République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Magister

Spécialité : Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle et Optimisation.

Thème

Distance Hérédité et Extensions dans les Graphes Orientés

Présenté par

Mellaz née Aklouche Fariza

Soutenu devant le jury composé de:

Mr AÏDENE Mohamed	Professeur	UMMTO	Président
Mr AÏDER Meziane	Professeur	USTHB	Rapporteur
Mme BOUCHEMAKH Isma	Professeur	USTHB	Examinatrice
Mr OUKACHA Brahim	Maître de conférence (classe A)	UMMTO	Examinateur
Mr SADI Bachir	Maître de conférence (classe A)	UMMTO	Examinateur

Tizi-Ouzou, 08 décembre 2011.

Remerciements

Mes sincères remerciements vont à monsieur **Aïder Meziane**, Professeur à l'USTHB qui m'a permis de mener à bien ce travail et de m'avoir orientée avec rigueur et objectivité.

Je tiens à remercier monsieur **Aïdene Mohamed**, Professeur à l'UMMTO de me faire l'honneur de présider le jury de soutenance de ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent aussi à l'ensemble des examinateurs, madame **Bouchemakh Isma** Professeur à l'USTHB, monsieur **Oukacha Brahim** et monsieur **Sadi Bachir** maîtres de conférences à l'UMMTO d'avoir accepté d'examiner mon travail.

C'est avec beaucoup de tendresse et d'affection que mon salut s'adresse à ma famille Aklouche et ma belle famille Mellaz, qui ont tout fait pour contribuer à ma réussite.

Je tiens à remercier mon cher mari Rachid pour son soutien et ses encouragements qui m'ont permis de voir toujours plus clair.

Je voudrais saluer aussi et exprimer ma sympathie à toutes mes amies qui m'ont soutenue tout au long de ces années d'études.

AKLOUCHE FARIZA épouse MELLAZ

Table des matières

Introduction générale

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes. Sa naissance remonte au célébre problème des ponts de Königsberg étudié par Euler en 1736, la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloration de cartes ; elle utilise la branche des mathématiques appelée combinatoire.

La théorie des graphes s'est développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du vingtième siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseaux de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques,. . . Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs. Les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance qu'y revêt l'aspect algorithmique.

Certaines classes de graphes peuvent être caractérisées en termes métriques. Un graphe muni de sa fonction distance est un espace métrique, la distance dans un graphe est définie comme étant la longueur de la plus courte chaîne reliant deux sommets dans un graphe.

Notre travail de recherche traite principalement de la notion de distance hérédité dans les graphes orientés.

La classe des graphes distance héréditaire a été introduite par Howorka [37]. Dans ces graphes la distance entre toute paire de sommets non adjacents est preservée dans chaque sous-graphe induit connexe . Howorka [37] a donné une première caractérisation de ces graphes en termes de sous graphes interdits. Par suite Bandelt et Mulder [8] ont donné leur caractérisations en termes métriques d'une part, en terme de sous graphes isométriques interdits d'autre part.

La classe des graphes distance héréditaire orientés est celle dans laquelle, pour toute paire de sommets $\{u,v\}$ d'un sous graphe induit $G' = (V',A')$ d'un graphe orienté G, soit v ne peut être atteint à partir de u ou bien la distance est la même que dans G.

Le premier chapitre s'adresse aux lecteurs non familiarisés avec la théorie des graphes. Nous y donnons les définitions et les notions préliminaires.

Le deuxième chapitre est consacré aux graphes distance héréditaire. Nous en donnons les différentes caractérisations et rappelons quelques sous classes constituant une extension de ces graphes.

Dans le troisième chapitre nous proposons une extension de la notion de distance hérédité aux graphes orientés. Nous donnons quelques résultats établis par Laïsch et Shrader [42]. Nous caractérisons la classe des graphes distance héréditaire en termes de sous graphes induits interdits. Nous donnons une caractérisation métrique pour les graphes presque distance héréditaire orientés.

Dans le quatrième chapitre, nous introduisons la classe des graphes distance héréditaire orientés bipartis. Nous en donnons des caractérisations en utilisant les deux notions de stretch et dilatation. Nous leur donnons aussi une autre caractérisation métrique en utilisant la condition des quatre points.

Chapitre 1

Définitions préliminaires sur les graphes

1.1 Introduction

Ce chapitre est destiné aux lecteurs non familiarisés avec la théorie des graphes en général et les aspects métriques dans les graphes en particulier.

La terminologie et les notations utilisées sont celles des ouvrages de reférence Buckley et Harrary [14] et de Berge [9]. Parfois nous nous reférons à celles des articles, de Cicerone et Di Stefano [22], [20] et de Lätsch et Schrader [42].

1.2 Définitions générales

Définition 1.1. Un graphe G est défini par un ensemble fini $V = V(G)$ $V = \{x_1,x_2,...,x_n\}$ appelé ensemble de sommets et un ensemble $E = E(G)$ de m paires de sommets appelées arêtes de G, on note $G = (V,E)$.

Le nombre de sommets n du graphe G est appelé l'ordre de G et le nombre d'arêtes m est appelé taille du graphe G.

Chaque paire de sommets $\{u,v\}$ qui forme une arête est notée $e = \{u,v\}$;

u, v sont alors dits adjacents et e est incidente aux sommets u et v.

Si deux arêtes ont une extrémité commune, elles sont dites arêtes adjacentes et dans le cas contraire elles sont dites disjointes.

Définition 1.2. Toute arête dont les extrémités sont confondues est appelée boucle. Si plusieures arêtes relient la même paire de sommets distincts, elles sont dites arêtes parallèles. Un graphe simple est un graphe sans boucles et sans arêtes parallèles.

Dans la suite, tous les graphes que nous utilisons sont simples.

Définition 1.3. On appelle degré du sommet u d'un graphe G, et on note $d(u)$ ou $d_G(u)$ le nombre d'arêtes incidentes avec ce sommet. Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets.

Définition 1.4. L'ensemble des voisins d'un sommet u est noté $N_G(u)$ ou $N(u)$; il représente le voisinage de u. On parle aussi de voisinage fermé $N_G[u]$ défini par :

$$N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$$

Le cardinal de $N(u)$ représente le degré du sommet u.

Un sommet u qui n'a aucun voisin est dit sommet isolé ainsi $N(u) = \varnothing$ et $d(u) = 0$.

Un sommet u est dit sommet pendant s'il a un unique voisin. Si deux sommets u et v ont les mêmes voisins alors ils sont appelés jumeaux (vrais jumeaux s'ils sont eux-mêmes adjacents et faux jumeaux s'ils ne le sont pas).

Définition 1.5. Un graphe $G = (V,E)$ est dit régulier de degré d lorsque tous ses sommets ont le même degré d. On dit alors qu'il est d-régulier.

Définition 1.6. Le graphe complémentaire de $G = (V,E)$ est noté $\overline{G}$ et possède V comme ensemble de sommets ; deux sommets sont adjacents dans $\overline{G}$ si et seulement s'ils ne le sont pas dans G.

Définition 1.7. Un graphe G est biparti si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous ensembles disjoints V_1 et V_2 tels que toute arête de G joint un sommet de V_1 à un sommet de V_2. Si toutes les arêtes possibles entre V_1 et V_2 sont dans G alors G est le graphe biparti complet $K_{p,q}$ où $p = |V_1|$ et $q = |V_2|$.

Définition 1.8. Soient $G_1 = (V_1,E_1)$ et $G_2 = (V_2,E_2)$ deux graphes et $f : V_1 \rightarrow V_2$ une application :

– f est un homomorphisme de G_1 dans G_2 si $(u,v) \in E_1$ entraîne $(f(u),f(v)) \in E_2$.
– f est un isomorphisme de G_1 dans G_2 si f est bijective et f et f^{-1} sont des homomorphismes.

S'il existe un isomorphisme de G_1 dans G_2, alors G_1 et G_2 sont dits isomorphes et nous notons $G_1 \cong G_2$.

1.3 Sous graphes

Définition 1.9. Un sous graphe H de $G = (V,E)$ est un graphe dont tous les sommets et toutes les arêtes sont dans G.

Si H a le même ensemble de sommets que G, alors le sous graphe H est dit partiel.

Pour tout ensemble $X (X \subseteq V)$ le sous graphe induit (ou engendré) par X noté $G(X)$ ou $\langle X \rangle$ est le sous graphe de G qui contient toutes les arêtes de G reliant des sommets de X.

On note $G - U$ (oú $U \subseteq V$) le sous graphe de G induit par $V - U$.

$$ie : G - U = G(V - U) = \langle V - U \rangle$$

Lorsque : $U = \{u\}$, $G - \{u\}$ est noté $G - u$.

Définition 1.10. Pour un graphe $G = (V,E)$; un ensemble $S \subset V$ est dit stable ou indépendant de G si l'ensemble des arêtes du sous graphe de G induit par S est vide. Un ensemble $K \subset V$ est dit clique si tous ses sommets sont deux à deux adjacents.

Remarque 1.1. Une clique K de G est un sous graphe complet de G.

Exemple 1.1. $\{2,3,4\}$ *est une clique de* G*,* $\{1,4\}$ *est un stable de* G*.*

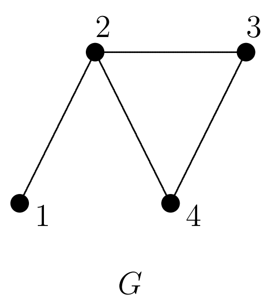


FIG. 1.1

1.4 Chaîne, cycle et connexité

1.4.1 Chaîne

Définition 1.11. Une séquence de sommets deux à deux distincts $(v_1,v_2,.....v_n)$ est une chaîne dans $G = (V,E)$ si $(v_i,v_{i+1}) \in E$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

La chaîne $P = \{v_1,v_2,.....v_n\}$ est notée $\{v_1,v_n\}$-chaîne. Elle est de longueur $n-1$ et d'ordre n. $P' = \{x_r,x_{r+1},.....,x_s\}$ est dite sous chaîne de P tel que $0 \leq r \leq s \leq n$.

1.4.2 Cycle

Un cycle est une chaîne (v_1,v_2,.....v_n) telle que les sommets v_1 et v_n sont liés.

Une corde (resp.raccourci) est une arête qui relie deux sommets non consécutifs d'un cycle (resp.chaîne).

Un cycle C (resp.chaîne P) est dit(e) induit (e) si C (resp.P) ne possède pas de cordes.

Un cycle avec n sommets sans cordes est appelé un trou et noté H_n, $n \geq 4$

Deux cordes d'un cycle sont dites concourantes si elles sont incidentes au même sommet. Dans le cas contraire, elles sont dites disjointes.

Deux cordes disjointes d'un cycle C se croisent, si dans le parcours des sommets du cycle, leurs extrémités sont rencontrées alternativement.

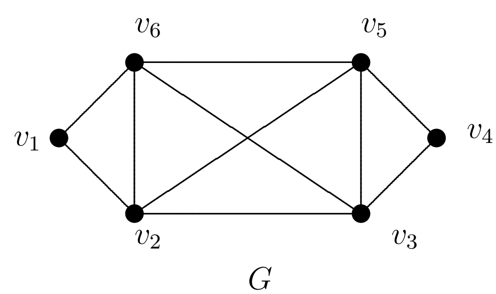


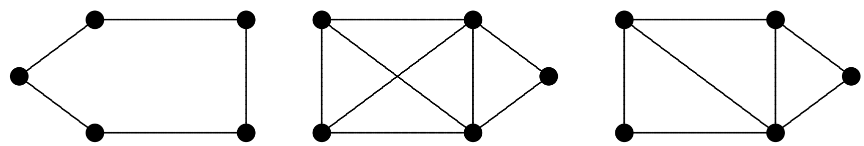
FIG. 1.2

Dans la figure 1.2 on a : $\{v_2,v_5\}$ et $\{v_2,v_6\}$ sont deux cordes concourantes. $\{v_2,v_5\}$ et $\{v_3,v_6\}$ sont deux cordes croisées , elles sont aussi disjointes.

Définition 1.12. La distance de corde d'un cycle C est le nombre minimum de sommets consécutifs, tels que chaque corde de ce cycle est incidente à l'un de ces sommets. On l'a note $cd(C)$.

Le trou H_n étant sans corde, donc $cd(H_n) = 0$.

Exemple 1.2.



$cd(H5) = 0$ $cd(C5) = 2$ $cd(C5) = 1$

Fig. 1.3

Définition 1.13. Une $1C_n$-configuration est soit un cycle induit H_n, soit un cycle C_n dont toutes les cordes sont concourantes.

$$Cd(C_n - configuration) \in \{0,1\}$$

1.5 Connexité

Définition 1.14. Un graphe $G = (V,E)$ est dit connexe, si pour toute paire de sommets $\{u,v\}$ de V il existe une chaîne reliant u et v.

Notons que la relation de connexité ($x \Re y \Longleftrightarrow x \equiv y$ ou $\exists(x,y)$ chaîne de G) est une relation d'équivalence dont les classes constituent une partition de G en sous graphes connexes.

Tout sous graphe connexe maximal de G est appelé composante connexe du graphe G.

Exemple 1.3. *Graphes connexes :*

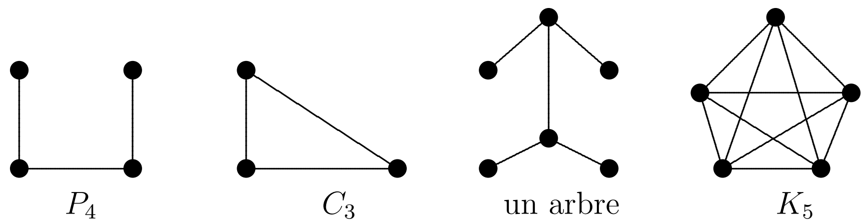


FIG. 1.4

Dans le cas où le nombre de composantes connexes est supérieur à un alors G est dit non connexe.

Exemple 1.4. *Graphe non connexe :*

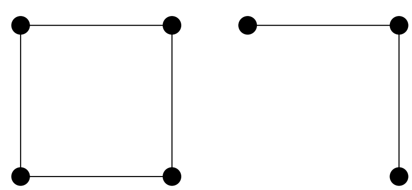


FIG. 1.5

Définition 1.15. Un point d'articulation d'un graphe G est un sommet ν de G dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes.

Un isthme est une arête dont l'élimination produit de nouvelles composantes connexes.

Exemple 1.5. *Dans le graphe G de la figure suivante les sommets c et d sont des points d'articulation et l'arête $\{c,d\}$ est un isthme.*

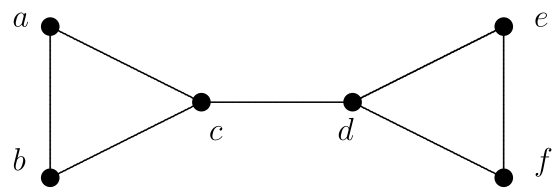


FIG. 1.6

Définition 1.16. Un graphe G est dit k-connexe si la suppression de moins de k sommets quelconques engendre toujours un graphe connexe.

