gamma = \sup_t \{M_{X_i}(t)\} < \infty$$
On considère des sinistres X_i dont la loi est du type de Cramér, i.e.,

$$\exists\, t > 0, \; \textit{tel que} \;\; M_{X_i}(t) = E(e^{tX_i}) < +\infty$$

Définition 2.6. Soit R l'unique solution strictement positive de l'équation

$$\lambda M_{X_i}(R) = \lambda + cR, \quad R < \gamma \tag{2.8}$$

R est le coefficient d'ajustement appelé aussi exposant de Lundberg.

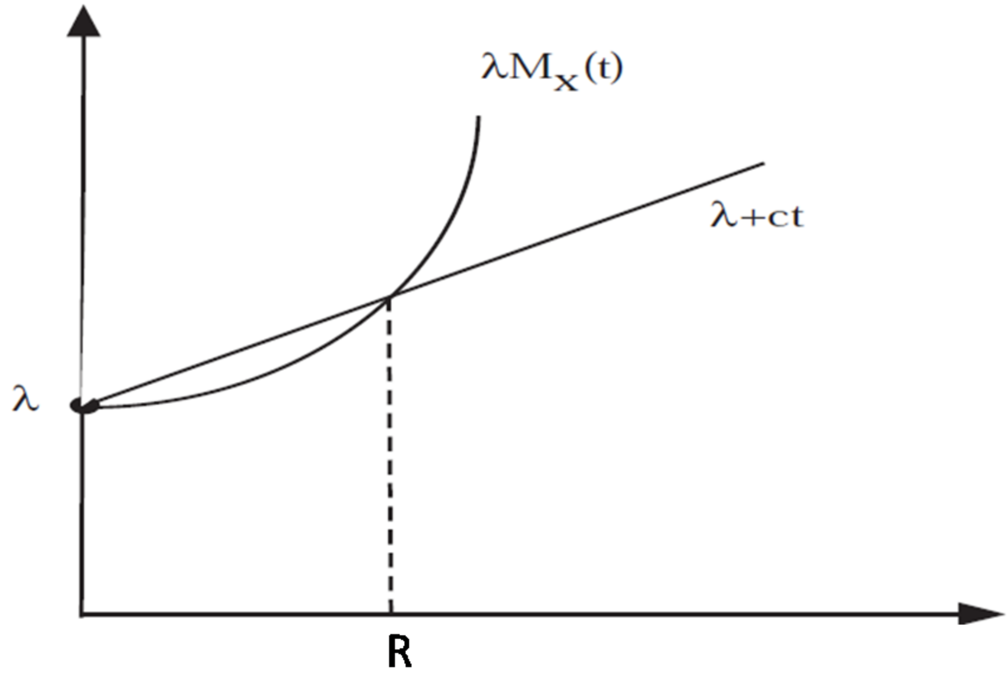

FIG. 2.2 – Coefficient d'ajustement

Remarque 2.1. Il est clair que $R = 0$ est toujours solution de l'équation (2.8). Cette équation a une solution unique (pour autant qu'elle existe) puisque M_X est croissante et convexe ($M_X''(t) = E(X^2 e^{tX}) > 0$) où M_X'' désigne la dérivée seconde de M_X.

Exemple 2.1. Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\left(\frac{1}{\mu}\right)$, alors $M_X(t) = \frac{1}{1-\mu t}$ et R est solution de

$$1 + (1+\theta)\mu R = \frac{\lambda}{1-\mu R}$$

Cette équation admet comme racine positive

$$R = \frac{c - \lambda\mu}{c\mu}$$

Exemple 2.2. Si $X \rightsquigarrow U[0, b]$, on a alors $M_X(t) = \frac{1}{bt}(\exp(tb) - 1)$ et le coefficient d'ajustement est solution de

$$1 + (1+\theta)\mu R = \frac{\lambda}{bR}(\exp(Rb) - 1)$$

L'obtention du coefficient d'ajustement passe le plus souvent par la résolution numérique de l'équation

$$1 + (1+\theta)\mu t = M_X(t). \qquad (2.9)$$

Proposition 2.4 ([4]). *On a*

$$R < \frac{2(1-\lambda\mu)}{\lambda\mu^{(2)}} = \frac{2\theta\mu}{\mu^{(2)}}$$

Proposition 2.5 (Approximation de coefficient d'ajustement [4]).
Si $\lambda = \frac{1}{\mu(1+\theta)}$ *alors*

$$R = R(\theta) \sim \frac{2\theta\mu}{\mu^{(2)}} \quad quand \quad \theta \to 0. \tag{2.10}$$

2.1.5 Bornes d'une probabilité de ruine

Dans cette section on rappelle un résultat classique sur les bornes d'une probabilité de ruine.
Ce résultat concerne l'inégalité de Lundberg donnée dans le théorème ci-dessous qui garantit que quel que soit le capital initial u, la probabilité de ruine est bornée supérieurement par une fonction décroissante exponentiellement.

Théorème 2.1 ([42]). *La probabilité de ruine sur horizon infini satisfait l'inégalité :*

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru}$$

Preuve. Soit $\Psi_n(u)$ la probabilité de ruine à l'instant n .
On suppose que

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_n(u) = \Psi(u)$$

Nous allons montrer par récurrence que l'inégalité $\Psi_n(u) \leq e^{-Ru}$ est satisfaite quel que soit u.
Pour $n = 1$

$$\begin{aligned}
\Psi_1(u) &= P([0 < \tau < \infty] \cap [R(t) < 0]) \\
&= P([0 < \tau < \infty] \cap [u - S(t) < 0]) \\
&= P([0 < \tau < \infty] \cap [X_1 > u + ct]) \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f_X(x)dxdt
\end{aligned}$$

Or $x > u + ct$ alors $u + ct - x < 0$ ce qui implique que $e^{-R(u+ct-x)} \geq 1$,
donc

$$\begin{aligned}
\Psi_1(u) &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} f_X(x)dxdt \\
&\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} f_X(x)dxdt \\
&= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-Rct} \int_0^\infty e^{Rx} f_X(x)dxdt \\
&= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-t(\lambda+Rc)} \int_0^\infty e^{Rx} f_X(x)dxdt \\
&= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda M_x(R) e^{-t(\lambda+Rc)} dt
\end{aligned}$$

On a $\lambda M_x(R) = \lambda + cR$.

Donc

$$\Psi_1(u) \leq e^{-Ru} \int_0^\infty (\lambda + cR) e^{-t(\lambda+Rc)} dt = e^{-Ru}$$

Ce qui donne la propriété est vraie pour $n = 1$.

Pour $n = 2$

$$\begin{aligned}
\Psi_2(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f_X(x) dx dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f_X(x) \Psi_1(u+ct-x) dx dt \\
&\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} f_X(x) dx dt \\
&+ \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f_X(x) e^{-R(u+ct-x)} dx dt
\end{aligned}$$

Par hypothèse, on a $\Psi_1(u+ct-x) \leq e^{-R(u+ct-x)}$, alors

$$\begin{aligned}
\Psi_2(u) &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left[\int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} f_X(x) dx dt + \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)} f_X(x) dx dt \right] \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} f_X(x) dx dt \\
&= e^{-Ru} \int_0^\infty e^{-(\lambda+cR)t} \int_0^\infty e^{Rx} f_X(x) dx dt \\
&= e^{-Ru}
\end{aligned}$$

Ce qui donne la validité du résultat pour $n = 2$

On suppose que l'inégalité est vraie pour n, montrons q'elle est vraie pour $(n+1)$

$$\begin{aligned}
\Psi_{n+1}(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f_X(x) dx dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f_X(x) \Psi_n(u+ct-x) dx dt \\
&\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} f_X(x) dx dt \\
&+ \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f_X(x) e^{-R(u+ct-x)} dx dt \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left[\int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} f_X(x) dx dt + \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)} f_X(x) dx dt \right] \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} f_X(x) dx dt \\
&= e^{-Ru} \int_0^\infty e^{-(\lambda+cR)t} \int_0^\infty e^{Rx} f_X(x) dx dt \\
&= e^{-Ru}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\Psi_n(u) \leq e^{-Ru}$$

Donc

$$\varphi_n(u) \geq 1 - e^{-Ru}$$

□

Dans ce modèle, on s'intéresse aux bornes de la probabilité de ruine en utilisant deux approches différentes (approche martingale et approche non-martingale).

A. Approche Martingale

Nous considérons dans cette section une approche différente pour majorer la probabilité de ruine. Cette approche est fondée sur l'introduction d'une martingale exponentielle.

Théorème 2.2 ([75]). *Supposons que pour* $R > 0$, $\{e^{RS_t}\}_{t\geq 0}$ *est une martingale, alors la probabilité de ruine est donnée par :*

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{RS_t}/\tau(u) < \infty]} \tag{2.11}$$

Preuve. Soit

$$\Upsilon(t) = \frac{e^{-R(u+S(t))}}{E(e^{-RS(t)})}$$

tel que

$$E(e^{-RS(t)}) < +\infty.$$

Soit un temps d'arrêt $\tau \wedge t_0$, où t_0 est un réel positif fixé.
On obtient

$$\begin{aligned} e^{-Ru} &= E[\Upsilon(0)] = E[\Upsilon(\tau \wedge t_0)] \\ &= E[\Upsilon(\tau \wedge t_0)/\tau \leq t_0]P(\tau \leq t_0) + E[\Upsilon(\tau > t_0)/\tau \leq t_0]P(\tau > t_0) \\ &\geq E[\Upsilon(\tau \wedge t_0)/\tau \leq t_0]P(\tau \leq t_0) \end{aligned}$$

On a donc

$$P(\tau \leq t_0) \leq \frac{e^{-Ru}}{E[\Upsilon(\tau \wedge t_0)/\tau \leq t_0]}$$

or

$$\frac{1}{E[\Upsilon(\tau \wedge t_0)/\tau \leq t_0]} = \frac{1}{E\left[\frac{e^{-R(u+S(\tau))}}{E(e^{-RS(\tau)})}/\tau \leq t_0\right]} \leq \frac{1}{E\left[\frac{1}{E(e^{-RS(\tau)})}/\tau \leq t_0\right]}$$

cela permet d'écrire que

$$P(\tau \leq t_0) \leq \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RS(t)}/\tau \leq t_0]}$$

En passant à la limite quand $t_0 \to +\infty$, on obtient

$$\Psi(u) = P(\tau \leq +\infty) \leq \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RS(t)}/\tau \leq +\infty]}$$

$\square$

B. Approche non-martingale

Théorème 2.3 ([46]). *La borne supérieure de la probabilité de ruine est donnée par*

$$\Psi(u) \leq \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)\left[\frac{1}{u}\int_0^u P(X > w)dw + \int_u^\infty P[X > w]dw/w\right] \tag{2.12}$$

où δ est un taux d'intérêt.

Preuve. Du fait que

$$\int_0^\infty e^{-\delta v} dS_v = \sum_{n=1}^\infty e^{-\delta\tau} X_n$$

La borne supérieure de la probabilité de ruine est définie comme suit :

$$\begin{aligned}
\Psi(u) &\leq P\left[\int_0^\infty e^{-\delta v} dS_v \geq u\right] \\
&= P\left[\sum_{n=1}^\infty e^{-\delta\tau} X_n \geq u\right] \\
&= P\left[\sum_{n=1}^\infty \min\{e^{-\delta\tau} X_n, u\} \geq u\right]
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Markov, on obtient

$$\Psi(u) \leq E\left[\sum_{n=1}^\infty \min\{e^{-\delta\tau} X_n, u\}\right]/u \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
E\left[\min\{e^{-\delta\tau} X_n, u\}\right] &= \int_0^u P\left[\min\{e^{-\delta\tau} X_n, u\} \geq t\right] dt \\
&= \int_0^u P\left[e^{-\delta\tau} X_n \geq t\right] dt \\
&= \int_0^u P\left[X_n \geq te^{\delta\tau}\right] dt \\
&= \int_0^u \int_0^\infty (1 - F_X(te^{\delta x})) f_\tau(x) dt \\
&= \int_0^u \int_0^\infty (1 - F_X(te^{\delta x})) \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

On pose $w = te^{\delta x}$, alors :

$$E\left[\min\{e^{-\delta\tau} X_n, u\}\right] = \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)\int_0^u \int_t^\infty (1 - F_X(w)) \frac{\ln((w/t)^{\lambda/\delta})^{n-1}}{(n-1)!}(w/t)^{-\lambda/\delta}\frac{dw}{w} dt$$

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{n=1}^\infty \min\{e^{-\delta\tau} X_n, u\}\right] &= \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)\int_0^u \int_t^\infty (1 - F_X(w))\frac{dw}{w} dt \\
&= \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)\left[\int_0^u (1 - F_X(w))dw + u\int_u^\infty (1 - F_X(w))dw/w\right]
\end{aligned}$$

De (2.13), on obtient

$$\Psi(u) \leq \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)\left[\frac{1}{u}\int_0^u P[X > w]dw + \int_u^\infty P[X > w]dw/w\right]$$

□

On s'intéresse en général au comportement des probabilités de ruine sur un horizon fini et infini.

2.1.6 Détermination d'une probabilité de ruine sur un horizon infini

On déterminera la probabilité de ruine de deux façons possibles : en utilisant les méthodes exactes et les approximations.

I. Méthodes exactes

On utilise deux méthodes généralement, les méthodes numériques et la formule de Pollaczek-Khinchine Beekman.

I.1. Méthodes numériques

Parmi les méthodes numériques, on ne considèrera que la méthode utilisant les équations intégro-différentielles et la méthode utilisant la transformée de Laplace inverse.

I.1.1. Equations intégro-différentielles

La probabilité de non-ruine $\varphi(u)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et admet comme dérivée φ' qui vérifie l' équation intégro-différentielle suivante :

Théorème 2.4 ([76]). *Pour tout $u \geq 0$,*

$$c\varphi'(u) = \lambda(\varphi(u) - \int_0^u \varphi(u-z)dF_X(z)) \tag{2.14}$$

Preuve.

$$\varphi(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^{u+ct} \varphi(u+ct-z)dF_X(z)dt$$

On pose $y = u + ct \Rightarrow t = \dfrac{y-u}{c}$ et $dt = \frac{dy}{c}$
$\varphi(u)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \int_u^\infty \int_0^y \lambda e^{-\lambda(\frac{y-u}{c})}\varphi(y-z)dF_X(z)\frac{dy}{c} \\ &= \frac{\lambda}{c}e^{\frac{\lambda u}{c}}\int_u^\infty \int_0^y e^{-(\frac{\lambda y}{c})}\varphi(y-z)dF_X(z)dy\end{aligned}$$

La probabilité de non-ruine $\varphi(u)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et admet comme dérivée $\varphi'(u)$ et en utilisant la formule de Leibniz on a

$$\begin{aligned}
\varphi'(u) &= \frac{\lambda}{c}\frac{\lambda}{c}e^{\frac{\lambda u}{c}}\int_u^\infty \int_0^y e^{-(\frac{\lambda y}{c})}\varphi(y-z)dF_X(z)dy \\
&- \frac{\lambda}{c}e^{\frac{\lambda u}{c}}\int_0^u e^{-(\frac{\lambda u}{c})}\varphi(u-z)dF_X(z) \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty \int_0^y \lambda e^{-\frac{\lambda}{c}(y-u)}\varphi(y-z)dF_X(z)\frac{dy}{c} - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-z)dF_X(z) \\
&= \frac{\lambda}{c}\varphi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-z)dF_X(z)
\end{aligned}$$

d'où

$$c\varphi'(u) = \lambda(\varphi(u) - \int_0^u \varphi(u-z)dF_X(z))$$

□

L'intégration de l'équation intégro-différentielle conduit à une autre relation plus simple dûe à Loisel (2005) donnée par :

Proposition 2.6 ([48]). *Pour tout $u \geq 0$,*

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-z)(1 - F_X(z))dz \tag{2.15}$$

Preuve. D'après le théorème (2.4), pour $u \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\varphi'(u) &= \frac{\lambda}{c}(\varphi(u) - \int_0^u \varphi(u-z)dF_X(z)) \\
&= \frac{\lambda}{c}(\varphi(u) - \int_0^u \varphi(u-z)f(z)dz) \\
&= \frac{\lambda}{c}(\varphi(u) - (\varphi * f)(u)).
\end{aligned}$$

En prenant sa transformée de Laplace, on obtient pour $s > 0$

$$L_{(\varphi'(u))}(s) = \frac{\lambda}{c}(L_{(\varphi(u))}(s) - L_{(\varphi * f(u))}(s))$$

$$sL_{(\varphi(s))} - \varphi(0) = \frac{\lambda}{c}(L_{(\varphi(s))} - L_{(\varphi(s))}L_{(f(s))})$$

$$sL_{(\varphi(s))} - \varphi(0) = \frac{\lambda}{c}L_{(\varphi(s))} - \frac{\lambda}{c}L_{(\varphi(s))}L_{(F'_X(s))}$$

$$sL_{(\varphi(s))} - \varphi(0) = \frac{\lambda}{c}L_{(\varphi(s))} - \frac{\lambda}{c}L_{(\varphi(s))}(sL_{(F_X(s))} - F_X(0)).$$

Or $F_X(s) = 1 - e^{-\lambda s}$ et $F_X(0) = 0$, ce qui donne

$$sL_{(\varphi(s))} - \varphi(0) = \frac{\lambda}{c}L_{(\varphi(s))} - \frac{\lambda}{c}L_{(\varphi(s))}sL_{(F_X(s))}$$

en divisant par s, on obtient :

$$L_{(\varphi(s))} = \frac{\varphi(0)}{s} + \frac{\lambda}{cs}L(\varphi(s)) - \frac{\lambda}{c}L_{(\varphi(s))}L_{(F_X(s))}$$

$$L_{(\varphi(s))} = \frac{\varphi(0)}{s} + \frac{\lambda}{cs}L_{(\varphi(s))}\left[\frac{1}{s} - L_{(F_X(s))}\right].$$

Or, $\forall c > 0$, $L_c(s) = \frac{c}{s}$; ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} - L_{(F_X(s))} &= L_1(s) - L_{(F_X(s))} \\ &= L_{(1-F_X)}(s). \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} L_{(\varphi(s))} &= \frac{\varphi(0)}{s} + \frac{\lambda}{c}L_{(\varphi(s))}(L_{(1-F_X)(s)}), \forall s > 0, \\ &= L_{(\varphi(0))} + \frac{\lambda}{c}L_{(\varphi(s))}(L_{(1-F_X)}(s)) \\ &= L_{(\varphi(0))} + \frac{\lambda}{c}L_{(\varphi(s)(1-F_X)(s))} \\ &= L_{(\varphi(0))} + \frac{\lambda}{c}L_{(\varphi(1-F_X))}(s) \\ &= L_{(\varphi(0)} + \frac{\lambda}{c}\varphi(1-F_X))(s). \end{aligned}$$

En utilisant l'injéctivité de la transformée de Laplace,

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}\varphi(1-F_X)(s) \\ &= \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}\varphi * (1-F_X)(s) \\ &= \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \varphi(u-z)(1-F_X(z))dz \end{aligned}$$

□

Proposition 2.7 ([48]).

$$\varphi(\infty) = \lim_{u\to\infty}\varphi(u) = 1 \tag{2.16}$$

Preuve. φ est une fonction croissante.
Pour $n \geq 1$,

$$\varphi(n) = E\left(\mathbb{I}_{\left\{\inf\limits_{t\to\infty} Y(t) < -n\right\}}\right)$$

où

$$Y(t) = ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

Posons

$$I_n = \mathbb{I}_{\left(\inf\limits_{t\to\infty} Y(t) < -n\right)}$$

$(I_n)_n$ est une suite croissante de variables aléatoires, tendant vers 1 presque surement.
En effet, comme $\theta > 0$, d'après la loi des grands nombres,
$Y(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$.
D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty} E(I_n) = E(\lim_{n\to\infty} I_n) = E(1) = 1$$

$\square$

le calcul de $\varphi(0)$ se fait par passage à la limite dans la proposition 2.6.

$$\varphi(\infty) = \varphi(0) + \lim_{u\to\infty} \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \varphi(u-z)(1 - F_X(z))dz$$

$$\varphi(\infty) = 1 = \varphi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \varphi(0)(1 - F_X(z))dz$$

Si les X_i suivent la même loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\mu}$, alors

$$\varphi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{\theta}{1+\theta}$$

et

$$\psi(0) = 1 - \varphi(0) = \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{1}{1+\theta}.$$

I.1.2. Transformée de Laplace inverse

Les transformées de Laplace

$$L_{\psi(s)} = \int_0^\infty \psi(u)e^{-su}du, \quad L_{\varphi(s)} = \int_0^\infty \varphi(s)e^{-su}du$$

respectivement de ψ et de φ s'expriment alors en fonction de L_F de X de la façon suivante :

Proposition 2.8 ([48]). *Pour tout $s > 0$,*

$$L_\varphi(s) = \frac{c - \lambda\mu}{cs - \lambda(1 - L_{F_X}(s))} \tag{2.17}$$

$$L_\psi(s) = \frac{1}{s} - \frac{c - \lambda\mu}{cs - \lambda(1 - L_{F_X}(s))} \tag{2.18}$$

Preuve. D'après le théorème (2.4),

$$L_\varphi(s) = \frac{1}{s}L_{(\varphi(0))} + \frac{\lambda}{cs}L_{(\varphi(s))}L_{(1-L_{F_X}(s))}$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
L_\varphi(s) - \frac{\lambda}{c}L_{(\varphi(s))}L_{(1-F_X(s))} &= \frac{1}{s}L_{(\varphi(0))} \\
L_\varphi(s)\left[1 - \frac{\lambda}{cs}L_{(1-F_X(s))}\right] &= \frac{1}{s}L_{(\varphi(0))} \\
L_\varphi(s) &= \frac{\frac{1}{s}L_{(\varphi(0))}}{1 - \frac{\lambda}{cs}L_{(1-F_X(s))}} \\
&= \frac{\frac{1}{s}L_{(\varphi(0))}}{\frac{cs-\lambda L_{(1-F_X(s))}}{cs}} \\
&= \frac{c-\lambda\mu}{cs - \lambda L_{(1-F_X(s))}}
\end{aligned}$$

car $\varphi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{\theta}{1+\theta}$.
Ce qui donne

$$L_\varphi(s) = \frac{c-\lambda\mu}{cs - \lambda(1 - L_{F_X}(s))}$$

de plus

$$\Psi(u) = 1 - \varphi(u)$$

alors

$$\begin{aligned}
L_{\Psi(u)}(s) &= L_{(1-\varphi(u))}(s) \\
&= L_1(s) - L_{\varphi(u)}(s) \\
&= \frac{1}{s} - \frac{c-\lambda\mu}{cs - \lambda(1 - L_{F_X}(s))}
\end{aligned}$$

D'où

$$L_{\Psi(u)}(s) = \frac{1}{s} - \frac{c-\lambda\mu}{cs - \lambda(1 - L_{F_X}(s))}$$

$\square$

I.2. Formule de Pollaczek-Khinchine Beekman

Le résultat suivant nous donne une formule explicite pour la probabilité de ruine.

Théorème 2.5 ([7]). *La probabilité de ruine Ψ est donnée par :*

$$\Psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n (1 - \widetilde{F}^{*(n)}(u)) \tag{2.19}$$

où

$$\widetilde{F}(x) = \int_{y=0}^{x} \frac{\overline{F}(y)}{\mu} dy, \quad x > 0$$

est $\widetilde{F}^*$ est le produit de convolution de $\widetilde{F}$.

