

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Magister
Spécialité : Mathématiques
Option : Probabilités Statistique

Thème

Stabilité des modèles Autorégressifs à coefficients aléatoires

Présenté par

Ounouh Rachida

devant le jury composé de :

Mr Djamel Hamadouche	Professeur	UMMTO	Président
Mr Hocine Fellag	Professeur	UMMTO	Rapporteur
Mr Mohand Arezki Boudiba	Maître de Conférences,A	UMMTO	Examineur
Melle Lynda Atil	Maître de Conférences,B	UMMTO	Examinatrice

Remerciements

Je tiens d'abord à exprimer mes remerciements les plus sincères et aussi ma profonde reconnaissance à Monsieur **Fellag Hocine** Professeur à l'UMMTO, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être mon promoteur, pour son soutien, sa patience et sa disponibilité, tout en suivant de près l'élaboration de ma thèse.

Je présente également mes remerciements à Monsieur **Hamadouche Djamel**, professeur à l'UMMTO, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de mon jury de thèse.

Je suis très reconnaissante envers Monsieur **Boudiba Mohand Arezki**, Maître de conférence (Classe A) à l'UMMTO et Mlle **Atil Lynda**, Maître de conférence (Classe B) à l'UMMTO à l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour avoir accepté d'en être membres de jury.

Je profite en l'occurrence pour exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à Monsieur **Ibazizen Mohamed Hamou**, Monsieur **Mamou Mohamed**, **Malika Cheikh**, **Dalila Zerourou**, **Faroudja Aumorassi**, **Idir Sadani**, **Houria Bouziane** pour leurs aide précieuse et leurs soutien pendant la réalisation de ce mémoire.

Rachida Ounouh

Table des matières

Introduction générale	4
1 Généralités sur les séries chronologiques	7
1.1 Introduction	8
1.2 Processus stationnaire	9
1.2.1 Processus stationnaire au sens strict	9
1.2.2 Stationnarité d'ordre deux ou stationnarité faible	10
1.3 Exemple de processus stochastique	11
1.3.1 Processus autorégressif d'ordre 1 (AR(1))	11
1.4 Estimation dans le modèle autorégressif d'ordre 1 (AR(1))	12
1.4.1 Estimateur des moindres carrés	12
1.4.2 Estimateur Median	13
1.4.3 L'estimateur d'Hurwicz	14
1.4.4 Vraisemblance Moyenne	14
1.4.5 Estimateur du maximum de vraisemblance	15
1.4.6 Autres estimateurs	16
2 Modèle autorégressif à coefficient aléatoire d'ordre un	18
2.1 Introduction	19
2.2 Définitions et propriétés :	19
2.3 Estimation dans le modèle RCA(1)	23
2.3.1 Estimation par la méthode des moindres carrés :	23
2.3.2 Estimation par la méthode du quasi maximum de vraisemblance :	26
2.3.3 Autres méthodes d'estimation :	30
3 Etude numérique du modèle sous contamination	34
3.1 Introduction	35
3.2 Contamination du modèle RCA(1)	35
3.2.1 Modèle AO (Additive outlier model)	36
3.2.2 Modèle IO(Innovation outlier model)	37
3.2.3 Modèle de Tukey :	37

	4
3.3 Applications numériques	37
Conclusion générale	55
Bibliographie	57
Annexes	60
3.4 Annexe A	61
3.5 Annexe B	65

Introduction Générale

Les séries temporelles constituent une branche de l'économétrie dont l'objet est l'étude des variables au cours du temps. Parmi ses principaux objectifs figurent la détermination de tendances au sein de ces séries ainsi que la stabilité des valeurs (et de leur variation) au cours du temps. On distingue notamment les modèles linéaires (principalement AR et MA, pour Auto-Regressive et Moving Average) des modèles conditionnels (notamment ARCH, pour Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity) et dans notre cas, le modèle autoregressif à coefficient aléatoire (RCA). L'analyse de ces séries touche énormément de domaines de la vie professionnelle, et plus précisément celui de l'informatique décisionnelle, astronomie, météorologie, médecine, physique, biologie, . . . L'image que l'on pourrait se faire de cette analyse ressemblerait à un homme très agé avec beaucoup d'expérience et une sagesse assez grande pour tirer des événements passés des indications sur le futur, une sorte d'oracle. En informatique, ce serait plutôt une structure fondée sur les bases de données, fournissant ainsi le volume nécessaire d'information permettant de dresser une chronique historique des événements passés. Dessus viendrait se greffer un protocole d'extraction des données, intégré suivant un modèle judicieusement adapté à l'analyse que l'on voudrait faire. Enfin, au sommet de cette pyramide sera l'étude de la stabilité du modèle autoregressif à coefficient aléatoire (RCA).

Le modèle autorégressif à coefficient aléatoire d'ordre un noté RCA(1) a été introduit et étudié par plusieurs auteurs comme Andel(1976), Quinn and Nicholls(1983), Brandt(1986), Bougerol and Picard(1992).

Le modèle RCA(1) a trouvé une variété d'application dans différents domaines comme les finances, la biologie, . . . etc(Nicholls and Quinn(1982), Tong(1990)).

Le présent travail est réparti en 3 chapitres qui sont présentés comme suit :

Nous consacrons le premier chapitre aux rappels comme la définition d'une série chronologique, la stationnarité et la définition d'un processus autorégressif d'ordre un noté AR(1). Ensuite nous présentons quelques méthodes d'estimation comme l'estimation par la méthode des moindres carrés et l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance.

Dans le second chapitre, nous nous proposons de présenter un processus autorégressif à coefficients aléatoires d'ordre n noté RCA(n), donné par l'expression suivante :

$$Y_t = \sum_{i=1}^n (\phi_i + \eta_i(t)) Y_{t-i} + \epsilon_t$$

avec

$$t = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

En suite nous étudions le cas particulier pour $n = 1$ noté RCA(1), donné par l'expression suivante :

$$Y_t = \phi_t Y_{t-1} + \epsilon_t \quad , \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Nous donnons ensuite les conditions de stationnarité d'un RCA(1) et quelques méthodes d'estimation de ϕ comme la méthode des moindres carrés, la méthode du quasi-maximum de vraisemblance et autres méthodes étudiées par Hwang and Basawa (1993) et Nicholls and Quinn (1981).

Le troisième chapitre est consacré à l'étude numérique du modèle RCA(1) sous contamination

Nous présentons quelques résultats numériques concernant la stabilité du biais et du MSE (erreur quadratique moyen) de $\hat{\phi}_{MC}$ (l'estimateur des moindres carrés) sous les différentes contaminations de types AO (Additive outlier), IO (Innovation outlier) et Tukey.

En guise de conclusion, on citera quelques problèmes susceptibles de constituer des directions de recherches futures.

Chapitre 1

Généralités sur les séries chronologiques

1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre introductif, nous allons évoquer dans un premier temps sur la théorie des séries chronologiques (ou temporelles) appliquée de nos jours dans des domaines très divers comme l'économétrie, la médecine ou la démographie, pour n'en citer qu'une petite partie .

Après avoir donné la définition d'une série chronologique, la stationnarité et le concept de série stationnaire seront définis.

Par la suite, nous donnerons un exemple de processus linéaire décrivant une série chronologique.

Une série chronologique est une suite formée d'observations au cours du temps.

On peut songer par exemple à l'évolution du nombre de voyageurs utilisant le train, à l'accroissement relatif mensuel de l'indice des prix ou encore à l'occurrence d'un phénomène naturel (comme le nombre de taches solaires).

La définition mathématique adéquate pour l'étude et la prévision de telles suites consiste à les considérer comme une réalisation particulière d'une famille de variables aléatoires $\{Y_t, t \in \mathbb{I}\}$ définies sur un espace de probabilités.

Une série chronologique est notée :

$$\{Y_t, t \in \mathbb{I}\} \text{ où } \{Y_t\}_{t \in \mathbb{I}}$$

où \mathbb{I} est un intervalle de temps qui peut être discret, (dans ce cas, $\mathbb{I} = \{1, 2, \dots, T\}$ où T est le nombre d'observations) ou continu (au quel cas on notera la série $\{Y_t, t \in \mathbb{I}\}$).

La suite de variables aléatoires $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{I}}$ est appelé processus stochastique.

Afin de trouver le meilleur modèle représentant le processus général d'une série chronologique, BOX et JENKINS (1970) ont proposé une méthodologie en 3 étapes :

L'identification du modèle, l'estimation de ses paramètres et les tests d'adéquation.

Avant d'effectuer des tests spécifiques sur une série temporelle et de chercher à la modéliser, plusieurs étapes sont nécessaires, il faut vérifier que les séries étudiées évoluent dans un état "d'équilibre statistique" dans le sens où les propriétés probabilistes et statistiques ne changent pas dans le temps. De tels processus sont dits stationnaires.

1.2 Processus stationnaire

Définition 1.1. La suite $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{I}}$ est dite stationnaire en moyenne, lorsque la moyenne de chacune des variables de la suite est identique :

$$E(Y_t) = E(Y_0), \forall t \in \mathbb{I}$$

De même, cette suite est stationnaire en variance lorsque :

$$Var(Y_t) = Var(Y_0), \forall t \in \mathbb{I}$$

Les définitions suivantes caractérisent les suites stationnaires au sens strict (ou stationnarité forte) et au sens large (du second ordre ou stationnarité faible).

1.2.1 Processus stationnaire au sens strict

Définition 1.2. Soit $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus stochastique.

Le processus $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit strictement ou fortement stationnaire si quelque soit le n-uplet du temps $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ tel que $t_i \in \mathbb{Z}$ et pour tout $h \in \mathbb{Z}$ avec $t_i + h \in \mathbb{Z}$, $\forall i$, ($i = 1, \dots, n$), la suite $(Y_{t_1+h}, \dots, Y_{t_n+h})$ a la même loi de probabilité que la suite $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$, ie :

$$F(Y_{t_1+h}, \dots, Y_{t_n+h}) = F(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$$

où $F(\cdot)$ est la fonction de répartition conjointe des variables aléatoires Y_1, Y_2, \dots, Y_n .

Une autre façon équivalente de définir la stationnarité forte (ou stationnarité stricte) est la suivante :

$\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit stationnaire au sens strict si pour toutes valeurs j_1, \dots, j_n la distribution jointe de la suite $(Y_t, Y_{t+j_1}, \dots, Y_{t+j_n})$ dépend uniquement des intervalles de temps j_1, \dots, j_n et indépendante de la période t .

Nous notons que toutes les caractéristiques (les moments) d'un processus strictement stationnaire sont invariantes dans le temps. Cette définition de la stationnarité est cependant trop forte et très exigeante et repose sur la connaissance de la loi conjointe du processus qui ne peut être connue en pratique, sauf dans des cas très spéciaux.

Toute fois, plusieurs propriétés essentielles des processus aléatoires peuvent être obtenues uniquement à partir des moments du premier et du second ordre.

La stationnarité de ces deux moments peut donc être suffisante pour expliquer la stationnarité du processus.

Pour cette raison, on a besoin d'un concept de stationnarité moins fort et qui peut être rencontré dans la pratique.

1.2.2 Stationnarité d'ordre deux ou stationnarité faible

La plupart des résultats et des méthodes utilisées dans l'analyse des séries chronologiques sont basées sur l'hypothèse de stationnarité faible.

Définition 1.3. Un processus $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit stationnaire au second ordre, ou stationnaire au sens faible, si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- 1) $\forall t \in \mathbb{Z}, E(Y_t^2) < \infty$.
- 2) $\forall t \in \mathbb{Z}, E(Y_t) = m < \infty$, indépendante de t .
- 3) $\forall (t, h) \in \mathbb{Z}^2, cov(Y_t, Y_{t+h}) = E[(Y_{t+h} - m)(Y_t - m)] = \gamma(h)$, indépendante de t .

La première condition $E(Y_t^2) < \infty$, signifie l'existence (ou la convergence) des moments d'ordre deux.

La seconde condition $E(Y_t) = m$, porte sur les moments d'ordre un et signifie que les variables aléatoires Y_t doivent avoir la même espérance.

Autrement dit, l'espérance du processus $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ doit être indépendante du temps.

Enfin la troisième condition, porte sur les moments d'ordre deux, résumés par la fonction d'autocovariance qui dépend seulement de la différence des instants.

En résumé, un processus est stationnaire au second ordre si l'ensemble de ses moments sont indépendants du temps.

Remarque 1.1. Dans les processus du second ordre, la stationnarité stricte implique la stationnarité faible (la réciproque n'est pas vraie sauf pour les processus Gaussiens).

1.3 Exemple de processus stochastique

Nous citons dans ce qui suit une classe de processus stochastiques très importante dans la modélisation des séries chronologiques :

les processus ARMA (Autorégressif moyenne mobile) qui sont linéaires et sous certaines conditions stationnaires.

Nous nous intéressons en particulier aux processus autorégressifs d'ordre un (AR(1)).