On appelle le nombre minimum de sommets dont la suppression déconnecte le graphe G la connectivité et on la note $K(G)$.

G est dit k-connexe si $K(G) \geq k$, k est un entier.

Un graphe G est dit 2-connexe si et seulement si il est connexe d'ordre $n \geq 3$ et n'admet pas de point d'articulation.

Définition 1.17. Etant donné un graphe $G = (V,E)$. Un bloc de G est un ensemble A de sommets ($A \subseteq V$) qui engendre un sous graphe $G(A)$ connexe sans points d'articulation et maximal pour cette propriété. Le sous graphe $G(A)$ est alors soit 2-connexe (si $|A| > 2$), soit un isthme de G (si $|A| = 2$), soit un point isolé (si $|A| = 1$).

Exemple 1.6. *Le graphe G de la figure suivante a les blocs B_1,B_2,B_3*

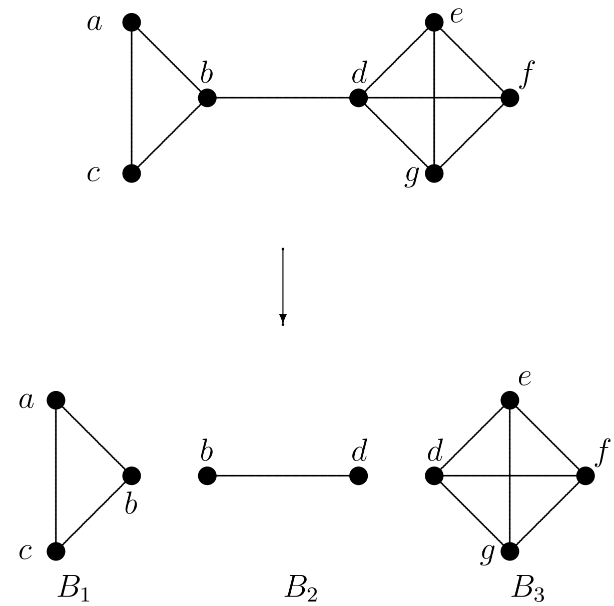


FIG. 1.7

1.6 Distance et intervalle

1.6.1 Distance et décomposition en couches

Définition 1.18. La distance entre deux sommets u et v de $G = (V,E)$ est la longueur d'une plus courte $\{u,v\}$-chaîne. On définit ainsi la fonction distance d_G par :

$$d_G : V \times V \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(u,v) \longmapsto d_G(u,v)$$

L'ensemble des sommets V muni de cette fonction est un espace métrique fini (au sens topologique).

d_G satisfait les trois axiomes de la distance :
$\forall\ u,v,w \in V(G)$.

1. $d_G(u,v) \geq 0$ et si $d_G(u,v) = 0$ alors $u = v$
2. $d_G(u,v) = d_G(v,u)$

3. $d_G(u,v) \leq d_G(u,w) + d_G(w,v)$

Le troisième axiome est connu sous le nom de l'inégalité triangulaire.

Définition 1.19. Un sous graphe H de G est dit isométrique si pour toute paire de sommets $\{x,y\}$ de H on a : $d_G(x,y) = d_H(x,y)$.

Définition 1.20. L'excentricité d'un sommet x dans un graphe $G = (V,E)$ est le maximum de toutes ses distances avec les autres sommets. On la note $e(x)$: $e(x) = \max\limits_{y \in V} d(x,y)$.

Le centre est un sommet u_o d'excentricité minimale. Son excentricité $e(u_o)$ est appelée le rayon du graphe G et est noté $\rho(G)$.

Définition 1.21. Le diamètre du graphe $G = (V,A)$ noté $D(G)$ représente le maximum des excentricités des sommets de G.

$$D(G) = \max_{x,y \in V, x \neq y} d(x,y)$$

Une décomposition en couches (niveaux) des sommets de $G = (V,E)$ relativement au sommet u est une partition des sommets V en $P = e(u)+1$ parties disjointes $N_o(u) = \{u\}, N_1(u), \ldots, N_p(u)$. $N_i(u)$ est appelé le $i^{=eme}$ niveau dans G, $i = 1,2,\cdots,p$ relativement à u.

Exemple 1.7. *La décomposition en couches de H relativement au sommet* 1 *est la suivante :*

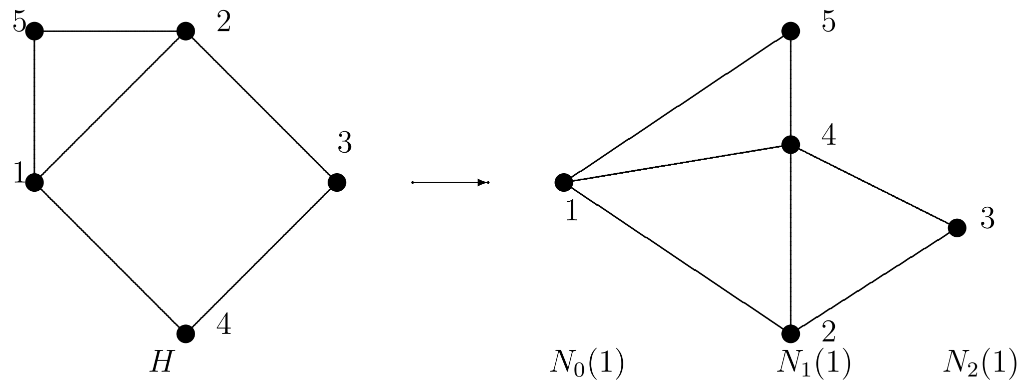


FIG. 1.8

1.6.2 Intervalle

Définition 1.22. Pour deux sommets u et v d'un graphe $G = (V,E)$, l'intervalle $I_G(u,v)(I(u,v)$ s'il n'y a pas de risque de confusion) est l'ensemble des sommets appartenant aux plus courtes $\{u,v\}$-chaînes :

$$I(u,v) = \{w \in V / d(u,w) + d(w,v) = d(u,v)\}$$

La longueur de l'intervalle $I(u,v)$ désigne la distance entre ses bornes u et v.
Soit I_G la fonction intervalle définie par :

$$I_G : V \times V \longrightarrow P(V)$$

$$(u,v) \longmapsto I_G(u,v)$$

.

Proposition 1.1. [10] *Soit G un graphe connexe de fonction intervalle I. Alors pour toute paire de sommets $\{u,v\}$ de G on a :*

1. $u,v \in I(u,v)$.
2. $I(u,v) = I(v,u)$.

3. *Si* $x \in I(u,v)$ *alors* $I(u,x) \subset I(u,v)$.
4. *Si* $x \in I(u,v)$ *alors* $I(u,x) \cap I(x,v) = \{x\}$.
5. *Si* $x \in I(u,v)$ *et* $y \in I(u,x)$ *alors* $x \in I(y,v)$.

1.6.3 Opérations sur les graphes

Pour toute paire de graphes $G_1 = (V_1,E_1)$ et $G_2 = (V_2,E_2)$, le graphe joint est le graphe $G_1 + G_2$ où $V_1 \cup V_2$ est l'ensemble des sommets et $E_1 \cup E_2 \cup E'$ est l'ensemble des arêtes avec E' l'ensemble de toutes les arêtes joignant les éléments de V_1 et les éléments de V_2.
La figure suivante est le graphe joint de K_2 etP_3

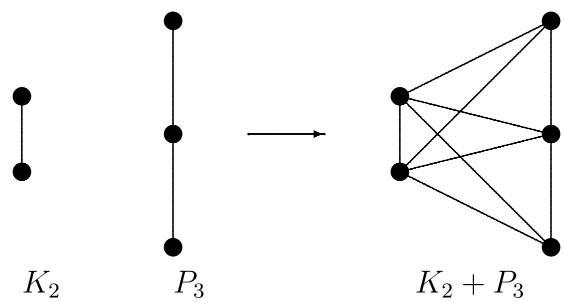


FIG. 1.9

Définition 1.23. Soit $G = (V,E)$ un graphe et soit u un sommet quelconque de G. On définit les opérations α, β et γ comme suit :
$\alpha(G,\nu)$ est le graphe résultant en ajoutant un sommet pendant ν' à ν
$\beta(G,\nu)$ est le graphe obtenu en ajoutant un vrai jumeau ν' à ν
$\gamma(G,\nu)$ est le graphe obtenu en ajoutant un faux jumeau ν' à ν.

Les opérations β et γ, sont dites des duplications du sommet ν.

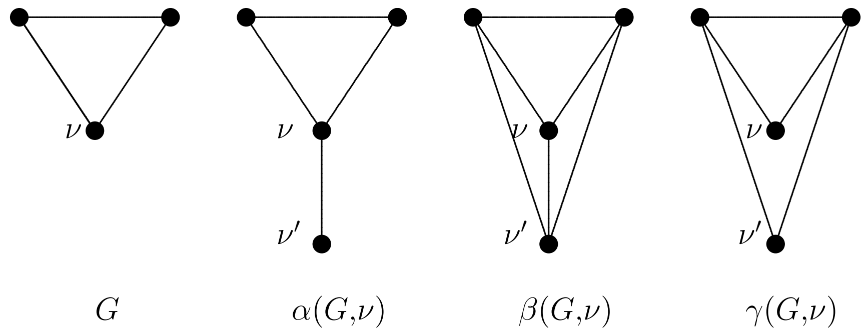


Fig. 1.10

Définition 1.24. Soit $G_1 = (V_1 \cup m_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2 \cup m_2, E_2)$
La split composition des graphes G_1 et G_2 est le graphe $G = G_1 \star G_2 = (V, E)$
avec : $V = V_1 \cup V_2$
$E = E'_1 \cup E'_2 \cup \{(x,y)/x \in N_{G_1}(m_1), y \in N_{G_2}(m_2)\}$
$E_i = \{(x,y) \in E_i/x,y \in V_i\}, i = 1,2$
m_1 et m_2 sont appelés les sommets marqués de la split composition.

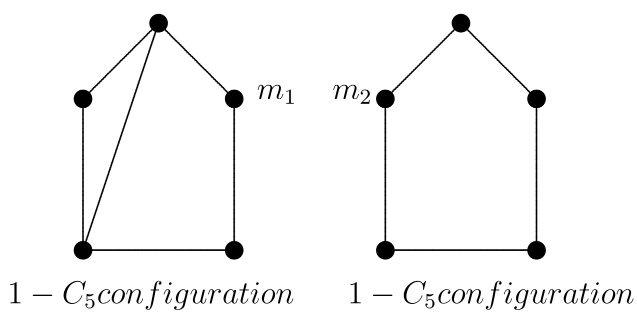


Fig. 1.11

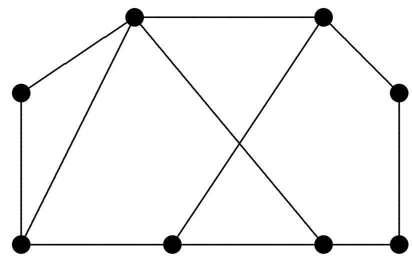


FIG. 1.12 – *La split composition des deux C_5 configurations précédentes*

1.7 Graphes orientés

Définition 1.25. Un graphe orienté est un graphe dont les arêtes sont orientées, chaque arête relie deux sommets dans un certain ordre. Le premier est appelé origine de l'arête et le second extrémité.

Dans le cas où l'arête e est orientée on l'appelle **arc** $a = (u,v)$ où le point u est l'extrémité initiale et le point v est l'extrémité terminale.

Un arc de G de la forme (u,u) est appelé une boucle.

Un chemin dans un graphe orienté est une suite de sommets reliés les uns aux autres par des arcs. **La longueur** du chemin est le nombre d'arcs utilisés, ou le nombre de sommets moins un. Un chemin **simple** ne peut pas visiter le même sommet plus d'une fois. Un chemin **fermé** a pour dernier sommet le premier.

Dans un graphe orienté, un **circuit** est un chemin fermé simple.

Définition 1.26. Un graphe orienté est simple s'il n'a pas de boucles et entre deux sommets il n'y a pas plus d'un arc pour les relier.

Définition 1.27. Etant donné $a = uu'$ un arc (qui n'est pas une boucle) d'un graphe orienté G, a est incident à u vers l'extérieur et incident à u' vers l'intérieur.

Le nombre d'arcs incidents à u vers l'extérieur est noté $d_G^+(u)$ (ou $d^+(u)$) et s'appelle le demi-degré extérieur de u. Par analogie, le demi-degré intérieur de u, noté $d_G^-(u)$ (ou $d^-(u)$) est le nombre d'arcs incidents à u vers l'intérieur.

Le degré du sommet u est noté $d_G(u)$ (ou $d(u)$) tel que :

$$d_G(u) = d_G^+(u) + d_G^-(u).$$

La duplication de sommets peut être effectuée aussi dans le cas d'un graphe orienté.

Définition 1.28. Soit $G = (V,A)$ un graphe orienté et u un sommet de G, le fait de :

1. Ajouter un nouvau sommet v et un des arcs (u,v) ou (v,u), v est appelé sommet pendant de u.
2. Ajouter un nouveau sommet v et un des ensembles d'arcs :

   – $\{(u,v) \cup \{(w,v),/w \in N^-(u)\} \sqcup$ un sous ensemble de$\{(v,w)/w \in N^+(u)\}$
   – $\{(v,u) \cup \{(v,w),/w \in N^+(u)\} \sqcup$ un sous ensemble de $\{(w,v)/w \in N^-(u)\}$

   Le sommet v est appelé vrai jumeau de u
3. Ajouter un nouveau sommet v et les deux ensembles d'arcs

   – $\{(w,v)/w \in N^-(u)\}$
   – $\{(v,w)/w \in N^+(u)\}$

   Le sommet v est appelé faux jumeau de u.