Preuve.

$$sL_{\varphi(s)} - \varphi(0) = \frac{\lambda}{c} L_{\varphi(s)} - \frac{\lambda}{c} L_{\varphi(s)} sL_{F_X(s)}$$

$$sL_{\varphi(s)} \left(1 - \frac{\lambda}{cs} + \frac{\lambda}{c} L_{F_X(s)}\right) = \varphi(0)$$

$$\begin{aligned} sL_{\varphi(s)} &= \frac{\varphi(0)}{1 - \frac{\lambda}{c}\left(\frac{1}{s} - L_{F_X(s)}\right)} \\ &= \frac{\varphi(0)}{1 - \frac{\lambda}{c} L_{1-F_X(s)}} \end{aligned}$$

alors

$$L_{\varphi(s)} = \frac{\frac{\varphi(0)}{s}}{1 - \frac{\lambda}{c} L_{(1-F_X)(s)}}$$

d'où

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \frac{\varphi(0)}{1 - \frac{\lambda}{c}(1 - F_X(s))} \\ &= \frac{\varphi(0)}{1 - \frac{\lambda\mu}{c}} \widetilde{F}_X(s) \\ &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n (\widetilde{F}_X(s))^n \end{aligned}$$

car

$$0 < \frac{\lambda\mu}{c} \widetilde{F}_X(s) < 1$$

alors

$$\begin{aligned}
\Psi(s) &= 1-\varphi(s)\\
&= 1-\left[\left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^{n}(\widetilde{F}_X(s))^n\right]\\
&= 1-\left[\left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^{n}(\widetilde{F}_X(s))^n\right]+\left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^{n}\\
&- \left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^{n}\\
&= 1+\left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^{n}(1-(\widetilde{F}_X(s))^n)-\left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^{n}\\
&= 1+\left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^{n}(1-(\widetilde{F}_X(s))^n)-1
\end{aligned}$$

car $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^{n}=\frac{1}{1-\frac{\lambda\mu}{c}}$

Ce qui donne

$$\Psi(u)=\left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^{n}(1-(\widetilde{F}_X(u))^n)$$

□

De la dernière représentation de $\Psi(u)$, on a :

Corollaire 2.1 ([11]).

$$\Psi(0)=\frac{\lambda\mu}{c} \tag{2.20}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\Psi(0) &= \left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^{n}\lim_{u\to\infty}(1-\widetilde{F}^{*(n)}(0))\\
&= \left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^{n}\\
&= \frac{\lambda\mu}{c}
\end{aligned}$$

car

$$\lim_{u\to\infty}(1-\widetilde{F}^{*(n)}(u))=\begin{cases}1 & \text{si } n\geq 1\\ 0 & \text{si } n=0\end{cases}$$

Notons que $\Psi(0)$ ne dépend de la loi des sinistres que par l'intermédiaire de leur moyenne. □

Remarque 2.2. On peut encore interpréter la formule de Pollaczeck-Khinchine Beekman comme suit :
Définissons le temps d'arrêt τ_1 comme le premier instant où R_t tombe sous le niveau u.
Posons $L_1 = u - R_{\tau_1}$. Faisons démarrer un nouveau processus de surplus $\{R_t^{(1)}, t \in \mathbb{R}^+\}$ avec un capital initial u_1. Notons τ_2 le temps d'arrêt comme le premier instant où ce processus tombe sous le niveau u_1. Définissons également $L_2 = u_1 - R_{\tau_2}^{(1)}$ etc ... On constate que :

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_k$$

Où k est une loi géométrique de paramètre q, avec $q = 1 - \Psi(0)$.
Les variables aléatoires $L_1, L_2, \ldots$ sont indépendantes et identiquement distribuées de fonction de densité

$$f_{L_1}(x) = \frac{\overline{F}(x)}{\mu}$$

Théorème 2.6 ([23]). *L'expression de la probabilité de non ruine correspondante est donnée par :*

$$\varphi(u) = P(L \leq u) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(0)\Psi^k(0)F^{*k}(u) \tag{2.21}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= P(L \leq u) = \sum_{k=0}^{\infty} P((L \leq u) \cap (K = k)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(L \leq u/K = k)P(K = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(L_1 + L_2 + \cdots + L_K \leq u/K = k)P(K = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(L_1 + L_2 + \cdots + L_k \leq u)P(K = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(K = k)P(\sum_{i=1}^{k} L_i \leq u) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(0)\Psi^k(0)F^{*k}(u) \\
&= \varphi(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(0)\Psi^k(0)F^{*k}(u)
\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.2 ([4]). *Les deux premiers moments de L sont :*

$$E(L) = \frac{\rho\mu^{(2)}}{2(1-\rho)\mu}, \; E(L^2) = \frac{\rho\mu^{(3)}}{3(1-\rho)\mu} + \frac{\lambda^2 {\mu^{(2)}}^2}{2(1-\rho)^2} \tag{2.22}$$

Dans ce qui suit, nous allons donner les expressions explicites de la probabilité de ruine pour certains lois de probabilité.

1- Loi Exponentielle

Théorème 2.7 ([4]). *Lorsque les montants des sinistres sont de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\mu}$, on a :*

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} \quad \exp \quad \left\{\frac{-\theta u}{\mu(1+\theta)}\right\}, \quad \forall u \geq 0 \tag{2.23}$$

Preuve. D'après le théorème (2.4) pour tout $u \geq 0$,

$$\varphi'(u) = \frac{\lambda}{c}(\varphi(u) - \int_0^u \varphi(u-z)dF_X(z)).$$

Dans le cas où $X \sim \exp(\frac{1}{\mu})$:

$$\begin{aligned}
\varphi'(u) &= \frac{\lambda}{c}(\varphi(u) - \int_0^u \varphi(u-z)dF_X(z)) \\
&= \frac{\lambda}{c}(\varphi(u) - \int_0^u \varphi(u-z)f_X(z)dz) \\
&= \frac{\lambda}{c}(\varphi(u) - \int_0^u \varphi(u-z)\frac{1}{\mu}e^{-\frac{z}{\mu}}dz)
\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable suivant $u - z = t$, on obtient :

$$\varphi'(u) = \frac{\lambda}{c}(\varphi(u) - \int_0^u \varphi(t)\frac{1}{\mu}e^{-\frac{(u-t)}{\mu}}dt).$$

En dérivant par rapport à u, on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi''(u) &= \frac{\lambda}{c}\left(\varphi'(u) - \frac{1}{\mu}\Big(\frac{-1}{\mu}\int_0^u \varphi(t)\frac{1}{\mu}e^{-\frac{(u-t)}{\mu}}dt + \varphi(u)\Big)\right) \\
&= \frac{\lambda}{c}\varphi'(u) + \frac{\lambda}{c}\frac{1}{\mu}\int_0^u \varphi(t)\frac{1}{\mu}e^{-\frac{(u-t)}{\mu}}dt - \frac{\lambda}{c}\frac{1}{\mu}\varphi(u)
\end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\frac{\lambda}{c}\frac{1}{\mu}\int_0^u \varphi(t)\frac{1}{\mu}e^{-\frac{(u-t)}{\mu}}dt = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\lambda}{c}\varphi(u) - \varphi'(u)\right)$$

alors

$$\varphi''(u) = \Big(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu}\Big)\varphi'(u)$$

Soit

$$R = -\frac{\lambda}{c} + \frac{1}{\mu} = \frac{\theta}{\mu(1+\theta)}$$

où R est l'exposant de Lundberg.

Ce qui donne,

$$\varphi''(u) = -R\varphi'(u).$$

En intégrant deux fois l'équation précédente, on obtient :

$$\varphi(u) = C_1 - C_2 \frac{1}{R} e^{-Ru}$$

$$\varphi(+\infty) = C_1 = 1$$

et

$$\varphi(0) = C_1 - C_2 \frac{1}{R} = 1 - \frac{\lambda}{c}\mu = \frac{\theta}{1+\theta}.$$

Ce qui donne

$$1 - C_2 \frac{1}{R} = \frac{\theta}{1+\theta}$$

$$C_2 = \frac{R}{1+\theta}$$

d'où

$$\varphi(u) = 1 - \frac{1}{1+\theta} \exp(-Ru) = 1 - \frac{1}{1+\theta} \exp\left(-\frac{\theta}{\mu(1+\theta)} u\right)$$

et

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} \exp(-Ru) = \frac{1}{1+\theta} \exp\left(-\frac{\theta}{\mu(1+\theta)} u\right)$$

□

Exemple 2.3.

u	0	1	2	3	4	5
$\Psi(u)$	0.769231	0.176503	0.040499	0.009293	0.002132	0.000489

TAB. 2.1 – La probabilité de ruine pour la loi exponentielle des paramètre $\frac{1}{\mu} = 6.3789.10^{-9}$ et avec un chargement de sécurité $\theta = 0.3$.

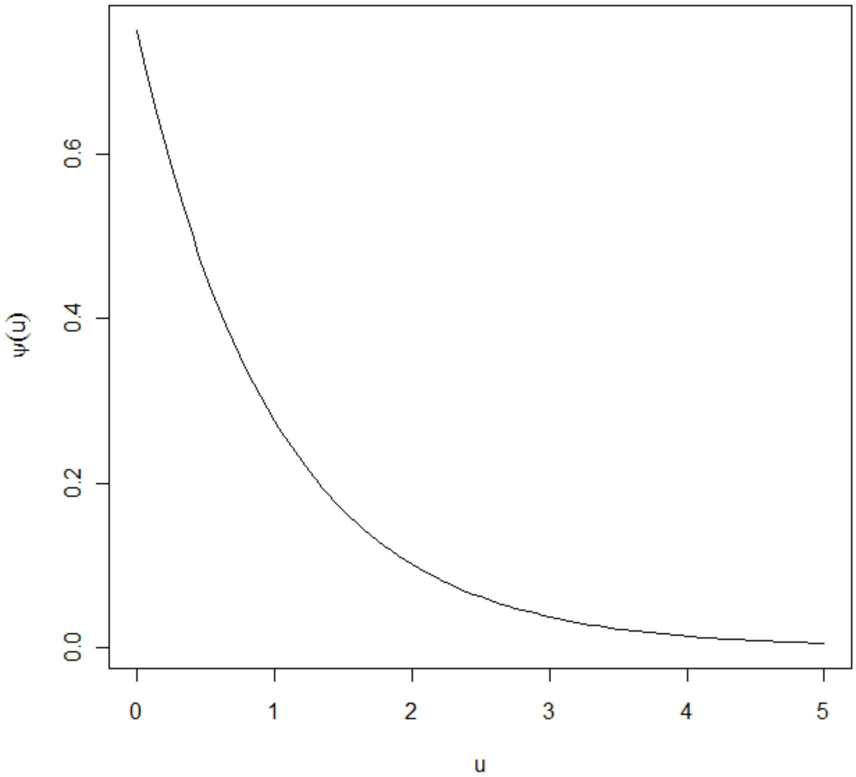

FIG. 2.3 – Graphe de la probabilité de ruine dans le cas où les sinistres suivent une loi exponentielle.

2- Loi Gamma

Grandell et Segerdahl (1971) ont montré que pour la distribution Gamma de moyenne 1 et $\alpha \leq 1$, la valeur exacte de la probabilité de ruine est donnée par :

Théorème 2.8 ([39]).

$$\Psi(u) = \frac{\theta(1-\frac{R}{\alpha})\exp(-Ru)}{1+(1+\theta)R-(1+\theta)(1-\frac{R}{\alpha})} + \frac{\alpha\theta\sin(\alpha\pi)}{\pi}.I \tag{2.24}$$

où

$$I = \int_0^\infty \frac{x^\alpha \exp\{-(x+1)\alpha x\}}{[x^\alpha\{1+\alpha(1+\theta)(x+1)\}-\cos(\alpha\pi)]^2+\sin^2(\alpha\pi)}dx \tag{2.25}$$

Exemple 2.4.

u	0	1	2	3	4	5
$\Psi(u)$	0.769229	0.1747299	0.039857	0.009092	0.002074	0.000473

TAB. 2.2 – La probabilité de ruine pour la loi Gamma de paramètres $\alpha = 0.9185, \beta = 6.1662.10^{-9}, a = 0.0584$ et avec un chargement de sécurité relatif $\theta = 0.3$.

3- Le mélange de deux lois Exponentielles

Le théorème suivant dû à Panjer et Willmot (1992) nous donne la forme exacte pour la probabilité de ruine pour un mélange de deux lois exponentielles.

Théorème 2.9 ([53]). *Pour un mélange de deux lois exponentielles de paramètres β_1, β_2 et affectées de poids a et $1-a$.*
On obtient une formule explicite de la probabilité de ruine donnée par :

$$\Psi(u) = \frac{1}{(1+\theta)(r_2-r_1)} \{(\rho - r_1)\exp(-r_1 u) + (r_2 - \rho)\exp(-r_2 u)\} \tag{2.26}$$

où

$$r_1 = \frac{\rho + \theta(\beta_1+\beta_2) - [\{\rho + \theta(\beta_1+\beta_2)\}^2 - 4\beta_1\beta_2\theta(1+\theta)]^{1/2}}{2(1+\theta)}$$

$$r_2 = \frac{\rho + \theta(\beta_1+\beta_2) + [\{\rho + \theta(\beta_1+\beta_2)\}^2 - 4\beta_1\beta_2\theta(1+\theta)]^{1/2}}{2(1+\theta)}$$

et

$$p = \frac{a\beta_1^{-1}}{a\beta_1^{-1} + (1-a)\beta_2^{-1}}$$

$$\rho = \beta_1(1-p) + \beta_2 p$$

Pour la démonstation on a besoin des résultats suivants.
On considère

$$G(u,y) = P(-y < R(t) < 0, t > 0)$$

alors

$$\Psi(u) = \int_0^\infty g(u,y)dy \tag{2.27}$$

Il est nécessaire de calculer $G(u,y)$ afin de montrer que $g(u,y) = G'(u,y)$ et donner une forme explicite pour l'équation (2.27)

Théorème 2.10 ([44]). *$G(u,y)$ est donné par :*

$$G(u,y) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u G(u-x,y)\big(1-F(x)\big)dx + \frac{\lambda}{c}\int_u^{u+y}\big(1-F(x)\big)dx$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
G(u,y) &= P\left[(-y<R(t)<0)\cap(N(t+dt)-N(t)=0)\right]\\
&+ P\left[(-y<R(t)<0)\cap(N(t+dt)-N(t)=1)\right]\\
&+ P\left[(-y<R(t)<0)\cap(N(t+dt)-N(t)>1)\right]\\
&= P\left[(N(t+dt)-N(t)=0)\right]P\left[(-y<R(t)<0)/(N(t+dt)-N(t)=0)\right]\\
&+ P\left[(N(t+dt)-N(t)=1)\right]P\left[(-y<R(t)<0)/(N(t+dt)-N(t)=1)\right]\\
&+ P\left[(N(t+dt)-N(t)>1)\right]P\left[(-y<R(t)<0)/(N(t+dt)-N(t)>1)\right]\\
&= (1-\lambda dt+o(dt))G(u+cdt,y)+\lambda dt\Bigg[\int_0^{u+cdt} f(x)G(u+cdt-x,y)dx\\
&+ \int_{u+cdt}^{u+cdt+y} f(x)dx\Bigg]+o(dt)\\
&= (1-\lambda dt)G(u+cdt,y)+\lambda dt\int_0^{u+cdt} f(x)G(u+cdt-x,y)dx\\
&+ \lambda dt\int_{u+cdt}^{u+cdt+y} f(x)dx+o(dt)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{G(u+cdt,y)-G(u,y)}{cdt} &= \frac{\lambda}{c}G(u+cdt,y)-\frac{\lambda}{c}\int_0^{u+cdt} f(x)G(u+cdt-x,y)dx\\
&- \frac{\lambda}{c}\int_{u+cdt}^{u+cdt+y} f(x)dx+\frac{o(dt)}{cdt}.
\end{aligned}$$

En faisant tendre $dt\to 0$, alors

$$G'(u,y)=\frac{\lambda}{c}G(u,y)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)G(u-x,y)dx-\frac{\lambda}{c}\int_u^{u+y} f(x)dx.$$

En intégrant par rapport à u on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^t G'(u,y)du &= \frac{\lambda}{c}\int_0^t G(u,y)du-\frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u f(x)G(u-x,y)dxdu\\
&- \frac{\lambda}{c}\int_u^{u+y}\int_0^t f(x)dxdu
\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable suivant $u-x=z$, $\quad (dz=-dy)$, alors

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_0^u f(x)G(u-x,y)dxdu &= \int_0^t\int_0^u f(u-z)G(z,y)dzdu\\
&= \int_0^t G(z,y)\int_z^t f(u-z)dudz\\
&= \int_0^t G(z,y)\big(F(u-z)\mid_z^t\big)dz\\
&= \int_0^t G(z,y)\big(F(t-z)-F(0)\big)dz\\
&= \int_0^t G(z,y)F(t-z)dz
\end{aligned}$$

$$\int_0^t \int_u^{u+y} f(x)dxdu = \int_0^t \big(F(u+y) - F(u)\big)du$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_0^t G'(u,y)du &= \frac{\lambda}{c}\int_0^t G(u,y)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t G(z,y)F(t-z)dz \\
&- \frac{\lambda}{c}\int_0^t F(u+y)du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t F(u)du \\
G(t,y) - G(0,y) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^t G(u,y)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t G(z,y)F(t-z)dz \\
&- \frac{\lambda}{c}\int_0^t F(u+y)du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t F(u)du
\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
G(0,y) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^y \big(1 - F(x)\big)dx \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^y dy - \frac{\lambda}{c}\int_0^y F(x)dx \\
&= \frac{\lambda}{c}y - \frac{\lambda}{c}\int_0^y F(x)dx \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_t^{t+x} dy - \frac{\lambda}{c}\int_0^y F(x)dx
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
G(t,y) &= \frac{\lambda}{c}\int_t^{t+x} dy - \frac{\lambda}{c}\int_0^y F(x)dx + \frac{\lambda}{c}\int_0^t G(u,y)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t G(z,y)F(t-z)dz - \frac{\lambda}{c}\int_0^t F(u+y)du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t F(u)du \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_t^{t+x} dy - \frac{\lambda}{c}\int_0^y F(x)dx + \frac{\lambda}{c}\int_0^t G(u,y)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t G(z,y)F(t-z)dz - \frac{\lambda}{c}\int_0^t F(u+y)du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t F(u)du \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_t^{t+x} dy - \frac{\lambda}{c}\int_0^y F(x)dx - \frac{\lambda}{c}\int_y^{t+y} F(w)dw + \frac{\lambda}{c}\int_0^t F(u)du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t G(u,y)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t F(t-z)G(z,y)dy \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_t^{t+x} dy - \frac{\lambda}{c}\int_y^{t+y} F(x)dx + \frac{\lambda}{c}\int_0^t G(u,y)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t F(t-z)G(z,y)dz \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t (1 - F(x))dx + \frac{\lambda}{c}\int_0^t (1 - F(t-z))G(z,y)dz
\end{aligned}$$

alors

$$g(u,y) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u g(u-x,y)\big(1 - F(x)\big)dx + \frac{\lambda}{c}\big(1 - F(u+y)\big) \tag{2.28}$$

□

Théorème 2.11 ([44]). *Sous les hypothèses du théorème (2.6) et si $P(X \leq 0) = 0$, alors*

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{Rx}(1 - F(x))dx = 1 \tag{2.29}$$

Preuve du théorème 2.9. Soit

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} A_j B_j e^{-B_j x}, \quad x > 0$$

où $\sum_{j=1}^{n} A_j = 1$ et $B_j > 0, \forall j$.
En prenant la transformée de Laplace de l'équation (2.27), on obtient pour $r > 0$:

$$\begin{aligned} L_{g(r,y)} &= \int_0^\infty e^{ru} g(u,y) dy \\ &= \frac{\frac{\lambda}{c} e^{-ry} \int_y^\infty e^{rx}\big(1 - F(x)\big)dx}{1 - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{rx}\big(1 - F(x)\big)dx} \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$F(x) = 1 - \sum_{j=1}^{n} A_j e^{-B_j x}, \quad x > 0$$

On obtient

$$\begin{aligned} L_{g(r,y)} &= \frac{\frac{\lambda}{c}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{A_j e^{-B_j y}}{B_j - r}\right)}{1 - \frac{\lambda}{c}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{(B_j - r)}} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{C_{jk} e^{-B_j y}}{r_k - r} \end{aligned}$$

où $r_1, r_2, \cdots, r_n$ sont des racines de l'équation

$$\frac{\lambda}{c}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{B_j - r} = 1$$

et

$$C_{jk} = \frac{\frac{A_j}{B_j - r_k}}{\displaystyle\sum_{l=1}^{n}\frac{A_l}{(B_l - r_l)^2}}.$$

D'où

$$g(u,y) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{jk} e^{-B_j y} e^{-r_k u}$$

La probabilité de ruine est donc,

$$\begin{aligned}
\Psi(u) &= \int_0^\infty g(u,y)dy \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{jk}e^{-B_j y}e^{-r_k u}dy \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{jk}e^{-r_k u}\int_0^\infty e^{-B_j y}dy \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{C_{jk}}{B_j}e^{-r_k u}
\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat du théorème 2.9 pour $n = 2$. □

Exemple 2.5.

u	0	1	5	10	20	50
$\Psi(u)$	0.769231	0.587919	0.359660	0.194858	0.057197	0.001447

TAB. 2.3 – Le mélange de deux lois exponentielles de paramètres $\beta_1 = 3.5900.10^{-10}, \beta_2 = 7.5088.10^{-9}$, $a = 0.0584$ et avec un chargement de sécurité relatif $\theta = 0.3$.

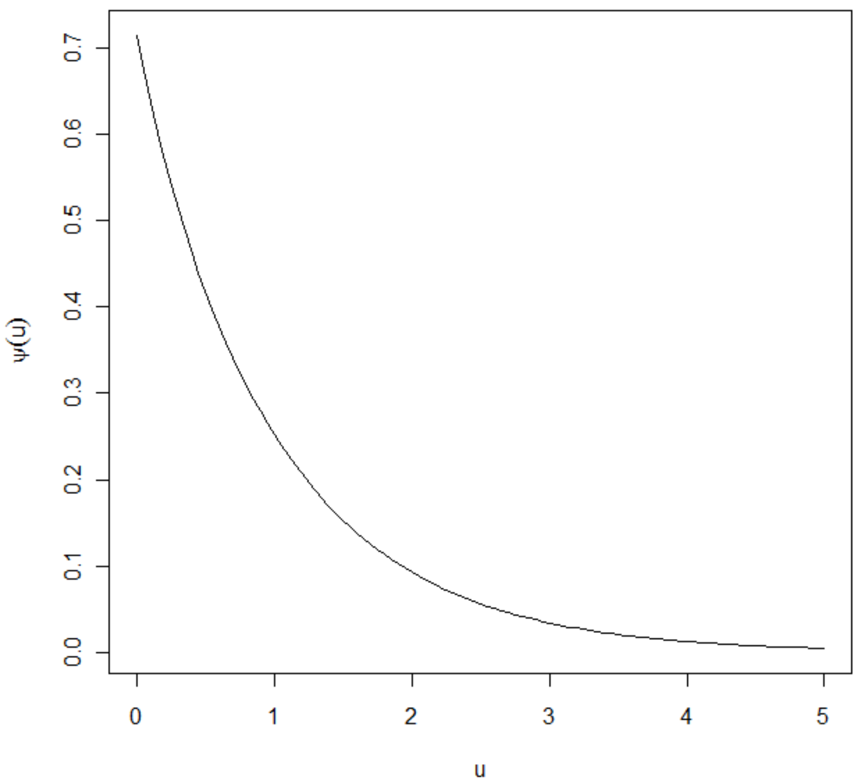

FIG. 2.4 – Graphe de la probabilité de ruine dans le cas où les sinistres suivent un mélange de deux lois exponentielles.

Interprétation des Tableaux

On observe que le surplus initial influe directement sur la probabilité de ruine, puisque plus il est élevé, moins il y a de chances de se ruiner.
Quand $u = 1$ l'erreur relative de la probabilité de ruine entre le cas d'un mélange de deux lois exponentielles et le cas exponentielle est 24 % ce qui signifie que la probabilité de ruine dépend du choix de la distribution des montants des sinistres.

II. Approximations d'une probabilité de ruine sur horizon infini

En général, il est difficile d'obtenir une forme exacte pour la probabilité de ruine, dans ce cas, on utilise des approximations. On cite les approximations les plus utilisées.

II.1. Approximation de Cramér-Lundberg

L'approximation de Cramér-Lundberg décrit le comportement asymptotique de la probabilité de ruine lorsque le capital initial u tend vers l'infini. Pour décrire ce comportement asymptotique, nous utilisons les résultats de la théorie de renouvellement.