1.3.1 Processus autorégressif d'ordre 1 (AR(1))

Définition 1.4. Un processus autorégressif d'ordre un (AR(1)) est défini par :

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t \quad t = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Si $0 < \phi < 1$, le processus est stationnaire.

(ϵ_t) sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (*iid*), de distribution positive F vérifiant $F(0^-) = 0$.

Y_0 est l'état initial du processus qui peut être considéré comme variable aléatoire de distribution F_0 ou comme constante.

Avec :

$$\begin{cases} E(Y_0) = \mu_0 \\ E(\epsilon_t) = \mu_1, \quad \forall t \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} V(Y_0) = \sigma_0^2 \\ V(\epsilon_t) = \sigma_1^2, \quad \forall t \end{cases}$$

1.4 Estimation dans le modèle autorégressif d'ordre 1 (AR(1))

Nous allons maintenant nous intéresser à l'estimation du paramètre autoregressif d'ordre un avec innovations gaussiennes.

Nous rappelons les principaux types d'estimateurs du modèle disponibles dans la littérature et cela en supposant que l'état initial Y_0 est une variable gaussienne de moyenne nulle et de variance égale $\sigma^2/(1 - \phi^2)$ dans le but d'assurer la stationnarité du processus.

On considère le modèle

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t \quad t = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

où les $\{\epsilon_t\}$ sont des variables aléatoires iid de loi normale de moyenne nulle et de variance σ^2

On suppose qu'on observe le segment

$$y_1, y_2, \dots, y_n \quad \text{fixé}$$

ϕ est le paramètre à estimer.

1.4.1 Estimateur des moindres carrés

On pose

$$z_1^t = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$$

$$z_2^t = (y_2, y_3, \dots, y_n)$$

En utilisant la méthode des moindres carrés pour le modèle (1.1) qui consiste à minimiser la fonction

$$S(\phi) = \sum_{t=2}^n \epsilon_t^2 = \sum_{t=2}^n (y_t - \phi y_{t-1})^2$$

On obtient un estimateur de ϕ appelé l'estimateur des moindres carrés qu'on note $\hat{\phi}_{MC}$ avec :

$$\hat{\phi}_{MC} = \frac{Cov(z_1, z_2)}{\sigma_{z_1} \sigma_{z_2}} = \frac{\sum_{t=2}^n y_t y_{t-1}}{\sum_{t=2}^n y_{t-1}^2}$$

Reeves(1972)construit une méthode qui donne les valeurs de la distribution de $\hat{\phi}_{MC}$ avec $-\infty < \phi < \infty$ et les $\{\epsilon_t\}$ sont iid de loi normale de moyenne nulle et de variance σ^2 . D'autres auteurs donnent une approximation de la distribution de $\hat{\phi}_{MC}$ par la distribution normale,le développement d'Edgeworth,le développement de type Cornish-Fisher et les quatres paramètres des lois de Pearson. Pour plus de détails,voir Fellag(1998).

1.4.2 Estimateur Median

En présence d'observations assez élevées,l'estimateur des moindres carrés est non efficace ,cela à cause du numérateur qui est linéaire et le dénominateur qui est quadratique. Ce qui fait tendre $\hat{\phi}_{MC}$ vers zéro.

Afin de palier à cela ,Haddad(2000) propose la statistique :

$$M_n = \frac{Med\{Y_1Y_2, Y_2Y_3, \dots, Y_nY_{n-1}\}}{Med\{Y_1^2, Y_2^2, \dots, Y_n^2\}}$$

où $Med(Y_tY_{t-1})$ est la médiane empirique de $(Y_tY_{t-1}), t = 1, \dots, n$ Les deux lemmes suivants nous donnent les propriétés asymptotiques de la statistique M_n .

Lemme 1.1 (Haddad 2000). *la probabilité limite de M_n est donnée par*

$$M_n \xrightarrow{P} m^{-1}\zeta(\phi)$$

où m =mediane de (χ_1^2) et $\zeta(\phi)$ représente la médiane de $\frac{Y_{t-1}Y_t}{\sigma_y^2}$ où

$$\sigma_y^2 = Var\{\chi_t^2\}$$

Lemme 1.2 (Haddad 2000). *La fonction $\zeta(\phi)$ est solution implicite de :*

$$\int_0^\infty \frac{\exp[-\zeta(\phi)(\cosh(\theta) - \phi)/(1 - \phi^2)]}{\cosh(\theta) - \phi} d\theta = \frac{\pi}{2\sqrt{1 - \phi^2}}$$

De cette équation, on peut déduire que la fonction ζ est une fonction croissante de θ et symétrique autour de zéro i.e : $\zeta(-\phi) = -\zeta(\phi)$

La fonction ζ peut etre approximée par un polynôme de deuxième degré avec une précision de 10^{-3} i.e :

$$\zeta(\phi) = \hat{b}\phi + \hat{c}\phi^2 \text{signe}(\phi)$$

où $\hat{b} = 0.195, \hat{c} = 0.260$

Haddad (2000) a défini un estimateur noté $\hat{\phi}_{HAD}$ par :

$$\hat{\phi}_{HAD} = \zeta^{-1}(m \times M_n)$$

1.4.3 L'estimateur d'Hurwicz

Hurwicz (1950) a proposé un autre compétiteur $\hat{\phi}_{MC}$ du paramètre autoregressif du modèle (1.1). Il est défini comme suit :

Soit le modèle

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t \quad t = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad \text{avec} \quad |\phi| < 1$$

et soit le segment d'observation ,

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n \quad \text{avec} \quad n \quad \text{fixé.}$$

On considère les rapports

$$\frac{Y_2}{Y_1}, \frac{Y_3}{Y_2}, \frac{Y_4}{Y_3}, \dots, \frac{Y_n}{Y_{n-1}}$$

L'estimateur d'Hurwicz de ϕ noté $\hat{\phi}_{HUR}$ est

$$\hat{\phi}_{HUR} = Med\left(\frac{Y_2}{Y_1}, \frac{Y_3}{Y_2}, \frac{Y_4}{Y_3}, \dots, \frac{Y_n}{Y_{n-1}}\right)$$

où $Med(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ représente la médiane empirique des observations.

1.4.4 Vraisemblance Moyenne

Notons par $L_1(\phi, y_1, y_2, \dots, y_n)$, la fonction de vraisemblance des variables Y_1, Y_2, \dots, Y_n dans le modèle (1.1) , alors

$$L_1(\phi, y_1, y_2, \dots, y_n) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma}\right)^{n/2} \cdot (1 - \phi^2)^{1/2} \exp \frac{-1}{2\sigma^2} \{(1 - \phi^2)y_1^2 + \sum_{t=2}^n (y_t - \phi y_{t-1})^2\} \alpha (1 - \phi^2)^{1/2} \exp \frac{-1}{2\sigma^2} \{\phi^2 \sum_{t=1}^{n-1} y_t^2 - 2\phi \sum_{t=2}^n y_t y_{t-1}\}$$

On note Y^t le vecteur (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) , et soit Θ la variable de loi uniforme $p(y/\phi)$ sur l'intervalle $[-1, +1]$, alors l'estimateur de vraisemblance moyenne de ϕ est :

$$\hat{\phi}_{BR} = E(\Theta/Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi \cdot L_1(\phi/Y_1, Y_2, \dots, Y_n) d\phi = \frac{\int_{-1}^{+1} \phi \cdot L_1(\phi, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) d\phi}{\int_{-1}^{+1} L_1(\phi, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) d\phi}$$

Cet estimateur a été proposé par Barnard (1962)

1.4.5 Estimateur du maximum de vraisemblance

Dans le modèle (1.1), l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre ϕ noté par $\hat{\phi}_{MV}$ ne possède pas une expression analytique. Nous utilisons la même technique de calcul de $\hat{\phi}_{MV}$ pour les grands échantillons pour donner l'équation dont $\hat{\phi}_{MV}$ est solution (voir Anderson, 1971). On pose

$$\begin{aligned} P_1 &= y_1^2 + y_n^2 \\ P_2 &= \sum_{t=2}^n y_{t-1}y_t \\ P_3 &= \sum_{t=2}^n y_t^2 \end{aligned}$$

$$\log L_1(\phi) = \frac{-n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(P_1 + (1 + \phi^2)P_3 - 2\phi P_2)$$

Les dérivées de $\log L_1(\phi)$ par rapport à ϕ et σ^2 sont respectivement :

$$\begin{cases} \frac{\partial \log L_1}{\partial \phi} = \frac{-\phi}{1-\phi^2} - \frac{1}{\sigma^2}(\phi P_3 - P_2) \\ \frac{\partial \log L_1}{\partial \sigma^2} = \frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}(P_1 + (1 + \phi^2)P_3 - 2\phi P_2) \end{cases}$$

$$\frac{\partial \log L_1}{\partial \sigma^2} = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}[P_1 + (1 + \phi^2)P_3 - 2\phi P_2]$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance est solution de l'équation

$$(1 - \phi^2)(P_2 - \phi P_3) - \frac{\phi}{n}(P_1 + (1 + \phi^2)P_3 - 2\phi P_2) = 0$$

qui s'écrit

$$g(\phi) = \phi^3 - \frac{(n-2)P_2}{(n-1)P_3}\phi^2 - \frac{P_1 + (n+1)P_3}{(n-1)P_3}\phi + \frac{nP_2}{(n-1)P_3} = 0$$

On a

$$\lim g(\phi) = +\infty \quad \text{quand } \phi \rightarrow \infty$$

$$g(1) = \frac{2P_2 - 2P_3 - 1}{(n-1)P_3} < 0$$

$$g(-1) = \frac{2P_3 + 2P_2 + P_1}{(n-1)P_3} > 0$$

$$\lim g(\phi) = -\infty \quad \text{quand } \phi \rightarrow -\infty$$

d'où l'équation $g(\phi) = 0$ possède trois solutions ϕ_1^* , ϕ_2^* , ϕ_3^* vérifiant :

$$\phi_1^* < -1 < \phi_2^* < 1 < \phi_3^*$$

L'estimateur $\hat{\phi}_{MV} = \phi_2^*$ est l'unique solution entre -1 et +1. Les valeurs numériques de $\hat{\phi}_{MV}$ seront calculées en localisant le zéro de la fonction $\frac{\partial \log L_1}{\partial \phi}$.

1.4.6 Autres estimateurs

Startsev(1991) a proposé deux classes d'estimateurs du paramètre autorégressif ϕ d'ordre 1, lorsque Y_0 est une constante arbitraire.

La première classe d'estimateurs notée $\hat{\phi}_{n,k}^{(1)}$ est définie par

$$\hat{\phi}_{n,k}^{(1)} = \frac{Y_k + \dots + Y_n}{Y_{k-1} + \dots + Y_{n-1}}, k = 1, 2, \dots, n$$

Elle est obtenue par simple sommation de l'expression

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t, t = k, \dots, n \quad (1.2)$$

De (1.2) on a

$$\sum_{t=k}^n Y_t = \phi \sum_{t=k}^n Y_{t-1} + \sum_{t=1}^n \epsilon_t \Rightarrow \hat{\phi}_{n,k}^{(1)} = \frac{\sum_{t=k}^n Y_t}{\sum_{t=k}^n Y_{t-1}} = \phi + \frac{\sum_{t=k}^n \epsilon_t}{\sum_{t=k}^n Y_{t-1}}$$

La deuxième classe d'estimateurs de ϕ notée par $\tilde{\phi}_{n,m}^{(1)}$ est

$$\tilde{\phi}_{n,m}^{(1)} = \begin{cases} \frac{\sum_{t=1}^m Y_{t-1}Y_t + \sum_{t=m+1}^n Y_t}{\sum_{t=1}^m Y_{t-1}^2 + \sum_{t=m+1}^n Y_{t-1}} & m = 1, 2, \dots, (m-1) \\ \frac{\sum_{t=1}^n Y_t Y_{t-1}}{\sum_{t=m+1}^n Y_{t-1}^2} & \text{si } m = n \end{cases}$$

Elle est obtenue comme suit :

on multiplie l'expression (1.2) par Y_{t-1} , on obtient

$$Y_t Y_{t-1} = \phi Y_{t-1}^2 + Y_{t-1} \epsilon_t \quad (1.3)$$

pour $m = 1, \dots, n-1$, on a

$$\sum_{t=1}^m Y_{t-1} Y_t + \sum_{t=m+1}^n Y_t = \phi \left(\sum_{t=1}^m Y_{t-1}^2 + \sum_{t=m+1}^n Y_{t-1} \right) + \sum_{t=1}^m Y_t \epsilon_t + \sum_{t=m+1}^n \epsilon_t$$

alors pour $m = 1, 2, \dots, n-1$, on a

$$\tilde{\phi}_{n,m}^{(1)} = \frac{\sum_{t=1}^m Y_{t-1} Y_t + \sum_{t=m+1}^n Y_t}{\sum_{t=1}^m Y_{t-1}^2 + \sum_{t=m+1}^n Y_{t-1}} = \phi + \frac{\sum_{t=1}^m Y_t \epsilon_t + \sum_{t=m+1}^n \epsilon_t}{\sum_{t=1}^m Y_{t-1}^2 + \sum_{t=m+1}^n Y_{t-1}}$$

En faisant la somme de l'équation (1.3) pour $t = 2, \dots, n$, on obtient

$$\tilde{\phi}_{n,m}^{(1)} = \frac{\sum_{t=1}^n Y_t Y_{t-1}}{\sum_{t=m+1}^n Y_{t-1}^2} = \phi + \frac{\sum_{t=1}^{t-1} Y_{t-1} \epsilon_t}{\sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2}$$

Chapitre 2

Modèle autorégressif à coefficient aléatoire d'ordre un

2.1 Introduction

Nous avons vu dans la partie précédente comment est défini un modèle autorégressif d'ordre un $AR(1)$ à coefficient ϕ , ($0 < \phi < 1$), ainsi que l'estimation du paramètre ϕ ce modèle.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de présenter un processus autorégressif à coefficients aléatoires d'ordre n noté $RCA(n)$ d'une manière générale et d'ordre un noté $RCA(1)$ d'une manière particulière, où le coefficient ϕ n'est pas une constante mais une variable aléatoire.