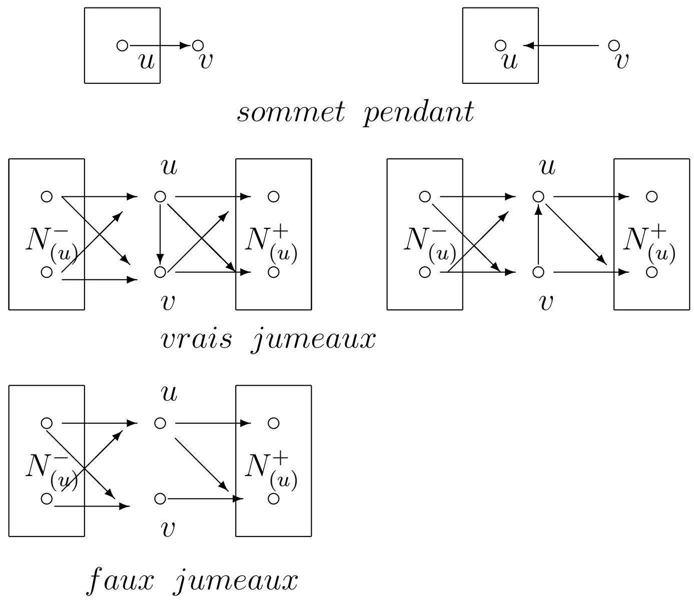


Fig. 1.13

1.8 Complexité Algorithmique

La théorie de la complexité étudie la difficulté de résolution de problèmes. La complexité d'un algorithme consiste à calculer le nombre d'opérations élémentaires nécessaires à son exécution ce qui permet de mesurer les resources critiques (temps processeur et espace mémoire).

Définition 1.29. On appelle **calcul** une **séquence** d'opérations élémentaires qui est finie, **déterministe** (c'est a dire : chaque étape est entièrement déterminée par les précédentes), **réalisable** (c'est à dire : chaque opération est réalisée en un temps fini) et **complête** (c'est à dire : les informations requises pour chaque étape proviennent uniquement des étapes précédentes).

Définition 1.30. On appelle Algorithme tout calcul qui s'arrête en un temps fini et qui fournit un résultat répondant à un problème donné.

Définition 1.31. Un algorithme est dit polynomial si son temps d'exécution est borné supérieurement par un polynôme en la taille de la donnée, càd, $O(n^k)$ où n est la taille de données et k une constante réelle.

Les problèmes qu'on peut résoudre par un algorithme polynomial sont dits traitables ou polynômiaux. Edmonds [1965] a identifié les algorithmes polynomiaux par le terme "bons algorithmes".

Définition 1.32. Un problème de reconnaissance (P_R) consiste à chercher dans un ensemble fini S s'il existe un élément s vérifiant une certaine propriété P. Il peut être formulé par un énoncé et une question dont la réponse ne peut être que 'oui' ou 'non'.

Définition 1.33. La classe P est l'ensemble des problèmes de reconnaissance qu'on peut résoudre par un algorithme déterministe en temps polynomial.

Définition 1.34. Un algorithme non détérministe est un algorithme contenant une instance "choix" qui, opérant sur un ensemble fini choisit un élément, sans spécifier comment ce choix est effectué.

Définition 1.35. La classe NP est l'ensemble des problèmes de décision qu'on peut résoudre par un algorithme non-déterministe en temps polynomial.

Comme tout problème de la classe P possède un algorithme polynomial pour sa résolution, on en déduit $P \subset NP$.

Définition 1.36. Un problème de reconnaissance (P_1) se réduit polynomialement à un autre (P_2), s'il existe un algorithme pour (P_1) qui fait appel à un algorithme de résolution de (P_2) et l'algorithme de résolution de (P_1) est polynomial si la résolution de (P_2) est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Définition 1.37. Les problèmes difficiles de la classe NP sont dits NP-complets.

Vu que l'optimisation combinatoire consiste à trouver le meilleur élément parmi un ensemble fini de choix, le problème du Stable, le problème de la Clique, le problème de Recouvrement (couverture, transversal), le problème du cycle Hamiltonien et le problème du Voyageur de commerce sont connus pour être des problèmes NP-complets.

Définition 1.38. $Co - NP$-complet est la classe des problèmes dont le complément est dans la classe NP-complet.

Chapitre 2

Graphes distance héréditaire

2.1 Introduction

La classe des graphes distance héréditaire a été introduite par Howorka [37]. Elle est constituée des graphes dont la distance entre toute paire de sommets est préservée dans chaque sous graphe induit connexe.

Nous exposons les différentes caractérisations et les différents résultats relatifs à cette classe. Elle est carctérisée particulièrement en termes de sous graphes induits interdits.

2.2 Caractérisations des graphes distance héréditaire

Définition 2.1. Un graphe connexe $G = (V,E)$ est dit distance héréditaire si pour tout sous graphe induit connexe H de G, $d_H(u,v) = d_G(u,v)$ pour toute paire de sommets $\{u,v\}$ de H. Autrement dit tous les sous graphes connexes induits de G préservent la fonction distance. On dit que $G \in dh$.

Dans un graphe "dh" toute chaîne induite est isométrique. Le théorème suivant nous donne les caractérisations données par Howorka [37].

Théorème 2.1. [37] *Soit G un graphe simple et connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *G est distance héréditaire.*
2. *Chaque chaîne induite est isométrique.*
3. *Chaque cycle de longueur au moins 5 possède au moins deux cordes et chaque cycle C_5 a une paire de cordes qui se croisent.*
4. *Chaque cycle de longueur au moins 5 a une paire de cordes qui se croisent.*

En se basant sur la notion de corde dans les graphes Aïder [1] a donné une autre caractérisation de ces graphes.

Théorème 2.2. [1] *Pour un graphe simple et connexe G, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *G est distance héréditaire.*
2. *Tout cycle de longueur au moins 5 de G possède deux cordes croisées.*
3. *Tout cycle de longueur au moins 5 de G possède deux cordes disjointes.*
4. *Tout cycle de longueur au moins 5 de G possède deux cordes non concourantes.*

2.2.1 Caractérisation métrique des graphes distance héréditaire

Bandelt et Mulder [6] ont montré que les graphes "dh" sont les graphes qui vérifient la condition des quatre points.

En effet si pour tout quadruplet $\{u,v,w,x\}$ de sommets quelconques de G au moins deux des sommes de distances $d(u,v)+d(w,x)$, $d(u,w)+d(v,x)$ et $d(u,x)+d(v,w)$ sont égales.

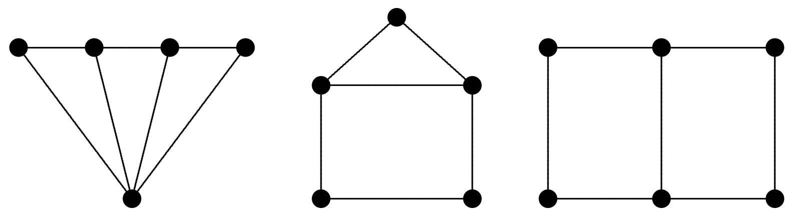
Le théorème suivant donne quelques caractérisations métriques en termes de sous graphes induits interdits de ces graphes [6,27,35].

Théorème 2.3. [5] *Soit G un graphe simple et connexe muni de sa fonction distance "d" et de sa fonction intervalle "I". Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. *G est distance héréditaire.*
2. *Pour toute paire $\{u,v\}$ de sommets de G avec $d_G(u,v) = 2$, il n'existe pas de $\{u,v\}$-chaîne induite de longueur supérieure à 2.*
3. *Les graphes de la figure 2.1 et les cycles induits H_n, $n \geq 5$ ne sont pas des sous graphes induits de G.*
4. *Les graphes de la figure 2.1 et les cycles induits H_n, $n \geq 5$ ne sont pas des sous graphes isométriques de G.*
5. *Les graphes de la figure 2.1 ne sont pas des sous graphes induits (isométriques) de G et $I(u,v) \cap I(v,w) = \{v\}$ implique $d(u,w) \geq d(u,v) + d(v,w) - 1$.*
6. *Le graphe de la figure 2.1(a) n'est pas un sous graphe induit de G et pour tout triplet $\{u,v,w\}$ de sommets du graphe G, au moins deux des inclusions suivantes sont vérifiées :*

$$I(u,v) \subseteq I(u,w) \cup I(v,w)$$
$$I(u,w) \subseteq I(u,v) \cup I(v,w)$$
$$I(v,w) \subseteq I(u,v) \cup I(u,w)$$

7. *Pour tout quadruplet $\{u,v,w,x\}$ de sommets quelconques, au moins deux des sommes de distances : $d(u,v) + d(w,x)$, $d(u,w) + d(v,x)$ et $d(u,x) + d(v,w)$ sont égales.*
8. *G satisfait la condition 7. et si dans 7. les plus petites des distances sont égales. La plus grande somme les dépasse d'au plus deux unités.*



(a) *La perle* (b) *La maison* (c)*Le domino*

FIG. 2.1

2.3 Sous classes des graphes distance héréditaire

Nous présentons quelques classes de graphes qui sont contenues dans la classe des graphes distance héréditaire.

Définition 2.2. Un **cographe** est un graphe dans lequel la longueur de toutes les chaînes induites est au plus deux.

Summer [49] les appela "Graphs Dacey héréditaire", ils sont appelés aussi "Completely reductibles graphs"[24] et les "2-parity graphs" [15].

Définition 2.3. Etant donné un graphe G simple et connexe.

- G est un graphe **bloc** si tout bloc (composante 2-connexe) de G induit un graphe complet.
- Le graphe G est **ptolémaïque** si pour tout quadruple de sommets u,v,w et x de G on a :

$$d(u,v).d(w,x) \leq d(u,w).d(v,x) + d(u,x).d(v,w)$$

.

Ces deux classes de graphes ont été caractérisées par Bandelt et Mulder [6].

Théorème 2.4. [6] *Soit G un graphe simple et connexe.*

1. *G est un graphe bloc si et seulement si tout cycle de longueur 4 de G contient deux cordes.*

2. *G est un graphe ptolémaïque si et seulement si G ne contient ni C_n, ($n \geq 4$) ni C_5^{**}(le cycle de longueur 5 avec deux cordes concourantes) comme sous graphe induit.*

2.4 Extensions des graphes distance héréditaire

2.4.1 Graphes de parité

Définition 2.4. Un graphe G est de **parité**, si les chaînes induites reliant chaque paire de ses sommets sont toutes de même parité.

La classe des graphes de parité, a été caractérisée par Burlet et Uhry [15] en termes de sous graphes induits interdits.

Théorème 2.5. [15] *Un graphe G est de parité si et seulement si tout cycle impair de longueur au moins 5 de G possède deux cordes croisées.*

Bandelt et Mulder [8] ont donné une caractérisation métrique pour cette classe de graphe.

Théorème 2.6. [8] *Pour tout graphe G connexe, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *G est un graphe de parité.*
2. *Pour tout quadruple de sommets $\{u,v,w,x\}$ de G soit les trois sommes $d(u,v)+d(w,x)$, $d(u,w)+d(v,x)$, $d(u,x)+d(v,w)$ sont de même parité, soit deux d'entre elles sont égales.*
3. *Si $d(u,v)+d(w,x) \leq d(u,w)+d(v,x) \leq d(u,x)+d(v,w)$ et la somme $d(u,w)+d(v,x)$ est impaire, alors $d(u,v)+d(w,x)$ ou $d(u,x)+d(v,w)$ est impaire.*
4. *G ne contient ni $C_{2k+1}(k \geq 2)$ ni C_5^{**} comme sous graphe isométrique induit.*

5. Pour toute arête (w,x) et toute paire de sommets $\{u,v\}$ telles que :

$$d(u,w) = d(u,x) = d(u,v) + 1$$

v est adjacent à w si et seulement si v est adjacent à x.

2.4.2 Graphes presque distance héréditaire

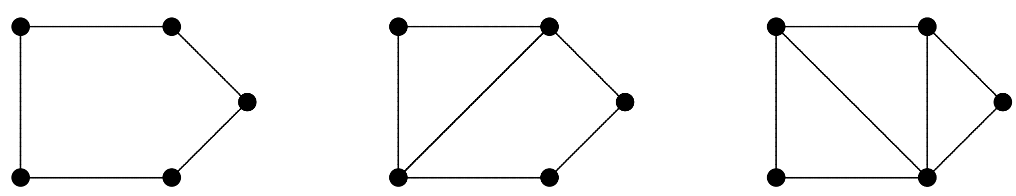
Aïder [2] a introduit une autre classe de graphes appelée "classe des grahes presque distance héréditaire", qu'il a caractérisée en termes de sous graphes induits interdits.

Définition 2.5. Soit G un graphe connexe. G est presque distance héréditaire (noté pdh) si et seulement si pour tout sous-graphe connexe induit H de G et toute paire de sommets $\{u,v\}$ de H :

$$d_H(u,v) \leq d_G(u,v) + 1$$

Définition 2.6. Une C_q-configuration est un cycle de longueur q, n'ayant pas de corde ou dont toutes les cordes sont concourantes.

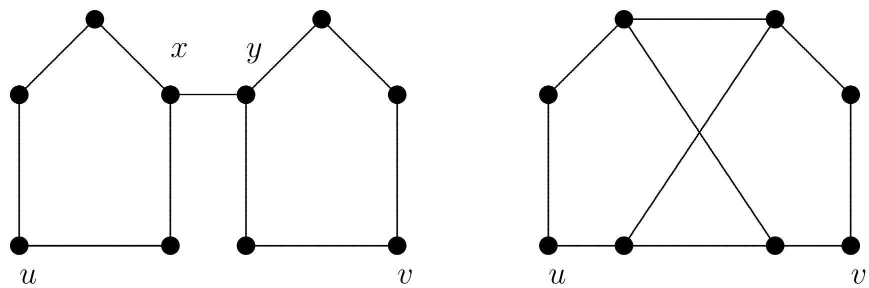
On désigne par $1C_5$-configuration chacun des graphes de la figure suivante qui constituent les plus petits graphes pdh qui ne sont pas dh.



C_5 C_5^* C_5^{**}

Fig. 2.2

Une $2C_5$-configuration de type (a) est le graphe obtenu par composition de deux C_5-configurations. En reliant deux sommets de degré local 2 par une chaîne et en effectuant une split composition on obtient une $2C_5$-configuration de type (b).



(a) (b)

Fig. 2.3

Théorème 2.7. [2] *Un graphe connexe $G = (V,E)$ est presque distance héréditaire si et seulement si G ne contient ni de $2C_5$-configuration, ni de C_n-configuration $(n \geq 6)$ comme sous graphe induit.*

Proposition 2.1. [2] *Soit G un graphe presque distance héréditaire avec au moins deux sommets. Alors G contient :*
a-Soit deux sommets pendants.
b-Soit une paire de jumeaux.
c-Soit une C_5-configuration induite.

2.4.3 Graphes $(k,+)$ distance héréditaire

La classe des graphes $(k,+)$ distance héréditaire est une généralisation du concept de presque distance hérédité. Elle a été introduite par Cicerone et Di Stefano [22].