On sait que :

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \varphi(0) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-x)(1-F(x))dx \\
1-\Psi(u) &= 1-\Psi(0) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u (1-\Psi(u-x)(1-F(x))dx \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty (1-F(x))dx - \frac{\lambda}{c}\int_0^u (1-F(x))dx + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u-x)(1-F(x))dx \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty (1-F(x))dx + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u-x)(1-F(x))dx \\
&= a(u) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u-x)(1-F(x))dx
\end{aligned}$$

avec

$$a(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty (1-F(x))dx$$

Théorème 2.12 ([4]). *L'approximation de la probabilité de ruine est donnée par :*

$$\Psi(u) = Ce^{-Ru}, \quad u \to \infty \tag{2.30}$$

où

$$C = \frac{\theta\mu}{M'_X(R) - \mu\,(1+\theta)} \tag{2.31}$$

avec $M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tX} dF(x)$

Preuve. $\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty (1-F(x))dx$ est une équation de renouvellement car

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty (1-F(x))dx = \frac{\lambda}{c}\mu < 1$$

Supposons q'il existe une constante R telle que

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{Rx}(1-F(x))dx = 1$$

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{Rx}(1-F(x))dx &= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{Rx}\int_x^\infty f(y)dydx \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty f(y)\int_0^y e^{Rx}dxdy \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty f(y)(\frac{1}{R}e^{Rx}|_0^y)dy \\
&= \frac{\lambda}{cR}\int_0^\infty f(y)(e^{Ry}-1)dy \\
&= \frac{\lambda}{cR}\left[\int_0^\infty f(y)e^{Ry}dy - \int_0^\infty f(y)dy\right] \\
&= \frac{\lambda}{cR}\left(M_X(R)-1\right) \\
&= \frac{\lambda}{cR}\left(1+\frac{\lambda}{cR}-1\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

L'exposant de Lundberg est solution de l'équation

$$\frac{\lambda}{c}R = M_Y(R) = \int_0^{\infty} e^{Rx} dF(x) - 1$$

Dans ce qui suit, nous supposons que $e^{Ru}\Psi(u)$ est monotone.
Soit

$$g(x) = \frac{\lambda}{c} e^{Rx}(1 - F(x))$$

$g(x)$ est une fonction de densité de probabilité.
En multipliant l'équation

$$\Psi(u) = a(u) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u-x)(1-F(x))dx$$

par e^{Ru}, nous obtenons

$$e^{Ru}\Psi(u) = a(u)e^{Ru} + \frac{\lambda}{c}\int_0^u e^{R(u-x)}\Psi(u-x)g(u)dx$$

Cette dernière équation est une équation de renouvellement ; le théorème de renouvellement permet de conclure que :

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\Psi(u) = \frac{C_1}{C_2}.$$

Où

$$C_1 = \frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty} e^{Ru}\int_u^{\infty}(1-F(x))dxdu$$

et

$$C_2 = \int_0^{\infty} xg(x)dx$$

Le calcul de C_1 se fait de la manière suivante

$$C_1 = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{c\mu}{\lambda}\right) = \frac{1}{R}\frac{\theta}{1+\theta}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty} e^{Ru}\int_u^{\infty}(1-F(x))\,dxdu \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_{0=x}^{\infty}\int_{0=u}^{x}\big(1-F(x)\big)e^{Ru}dudx \\
&= \frac{\lambda}{cR}\int_0^{\infty} e^{Rx}\big(1-F(x)\big)dx - \frac{\lambda}{cR}\int_0^{\infty}(1-F(x))dx \\
&= \frac{\lambda}{cR^2}\left(M_Y(R)-1\right) - \frac{\lambda\mu}{cR} \\
&= \frac{\lambda}{cR^2}\left(\frac{cR}{\lambda}\right) - \frac{\lambda\mu}{cR} \\
&= \frac{1}{R}\left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \\
&= \frac{1}{R}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)
\end{aligned}$$

Pour le calcul de C_2, on utilise le fait que :

$$M'_X(R) = \int_0^\infty x e^{Rx} dF(x)$$

De la même façon le calcul de C_2 se fait comme suit :

$$C_2 = \frac{1}{1+\theta}\frac{1}{R\mu}\left(M'_Y(R) - \frac{c}{\lambda}\right)$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty x e^{Rx}\left(1 - F(x)\right)dx \\
&= \frac{\lambda}{cR}\left(M'_Y(R) - \frac{1}{R}M_Y(R) + \frac{1}{R}\right) \\
&= \frac{\lambda}{cR}\left(M'_Y(R) - \frac{c}{\lambda}\right) \\
&= \frac{c}{\lambda}\frac{\mu}{R}\frac{1}{\mu}\left(M'_Y(R) - \frac{c}{\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{1+\theta}\frac{1}{R\mu}\left(M'_Y(R) - \frac{c}{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

or

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\Psi(u) = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\theta\mu}{M'_Y(R) - \frac{c}{\lambda}} = .$$

D'où

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\Psi(u) = \frac{\theta\mu}{M'_Y(R) - \mu(1+\theta)}$$

□

Exemple 2.6. Si F représente la fonction de répartition d'une loi exponentielle de moyenne μ, alors

$$M_X(R) = \frac{\mu R}{1-\mu R}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
M_X(R) &= \int_0^\infty e^{Rx} f(x)dx - 1 \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\mu} e^{Rx} e^{-\frac{1}{\mu}x} dx - 1 \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\mu} e^{(R-\frac{1}{\mu})x} dx - 1 \\
&= \frac{\mu}{\mu - R} - 1 \\
&= \frac{\mu R}{1-\mu R}
\end{aligned}$$

L'exposant de Lundberg se calcule à l'aide de la formule

$$\frac{\mu R}{1-\mu R} = \frac{cR}{\lambda}$$

Ce qui donne

$$R = \frac{\theta}{\mu(1+\theta)}$$

De plus, nous avons

$$M'_X(R) = \mu(1+\theta)^2$$

et nous retrouvons que

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\Psi(u) = \frac{1}{1+\theta}.$$

Exemple 2.7.

u	0	1	5	10	20	50
$\Psi_{CL}(u)$	0.663843	0.587260	0.359660	0.194858	0.057197	0.001447

TAB. 2.4 – Approximation de Cramér- Lundberg pour un mélange de deux lois exponentielles de paramètres $\beta_1 = 3.5900.10^{-10}, \beta_2 = 7.5088.10^{-9}, a = 0.0584$ avec un chargement de sécurité relatif $\theta = 0.3$.

II.2. Approximation exponentielle

Cette méthode d'approximation proposée par De Vylder (1996) utilise les trois premiers moments.

Théorème 2.13 ([19]). *La formule approximée de la probabilité de ruine est donnée par :*

$$\Psi_E(u) = \exp\left\{-1 - \frac{2\mu\theta u - \mu^{(2)}}{\sqrt{(\mu^{(2)})^2 + (4/3)\theta\mu\mu^{(3)}}}\right\} \tag{2.32}$$

Exemple 2.8.

u	0	1	5	10	20	50
$\Psi_E(u)$	0.747418	0.656048	0.389424	0.202900	0.055081	0.001102

TAB. 2.5 – Approximation exponentielle pour un mélange de deux lois exponentielles de paramètres $\beta_1 = 3.5900.10^{-10}, \beta_2 = 7.5088.10^{-9}, a = 0.0584$ avec un chargement de sécurité relatif $\theta = 0.3$.

II.3. Approximation de Lundberg

L'approximation de Lundberg a été étudiée par Grandell (2000), utilise les trois premiers moments.

Théorème 2.14 ([47]). *L'approximation de la probabilité de ruine dans ce cas est donnée par :*

$$\Psi_L(u) = \left\{1 + \left(\theta u - \frac{\mu^{(2)}}{2\mu}\right)\frac{4\theta\mu^2\mu^{(3)}}{3(\mu^{(2)})^3}\right\}\exp\left(\frac{-2\mu\theta u}{\mu^{(2)}}\right) \tag{2.33}$$

Exemple 2.9.

u	0	1	5	10	20	50
$\Psi_L(u)$	0.504967	0.495882	0.382790	0.224942	0.058739	0.000513

TAB. 2.6 – Approximation de Lundberg pour un mélange de deux lois exponentielles de paramètres $\beta_1 = 3.5900.10^{-10}, \beta_2 = 7.5088.10^{-9}, a = 0.0584$ avec un chargement de sécurité relatif $\theta = 0.3$.

II.4. Approximation de Beekman-Bowers

L'approximation de Beekman-Bowers dûe à Burnecki et al. (2004), Il utilise la représentation de la probabilité de ruine suivante :

$$\Psi(u) = P(L > u) = P(L > 0)P(L > u/L > 0) = \frac{1}{1+\theta}P(L > u/L > 0)$$

L'idée de cette approximation consiste à remplacer la probabilité conditionnelle $1 - P(L > u/L > 0)$ par une fonction de distribution Gamma Γ de paramètres α, β en utilisant les trois premiers moments.

Théorème 2.15 ([47]). *L'approximation de la probabilité de ruine est donnée par :*

$$\Psi_{BB}(u) = \frac{1}{1+\theta}\{1 - \Gamma(u)\} \tag{2.34}$$

où les paramètres α, β de Γ sont donnés par

$$\alpha = \frac{\left\{1 + \left(\frac{4\mu\mu^{(3)}}{3(\mu^{(2)})^2} - 1\right)\theta\right\}}{1+\theta}$$

$$\beta = \frac{2\mu\theta}{\left\{\mu^{(2)} + \left(\frac{4\mu\mu^{(3)}}{3\mu^{(2)}} - \mu^{(2)}\right)\theta\right\}}.$$

Exemple 2.10.

u	0	1	5	10	20	50
$\Psi_{BB}(u)$	0.769231	0.624902	0.352177	0.186582	0.056260	0.001810

TAB. 2.7 – Approximation de Beekman - Bowers pour un mélange de deux lois exponentielles de paramètres $\beta_1 = 3.5900.10^{-10}, \beta_2 = 7.5088.10^{-9}, a = 0.0584$ avec un chargement de sécurité relatif $\theta = 0.3$.

II.5. Approximation de Renyi

L'approximation de Renyi a été étudiée par Grandell (2000), elle consiste à remplacer la distribution Gamma Γ par une exponentielle, utilise les deux premiers moments, cette approximation est une version simplifiée de celle de Beekman - Bowers.

Théorème 2.16 ([47]). *L'approximation de la probabilité de ruine est donnée par :*

$$\Psi_R(u) = \frac{1}{1+\theta} \exp\left\{-\frac{2\mu\theta u}{\mu^{(2)}(1+\theta)}\right\} \tag{2.35}$$

Exemple 2.11.

u	0	1	5	10	20	50
$\Psi_R(u)$	0.769231	0.667738	0.379145	0.186876	0.045400	0.000651

TAB. 2.8 – Approximation de Renyi pour un mélange de deux lois exponentielles de paramètres $\beta_1 = 3.5900.10^{-10}, \beta_2 = 7.5088.10^{-9}, a = 0.0584$ avec un chargement de sécurité relatif $\theta = 0.3$.

II.6. Approximation de De Vylder

Cette approximation proposée par De Vylder (1997), se base sur l'idée suivante :
Soient les processus de surplus

$$S_t = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i - ct$$

et

$$\overline{S_t} = \sum_{i=1}^{\overline{N}(t)} X_i - \overline{c}t$$

où $N(t)$ et $\overline{N}(t)$ sont les nombres totaux d'événements.
$\overline{N}(t)$ est d'écrit par une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\beta}$.

L'idée de cette approximation consiste à remplacer le processus de surplus S_t par le processus de surplus $\overline{S_t}$ tels que les trois premiers moments des processus coincident i.e.,

$$E(S_t^k) = E(\overline{S_t}^k), \quad k = 1, 2, 3.$$

Les processus $S(t)$ et $\overline{S}(t)$ sont détérminés par les trois paramètres (λ, θ, μ) et $(\overline{\lambda}, \overline{\theta}, \overline{\beta})$ respectivement.

Théorème 2.17 ([20]). *L'approximation de De Vylder est donnée par :*

$$\Psi_{DV}(u) = \frac{1}{1+\overline{\theta}} \exp\left(-\frac{\overline{\theta}\ \overline{\beta} u}{1+\overline{\theta}}\right) \tag{2.36}$$

où les paramètres doivent satisfaire :

$$\overline{\lambda} = \frac{9\lambda\mu^{(2)3}}{2\mu^{(3)2}}, \quad \overline{\theta} = \frac{2\mu\mu^{(3)}}{3\mu^{(2)2}}\theta \quad et \quad \overline{\beta} = \frac{3\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}}$$

Preuve. Le moment d'ordre 1 est donné par :

$$E[S(t)] = (\lambda\mu - c)t = -\theta\lambda\mu t$$

$$E[\overline{S}(t)] = \left(\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\beta}} - \overline{c}\right) t = -\frac{\overline{\theta}\ \overline{\lambda}}{\overline{\beta}}$$

Le moment d'ordre 2 est donné par :

$$E[S^2(t)] = \lambda\mu^{(2)}t + (\theta\lambda\mu t)^2$$

$$E[\overline{S}^2(t)] = 2\overline{\lambda}\frac{1}{\overline{\beta}^2}t + \left(\frac{\overline{\theta}\ \overline{\lambda}}{\overline{\beta}}t\right)^2$$

Le moment d'ordre 3 est donné par :

$$E[S^3(t)] = \lambda\mu^{(3)}t - 3(\lambda\mu^{(2)}t)(\theta\lambda\mu t) - (\theta\lambda\mu t)^2$$

$$E[\overline{S}^3(t)] = \frac{6\overline{\lambda}}{\overline{\beta}^3}t - 3\left(2\overline{\lambda}\frac{1}{\overline{\beta}^2}t\right)\left(\frac{\overline{\theta}\ \overline{\lambda}}{\overline{\beta}}t\right) - \left(\frac{\overline{\theta}\ \overline{\lambda}}{\overline{\beta}}t\right)^2$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \theta\lambda\mu & = & \frac{\overline{\theta}\ \overline{\lambda}}{\overline{\beta}} \\ \lambda\mu^{(2)} & = & 2\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\beta}^2} \\ \lambda\mu^{(2)} & = & 6\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\beta}^3} \end{cases}$$

La résolution de ce système nous donne

$$\overline{\lambda} = \frac{9\lambda\mu^{(2)3}}{2\mu^{(3)2}}, \quad \overline{\theta} = \frac{2\mu\mu^{(3)}}{3\mu^{(2)2}}\theta \quad et \quad \overline{\beta} = \frac{3\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}}$$

or la probabilité de ruine dans le cas où les sinistres suivent une loi exponentielle de paramètre β est donnée par

$$\Psi(u) = \frac{1}{1+\theta} \exp\left(-\frac{\theta \ \beta u}{1+\theta}\right)$$

d'où l'approximation de De Vylder est donnée par :

$$\Psi_{DV}(u) = \frac{1}{1+\overline{\theta}} \exp\left(-\frac{\overline{\theta} \ \overline{\beta} u}{1+\overline{\theta}}\right)$$

□

Exemple 2.12.

u	0	1	5	10	20	50
$\Psi_{DV}(u)$	0.668881	0.591446	0.361560	0.195439	0.057105	0.001424

TAB. 2.9 – Approximation de De Vylder pour un mélange de deux lois exponentielles de paramètres $\beta_1 = 3.5900.10^{-10}, \beta_2 = 7.5088.10^{-9}, a = 0.0584$ avec un chargement de sécurité relatif $\theta = 0.3$.

II.7. Approximation par les 4 - moment Gamma de De Vylder

L'approximation par les 4 - moment Gamma de De Vylder a été proposée par Burnecki et al (2003), elle est basée sur l'idée de De Vylder qui consiste à remplacer le processus de surplus S_t par le processus de surplus $\overline{S_t}$ où $\overline{N}(t)$ est d'écrit par une loi Gamma.
Les processus S_t et $\overline{S_t}$ sont déterminés par les paramètres $(\lambda, \theta, \mu, \mu^2)$ et $(\overline{\lambda}, \overline{\theta}, \overline{\mu}, \overline{\mu}^2)$ respectivement, de telle sorte que les quatres premiers moments de processus coincident i.e.,

$$E(S_t^k) = E(\overline{S_t}^k), \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Nous devons supposer que : $\overline{\mu^{(2)}\mu^{(4)}} < \frac{3}{2}\mu^{(3)2}$ afin que $\overline{\mu}$, $\overline{\mu}^{(2)} > 0$ et $\overline{\mu}^{(2)} > \overline{\mu}^2$.

Théorème 2.18 ([10]). *L'approximation de 4 - moment Gamma de De Vylder est donnée par :*

$$\Psi_{4MGDV}(u) = \frac{\overline{\theta}(1 - \frac{R}{\overline{\alpha}} \exp(-\frac{\overline{\beta} R}{\overline{\alpha}} u)}{1 + (1+\overline{\theta})R - (1+\overline{\theta})(1+\frac{R}{\overline{\alpha}})} + \frac{\overline{\alpha}\overline{\theta}\sin(\overline{\alpha}\pi)}{\pi} I \tag{2.37}$$

où

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\overline{\alpha}} \exp\{-(x+1)\overline{\beta}\mu\}}{[x^{\overline{\alpha}}\{1 + \overline{\alpha}(1+\overline{\theta})(x+1) - \cos(\overline{\alpha}\pi)]^2 + \sin^2(\overline{\alpha}\pi)} dx$$

$$\overline{\alpha} = \frac{\overline{\mu}^2}{\overline{\mu}^{(2)} - \overline{\mu}^2} \quad \textit{et} \quad \overline{\beta} = \frac{\overline{\mu}}{\overline{\mu}^{(2)} - \overline{\mu}^2}.$$

Les paramètres doivent satisfaire :

$$\overline{\lambda} = \frac{\lambda(\mu^{(3)})^2(\mu^{(2)})^3}{\{\mu^{(2)}\mu^{(4)} - 2(\mu^{(3)})^2\}\{2\mu^{(2)}\mu^{(4)} - 3(\mu^{(3)})^2\}}$$

$$\overline{\theta} = \frac{\theta\mu\{2(\mu^{(3)})^2 - \mu^{(2)}\mu^{(4)}\}}{(\mu^{(2)})^2\mu^{(3)}}$$

$$\overline{\mu} = \frac{3(\mu^{(3)})^2 - 2\mu^{(2)}\mu^{(4)}}{\mu^{(2)}\mu^{(3)}}$$

$$\overline{\mu}^{(2)} = \frac{\{\mu^{(2)}\mu^{(4)} - 2(\mu^{(3)})^2\}\{2\mu^{(2)}\mu^{(4)} - 3(\mu^{(3)})^2\}}{(\mu^{(2)}\mu^{(3)})^2}$$

Preuve. De la même manière que pour la démonstration de l'approximation de De Vylder, on trouve le système suivant :

$$\begin{cases} \theta\lambda\mu & = & \overline{\theta}\ \overline{\lambda}\overline{\mu} \\ \lambda\mu^{(2)} & = & \overline{\lambda}\overline{\mu}^{(2)} \\ \lambda\mu^{(3)} & = & \overline{\lambda}\frac{\overline{\mu}^{(2)}}{\overline{\mu}^2}(2\overline{\mu}^{(2)} - \overline{\mu}^2) \\ \lambda\mu^{(4)} & = & \overline{\lambda}\frac{\overline{\mu}^{(2)}}{\overline{\mu}^2}(2\overline{\mu}^{(2)} - \overline{\mu}^2)(3\overline{\mu}^{(2)} - 2\overline{\mu}^2) \end{cases}$$

La résolution de ce système nous donne

$$\overline{\lambda} = \frac{\lambda(\mu^{(3)})^2(\mu^{(2)})^3}{\{\mu^{(2)}\mu^{(4)} - 2(\mu^{(3)})^2\}\{2\mu^{(2)}\mu^{(4)} - 3(\mu^{(3)})^2\}}$$

$$\overline{\theta} = \frac{\theta\mu\{2(\mu^{(3)})^2 - \mu^{(2)}\mu^{(4)}\}}{(\mu^{(2)})^2\mu^{(3)}}$$

$$\overline{\mu} = \frac{3(\mu^{(3)})^2 - 2\mu^{(2)}\mu^{(4)}}{\mu^{(2)}\mu^{(3)}}$$

$$\overline{\mu}^{(2)} = \frac{\{\mu^{(2)}\mu^{(4)} - 2(\mu^{(3)})^2\}\{2\mu^{(2)}\mu^{(4)} - 3(\mu^{(3)})^2\}}{(\mu^{(2)}\mu^{(3)})^2}$$

or la probabilité de ruine dans le cas où les sinistres suivent une loi Gamma(1, α) est donnée par :

$$\Psi_{4MGDV}(u) = \frac{\theta(1 - \frac{R}{\alpha}\exp(-\frac{\beta R}{\alpha}u)}{1 + (1+\theta)R - (1+\theta)(1+\frac{R}{\alpha})} + \frac{\alpha\theta\sin(\alpha\pi)}{\pi}I$$

d'où l'approximation de 4 - moment Gamma de De Vylder est donnée par :

$$\Psi_{4MGDV}(u) = \frac{\overline{\theta}(1 - \frac{R}{\overline{\alpha}}\exp(-\frac{\overline{\beta}R}{\overline{\alpha}}u)}{1 + (1+\overline{\theta})R - (1+\overline{\theta})(1+\frac{R}{\overline{\alpha}})} + \frac{\overline{\alpha}\overline{\theta}\sin(\overline{\alpha}\pi)}{\pi}I$$

$\square$

Exemple 2.13.

u	0	1	5	10	20	50
$\Psi_{4MGDV}(u)$	0.683946	0.595457	0.359879	0.194589	0.057105	0.001450

Tab. 2.10 – Approximation par les 4 - moment Gamma de De Vylder pour un mélange de deux lois exponentielles de paramètres $\beta_1 = 3.5900.10^{-10}, \beta_2 = 7.5088.10^{-9}, a = 0.0584$ avec un chargement de sécurité relatif $\theta = 0.3$.

II.8. Approximation à queue lourde

Le terme à queue lourde vient de la théorie des files d'attente ; ce terme signifie que le coefficient de sécurité relatif est petit, ou d'une manière équivalente λ est voisin de $\lambda_{\max}$ tel que $\lambda_{\max} = 1/\mu$.
Les deux premiers moments sont utilisés.

Théorème 2.19 ([4]). *L'approximation de la probabilité de ruine est donnée par :*

$$\Psi_{HT}(u) = \exp\left(-\frac{2\theta\mu u}{\mu^{(2)}}\right) \tag{2.38}$$

Pour la démonstration on a besoin du résultat suivant.

Proposition 2.9 ([62]). *Quand $\lambda \simeq \lambda_{\max}$ alors $(\lambda_{\max} - \lambda)L$ converge en distribution vers une distribution exponentielle de paramètre $\delta = \frac{2\mu^2}{\mu^{(2)}}$.*

Preuve de théorème 2.19.

$$\begin{aligned}\Psi(u) &= P(L > u)\\ &= P((\lambda_{\max} - \lambda)L > (\lambda_{\max} - \lambda)u)\end{aligned}$$

D'après la proposition 2.9 on a

$$\Psi(u) \approx e^{-\delta\lambda_{\max} - \lambda)u} \tag{2.39}$$

$\delta = \frac{2\mu^2}{\mu^{(2)}}$.

$$\Psi(u) \approx Ce^{-Ru} \approx e^{-2u\theta\mu^{(2)}/\mu} \tag{2.40}$$

De l'approximation de Cramér-Lundberg et de proposition 2.4 et du fait que

$\theta = \frac{1}{\rho} - 1 \approx 1 - \rho$, on a

$$\delta(\lambda_{\max} - \lambda) = \frac{2\mu^2}{\mu^{(2)}} \frac{1-\rho}{\mu} \approx \frac{2\theta\mu}{\mu^{(2)}}.$$

D'où

$$\Psi_{HT}(u) = \exp\left(-\frac{2\theta\mu u}{\mu^{(2)}}\right)$$

□

Exemple 2.14.

u	0	1	5	10	20	50
$\Psi_{QL}(u)$	1.000000	0.831983	0.398633	0.158908	0.025252	0.000101

TAB. 2.11 – Approximation à queue lourde pour un mélange de deux lois exponentielles de paramètres $\beta_1 = 3.5900.10^{-10}, \beta_2 = 7.5088.10^{-9}, a = 0.0584$ avec un chargement de sécurité relatif $\theta = 0.3$.

II.9. Approximation à queue légère

Le terme à queue légère vient de la théorie des files d'attente, ce terme signifie que le coefficient de sécurité relatif et grand, ou d'une manière équivalente λ est voisin de μ.

Proposition 2.10 ([4]). *Quand $\lambda \to 0$, alors l'approximation de la probabilité de ruine est donnée par*

$$\Psi_{LT}(u) \quad = \quad \frac{1}{(1+\theta)\mu} \int_u^\infty \overline{F}_X(x)dx \tag{2.41}$$

Preuve. D'après la formule (2.19) on a :

$$\Psi_{LT}(u) = (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \widetilde{F}^{*n}(u) \approx \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \widetilde{F}^{*n}(u).$$

Or

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \widetilde{F}^{*n}(u) = o(\lambda^2)$$

alors

$$\Psi_{LT}(u) = \frac{\lambda\mu}{c}\widetilde{F}(u) = \lambda/c\int_u^\infty \overline{F}_X(x)dx.$$

Or

$$\lambda/c = \frac{1}{(1+\theta)\mu}.$$

Ce qui donne

$$\Psi_{LT}(u) = \frac{1}{(1+\theta)\mu}\int_u^\infty \overline{F}_X(x)dx$$

□

Exemple 2.15.

u	0	1	5	10	20	50
$\Psi_{QL}(u)$	0.769231	0.303545	0.0721163	0.011988	0.000331	0.000000

TAB. 2.12 – Approximation à queue légère pour un mélange de deux lois exponentielles de paramètres $\beta_1 = 3.5900.10^{-10}, \beta_2 = 7.5088.10^{-9}, a = 0.0584$ avec un chargement de sécurité relatif $\theta = 0.3$.

II.10. Approximation à queue légère et lourde

Cette approximation a été proposée par Asmussen (2000). L'idée de cette approximation est de combiner les approximations légère et lourde.

Théorème 2.20 ([4]). *L'approximation de la probabilité de ruine est donnée par :*

$$\Psi_{HLT}(u) = \frac{\theta}{1+\theta}\Psi_{LT}\left(\frac{\theta u}{1+\theta}\right) + \frac{1}{(1+\theta)^2}\Psi_{HT}(u) \tag{2.42}$$

Exemple 2.16.

u	0	1	5	10	20	50
$\Psi_{QLL}(u)$	0.769231	0.598231	0.302136	0.137806	0.034061	0.001652

TAB. 2.13 – Approximation à queue légère lourde pour un mélange de deux lois exponentielles de paramètres $\beta_1 = 3.5900.10^{-10}, \beta_2 = 7.5088.10^{-9}, a = 0.0584$ avec un chargement de sécurité relatif $\theta = 0.3$.

II.11. Approximation Subexponentielle

Cette approximation a été proposée par Embrechts et al (1997).

Soit

$$S = \left\{ F : \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} = 2 \right\}$$

où $\overline{F}^{*2}(x)$ est la queue de deux produits de convolution de F.