Ce modèle a été introduit et étudié par plusieurs auteurs comme Andel (1976), Quinn and Nicholls(1983), Brandt (1986), Bougerol and Picard (1992).

Le modèle $RCA(1)$ a trouvé une variété d'applications dans différents domaines comme les finances, la biologie, etc...(Nicholls and Quinn (1982), Tong (1990)).

Avant de présenter quelques méthodes d'estimation comme l'estimation par la méthode des moindres carrés, l'estimation par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance et autres méthodes étudiées par S.Y.Hwang and I.V.Basawa(1993), Nicholls and Quinn(1981), nous donnons les conditions de stationnarité du modèle autorégressif à coefficient aléatoire d'ordre un ($RCA(1)$).

2.2 Définitions et propriétés :

Un modèle autorégressif à coefficients aléatoires d'ordre n , noté $RCA(n)$ est défini par :

$$Y_t = \sum_{i=1}^n (\phi_i + \eta_i(t)) Y_{t-i} + \epsilon_t \quad (2.1)$$

avec $t = \dots, -1, 0, 1, \dots$

et

1) $\{\epsilon_t, t = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que :

$$\begin{cases} E(\epsilon_t) = 0 \\ V(\epsilon_t) = \sigma^2 \end{cases}$$

2) $(\phi_1, \dots, \phi_n)'$ est un vecteur $(n, 1)$ où les ϕ_i sont des constantes $\forall i = 1, \dots, n$.

3) $\eta_t = (\eta_1(t), \dots, \eta_n(t))'$, avec $\{\eta_t, t = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ est une suite de variables aléatoires iid et telles que

$$\begin{cases} E(\eta_t) = 0 \text{ et} \\ E(\eta_t \eta_t') = \Sigma \end{cases}$$

$\{\epsilon_t, \eta_t\}$ sont indépendantes.

Dans cette partie, nous nous intéressons au cas particulier du modèle RCA(1), modèle autorégressif à coefficient aléatoire d'ordre un donné par l'expression suivante :

$$Y_t = \phi_t Y_{t-1} + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

Où (ϕ_t, ϵ_t) est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (iid) non nécessairement Gaussiennes et

$$\begin{cases} E(\phi_t) = \phi \\ E(\epsilon_t) = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V(\phi_t) = \sigma_\phi^2 \\ V(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2 \\ Cov(\epsilon_t, \phi_t) = \sigma_{\phi\epsilon} \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

(2.2) est une forme générale du modèle RCA(1) .

Cependant des cas particuliers s'en déduisent :

1) Pour $\sigma_\phi^2 = V(\phi_t) = 0$, on retrouve le modèle autorégressif d'ordre 1 (AR(1)) de paramètre ϕ

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.3)$$

2) Si $\phi_t = \phi + \eta_t$, alors (2.2) devient

$$Y_t = (\phi + \eta_t) Y_{t-1} + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.4)$$

C'est un autorégressif à coefficient aléatoire d'ordre un (RCA(1)).

3) Si $\phi_t = \phi + \theta\epsilon_t$ et $\sigma_{\phi\theta} = \theta\sigma_\epsilon^2$, alors

$$Y_t = (\phi + \theta\epsilon_t)Y_{t-1} + \epsilon_t \quad , \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.5)$$

C'est le modèle Markovien bilinéaire de paramètre ϕ ($MBL(\phi)$).

Les problèmes d'inférence et de la structure probabiliste dans le modèle (2.4) sont étudiés par Nicholls and Quinn (1982) et dans le modèle (2.5) par Tong (1981), Feigin and Tweedie (1985).

La stationnarité du modèle (2.2) est donnée par les conditions induites par le théorème suivant :

Théorème 2.1 : (S.Y.Hwang and I.V.Basawa 1993)

Si

$$E(\phi_t^2) < 1$$

c'est à dire

$$\phi^2 + \sigma_\phi^2 < 1 \quad (1)$$

alors le processus (2.2) admet une unique solution stationnaire ergodique dans L^2 donné par :

$$Y_t = \epsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{j-1} \phi_{t-i} \right) \epsilon_{t-j} \quad (2.6)$$

Hwang and Basawa (1993), démontrent ce théorème en se référant à Nicholls and Quinn (1982) et Breiman (1968) (p105).

Ils notent d'abord que (2.6) satisfait l'équation (2.2) et que Y_t dans (2.6) est stationnaire et ergodique.

En effet :

En réécrivant le modèle (2.6) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 Y_t &= \phi_t Y_{t-1} + \epsilon_t \\
 &= \phi_t [\phi_{t-1} Y_{t-2} + \epsilon_{t-1}] + \epsilon_t \\
 &= \phi_t \phi_{t-1} Y_{t-2} + \phi_t \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\
 &= \phi_t \phi_{t-1} [\phi_{t-2} Y_{t-3} + \epsilon_{t-2}] + \phi_t \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\
 &= \phi_t \phi_{t-1} \phi_{t-2} Y_{t-3} + \phi_t \phi_{t-1} \epsilon_{t-2} + \phi_t \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\
 \\
 &= \prod_{j=0}^{p-1} \phi_{t-j} Y_{t-p} + \sum_{j=1}^{p-1} \left(\prod_{i=0}^{j-1} \phi_{t-i} \epsilon_{t-j} \right) + \epsilon_t
 \end{aligned}$$

et d'après B. Tchebychev, lorsque $p \rightarrow \infty$ on a

$$\begin{aligned}
 p \left\{ \left| \prod_{j=0}^{p-1} \phi_{t-j} Y_{t-p} \right| > \epsilon \right\} &\leq \frac{E[\prod_{j=0}^{p-1} \phi_{t-j} Y_{t-p}]^2}{\epsilon^2} \\
 &\leq \frac{\prod_{j=0}^{p-1} E[\phi_{t-j}^2] E[Y_{t-p}^2]}{\epsilon^2} \\
 &\leq \frac{(\sigma_\phi^2 + \phi^2)^p}{\epsilon^2} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

car

$$E[Y_{t-p}^2] < \infty$$

et

$$\sigma_\phi^2 + \phi^2 < 1$$

Il en résulte que Y_t est stationnaire et ergodique si la condition (1) ($\phi^2 + \sigma_\phi^2 < 1$) est satisfaite.

2.3 Estimation dans le modèle RCA(1)

Dans cette partie, nous présentons quelques études qui traduisent les problèmes d'estimation du paramètre d'un modèle autorégressif à coefficient aléatoire d'ordre un (RCA(1)), faites par de nombreux auteurs cités auparavant (introduction 2.1)

2.3.1 Estimation par la méthode des moindres carrés :

Nicholls and Quins (1981) considèrent l'échantillon $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_n\}$ du modèle (2.2).

L'estimateur des moindres carrés noté $\hat{\phi}_{MC}$ du paramètre ϕ tel que $\phi = E(\phi_t)$ est obtenu en minimisant l'équation des erreurs suivante :

$$\sum_{t=1}^n \epsilon_t^2 = \sum_{t=1}^n (Y_t - E(Y_t/Y_{t-1}))^2$$

avec Y_{t-1} est le passé du processus à l'ordre $t - 1$.

En effet, sachant que :

$$E(Y_t/Y_{t-1}) = \phi Y_{t-1}$$

on a

$$\sum_{t=1}^n (Y_t - E(Y_t/Y_{t-1}))^2 = \sum_{t=1}^n (Y_t - \phi Y_{t-1})^2$$

En dérivant cette fonction par rapport à ϕ , on a

$$-2 \sum_{t=1}^n (Y_t - \phi Y_{t-1}) Y_{t-1} = 0$$

par la suite, on a

$$\sum_{t=1}^n Y_t Y_{t-1} - \sum_{t=1}^n \phi Y_t Y_{t-1} = 0$$

d'où le résultat :

$$\hat{\phi}_{MC} = \frac{\sum_{t=1}^n Y_t Y_{t-1}}{\sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2} \quad (2.7)$$

Ensuite les auteurs s'intéressent à la détermination de la loi de $\hat{\phi}_{MC}$.

D'abord ils constatent, moyennant le théorème ergodique que, $\hat{\phi}_{MC}$ est un estimateur consistant, c'est à dire que

$$\hat{\phi}_{MC} \rightarrow \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \phi$$

presque sûrement lorsque $n \rightarrow \infty$.

Où

$\gamma(0) = \sigma_\epsilon^2 / (1 - \phi^2 - \sigma_\phi^2)$ et $\gamma(k) = \phi^k \gamma(0)$, avec $k = 0, 1, 2, \dots$

Pour déterminer la loi asymptotique de $\hat{\phi}_{MC}$, les auteurs posent la condition suivante

$$E(Y_t^4) < \infty \tag{2}$$

La condition (2)(existence du moment d'ordre 4 de Y_t) est satisfaite du fait que (ϵ_t, ϕ_t) sont indépendantes identiquement distribuées (iid) ce qui implique que le processus Y_t est Markovien donc il suffit que le moment d'ordre quatre de ϕ_t soit inférieur à un ($E(\phi_t^4) < 1$) pour que le moment d'ordre quatre de Y_t existe ($E(Y_t^4) < \infty$), d'où le théorème suivant :

Théorème 2.2 : (Nicholls and Quinn (1981))

Lorsque $n \rightarrow +\infty$ et sous les conditions (1) et (2)

$$\sqrt{n}(\hat{\phi}_{MC} - \phi) \overset{\mathcal{L}}{\rightsquigarrow} N(0, v^2)$$

où

$$v^2 = [\sigma_\epsilon^2 E(Y_0^2) + 2\sigma_{\phi\epsilon} E(Y_0^3) + \sigma_\phi^2 E(Y_0^4)] / \gamma(0)^2$$

Pour démontrer ce résultat, les auteurs procèdent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_{MC} - \phi &= \frac{\sum_{t=1}^n Y_t Y_{t-1}}{\sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^n Y_{t-1}(\tilde{\phi} Y_{t-1} + \epsilon_t)}{\sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2}\end{aligned}$$

$$\tilde{\phi}_t = \phi_t - \phi \quad , \quad t \in \mathbb{Z}.$$

ils notent que la loi de $\tilde{\phi}_t$ dépend de ϕ .

Si $(Y_{t-1}(\tilde{\phi} Y_{t-1} + \epsilon_t))$ est stationnaire et ergodique, d'après le théorème central limite (CTL) des martingales stationnaires (voir Hall and Heyde 1980) il s'en suit que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n Y_{t-1}(\tilde{\phi} Y_{t-1} + \epsilon_t) \overset{\mathcal{L}}{\rightsquigarrow} N(0, v^2 \gamma(0)^2) \quad (2.8)$$

et d'après le théorème ergodique

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 \overset{P.S.}{\rightsquigarrow} \gamma(0) \quad (2.9)$$

de (2.8) et (2.9) le résultat s'en suit.

2.3.2 Estimation par la méthode du quasi maximum de vraisemblance :

Dans cette partie , Alexander Aue, Lajos Horva and Josef Steinebach (2004) considèrent le modèle RCA(1) sous la forme (2.4) donnée précédemment par :

$$Y_t = (\phi + \eta_t)Y_{t-1} + \epsilon_t \quad , \quad t \in \mathbb{Z}$$

ϕ est un paramètre réel et (η_t, ϵ_t) , $t \in \mathbb{Z}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (iid) définies sur l'espace des probabilités (Ω, F, P) .

Les auteurs présentent l'estimation du vecteur $\theta = (\phi, \omega^2, \sigma^2)$ basée sur la méthode du quasi maximum de vraisemblance.