Définition 2.7. Soit k un entier positif. Un graphe connexe $G = (V,E)$ est dit presque distance héréditaire d'ordre k (on note $G \in DH(k,+)$), si pour tout sous-graphe connexe H de G et toute paire $\{u,v\}$ de sommets de H :

$$d_H(u,v) \leq d_G(u,v) + k$$

Les graphes $DH(k,+)$ ont été caractérisés par les configurations interdites uniquement pour des valeurs particulières de k, $k = 0$ (les graphes dh [6]), $k = 1$(les graphes pdh)[2] et $k = 2$ (les graphes $DH(2,+)$)[10][48].
Une caractérisation plus générale a été obtenue par la suite pour tout entier positif k [43].

Théorème 2.8. [43] *Un graphe G est $k-dh$ $(k \geq 2)$ si et seulement si G ne contient aucune des configurations suivantes comme sous graphe induit :*

1. *Les $1C_n$-configurations où $n \geq 4 + k$.*
2. *Les k-configurations strictes minimales.*
3. *Les k'-configurations strictes minimales où $k' > k$ et $k' = k_1 + k_2$, $1 < k_i < k$, $i = 1,2$*

2.4.4 Graphes à distance induite bornée

Définition 2.8. Soit α, $(\alpha \geq 1)$ un nombre réel. Un graphe G est dit à distance induite bornée d'ordre α (on note $G \in Bid(\alpha)$), si chaque sous-graphe induit connexe H de G vérifie :

$$d_H(u,v) \leq \alpha . d_G(u,v)$$

pour toute paire de sommets $\{u,v\}$ de H

Cette classe qui est une généralisation des graphes distance héréditaire, a été introduite et caractérisée par Cicerone et Di Stefano [20]

2.4.5 Graphes (s,d) distance héréditaire

Définition 2.9. Soient $s \geq 1$ un nombre rationnel et $d \geq 0$ un nombre entier. Un graphe $G = (V,E)$ est dit (s,d)-distance héréditaire si pour tout sous graphe connexe H de G et pour toute paire de sommets $\{u,v\}$ de H.

$$d_H(u,v) \leq s . d_G(u,v) + d.$$

Un tel graphe est noté (s,d)dh.

Cette classe de graphes a été introduite par Cicerone et Di Stefano [22].

Chapitre 3

Graphes distance héréditaire orientés

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous interéssons à l'adaptation du concept de distance hérédité aux graphes orientés.

Nous présentons la classe des graphes distance héréditaire orientés. De ce fait nous éxposons les différents résultats établis par Lätsch et Shrader [42]. Ensuite nous présentons certaines classes qui constitues une extension de ces graphes, en apportant différents résultats sur leurs caractérisations.

3.2 Notion de distance hérédité dans les graphes orientés

Définition 3.1. Soit $G = (V,A)$ un graphe orienté, les sommets $(v_1,v_2,\ldots,v_m)$ de V forme un chemin induit de G si les sommets sont deux à deux distincts et les arcs $(v_i,v_{i+1}) \in A$ pour tout $i \in \{1,2,\ldots,m-1\}$ tel que :

$(v_i,v_j) \notin A$ pour tout $i < j-1$.

Pour un chemin induit $P(v_1,v_m) = (v_1,v_2,\ldots,v_m)$ on a : $|P(v_1,v_m)| = m-1$ si ses arcs sont de type (v_i,v_{i+1}).

Un chemin $P(v_1,v_m)$ est dit **géodésique** si :

$$d_G(v_1,v_m) = |P(v_1,v_m)|$$

.

Définition 3.2. Un graphe orienté $G = (V,A)$ est dit distance héréditaire si pour tous les sommets u, v d'un sous graphe induit $G' = (V',A')$ de G, soit v ne peut être atteint à partir de u ou bien la distance est la même que dans G.

$$i.e : d_{G'}(u,v) = d_G(u,v)$$

Lemme 3.1. [42] *Un graphe orienté G est distance héréditaire si et seulement si chaque chemin induit est géodésique.*

Bandelt et Mulder [6] ont montré que les graphes distance héréditaire peuvent être décrits en termes de cographes. On fait une extension de cette caractérisation aux graphes orientés.
Pour cela ; soit $u \in V$ un sommet et $t = \max d_G(u,v)$ avec :
$v \in V(G)$

Définition 3.3. On appelle niveau de distance L_i de G par rapport à un sommet u, l'ensemble des sommets x de G tels que $d(u,x) = i$.

Définition 3.4. Une suspension h_u au sommet u d'un graphe orienté $G = (V,A)$ est une partition $\{L_0(u),L_1(u),\ldots,L_t(u),L_\infty(u)\}$ des sommets de G, avec $L_i(u) = \{v \in V \ \setminus \ d_G(u,v) = i\}$, $0 \leq i \leq t$; $L_\infty(u) = V \setminus \{\bigcup_{i=1}^{t} L_i(u)\}$.
L'ensemble $L_\infty(u)$ contient les sommets $v \in V$ pour lesquels il n'existe pas de chemins à partir de u.

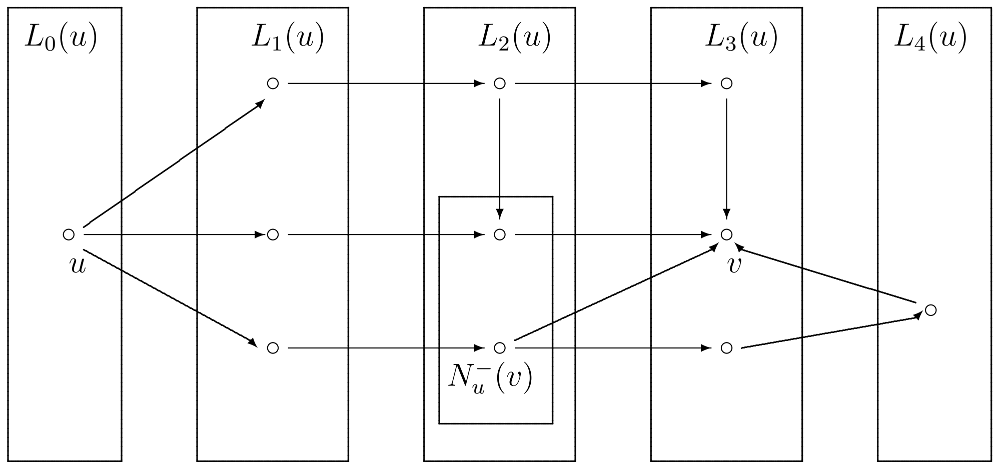


FIG. 3.1 – *Une suspension* h_u *au sommet u avec* $N_u^-(v) = N^-(v) \cap L_2(u)$

Théorème 3.1. [42] *Un graphe orienté* $G = (V,A)$ *est distance héréditaire si et seulement si pour tous les sommets* $u \in V$ *avec la suspension* $h_u = \{L_0(u),L_1(u),\dots,L_t(u),L_\infty(u)\}$ *et chaque paire de sommets* $x,y \in L_i(u)$, $1 \leq i \leq t$ *avec un chemin orienté de x à y dans* $G \setminus L_{i-1}(u)$ *on a :*

$$N^-(x) \cap L_{i-1}(u) \subseteq N^-(y) \cap L_{i-1}(u)$$

Théorème 3.2. [42] *Tous les graphes orientés qui peuvent être construits à partir de* K_1 *par une séquence d'extensions avec des sommets pendants, des vrais jumeaux ou des faux jumeaux sont distance héréditaire.*

Contrairement au cas non orienté, les graphes distance héréditaire orientés ne sont pas tous constructibles par une séquence d'extensions par un sommet telle que décrite dans le théorème précédent.

Par exemple un circuit $C_n = (c_1,c_2,\dots,c_n)$ est un graphe distance héréditaire orienté mais il ne peut être construit comme ci-dessus.

Lemme 3.2. [42] *Soit G un graphe fini orienté avec au moins deux sommets ; G est distance héréditaire orienté si et seulement si G est obtenu à partir de* K_2*, par une séquence d'opérations : ajout de sommets pendants et duplication de sommets.*

Le corollaire suivant nous donne l'une des conséquences de cette composition (décomposition).

Corollaire 3.1. [42] *Tout graphe distance héréditaire orienté ayant au moins quatre sommets possède soit deux paires disjointes de jumeaux, soit une paire de jumeaux et un sommet pendant, ou bien deux sommets pendants.*

3.2.1 Propriétés des graphes distance héréditaire orientés

Etant donné que les graphes distance héréditaire orientés possèdent la propriété de préserver la distance dans les sous graphes induits orientés, on peut les caractériser par des sous graphes induits interdits.

Proposition 3.1. *Les plus petits graphes orientés qui ne sont pas distance héréditaire sont désignés par les graphes de la figure suivante :*

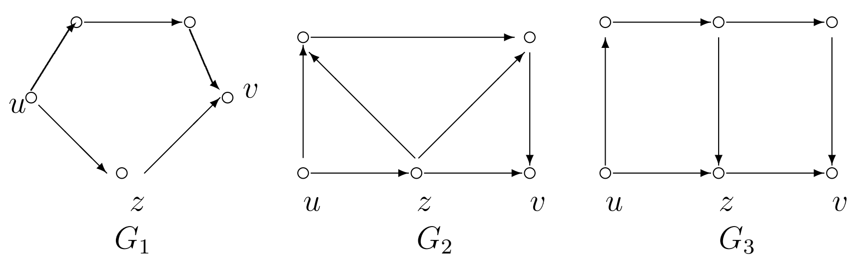


FIG. 3.2

Les graphes G_1 et G_2 sont appelés C_{o5}-configuration.

Proposition 3.2. *Le graphe de la figure suivante représente une configuration interdite des graphes distance héréditaire orientés. On la note : C_{oq}-configuration avec $q \geq 5$.*

les cordes incidentes au sommet z représentent des arcs orientés dans les deux sens.

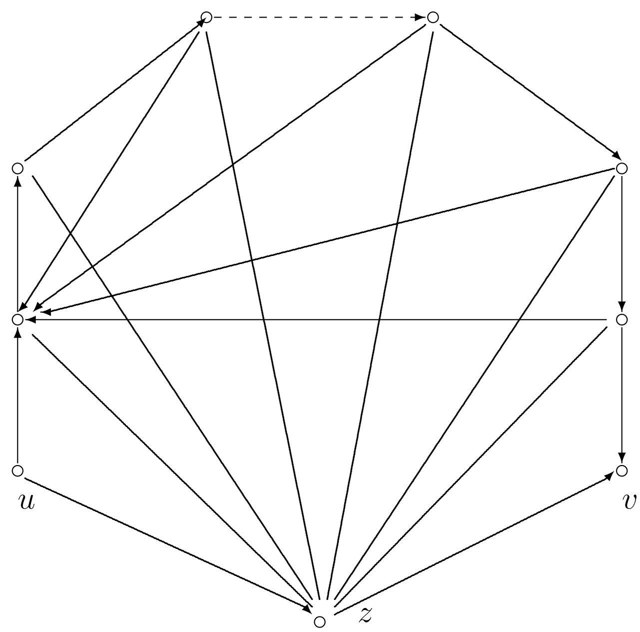


FIG. 3.3

Preuve : – Etant donné que les graphes distance héréditaire sont sans circuit d'ou les arcs internes induisant un cycle orientés sont interdits.

– Du fait que v n'est pas incident à u nous avons $d_G(u,v) = 2$.

Raisonnons par induction sur la longueur de la plus grande distance induisant u à v ; $D_G(u,v)$.
$D_G(u,v) \geq 3$

- Pour $D_G(u,v) = 3$ on a une C_{05}-configuration
- Pour $D_G(u,v) = q - 2$; $q \geq 6$, supposons que la C_{0q}-configuration est interdite .
- Pour $D_G(u,v) = q-1, C_{0q+1}$-configuration contient toujours un sous graphe induit dont $D_G(u,v) = q - 2$ ainsi elle représente aussi une configuration interdite.

$\square$

Remarque 3.1. [42] Les graphes distance héréditaire orientés contiennent les graphes transitivement orientés. ($G = (V,A)$ est transitivement orienté si pour tous les sommets u, v et w de V on a : $(u,v) \in A$ et $(v,w) \in A$ implique $(u,w) \in A$).

3.3 Graphes $(q,*)$ distance héréditaire orientés

Dans cette section on considère les graphes orientés avec la propriété que la distance dans un sous graphe induit se multiplie avec au plus le facteur q.

Définition 3.5. Soit $q \geq 1$ un nombre rationnel. Un graphe $G = (V,A)$ appartient à la classe $DH(q,*)$ si pour tous les sous graphes induits $G' = (V',A')$ de G on a :

$$d_{G'}(u,v) \leq q.d_G(u,v), \forall u,v \in V(G')$$

avec : $d_{G'}(u,v) < \infty$.

G est dit à distance induite bornée d'ordre q et on note $G \in Bid(q)$.

Pour la caractérisation des graphes $(q,*)$ distance héréditaire orientés on a besoin de la notion de stretch d'un graphe orienté G. On note $D_G(u,v)$ la longueur du plus long chemin induit orienté de u à v dans un graphe orienté G.

Le stretch de la paire de sommets $\{u,v\}$ de G est défini par :

$$S_G(u,v) = \frac{D_G(u,v)}{d_G(u,v)}$$

avec : $d_G(u,v) < \infty$.

Pour les sommets u, v avec $d_G(u,v) = \infty$, on définit $S_G(u,v) = 1$

Pour u=v on pose : $d_G(u,v) = 1$.
Le stretch $s(G)$ du graphe orienté G est le maximum sur toutes paires de sommets tel que :

$s(G) = \max_{u,v \in V(G)} s_G(u,v)$.

On note $S(G)$ l'ensemble de toutes les paires de sommets $\{u,v\}$ d'un graphe orienté G pour lesquelles $s_G(u,v) = s(G)$.

Proposition 3.3. [42]

- *Si (u,v) est une arête du graphe orienté G, alors le plus court chemin induit orienté de u à v est l'arête (u,v) et ainsi $s_G(u,v) = 1$.*
- *$s(G) = 1$ pour les graphes orientés transitifs.*
- *$DH(q_1,*) \subseteq DH(q_2,*)$ pour $q_1 \leq q_2$.*

Proposition 3.4. *Soit $G = (V,A)$un graphe orienté.*

- *Si $s(G) = 1$ alors $S(G)$ contient toutes les paires de sommets reliés dans G*
- *Si $s(G) > 1$ alors $d_G(x,y) \geq 2$ pour toute paire $(x,y) \in s(G)$*
- *Pour $n \geq 4$, $s(C_{0n}) = \frac{n-2}{2}$, $S(C_{0n})$ contient la paire de sommets $\{u,v\}$ telle que $d_G(u,v) = 2$, $D_G(u,v) = n-2$.*

Lemme 3.3. [42] *Soit G un graphe orienté, alors :*

$$s(G) = \min\{t; G \in DH(t,*)\}.$$

***Preuve**:* Soit G' un sous graphe induit de G et u,v deux sommets de G' avec : $d_{G'}(u,v) < \infty$. Alors on a :

$$s(G) \geq \frac{D_G(u,v)}{d_G(u,v)} \geq \frac{d_{G'}(u,v)}{d_G(u,v)}$$

et donc :

$d_{G'}(u,v) \leq s(G).d_G(u,v)$. Ainsi $G \in DH(s(G),*)$.