Théorème 2.21 ([27]). *L'approximation de la probabilité de ruine est donnée par :*

$$\Psi_S(u) = \frac{1}{\theta\mu}\left(\mu - \int_0^u \overline{F}(x)dx\right) \tag{2.43}$$

Preuve. Soit
$$\widetilde{F}(x) = 1/\mu \int_0^x \overline{F}(y)dy.$$
On sait d'après (1.1) que
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, D \ \text{ tel que } \frac{1-\widetilde{F}^{*n}(x)}{1-\widetilde{F}(x)} \leq D(1+\epsilon)^n$$
D'après la formule (2.19),
$$\begin{aligned}\frac{\Psi_S(u)}{1-\widetilde{F}(u)} &= \left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \frac{1-\widetilde{F}^{*n}(x)}{1-\widetilde{F}(x)} \\ &\leq D\left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n n(1+\epsilon)^n < \infty\end{aligned}$$
car
$$\lim_{u\to\infty}\frac{1-\widetilde{F}^{*n}(x)}{1-\widetilde{F}(x)} = n$$
alors
$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty}\frac{\Psi_S(u)}{1-\widetilde{F}(u)} &= \left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \\ &= \left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \\ &= \left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^m \\ &= \frac{\lambda\mu}{c-\lambda\mu}\end{aligned}$$
Ce qui donne
$$\begin{aligned}\Psi_S(u) &= \frac{\lambda\mu}{c-\lambda\mu}(1-\widetilde{F}(u)) \\ &= \frac{\lambda\mu}{c-\lambda\mu}\left(1-\frac{1}{\mu}\int_0^u \overline{F}(y)dy\right) \\ &= \frac{\lambda\mu}{c-\lambda\mu}\frac{1}{\mu}\left(\mu-\int_0^u \overline{F}(y)dy\right) \\ &= \frac{1}{\theta\mu}\left(\mu-\int_0^u \overline{F}(y)dy\right)\end{aligned}$$
D'où
$$\Psi_S(u) = \frac{1}{\theta\mu}\left(\mu-\int_0^u \overline{F}(x)dx\right)$$
$\square$

Exemple 2.17.

u	0	1	5	10	20	50
$\Psi_S(u)$	0.769231	0.303545	0.072163	0.011988	0.000331	0.000000

TAB. 2.14 – Approximation Subexponentielle pour un mélange de deux lois exponentielles de paramètres $\beta_1 = 3.5900.10^{-10}, \beta_2 = 7.5088.10^{-9}, a = 0.0584$ avec un chargement de sécurité relatif $\theta = 0.3$.

2.1.7 Détermination d'une probabilité de ruine sur un horizon fini

De la même façon que sur un horizon infini, le calcul de la probabilité de ruine se fera de façon exacte ou approximative.

I. Méthodes exactes

Parmi les méthodes exactes, on distingue quatre :

I.1. Expréssion explicite de la probabilité de ruine sur un horizon fini pour la loi exponentielle

Supposons que les sinistres suivent une loi exponentielle de paramètre $\delta = 1$ avec une prime constante égale à 1, alors la probabilité de ruine est donnée par :

Proposition 2.11 ([4]).

$$\Psi(u,T) = \lambda \exp\{-(1-\lambda)u\} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f_1(x)f_2(x)}{f_3(x)}dx. \tag{2.44}$$

Où

$$f_1(x) = \lambda \exp\left\{2\sqrt{\lambda}T\cos x - (1+\lambda)T + u(\sqrt{\lambda}\cos x - 1)\right\},$$

$$f_2(x) = \cos(u\sqrt{\lambda}\sin x) - \cos(u\sqrt{\lambda}\sin x + 2x)$$

et

$$f_3(x) = 1 + \lambda - 2\sqrt{\lambda}\cos x$$

Preuve. Nous utilisons la formule $\Psi(u,T) = P(V_T > u)$ où $\{V_T\}$ est le processus de charge dans une file d'attente M/ M / 1 de taux d'arrivé λ et de taux de service $\delta = 1$.

Soit $\{Q_T\}$ la longueur de la file d'attente dans le système.

Si $Q_T = N$, alors $V_T = U_{1,T} + U_{2,T} + \cdots + U_{N,T}$, où $U_{1,T}$ est le temps d'attente résiduel de client actuellement en service et $U_{2,T}, \cdots, U_{N,T}$ sont les temps d'attente

de clients attendant le service.
$U_{1,T}, U_{2,T}, \cdots, U_{N,T}$ sont indépendantes et identiquement distribuées et suivent des lois exponentielles de paramètre $\delta = 1$.

$$\begin{aligned}
\Psi(u,T) &= P(V_T > u) \\
&= P(V_T > u, \cup_{N=1}^{\infty} Q_T = N) \\
&= \sum_{N=1}^{\infty} P(V_T > u, Q_T = N) \\
&= \sum_{N=1}^{\infty} P(Q_T = N) P(V_T > u / Q_T = N) \\
&= \sum_{N=1}^{\infty} P(Q_T = N) P(E_N > u) \\
&= \sum_{N=1}^{\infty} P(Q_T = N) \sum_{k=1}^{N-1} e^{-u} \frac{u^k}{k!}
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-u} \frac{u^k}{k!} P(Q_T \geq k+1) \tag{2.45}$$

Pour $j = 0, 1, 2, \cdots$

$$I_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n+j}}{n!(n+j)!} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x\cos\theta} \cos(j\theta) d\theta \tag{2.46}$$

est la fonction de Bessel modifiée d'ordre j, (voir [1]).
On définit

$$i_j = e^{-(1+\lambda)T} \lambda^{j/2} I_j(2\sqrt{\lambda} T) \text{avec} \sum_{j=-\infty}^{\infty} i_j = 1,$$

$$\begin{aligned}
P(Q_T \geq k+1) &= 1 - \sum_{j=-\infty}^{k} i_j + \lambda^{k+1} \sum_{j=-\infty}^{-k-2} i_j \\
&= \lambda^{k+1} + \sum_{j=k+1}^{\infty} i_j - \lambda^{k+1} \sum_{j=-k-1}^{\infty} i_j
\end{aligned}$$

D'après la formule d'Euler

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k+1}^{\infty} i_j &= \sum_{j=k+1}^{\infty} e^{-(1+\lambda)T} \lambda^{j/2} I_j(2\sqrt{\lambda} T) \\
&= \sum_{j=k+1}^{\infty} e^{-(1+\lambda)T} \lambda^{j/2} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{2\lambda^{1/2} T \cos\theta} \cos(j\theta) d\theta \\
&= e^{-(1+\lambda)T} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{2\lambda^{1/2} T \cos\theta} \sum_{j=k+1}^{\infty} \lambda^{j/2} \cos(j\theta) d\theta
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\sum_{j=-k-1}^{\infty} i_j = e^{-(1+\lambda)T}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{2\lambda^{1/2}T\cos\theta} \sum_{j=-k-1}^{\infty} \lambda^{j/2}\cos(j\theta)d\theta$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k+1}^{\infty} \lambda^{j/2}\cos(j\theta) &= Re\left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \lambda^{j/2}e^{ij\theta}\right) \\
&= Re\left(\frac{\lambda^{(k+1)/2}e^{i(k+1)\theta}}{\lambda^{1/2}e^{i\theta}-1}\right) \\
&= \frac{Re\big(-\lambda^{(k+1)/2}e^{i(k+1)\theta}(\lambda^{1/2}e^{i\theta}-1)\big)}{\mid \lambda^{1/2}e^{i\theta}-1\mid^2} \\
&= \frac{-\lambda^{(k+1)/2}[\lambda^{1/2}\cos(k\theta)-\cos((k+1)\theta)]}{f_3(\theta)}
\end{aligned}$$

où Re désigne la partie réelle

$$\begin{aligned}
\lambda^{k+1}\sum_{j=-k-1}^{\infty} \lambda^{j/2}\cos(j\theta) &= \lambda^{k+1}Re\big(\sum_{j=-k-1}^{\infty} \lambda^{j/2}e^{ij\theta}\big) \\
&= Re\left(\frac{\lambda^{(k+1)/2}e^{-i(k+1)\theta}}{\lambda^{1/2}e^{i\theta}-1}\right) \\
&= \frac{Re[-\lambda^{(k+1)/2}e^{-i(k+1)\theta}(\lambda^{1/2}e^{-i\theta}-1)]}{\mid \lambda^{1/2}e^{i\theta}-1\mid^2} \\
&= \frac{-\lambda^{(k+1)/2}[\lambda^{1/2}\cos((k+2)\theta)-\cos((k+1)\theta)]}{f_3(\theta)}
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$P(Q_T \geq k+1)-\lambda^{k+1} = e^{-(1+\lambda)T}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{2\lambda^{1/2}T}\cos\theta\frac{\lambda^{(k+1)/2}[\lambda^{1/2}\cos(k\theta)-\cos((k+2)\theta)]}{f_3(\theta)}d\theta.$$

D'où $P(Q_\infty \geq k+1) = \lambda^{k+1}$, Ce qui donne

$$\Psi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-u}\frac{u^k}{k!}\lambda^{k+1} = \lambda e^{-u(1-\lambda)}$$

$$\Psi(u,T) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-u}\frac{u^k}{k!}P(Q_T \geq k+1)$$

$$\begin{aligned}
\Psi(u,T) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-u}\frac{u^k}{k!}P(Q_T \geq k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-u}\frac{u^k}{k!}\left[\lambda^{k+1}+e^{-(1+\lambda)T}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{2\lambda^{1/2}T\cos\theta}\frac{\lambda^{(k+1)/2}[\lambda^{1/2}\cos(k\theta)-\lambda^{1/2}\cos((k+2)\theta)]}{f_3(\theta)}d\theta\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-u}\frac{u^k}{k!}\lambda^{k+1}+\sum_{k=0}^{\infty} e^{-u}\frac{u^k}{k!}e^{-(1+\lambda)T}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{2\lambda^{1/2}T\cos\theta}\frac{\lambda^{(k+1)/2}[\lambda^{1/2}\cos(k\theta)-\lambda^{1/2}\cos((k+2)\theta)]}{f_3(\theta)}d\theta \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-u}\frac{u^k}{k!}\lambda^{k+1}+e^{-(1+\lambda)T}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{2\lambda^{1/2}T\cos\theta}\lambda\frac{1}{f_3}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-u}\frac{u^k}{k!}\lambda^{k/2}[\cos(k\theta)-\cos((k+2)\theta)]d\theta \\
&= \lambda e^{-u(1-\lambda)}+e^{-(1+\lambda)T}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{2\lambda^{1/2}T\cos\theta}\lambda\frac{1}{f_3(\theta)}e^{-u}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{k!}\lambda^{k/2}\cos(k\theta)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{k!}\lambda^{k/2}\cos((k+2)\theta)\right]d\theta
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{k!}\lambda^{k/2}\cos((k+2)\theta) &= Re\left[e^{2i\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(u\lambda^{1/2}e^{i\theta})^k}{k!}\right]\\ &= Re(e^{u\lambda^{1/2}e^{i\theta}+2i\theta})\\ &= e^{u\lambda^{1/2}\cos\theta}\cos(u\lambda^{1/2}\sin\theta+2\theta)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{k!}\lambda^{k/2}\cos(k\theta) &= Re\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(u\lambda^{1/2}e^{i\theta})^k}{k!}\right]\\ &= Re(e^{u\lambda^{1/2}e^{i\theta}})\\ &= e^{u\lambda^{1/2}\cos\theta}\cos(u\lambda^{1/2}\sin\theta).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\Psi(u,T) &= \sum_{k=0}^{\infty}e^{-u}\frac{u^k}{k!}\left[\lambda^{k+1}-e^{-(1+\lambda)T}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{2\lambda^{1/2}T\cos\theta}\frac{\lambda^{(k+1)/2}[\lambda^{1/2}\cos(k\theta)-\lambda^{1/2}\cos((k+2)\theta)]}{f_3(\theta)}d\theta\right]\\ &= \lambda e^{-(1-\lambda)u}-e^{-(1+\lambda)T}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{2\lambda^{1/2}T\cos\theta}\left[\frac{\lambda e^{-u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{k!}\lambda^{k/2}\cos(k\theta)-\lambda e^{-u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{k!}\lambda^{k/2}\cos((k+2)\theta)}{f_3(\theta)}d\theta\right]\\ &= \lambda e^{-(1-\lambda)u}-e^{-(1+\lambda)T}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{2\lambda^{1/2}T\cos\theta}\left[\frac{\lambda e^{-u}e^{u\lambda^{1/2}\cos\theta}\cos(u\lambda^{1/2}\sin\theta)-\lambda e^{-u}e^{u\lambda^{1/2}\cos\theta}\cos(u\lambda^{1/2}\sin\theta+2\theta)}{f_3(\theta)}d\theta\right]\\ &= \lambda e^{-(1-\lambda)u}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\lambda\frac{e^{2\lambda^{1/2}T\cos\theta}e^{-(1+\lambda)T}e^{-u}e^{u\lambda^{1/2}T\cos\theta}(\cos(u\lambda^{1/2}\sin\theta)-\cos(u\lambda^{1/2}\sin\theta+2\theta)}{f_3(\theta)}d\theta\\ &= \lambda e^{-(1-\lambda)u}-\lambda\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\exp(2\lambda^{1/2}T\cos\theta-(1+\lambda)T+u(\lambda^{1/2}T\cos\theta-1))(\cos(u\lambda^{1/2}\sin\theta)-\cos(u\lambda^{1/2}\sin\theta+2\theta))}{f_3(\theta)}d\theta\\ &= \lambda e^{-(1-\lambda)u}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f_1(\theta)f_2(\theta)}{f_3(\theta)}d\theta\end{aligned}$$

□

Exemple 2.18.

u	0	1	2	3	4	5
$\Psi(u,1)$	0.757164	0.147954	0.025005	0.003605	0.000443	0.000047
$\Psi(u,2)$	0.766264	0.168728	0.035478	0.007012	0.001288	0.000218
$\Psi(u,5)$	0.769098	0.176127	0.040220	0.009138	0.002060	0.000459
$\Psi(u,10)$	0.769229	0.176497	0.040495	0.009290	0.002131	0.000489
$\Psi(u,20)$	0.769231	0.176503	0.040499	0.009293	0.002132	0.000489

Tab. 2.15 – La probabilité de ruine pour la loi exponentielle de paramètre $\beta = 6.3789.10^{-9}$ avec un chargement de sécurité relatif $\theta = 0.3$.

I.2. Formule de Picard-Lefèvre

La formule de Picard-Lefèvre est basée sur les polynômes d'Appell généralisés.
Ces polynômes sont définis récurssivement par :
$A_0 = 1$ et pour $n > 0$,

$$A'_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda f_j A_{n-j} \tag{2.47}$$

$$A_n(v_n) = 0$$

où

$$v_n = \max\big(\frac{n-u}{c}, 0\big)$$

et

$$f_j = P[X_1 = j]$$

Le temps de ruine $\tau(u)$ défini par

$$\tau(u) = \inf\{t \geq 0 : R_t^u < 0\}$$

Pour $t \in \mathbb{R}^+$,et $n \in \mathbb{N}$, posons

$$P_n(t) = P(S(t) = n, \tau(u) > t).$$

En conditionnant par rapport au dernier instant de sinistre, Picard-Lefèvre montrent que

$$P_n(t) = \begin{cases} 0 \quad si & t < v_n \\ e^{-\lambda t} A_n(t) \quad si & t \geq v_n \end{cases}$$

où les A_n sont les polynômes de degré n définis récursivement par (2.47).
Ces polynômes (voir Picard et Lefèvre (1997)) peuvent aussi être obtenus grâce aux polynômes e_n définis par la fonction génératrice

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e_n(t) s^n = e^{tg(s)}$$

où $g(s) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda f_j s^j$
Les polynômes e_n s'obtiennent assez aisément à partir des convolutions successives de F_X. On peut alors exprimer les A_n en fonction des e_n et en déduire la formule suivante :

Théorème 2.22 ([54]). *La probabilité de non ruine est donnée par :*

$$\varphi(u,t) = e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{u} \left[e_j(t) + \sum_{n=u+1}^{[u+ct]} e_j\left(\frac{j-u}{c}\right) \frac{u+ct-n}{u+ct-j} e_{n-j}\left(t + \frac{u-j}{c}\right) \right] \tag{2.48}$$

I.3. Formule de type Seal

Supposons que $P(X > 0) = 1$. Dans le cas d'une arrivée Poissonnienne, cette hypothèse n'est pas restrictive. On peut toujours se ramener au cas $P(X > 0) = 1$, quite à remplacer le paramètre λ par le paramètre $\lambda(1 - P(X = 0))$ et X par X', tel que
$\forall k \geq 1, P(X' = k)(1 - P(X = 0)) = P(X = k)$ et $P(X' = 0) = 0$.
La fonction de répartition F de la variable aléatoire $S(t)$ représentant le montant agrégé des sinistres jusqu'au temps t vérifie pour $x \geq 0$

$$F(x) = e^{-\lambda x} + \int_0^x \widetilde{f}(y)dy,$$

où

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} f_X^{*n}(y),$$

Cette fonction permet de calculer les probabilités $\varphi(u, x)$ de non ruine avant la date x avec une réserve initiale u.

Théorème 2.23 (Formule de Seal [61]).

$$\varphi(0, t) = \frac{1}{ct} \int_0^{ct} F(y)dy$$

Si X admet pour densité f_X, alors :

$$\varphi(u, t) = F(u + ct) - c \int_0^u \varphi(0, t - y)\widetilde{f}(u + cy)dy.$$

Exemple 2.19. Quand les montants des sinistres suivent une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\mu}$, on a les formules suivantes :

$$\Psi(u, t) = 1 - e^{\frac{-u}{\mu} - (1+\alpha)\lambda t} g\left(\frac{u}{\mu + \alpha\lambda t}, \lambda t\right),$$

où $\alpha = \frac{c}{\lambda\mu}$, et g est la fonction définie par

$$g(z, \theta) = J(\theta z) + \theta J'(\theta z) + \int_0^z e^{z-v} J(\theta v)dv - \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha\theta} e^{\alpha\theta - v} J\left(\frac{zv}{\alpha}\right) dv.$$

En notant

$$J(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!n!} = I_0(2\sqrt{x})$$

où I_0 est la fonction de Bessel modifiée et

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{k!k!}$$

On peut aussi obtenir une formule équivalente :

$$\Psi(u,t) = \frac{1}{\alpha} e^{-u\frac{\alpha-1}{\alpha\mu}} - \frac{1}{\pi} e^{\frac{-u}{\mu-(1+\alpha)t}} \int_0^{\pi} h\big(u/\mu, \lambda t, y\big) dy,$$

où h est définie par

$$h(x,\theta,y) = 2\sqrt{\alpha}\frac{e^{(2\sqrt{\alpha}\theta + x/\sqrt{\alpha})\cos y}}{1+\alpha-2\sqrt{\alpha}\cos y}(\sin y \sin(y + \frac{x}{\sqrt{\alpha}} \sin y)).$$

On trouvera dans Seal (1969) , Takács (1962), et Rolski et al. (1999) les démonstrations et des extensions des formules précédentes.
La formule classique de Takács (1962) est un outil clé pour obtenir la formule de Seal.

Lemme 2.2 ([67]). *Soit* $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$*, où les* X_i *sont indépendantes et identiquement distribuées et à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$*.*
Pour $n \in \mathbb{N}^*, i \in \mathbb{N}, i \leq n,$

$$P\big[\{Y_r < r, r = 1, \cdots, n\} \cap \{Y_n = n - i\}\big] = \frac{i}{n} P[Y_n = n - i].$$

I.4. Formule de Takács

Grâce aux propriétés du processus de Poisson composé, la formule de Takács donne les deux résultats bien connus suivants.

Théorème 2.24 ([67]). *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*.*

$$P\left[S_{\frac{n}{c}} = i \cap R_t \geq 0, \quad t \in [0, \frac{n}{c}]\right] = \frac{n-i}{n} P\left[S_{\frac{n}{c}} = i\right], i = 0, \cdots, n$$

$$\varphi\left(0, \frac{n}{c}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n} P\left[S_{\frac{n}{c}} = i\right] = \frac{1}{n} E\left(R^0_{\frac{n}{c}}\right)_+$$

Théorème 2.25 ([67]). *Pour* $t \in \mathbb{R}^+$*,*

$$\varphi(0,t) = \frac{1}{ct} E(R^0_t)_+$$

$$\varphi(0,t/c) = \sum_{i=1}^{[t]} \left(1 - \frac{i}{t}\right) P\left[S_{\frac{t}{c}} = i\right]$$

II. Approximation de probabilité de ruine sur un horizon fini

II.1. Approximation normale de Segerdahl

Proposée par Segerdahl (1955), cette approximation est basée seulement sur l'approximation de Cramér-Lundberg.

Théorème 2.26 ([62]).

$$\Psi_{SN}(u,T) = Ce^{-Ru}\Phi\left(\frac{T - um_L}{w_L\sqrt{u}}\right) \tag{2.49}$$

Où

$$C = \frac{\theta\mu}{\left\{M'_X(R) - \mu(1+\theta)\right\}}$$

$$m_L = \frac{1}{\left\{\lambda M'_X(R) - 1\right\}} = \frac{1}{\rho - 1}$$

$$w_L^2 = \lambda M''_X(R)m_L^3.$$

Preuve. (voir [4]). □

Exemple 2.20.

u	0	1	5	10	20	50
$\Psi(u,1)$	0.663843	0.444333	0.172753	0.070517	0.013833	0.000141
$\Psi(u,2)$	0.663843	0.554585	0.229282	0.092009	0.017651	0.000175
$\Psi(u,5)$	0.663843	0.587255	0.338098	0.152503	0.030919	0.000311
$\Psi(u,10)$	0.663843	0.587260	0.359593	0.192144	0.049495	0.000634
$\Psi(u,20)$	0.663843	0.587260	0.0.359660	0.194858	0.057143	0.001254

TAB. 2.16 – Approximation normale de Segerdahl pour un mélange des deux lois exponentielles de paramètre $\beta_1 = 3.5900.10^{-10}, \beta_2 = 7.5088.10^{-9}, a = 0.0584$ avec un chargement de sécurité relatif $\theta = 0.3$.

II.2. Approximation de Diffusion

L'idée est d'approximer le processus de surplus S_t par un mouvement Brownien avec dérive. Les deux premiers moments sont utilisés.
L'outil utilisé pour cette approximation est le théorème de Donsker pour une marche aléatoire simple $(S_n^*)_{n\geq 0}$ en temps discret.
Si $\mu = E[S_1^*]$ est la dérive et $\sigma^2 = Var(S_1^*)$ alors :

$$\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{p}}(S^*_{[tp]} - tp\mu)\right\}_{t\geq 0} \xrightarrow{D} \{W_0(t)\}_{t\geq 0},\ p \to \infty \tag{2.50}$$

Où

- $[np]$ désigne la partie entière de np.

- D désigne la convergence en distribution.

- $\{W_\zeta(t)\}$ est le mouvement Brownian avec dérive ζ et de la variance 1.

Théorème 2.27 ([4]). *Quand $c \to \rho$, on a*

$$\left\{\frac{|\mu|}{\sigma^2} S^{(c)}_{t\sigma^2/\mu^2}\right\}_{t\geq 0} \xrightarrow{D} \{W_{-1}(t)\}_{t\geq 0} \tag{2.51}$$

Où $\mu = \mu_c = \rho - c$, $\sigma^2 = \lambda\mu^{(2)}$

Preuve.

$$\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{p}}(S^{(c)}_{tp} - tp\mu_c)\right\} = \left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{p}}(S^{(c)}_{tp} - tp\rho)\right\} \xrightarrow{D} \{W_0(t)\}_{t\geq 0} \tag{2.52}$$

$p = p_c \to \infty$ quand $c \to \rho$.
En effet, c'est une conséquence de (2.50) avec $S^*_n = S^{(c)}_n$ et l'inégalité

$$S^{(\rho)}_{n/p} - \rho/p \leq S^{(\rho)}_t \leq S^{(\rho)}_{(n+1)/p} - \rho c/p, \;\; n/p \leq t \leq (n+1)/p.$$

En posant $p = \sigma^2/\mu_c^2$, alors (2.52) devient

$$\left\{\frac{|\mu|}{\sigma^2} S^{(c)}_{t\sigma^2/\mu^2} + t\right\} \xrightarrow{D} \{W_0(t)\}$$

$$\left\{\frac{|\mu|}{\sigma^2} S^{(c)}_{t\sigma^2/\mu^2}\right\} \xrightarrow{D} \{W_0(t) - t\} = \{W_{-1}(t)\}$$

□

Soit

$$\tau_c(u) = \inf\{t \geq 0, S^{(c)}_t > u\}, \; \tau_\zeta(u) = \inf\{t \geq 0, W_\zeta(t) > u\}$$

Notons

$$IG(x;\zeta;u) = 1 - \Phi(u/\sqrt{x} - \zeta\sqrt{x}) + \exp(2\zeta u)\Phi(-u/\sqrt{x} - \zeta\sqrt{x}) \tag{2.53}$$

où $IG = (.;\zeta;u)$ désigne la fonction de répartition de mouvement Brownien avec dérive ou bien une fonction de distribution Gaussienne inverse.

Corollaire 2.3 ([4]). *Quand $c \to \rho$,*
l'approximation de Diffusion est donnée par :

$$\Psi_D\left(\frac{u\sigma^2}{|\mu|}, \frac{T\sigma^2}{\mu^2}\right) \to IG(T;-1;u) \tag{2.54}$$

Preuve.

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left\{\frac{|\mu|}{\sigma^2}S^{(c)}_{t\sigma^2/\mu^2}\right\} \overset{D}{\to} \sup_{0\leq t\leq T}\{W_{-1}(t)\}$$

et $\sup_{0\leq t\leq T}\left\{\frac{|\mu|}{\sigma^2}S^{(c)}_{t\sigma^2/\mu^2}\right\}$ est continue, alors

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T}\frac{|\mu|}{\sigma^2}S^{(c)}_{t\sigma^2/\mu^2} > u\right) \to P\left(\sup_{0\leq t\leq T}\{W_{-1}(t) > u\}\right)$$

on a

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T}\frac{|\mu|}{\sigma^2}S^{(c)}_{t\sigma^2/\mu^2} > u\right) = \Psi_D\left(\frac{u\sigma^2}{|\mu|},\frac{T\sigma^2}{\mu^2}\right)$$

et

$$P\Big(\sup_{0\leq t\leq T}\{W_{-1}(t) > u\}\Big) = IG(T;-1;u)$$

□

Du corollaire 2.3, l'approximation de Diffusion est donnée par

$$\Psi(u,T) \approx IG\left(\frac{T\mu^2}{\sigma^2};\frac{u\,|\,\mu\,|}{\sigma^2}\right)$$

En passant à la limite quand $T\to\infty$ dans (2.54), on obtient

$$\Psi(u) \approx IG\left(\infty;\frac{u\,|\,\mu\,|}{\sigma^2}\right) = e^{-2u|\mu|/\sigma^2} \tag{2.55}$$

qui est l'approximation de la probabilité de ruine à queue lourde.