Où

$$\omega^2 = E(\eta_0^2) > 0 \quad \text{et} \quad \sigma^2 = V(\epsilon_0^2) > 0$$

Pour cela les auteurs posent ce qui suit

$$E(\epsilon_0, \eta_0) = (0, 0)$$

et

$$\text{cov}(\eta_0, \epsilon_0) = \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Ils observent que :

$$E(Y_t/\Gamma_{t-1}) = \phi Y_{t-1}$$

et

$$\text{Var}(Y_t/\Gamma_{t-1}) = \omega^2 Y_{t-1}^2 + \sigma^2$$

Où

$$\Gamma_{t-1} = \sigma((\eta_i, \epsilon_i) \quad ; \quad i \leq t)$$

Ensuite si le vecteur (η_i, ϵ_i) est un vecteur de loi normale, alors la fonction de vraisemblance est la suivante

$$L_n(u) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\pi(xY_{i-1}^2 + y)} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{(Y_i - sY_{i-1})^2}{2(xY_{i-1}^2 + y)} \right)$$

Où $u = (s, x, y)$.

L'estimateur quasi maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_{MV}$ de θ est défini par :

$$\text{Sup}_{u \in \Delta} L_n(u) = L_n(\hat{\theta}_{MV}) \quad , \quad \Delta \subset \mathbb{R}^3 \quad (2.10)$$

par la suite, les auteurs jugent qu'il est plus convenable d'utiliser la fonction *log* de vraisemblance :

$$l_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i(u)$$

Où

$$g_i(u) = \frac{(Y_i - sY_{i-1})^2}{xY_{i-1}^2 + y} + \log(xY_{i-1}^2 + y).$$

donc (2.10) se réécrit comme suit

$$\text{inf}_{u \in \Delta} l_n(u) = l_n(\hat{\theta}_{MV})$$

telle que :

$$\Delta = \left\{ (s, x, y) : -s_0 \leq s \leq s_0, \frac{1}{x_0} \leq x \leq x_0, \frac{1}{y_0} \leq y \leq y_0 \right\}$$

et

$$x_0 > 1, y_0 > 1, s_0 > 0$$

$\hat{\theta}_{MV}$ est obtenu moyennant des méthodes numériques du fait de la difficulté de son expression analytique.

CHAPITRE 2. MODÈLE AUTORÉGRESSIF À COEFFICIENT ALÉATOIRE D'ORDRE UN28

La consistance de $\hat{\theta}_{MV}$ s'en suit du développement des méthodes de Pfanzagl(1969) présentée dans le théorème suivant :

Théorème 2.3 : (A.Aue,L.Horvath et J.Steinebach(2004))

Sous les conditions suivantes :

- 1) $\{(\eta_t, \epsilon_t)\}$ v.a iid sur (Ω, F, P)
- 2) $E(\log^+(\epsilon_0)) < \infty$ et $E(\log^+(\phi + \eta_0)) < \infty$
- 3) $-\infty \leq E(\log |\phi + \eta_0|) < 0$
- 4) $P\{c_1\eta_0 + c_2\epsilon_0 = c_3\} < 1$ avec $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ et $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$
- 5) $E(\epsilon_0, \eta_0) = (0, 0)$ et $cov(\eta_0, \epsilon_0) = \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$
- 6) $s_0 > 0, x_0 > 0$ et $y_0 > 1$
- 7) $p\{(\phi) + \eta_0\epsilon_0 = 0\} < 1$ et $\theta \in \Delta$

alors

$$\hat{\theta}_{MV} \rightsquigarrow \theta \text{ presque surement quand } n \rightarrow \infty$$

Le résultat suivant montre que $\hat{\theta}_{MV}$ est asymptotiquement normal.

CHAPITRE 2. MODÈLE AUTORÉGRESSIF À COEFFICIENT ALÉATOIRE D'ORDRE UN29

si les conditions du théorème précédent sont satisfaites sauf la condition (4) de plus, si :

$$\theta \in \Delta$$

$$E(\eta_0^4) < \infty, E(\epsilon_0^4) < \infty$$

$$\text{et } P\{(c_1\eta_0 + \epsilon_0 \in c_2, c_3)\} < 1 \quad \forall (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } c_1 \neq 0$$

alors

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{MV} - \theta) \rightarrow N(0, H^{-1}AH) \text{ en loi}$$

avec

$$A = E(g_1'(\theta))^t g_1'(\theta)$$

et

$$H = H(\theta) = \begin{bmatrix} 2\alpha(2, 1) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(4, 2) & \alpha(2, 2) \\ 0 & \alpha(2, 2) & \alpha(0, 2) \end{bmatrix}$$

où

$$\alpha(k, \gamma) = E\left(\frac{Y_0^k}{(\omega^2 Y_0^2 + \sigma^2)^\gamma}\right) < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, 2\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{N}$$

2.3.3 Autres méthodes d'estimation :

Soit le modèle (2.2)

$$Y_t = \phi_t Y_{t-1} + \epsilon_t \quad , \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

Hwang and Basawa (1993) proposent dans ce qui vient, l'estimation du paramètre

$$\beta = (\sigma_\epsilon^2, \sigma_{\phi\epsilon}, \sigma_\phi^2)^t$$

avec

$$V(\phi_t) = \sigma_\phi^2, \quad V(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2 \quad \text{et} \quad Cov(\epsilon_t, \phi_t) = \sigma_{\phi\epsilon}$$

Ils procèdent de la manière suivante :

On a que :

$$E(S_t/Y_{t-1}) = \sigma_\epsilon^2 + 2Y_{t-1}\sigma_{\phi\epsilon} + Y_{t-1}^2\sigma_\phi^2$$

où

$$\begin{aligned} S_t &= [Y_t - E(Y_t/Y_{t-1})]^2 \\ &= (Y_t - \phi Y_{t-1})^2 \\ &= (\tilde{\phi} Y_{t-1} + \epsilon_t)^2 \quad \tilde{\phi} = \phi_t - \phi \end{aligned}$$

Ils notent :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2Y_0 & Y_0^2 \\ 1 & 2Y_1 & Y_1^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2Y_{n-1} & Y_{n-1}^2 \end{bmatrix}$$

$$S(\phi) = [S_1(\phi), \dots, S_n(\phi)]^t$$

et considèrent :

$$\tilde{\beta}_n(\phi) = (X^t X)^{-1} X^t S(\phi)$$

et ils obtiennent ensuite l'estimateur :

$$\hat{\beta}_n = \tilde{\beta}_n(\hat{\phi}) = (X^t X)^{-1} X^t S(\hat{\phi})$$

et ils en déduisent le lemme suivant :

Lemme 2.1 : (S.Y.Hwang and I.V.Basawa(1993))

Sous les conditions (1) $(\phi^2 + \sigma_\phi^2 < 1)$ et (2) $(E(Y_t^4) < \infty)$ et lorsque $n \rightarrow \infty$, alors :

1)

$$n^{-1}(X^t X) \xrightarrow{P.S} V$$

où V est la matrice symétrique d'ordre 3 définie par :

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & E(Y_0^2) \\ 0 & 4E(Y_0^2) & 2E(Y_0^3) \\ E(Y_0^2) & 2E(Y_0^3) & E(Y_0^4) \end{bmatrix}$$

2)

$$\hat{\beta}_n \xrightarrow{P.S} \beta$$

3)

$$\frac{1}{\sqrt{n}}X^t[S(\hat{\phi} - S(\phi))] \xrightarrow{P} 0$$

Les propriétés asymptotiques de l'estimateur $\hat{\beta}_n$ sont établies dans le théorème suivant où les auteurs posent la condition suivante :

$$E(Y_t^6) < \infty \quad (3)$$

Théorème 2.4 : (I.V.Basawa and S.Y Hwang(1993))

Sous (1) et (3) et si $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, V^{-1}\Sigma V^{-1})$$

où V est la matrice symétrique définie dans le lemme précédent et

$$\Sigma = E \begin{bmatrix} D_{1t}^2 & D_{1t}D_{2t} & D_{1t}D_{3t} \\ & D_{2t} & D_{2t}D_{3t} \\ & & D_{3t}^2 \end{bmatrix}$$

et

$$D_{1t} = S_t(\phi - E(S_t(\phi)/Y_{t-1}))$$

$$D_{2t} = 2Y_{t-1}D_{1t}$$

$$D_{3t} = Y_{t-1}^2 D_{1t}$$

Pour les démonstrations du lemme et du théorème voir I.V.Basawa and S.Y Hwang (1993),Asymptotic inference for a generalized first order random coefficient autoregressive process.

CHAPITRE 2. MODÈLE AUTORÉGRESSIF À COEFFICIENT ALÉATOIRE D'ORDRE UN33

Par la suite, les auteurs se proposent d'estimer le coefficient de corrélation de (ϕ_t, ϵ_t)

$$\rho = \text{corr}(\phi_t, \epsilon_t) = \sigma_{\phi\epsilon} / \sigma_\phi \sigma_\epsilon$$

Ils donnent l'estimateur suivant :

$$\hat{\rho}_n = \hat{\sigma}_{\phi\epsilon} / \hat{\sigma}_\phi \hat{\sigma}_\epsilon$$

La normalité asymptotique s'obtient du théorème précédent d'où découle ce corollaire

Corollaire 2.1 :(Hwang and Basawa (1993)) sous les conditions 1 et 3 du théorème précédent , quand $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho) \overset{\mathcal{L}}{\rightsquigarrow} N(0, a^2)$$

où

$$a^2 = L^t V^{-1} \Sigma V^{-1} L$$

et

$$L^t = \left(-\frac{1}{2\sigma_\epsilon^2}, 1, -\frac{1}{2\sigma_\phi^2} \right) / \sigma_\phi \sigma_\epsilon$$

Chapitre 3

Etude numérique du modèle sous contamination

3.1 Introduction

Dans le présent chapitre, nous présentons quelques résultats numériques que nous avons obtenus dans le but d'étudier la performance de l'estimateur des moindres carrés $\hat{\phi}_{MC}$ du paramètre $\phi = E(\phi_t)$ (stabilité du biais et du Mse) lorsque le modèle (2.2) est contaminé par divers types de perturbation, dont les types de contamination sont :

- AO (Additive outlier model)
- IO (Innovation outlier model)
- Modèle de Tukey.

Dans l'étude numérique, nous citons plusieurs cas où ϕ_t suit une loi uniforme, une loi normale et une loi exponentielle pour différentes tailles de l'échantillon considéré et différentes valeurs du contaminant Δ ainsi que pour différentes valeurs de ϵ .

Ces résultats seront illustrés par des graphes.

3.2 Contamination du modèle RCA(1)

Soit le modèle suivant :

$$Y_t = \phi_t Y_{t-1} + \epsilon_t \quad , \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

et soit l'estimateur des moindres carrés de $\phi = E(\phi_t)$ donné par :

$$\hat{\phi}_{MC} = \frac{\sum_{t=1}^n Y_t Y_{t-1}}{\sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2}$$

Nous supposons que nous observons le segment :

Y_1, \dots, Y_n .

Avant de présenter nos résultats numériques, nous donnons d'abord les modèles de contamination appliqués sur le modèle (2.2) :

3.2.1 Modèle AO (Additive outlier model)

Modèle 1 :

Dans ce modèle, seule la k^{eme} observation est affectée, au lieu d'observer les $(Y_t)_{1 \leq t \leq n}$ nous observons les $(X_t)_{1 \leq t \leq n}$ c'est à dire :

$$X_t = \begin{cases} Y_t & si \quad t \neq k \\ Y_k + \Delta & si \quad t = k \end{cases}$$

Modèle 2 :

Dans ce modèle, trois observations Y_{k_1} , Y_{k_2} , Y_{k_3} , sont affectées c'est à dire :

$$X_t = \begin{cases} Y_t, & \forall \quad t \neq k_1, k_2, k_3 \\ Y_t + \Delta & si \quad t = k_1 \text{ et } k_2 \text{ et } k_3 \end{cases}$$

Modèle 3 :

Dans ce modèle nous avons :

$$X_t = \begin{cases} Y_t & avec \quad une \quad probabillite \quad (1 - \varepsilon) \\ Y_t + \Delta & avec \quad une \quad probabillite \quad \varepsilon \end{cases}$$

3.2.2 Modèle IO(Innovation outlier model)

Dans ce cas, toutes les observations sont affectées à partir de l'instant k , c'est à dire :

$$X_t = \begin{cases} Y_t & \forall t < k \\ Y_k + \Delta & \text{si } t = k \\ \phi_t X_{t-1} + \epsilon_t & \forall t > k \end{cases}$$

3.2.3 Modèle de Tukey :

Dans ce modèle nous avons :

$$(1 - \epsilon)N(0, 1) + \epsilon N(0, \sigma^2)$$

Ce modèle signifie que les erreurs suivent la loi $N(0, 1)$ avec une probabilité $1 - \epsilon$ et $N(0, \sigma^2)$ avec une probabilité ϵ .

C'est donc une perturbation du modèle par l'inflation de la variance.