Supposons qu'il existe un nombre rationnel $t < s(G)$ avec : $G \in DH(t,*)$. Soit u, v une paire de sommets de G avec $(u,v) \in S(G)$ .Soit P un plus long (u,v)-chemin induit . Alors $d_p(u,v) = D_G(u,v)$ et $\frac{D_G(u,v)}{d_G(u,v)} = s(G)$ avec $d_p(u,v) = D_G(u,v) > t.d_G(u,v)$, on conclut que $G \notin DH(t,*)$. Ce qui contredit notre hypothése.

□

Une conséquence directe du lemme 3.3 est obtenue dans le théorème suivant :

Théorème 3.3. [42] *Soit G un graphe orienté, alors $G \in DH(q,*)$ si et seulement si $s(G) \leq q$.*

La classe $DH(q,*)$ est construite à partir de sous graphes induits.

Lemme 3.4. [42] *Soit $G \in DH(q,*)$ et G' un sous graphe induit de G, alors $G' \in DH(q,*)$*

Preuve *:* Soit $G \in DH(q,*)$ et G' un sous graphe induit de G. Alors $d_{G'}(u,v) \geq d_G(u,v)$ et $D_{G'}(u,v) \leq D_G(u,v)$ pour $d_{G'}(u,v) < \infty$ avec $D_{G'}(u,v) \leq D_G(u,v) \leq q.d_G(u,v) \leq q.d_{G'}(u,v)$.

On conclut que $G' \in DH(q,*)$. □

Lemme 3.5. [42] *Soit G un graphe orienté et $(u,v) \in S(G)$. Soit $P_G(u,v)$ un (u,v)-chemin dans G avec $|P_G(u,v)| = D_G(u,v)$ et $p_G(u,v)$ un plus court chemin dans G de u à v .S'il existe un sommet w tel que $w \in V(P_G(u,v)) \bigcap V(p_G(u,v)) \setminus \{u,v\}$, alors $(u,w) \in S(G)$ ou $(w,v) \in S(G)$.*

3.4 Graphes $(k,+)$distance héréditaire orientés

Cicerone et Distefano [22] ont obtenu des caractérisations des graphes $(k,+)$ distance héréditaire ; certaines peuvent être adaptées aux graphes orientés.

Définition 3.6. Soit k un entier positif. On dit qu'un graphe orienté $G = (V,A)$ appartient à la classe $DH(k,+)$ si pour tous les sous graphes induits $G' = (V',A')$ de G on a :

$$d_{G'}(u,v) \leq k + d_G(u,v), \forall u,v \in V(G')$$

avec : $d_{G'}(u,v) < \infty$.

Pour la caractérisation des graphes $(k,+)$ distance héréditaire orientés on définit la dilatation d'un graphe orienté G'. Soit $\{u,v\}$ une paire de sommets de G avec $d_G(u,v) < \infty$. La dilatation $\delta_G(u,v)$ de la paire de sommets u et v est définie par :

$$\delta_G(u,v) = D_G(u,v) - d_G(u,v).$$

Pour $d_G(u,v) = \infty$, on définit $\delta_G(u,v) = 0$, et on pose :$\delta_G(u,u) = 0$.
La dilatation $\delta(G)$ du graphe orienté G est le maximum de toutes les dilatations des sommets de G. Ce qui donne :

$$\delta(G) = \max_{u,v \in V(G)} \delta_G(u,v).$$

On note $D(G)$ l'ensemble des paires de sommets $\{u,v\}$ avec :$\delta_G(u,v) = \delta(G)$.

Proposition 3.5. [42]

1. $DH(0,+) = DH(1,*)$.
2. $DH(k,+) = DH([k],+)$; $\forall k \geq 0$.

3. $DH(k_1,+) \subseteq DH(k_2,+)$; $\forall k_1 \leq k_2$.

4. *Si* $\delta(G) = 0$ *alors* $D(G)$ *contient toutes les paires de sommets de* G

5. *Si* $\delta(G) > 0$ *alors* $d_G(u,v) \geq 2$ *pour tous* $(u,v) \in D(G)$.

Théorème 3.4. [42] *un graphe orienté* G *appartient à la classe de graphes* $DH(k,+)$ *si et seulement si* $\delta(G) \leq k$.

Les classes de graphes $DH(q,*)$ et $DH(k,+)$ sont reliées dans le sens suivant :

Théorème 3.5. [42] *Pour tous les entiers naturels* $k \geq 1$ *on a :*

$$DH(k,+) \subsetneqq DH(1 + \frac{k}{2},*).$$

Exemple 3.1. *La figure* 3.4 *représente un graphe orienté* $G \in DH(\frac{5}{2},*)$ *et* $G \notin DH(3,+)$. *En effet la longueur du chemin induisant* u_2 *à* v_2 *est égale à* $d_G(u_2,v_2) = 5$ *et la longueur du plus long chemin induisant* u_2 *à* v_2 *est égale à* $D_G(u_2,v_2) = 11$.
Ainsi : $\delta(G) \geq D_G(u_2,v_2) - d_G(u_2,v_2) = 11 - 5 = 6$.

D'ou $G \notin DH(3,+)$.

Le stretch de G *est :* $S(G) = s_G(u_2,u_7) = \frac{D_G(u_2,u_7)}{d_G(u_2,u_7)} = \frac{5}{2}$.

Ce qui donne : $G \in DH(\frac{5}{2},*)$.

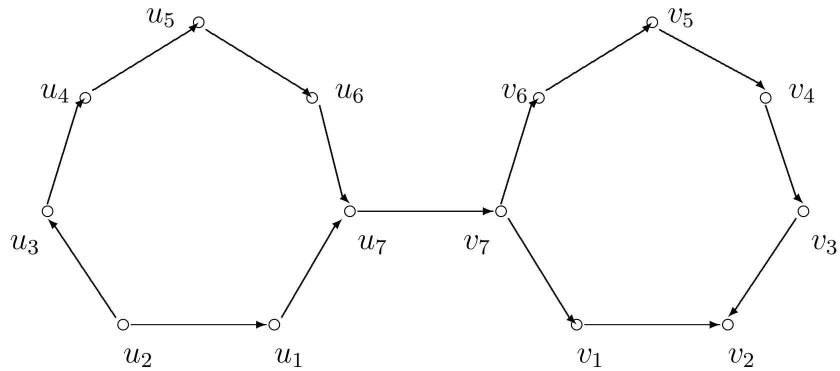


FIG. 3.4

3.5 Graphes presque distance héréditaire orientés

Définition 3.7. On dit qu'un graphe $G = (V,A)$ est presque distance héréditaire orienté si pour tous les sous graphes induits $G' = (V',A')$ de G on a : $d_{G'}(u,v) \leq 1 + d_G(u,v)$, $\forall u,v \in V(G')$ avec : $d_{G'}(u,v) < \infty$.

Un graphe presque distance héréditaire qui n'est pas distance héréditaire contient forcément une C_{05}-configuration comme sous graphe induit.

De ce fait nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.6. *Soit G un graphe presque distance héréditaire orienté avec au moins deux sommets. Alors G contient :*

- *Soit deux sommets pendants.*
- *Soit une paire de jumeaux.*
- *Soit une C_{05}-configuration comme sous-graphe induit.*

Preuve *:* Les deux premières assertions caractérisent les graphes distance héréditaire orientés, et la troisième ceux qui ne le sont pas.

□

En fait, la proposition ci-dessus donne également, de manière implicite, quelques opérations préservant la propriété de la presque distance-hérédité dans les graphes orientés.

3.6 Propriétés métriques des graphes presque distance héréditaire orientés

Bandelt et Mulder [8] ont donné deux caractérisations métriques des graphes distance héréditaire, Aïder [2] a établi une condition métrique suffisante pour qu'un graphe connexe soit presque distance héréditaire en utilisant la condition des quatre sommets.

Le résultat suivant représente une caractérisation métrique des graphes presque distance héréditaire orientés.

Proposition 3.7. *Soit G un graphe connexe orienté sans C_{06}-configuration comme sous graphe induit tel que pour tout quadruple de sommets $\{u,v,w,x\}$ les trois sommes $d(u,v)+d(w,x)$, $d(u,w)+d(v,x)$ et $d(u,x)+d(v,w)$ diffèrent deux a deux d'au plus deux unités :*
Alors G est presque distance héréditaire orienté.

***Preuve**:* Soit G un graphe connexe orienté sans C_{06}-configuration comme sous graphe induit tel que pour tout quadruple de sommets $\{u,v,w,x\}$ les trois sommes $d(u,v) + d(w,x)$, $d(u,w) + d(v,x)$ et $d(u,x) + d(v,w)$ diffèrent deux à deux d'au plus deux unités.

Montrons alors que tout (u,x)-chemin induit a une longueur égale à $d(u,x)$ ou à $d(u,x) + 1$.

Raisonnons par récurence sur la longueur des chemins induits de G.

Le résultat est trivial si la longueur de P est soit égale à 2 ou bien à 3.

Supposons que tous les (u,x)-chemins induits de longueur q inférieure ou égale à k sont telles que: $q = d(u,x)$ ou $q = d(u,x) + 1$ et soit $P = \{u_0,u_1,\cdots,u_k,u_{k+1}\}$ un chemin induit de longueur $k + 1 > 4$.

Nous allons montrer que si nous posons $u_0 = u$, $u_1 = v$, $u_k = w$ et $u_{k+1} = x$ alors le fait que la condition des quatre points soit satisfaite par les sommets $\{u,v,w,x\}$ entraine que soit $d(u,x) = k$ ou $d(u,x) = k + 1$.
Posons $S_1 = d(u,v) + d(w,x)$, $S_2 = d(u,w) + d(v,x)$, $S_3 = d(u,x) + d(v,w)$.
On a, $S_1 = 2$ d'après le choix de P, du fait que S_1,S_2 et S_3 diffèrent deux a deux d'au plus deux unités, $S_2 \leq 4$, $S_3 \leq 4$.

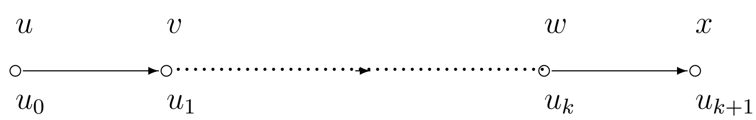


Fig. 3.5 – $P(u,x)$

- Si $2k - 2 \leq S_2 \leq 2k$, du fait que $P(u,w)$ et $P(v,x)$ sont des chemins induits de longueur k, en vertu de l'hypothèse de récurrence, nous avons $k - 1 \leq d(u,w) \leq k$ et $k - 1 \leq d(v,x) \leq k$
- Pour $k - 2 \leq d(v,w) \leq k - 1$, par hypothèse de récurrence, puisque $P(v,w)$ est une chemin de longueur $k - 1$.
- Pour $k - 2 \leq d(u,x) \leq k + 1$, la seconde inégalité étant évidente, $d(u,x) \leq k - 3$, nous aurons un (u,w)-chemin et un (v,x)-chemin de longueur $k - 2$, ce qui contredit ce qui précéde.

Il nous reste à montrer que $d(u,x)$ ne peut être égale ni à $k - 2$ ni à $k - 1$.

$1-^{er}$ cas : supposons que $d(u,x) = k - 2$.

- Si $d(v,w) = k - 2$, alors $S_3 = 2k - 4$, et par conséquent, $S_2 = 2k - 2$ (rappelons que $2k - 2 \leq S_2$ et que si $S_2 \geq 2k - 1$, alors nous aurions $S_2 - S_3 > 2$). En vertu de l'hypothèse $S_2 - S_1 \leq 2$, il s'ensuit que

$S_2 = 2k-2 = 4$. Ainsi nous aurons $k=3$ et $S_3 = 2$ et de ce fait $d(v,w) = d(u,x) = 1$, ce qui constitue une contradiction avec la minimalité de la chaîne P.

– Si $d(v,w) = k-1$, alors $S_3 = 2k-3$, et donc $S_2 \leq 2k-1$ (si $S_2 = 2k$, alors $S_2 - S_3 = 3 > 2$). Nous ne pouvons non plus, avoir $S_2 = 2k-1$ car il s'ensuiverait que $S_2 = 3$ et donc $k=2$ et par suite $S_3 = 1$. De ce fait, il découle que soit les sommets w et v sont confondus, ou alors que u et x le sont, contradiction. D'où, $S_2 = 2k-2$. Dans ce cas pour que l'hypothèse sur la différence des sommes S_1,S_2 et S_3 soit satisfaite, il est nécessaire d'avoir $k=2$ ou $k=3$ et de ce fait $d(u,x) = k-2 = 0$ ou 1. contradiction.

$2-^{eme}$ cas : $d(u,x) = k-1$

– si $d(v,w) = k-2$, alors $S_3 = 2k-3$, et par conséquent, $S_2 = 2k-2$ (nous ne pouvons en effet avoir ni $S_2 = 2k$, auquel cas nous aurions $S_2 - S_3 > 2$, ni $S_2 = 2k-1$, puisque nous aurions $k=2$ et donc $d(u,x) = 1$, contradiction).
Nous aurons aussi soit $2k-2 = 2$ ou bien $2k-2 = 4$ et donc $k=2$ ou $k=3$. Le premier cas est impossible(à cause de l'hypothèse de récurence $k+1 \geq 4$) puisque impliquant que $d(u,x) = 1$ et le chemin P ne serait pas induit et le second l'est également puisque puisque impliquant que $d(v,w) = 1$ et alors soit le chemin P ne serait pas induit ou bien elle serait de longueur 3, contradiction avec l'hypothèse que le chemin P de longueur au moins 4.

– Si $d(v,w) = k-1$, alors $S_3 = 2k-2$. Si $S_2 = 2k$ ou $2k-1$, alors nous aurions nécessairement $k=2$ et donc $d(v,w) = d(u,x) = 1$, contradiction. Si $S_2 = 2k-2$, alors soit nous avons $k=2$, ou bien $k=3$.

Dans le second cas il résulterait que $d(v,w) = d(u,x) = 2$. Soit alors z le sommet interne d'un plus court (u,x)-chemin . $P(u,x) \cup \{z\}$ induit une C_{06}-configuration, ce qui constitue une contradiction.

□

On peut définir (adapter) la split composition aux graphes orientés.