Exemple 2.21.

u	0	1	5	10	20	50
$\Psi(u,1)$	1.000000	0.770917	0.223423	0.028147	0.000059	0.000000
$\Psi(u,2)$	1.000000	0.801611	0.304099	0.072061	0.001610	0.000000
$\Psi(u,5)$	1.000000	0.823343	0.370177	0.128106	0.011629	0.000000
$\Psi(u,10)$	1.000000	0.829877	0.391556	0.150708	0.020604	0.000017
$\Psi(u,20)$	1.000000	0.831744	0.397816	0.157924	0.024603	0.000073

TAB. 2.17 – Approximation de diffusion pour un mélange des deux lois exponentielles de paramètre $\beta_1 = 3.5900.10^{-10}, \beta_2 = 7.5088.10^{-9}, a = 0.0584$avec un chargement de sécurité relatif $\theta = 0.3$.

II.3. Approximation de Diffusion corrigée

L'idée de l'approximation de diffusion corrigée est de remplacer le processus de risque par un mouvement Brownien (en utilisant les deux premiers moments).

Théorème 2.28 ([41]). *L'approximation de diffusion corrigée est donnée par :*

$$\Psi_{CD}(u,t) = IG\left(\frac{T\delta_1}{u^2} + \frac{\delta_2}{u}, -\frac{Ru}{2}, 1 + \frac{\delta_2}{u}\right).$$

Où

- $\delta_1 = \lambda M''_X(\gamma_0)$.

- $\delta_2 = \dfrac{M'''_X(\gamma_0)}{3M''_X(\gamma_0)}$

et γ_0 satisfait l'équation $\kappa(\gamma_0) = 0$ avec $\kappa(s) = \frac{\lambda}{c}(M_X(s) - 1) - s$.

Exemple 2.22.

u	0	1	5	10	20	50
$\Psi(u,1)$	0.521465	0.426840	0.187718	0.065264	0.007525	0.000010
$\Psi(u,2)$	0.587784	0.499238	0.254253	0.104967	0.016173	0.000039
$\Psi(u,5)$	0.638306	0.557463	0.321230	0.157827	0.035499	0.000851
$\Psi(u,10)$	0.655251	0.577547	0.347505	0.182727	0.049056	0.000724
$\Psi(u,20)$	0.660958	0.584386	0.356922	0.192446	0.055610	0.001243

TAB. 2.18 – Approximation de Diffusion corrigée pour un mélange de deux lois exponentielles de paramètre $\beta_1 = 3.5900.10^{-10}, \beta_2 = 7.5088.10^{-9}, a = 0.0584$ avec un chargement de sécurité relatif $\theta = 0.3$.

II.4. Approximation de De Vylder

L'idée de l'approximation de De Vylder dans le temps fini est identique avec l'idée de l'approximation de De Vylder dans le temps infini.

Théorème 2.29 ([20]). *L'approximation de De Vylder est donnée par :*

$$\Psi_{DV}(u) = \frac{1}{1+\overline{\theta}} \exp\left(-\frac{\overline{\theta}\,\overline{\beta}u}{1+\overline{\theta}}\right) \tag{2.56}$$

où

$$\overline{\lambda} = \frac{9\lambda\mu^{(2)3}}{2\mu^{(3)2}}, \quad \overline{\theta} = \frac{2\mu\mu^{(3)}}{3\mu^{(2)2}}\theta \quad \text{et} \quad \overline{\beta} = \frac{3\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}}$$

Exemple 2.23.

u	0	1	5	10	20	50
$\Psi(u,1)$	0.528431	0.433119	0.189379	0.063412	0.006114	0.000003
$\Psi(u,2)$	0.594915	0.505300	0.256745	0.104811	0.015180	0.000021
$\Psi(u,5)$	0.645282	0.563302	0.323909	0.158525	0.035142	0.000215
$\Psi(u,10)$	0.662159	0.583353	0.350278	0.183669	0.048960	0.000690
$\Psi(u,20)$	0.667863	0.590214	0.359799	0.193528	0.055637	0.001218

TAB. 2.19 – Approximation de De Vylder pour un mélange des deux lois exponentielles de paramètre $\beta_1 = 3.5900.10^{-10}, \beta_2 = 7.5088.10^{-9}, a = 0.0584$ et le chargement de sécurité relatif $\theta = 0.3$.

II.5. Méthode récursive pour les distributions phase-type

On définit

1.
$$p_n(y) = \frac{d}{dy}P \text{ (non ruine jusqu'à la } n^{\text{ième}} \text{ réclamation, et la réserve réstante } \leq y \text{)} \tag{2.57}$$

2. Sa transformée de Laplace est :
$$L_n(s) = \int_0^\infty e^{-sy} p_n(y) dy \tag{2.58}$$
En particulier
$$L_n(0) = P \text{ (non ruine jusqu'à la } n^{\text{ième}} \text{ réclamation).} \tag{2.59}$$

3. On définit l'accroissement entre deux réclamations consécutives comme la différence entre le revenu gagné et la quantité de réclamation.
Soit $g(y)$ la fonction de densité définie dans $\mathbb{R}$, et posons
$$G(s) = \int_0^\infty e^{-sy} g(y) dy \tag{2.60}$$

4. Soit F une fonction de distribution de densité f et de transformée de Laplace Stieltjes
$$\Phi_F(s) = \int_0^\infty e^{-sy} dF(y) \tag{2.61}$$

Du fait que le nombre de réclamations est donné par un processus de Poisson, les inter-réclamations (les montants de revenu réalisé entre les réclamations) sont des distributions exponentielles. De plus, les primes sont collectées à un taux constant, ainsi il suit que le revenu collecté entre les réclamations consécutives suit une distribution exponentielle de moyenne $1/\lambda$.

D'où

$$g(y) = \begin{cases} \Phi_F(\lambda)\lambda e^{-\lambda y}, & y \geq 0\,; \\ \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} f(t-y)dt, & y < 0. \end{cases} \tag{2.62}$$

$$G(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}\Phi_F(-s) \tag{2.63}$$

L'accroissement est la différence entre le revenu et les réclamations ; ces définitions nous donne le résultat suivants.

Théorème 2.30 ([66]). *Si les réclamations sont données par une distribution de type phase avec la représentation (α, T), et soit $t_0 = -Te$ où $e = (1, 1, \cdots, 1)'$, alors*

$$L_n(s) = L_{n-1}(s)G(s) + v\int_{x=0}^{\infty} p_{n-1}(x)\exp(Tx)dx(sI+T)^{-1}t_0 \tag{2.64}$$

Où $v = \lambda\alpha(\lambda I + T)^{-1}$

Preuve.

$$p_n(y) = \int_0^\infty p_{n-1}(x)g(y-x)dx \tag{2.65}$$

En remplaçant (2.65) dans (2.58) on obtient

$$\begin{aligned} L_n(s) &= \int_{y=0}^{\infty} e^{-sy}p_n(y)dy \\ &= \int_{y=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} e^{-sy}p_{n-1}(x)g(y-x)dxdy \\ &= \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx}p_{n-1}(x)\int_{y=0}^{\infty} e^{-s(y-x)}g(y-x)dydx \\ &= \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx}p_{n-1}(x)dx\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s(y-x)}g(y-x)dy - \int_{-\infty}^{0} e^{-s(y-x)}g(y-x)dy\right] \\ &= \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx}p_{n-1}(x)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s(y-x)}g(y-x)dydx - \int_{y=0}^{\infty} e^{-sx}p_{n-1}(x)\int_{-\infty}^{0} e^{-s(y-x)}g(y-x)dydx \\ &= \int_{y=0}^{\infty} e^{-sx}p_{n-1}(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}g(t)dt - \int_{y=0}^{\infty} e^{-sx}p_{n-1}(x)dx\int_{x}^{\infty} e^{su}g(-u)du \\ &= L_{n-1}(s)G(s) - \int_{y=0}^{\infty} e^{-sx}p_{n-1}(x)dx\int_{y-x}^{\infty} e^{su}g(-u)du \end{aligned} \tag{2.66}$$

Les propriétés d'une distribution de type phase sont utiles dans la suite pour la preuve du théorème.

Rappelons que

$$f(y) = \alpha\exp(Ty)t_0$$

De plus pour $x < 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} f(t-x)dt \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \alpha \exp\big(T(t-x)\big) t_0 \; dt \\
&= \alpha \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \exp\big(T(t-x)\big) dt \; t_0 \\
&= \alpha \int_0^\infty \lambda e^{-(-T+\lambda I)t} e^{-Tx} dt \; t_0 \\
&= \lambda\alpha \frac{-1}{\lambda I - T} e^{-(-T+\lambda I)t}\Big]_0^\infty e^{-Tx} t_0 \\
&= \frac{\lambda\alpha}{\lambda I - T} e^{-Tx} t_0 \\
&= \lambda\alpha(\lambda I - T)^{-1} e^{-Tx} t_0 \\
&= v e^{-Tx} t_0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{y=x}^\infty e^{sy} g(-y) dy dx &= \int_{y=x}^\infty v e^{sy} \exp(Ty) dy t_0 \\
&= v \int_{y=x}^\infty e^{(sI+T)y} dy t_0 \\
&= v(sI+T)^{-1}(-e^{sx} e^{Tx}) t_0 \\
&= -e^{sx} v e^{(Tx)} (sI+T)^{-1} t_0 \qquad (2.67)
\end{aligned}$$

On remplace (2.67) dans (2.66) on obtient,

$$\begin{aligned}
L_n(s) &= L_{n-1}(s)G(s) + \int_{x=0}^\infty e^{-sx} p_{n-1}(x) e^{sx} v e^{(Tx)} (sI+T)^{-1} t_0 dx \\
&= L_{n-1}(s)G(s) + v \int_{x=0}^\infty p_{n-1}(x) e^{(Tx)} (sI+T)^{-1} t_0 dx
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.3. Si on remplace s par 0 dans (2.64), on trouve

$$\begin{aligned}
P(\text{ non ruine à la } n^{\text{iéme}} \text{ réclamation }) &= P\,(\text{ non ruine à la } (n-1)^{\text{iéme}} \text{ réclamation })\\
&+ \; v \int_{x=0}^\infty p_{n-1}(x) exp(Tx) dx T^{-1} t_0
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\Psi(n) = P(\text{ruine a la } n^{\text{iéme}} \text{ réclamation }) = v \int_{x=0}^\infty p_{n-1}(x) exp(Tx) dxe \qquad (2.68)$$

Dans ce qui suit, nous allons donner les algorithmes récursives pour certains lois de probabilité.

1. Algorithme récursive pour la loi exponentielle

On suppose que les réclamations sont des distributions exponentielles de moyenne $\frac{1}{\mu}$.

En particulier : $T = (-\mu)$ i.e., T est une matrice scalaire, $\quad t_0 = \mu$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\lambda}{\lambda+s}\Phi_F(-s) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+s}\int_0^\infty e^{sy}\ f(y)\ dy \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+s}\int_0^\infty e^{sy}\ \alpha\ e^{Ty}\ t_0\ dy \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+s}\int_0^\infty e^{(sI+T)y}\ t_0\ dy \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+s}\int_0^\infty e^{(s-\mu)y}\ \mu\ dy \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+s}\ \frac{\mu}{\mu-s} \end{aligned}$$

$$v = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

$$(sI+T)^{-1} = \frac{1}{s-\mu}, \quad et \quad \exp(Tx) = e^{-\mu x} \tag{2.69}$$

(2.64) s'écrit :

$$\begin{aligned} L_n(s) &= L_{n-1}(s)G(s) + v\int_{x=0}^\infty p_{n-1}(x)\exp(Tx)dx(sI-T)^{-1}t_0 \\ &= L_{n-1}(s)\frac{\lambda}{\lambda+s}\ \frac{\mu}{\mu-s} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{\mu}{s-\mu}\int_{x=0}^\infty p_{n-1}(x)\exp(-\mu x)dx \\ &= L_{n-1}(s)\frac{\lambda}{\lambda+s}\ \frac{\mu}{\mu-s} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{\mu}{s-\mu}L_{n-1}(\mu) \\ &= \frac{\mu}{\mu-s}\left[\frac{\lambda}{\lambda+s}L_{n-1}(s) - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}L_{n-1}(\mu)\right] \end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\Psi(n) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}L_{n-1}(\mu) \tag{2.71}$$

Dans toute la suite, posons $\chi \equiv \Phi_F(\lambda) = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$.

On cherche un algorithme pour déterminer la forme de $L_n(s)$ en fonction de $L_{n-1}(s)$, ainsi que l'expression de $\Psi(n)$.

Si u est le capital initial, alors $L_0(s) = e^{-us}$.

De l'équation (2.71), on a :

$$\Psi(1) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}L_0(\mu) \tag{2.72}$$

$$= (1-\chi)e^{-us} \tag{2.73}$$

En utilisant (2.70) et pour $n = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
L_1(s) &= \frac{\mu}{\mu - s}\left[\frac{\lambda}{\lambda + s}L_0(s) - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}L_0(\mu)\right] \\
&= \frac{\mu\lambda}{\mu - s}\left[\frac{\lambda}{\lambda + s}e^{-us} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-u\mu}\right] \\
&= \frac{\mu\lambda e^{-u\mu}}{(\mu-s)(\lambda+s)(\lambda+\mu)}\left[(\lambda+\mu)e^{u(\mu-s)} - (\lambda+s)\right] \\
&= \frac{\mu\lambda e^{-u\mu}}{(\mu-s)(\lambda+s)(\lambda+\mu)}\left[(\lambda+\mu)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(u(\mu-s))^k}{k!} - (\lambda+s)\right] \\
&= \frac{\mu\lambda e^{-u\mu}}{(\mu-s)(\lambda+s)(\lambda+\mu)}\left[(\mu-s) + (\lambda+\mu)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(u(\mu-s))^k}{k!}\right] \\
&= \frac{\lambda}{\lambda+s}e^{-u\mu}\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\mu-s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(u(\mu-s))^k}{k!}\right] \\
&= \frac{\lambda}{\lambda+s}e^{-u\mu}\left[\chi + \frac{\mu(u(\mu-s))}{\mu-s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(u(\mu-s))^{k-1}}{k!}\right] \\
&= \frac{\lambda}{\lambda+s}e^{-u\mu}\left[\chi + (\mu u)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(u(\mu-s))^{k-1}}{k!}\right] \qquad (2.74)
\end{aligned}$$

En utilisant (2.71) pour $n = 2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Psi(2) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}L_1(\mu) \\
&= (1-\chi)\frac{\lambda}{\lambda+s}e^{-u\mu}\left[\chi + (\mu u)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(u(\mu-\mu))^{k-1}}{k!}\right] \\
&= (1-\chi)^2 e^{-u\mu}(\chi + (\mu u)) \qquad (2.75)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
L_2(s) &= \frac{\mu}{\mu-s}\left[\frac{\lambda}{\lambda+s}L_1(s) - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}L_1(\mu)\right] \\
&= \frac{\mu}{\mu-s}e^{-u\mu}\left[\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2\right]\chi + \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2(u\mu)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(u(\mu-s))^{k-1}}{k!} - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2(u\mu)\right] \\
&= e^{-u\mu}\left[\frac{\mu}{\mu-s}\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2\right](\chi + (u\mu)) + \frac{\mu u(\mu-s)}{\mu-s}\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2(u\mu)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(u(\mu-s))^{k-2}}{k!}\right] \\
&= e^{-u\mu}\left[(\chi+(u\mu))\frac{\mu}{\mu-s}\left(\frac{\lambda}{\lambda+s} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+s} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) + \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2(u\mu)^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(u(\mu-s))^{k-2}}{k!}\right] \\
&= e^{-u\mu}\left[(\chi+(u\mu))\,\chi\frac{\lambda}{\lambda+s}\left(\frac{\lambda}{\lambda+s} + 1 - \chi\right) + \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2(u\mu)^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(u(\mu-s))^{k-2}}{k!}\right] \\
&= e^{-u\mu}\left[(\chi+(u\mu))\,\chi\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2 + \frac{\lambda}{\lambda+s}\chi(1-\chi)\,(\chi+(u\mu)) + \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2(u\mu)^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(u(\mu-s))^{k-2}}{k!}\right] \\
&= e^{-u\mu}\left[(\chi+(u\mu))\left(\chi\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2 + \chi(1-\chi)\frac{\lambda}{\lambda+s}\right) + \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2(u\mu)^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(u(\mu-s))^{k-2}}{k!}\right] \qquad (2.76)
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'en déduire la forme générale de $L_n(s)$.

Théorème 2.31 ([6]). *Pour* $n \geq 1$,

$$L_n(s) = e^{-u\mu}\left[\sum_{j=1}^{n} C_j^{(n)}\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^j (1-\chi)^{n-j} + (u\mu)^n\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n \sum_{k=n}^{\infty}\frac{(u(\mu-s))^{k-n}}{k!}\right] \tag{2.77}$$

où

$$C_j^{(n)} = \Phi\left\{\sum_{k=max(1,j-1)}^{n-1} C_k^{(n-1)} + \frac{(u\mu)^{n-1}}{(n-1)!}\right\};\ \ j = 1,\cdots,n \tag{2.78}$$

Preuve. La démonstration se fait par récurrence.

Supposons que (2.77) est vraie à l'ordre $n = N-1$, montrons qu'elle vraie à l'ordre $n = N$. On a

$$L_{N-1}(s) = e^{-u\mu}\left[\sum_{j=1}^{N-1} C_j^{(N-1)}\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^j (1-\Phi)^{N-1-j} + (u\mu)^{N-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{N-1} \sum_{k=N-1}^{\infty}\frac{(u(\mu-s))^{k-N+1}}{k!}\right] \tag{2.79}$$

Pour $n = N$, on obtient

$$\begin{aligned}
L_N(s) &= \frac{\mu}{\mu-s}\left[\frac{\lambda}{\lambda+s}L_{N-1}(s) - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}L_{N-1}(\mu)\right]\\
&= \frac{\mu}{\mu-s}e^{-u\mu}\left[\sum_{j=1}^{N-1} C_j^{(N-1)}(1-\chi)^{N-1-j}\Big(\Big(\frac{\lambda}{\lambda+s}\Big)^{j+1} - \Big(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\Big)^{j+1}\Big)\right.\\
&+ (u\mu)^{N-1}\Big(\frac{\lambda}{\lambda+s}\Big)^N\Big(\frac{1}{(N-1)!} + \sum_{k=N}^{\infty}\frac{(u(\mu-s))^{k-N+1}}{k!}\Big) - (u\mu)^{N-1}\Big(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\Big)^N\frac{1}{(N-1)!}\\
&= e^{-u\mu}\left[\sum_{j=1}^{N-1} C_j^{(N-1)}(1-\chi)^{N-1-j}\frac{\mu}{\mu-s}\Big(\frac{\lambda}{\lambda+s} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\Big)\sum_{l=0}^{j}\Big(\frac{\lambda}{\lambda+s}\Big)^l\Big(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\Big)^{j-l}\right.\\
&+ \frac{(u\mu)^{N-1}}{(N-1)!}\frac{\mu}{\mu-s}\Big(\frac{\lambda}{\lambda+s} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\Big)\sum_{l=0}^{N-1}\Big(\frac{\lambda}{\lambda+s}\Big)^l\Big(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\Big)^{N-1-l}\\
&+ \left.(u\mu)^{N-1}\frac{\mu}{\mu-s}\Big(\frac{\lambda}{\lambda+s}\Big)^N u(\mu-s)\sum_{k=N}^{\infty}\frac{(u(\mu-s))^{k-N}}{k!}\right]\\
&= e^{-u\mu}\left[\sum_{j=1}^{N-1} C_j^{(N-1)}(1-\chi)^{N-1-j}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{\lambda}{\lambda+s}\sum_{l=0}^{j}\Big(\frac{\lambda}{\lambda+s}\Big)^l\Big(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\Big)^{j-l}\right.\\
&+ \left.\frac{(u\mu)^{N-1}}{(N-1)!}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{\lambda}{\lambda+s}\sum_{l=0}^{N-1}\Big(\frac{\lambda}{\lambda+s}\Big)^l\Big(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\Big)^{N-1-l}(u\mu)^N\Big(\frac{\lambda}{\lambda+s}\Big)^N u(\mu-s)\sum_{k=N}^{\infty}\frac{(u(\mu-s))^{k-N}}{k!}\right]\\
&= e^{-u\mu}\left[\sum_{l=0}^{N-1}\Phi\sum_{j=\max(1,l)}^{N-1} C_j^{(N-1)}(1-\chi)^{N-1-j}\Big(\frac{\lambda}{\lambda+s}\Big)^{l+1}\Big(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\Big)^{j-1}\right.\\
&+ \left.\sum_{l=0}^{N-1}\chi\frac{(u\mu)^{N-1}}{(N-1)!}\Big(\frac{\lambda}{\lambda+s}\Big)^{l+1}\Big(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\Big)^{N-1-l}\right]\\
&= e^{-u\mu}\left[\sum_{l=1}^{N}\Big(\frac{\lambda}{\lambda+s}\Big)^l(1-\chi)^{N-1}\chi\Big\{\sum_{j=\max(1,l-1)}^{N-1} C_k^{(N-1)} + \frac{(u\mu)^{N-1}}{(N-1)!}\Big\}\right] \qquad (2.80)
\end{aligned}$$

et

$$\Psi(n) = (1-\chi)^n e^{-u\mu} \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} C_j^{(n-1)} + \frac{(u\mu)^{n-1}}{(n-1)!} \right\} \tag{2.81}$$

$\square$

Corollaire 2.4 ([66]).

$$\Psi(n) = (1-\chi)^n e^{-u\mu} C_1^{(n)} / \chi, \;\; n = 1, 2, \cdots \tag{2.82}$$

2. Algorithme récursive pour un mélange de lois exponentielles

Un mélange de lois exponentielles a été utilisé comme une généralisation du cas exponentiel (voir Gerber (1979)).
La formule d'une loi type phase d'un mélange de K lois exponentielles est caractérisée par :
$\alpha = (p_1, p_2, \cdots, p_k)$; $T = -diag(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)$, et $t_0 = t_{(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)}$ où $t_{(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)}$ est la transposée de $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)$
Donc

$$\begin{aligned}
\Phi_F(s) &= \int_0^\infty e^{-sy} dF(y) \\
&= \int_0^\infty e^{-sy} \alpha \exp(Ty) t_0 dy \\
&= \int_0^\infty e^{-sy} (p_1, p_2, \cdots, p_k) \exp(-diag(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k) y) t_{(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)} dy \\
&= (p_1, p_2, \cdots, p_k) \int_0^\infty \exp(diag(s + \mu_i) y) dy t_{(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)} \\
&= (p_1, p_2, \cdots, p_k) diag((s + \mu_1)^{-1}, (s + \mu_2)^{-1}, \cdots, (s + \mu_k)^{-1}) t_{(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)} \\
&= \sum_{i=1}^k p_i \mu_i (s + \mu_i)^{-1}
\end{aligned}$$

Le théorème suivant nous donne la formule récursive pour obtenir L_n.

Théorème 2.32 ([5]).

$$L_n(s) = \sum_{i=1}^k p_i (\mu_i / \mu_i - s) [L_{n-1}(s)(\lambda/\lambda + s) - L_{n-1}(\mu_i)(\lambda/\lambda + \mu_i)] \tag{2.83}$$

et la probabilité de ruine est :

$$\Psi(n) = \sum_{i=1}^k p_i (\lambda/\lambda + \mu_i) L_{n-1}(\mu_i) \tag{2.84}$$

Preuve. (Même démonstration que précédemment).
Dans ce cas, on définit $\Phi_i = (\mu_i/\lambda + \mu_i)$, quand $L_0(s) = e^{-us}$, on obtient pour $n = 1$

$$P(1) = \sum_{i=1}^k p_i (1 - \Phi_i) e^{-u\mu_i} \tag{2.85}$$

$$L_1(s) = (\lambda/\lambda + s) \sum_{i=1}^{k} p_i e^{-u\mu_i} \left[\Phi_i + (u\mu_i) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(u(\mu_i - s))^{k-1}}{k!} \right] \tag{2.86}$$

$\square$

Remarque 2.4. Si $u = 0$.
Dans ce cas,

$$L_1(s) = (\lambda/\lambda + s) \sum_{i=1}^{k} p_i \Phi_i$$

et

$$L_n(s) = \sum_{j=1}^{n} C_j^{(n)} (\lambda/\lambda + s)^j \quad n = 1, 2 \cdots \tag{2.87}$$

Où

$$C_j^{(n)} = \sum_{k=\max(1,j-1)}^{(n-1)} C_k^{(n-1)} \left\{ \sum_{i=1}^{k} p_i \Phi_i (1 - \Phi_i)^{k+1-j} \right\}, j = 1, 2, \cdots, n \tag{2.88}$$

et

$$C_1^{(1)} = \sum_{i=1}^{k} p_i \Phi_i$$

3. Algorithme récursive pour une loi N-Erlang

La distribution d'Erlang peut être liée à la loi de Phase-type par un processus se déplaçant de 1 à m avec un état absorbant à l'état $(m+1)$.