3.3 Applications numériques

En guise d'illustration, nous donnons les tables suivantes dont nous présentons les valeurs du biais et du MSE de $\hat{\phi}_{MC}$ sous les différents modèles de contamination pour les tailles d'échantillon suivantes : $n = 20$, $n = 50$, $n = 100$, $n = 200$, $n = 500$, et pour ϕ_t , nous considérons les cas suivants :

1. ϕ_t suit une loi uniforme $U(0, 1)$

Soit le modèle suivant :

$$Y_t = \phi_t Y_{t-1} + \epsilon_t \quad , \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{2.2}$$

avec ϕ_t suit la loi uniforme.

Pour étudier la stabilité du biais et du Mse de $\hat{\phi}_{MC}$, nous donnons la table suivante qui illustre l'effet de la contamination de type AO ,(modèle 1) sur $\hat{\phi}_{MC}$

n \ Δ		0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4
20	Biais	-0.0417	-0.0456	-0.0565	-0.0733	-0.0945	-0.1186	-0.1441	-0.1945
	Mse	0.0391	0.0407	0.0437	0.0483	0.0546	0.0624	0.0715	0.0926
50	Biais	-0.0174	-0.0190	-0.0231	-0.0297	-0.0385	-0.0491	-0.0613	-0.0889
	Mse	0.0145	0.0147	0.0152	0.0159	0.0170	0.0185	0.0205	0.0261
200	Biais	-0.0048	-0.0048	-0.0055	-0.0068	-0.0087	-0.0112	-0.0142	-0.0220
	Mse	0.0032	0.0032	0.0032	0.0033	0.0034	0.0035	0.0036	0.0041
500	Biais	-0.0016	-0.0017	-0.0021	-0.0027	-0.0036	-0.0047	-0.0061	-0.0095
	Mse	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0014

Table 1. Valeurs du biais et de MSE sous contamination (modèle 1)

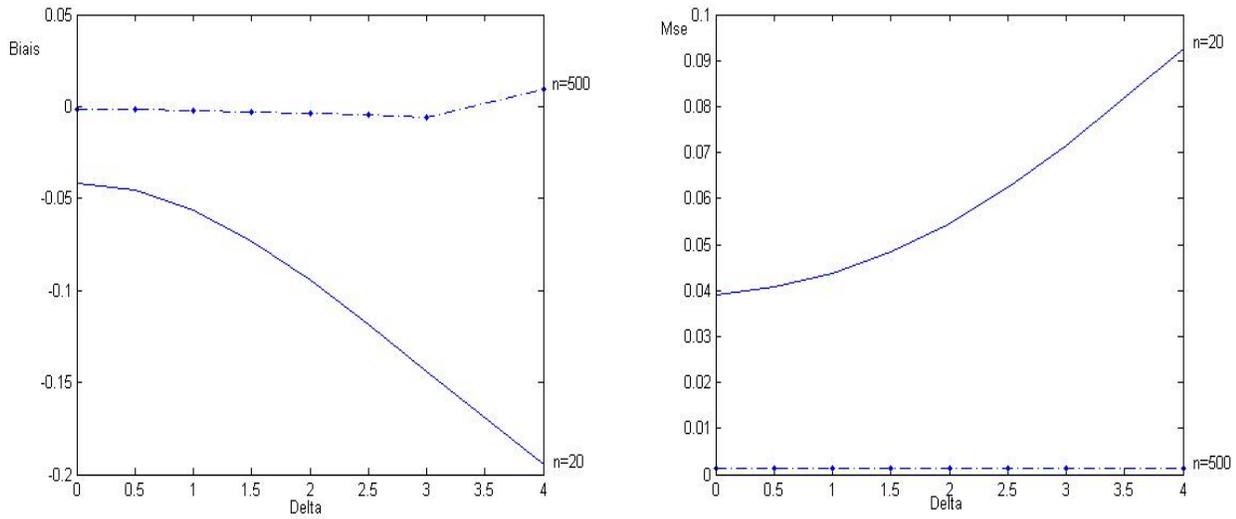


Figure 3.1 : Variations du biais et du MSE en fonction de $\Delta, n = 20$ et $n = 500$

Ces figures présentent la variation du biais et du Mse en fonction de Δ pour $n = 20$ et $n = 500$.

Dans les deux cas, la ligne continue représente le biais et le Mse pour $n = 20$ et la ligne discontinue le biais et le Mse pour $n = 500$.

Nous remarquons que si n est modéré, le biais diminue et le Mse augmente quand Δ augmente. Remarquons aussi que si nous fixons la valeur de Δ , le biais augmente et le Mse diminue.

Dans le cas où n est relativement grand, nous avons remarqué que le Mse tend à être plus stable, ce qui n'est pas le cas du biais. (Voir Table 1, Fig 3.1).

Dans la table 2, nous donnons aussi la variation du Biais et du Mse de $\hat{\phi}_{MC}$ sous la contamination de type AO (modèle 2).

n \ Δ		0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4
20	Biais	-0.0417	-0.0536	-0.0838	-0.1251	-0.1699	-0.2129	-0.2514	-0.3132
	Mse	0.0391	0.0429	0.0511	0.0641	0.0815	0.1016	0.1226	0.1624
50	Biais	-0.0174	-0.0213	-0.0327	-0.0503	-0.0724	-0.0972	-0.1232	-0.1744
	Mse	0.0145	0.0151	0.0165	0.0190	0.0229	0.0285	0.0359	0.0547
200	Biais	-0.0048	-0.0055	-0.0081	-0.0125	-0.0186	-0.0262	-0.0352	-0.0562
	Mse	0.0032	0.0033	0.0033	0.0035	0.0038	0.0043	0.0050	0.0075
500	Biais	-0.0016	-0.0020	-0.0032	-0.0051	-0.0077	-0.0111	-0.0151	-0.0248
	Mse	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0014	0.0014	0.0016	0.0021

Table 2. Valeurs du biais et de MSE sous contamination (modèle 2)

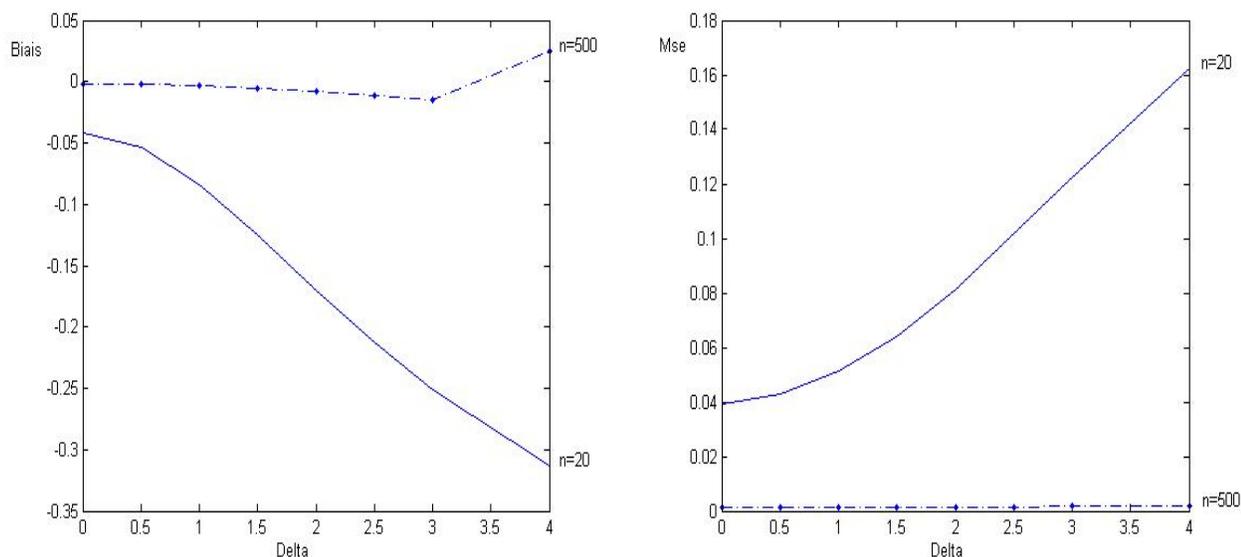


Figure 3.2 : Variations du biais et du MSE pour le modèle 2

La même remarque est valable dans le cas de la variation de Mse et le biais du modèle 1 (voir table 2, fig 3.2).

Les tables ci-dessous montrent la variation du biais et du Mse ,sous la contamination de type AO (modèle 3) en fonction de Δ et de ϵ .

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	-0.0447	-0.0447	-0.0447	-0.0447	-0.0447	-0.0447	-0.0447	-0.0447	-0.0447
0.1	-0.0447	-0.0508	-0.0637	-0.0935	-0.1082	-0.1388	-0.1639	-0.1964	-0.2243
0.2	-0.0447	-0.0520	-0.0739	-0.1037	-0.1256	-0.1577	-0.1827	-0.2172	-0.2431
0.3	-0.0447	-0.0527	-0.0667	-0.1004	-0.1256	-0.1330	-0.1484	-0.1653	-0.1967
0.4	-0.0447	-0.0505	-0.0578	-0.0682	-0.0753	-0.0929	-0.0998	-0.1105	-0.1199
0.5	-0.0447	-0.0432	-0.0330	-0.0328	-0.0367	-0.0347	-0.0294	-0.0335	-0.0376

Table 3. Valeurs du biais sous contamination du modèle(3), $n = 20$

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	0.0399	0.0399	0.0399	0.0399	0.0399	0.0399	0.0399	0.0399	0.0399
0.1	0.0399	0.0418	0.0441	0.0550	0.0624	0.0748	0.0832	0.1096	0.1246
0.2	0.0399	0.0423	0.0518	0.0644	0.0762	0.0914	0.1074	0.1355	0.1477
0.3	0.0399	0.0439	0.0549	0.0662	0.0855	0.0931	0.1051	0.1213	0.1216
0.4	0.0399	0.0442	0.0558	0.0671	0.0768	0.0918	0.1026	0.1151	0.1216
0.5	0.0399	0.0444	0.0573	0.0698	0.0802	0.0936	0.0997	0.1089	0.1091

Table 4. Valeurs de MSE sous contamination du modèle(3), $n = 20$

Nous remarquons que les variations du biais et du Mse sont assez grandes quand on change les valeurs de ϵ et Δ pour $n = 20$.

Pour $n = 50$, on a obtenu les valeurs simulées suivantes :

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	-0.0166	-0.0166	-0.0166	-0.0166	-0.0166	-0.0166	-0.0166	-0.0166	-0.0166
0.1	-0.0166	-0.0206	-0.0330	-0.0517	-0.0804	-0.1009	-0.1285	-0.1688	-0.2044
0.2	-0.0166	-0.0218	-0.0387	-0.0590	-0.0854	-0.1161	-0.1352	-0.1693	-0.1986
0.3	-0.0166	-0.0201	-0.0308	-0.0467	-0.0688	-0.0867	-0.0978	-0.1304	-0.1467
0.4	-0.0166	-0.0150	-0.0162	-0.0248	-0.0312	-0.0408	-0.0520	-0.0627	-0.0824
0.5	-0.0166	0.0075	0.0106	0.0149	0.0120	0.0163	0.0176	0.0048	0.0026

Table 5. Valeurs du biais sous contamination du modèle(3), $n = 50$

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	0.0146	0.0146	0.0146	0.0146	0.0146	0.0146	0.0146	0.0146	0.0146
0.1	0.0146	0.0149	0.0161	0.0197	0.0262	0.0318	0.0424	0.0602	0.0784
0.2	0.0146	0.0150	0.0180	0.0218	0.0304	0.0437	0.0532	0.0749	0.0928
0.3	0.0146	0.0154	0.0186	0.0257	0.0344	0.0462	0.0552	0.0721	0.0830
0.4	0.0146	0.0154	0.0191	0.0280	0.0360	0.0466	0.0543	0.0672	0.0819
0.5	0.0146	0.0163	0.0213	0.0301	0.0417	0.0531	0.0606	0.0687	0.0775

Table 6. Valeurs de MSE sous contamination du modèle(3), $n = 50$

Nous remarquons d'après ces tables que lorsque n augmente ($n = 50$), les variations du biais et du Mse sont moins fortes.

Aussi, pour le cas où $n = 200$, on a obtenu :

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	-0.0059	-0.0059	-0.0059	-0.0059	-0.0059	-0.0059	-0.0059	-0.0059	-0.0059
0.1	-0.0059	-0.0102	-0.0237	-0.0423	-0.0658	-0.0894	-0.1151	-0.1624	-0.2037
0.2	-0.0059	-0.0119	-0.0284	-0.0496	-0.0757	-0.1011	-0.1199	-0.1643	-0.1930
0.3	-0.0059	-0.0093	-0.0217	-0.0381	-0.0589	-0.0768	-0.0927	-0.1206	-0.1486
0.4	-0.0059	-0.0044	-0.0068	-0.0097	-0.0227	-0.0329	-0.0432	-0.0605	-0.0701
0.5	-0.0059	0.0026	0.0164	0.0235	0.0247	0.0241	0.0205	0.0130	0.0080

Table 7. Valeurs du biais sous contamination du modèle(3), $n = 200$

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032
0.1	0.0032	0.0034	0.0043	0.0063	0.0100	0.0155	0.0233	0.0419	0.0627
0.2	0.0032	0.0036	0.0052	0.0091	0.0155	0.0242	0.0335	0.0557	0.0739
0.3	0.0032	0.0036	0.0061	0.0110	0.0182	0.0271	0.0379	0.0543	0.0688
0.4	0.0032	0.0039	0.0067	0.0135	0.0214	0.0310	0.0383	0.0540	0.0626
0.5	0.0032	0.0041	0.0092	0.0182	0.0278	0.0369	0.0443	0.0569	0.0641

Table 8. Valeurs de MSE sous contamination du modèle(3) , $n = 200$

Dans ce cas pour n grand, si on l'augmente indéfiniment, on peut espérer la stabilité du Biais et du Mse.