Définition 3.8. Soient $G_1 = (V_1 \cup m_1, A_1), G_2 = (V_2 \cup m_2, A_2)$ deux graphes orientés. La split composition des graphes G_1 et G_2 est notée $G_1 \star G_2 = G = (V,A)$ avec : $V = V_1 \cup V_2$, $A = A'_1 \cup A'_2 \cup \{(x,y)/x \in N_{G_1}(m_1), y \in N_{G_2}(m_2)$, et $A'_i = \{(x,y) \in A_i, x,y \in V_i \ i = 1,2\}$, m_1, m_2 sont les sommets marqués de la split composition.

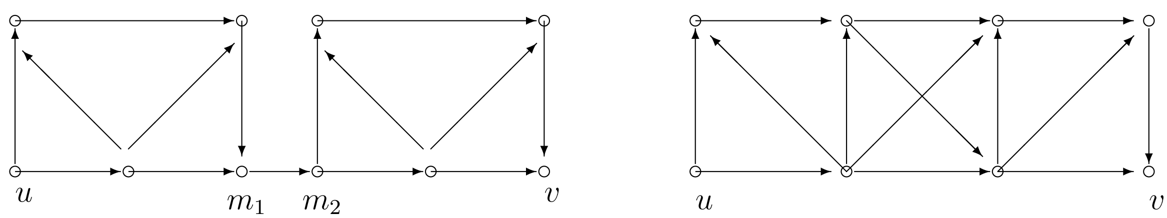


Fig. 3.6

3.7 Construction de graphes orientés dans $Bid(k)$

Les graphes distance héréditaire orientés ont été caractérisés par les opérations "génératrices ". Bandelt et Mulder [6] ont prouvé qu'un graphe est distance héréditaire si et seulement si il peut être obtenu à partir d'un sommet par des extensions d'un sommet : attachement de sommets pendants et création de faux et vrais jumeaux. Deux sommets x et x' sont appelés vrais jumeaux (resp faux jumeaux) dans G si $N_G[(x)] = N_G[(x')]$ (resp $N_G(x) = N_G(x')$).

Afin d'établir un résultat similaire pour les graphes orientés dans $Bid(k)$ avec $k > 1$, il est nécessaire d'utiliser des opérations plus générales ; l'opération de la split composition est l'une d'elles. Nous pouvons prouver qu'elle généralise l'attachement de sommets pendants et la création de jumeaux.

Malheuresement, les résultats de complexité des problèmes de reconaissance pour la classe $Bid(k)$ montrent qu'il est difficile de trouver tous les graphes avec une distance induite bornée d'ordre k qui peuvent être construits par n'importe quelle opération génératrice. En fait, on montre que la split composition est capable de produire une partie de la classe considérée.

Le théorème suivant nous donne le plus grand ordre de la classe à laquelle un graphe orienté appartient quand il est obtenu à partir d'une split composition.

Théorème 3.6. *Soient $G_1 = (V_1,E_1)$, $G_2 = (V_2,E_2)$ deux graphes orientés connexes appartenant à $Bid(k_1)$ et $Bid(k_2)$ respectivement. Alors :*

$$G = G_1 \star G_2 \in Bid(k)$$

où $k = max\{k_1,k_2,\frac{2(k_1+k_2)-1}{3}\}$.

Preuve: Soient m_1 et m_2 les sommets marqués de G_1 et G_2 respectivement. Par définition de la split composition pour chaque $y \in N(m_2)$ le sous graphe de G induit par les sommets dans $V_1 \setminus \{m_1\} \cup \{y\}$ est isomorphe à G_1. Le cas symétrique est vérifié pour G_2.

Calculons alors le stretch de la paire $\{x,y\}$ avec :

$$x \in V_1 \setminus N[m_1]$$

et

$$y \in V2 \setminus N[m_2].$$

Dans ce cas :

$$D_G(x,y) = D_{G_1}(x,m_1) + D_{G_2}(m_2,y) - 1$$

et

$$d_G(x,y) = d_{G_1}(x,m_1) + d_{G_2}(m_2,y) - 1$$

puisque par définition on a :

$$D_{G_1}(x,m_1) \leq k_1.d_{G_1}(x,m_1)$$

et

$$D_{G_2}(m_2,y) \leq k_2.d_{G_2}(m_2,y)$$

alors :
$D_{G_1}(x,m_1) + D_{G_2}(m_2,y) - 1 \leq k_1 d_{G_1}(x,m_1) + k_2 d_{G_2}(m_2,y) - 1$
$= k_1(d_{G_1}((x,m_1) + d_{G_2}(m_2,y) - 1) + k_2(d_{G_1}(x,m_1) + d_{G_2}(m_2,y) - 1)$
$+ k_1(1 - d_{G_2}(m_2,y)) + k_2(1 - d_G 1(x,m_1)) - 1.$
Etant donné que:

$$x \in V_1 \setminus N[m_1]$$

et

$$y \in V_2 \setminus N[m_2]$$

alors :
$d_{G_1}(x,m_1) \geq 2$ et $d_{G_2}(y,m_2) \geq 2$ alors :

$$\begin{aligned} S_G(x,y) = \tfrac{D_G(x,y)}{d_G(x,y)} &= \tfrac{D_{G_1}(x,m_1)+D_{G_2}(m_2,y)-1}{d_{G_1}(x,m_1+d_{G_2}(m_2,y)-1} \\ &\leq k_1 + k_2 + \tfrac{k_1(1-d_{G_2}(m_2,y))+k_2(1-d_{G_1}(x,m_1))-1}{d_{G_1}(x,m_1)+d_{G_2}(m_2,y)-1} \\ &\leq k_1 + k_2 + \tfrac{-k_1-k_2-1}{3} \\ &= \tfrac{2(k_1+k_2-1)-1}{3}. \end{aligned}$$

A partir de l'inégalité ci-dessus on déduit que :

$$s(G) \leq max\{k_1,k_2,\frac{2(k_1+k_2)-1}{3}\}.$$

□

Notons que ce théorème nous fournit une borne supérieure du stretch du graphe $G_1 \star G_2$.
En fait

$$s(C_{O5}) = \frac{3}{2}$$

et

$$s(C_{O5} \star C_{O5}) = \frac{5}{3} = 2\frac{(\frac{3}{2}+\frac{3}{2})-1}{3}.$$

Le corollaire suivant est une conséquence directe du théorème ci-dessus.

Corollaire 3.2. *Soit G un graphe orienté tel que $s(G) = k$. Si G' appartient à la classe $Bid(\frac{k+1}{2})$ alors $s(G \star G') = k$.*

Corollaire 3.3. *La classe des graphes distance héréditaire orientés est fermée par rapport à la split composition. La classe $Bid(k)$ est fermée par rapport à l'extension par des graphes distance héréditaire orientés en passant par la split composition.*

Le théorème suivant nous montre que pour une certaine paire de sommets $\{u,v\}$ d'un graphe orienté G on peut vérifier en un temps polynomial que le rapport entre ses deux distances est supérieur à q.

Théorème 3.7. [42] *Soit $G = (V,A)$ un graphe orienté et $k \in \mathbb{N}$. On construit le graphe orienté $H = (V',A')$ en ajoutant à chaque sommet $v \in V$ un sommet v' et un arc de v à v'. Si W est l'ensemble des sommets ajoutés, on rajoute un sommet u et des arcs (v',u) pour chaque sommet $v' \in W$. Alors :*

P est un chemin induit dans G de longueur supérieure ou égale à k si et seulement si le stretch de H est supérieur ou égal à q avec $q = \frac{k+1}{2}$.

Chapitre 4

Graphes distance héréditaire orientés bipartis

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous définissons la notion de distance hérédité pour les graphes orientés bipartis.

Nous donnons quelques caractérisations métriques de cette classe de graphes.

4.2 Définitions et résultats préliminaires

Définition 4.1. Un graphe connexe orienté biparti $G = (V,A)$ est distance héréditaire si pour tout sous graphe induit H de G ; $d_H(u,v) = d_G(u,v)$, pour toute paire de sommets u et v.
En d'autres termes, un graphe orienté connexe biparti $G = (V,A)$ est distance héréditaire si tout (u,v)-chemin induit est un plus court (u,v)-chemin.

Proposition 4.1. *Un graphe G orienté avec au moins deux sommets est distance héréditaire biparti orienté si et seulement si il est obtenu à partir de K_2 par une séquence d'opérations, ajout de sommets pendants et de faux* *jumeaux.*

Définition 4.2. Soient G un graphe orienté, et $\{u,v\}$ une paire de sommets distincts de G, avec $d_G(u,v) < \infty$.

- La dilatation $\delta_G(u,v)$ d'une paire de sommets u et v est définie par :

$$\delta_G(u,v) = D_G(u,v) - d_G(u,v)$$

  où $d_G(u,v)$(resp $D_G(u,v)$) est la longueur d'un plus court (resp long) (u,v)-chemin induit dans le graphe G.
- Pour $d_G(u,v) = \infty$, on définit $\delta_G(u,v) = 0$

  La dilatation du graphe orienté G est le maximum de toutes les dilatations des paires de sommets de G et on écrit :

$$\delta(G) = \max_{u,v \in V(G)} \delta_G(u,v)$$

- $D(G)$ est l'ensemble des paires de sommets $\{u,v\}$ avec : $\delta_G(u,v) = \delta(G)$.

Lemme 4.1. *1. $DH(0,+)$ est la classe des graphes distance héréditaire orientés.*

2. $DH(2k,+) = DH(2[k],+)$ pour tout graphe biparti orienté et tout nombre réel $k \geq 0$.

3. $DH(2k_1,+)$ biparti orienté $\subseteq DH(2k_2,+)$ biparti orienté si $k_1 \leq k_2$.

4. Si $(u,v) \in A$ alors $\delta_G(u,v) = 0$. Si $\delta(G) > 0$, alors $d_G(u,v) \geq 2$ pour toute paire de sommets $\{u,v\} \in D(G)$.

5. Si G est biparti orienté d'ordre $2k$, alors $\delta(G) \leq \max\{0,2k-4\}$.

Preuve : 1,2,3 et 4 sont des résultats directs de la définition précédente. On montre 5 :

- Si $2k \leq 4$, alors G est distance héréditaire orienté biparti, $\delta(G) = 0$.

– Si $2k > 4$ et G n'appartient pas à $DH(0,+)$.

1. $d_G(u,v) \geq 2$, pour chaque paire $\{u,v\} \in D(G)$.
2. $D_G(u,v) \leq 2k-2$ pour chaque paire de sommets $\{u,v\}$ reliés dans G alors :
   Si $\{u,v\} \in D(G)$ on aura :

$$\delta_G(u,v) = D_G(u,v) - d_G(u,v) \leq (2k-2) - 2 = 2k-4$$

– Pour compléter cette preuve, on montre que $\delta(H_{2k}) = 2k-4$, pour $2k = 4$, H_4 est un graphe distance héréditaire orienté biparti, alors $\delta(H_4) = 0$

– Si $2k > 4$, pour chaque paire de sommets $\{u,v\}$ dans H_{2k}, tel que $d_{H_{2k}}(u,v) \geq 2$ on a :
  $D_{H_{2k}}(u,v) = 2k - d_{H_{2k}}(u,v)$, alors $\delta_{H_{2k}}(u,v) = D_{H_{2k}}(u,v) - d_{H_{2k}}(u,v)$, qui est maximum pour $d_{H_{2k(u,v)}} = 2$, alors : $\delta_{H_{2k}} = 2k-4$.

Théorème 4.1. *Un graphe orienté biparti G appartient à la classe $DH(2k,+)$ si et seulement si $\delta(G) \leq 2k$.*

Preuve: Soit $\delta(G) \leq 2k$. Par définition $\delta(G) \geq D_G(u,v) - d_G(u,v)$ pour tout u, v avec $d_G(u,v) < \infty$. Soit G' un sous graphe induit de G, avec $\delta(G) \geq d_{G'}(u,v) - d_G(u,v)$ pour toute paire de sommets avec $d_G(u,v) < \infty$ alors G appartient à la classe des graphes $DH(\delta(G),+)$.

A présent supposons que $G \in DH(2k,+)$ pour tout entier pair $2k < \delta(G)$. Soit $\{u,v\}$ une paire de sommets de l'ensemble $D(G)$ et soit G' le sous graphe de G induit par un plus long chemin orienté de u à v. Alors : $d_{G'}(u,v) = D_G(u,v)$ avec $D_G(u,v) - d_G(u,v) = \delta(G) > 2k$.
On conclut que :$D_{G'}(u,v) = D_G(u,v) > 2k + d_G(u,v)$.

Ainsi : $G \notin DH(2k,+)$; ceci contredit notre hypothèse.

$\square$

Lemme 4.2. *Pour tout entier naturel* $k \geq 1$*,*
$DH(2k,+)$*biparti orienté* $\subsetneqq$ $DH(1+k,*)$ *biparti orienté.*

Preuve: Soit $k \geq 1$ un entier naturel et $G \in DH(2k,+)$ un graphe orienté pour $u,v \in V(G)$, on a : $D_G(u,v) \leq 2k + d_G(u,v)$

- Pour $d_G(u,v) = 1$, le stretch de la paire $\{u,v\}$ est égal à $1 < 1+k$, et la relation $S_G(u,v) \leq 1+k$ est vérifiée .
- Pour : $d_G(u,v) \geq 2$ on conclut avec :
  $S_G(u,v) = \frac{D_G(u,v)}{d_G(u,v)} \leq \frac{2k+d_G(u,v)}{d_G(u,v)} = 1 + \frac{2k}{d_G(u,v)} \leq 1+k.$
  Ainsi : $G \in DH(1+k,*)$.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on construit un graphe orienté $G_k(1+k,*)$ avec $G_k \notin DH(2k,+)$. Le graphe G_k contient les deux cycles orientés de longueur $2k+4$ et un arc entre les deux cycles, la distance entre u_2 et v_2 est 5 et le plus long chemin entre u_2 et v_2 est de longueur $4k+5$ (Cf.FIG 4.1)

$$\delta(G_k) = 4k + 5 - 5 = 4k$$

Le stretch de G_k est :

$$S(G_k) = S_{G_k}(u_2,u_{2k+4})) = \frac{2k+2}{2} = k+1.$$

□

Il a été prouvé que le stretch d'un graphe coincide avec le stretch de l'une de ses deux composantes connexes de G.