Posons

$$\alpha = (1, 0, \cdots, 0)\,; \quad T = \begin{pmatrix} -\theta & \theta & & & 0 \\ & -\theta & \theta & & \\ & & . & \theta & \\ & & & . & \\ 0 & & & . & -\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad t_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ \theta \end{pmatrix}$$

La forme générale de $L_n(s)$ est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.33 ([66]).

$$\begin{aligned} L_n(s) \quad = \quad & \left\{ (L_{n-1}(s)(\lambda/\lambda + s), 0, \cdots, 0) - \left[pL_{n-1}(\theta), p(-\theta)L'_{n-1}(\theta) + pqL_{n-1}(\theta), \cdots, \sum_{l=0}^{N-1} pq^l \frac{(-\theta)^{N-1-l}}{(N-1-l)!} L_{n-1}^{(N-1-l)}(\theta) \right] \right\} \\ & \times \begin{pmatrix} (\theta/\theta - s)^N \\ (\theta/\theta - s)^{N-1} \\ \vdots \\ (\theta/\theta - s) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.89}$$

où $p = (\lambda/\lambda + \theta)$ *et* $q = 1 - p$.

Preuve.

$$(-sI-T)^{-1}t_0 = [(\theta/\theta-s)^N, (\theta/\theta-s)^{N-1}, \cdots, (\theta/\theta-s)]^t$$

$$v = \lambda\alpha(\lambda I-T)^{-1} = [\lambda/(\lambda+\theta), \lambda\theta/(\lambda+\theta)^2, \cdots, \lambda\theta^{N-1}/(\lambda+\theta)^N$$

et

$$\exp(Tx) = \begin{pmatrix} f_0(\theta x) & f_1(\theta x) & f_2(\theta x) & . & . & . & f_{N-1}(\theta x) \\ 0 & f_0(\theta x) & f_1(\theta x) & . & . & . & f_{N-2}(\theta x) \\ 0 & 0 & f_0(\theta x) & . & . & . & f_{N-3}(\theta x) \\ . & . & . & & & & \\ . & . & . & & & & \\ . & . & . & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & f_0(\theta x) \end{pmatrix}$$

où

$$f_k(\theta x) = (-1)^k \sum_{l=k}^{\infty} \frac{(-\theta x)^l}{k!(l-k)!} = \frac{(\theta x)^k}{k!} e^{-\theta x}.$$

Donc

$$\int_{x=0}^{\infty} p_{n-1}(x)\exp(Tx)dx = \begin{pmatrix} L_{n-1}(\theta) & (-\theta)L'_{n-1}(\theta) & \theta^2 L''_{n-1}(\theta)/2 & . & . & . & (-\theta)^{N-1}L_{n-1}^{(N-1)}(\theta)/(N-1)! \\ 0 & L_{n-1}(\theta) & (-\theta)L'_{n-1}(\theta) & & & & (-\theta)^{N-2}L_{n-1}^{(N-2)}(\theta)/(N-2)! \\ 0 & 0 & L_{n-1}(\theta) & & & & (-\theta)^{N-3}L_{n-1}^{(N-3)}(\theta)/(N-3)! \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ 0 & 0 & 0 & & & & L_{n-1}(\theta) \end{pmatrix}$$

En remplaçant ce dernier résultat dans (2.64), on obtient l'équation (2.89). □

Corollaire 2.5 ([66]). *La probabilité de ruine est donnée par :*

$$\Psi(n) = \sum_{i=0}^{N-1} L_{n-1}^{(i)}(\theta)\{(-\theta)^i[1-q^{N-1}]/i!\}. \tag{2.90}$$

Dans le cas d'une loi de 2-Erlang,

$$\Psi(n) = L_{n-1}(\theta)(1-q^2) - p\theta L'_{n-1}(\theta). \tag{2.91}$$

En utilisant la même méthode que précédemment, la forme générale de $L_n(s)$ est donnée par :

$$L_n(s) = e^{-u\theta}\left[\sum_{j=1}^{n} C_j^{(n)}(\lambda/\lambda+s)^j + (u\theta)^{2n}(\lambda/\lambda+s)^n \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{(u(\theta-s))^{k-2n}}{k!}\right] \tag{2.92}$$

où

$$\begin{aligned} C_j^{(n)} &= \left[\frac{(u\theta)^{2n-2}q^2}{(2n-2)!}(n+1-j) + \frac{(u\theta)^{2n-1}}{(2n-1)!}q\right]p^{n-j} \\ &\quad + q^2 \sum_{k=\max(2,j)}^{n} C_{k-1}^{(n-1)} p^{k-j}(k+1-j), j=1,\cdots,n;\ n\in\mathbb{N} \end{aligned} \tag{2.93}$$

et

$$C_1^{(1)} = q^2 + u\theta q.$$

Interprétation des Tableaux

1. On observe que la probabilité de ruine diminue quand le capital initial augmente.

2. $\lim_{T\to\infty} \Psi(u,T) = \Psi(u)$.

2.2 Modèle de Sparre-Andersen

2.2.1 Description du modèle

Soit $R(t)$ le capital d'une compagnie d'assurances à l'instant t défini par :

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i. \tag{2.94}$$

Où

- u est le capital initial.

- c est le taux de cotisation demandé aux assurés.

- $N(t)$ dans ce modèle est décrit par un processus de renouvellement.

- X_i est le montant du $i^{\text{ième}}$ sinistre.

τ_i le temps de réalisation du $i^{\text{ième}}$ sinistre et posons $T_i = \tau_i - \tau_{i-1},\ i \geq 1,$ avec $\tau_0 = 0$.
Les T_i représentent les inter-arrivées.
Les $\{X_i,\ i \in \mathbb{N}^*\}$ forment une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de fonction de répartition commune F et de fonction de densité f.
$\{T_j,\ j \in \mathbb{N}^*\}$ est une suite de variables aléatoires continues de fonction de répartition K et de fonction de densité k.
On suppose que

- T_i sont indépendants de X_i.
- $E(cT_i) - E(X_i) > 0,\ \forall i \in \mathbb{N}^*$.

Par conséquent, on obtient

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}(cT_i - X_i)\right) > 0$$

L'équation (2.94) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} R\left(\sum_{i=1}^{n} T_i\right) &= u + \sum_{i=1}^{n} cT_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \\ &= u + \sum_{i=1}^{n} (cT_i - X_i) \end{aligned}$$

Le théorème 2.34 nous donne la généralisation du coefficient d'ajustement.

Théorème 2.34 ([2]). *Le coefficient d'ajustement R satisfait l'équation suivante :*

$$E(e^{-R(cT_i - X_i)}) = E(e^{-cRT_i})E(e^{RX_i}) = 1$$

Théorème 2.35 ([57]).

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru}$$

Preuve. Soit $\Psi_n(u)$ la probabilité de ruine à l'instant n.
On suppose que $\lim_{n\to\infty} \Psi_n(u) = \Psi(u)$.
Nous allons montrer par récurrance que l'inégalité $\Psi_n(u) \leq e^{-Ru}$ est satisfaite quelque soit u.
Pour $n = 1$

$$\begin{aligned} \Psi_1(u) &= P(0 < \tau < \infty, R(t) < 0) \\ &= P(0 < \tau < \infty, u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i < 0) \\ &= P(0 < \tau < \infty, X_1 > u + ct) \\ &= \int_0^{\infty} k(t) \int_0^{\infty} f(x)dxdt \end{aligned} \tag{2.95}$$

or $x > u + ct$ alors $u + ct - x < 0$ ce qui implique $e^{-R(u+ct-x)} \geq 1$.

$$\begin{aligned} (2.95) &\leq \int_0^{\infty} k(t) \int_{u+ct}^{\infty} e^{-R(u+ct-x)} f(x)dxdt \\ &\leq \int_0^{\infty} k(t) \int_0^{\infty} e^{-R(u+ct-x)} f(x)dxdt \\ &= e^{-Ru} \int_0^{\infty} k(t)e^{-Rct} \int_0^{\infty} e^{Rx} f(x)dxdt \\ &= e^{-Ru} E(e^{-cRT_i})E(e^{RX_i}) \\ &= e^{-Ru} \end{aligned}$$

Ce qui donne la propriété est vraie pour $n = 1$.

Pour $n = 2$

$$\begin{aligned}
\Psi_2(u) &= \int_0^\infty k(t)\int_{u+ct}^\infty f(x)\times 1dxdt + \int_0^\infty k(t)\int_0^{u+ct} f(x)\Psi_1(u+ct-x)dxdt \\
&\leq \int_0^\infty k(t)\int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)}f(x)dxdt + \int_0^\infty k(t)\int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)}f(x)dxdt \\
&= \int_0^\infty k(t)\left[\int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)}f(x)dxdt + \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)}f(x)dxdt\right] \\
&= \int_0^\infty k(t)\int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)}f(x)dxdt \\
&= e^{-Ru}\int_0^\infty e^{-Rct}k(t)dt\int_0^\infty e^{Rx}f(x)dx \\
&= e^{-Ru}E(e^{-cRT_i})E(e^{RX_i}) \\
&= e^{-Ru}
\end{aligned}$$

Ce qui donne la validité du résultat pour $n = 2$.

On suppose que l'inégalité est vraie pour n, montrons qu'elle est vraie pour$(n+1)$.

$$\begin{aligned}
\Psi_{n+1}(u) &= \int_0^\infty k(t)\int_{u+ct}^\infty f(x)dxdt + \int_0^\infty k(t)\int_0^{u+ct} f(x)\Psi_n(u+ct-x)dxdt \\
&\leq \int_0^\infty k(t)\int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)}f(x)dxdt + \int_0^\infty k(t)\int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)}f(x)dxdt \\
&= \int_0^\infty k(t)\left[\int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)}f(x)dxdt + \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)}f(x)dxdt\right] \\
&= \int_0^\infty k(t)\int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)}f(x)dxdt \\
&= e^{-Ru}\int_0^\infty e^{-Rct}k(t)dt\int_0^\infty e^{Rx}f(x)dx \\
&= e^{-Ru}E(e^{-cRT_i})E(e^{RX_i}) \\
&= e^{-Ru}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\Psi_n(u) \leq e^{-Ru}$$

donc

$$\varphi(u) \geq 1 - e^{-Ru}.$$

$\square$

Le théorème suivant nous donne les équations intégro-différentielles de la probabilité de ruine et de la probabilité non-ruine.

Théorème 2.36 ([57]). *Pour $u \geq 0$, la probabilité de ruine est donnée par*

$$\Psi(u) = \int_0^\infty g(t)(1 - F_Y(u+ct))dt + \int_0^\infty g(t) \int_0^{u+ct} f_Y(y)\Psi(u+ct-y)dydt \quad (2.96)$$

et la probabilité de non ruine est donnée par

$$\varphi(u) = \int_0^\infty g(t) \int_0^\infty \int_0^{u+ct} f_Y(y)\varphi(u+ct-y)dydt \quad (2.97)$$

2.2.2 Borne d'une probabilité de ruine

On s'intèresse aux bornes de la probabilité de ruine dans le modèle de Sparre-Andersen avec intérêt par deux approches différentes : l'approche martingale et l'approche non-martingale.

Soient $T_1, T_2, \cdots$ les inter-arrivées, et $Y_n = \sum_{k=1}^n T_k$ le temps de la $n^{\text{ième}}$ arrivée avec $Y_0 = 0$.
Notons que X_n est le montant cumulé des sinistres.
On suppose que $\{T_n, n \geq 1\}$ et $\{X_n, n \geq 1\}$ sont des suites indépendantes de variables aléatoires *i.i.d.*, de distribution G et F respectivement avec $G(0) = F(0) = 0$.
Notons

- $\tau_\delta(t) = \inf\{t : R_\delta(t) < 0\}$ le temps de ruine d'intérêt δ.
- $\Psi_\delta(u) = P(\tau_\delta < \infty) = P(\cup_{t\geq 0}(R_\delta(t) < 0))$ la probabilité de ruine d'intensité d'intérêt δ.
  On peut écrire :
  $$\Psi_\delta(u) = P(\cup_{n=1}^\infty(R_\delta(t) < 0)) = P(\cup_{n=1}^\infty(V_\delta(Y_n) < 0))$$
  où $V_\delta(Y_n) = R_\delta(Y_n)e^{-\delta Y_n}$.
- $a_t^{(\delta)} = \begin{cases} (1-e^{-\delta t})/\delta & \text{si } \delta > 0 \\ t & \text{si } \delta = 0 \end{cases}$
  et
  $$\begin{aligned} s_t^{(\delta)} &= a_t^{(\delta)} e^{\delta t} \\ &= \begin{cases} (e^{\delta t}-1)/\delta & \text{si } \delta > 0 \\ t & \text{si } \delta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} R_\delta(Y_1) &= ue^{\delta T_1} + c(e^{\delta T_1} - 1)/\delta - X_1 \\ R_\delta(Y_2) &= R_\delta(Y_1)e^{\delta T_2} + c(e^{\delta T_2} - 1)/\delta - X_2 \\ &= ue^{\delta(T_1+T_2)} + c(e^{\delta(T_1+T_2)} - 1)/\delta - X_1 e^{\delta T_2} - X_2 \\ &= \vdots \\ R_\delta(Y_n) &= R_\delta(Y_{n-1})e^{\delta T_n} + c(e^{\delta T_n} - 1)/\delta - X_n \\ &= ue^{\delta Y_n} + c(e^{\delta Y_n} - 1)/\delta - \sum_{k=1}^n X_k \exp\left\{\delta \sum_{i=k+1}^n T_i\right\} \end{aligned}$$

avec la convention que $\sum_a^b = 0$ si $b < a$.
De plus

$$\begin{aligned} V_\delta(Y_n) &= R_\delta(Y_{n-1})e^{-\delta Y_n} + c(1 - e^{\delta Y_n})/\delta - \sum_{k=1}^n X_k \exp\left\{-\delta \sum_{i=1}^k T_i\right\} \\ &= u + ca_t^{(\delta)} - \sum_{k=1}^n X_k e^{-\delta Y_n} \end{aligned}$$

avec $V_\delta(Y_0) = u$.

On définit

$$\Psi_\delta(u,n) = P(\cup_{k=1}^n (R_\delta(Y_k) < 0)) = P(\cup_{k=1}^n (V_\delta(Y_k) < 0))$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_\delta(u,n) = \Psi_\delta(u)$$

A. Approche martingale

Pour $R > 0$, le processus $\{\exp\{-RV_\delta(Y_n)\}, n \geq 0\}$ n'est pas une martingale, on démontre qu'il existe une constante $R_1 > 0$ tel que $\{\exp\{-R_1 V_\delta(Y_n)\}, n \geq 0\}$ est une sur-martingale.

Lemme 2.3 ([13]). *Il existe R_1, tel que*

$$E[\exp\{-R_1(ca_{T_i}^{(\delta)} - X_i e^{-\delta T_i})\}] = 1 \tag{2.98}$$

Théorème 2.37 ([13]). *Pour $u \geq 0$,*

$$\Psi_\delta(u) \leq e^{-R_1 u} \tag{2.99}$$

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} V_\delta(Y_{n+1}) &= V_\delta(Y_n) + c(e^{-\delta Y_n} - e^{-\delta Y_{n+1}})/\delta - X_{n+1}e^{-\delta T_{n+1}} \\ &= V_\delta(Y_n) + e^{-\delta Y_n}[ca_{T_{n+1}}^{(\delta)} - X_{n+1}e^{-\delta T_{n+1}}] \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{F}_n = \sigma\{Y_1, \cdots, Y_n\}$.
Pour $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} E[e^{-RV_\delta(Y_{n+1})}/\mathcal{F}_n] &= e^{-RV_\delta(Y_n)} E[e^{-Re^{-\delta Y_n}}(ca_{T_{n+1}}^{(\delta)} - X_{n+1}e^{-\delta T_{n+1}})/\mathcal{F}_n] \\ &= e^{-RV_\delta(Y_n)} E[(e^{-R(ca_{T_{n+1}}^{(\delta)} - X_{n+1}e^{-\delta T_{n+1}})}/\mathcal{F}_n)^{e^{-\delta Y_n}}] \\ &\leq e^{-RV_\delta(Y_n)} (E[(e^{-R(ca_{T_{n+1}}^{(\delta)} - X_{n+1}e^{-\delta T_{n+1}})}/\mathcal{F}_n)])^{e^{-\delta Y_n}} \\ &= e^{-RV_\delta(Y_n)} E[(e^{-R(ca_{T_{n+1}}^{(\delta)} - X_{n+1}e^{-\delta T_{n+1}})})^{e^{-\delta Y_n}}] \\ &= e^{-RV_\delta Y_n} \end{aligned}$$

Sachant que $\tau_\delta \wedge n$ est le temps d'arrêt, alors d'après le théorème d'arrêt pour les sur-martingales, on obtient :

$$E[\exp\{-R_1 V_\delta(Y_{\tau_\delta \wedge n})\}] \leq E[\exp\{-R_1 V_\delta(Y_0)\}] = \exp\{-R_1 u\} \tag{2.100}$$

Cependant,

$$\begin{aligned} E[\exp\{-R_1 V_\delta(Y_{\tau_\delta \wedge n})\}] &\geq E[\exp\{-R_1 V_\delta(Y_{\tau_\delta \wedge n})\} I(\tau_\delta \leq n)] \\ &= E[\exp\{-R_1 V_\delta(Y_{\tau_\delta})\} I(\tau_\delta \leq n)] \\ &\geq E[I(\tau \leq n)] \\ &= \Psi_\delta(u, n) \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\Psi_\delta(u, n) \leq e^{-R_1 u} \tag{2.101}$$

D'où

$$\Psi_\delta(u) \leq e^{-R_1 u} \text{ quand } u \to \infty$$

□

Remarque 2.5. Si $\delta \to 0$, R_1 est réduit au coefficient d'ajustement du modèle de Sparre-Andersen noté par R.
R satisfait l'équation

$$E(\exp\{-R(cT_i - X_i)\}) = 1 \tag{2.102}$$

Le théorème 2.37 est une généralisation du théorème 2.34, i.e., on a aboutit à l'inégalité de Lundberg dans le modèle de Sparre-Andersen.
De plus, la distribution de $ca_{T_i}^{(\delta)} - X_i e^{-\delta T_i}$ est celle de la variable escomptée entre deux réclamations consécutives. Cependant, la distribution de $cs_{T_i}^{(\delta)} - X_i$ est celle de la variable cumulative entre deux réclamations consécutives.
Dans ce qui suit, on s'intéresse au borne d'une probabilité de ruine en utilisant l'approche non martingale en remplaçant $ca_{T_i}^{(\delta)} - X_i e^{-\delta T_i}$ dans l'équation (2.98) par $cs_{T_i}^{(\delta)} - X_i$.

B. Approhe non martingale

Lemme 2.4 ([8]). *Il existe R_2, tel que*

$$E[\exp\{-R_2(cs_{T_i}^{(\delta)} - X_i)\}] = 1 \tag{2.103}$$

Théorème 2.38 ([13]). *Pour $u \geq 0$,*

$$\Psi_\delta(u) \leq \beta E[\exp\{R_2 X_i\}] E[\exp\{R_2(u e^{\delta T_i} + cs_{T_i}^{(\delta)})\}] \tag{2.104}$$

où

$$\beta^{-1} = \inf_{t \geq 0} \frac{\int_t^\infty e^{R_2 x} dF(x)}{e^{R_2 x} \overline{F}(t)} \tag{2.105}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\Psi_\delta(u,n+1) &= E[\Psi_\delta(ue^{\delta T_1}+cs_{T_1}^{(\delta)}-X_1,n)] \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \Psi_\delta(ue^{\delta t}+cs_t^{(\delta)}-x,n)dF(x)dG(t) \\
&= \int_0^\infty \left[\overline{F}(ue^{\delta t}+cs_t^{(\delta)})+\int_0^{ue^{\delta t}+cs_t^{(\delta)}} \Psi_\delta(ue^{\delta t}+cs_t^{(\delta)}-x,n)dF(x)\right]dG(t)
\end{aligned}$$

Pour $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\overline{F}(t) &\leq \beta e^{-R_2 t}\int_t^\infty e^{R_2 x}dF(x) &(2.106)\\
&\leq \beta e^{-R_2 t}E(e^{R_2 X_i}) &(2.107)
\end{aligned}$$

De l'équation (2.107), on a

$$\begin{aligned}
\Psi_\delta(u,1) &= P(X_1 > ue^{\delta T_1}+cs_{T_1}^{(\delta)}) \\
&= \int_0^\infty \overline{F}(ue^{\delta t}+cs_t^{(\delta)})dG(t) \\
&\leq \beta E(e^{R_2 X_i})\int_0^\infty \exp\{-R_2(ue^{\delta t}+cs_t^{(\delta)})\}dG(t) \\
&= \beta E(e^{R_2 X_i})E(\exp\{-R_2(ue^{\delta T_i}+cs_{T_i}^{(\delta)})\})
\end{aligned}$$

Pour $n > 1$, on suppose que

$$\Psi_\delta(u,n) \leq \beta E(e^{R_2 X_i})E(\exp\{R_2(ue^{\delta T_i}+cs_{T_i}^{(\delta)})\}) \qquad (2.108)$$

De l'équation (2.103) on obtient

$$\Psi_\delta(u,n) \leq \beta E(e^{R_2 X_i})E(\exp\{-R_2(u+cs_{T_i}^{(\delta)})\}) = \beta E(e^{-R_2 u}) \qquad (2.109)$$

Alors

$$\begin{aligned}
\Psi_\delta(u,n+1) &= \int_0^\infty \beta\exp\{-R_2(ue^{\delta t}+cs_t^{(\delta)})\}\int_{ue^{\delta t}+cs_t^{(\delta)}}^\infty e^{R_2 x}dF(x)dG(t) \\
&+ \int_0^\infty\int_{ue^{\delta t}+cs_t^{(\delta)}}^\infty \beta\exp\{-R_2(ue^{\delta t}+cs_t^{(\delta)}-x)\}dF(x)dG(t) \\
&= \beta\int_0^\infty \exp\{-R_2(ue^{\delta t}+cs_t^{(\delta)})\}\int_0^\infty e^{R_2 x}dF(x)dG(t) \\
&= \beta E(e^{R_2 x})E(\exp\{-R_2(ue^{\delta T_i}+cs_{T_i}^{(\delta)})\})
\end{aligned}$$

□

Si $\left(E(e^{R_2 X_i})\right)^{-1} \leq \beta \leq 1$ et $e^{\delta T_i} \geq 1$, alors le corollaire suivant nous donne l'inégalité de Lundberg.

Corollaire 2.6 ([13]). *Pour* $u \geq 0$,

$$\Psi_\delta(u) \leq e^{-R_2 u} \qquad (2.110)$$

Preuve. De (2.109), on a

$$\begin{aligned}
\Psi_\delta(u) &\leq \beta E(e^{R_2 X_i})E(\exp\{-R_2(ue^{\delta T_i} + cs_{T_i}^{(\delta)})\}) \\
&= \beta e^{-R_{2u}} E(e^{R_2 X_i})E(\exp\{-R_2 cs_{T_i}^{(\delta)}\}) \\
&= \beta e^{-R_{2u}} \leq e^{-R_{2u}}
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque 2.6. Si $\delta \to 0,\ R_2$ est réduit au coefficient d'ajustment du modèle de Sparre-Andersen noté par R où R satisfait l'équation (2.102).
Le théorème 2.38 est une généralisation de l'inégalité de Lundberg dans le modèle de Sparre-Andersen avec intérêt.

Deuxième partie

La généralisation du modèle classique

Dans cette partie, nous nous intéressons à la fonction de Gerber-Shiu appelée aussi la fonction de pénalité escomptée dùe à Gerber et Shiu (2003a), qui généralise la probabilté de ruine dans les modèles classiques.

2.3 Description du modèle et notations

Le modèle pérturbé est défini par :

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i + \sigma\beta(t), \quad t \geq 0. \tag{2.111}$$

Où :

- $u \geq 0$ est le capital initial.

- Les $\{X_i, i \in \mathbb{N}^*\}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition commune F et de fonction de densité f.

- $(N(t))_t$ est le nombre total d'événements qui est décrit par un processus de renouvellement avec :

  $$N(t) = \max\{k \geq 1,\ W_1 + W_2 + \cdots + W_k \leq t\}$$

  où W_i est le temps d'attente qui suit une loi d'Erlang (λ, n).

- $\{\beta(t) : t \geq 0\}$ est le processus de Wiener standard de paramètre de dispersion $\sigma > 0$.

  $\{\beta(t) : t \geq 0\}$ est indépendant de $\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$.

Soit $\mu_k = E[X^k]$ le moment d'ordre k de X, et $L_f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$ la transformée de Laplace de f.
Soit

$$S_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n \tag{2.112}$$

où les V_i sont des lois exponentielles de différents paramètres $\lambda_i > 0$.
Supposons que $\{W_i\}_{i\geq 1}$ et $\{X_i\}_{i\geq 1}$ sont indépendants et que $cE(W_i) > E(X_i)$ i.e. $c\sum_{i=1}^{n} 1/\lambda_i > \mu_1$.
Notons par :

- $\tau = \inf\{t \geq 0 : R(t) \leq 0\}$ le temps de ruine.
- $\Psi(u) = P(\tau < \infty / R(0) = u),\ \ u \geq 0$ la probabilité de ruine finale.
- $\Psi_d(u) = P(\tau < \infty, R(\tau) = 0 / R(0) = u)$, la probabilité de ruine provoquée par les oscillations dans $R(t)$ dû au processus de Wiener $\beta(t)$.