Remarque :

On retrouve les même resultats de la variation du biais et du Mse sous contamination de type AO (modèle 3) si on utilise la loi Normale (Voir Annexe A) et la loi Exponentielle (Voir Annexe B).

Dans ce cas,nous donnons les valeurs du biais et du Mse de $\hat{\phi}_{MC}$ sous la contamination de type IO,en fonction de n et de Δ .

Considérons le modèle IO defini plus haut, ona les résultats suivants :

n \ Δ		0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4
20	Biais	-0.0417	-0.0427	-0.0442	-0.0453	-0.0454	-0.0446	-0.0443	-0.0396
	Mse	0.0391	0.0406	0.0424	0.0435	0.0435	0.0425	0.0408	0.0361
50	Biais	-0.0174	-0.0178	-0.0181	-0.0184	-0.0186	-0.0188	-0.0189	-0.0187
	Mse	0.0145	0.0146	0.0147	0.0147	0.0146	0.0145	0.0143	0.0138
200	Biais	-0.0048	-0.0045	0.0043	-0.0040	-0.0038	-0.0035	-0.0033	-0.0029
	Mse	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032
500	Biais	-0.0016	-0.0015	-0.0015	-0.0015	-0.0015	-0.0015	-0.0015	-0.0015
	Mse	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013

Table 9. Valeurs du biais et de MSE sous contamination IO

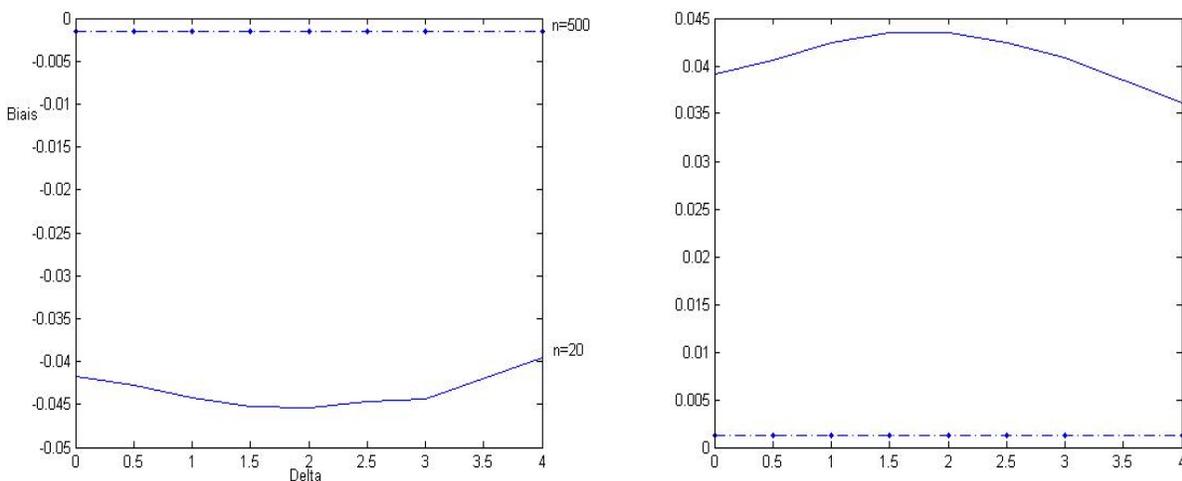


Figure 3.3 : Variations du biais et du MSE modèle IO

Pour différentes valeurs de Δ , nous remarquons que pour $n = 20$ le biais et le Mse de l'estimateur des moindres carrés $\hat{\phi}_{MC}$ est presque stable. Cependant, quand n est assez grand ($n = 500$), le biais et le Mse stable et se rapproche de zéro. (voir Table 9, Fig 3.3)

2. ϕ_t suit une loi normale $N(0.5, 1)$

Le principe de cette partie est le même que pour la loi uniforme mais dans ce cas nous supposons que ϕ_t suit la loi normale.

Pour étudier la variation du biais et du Mse de $\hat{\phi}_{MC}$, nous donnons la table suivante qui donne l'effet de la contamination de type AO ,(modèle 1) sur $\hat{\phi}_{MC}$, que nous avons obtenu en simulant les données.

n \ Δ		0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4
20	Biais	-0.0105	-0.0105	-0.0120	-0.0148	-0.0186	-0.0230	-0.0279	-0.0380
	Mse	0.0280	0.0279	0.0287	0.0306	0.0336	0.0377	0.0428	0.0552
50	Biais	-0.0036	-0.0040	-0.0050	-0.0064	-0.0082	-0.0104	-0.0129	-0.0185
	Mse	0.0091	0.0091	0.0093	0.0097	0.0104	0.0113	0.0126	0.0162
100	Biais	-0.0020	-0.0021	-0.0025	-0.0031	-0.0040	-0.0050	-0.0062	-0.0092
	Mse	0.0046	0.0046	0.0046	0.0047	0.0048	0.0050	0.0053	0.0062
200	Biais	-0.0009	-0.0008	-0.0009	-0.0010	-0.0012	-0.0016	-0.0020	-0.0030
	Mse	0.0024	0.0024	0.0024	0.0025	0.0026	0.0026	0.0026	0.0026

Table 10. Valeurs du biais et de MSE sous contamination (modèle 1)

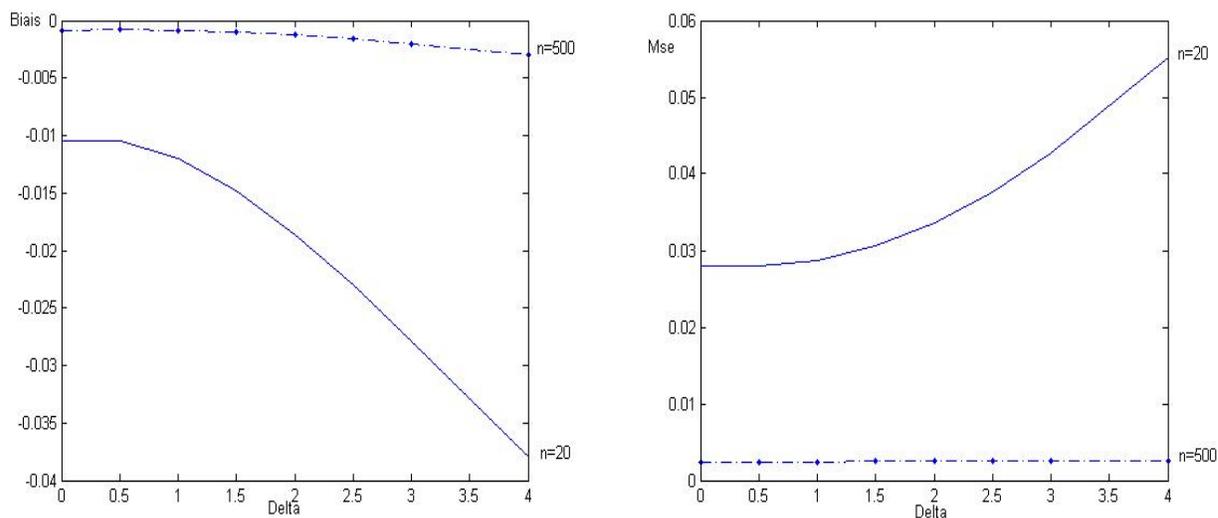


Figure 3.4 : Variations du biais et du MSE

Nous remarquons que lorsque Δ augmente pour $n = 20$ le biais diminue et le Mse augmente . Remarquons aussi si n est assez grand ,le Mse tend à être plus stable est proche de zéro et le biais n'est pas stable mais tend vers zéro.(voir Table 10, Fig 3.4).

Dans ce cas le modèle (2.2) est sous contamination de type AO (modèle 2) et la table ci-dessous montre la variation du biais et du Mse.

soit le modèle 2 :

n \ Δ		0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4
20	Biais	-0.0186	-0.0210	-0.0268	-0.0349	-0.0440	-0.0530	-0.0616	-0.0763
	Mse	0.0272	0.0281	0.0321	0.0395	0.0496	0.0614	0.0740	0.0990
50	Biais	-0.0063	-0.0076	-0.0098	-0.0127	-0.0162	-0.0200	-0.0239	-0.0315
	Mse	0.0093	0.0094	0.0101	0.0116	0.0141	0.0176	0.0222	0.0338
100	Biais	-0.0056	-0.0056	-0.0061	-0.0070	-0.0083	-0.0098	-0.0116	-0.0156
	Mse	0.0046	0.0046	0.0048	0.0053	0.0060	0.0070	0.0086	0.0130
200	Biais	-0.0015	-0.0015	0.0019	-0.0025	-0.0034	-0.0045	-0.0058	-0.0090
	Mse	0.0024	0.0024	0.0024	0.0025	0.0027	0.0031	0.0036	0.0053

Table 11. Valeurs du biais et de MSE sous contamination modèle(2)

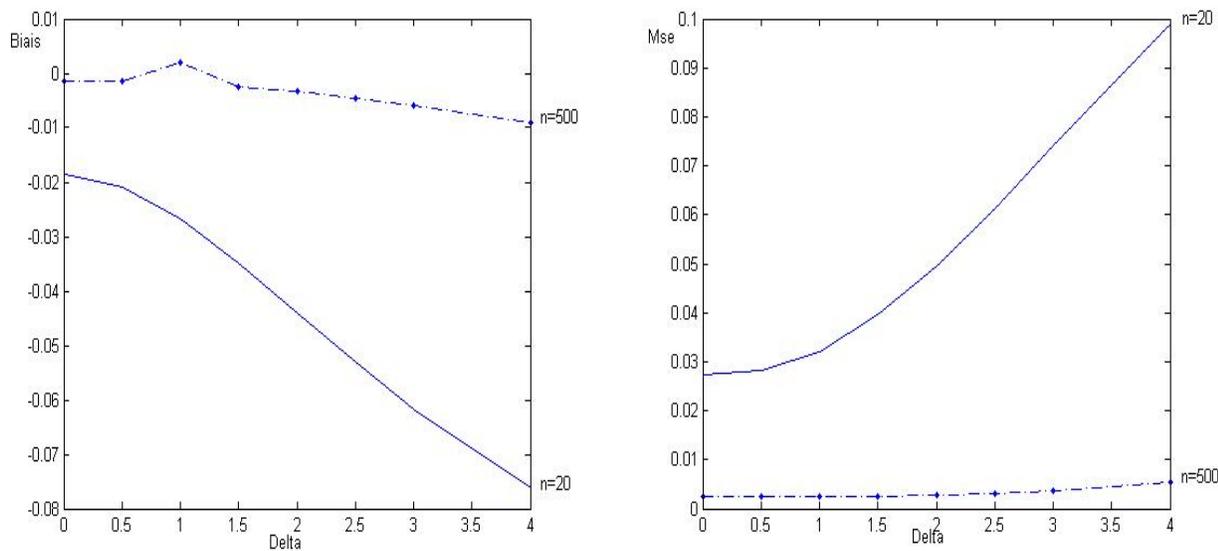


Figure 3.5 : Variations du biais et du MSE

Nous voyons bien que si n est relativement petit ($n = 20$) le biais diminue et le Mse augmente, quand Δ augmente. Cependant, quand n est assez grand ($n = 500$) le bias et le Mse ne sont pas stables mais se rapprochent de zéro. (Voir table 11, Fig 3.5).