La figure suivante représente une famille de graphes orientés $G_k \in DH(1+k,*)$ avec $G_k \notin DH(2k,+)$

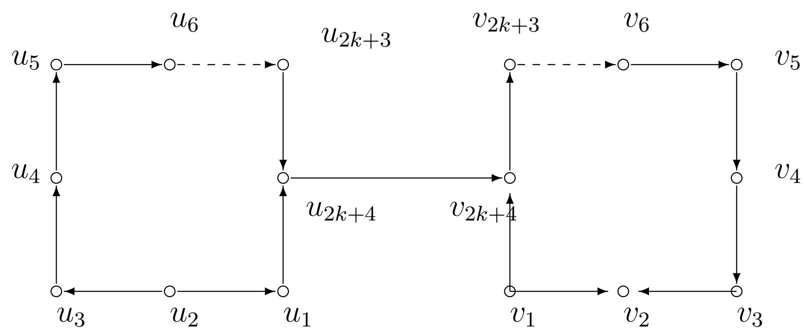


FIG. 4.1

4.3 Caractérisation des graphes distance héréditaire orientés bipartis

Proposition 4.2. *Soit G un graphe connexe orienté. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *G est distance héréditaire orienté biparti.*
2. *G ne contient pas de circuit de longueur 3, ni de circuit induit de longueur au moins 5, ni les configurations de la figure suivante.*

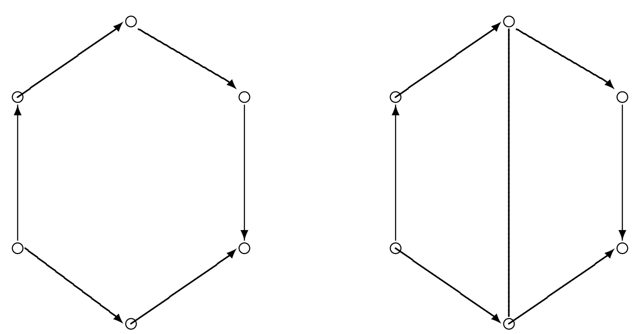


FIG. 4.2 – $C_{06} - biconfigurations$

4.4 Graphes presque distance héréditaire orientés bipartis

Définition 4.3. Un graphe connexe orienté $G = (V,A)$ est presque distance héréditaire biparti si pour tout sous graphe induit $G' = (V',A')$ de G on a :

$$\forall u,v \in A',\, d_{G'}(u,v) \leq d_G(u,v) + 2$$

Autrement dit un graphe connexe orienté est presque distance héréditaire biparti si et seulement si pour chaque paire de sommets $\{u,v\}$ non adjacents, la longueur de chaque (u,v)-chemin induit est soit égale à $d_G(u,v)$ ou bien $d_G(u,v) + 2$.

Dans la proposition suivante nous donnons une condition suffisante de la presque distance hérédité des graphes orientés bipartis en utilisant la condition des quatre points.

Proposition 4.3. *Soit G un graphe connexe orienté biparti ne contenant ni $1C_{06}$-biconfiguration ni le graphe de la figure 4.3 comme sous graphe induit orienté, tel que pour tout quadruple de sommets $\{u,v,w,x\}$ de G, les trois sommes $d(u,v) + d(w,x)$, $d(u,w) + d(v,x)$, $d(u,x) + d(v,w)$ diffèrent deux à deux d'au plus quatre unités.*

Alors G est presque distance héréditaire orienté biparti.

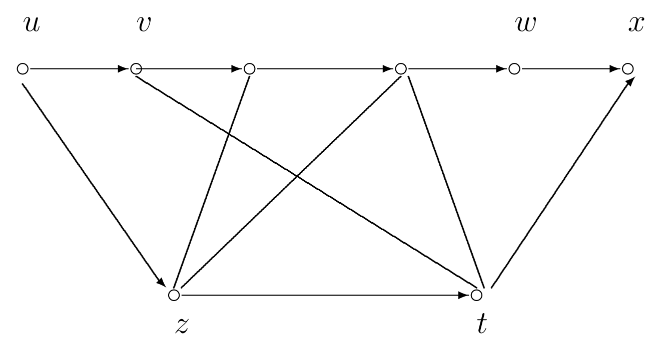


FIG. 4.3

Preuve: Soit G un graphe connexe orienté biparti ne contenant ni $1C_{06}$-biconfiguration, ni le graphe de la figure 4.3 comme sous graphe induit orienté, tel que pour tout quadruple de sommets $\{u,v,w,x\}$ de G, les trois sommes $S_1 = d(u,v) + d(w,x)$, $S_2 = d(u,w) + d(v,x)$, $S_3 = d(u,x) + d(v,w)$ diffèrent deux à deux d'au plus quatre unités. Notons cette propriété par (*).

Il s'agit de montrer que la longueur de tout (u,x)-chemin induit de G est soit égale à $d(u,x)$ soit à $d(u,x) + 2$.
Nous allons procéder par récurrence sur la longueur des chemins induits de G.
Si P un un (u,x)-chemin induit de G.
Si la longueur de P est égale à 2 ou 3, il n'y a rien à montrer.
Supposons maintenant que tous les chemins induits de G, de longueur q inférieure ou égale à k $(q \leq k)$, sont telles que $q = d(u,x)$ ou $d(u,x) + 2$.
Soit $P = (u,v,...,w,x)$ un (u,x)-chemin induit de G de longueur $k + 2 \geq 3$.

On doit montrer que $d(u,x) = k$ ou $k + 2$.

Posons $S_1 = d(u,v) + d(w,x)$, $S_2 = d(u,w) + d(v,x)$, $S_3 = d(u,x) + d(v,w)$.
On a, $S_1 = 2$ d'après le choix de P, $2k-2 \leq S_2 \leq 2k+2$ et $k-2 \leq d(v,w) \leq k$ d'apres l'hypothèse de récurrence.

Notons enfin que $k-2 \leq d(u,x) \leq k+2$, car si $d(u,x) \leq k-3$, on aurait un (u,w)-chemin (resp (v,x)-chemin)

induit de G de longueur inférieure ou égale à $k-2$, or $k-1 \leq d(u,w) \leq k+1$(resp $k-1 \leq d(v,x) \leq k+1$) d'apres l'hypothése de récurrence.

il y'a deux cas à étudier.

Cas 1 **:** $d(u,x) = k-2$.

Sous cas 1.1**.** $d(v,w) = k-2$, donc $S_3 = 2k-4$.On distingue alors trois cas :

a) $S_2 = 2k+2(resp.2k+1)$, ce cas est impossible puisque S_2 et S_3 différent de 6 (resp. 5) unités, constituant une contradiction avec (*).

b) $S_2 = 2k$(resp. $2k-1$), en vertu de la propriété (*), on doit avoir $S_2 = 2k = 6$ ou 4 (resp. 5 ou 3) et donc $k = 3$ ou 2.

- Pour $k = 3$, $S_2 = 6$(resp.5) et $S_3 = 2$. Alors $d(u,x) = d(v,w) = 1$. Une contradiction car P est un chemin induit.
- Pour $k = 2$, $S_2 = 4$(resp.3) et $S_3 = 2$. Alors $d(u,x) = d(v,w) = 0$. Ce qui est impossible.

c) $S_2 = 2k-2$, Puisque G vérifie la propriété (*) et $S_1 = 2$, on doit avoir immédiatement $S_2 = 6$ ou 4 ou 2. Donc $k = 4$ ou 3 ou 2.

- Pour $k = 4$, $S_2 = 6$, $S_3 = 4$. Donc $d(u,x) = d(v,w) = 2$. Soit z le sommet interne d'un plus court (u,x)-chemin, alors $P(u,x) \cup \{z\}$ induit une $1C_{06}$-biconfiguration. Ce qui constitue une contradiction avec nos hypothèses de départ.
- Pour $k = 3$, $S_2 = 4$ et $S_3 = 2$. Donc $d(u,x) = d(v,w) = 1$. Contradiction avec le fait que P est un chemin induit.

- Pour $k = 2$. $S_2 = 2$ et $S_3 = 0$.Donc $d(u,x) = d(v,w) = 0$, ce qui est impossible.

Sous cas 1.2. $d(v,w) = k - 1$, donc $S_3 = 2k - 3$.On distingue alors quatre cas :
a) $S_2 = 2k + 2$.Ce cas est impossible car S_2 et S_3 différent de 5 unités, une contradiction avec la propriété $(^*)$.

b) $S_2 = 2k + 1$. En vertu de la propriété $(^*)$, on a nécessairement $S_2 = 5$ et donc $k = 2$. Alors $S_3 = 1$, $d(u,x) = 0$ et $d(v,w) = 1$, ce qui est impossible.

c) $S_2 = 2k$ (resp.2k-1). A cause de la propriété $(^*)$, on doit avoir $S_2 = 6$ ou 4 (resp.5 ou 3), donc $k = 3$ ou 2.

- Pour $k = 3$, $S_2 = 6$ (resp.5) et $S_3 = 3$. Donc $d(u,x) = 1$, $d(v,w) = 2$ et P serait de longueur 4, mais $|P(u,x)| = k + 2 = 5$, ce qui contredit le fait que P est un chemin induit.
- Pour $k = 2$, $S_2 = 4$ (resp. 3) et $S_3 = 1$. Alors $d(u,x) = 0$ et $d(v,w) = 1$. Ce qui est impossible.

d) $S_2 = 2k - 2$. Puisque G vérifie la propriété $(^*)$ et $S_1 = 2$, on doit avoir $S_2 = 6$ ou 4 ou 2 et donc $k = 4$ ou 3 ou 2.

- Pour $k = 4$, $S_2 = 6$ et $S_3 = 5$. Alors $d(u,x) = 2$ et $d(v,w) = 3$. P serait de longueur 5 mais $|P(u,x)| = k + 2 = 6$, ce qui contredit le fait que P est un chemin induit.
- Pour $k = 3$, $S_2 = 4$ et $S_3 = 3$.Alors $d(u,x) = 1$ et $d(v,w) = 2$ et P serait de longueur 4, mais $P(u,x) = k + 2 = 5$. Ce qui contredit le fait que P est un chemin induit.

- Pour $k = 2$, $S_2 = 2$ et $S_3 = 1$.Alors $d(u,x) = 0$ et $d(v,w) = 1$. Ce qui est impossible.

Sous cas 1.3. $d(v,w) = k$, donc $S_3 = 2k - 2$.On distingue trois cas :

a)$S_2 = 2k+2$(resp.$2k+1$). En vertu de (*), on doit avoir $S_2 = 6$ (resp.5), donc $k = 2$ et $S_3 = 2$. Alors $d(u,x) = 0$, $d(v,w) = 2$. Ce qui est impossible.

b) $S_2 = 2k$ (resp.$2k - 1$). De la propriété (*), on a nécessairement $S_2 = 6$ ou 4 (resp.5 ou 3), donc $k = 3$ ou 2.

- $k = 3$. $S_2 = 6$(resp. 5), $S_3 = 4$. Alors $d(u,x) = 1$ et $d(v,w) = 3$. Donc, $P(u,x) \cup (u,x)$ induit à un graphe orienté non biparti. Une contradiction.
- $k = 2$.$S_2 = 4$(resp.3), $S_3 = 2$. Alors $d(u,x) = 0$ et $d(v,w) = 2$. Ce qui est impossible.

c) $S_2 = 2k-2$. Puisque G vérifie la propriété (*), on doit avoir $S_2 = S_3 = 6$ ou 4 ou 2, donc $k = 4$ ou 3 ou 2.

- $k = 4$. $S_2 = S_3 = 6$. Alors $d(u,x) = 2$ et $d(v,w) = 4$. Soit z le sommet interne d'un plus court (u,x)-chemin. Alors $P(u,x) \cup \{z\}$ induit à un graphe isomorphe au graphe de la figure 4.3. Une contradiction avec nos hypothèses de départ.
- $k = 3$. $S_2 = S_3 = 4$. Alors $d(u,x) = 1$ et $d(v,w) = 2$. $P(u,x) \cup (u,x)$ induit à un graphe orienté non biparti. Ce qui constitue une contradiction.
- $k = 2$ $S_2 = S_3 = 2$. Alors $d(u,x) = 0$ et $d(v,w) = 2$. Ce qui est impossible.

Cas 2 :$d(u,x) = k - 1$**.**

Sous cas 2.1.$d(v,w) = k - 2$, donc $S_3 = 2k - 3$. On distingue alors

quatre cas :
a) $S_2 = 2k+2$.Ce cas est impossible car S_2 et S_3 différent de 5 unités, une contradiction avec la propriété (*).
b) $S_2 = 2k+1$. A cause de la propriété (*), on doit avoir $S_2 = 5$, donc $k = 2$ et $S_3 = 1$.Alors $d(u,x) = 1$ et $d(v,w) = 0$. Ce qui est impossible car $|P(u,x)| = k+2 = 4$.
c) $S_2 = 2k$(resp.2k-1). Puisque G vérifie la propriété (*), on doit avoir $S_2 = 6$ ou 4 (resp.5 ou 3), donc $k = 3$ ou 2.

- Pour $k = 3$. $S_2 = 6$(resp.5) et $S_3 = 3$. Alors $d(u,x) = 2$ et $d(v,w) = 1$ et P serait de longueur 3. Or $|P(u,x)| = k+2 = 5$. Ce qui contredit le fait que P est un chemin induit.
- Pour $k = 2$. $S_2 = 4$(resp.3) et $S_3 = 1$. Alors $d(u,x) = 1$ et $d(v,w) = 0$, ce qui est impossible.

d) $S_2 = 2k-2$. Puisque G vérifie la propriété (*), on doit avoir $S_2 = 6$ ou 4 ou 2, donc $k = 4$ ou 3 ou 2

- Pour $k = 4$. $S_2 = 6$ et $S_3 = 5$. Alors $d(u,x) = 3$, $d(v,w) = 2$. Soient $\{z,t\}$ les deux sommets internes d'un plus court (u,x)-chemin. Alors $P(u,x) \cup \{z,t\}$ induit un graphe qui n'est pas biparti, ce qui qui constitue une contradiction.
- Pour $k = 3.S_2 = 4$ et $S_3 = 3$. Alors $d(u,x) = 2$, $d(v,w) = 1$, P serait de longueur 3. Or $|P(u,x)| = k+2 = 5$. Une contradiction.
- Pour $k = 2$. S_1, $S_2 = 2$ et $S_3 = 1$. Alors $d(u,x) = 1$, $d(v,w) = 0$, ce qui est impossible car $|P(u,x)| = k+2 = 4$

Sous cas 2.2**.** $d(v,w) = k-1$, $S_3 = 2k-2$. On distingue alors trois cas :
a) $S_2 = 2k+2$(resp.$2k+1$). Puisque G vérifie la propriété (*), on doit avoir $S_2 = 6$ ou 4 (resp.5 ou 3), donc $k = 2$ ou 1.