- $\Psi_s(u) = P(\tau < \infty, R(\tau) < 0/R(0) = u)$ la probabilité de ruine provoquée par les réclamations.

  On a
$$\Psi(u) = \Psi_d(u) + \Psi_s(u)$$
  avec $\Psi_d(0) = 1$, et $\Psi_s(0) = 0$.

- Pour $\delta \geq 0$,
$$\Phi_d(u) = E[e^{-\delta\tau}\mathbb{I}_{(\tau<\infty, R(\tau)=0)}/R(0) = u], \quad avec \;\; \Phi_d(0) = 1.$$
  Φ_d est la transformée de Laplace de temps de ruine dû aux oscillations des $R(t)$.
$$\Phi_s(u) = E[e^{-\delta\tau}w(R(\tau^-), \mid R(\tau) \mid)\mathbb{I}_{(\tau<\infty, R(\tau)<0)}/R(0) = u] \tag{2.113}$$
  la fonction de pénalité si la ruine est provoquée par une réclamation.
  Où
  – $w(x, y)$ la valeur non-négative de la fonction de pénalité pour $x, y \geq 0$.
  – τ^- est le moment juste avant la ruine.

Soit $\Phi(u) = \Phi_d(u) + \Phi_s(u)$ la fonction de pénalité escomptée prévue.

Remarque 2.7. En remplaçant δ par 0 et $w(x, y) = 1, \; \forall \; x, \; y > 0$ alors la fonction de Gerber Shiu défini dans (2.113) devient la probabilité de ruine dans le modèle de Cramér-Lundberg.

Le théorème suivant nous donne le premier résultat des équations intégro-différentielles pour $\Phi_s(u)$ et $\Phi_d(u)$.

Théorème 2.39 ([32]). *Si on note par I et D l'opérateur d'identité et l'opérateur de différentiation, respectivement.*
Alors $\Phi_s(u)$ satisfait l'équation suivante
$$\left\{\prod_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{\delta}{\lambda_j}\right)I - \frac{c}{\lambda_j}D - \frac{\sigma^2}{2\lambda_j}D^2\right]\right\}\Phi_s(u) = \int_0^u \Phi_s(u-x)f(x)dx + w(x), \tag{2.114}$$
où $w(u) = \int_u^\infty w(u, x-u)f(x)dx$ et $\Phi_s(0) = 0$.

$\Phi_d(u)$ satisfait l'équation suivante pour,
$$\left\{\prod_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{\delta}{\lambda_j}\right)I - \frac{c}{\lambda_j}D - \frac{\sigma^2}{2\lambda_j}D^2\right]\right\}\Phi_d(u) = \int_0^u \Phi_d(u-x)f(x)dx, \tag{2.115}$$
avec $\Phi_d(0) = 1$

Preuve. Soit $S_j = V_1 + V_2 + \cdots + V_j,\ j = 0, 1, \cdots, n-1$ avec $S_0 = 0$.
On définit

$$\Phi_{s,j}(u) = E[e^{-\delta(\tau-t)} w(R(\tau^-), \mid R(\tau) \mid) \mathbb{I}(\tau < \infty, R(\tau) < 0)/S_j = t, R(t) = u], \quad j = 0, \cdots, n-1$$

avec $\Phi_{s,0}(u) = \Phi_s(u)$ et $\Phi_{s,j}(0) = 0$.
On obtient pour $j = 0, 1, \cdots, n-2$

$$\Phi_{s,j}(u) = e^{-\delta dt} \{P(V_{j+1} > dt) E[\Phi_{s,j}(u + cdt + \sigma\beta(dt))] + P(V_{j+1} \le dt) E[\Phi_{s,j+1}(u + cdt + \sigma\beta(dt))]\} \tag{2.116}$$

On a $e^{-\delta dt} = 1 - \delta dt + o(dt)$,

$$P(V_{j+1} > dt) = 1 - \lambda_{j+1} dt + o(dt), \quad P(V_{j+1} \le dt) = \lambda_{j+1} dt + o(dt)$$

et

$$E[\Phi_{s,j}(u + cdt + \sigma\beta(dt))] = \Phi_{s,j}(u) + \left[c\Phi'_{s,j}(u) + \frac{\sigma^2}{2} \Phi''_{s,j}(u) \right] dt + o(dt)$$

En remplaçant ces formules et en faisant tendre $dt \to 0$ dans la formule (2.116), on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_{j+1} \Phi_{s,j+1}(u) &= (\lambda_{j+1} + \delta)\Phi_{s,j}(u) - c\Phi'_{s,j}(u) - \frac{\sigma^2}{2} \Phi''_{s,j}(u) \\ &= \left[(\lambda_{j+1} + \delta) I - cD - \frac{\sigma^2}{2} D^2 \right] \Phi_{s,j}(u), \\ &\quad \forall\ j = 0, 1, \cdots, n-2 \end{aligned} \tag{2.117}$$

De même pour $j = n-1$, on a

$$\left[(\lambda_n + \delta) I - cD - \frac{\sigma^2}{2} D^2 \right] \Phi_{s,n-1}(u) = \lambda_n \left[\int_0^u \Phi_{s,0}(u-x) f(x) dx + w(u) \right] \tag{2.118}$$

par substitution successive, on obtient que pour $1 \le m \le n-1$,

$$\Phi_{s,m}(u) = \left\{ \prod_{j=1}^{m} \left[\left(1 + \frac{\delta}{\lambda_j} \right) I - \frac{c}{\lambda_j} D - \frac{\sigma^2}{2\lambda_j} D^2 \right] \right\} \Phi_{s,0}(u) \tag{2.119}$$

On remplace m par $(n-1)$ dans (2.119), et en utilisant la formule (2.118), on obtient

$$\left\{ \prod_{j=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{\delta}{\lambda_j} \right) I - \frac{c}{\lambda_j} D - \frac{\sigma^2}{2\lambda_j} D^2 \right] \right\} \Phi_s(u) = \int_0^u \Phi_s(u-x) f(x) dx + w(u)$$

où $\Phi_{s,0}(u) = \Phi_s(u)$
Notons que $\Phi_s(0) = 0$ du fait que $P(\tau < \infty, R(\tau) < 0/R(0) = 0) = 0$.
Pour vérifier l'homogénéité de $\Phi_d(u)$, pour $j = 0, 1, \cdots, n-1$ on définit

$$\Phi_{d,j}(u) = E[e^{-\delta(\tau-t)} I(\tau < \infty, R(\tau) = 0)/S_j = t, R(t) = u]$$

avec $\Phi_{d,0}(u) = \Phi_d(u) \quad$ et $\quad \Phi_{d,j}(0) = 1$.

En utilisant les mêmes arguments que ceux utilisés en (2.117) et (2.118), on aura pour $j = 0, \cdots, n-2$

$$\lambda_{j+1}\Phi_{d,j+1}(u) = \left[(\lambda_{j+1} + \delta)I - cD - \frac{\sigma^2}{2}D^2\right]\Phi_{d,j}(u) \tag{2.120}$$

et

$$\left[(\lambda_n + \delta)I - cD - \frac{\sigma^2}{2}D^2\right]\Phi_{d,n-1}(u) = \lambda_n \int_0^u \Phi_d(u-x)f(x)dx \tag{2.121}$$

d'où

$$\left\{\prod_{j=1}^{n}\left[\left(1 + \frac{\delta}{\lambda_j}\right)I - \frac{c}{\lambda_j}D - \frac{\sigma^2}{2\lambda_j}D^2\right]\right\}\Phi_d(u) = \int_0^u \Phi_d(u-x)f(x)dx,$$

Notons que $\Phi_d(0) = 1$, et $\quad P(\tau < \infty, R(\tau) = 0/R(0) = 0) = 1$. □

Les solutions des équations (2.114) et (2.115) sont reliées aux racines de l'équation généralisée de Lundberg.

2.4 Généralisation de l'équation de Lundberg

Soit $T_k = \sum_{k=1}^{n} W_i$, alors :

$$\begin{aligned} R_k &= R(T_k) = u + cT_k - \sum_{j=1}^{k} X_j + \sigma\beta(T_k), \ \forall k \in \mathbb{N} \\ &= u + \sum_{j=1}^{k}[cW_j - X_j + \sigma\beta(W_j)] \end{aligned}$$

On cherche un nombre s tel que le processus $\{e^{-\delta T_k + sR_k}; k = 0, 1, 2, \cdots\}$ soit une martingale.

La condition de martingale est équivalente à

$$E[e^{-\delta W_1 + csW_1 + s\beta(W_1) - sX_1}] = E[e^{-(\delta - cs)W_1 + +s\beta(W_1) - sX_1}]E[e^{-sX_1}] = 1 \tag{2.122}$$

Du fait que

$$E[e^{-(\delta-cs)W_1++s\beta(W_1)-sX_1}] = E\{E[e^{-(\delta-cs)W_1++s\beta(W_1)-sX_1}]/W_1]\} = E\left[e^{-(\delta-cs)W_1+\frac{s^2\delta^2}{2}W_1}\right]$$

et W_1 généralise la loi Erlang (n).

L'équation (2.122) peut être réecrite de la façon suivante :

$$E\left[e^{-(\delta-cs)W_1+\frac{s^2\delta^2}{2}W_1}\right]L_{X_1}(s) = \prod_{j=1}^{n} E\left[e^{-(\delta-cs-\frac{\delta^2}{2}s^2)V_j}\right]L_{X_1}(s) = 1, \quad s \in \mathbb{C} \tag{2.123}$$

Soit $\gamma(s) = \prod_{j=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{\delta}{\lambda_j}\right) - \frac{c}{\lambda_j} s - \frac{\sigma^2}{2\lambda_j} s^2 \right]$

L'équation (2.123) est équivalente alors à :

$$\gamma(s) = L_{X_1}(s), \quad \delta \geq 0, \; n \in \mathbb{N}^+ \; et \; s \in \mathbb{C}, \tag{2.124}$$

qui est une équation généralisée de Lundberg.

Le théorème suivant nous donne les solutions généralisées de l'équation de Lundberg.

Théorème 2.40 ([32]). *Pour $\delta > 0$ et $n \in \mathbb{N}^+$, l'équation (2.124) admet n racines $\rho_1(\delta, \sigma), \rho_2(\delta, \sigma), \cdots, \rho_n(\delta, \sigma)$ avec $Re(\rho_j) > 0$ où Re désigne la partie réelle.*

Remarque 2.8.

1. Soit $l(s) = L_f(s) - \gamma(s)$.
   Du fait que $l(0) < 0$ et $\lim_{s \to -\infty} l(s) = +\infty$, l'équation $l(s) = 0$ admet une unique solution négative $-R(\delta, \sigma)$ où $R(\delta, \sigma) > 0$ est la généralisation du coefficient d'ajustement.
2. Si $\delta \to 0^+$, alors $-R(\delta, \sigma) \to -R(0, \sigma)$ et $\rho_j(\delta, \sigma) \to \rho_j(0, \sigma)$,
   pour $1 \leq j \leq n$, où $-R(0, \sigma)$ et $\rho_j(0, \sigma)$ sont des racines de l'équation :
   $$\gamma_{0,\sigma}(s) = \prod_{j=1}^{n} \left[1 - \frac{c}{\lambda_j} s - \frac{\sigma^2}{2\lambda_j} s^2 \right] = L_{X_1}(s), \quad s \in \mathbb{C}$$
3. Si $\sigma^2 \to 0$, alors $-R(\delta, \sigma) \to -R(\delta, 0)$ et $\rho_j(\delta, \sigma) \to \rho_j(\delta, 0)$,
   pour $1 \leq j \leq n$, où $-R(\delta, 0)$ et $\rho_j(\delta, 0)$ sont des racines de l'équation :
   $$\gamma_{\delta,0}(s) = \prod_{j=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{\delta}{\lambda_j}\right) - \frac{c}{\lambda_j} s \right] = L_{X_1}(s), \quad s \in \mathbb{C} \tag{2.125}$$

La résolution des équations (2.114) et (2.115) (voir Gerber et Shiu [36]).

Remarque 2.9. On note $-R = -R(\delta, \sigma)$ et $\rho_j = \rho_j(\delta, \sigma)$, $\forall 1 \leq j \leq n$, pour $\delta > 0$ et $\sigma > 0$.

En utilisant le concept des différences divisées (voir Annexe), on obtient la relation des racines de l'équation de Lundberg suivante. Le théorème suivant nous donne la relation des racines de l'équation de Lundberg.

Théorème 2.41 ([32]). *Pour $u \geq 0$, il existe un polynôme γ en terme d'opérateur différentielle D tel que*

$$(-1)^n \gamma[\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n, D] \Phi_s(u) = \int_0^u \Phi_s(u - y) \eta(y) dy + G(y). \tag{2.126}$$

$$(-1)^n \gamma[\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n, D] \Phi_d(u) = \int_0^u \Phi_d(u - y) \eta(y) dy. \tag{2.127}$$

où

- $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ *sont les* n *racines de l'équation* (2.124).
- $\eta(y) = T_{\rho_n} T_{\rho_{n-1}} \cdots, T_{\rho_1} p(y)$ *où* T_r *est un opérateur qui est défini par :*

$$T_r f(x) = \int_x^\infty e^{-r(y-x)} f(y) dy, \quad x \geq 0.$$

- $G(u) = T_{\rho_n} \cdots T_{\rho_1} w(u)$
- w *est de la forme* (2.116).

Remarque 2.10. Les équations (2.126) et (2.127) sont des équations intégro- différentielles d'ordre n de Φ_s et Φ_d respectivement.
De (3.15), la quantité

$$\gamma[\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n, s] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma(\rho_j)}{\tau_n'(\rho_j; \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n)(\rho_j - s)} + \frac{\gamma(s)}{\tau_n(s; \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n)}$$

est un polynôme de degré n.

Pour résoudre les équations (2.126) et (2.127), on prend la transformée de Laplace des deux côtés.
L'équation (2.126) nous donne

$$\{(-1)^n \gamma[\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n, s] - \hat{\eta}(s)\} \hat{\Phi}_s(s) = \hat{G}(s) + q_{n-1}(s), \quad s \in \mathbb{C} \qquad (2.128)$$

où

- $\hat{\eta}(s) = T_s \eta(0) = T_s T_{\rho_n} \cdots T_{\rho_1} p(0)$ et $\hat{G}(s) = T_s G(0) = T_s T_{\rho_n} \cdots T_{\rho_1} w(0)$ sont les transformées de Laplace de η et G respectivement.
- $q_{n-1}(s)$ est le polynôme de degré supérieur où égal à $(n-1)$, avec des coefficients qui sont fonctions de δ, c, λ_i et ρ_i, pour $i = 1, 2, \cdots, n$.

On note $\Phi_s^{(k)}(0)$, pour $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ les dérivés de Φ_s en point 0.
Comme $\gamma[\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n, s]$ est un polynôme de degré n et que le coefficient de s^n est égal à celui de s^{2n} dans $\gamma(s)$, qui est $(-1)^n \frac{\sigma^{2n}}{2^n(\prod_{i=1}^n \lambda_i)}$, alors

$$\gamma[\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n, s] = (-1)^n \frac{\sigma^{2n}(s+a_1)(s+a_2)\cdots(s+a_n)}{2^n(\prod_{i=1}^n \lambda_i)}, \quad s \in \mathbb{C} \qquad (2.129)$$

où $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sont les conjugués des nombres complexes.

L'équation (2.128) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_s(s) \left[1 - \frac{2^n(\prod_{i=1}^n \lambda_i)\hat{\eta}(s)}{\sigma^{2n}(s+a_1)(s+a_2)\cdots(s+a_n)}\right] &= \frac{2^n(\prod_{i=1}^n \lambda_i)}{\sigma^{2n}} \left[\frac{\hat{G}(s)}{(s+a_1)(s+a_2)...(s+a_n)}\right. \\ &+ \left.\frac{q_{n-1}(s)}{(s+a_1)(s+a_2)...(s+a_n)}\right] \\ &= \frac{2^n(\prod_{i=1}^n \lambda_i)\hat{G}(s)}{\sigma^{2n}(s+a_1)(s+a_2)...(s+a_n)} \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{(s+a_i)}, \quad s \in \mathbb{C} \qquad (2.130) \end{aligned}$$

où
$$b_i = \frac{2^n(\prod_{i=1}^n \lambda_i) q_{n-1}(-a_i)}{\sigma^{2n}\left[\prod_{j=1, j\neq i}^n (a_j - a_i)\right]}, \; i = 1, 2, \cdots, n$$

De même, en prenant la transformée de Laplace de l'équation (2.127), on obtient

$$\{(-1)^n \gamma[\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n, s] - \hat{\eta}(s)\}\hat{\Phi_d}(s) = Q_{n-1}(s), s \in \mathbb{C} \tag{2.131}$$

où $Q_{n-1}(s)$ est un polynôme de degré inférieur où égal à $(n-1)$, avec des coefficients qui sont fonctions de δ, c, λ_i et ρ_i pour $i = 1, 2, \cdots, n$.
On note $\Phi_d^{(k)}(0), k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ les dérivés de Φ_d en point 0.

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_d(s)\left[1 - \frac{2^n(\prod_{i=1}^n \lambda_i)\hat{\eta}(s)}{\sigma^{2n}(s+a_1)(s+a_2)\cdots(s+a_n)}\right] &= \frac{2^n(\prod_{i=1}^n \lambda_i) Q_{n-1}(s)}{\sigma^{2n}(s+a_1)(s+a_2)\cdots(s+a_n)} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(s+a_i)}, \quad s \in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{2.132}$$

où
$$c_i = \frac{2^n(\prod_{i=1}^n \lambda_i) Q_{n-1}(-a_i)}{\sigma^{2n}\left[\prod_{j=1, j\neq i}^n (a_j - a_i)\right]}, \; i = 1, 2, \cdots, n.$$

Le théorème suivant montre que Φ_s, Φ_d et Φ sont toutes des représentations de l'équation de renouvellement.

Théorème 2.42 ([32]).

$$\Phi_s(u) = \int_0^u \Phi_s(u-y) g(y) dy + H(y) + \sum_{i=1}^n b_i e^{-a_i u}, \;\; u \geq 0. \tag{2.133}$$

$$\Phi_d(u) = \int_0^u \Phi_d(u-y) g(y) dy + \sum_{i=1}^n c_i e^{-a_i u}, \;\; u \geq 0. \tag{2.134}$$

$$\Phi(u) = \int_0^u \Phi(u-y) g(y) dy + H(y) + \sum_{i=1}^n (c_i + b_i) e^{-a_i u}, \;\; u \geq 0. \tag{2.135}$$

où a_i, b_i, c_i, n et G sont définis ci-dessus, $g(y) = h * \eta(y) = h_1 * \cdots * h_n * \eta(y)$, $H(y) = h * G(u) = h_1 * \cdots * h_n * G(u)$, avec $h_i(y) = \frac{\lambda_i}{\sigma^2/2} e^{-a_i y}$, pour $i = 1, 2, \cdots, n$.

Chapitre 3

Probabilité de ruine dans un modèle de série chronologique

Dans cette partie, nous allons donner des bornes non exponentielles à la probabilité de ruine pour un horizon infini, lorsque dans le modèle de risque, les montants des sinistres sont modélisés par un modèle linéaire. En utilisant le théorème d'arrêt de Doob et les inégalités sur les martingales, on obtient des bornes de la probabilité de ruine.

3.1 Modèle de risque

Soit $R(t)$ le capital d'une compagnie d'assurances à l'instant t défini par

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,\ t \in \mathbb{R}^+ \tag{3.1}$$

où

- $R(0) = u$ est le capital initial.

- $(N(t))_t$ est un processus de comptage représentant le nombre de sinistres dans la période $]0, t]$.

- c est le taux de cotisation demandé aux assurés qui est supposé constant.

- X_i est le montant du $i^{\text{ème}}$ sinistre.

Notons t_i le temps de réalisation du $i^{\text{ème}}$ sinistre et posons $T_i = t_i - t_{i-1},\ i \geq 1$ avec $t_0 = 0$.
Les T_i représentent les inter-arrivées.
On suppose que le processus $(N(t))_t$ est à accroissements stationnaires et indépendants.
Ce qui implique que les inter-arrivées $(T_i)_i$ sont $i.i.d$ de distribution commune $K(x) = P(T_i \leq x)$ satisfait $K(0) = 0$.

L'équation (3.1) peut s'écrire de la façon suivante :

$$R(t) = u + \sum_{i=1}^{N(t)} (cT_i - X_i) + c(t - \sum_{i=1}^{N(t)} T_i) \tag{3.2}$$

La quantité $(cT_i - X_i)$ représente le gain dans la $i^{\text{ème}}$ période $[\sum_{j=1}^{i-1} T_j, \sum_{j=1}^{i} T_j]$.

Au temps $t = \sum_{i=1}^{N(t)} T_i$, le surplus de la compagnie s'écrit :

$$R(t) = u + \sum_{i=1}^{N(t)} (cT_i - X_i) \tag{3.3}$$

La probabilité de ruine dans le modèle (3.2) est équivalente à celle du modèle (3.3) pour $t = \sum_{i=1}^{N(t)} T_i$.
On suppose qu'il y a un profit-net i.e.,

$$E(ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i) > 0 \tag{3.4}$$

La condition (3.4) nous assure que la probabilité de ruine est inférieure à 1.
Notons τ le temps de ruine, avec $\tau = \inf\{t, R(t) < 0\}$.
Supposons que :

1. Le montant du $i^{\text{ème}}$ sinistre X_i s'écrit comme suit :

$$X_i = b_1 X_{i-1} + \cdots + b_k X_{i-k} + d_1 Y_{i-1} + \cdots + d_l Y_{i-l} \tag{3.5}$$

   où $b_i \geq 0 \ \forall i, \ d_j \geq 0 \ \forall j$ et $(y_i)_i$ sont des variables aléatoires $i.i.d$ positives définies sur $[0, a], \ a < \infty$.
2. De même on suppose que $(N(t))_t$ est indépendant des variables aléatoires $(Y_i)_{i \geq 1}$.
   On en déduit que les variables aléatoires $(X_i)_i$ sont indépendantes des $(T_i)_i$.
3. La condition (3.4) est réalisée.

3.2 Probabilité de ruine dans un modèle linéaire

Soit le modèle (3.3) i.e., $R(t) = u + \sum_{i=1}^{N(t)} (cT_i - X_i), \ t = \sum_{i=1}^{N(t)} T_i$.
Le coefficient d'ajustement R $(R > 0)$ est solution de l'équation

$$E\left(e^{-r\left(\frac{c}{d}T_i - Y_i\right)}\right) = 1 \tag{3.6}$$

où $d = 1 + d_1 + ... + d_l > 0$.
Dans le cas ou $b_i = b_j = 0 \ \forall i, j$ et $((N(t))_t$ est un processus de Poisson homogène

d'intensité λ, on retrouve le modèle de Poisson composé. Dans ce cas, les variables aléatoires $(T_i)_i$ suivent une loi exponentielle de paramètre λ. Y_i est le montant du distribution.
L'équation (3.6) s'écrit : $E(e^{-r(cT_i-Y_i)}) = 1$.
Ce qui donne

$$E(e^{rY_i}) = \frac{cr+\lambda}{\lambda} \Rightarrow E(e^{rY_i}) - 1 = \frac{cr}{\lambda} \tag{3.7}$$

Dans (3.7), on retrouve la définition du coefficient d'ajustement dans un modèle de Poisson composé.

Lemme 3.1 ([77]). *Soit* $\mathcal{F}_t = \sigma\{N(s) : s \leq t\} \bigvee \sigma\{Y_i : i = 1, 2, ..., N(t)\}$, $t = \sum_{i=1}^{N(t)} T_i$, *alors*

$$\left\{ \exp\left[R\left(\frac{ct}{d} - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \right) \right] : t = \sum_{i=1}^{N(t)} T_i \right\}$$

est une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$

Preuve. Pour $0 \leq s \leq t$ où s et t sont les temps de réclamation.

$$\begin{aligned}
E\left[\exp\left[-R\left(\frac{ct}{d} - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right)\right] / \mathcal{F}_s\right] &= E\left[\exp\left[-R\left(\frac{cs}{d} - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right)\right] \times \right. \\
&\quad \left. \exp\left[-R\left(\frac{c(t-s)}{d} - \sum_{i=N(s)+1}^{N(t)} Y_i\right)\right] / \mathcal{F}_s\right] \\
&= \exp\left[-R\left(\frac{cs}{d} - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right)\right] \times \\
&\quad E\left[\exp\left[-R \sum_{i=N(s)+1}^{N(t)} \left(\frac{cT_i}{d} - Y_i\right)\right] / \mathcal{F}_s\right] \\
&= \exp\left[-R\left(\frac{cs}{d} - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right)\right] \times \\
&\quad \sum_{k=0}^{\infty} E\left[\exp\left[-R \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{cT_i}{d} - Y_i\right)\right] / N(t-s) = k\right] \times \\
&\quad P(N(t-s) = k) \\
&= \exp\left[-R\left(\frac{cs}{d} - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right)\right].
\end{aligned}$$

D'où

$$\left\{ \exp\left[R\left(\frac{ct}{d} - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \right) \right] : t = \sum_{i=1}^{N(t)} T_i \right\}$$

est une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$. $\square$

3.3 Modèle à moyenne mobile

En posant $k = 0$ dans l'équation (3.5), on obtient un modèle à moyenne mobile. Pour simplifier les notations, on pose

$$V_1(u, y_0, \cdots, y_{-l+1}) = \exp\left(-\frac{R}{d}z\right)$$

où $z = u - \sum_{i=1}^{l-1}(d_{i+1} + \cdots + d_l)y^{-i}$, $y_0, \cdots, y_{-l+1}$ sont spécifiés.
Pour $l = 0$, $V = V(u) = e^{-Ru}$.