Cette table nous donne la variation du biais et du Mse sous contamination de type IO en fonction de n et de Δ .

n \ Δ		0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4
20	Biais	-0.0105	-0.0109	-0.0105	-0.0094	-0.0078	-0.0060	-0.0063	-0.0068
	Mse	0.0280	0.0276	0.0277	0.0275	0.0267	0.0267	0.0246	0.0220
50	Biais	-0.0036	-0.0036	-0.0039	-0.0041	-0.0038	-0.0039	-0.0039	-0.0039
	Mse	0.0091	0.0089	0.0088	0.0087	0.0085	0.0084	0.0082	0.0079
100	Biais	-0.0020	-0.0018	-0.0018	-0.0018	-0.0018	-0.0019	-0.0020	-0.0020
	Mse	0.0046	0.0046	0.0045	0.0045	0.0045	0.0044	0.0044	0.0044
200	Biais	-0.0012	-0.0012	-0.0011	-0.0010	-0.0010	-0.0009	-0.0008	-0.0008
	Mse	0.0023	0.0023	0.0023	0.0023	0.0023	0.0023	0.0023	0.0023

Table 12. Valeurs du biais et de MSE sous contamination IO

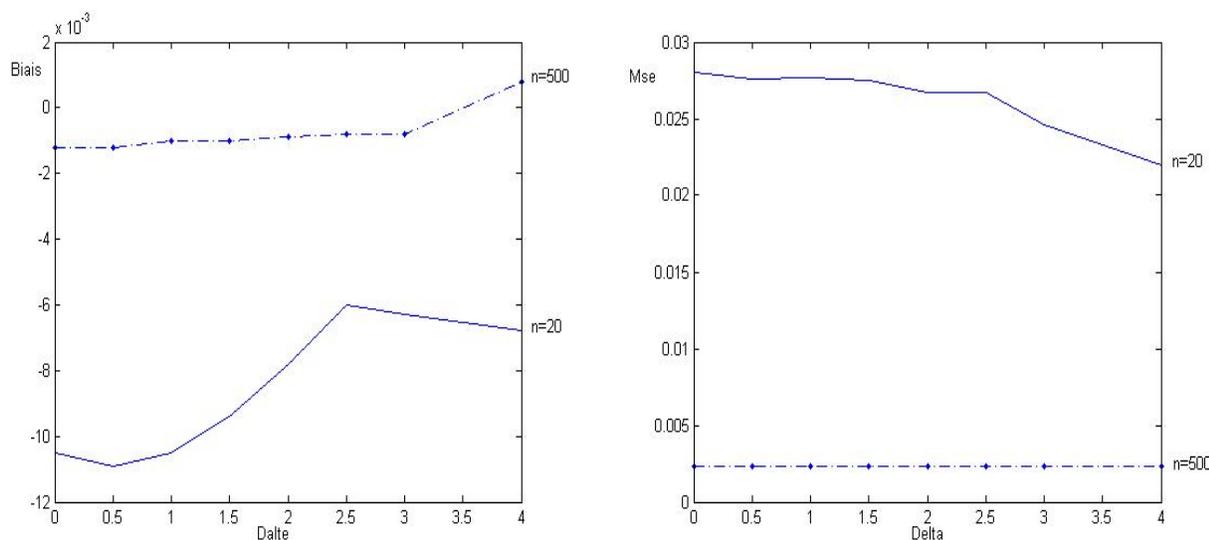


Figure 3.6 : Variations du biais et du MSE

Dans ce cas pour $n = 20$ nous remarquons que le biais augmente et tend vers zéro, le Mse diminue et tend aussi vers zéro, quand Δ augmente. Lorsque n est assez grand ($n = 200$), le biais tend à être plus stable et proche de zéro et le Mse est stable et proche aussi de zéro. (Voir Table 20, Fig 3.6).

3. ϕ_t suit une loi exponentielle $Exp(2)$

Le principe de cette partie est le même que précédemment mais dans ce cas nous supposons que ϕ_t suit une loi exponentielle. Pour étudier la variation du biais et du Mse de $\hat{\phi}_{MC}$, nous donnons la table suivante qui donne l'effet de la contamination de type AO, (modèle 1) sur $\hat{\phi}_{MC}$ et que nous avons obtenue en simulant les données.

n \ Δ		0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4
n=20	Biais	-0.0273	-0.0282	-0.0300	-0.0315	-0.0316	-0.0319	-0.0326	-0.0293
	Mse	0.0382	0.0393	0.0408	0.0414	0.0406	0.0397	0.0392	0.0344
50	Biais	-0.0123	-0.0116	-0.0110	-0.0101	-0.0095	-0.0094	-0.0087	-0.0077
	Mse	0.0150	0.0151	0.0152	0.0153	0.0153	0.0153	0.0151	0.0144
100	Biais	-0.0051	-0.0051	-0.0051	-0.0050	-0.0048	-0.0046	-0.0045	-0.0044
	Mse	0.0070	0.0070	0.0071	0.0071	0.0071	0.0071	0.0072	0.0072
200	Biais	-0.0034	-0.0033	-0.0031	-0.0029	-0.0028	-0.0026	-0.0024	-0.0022
	Mse	0.0033	0.0033	0.0033	0.0033	0.0033	0.0033	0.0032	0.0032

Table 13. Valeurs du biais et de MSE sous contamination (modèle 1)

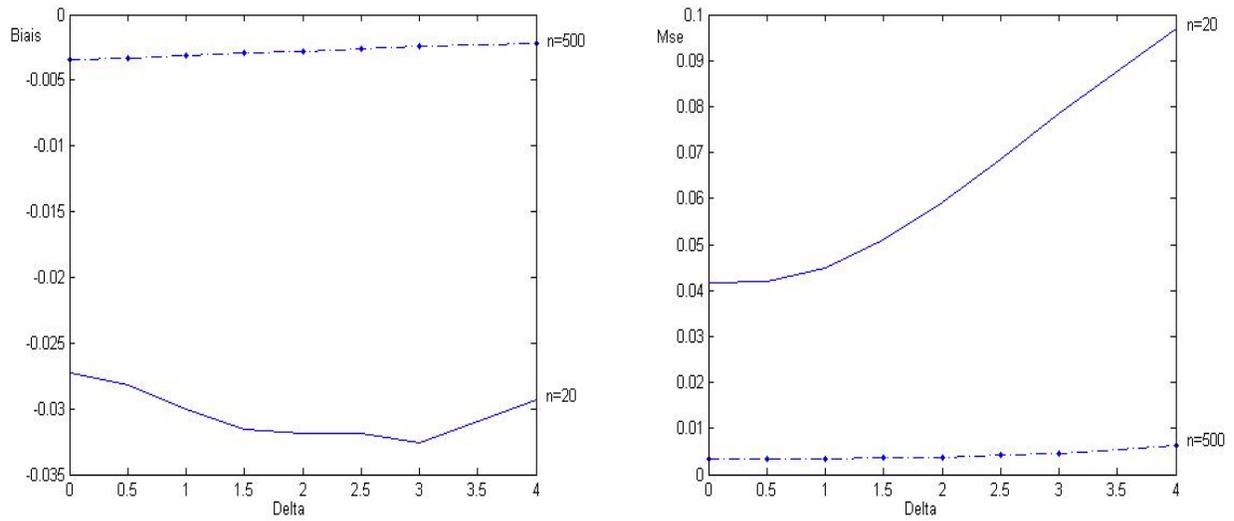


Figure 3.7 : Variations du biais et du MSE

Lorsque l'échantillon considéré est de petite taille ($n = 20$), le Biais diminue lentement et se rapproche de zéro et le Mse augmente, lorsque Δ augmente, par contre, si n est assez grand nous remarquons que le Mse semble se stabiliser en fonction de Δ , le Biais a un comportement assez acceptable aussi (Voir Table 21, Fig 3.7).

Dans ce cas le modèle (2.2) est sous contamination de type AO (modèle 2). La table ainsi que la figure (3.8) montrent que le Biais et le Mse ne sont pas stables quand Δ augmente pour toutes valeurs de n , par contre elles se rapprochent de zéro quand n est assez grand ($n=200$).

n \ Δ		0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4
20	Biais	-0.0417	-0.0501	-0.0700	-0.0961	-0.1236	-0.1496	-0.1726	-0.2092
	Mse	0.0417	0.0419	0.0450	0.0509	0.0591	0.0686	0.0784	0.0970
50	Biais	-0.0083	-0.0096	-0.0165	-0.0281	-0.0430	-0.0597	-0.0771	-0.1107
	Mse	0.0125	0.0128	0.0135	0.0150	0.0172	0.0203	0.0243	0.0344
100	Biais	-0.0055	-0.0065	-0.0104	-0.0167	-0.0251	-0.0352	-0.0464	-0.0705
	Mse	0.0081	0.0082	0.0083	0.0086	0.0092	0.0101	0.0115	0.0156
200	Biais	-0.0033	-0.0042	-0.0064	-0.0099	-0.0146	-0.0204	-0.0270	-0.0421
	Mse	0.0034	0.0034	0.0035	0.0036	0.0038	0.0041	0.0046	0.0062

Table 14. Valeurs du biais et de MSE sous contamination du modèle(2)

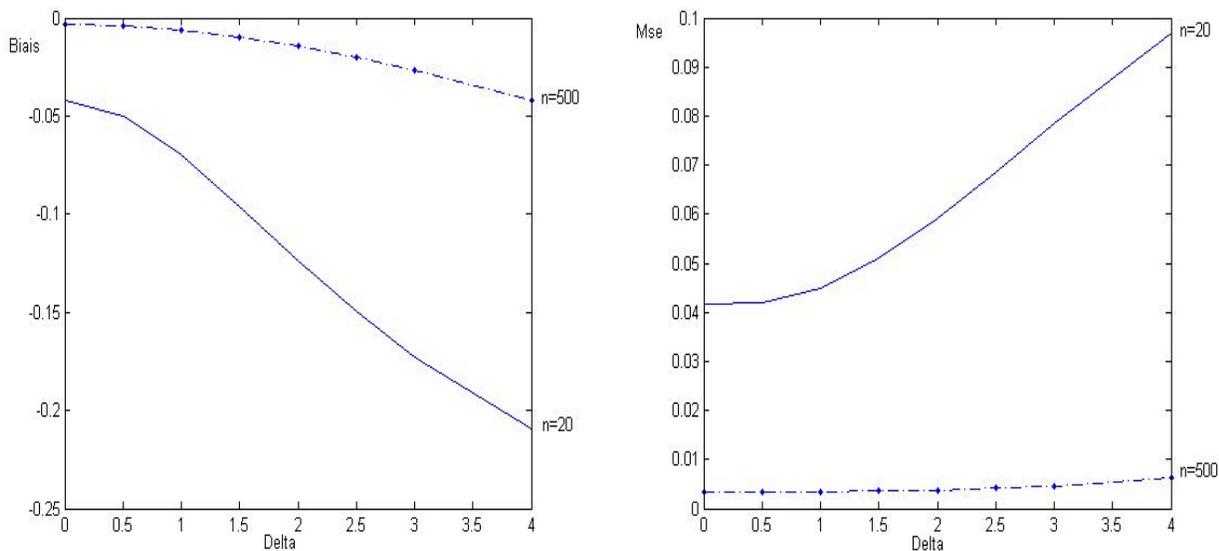


Figure 3.8 : Variations du biais et du MSE

Cette table nous donne la variation du Biais et du Mse sous contamination de type IO en fonction de n et de Δ .

n \ Δ		0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	
20	Biais	-0.0224	-0.0202	-0.0178	-0.0160	-0.0148	-0.0138	-0.0138	-0.0127	-0.0118
	Mse	0.0414	0.0410	0.0398	0.0388	0.0379	0.0369	0.0369	0.0354	0.0330
50	Biais	-0.0122	-0.0126	-0.0126	-0.0127	-0.0128	-0.0127	-0.0127	-0.0130	-0.0133
	Mse	0.0153	0.0153	0.0152	0.0151	0.0150	0.0148	0.0148	0.0146	0.0144
100	Biais	-0.0046	-0.0044	-0.0044	-0.0043	-0.0043	-0.0042	-0.0042	-0.0042	-0.0042
	Mse	0.0062	0.0062	0.0062	0.0062	0.0063	0.0063	0.0063	0.0063	0.0063
200	Biais	-0.0032	-0.0033	-0.0035	-0.0036	-0.0038	-0.0039	-0.0039	-0.0041	-0.0041
	Mse	0.0036	0.0036	0.0036	0.0036	0.0036	0.0036	0.0036	0.0036	0.0036

Table 15. Valeurs du biais et de MSE sous contamination IO

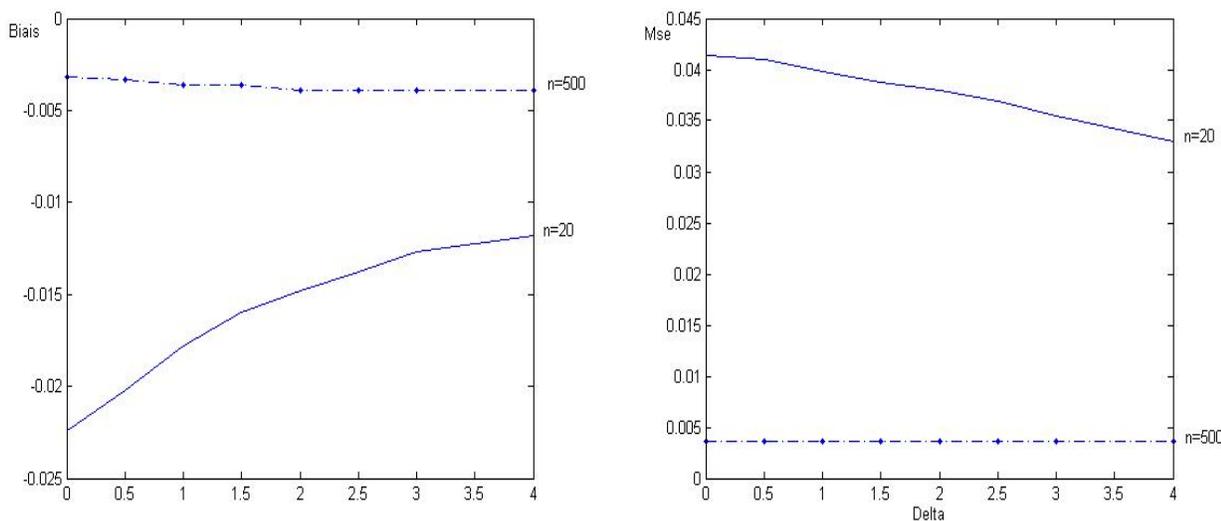


Figure 3.9 : Variations du biais et du MSE

Sous cette contamination et dans le cas où l'échantillon est de petite taille , nous voyons que le Biais et le Mse pret a être stable,quand Δ augmente ,ensuite lorsque n est assez grand,le Biais et le Mse sont stables et se rapprochent de zéro.(Voir Table 31, Fig 3.9)

4. Contamination de type Tukey :

Soit le modèle suivant

$$Y_t = \phi_t Y_{t-1} + \epsilon_t \quad , \quad t \in \mathbb{Z}.$$

et soit :

$$\hat{\phi}_{MC} = \frac{\sum_{t=1}^n Y_t Y_{t-1}}{\sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2}$$

l'estimateur des moindres carrés du paramètre ϕ_t . pour étudier le biais et le Mse de cet estimateur, nous donnons quelques tables illustrant l'effet de la contamination de type Tukey, sur $\hat{\phi}_{MC}$, que nous avons obtenues en simulant les données .