- Pour $k = 2$. $S_2 = 6$(resp.5) $S_3 = 2$. Alors $d(u,x) = d(v,w) = 1$. Contradiction car P est un chemin induit.
- Pour $k = 1$. $S_2 = 4$(resp.3) et $S_3 = 0$. Alors $d(u,x) = d(v,w) = 0$, ce

qui est impossible.

b) $S_2 = 2k(\text{resp.}2k-1)$. De la propriété $(^*)$, on a nécessairement $S_2 = 6$ ou 4 ou 2 (resp.5 ou 3 ou 2), donc $k = 3$ ou 2 ou 1.

- Pour $k = 3$, $S_2 = 6(\text{resp.}5)$ et $S_3 = 4$. Alors $d(u,x) = d(v,w) = 2$. Soit z le sommet interne d'un plus court (u,x)-chemin, $P(u,x) \cup \{z\}$ induit une $1C_{06}$-biconfiguration. Une contradiction.
- Pour $k = 2$, $S_2 = 4$ (resp.3) et $S_3 = 2$. Alors $d(u,x) = d(v,w) = 1$ et P serait de longueur 3. Or $|P(u,x)| = k+2 = 4$, ce qui constitue une contradiction avec le fait que P est un chemin induit.
- Pour $k = 1$, $S_2 = 2(\text{resp.}1)$ et $S_3 = 0$. Alors $d(u,x) = d(v,w) = 0$, ce qui est impossible.

c) $S_2 = 2k-2$. En vertu de la propriété $(^*)$, on a immédiatement $S_2 = 6$ ou 4 ou 2 ou 1, donc $k = 4$ ou 3 ou 2 ou 1.

- Pour $k = 4$. $S_2 = S_3 = 6$.
  Soit $\{z,t\}$ les deux sommets internes d'un plus court (u,x)-chemin orienté, alors $P(u,x) \cup \{z,t\}$ induit un graphe isomorphe au graphe de la figure 4.3. Une contradiction avec nos hypothéses de départ.
- Pour $k = 3$. $S_2 = S_3 = 4$. Alors $d(u,x) = d(v,w) = 2$.
  Soit z le sommet interne d'un plus court (u,x)-chemin, alors $P(u,x) \cup \{z\}$ induit une $1C_{06}$-biconfiguration. Une contradiction.
- Pour $k = 2$, $S_2 = S_3 = 2$. Alors $d(u,x) = d(v,w) = 1$, ce qui contredit le fait que P est un chemin induit.
- Pour $k = 1$, $S_2 = S_3 = 0$. Alors $d(u,x) = d(v,w) = 0$. Ce qui est impossible.

Sous cas 2.3. $d(v,w) = k$, donc $S_3 = 2k-1$. On distingue alors deux cas:
a) $S_2 = 2k+2$ (resp.$2k+1$). Puisque G vérifie la propriété $(^*)$, on doit avoir

$S_2 = 6$ ou 4 (resp.5 ou 3), donc $k = 2$ ou $k = 2$ ou 1.

- Pour $k = 2$, $S_2 = 6$(resp.5) et $S_3 = 3$. Alors $d(u,x) = 1$ et $d(v,w) = 2$. Ce cas est impossible car P est un chemin induit.
- Pour $k = 1$,$S_2 = 4$ (resp.3) et $S_3 = 1$. Alors $d(u,x) = 0$ et $d(v,w) = 1$, ce qui est impossible.

b) $S_2 = 2k$ (resp.$2k - 1$) (resp.$2k - 2$). En vertu de la propriété (*), on doit avoir $S_2 = 6$ ou 4 ou 2(resp.5 ou 3 ou 1) (resp4 ou 2 ou 0), donc $k = 3$ ou 2 ou 1.

- Pour $k = 3$, $S_2 = 6$(resp.5)(resp.4) et $S_3 = 5$. Alors $d(u,x) = 2$ et $d(v,w) = 3$. Soit z le sommet interne d'un plus court (u,x)-chemin, alors $P(u,x) \cup \{z\}$ induit a un graphe non biparti.Une contradiction.
- Pour $k = 2$, $S_2 = 4$(resp.3)(resp.2) et $S_3 = 3$. Alors $d(u,x) = 1$ et $d(v,w) = 2$.Ce qui est impossible car P est un chemin induit.
- Pour $k = 1$, $S_2 = 2$(resp.1)(resp.0) et $S_3 = 1$. Alors $d(u,x) = 0$ et $d(v,w) = 1$. Ce qui est impossible.

$\square$

Conclusion & perspectives

Conclusion

Dans notre mémoire nous avons étudié la version orientée des graphes distance héréditaire. Un graphe est distance héréditaire si la distance entre chaque paire de sommets est préservée dans chaque sous graphe induit. Ces graphes ont été introduits par Howorka [37].

Lätsch et Shrader [42] ont donné deux extensions paramétriques des graphes distance héréditaire orientés, en introduisant les classes $DH(q,*)$ et $DH(k,+)$. Un graphe orienté G appartient à la classe $DH(q,*)$ si la distance entre deux sommets dans un sous graphe induit orienté de G se multiplie d'au plus avec le facteur q. Par analogie, un graphe orienté appartient à la classe $DH(k,+)$ si la distance entre deux sommets dans un sous graphe induit augmente d'au plus avec la constante k.

Le deuxième chapitre est consacré aux graphes distance héréditaire, nous citons les différentes classes et donnons leurs caractérisations en nous référant au travaux de Howorka [37], Bandelt et Mulder [8] Aïder [1],[2],[3],. . .

Le troisième chapitre est constitué des différents résultats obtenus par Lätsch et Shrader [42]. Nous donnons une caractérisation des graphes distance héréditaire en termes de sous graphes induits orientés interdits.

Aïder [1] a donné la caractérisation métrique des graphes presque distance héréditaire en utilisant la condition des quatre points, nous en avons fait une adaptation au graphes distance héréditaire orientés.

Dans le quatrième chapitre nous introduisons la classe des graphes distance héréditaire orientés bipartis nous avons quelques caractérisations métriques utilisant les deux notions de stretch et dilatation d'une paire de sommets dans un graphe.

Cependant il est intéressant de voir comme perspectives :

On peut faire une composition des deux classes $DH(q,*)$ et $DH(k,+)$ pour avoir la classe $DH(q,k)$ où un graphe orienté G appartient à la classe $DH(q,k)$ si pour tout sous graphe induit orienté G' de G la distance $d_{G'}(u,v) \leq q.d_G(u,v) + k$ pour toute paire de sommets $\{u,v\}$ avec $d_{G'}(u,v) < \infty$.

Nous avons donné une caractérisation métrique des graphes presque distance héréditaire orientés. De façon similaire on peut donner une caractérisation métrique pour les graphes distance héréditaire orientés en se basant sur la condition des quatre points.

Bibliographie

[1] M. Aïder, sur quelques Structures Combinatoires,Thèse de Doctorat d'Etat USTHB, soutenue en mars 1999.

[2] M. Aïder, Almost Distance-Hereditary Graphs. Discrete Mathematics 242. 1-16 (2002) .

[3] M. Aïder,Bipartite Almost Distance-Heredytary Graphs, soumis.

[4] S. Aoudia Distance-Hérédité dans les Graphes extensions et adaptation. Thèse de Magister UMMTO, Soutenue en Novembre 2007.

[5] H.J. Bandelt Characterization of Hamming Graphs, to appear.

[6] H.J. Bandelt and H.M Mulder, Distance Hereditary Graphs .J.Combin.Series B41.182-208 (1986).

[7] H.J. Bandelt, A. D'Arti, M. Moscarini, H.M. Mulder and A. Schultze, Operations in Distance-Hereditary Graphs. Technical REport 226 CNR(Rome, Italy), 1988. .

[8] H.J. Bandelt and H.M.Mulder, Metric characterization of pa-

rity Graphs. 221-230 Discrete Mathematics 91 (1999).

[9] C.Berge, Graphs, Dunod, Paris, 1983.

[10] M. Bessedik, Sur quelques Propriétés Métriques des Graphes. Thèses de Magister USTHB, Soutenue en Décembre 1997.

[11] A. Bouchet, Transforming Trees by successive Complementation, 196-207. J. Graph Theory. 4(1988).

[12] A. Brandstädt, F. F. Dragan, A Linear-Time Algorithm for connected r-Domination and Steiner Tree on Distance-Hereditary graphs. 177-182 Net Works 31 (3)(1998).

[13] A. Brandstädt, F. F. Dragan and F. Nicolaï, Homogeneously Orderable Graphs, 209-232 Theoretical Computer Science.172 (1997).

[14] F. Buckley and J.P. Harrary, Distance in Graphs, Addison-Wesdley Edition, (1990).

[15] M. Burlet and J.P. Uhry, Parity Graphs, 99- 105 Annals of Discrete Math. 50 (1984).

[16] M.S. Chang, S.C.Wu, G.J.Chang, and H.G. Yeh, Domination in Distance-Hereditary Graphs, Discrete Applied Mathematics, 116:103-113, 2002 .

[17] G.H. Chen, S.Y.Hseinh, C.W.Ho, T.S. Tsu and M.T.Ko,Efficient Parallel Algorithms on Distance-Hereditary Graphs, International Confirence on Parallel processing 1999.

[18] S. Cicerone and G. Di Stefano, On the Extension of Bipartite to Parity Graphs, 181-195. Discrete Applied MAthematics. 95 (1999) .

[19] S. Cicerone and G. Di Stefano, Graphs classes between Parity and Distance-Hereditary Graphs, 197-216. Discrete Applied Mathematics. 95 (1999).

[20] S. Cicerone and G. Di Stefano, Graphs with Bouded Induced Distance, 3-21. Discrete Mathematics. 108 (2001).

[21] S. Cicerone and G. Di Stefano, Networks with small stretch Number, J. of Discrete Algorithms. 2(4): 383-405. Elsevier Science, december 2004.

[22] S. Cicerone and G. Di Stefano, (K,+) Distance-Hereditary Graphs, 281-302. J. of discrete Algorithms Vol 1, Issue 3-4 (June 2003).

[23] S.A. Cook, The Complexity of Theorem-Proving Procedures ; Pro.3^{rd} Ann.ACM Symp. On Theory of Computing, Association of Comjuting Machinery, New York ; PP : 151-158 ; 1971 .

[24] D.G. Corneil, H. Lerchs and L. Stewat-Burlingham, Completely Reductible Graphs, 163-174. Discrete Applied Mathematics. 3 (1981).

[25] C. Gavoille C. Paul, Split Decomposition and distance Labelling An Optimal Sheme For Distance-Hereditary Graphs, 27 mars (2001).

[26] A. D'Arti and M. Moscarini, Distance Hereditary Graphs, Steiner Tree and Connected Domination, 521-530. SIAM journal on computing. 17 (1988).

[27] A. D'Arti, M. Moscarini and H.M.Mulder, On the Isomorphism Problem for Distance-Hereditary Graphs, Report 9241/ A Econometric Institute. Erasmus University Rotterdam (1988).

[28] D.P. Day, O.R. Oellermann and H.C. Swart, Steiner Distance Hereditary Graphs, 437-442. SIAM J. Discrete Math Vol 7 $N^o 3$ (1994).

[29] D.P. Day, O. R. Oellermann and C. Swart, A Characterisation of 3 Steiner Distance Hereditary graphs, 243-253. Networks (1997).

[30] F.F. Dragan, Dominating cliques in Distance-Hereditary Graphs, in 4^{th} Scandinavian Workshop On Algorithm Theory(SWAT'94), 370-381. Lecture Note in Computer Science, Vol 824,eds. EM.Smit, Skyum, Springer, Berlin (1994).

[31] J. Edmonds;Paths, Trees and Flowers, Cand.J.Math.17 ; pp : 449-467 ; 1965.

[32]C.P. Gabor, W.L.Hsu and K.J.Supwit,Recognizing Circle Graphs in Polynomial Time.(106-116) Pro, 26^{th} IEEE Symp, On Foundations of Computer Science. (1985).

[33] M.R. Garey and D.S.Jonson. Computers and Interactability. A Guide to the Theory of NP-Completeness . W .H.Freeman 1979.

[34] M. Habib and C.Paul, A Simple Linear Time Algorithm for Cograph Recognition, Discret Applied Mathematics, Vol 145, ISSUE 2, 183-197(Janvier 2005).

[35] P.L. Hammer and F. Maffray, Completely Separable Graphs,(85-99) Discrete Applied Mathematics. 27(1990).

[36] F. Harrary, Graph Theory, Academic Press New York and London 1969.

[37] E. Howorka, A characterization of Distance Hereditary Graphs,417-420. Quart. J. Math. Oxford (2).28(1977).

[38] E. Howorka,On metric Properties of Certain Clique Graphs,67-74. Journal of Combinatorial Theory, Serie.B 27(1979).

[39] E. Howorka,A Caracterization of ptolemaïc Graphs, 323-331. J.Graph Theory 5(1981).

[40] R.M. Karp, Reductibility Among Combinatorial problems, in R.E.Miller and J.W.Thatcher(eds) ; Complexity of Computer Computations ; Plenum Press ; New York ; pp 85-103 ; 1972.

[41] D. C. Kay and G.Chartrand, A Characterization of certain ptolemaïc Graphs,342-346. Canadian Journal of Mathematics, 17 (1965).

[42] M. Lätsch, R. Shrader, Distance-Hereditary Digraphs, soumis au Journal of Discrete Algorithms (5 janvier 2009).

[43] K. Meslem, Distance dans les graphes et preservations, Thèses de

Magistere USTHB, soutenue en juin 2003.

[44] K. Meslem, M. Aïder, On an Extension of Distance Hereditary Graphs, 3644-3652. Discrete Mathematics 309 (2009).

[45] H.M. Mulder, The interval Function of Graphs, MCT 132, Math. Centrum, Amesterdam 1980.

[46] F. Nicolaï, Hamiltonian Problem on Distance-Hereditary Graphs. Technical report SMDU-264, University Duisberg 1994.

[47] F. Nicolaï and T. Szymezak, Homogeneous Sets and Domination : A Linear Time Algorithm for Distance-Hereditary graphs, 117-128. Networks Vol. 37(3)(2001).

[48] D. Rautenbach, Graphs with Small Additive Stretch Number,pp:291-301. Discussiones Mathematicae. Graph Theory 24 (2004).

[49] S. Slimani, Distance Hérédite dans les graphes et Quelques Extensions,Thèse de Magister USTHB Soutenue en Octobre 2006.

[50] D.P. Summer, Dancy Graphs,492-502. J. Austral.Math.Soc.18(4)(1974).

[51] R. Uehara and Y.Uno, On the Laminer Structure of ptolemaïc and Distance-Hereditary Graphs, Scientific Research on Priority Areas, New Horizons in computing , mini-seminer, Nihon University, Fevrier 2005.

[52] H.G. Yeh and G.J.Chang, Weited Connected Domination

and Steiner Tree in Distance-Hereditary Graphs, 245-253. Discrete Mathematics 87(1998).