Lemme 3.2 ([77]). $\{V_1(R(t), Y_{N(t)}, \cdots, Y_{N(t)-l+1}) : t = 0, T_1, T_1 + T_2, \ldots\}$ *est une martingale par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}$.

Preuve.

$$R(t) - u - ct = -\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

On utilise l'équation (3.1), et on obtient

$$R(t) - u - ct = -\left[d\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i + \sum_{i=0}^{l-1}(d_{i+1} + \cdots + d_l)(y_{-i} - Y_{N(t)-i})\right]$$

Par conséquent,

$$R(t) - \sum_{i=0}^{l-1}(d_{i+1} + \cdots + d_l)Y_{N(t)-i} = u - \sum_{i=0}^{l-1}(d_{i+1} + \cdots + d_l)y_{-i} + ct - d\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \quad (3.8)$$

On multiplie les deux cotés de l'équation (3.8) par R/d, et du fait que la fonction exponentielle est croissante, on a

$$V_1(R(t), Y_{N(t)}, \cdots, Y_{N(t)-l+1}) = \exp\left(-\frac{Rct}{d} + R\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right) V_1(u, y_0, \cdots, y_{-l+1}). \quad (3.9)$$

Ceci provient du fait que $\left\{\exp\left[-R\left(\frac{ct}{d} - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right)\right] : t \geq 0\right\}$ est une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$.

D'où $\{V_1(R(t), Y_{N(t)}, \cdots, Y_{N(t)-l+1}) : t = 0, T_1, T_1 + T_2, \ldots\}$ est une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$. □

L'application du théorème de Doob à la martingale
$\{V_1(R(t), Y_{N(t)}, \cdots, Y_{N(t)-l+1}) \ : \ t \geq 0\}$ et le principe de convergence monotone donnent les deux théorèmes suivants.

Théorème 3.1 ([77]).

$$P(T < \infty) = \frac{V_1(u, y_0, \cdots, y_{-l+1})}{E[V_1(R(t), Y_{N(T)-l+1})/t < \infty]} \tag{3.10}$$

Théorème 3.2 ([77]).

$$P(T < \infty) \sim CV_1(u, y_0, \cdots, y_{-l+1}) \ \textit{quand} \ \ u \to \infty \tag{3.9}$$

où C est une constante positive

3.4 Bornes non-exponentielles de la probabilité de ruine

Soit X une variable aléatoire non négative de distribution B.
On note $\overline{B}(x) = 1 - B(x)$.
On suppose que B vérifie l'une des conditions suivantes :

$$\overline{B}(x)\overline{B}(y) \leq \overline{B}(x + y) \ \forall x, y \geq 0 \tag{3.11}$$

ou

$$\overline{B}(x)\overline{B}(y) \geq \overline{B}(x + y) \ \forall x, y \geq 0 \tag{3.12}$$

Une classe de distributions vérifiant (3.11) est l'ensemble des distributions absolument continues avec un taux de défaillance décroissant.
Pour simplifier le problème, on ne considère que le cas ou $l = 0$ et $k = 1$; dans ce cas :
$R(t) = u + \displaystyle\sum_{i=1}^{N(t)} (cT_i - X_i)$ avec $X_i = \varrho X_{i-1} + Y_i$ où les variables aléatoire $(Y_i)_i$ sont $i.i.d$, $| \ \varrho \ |< 1$ et $X_0 = x_0$.
Soit T une variable aléatoire de même loi que T_i et Y une variable aléatoire de même loi que Y_i.
Le résultat suivant dù à Zhang et Lihong (2005) nous donne une borne non exponentielle de la probabilité de ruine.

Théorème 3.3 ([77]). *On suppose que :*

1. $u + \varrho x_0 \geq 0.$
2. *B_1 et B_2 vérifient les conditions (3.11) et (3.12) respectivement.*
3. $E\left\{\frac{1}{\overline{B}_1\left(\frac{\delta Y}{1-c}\right)}\overline{B}_2(pT)\right\} \leq 1, \ \forall 0 < \delta < 1,$ *et* $\overline{B}_1(y - x) \geq \overline{B}_1(y)(\overline{B}_2(x))^{-1}, \ y \geq x$

alors

$$\Psi(x, x_0) \leq \overline{B}_1(u + \varrho x_0).$$

Preuve.

$$
\begin{aligned}
R(t) &= u + \sum_{i=1}^{n} cT_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \\
&= u + \frac{1-\varrho^n}{1-\varrho}\varrho x_0 + \sum_{i=1}^{n}\left(cT_i - \frac{1-\varrho^{n-i+1}}{1-\varrho}Y_i\right)
\end{aligned}
$$

Soit

$$
H_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{\overline{B}_2(cT_i)}{\overline{B}_1\left(\frac{1-\varrho^{n-i+1}}{1-\varrho}\right)Y_i} \tag{3.13}
$$

L'équation (3.13)montre que H_n est une martingale.

La probabilité de ruine Ψ est donnée par

$$
\begin{aligned}
\Psi(u,x_0) &= P(R(t)<0,\ \exists t/R(0)=u) \\
&= P(R(n)<0,\ \exists n = N(t)/R(0)=u) \\
&= P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\varrho^{n-i+1}}{1-\varrho}Y_i - \sum_{i=1}^{n} cT_i > u + \frac{1-\varrho^n}{1-\varrho}\varrho x_0\right)\right\} \\
&\leq P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\varrho^{n-i+1}}{1-\varrho}Y_i - \sum_{i=1}^{n} cT_i > u + \varrho x_0\right)\right\} \\
&= \lim_{N\to\infty} P\left\{\bigcup_{n=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\varrho^{n-i+1}}{1-\varrho}Y_i - \sum_{i=1}^{n} cT_i > u + \varrho x_0\right)\right\} \\
&= \lim_{N\to\infty} P\left\{\bigcup_{n=1}^{N}\left(\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\varrho^{n-i+1}}{1-\varrho}Y_i - \sum_{i=1}^{n} cT_i\Big)^{+} > u + \varrho x_0\right)\right\} \\
&< \lim_{N\to\infty} P\left\{\bigcup_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{\overline{B}_1\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\varrho^{n-i+1}}{1-\varrho}Y_i - \sum_{i=1}^{n} cT_i\right)^{+}\right)}\right) \geq \left(\frac{1}{\overline{B}_1(u+\varrho x_0)}\right)\right\} \\
&= \lim_{N\to\infty} P\left\{\max_{1\leq n\leq N}\left(\frac{1}{\overline{B}_1\left((\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\varrho^{n-i+1}}{1-\varrho}Y_i - \sum_{i=1}^{n} cT_i)^{+}\right)}\right) \geq \left(\frac{1}{\overline{B}_1(u+\varrho x_0)}\right)\right\} \\
&< \lim_{N\to\infty} P\left\{\max_{1\leq n\leq N}\left(\frac{\overline{B}_2(\sum_{i=1}^{n} cT_i)}{\overline{B}_1\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\varrho^{n-i+1}}{1-\varrho}Y_i\right)}\right) \geq \frac{1}{\overline{B}_1(u+\varrho x_0)}\right\} \\
&\leq \lim_{N\to\infty} P\left\{\max_{1\leq n\leq N}\prod_{i=1}^{n}\frac{\overline{B}_2(cT_i)}{\overline{B}_1\left(\frac{1-\varrho^{n-i+1}}{1-\varrho}Y_i\right)} \geq \left(\frac{1}{\overline{B}_1(u+\varrho x_0)}\right)\right\} \\
&\leq \varphi(u+\varrho x_0)\overline{B}_1(u+\varrho x_0)
\end{aligned}
$$

où $\varphi(u+\varrho x_0) \leq 1$.
Ce qui donne

$$\Psi(x, x_0) \leq \overline{B}_1(u+\varrho x_0)$$

$\square$

Le théorème 3.3 nous donne le résultat suivant :

Corollaire 3.1 ([77]). *On suppose que :*

1. $u+\varrho x_0 \geq 0$.
2. *$B(x)$ vérifié la condition (3.11) et satisfait*
   - $\overline{B}(x-y) \geq \overline{B}(y)e^{ux}, \quad y \geq x.$
   - $E\left\{\dfrac{1}{\overline{B}\left(\dfrac{\delta y}{1-\varrho}\right)}\right\} E(e^{-cT}) \leq 1, \quad \forall 0<\delta<1$

alors

$$\Psi(u, x_0) = \overline{B}(u+\varrho x_0)$$

Conclusion & Perspectives

Dans ce mémoire, nous avons étudié la probabilité de ruine dans les modèles classiques de Cramér-Lundberg et de Sparre-Andersen ainsi que certaines généralisations. On a donné par plusieurs méthodes, exactes et approximatives, la probabilité de ruine pour un horizon fini et infini. Les modèles étudiés ne sont pas exhaustifs. En pratique, ces modèles sont peu réalistes et ne tiennent pas compte de certaines caractéristiques qui peuvent altérer le modèle de risque retenu. Il serait intéressant à l'avenir de considèrer les cas suivants :

- Les primes ne sont pas collectées à un taux constant(hypothèse sur le passif de la compagnie : versement de dividendes, investissement, ...) ; ce qui signifie que c n'est pas une constante mais une variable aléatoire.
- Les risques auxquels sont soumis les compagnies d'assurance ne sont plus indépendants mais présentent des corrélations (corrélation entre sinistres, entre nombre de sinistres et sinistres). Il est généralement supposé que les sinistres sont indépendants. Cependant, dans bon nombre de sitations, cette hypothèse n'est pas vérifiée. Pour tenir compte d'une éventuelle dépendance entre les risques, il importe d'utiliser des modèles appropriés. La modélisation de la dépendance des risques par les copules est une perspective ainsi que l'estimation des paramètres de ces modèles est aussi à envisager.
- Le processus de surplus est un processus de Levy.
- Les réclamations ne suivent plus des processus homogènes, mais des processus Markoviens ergodiques.
- Etudier la probabilité de ruine dans un cadre multivarié : modèles multibranches, multirisques.

Annexe

Définition 3.1 (Formule de Leibniz). Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On considère une fonction continue $f : [a, b] \times I \to \mathbb{R}$ telle que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $[a, b] \times I$.
On pose

$$K(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t, x)dt,$$

Où $u : I \to [a, b]$ et $v : I \to [a, b]$ sont des fonctions dérivables.
On a

$$K'(x) = v'(x)f(v(x), x) - u'(x)f(u(x), x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)dt \tag{3.14}$$

La formule (3.14) est appelé formule de Leibniz.

Variable aléatoire géométrique composée
La méthode de calcul par convolutions repose sur le calcul d'une variable aléatoire géométrique composée.

Définition 3.2. Une variable aléatoire Z est une variable géométrique composée, si on peut l'écrire sous forme suivant :

$$Z = \sum_{i=0}^{N_t} X_i$$

où N_t est une variable aléatoire géométrique de paramètre θ tel que

$$P(N_t = k) = P_k = \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k, \; k = 0, 1, 2, \cdots$$

et les X_i sont des variable aléatoire i.i.d, de fonctions de répartition F_X et de densité f_X, pour $i = 1, \cdots, N_t$. De plus, la variable aléatoire N_t est indépendante de $X_i, \; i = 1, \cdots, N_t$.
Sa fonction de répartition, $F_Z(x)$ et sa fonction de survie, $\overline{F}_Z(x) = 1 - F_Z(x)$, s'écrivent toute deux respectivement sous forme d'une série de puissances de convolutions :

$$F_Z(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_k F_X^{*k}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k F_X^{*k}(x)$$

$$\overline{F}_Z(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_k F_X^{*k}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k (1 - F_X^{*k}(x))$$

et sa fonction de densité $f_Z(x)$

$$f_Z(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_k F_X^{*k}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k f_X^{*k}(x)$$

Proposition 3.1 (Inégalité de Markov). *Soit X une variable aléatoire positive d'espérance finie*
alors

$$\forall \delta > 0,\ P(X > \delta) \leq \frac{E(X)}{\delta}$$

Définition 3.3. Pour les nombres distincts $r_1, r_2, \cdots, r_k$, la $k^{\text{ième}}$ différence divisée $h[r_1, r_2, \cdots, r_k, s]$ de la fonction h est donné comme suit :

$$\begin{aligned}
h[r_1, s] &= \frac{h(s) - h(r_1)}{(s - r_1)} \\
h[r_1, r_2, s] &= \frac{h[r_1, s] - h[r_1, r_2]}{(s - r_2)} \\
h[r_1, r_2, \cdots, r_k, s] &= \frac{h[r_1, r_2, \cdots, r_{k-1}, s] - h[r_1, r_2, \cdots, r_k]}{(s - r_k)}.
\end{aligned}$$

Notons que si $h(s)$ est un polynôme de degré n, alors $h[r_1, r_2, \cdots, r_n, s]$ est un polynôme de degré $(n - k)$.
$h[r_1, r_2, \cdots, r_n, s]$ désigne le coefficient de s^n.
Le résultat suivant est vérifié :

$$h[r_1, r_2, \cdots, r_k] = \sum_{j=1}^{k} \frac{h(r_j)}{\tau_k'(r_j; r_1, r_2, \cdots, r_k)}, \tag{3.15}$$

où $\tau_k(r_j; r_1, r_2, \cdots, r_k) = \prod_{i=1}^{k}(s - r_i)$ est un polynôme.

Bibliographie

[1] Abramowitz M. and Stegun I.(1972). *Handbook of Mathematical Functions.* 10th ed., Dover, New York.

[2] Andersen, E. Sparre (1957). *On the collective theory of risk in the case of contagion between claims.* Transactions XVth international Congress of actuaries, 2, 219-229.

[3] Asmussen, S. (1984).*Approximations for the probability of ruin within finite time.* Scandinavian Actuarial Journal, 31-57.

[4] Asmussen, S. (2000).*Ruin probabilities*, World scientific, Singapore.

[5] Asmussen, S. and Bladt, M. (1992). *Phase-type distributions and risk processes with state-dependent premiums.* Scand. Act. J. 54, 29-43.

[6] Asmussen, S. and Højgaard, B. (1999). *Approximations for finite horizon ruin probabilities in the renewal model.* Scandinavian Actuarial Journal 106-119.

[7] Babier, J. and Chan, B. (1992). *Approximations Of Ruin Probability By Di-Atomic Or Di-Exponential Claims*Astin Bulletin, Vol. 22, No. 2.

[8] Boogaert, P., and Crijns, V. (1987). *Upper bounds on ruin probabilities in case of negative loadings and positive interest rates*, Insurance : Mathematics and Economics 6, 221-232.

[9] Bühlmann, H. (1997). *Collective risk theory for assets.* In North American, Actuarial journal.

[10] Burnecki, K., Mista, P., and Weron A. (2004). *A new De Vylder type approximation of the ruin probability in infinite time* Hugo Steinhaus Center for Stochastic Methods.

[11] Burnecki, K., Mista, P., and Weron A.(2005). *In statistical tools for finance and insurance.* eds. P. Čižek et al., Springer-Werlag, Berlin, 297.

[12] Cai, J. and Dickson, D. C. M. (1991). *Ruin Probabilities with a Markov Claim Interest Model* Centre of Actuarial Studies.

[13] Cai J. and Dickson D. C. M.(2003). *Upper bounds for ultimate ruin probabilities in the Sparre Andersen model with interest*, Insurance, Mathematics and Economics 32, 61-71.

[14] Chuanguang, S.(2007). *Laplace transform of the survival probability under Sparre Andersen model* Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B, 22(1), 109-118.

[15] Cramér, H. (1930). *On the Mathematical Theory of Risk.* Skandia Jubilee Volumen, Stockholm.

[16] Cramér, H. (1955). *Collective Risk Theory.* Skandia Jubilee Volumen, Stockholm.

[17] Delbaen, F., and Haezendoncs J. (1986). *Martingales in Markov processes applied to risk theory.* Presented at the 2nd NATO A.S.I. on insurance and risk theory.

[18] De Vylder, F. E. (1978).*A practical solution to the problem of ultimate ruin probability*, Scand. Actuar. J.,114-119.

[19] De Vylder, F. E. (1996). *Advanced risk theory.* A Self-Contained Introduction, Editions de l'Université de Bruxelles and Swiss Association of Actuaries.

[20] De Vylder, F. E. (1997). *La formule de Picard- Lefèvre pour la probabilité de ruine en temps fini.* Bulletin Français d'Actuariat 1 (2), 31-40.

[21] Dickson, D. C. M and Wong, K. S.(1978). *De Vylder Approximations to the Moments and Distribution of the Time to Ruin*Centre for Actuarial Studies.

[22] Ding J. Y. and Rong M. W. (2008). *Exponential bounds for ruin probability in two moving average risk models with constant interest rate*, Acta mathematica sinica, english series, Vol. 24, No. 2, 319-328.

[23] Dufresne, F., Gerber, H. U. (1989). *Three methods to calculate the probability of ruin.* ASTIN Bulletin, 19, 71-91.

[24] Dufresne, F., Gerber, H. U. (1991).*Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion.* Insurance : Mathematics and Economics, 10, 51-59.

[25] Edward P. C. Kao (1993). *An introduction to stochastic processes.* Wordsworth pubblishing compagny U.S.A.

[26] Föllinger, O. and KJuwe, M. (2003). *Laplaoe-, Fourier- und z-Translbrmation*, 8. Auflage. Heidelberg.

[27] Embrechts, P., Klüppelberg, C., and Mikosch, T. (1997).*Modelling Exremal events for insurance and finance*, Springer, Berlin.

[28] Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and its Applications.* Volume II, Wiley, New York.

[29] Furrer, H. J., Schmidli, H. (1994).*Exponential inequalities for ruin probabilities of risk processes perturbed by diffusion.* Insurance : Mathematics and Economics, 15, 23-36.

[30] Garrido, J. and Morales (2006). *On the expected discounted penalty function for the levy risk processes.* 10, 196-216.

[31] Gary K.C Chan, Hailiang Yang (2004). *Sensitivity analysis on ruin probabilities with heavy-tailed claims.*Statistical methodology 2, 59-63.

[32] Gerber, H. U.(1970). *An extension of the renewal equation and its application in the collective theory of risk.* Skandinavisk Aktuarietidskrift, 205-210.

[33] Gerber, H. U.(1979). *An introduction to mathematical risk theory.* Monograph No. 8, S.S. Huebuer foundation, Distributed by R. Irwin, Homewood, IL.

[34] Gerber, H. U., Landry, B. (1998). *On the discounted penalty at ruin in a jump-diffusion and the perpetual put option.* Insurance : Mathematics and Economics, 22, 263-276.

[35] Gerber, H. U., Shiu, E. S. W.(2003a). *Discussion of Yebin Cheng and Qihe Tang's "Moments of the surplus before ruin and the dificit at ruin ".* North American Actuarial Journal, 7, 3, 117-119.

[36] Gerber, H. U., Shiu, E. S. W. (2003b). *The time value of ruin in a Sparre Andersen model.* 7th international congress on insurance mathematics and economics, June 25-27, Lyon, France.

[37] Gerber, H. U. and Elias S. W. Shiu (2005). *The Time Value Of Ruin In A Sparre Andersen Model* North American Actuarial Journal, Volume 9, Number 4.

[38] Grandell, J. (2000).*Simple approximations of ruin probability*, Insurance Math. Econom. 26, 157-173.

[39] Grandell, J., Segerdahl, C. O. (1971). *A comparison of some approximations of ruin probabilities.* Skandinavian Actuarial Journal, 143-158.

[40] Grandell, J. (1999). *Simple approximations of ruin probabilities.* Insurance, Mathematics and Economics 26, 157-173.

[41] Grandell, J. (1991).*Aspects of risk theory*, Springer Verlag. New York.

[42] Issaac K. M. Kwan and Hailiang Yang (2007). *Ruin probability in a threshold insurance risk model*, Belgian actuarial bulletin, Vol. 7, No.1.

[43] Jaeger, J. C., (1949). *An introduction to the Laplace transformation.* Methuen and C.O. LTD. London.

[44] Kaas, R., al. (2008).*Moderne acturial risk theory using R.* Springer, second edition, New York.

[45] Kaas, K. and al. (2001). *Modern Actuarial Risk Theory.* Kluwer Academic Publishers New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow.

[46] Kumer P. D. (2009). *Bounding the ruin probability : a martingale and non-martingale approach.* Stochastic Analysis and Applications, 27, 1223-1230.

[47] Lefebvre, M. (2007). *Applied Stochastic processes*, Springer, New York.

[48] Loisel, S. (2005). *Cours de gestion des risques d'assurances et de théorie de la ruine.* Lyon.

[49] Lundberg, F. (1903). *I. Approximerad framstallning av sannolikhetsfunktionen. II. Aterförsäkring av kollektivrisker.* Almqvist and Wiksell, Uppsala.

[50] Lundberg, F. (1926). *Fäorsäakringsteknisk Risktjäamning.* F. Englunds boktryckeri A.B., Stockholm.

[51] Mikosch, T. (2004). *An Introduction with Stochastic Processes* Non-life insurance mathematics. Springer Verlag, Berlin.

[52] Neuts, M. F. (1981). *Matrix- geometric solutions in stochastic.* John Hopkins Press. Baltimore.

[53] Panjer,H. H., Willmot, G. E. (1992). *Insurance risk models.* Society of actuaries, schaumburg.

[54] Picard, P., Lefèvre, C. (1997)*The probability of ruin in finite time with discrete claim size distribution.* Scand. Acand. Actuar. J. (1), 58-69.

[55] Psarrakos, G. (2009).*Asymptotic results for heavy-tailed distributions using defective renewal equations.* Statistics and Probability Letters 79, 774-779.

[56] Ramsay, C. M. (1992). *A practical algorithm for approximating the probability of ruin.* Transactions of the society of actuaries, 44, 443-161.

[57] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J. (1999). *Stochastic processes for insurance and finance.* John Wiley & Sons, Ltd., Chichester.

[58] Rongming, W. and Haifeng, L. (2002). *On The Ruin Probability Under A Class Of Risk Processes* Astin Bulletin, Vol. 32, No. 1, 81-90.

[59] Schmidli, H. (2004). *On Cramér-Lundberg approximations for ruin probabilities under optimal excess of loss reinsurance.* Working Paper Series No. 171, Centre for Analytical Finance.

[60] Schmidli, H. (1995).*Cramér-Lundberg approximations for ruin probabilities of risk processes perturbed by diffusion.* Insurance : Mathematics and Economics, 16, 135-149.

[61] Seal, H. L. (1969). *Stochastic theory of a risky business.* New York, Wiley.

[62] Segerdahl, C. O. (1955). *When does ruin occur in the collective theory of risk ?*, Skand. Aktuarietidsker. 38 : 22-36.

[63] Sheldon M. Ross (1993). *Introduction to probability models*, 5th ed., Academic Press, Orlando, FL.

[64] Sheldon M. Ross (1996). *Stochastic Processes*, 2nd ed, New York, Wiley.

[65] Shiu, S. N., Yin, C. C. (2003). *The time of ruin, the surplus prior to ruin and deficit at ruin for the classical risk process perturbed by diffusion.* Insurance : Mathematics and Economics, in press.

[66] Stanford, D. N., Stroinski K. J. (1994). *Recursive methods for computing finite-time ruin probabilities for phase-distributed claim sizes* Astin Bulletin, vol. 24, No 2.

[67] Takacs, L. (1962). *A generalization of the ballont problem and its application in the theory of queue.* J. Amer. Statist. Assoc. 57, 327-337.

[68] Tsai, C. C. L.(2001). *On the discounted distribution functions of the surplus process perturbed by diffusion.* Insurance : Mathematics and Economics, 28, 401-419.

[69] Tsai, C. C. L.(2003). *On the expectations of the present values of the time of ruin perturbed by diffusion.* Insurance : Mathematics and Economics, 32, 413-429.

[70] Tsai, C. C. L, Willmot, G.E.(2002a). *A generalized defective renewal equation for the surplus process perturbed by diffusion.* Insurance : Mathematics and Economics, 30, 51-66.

[71] Tsai, C. C. L, Willmot, G.E.(2002b).*On the moments of the surplus process perturbed by diffusion.* Insurance : Mathematics and Economics, 31, 327-350.

[72] Wang, G. (2001). *A decomposition of the ruin probability for the risk process perturbed by diffusion.* Insurance : Mathematics and Economics, 28, 49-59.

[73] Wang, G., Wu, R. (2000). *Some distributions for classical risk processes that is perturbed by diffusion.* Insurance : Mathematics and Economics, 26, 15-24.

[74] Willmot, G. E., Lin, X. S.(1998). *Exact and approximate properties of the distribution of surplus before and after ruin.* Insur. Math. Econom., 23, 91-110.

[75] Yao, D. J. and Wang, R. M. (2008). *Exponential bounds for ruin probability in two moving average risk models with constant interest rate*, Acta mathematica sinica, english series, Vol. 24, No. 2, 319-328.

[76] Yuanjiang, H., Xucheng, L. and Zang, J. (2003). *Some results of ruin probability for the classical risk process*, Journal of applied mathematics and dicision science, 7(3), 133-146.

[77] Zhang L. (2005). *Ruin Probability in Linear Time Series Model.*vol. 10(2), 259-264.

[78] Zheng, C., Wang, G. (2003). *The joint density function of three characteristics on jump-diffusion risk process.* Insurance : Mathematics and Economics, 32, 445-455.