	$\sigma \setminus \epsilon$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
biais	1	0.0033	0.0033	0.0033	0.0033	0.0033	0.0033
	5	0.0033	0.0083	0.0052	0.0020	0.0096	0.0057
	10	0.0033	0.0041	0.0042	0.0048	-0.0081	-0.0046
mse	1	0.0305	0.0305	0.0305	0.0305	0.0305	0.0305
	5	0.0305	0.0336	0.0316	0.0333	0.0345	0.0347
	10	0.0305	0.0279	0.0323	0.0304	0.0333	0.0323

Table 16. Variation du biais et du Mse en fonction de σ et de ϵ , $n = 20$

	$\sigma \setminus \epsilon$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
biais	1	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013
	5	0.0013	-0.0025	0.0022	0.0028	-0.0052	-0.0024
	10	0.0013	-0.0017	-0.0013	-0.0015	-0.0062	-0.0039
mse	1	0.0113	0.0113	0.0113	0.0113	0.0113	0.0113
	5	0.0113	0.0117	0.0101	0.0108	0.0112	0.0119
	10	0.0113	0.0119	0.0114	0.0106	0.0122	0.0104

Table 33. Variation du biais et du Mse en fonction de σ et de ϵ , $n = 50$

	$\sigma \setminus \epsilon$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
biais	1	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017
	5	0.0017	0.0007	0.0025	-0.0015	-0.0003	0.0006
	10	0.0017	0.0003	-0.0006	0.0012	-0.0032	0.0001
mse	1	0.0052	0.0052	0.0052	0.0052	0.0052	0.0052
	5	0.0052	0.0049	0.0052	0.0052	0.0054	0.0051
	10	0.0052	0.0051	0.0047	0.0053	0.0055	0.0052

Table 17. Variation du biais et du Mse en fonction de σ et de ϵ , $n = 100$

On remarque dans ces tables que les valeurs du biais changent légèrement en fonction des valeurs de σ et des valeurs de ϵ mais tendent toujours vers zéro pour différentes tailles de l'échantillon ($n=20$, $n=50$, $n=100$).

Dans le cas non contaminé ($\sigma = 1$ ou bien $\epsilon = 0$) les valeurs du Biais restent stables et proches de zéro.

On a les mêmes remarques sur le Mse.

Conclusion :

Après avoir étudié la variation du biais et du Mse de $\hat{\phi}_{MC}$, en fonction de Δ , de ϵ et pour différentes tailles de l'échantillon :

Nous avons remarqué que si ϕ_t suit une loi uniforme, ces résultats montrent que le biais et le Mse sont stables et proches de zéro, dans le cas où la contamination est de type IO.

Même remarque si ϕ_t suit une loi normale et une loi exponentielle.

Nous remarquons aussi que la stabilité du biais et de Mse de $\hat{\phi}_{MC}$, dans le cas où ϕ_t suit une loi uniforme est meilleure par rapport aux autres lois (loi normale et loi exponentielle) sous la contamination de type IO.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous nous sommes proposés de présenter un aperçu sommaire de quelques propriétés du processus autorégressif à coefficient aléatoire en commençant par la présentation de sa forme générale d'ordre n ($RCA(n)$) puis sa forme particulière c'est à dire, modèle autorégressif à coefficient aléatoire d'ordre 1 ($RCA(1)$) qui a un très grand nombre de propriétés intéressantes.

Dans la dernière partie du travail, nous avons fait une étude numérique de l'estimateur des moindres carrés du processus autorégressif à coefficient aléatoire contaminé en utilisant divers types de contamination dont le modèle AO (Additive outlier model), le modèle IO (Innovation outlier model) et le modèle de Tukey.

A travers cette étude, nous avons pu mettre en évidence un certain nombre de propriétés intéressantes qui nous renseignent sur le degré de stabilité de l'estimateur en présence de divers types de contamination.

Il serait judicieux de poursuivre en profondeur ce travail par une analyse théorique et pourquoi pas multivariée.

Bibliographie

- [1] Alexander Aue, Lajos Horvath and Josef Steinebach(2004). Estimation in random coefficient autoregressive models.
- [2] Alexander Aue (2004). Strong approximation for RCA(1) time series with applications .
- [3] Andel,J.(1976). Autoregressive séries with random parameters. Math. Operationsforsch. Statist. 7, 735-41.
- [4] Bassawa,I.V and Scott, D. J. (1983). Asymptotic Optimal Inference for non-ergodic models, Lecture Notes in statistics, vol 17, Springer-Verlag, New York.
- [5] Berkes, I, Horvath,L. and Kokoszka, P. (2003) GARCH processes : structure and estimation, Bernolli 9,201-27.
- [6] Bougerol, P. and Picard, N. (1992) Strict stationarity of generalized autoregressive processes. Ann Proba. 20, 1714-30.
- [7] Breiman, L. (1968). Probability, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts.
- [8] Brown, B.M, (1971). Martingale central limit theorems. Ann. Math. Statit. 42,59-66.
- [9] Brandt, A. (1986). The stochastic equation $Y_{n+1} = A_N Y_n + B_n$ with stationary coefficients. Adv. Appl. Probab. 18, 211-20.

- [10] Brockwell, P. J. and Davis, R. A. (1991). *Time Series : Theory and methods*. Springer-Verlag. New York.
- [11] Chow, W.S. and Teicher, H. (1997). *Probability Theory*(3rd edn). New York : Springer-Verlag.
- [12] Durrett, R. (1996). *Probability : Theory and examples*(2nd edn). Belmont : Duxbury Press.
- [13] Feigin, P. D. and Tweedie, R.L. (1985). Random coefficient autoregressive processes : a Markov chain analysis of stationarity and finiteness of moments, *Jour. of times Series Analysis* vol6, No. 1, 1-14.
- [14] Fellag, H. (1998). *Stability of estimators in autoregressive models. Case of small samples*. Thèse de Doctorat es-sciences. Université de Tizi-ouzou.
- [15] Fuller, W. A. (1996). *Introduction to Statistical Time Series*, second ed. Wiley, New York.
- [16] Gouriéroux, C. and Monfort (1989). A General Framework for Testing Null Hypothesis in a Mixed Form, *Econometric Theory*, **5**, 63-82.
- [17] HajèK, J.(1970). A characterization of limiting distributions of regular estimates, *Z. Wahr. Verw. Geb.* 14, 323-330.
- [18] Hali, P.G., Heyde, C.C., 1980. *Martingale Limit Theory and its Applications*. Academic Press, New York.
- [19] Hall, P.G. and Heyde, C.C. (1980). *Martingale Limit Theory and Its Applications*, Academic Press, New York.

- [20] Hall, W. J. and Mathiason, D. J. (1990). On large-sample estimation and testing in parametric models. *Int. Statist. Review*, 58, 77-97.
- [21] Hamilton, J. D., 1994. *Time Series Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [22] Hwang, S. Y. and Basawa, I. V. (1993). Asymptotic optimal inference For a class of nonlinear time series models, *Stoch. Proc. Applications*, 46, 91-113.
- [23] Hwang, S. Y. and Basawa, I. V. (1993). Asymptotic inference for a generalized first order random coefficient autoregressive process .
- [24] Hwang, S. Y., Basawa, I. V., (2003). Estimation for nonlinear autoregressive models generated by beta-ARCH processes. *Sankhya* 65, 744-762.
- [25] Hwang, S. Y., Basawa, I. V., Tae Yoon Kim (2005). Least squares estimation for critical random coefficient first-order autoregressive processes.
- [26] Lecam, L. (1960). *Locally Asymptotically Normal Families of Distributions*, Univ. California Publications in Statistics, Univ. of California Press, Berkeley.
- [27] Nicholls, D. F. and Quinn, B. G. (1982). *Random Coefficient Autoregressive Models : An introduction*, Lecture Notes in Statistics, Vol 11, Springer-Verlag, New York.
- [28] Pfanzagl, J. (1969). On the measurability and consistency of minimum contrast estimates. *Metrika* 14, 249-72.
- [29] Quinn, B. G. (1980). *Fixed and random coefficient Time series*. Unpublished Ph.D. thesis, Australian National University.
- [30] Quinn, B. G. (1982). A note on the existence of strictly stationary solutions to Bilinear equations. *J. Time ser. Anal.* 3, 249-52.

- [31] Quinn, B.G. and Nicholls, D.F. (1981) The estimation of random coefficient autoregressive models II. *J. Time Ser Anal* 2, 185-203.
- [32] Roussas, G.G (1972). *Contiguity of Probability Measures : Some Applications in Statistics*, Cambridge Univ. Press, London.
- [33] Tong, H. (1981). A note on a Markov Bilinear Stochastic Process in discrete time, *Jour of Times series Analysis*, 2, 279-284.
- [34] Tong, H. (1990). *Non linear Time Series*, Oxford University Press.
- [35] Wang, D. Ghosh, S.K. (2004) *Bayesian Analysis of random coefficient autoregressive models ISMS 2566*, N. C. State University.

Annexes

3.4 Annexe A

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	-0.0105	-0.0105	-0.0105	-0.0105	-0.0105	-0.0105	-0.0105	-0.0105	-0.0105
0.1	-0.0105	-0.0101	-0.0147	-0.0108	-0.0183	-0.0123	-0.0214	-0.0269	-0.0251
0.2	-0.0105	-0.0076	-0.0015	0.0025	0.0043	0.0042	0.0070	0.0100	0.0085
0.3	-0.0105	-0.0030	0.0044	0.0207	0.0306	0.0307	0.0386	0.0423	0.0477
0.4	-0.0105	0.0027	0.0230	0.0473	0.0668	0.0821	0.0875	0.1116	0.1192
0.5	-0.0105	0.0119	0.0509	0.0868	0.1111	0.1353	0.1500	0.1679	0.1847

Table 1.1. Valeurs du biais sous contamination modèle(3) , $n = 20$

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	0.0280	0.0280	0.0280	0.0280	0.0280	0.0280	0.0280	0.0280	0.0280
0.1	0.0280	0.0298	0.0340	0.0371	0.0450	0.0503	0.0638	0.0812	0.0935
0.2	0.0280	0.0298	0.0386	0.0452	0.0637	0.0752	0.0912	0.1256	0.1467
0.3	0.0280	0.0312	0.0415	0.0566	0.0766	0.0979	0.1117	0.1385	0.1718
0.4	0.0280	0.0322	0.0481	0.0751	0.0961	0.1258	0.1360	0.1784	0.2094
0.5	0.0280	0.0351	0.0511	0.0921	0.1139	0.1540	0.1854	0.2127	0.2394

Table 1.2. Valeurs de MSE sous contamination modèle(3), $n = 20$

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	-0.0036	-0.0036	-0.0036	-0.0036	-0.0036	-0.0036	-0.0036	-0.0036	-0.0036
0.1	-0.0036	-0.0037	-0.0046	-0.0049	-0.0087	-0.0050	-0.0103	-0.0150	-0.0187
0.2	-0.0036	-0.0021	0.0027	0.0050	0.0138	0.0125	0.0164	0.0188	0.0116
0.3	-0.0036	0.0009	0.0141	0.0291	0.0395	0.0428	0.0520	0.0605	0.0630
0.4	-0.0036	0.0087	0.0330	0.0568	0.0762	0.0857	0.0980	0.1091	0.1169
0.5	-0.0036	0.0152	0.0522	0.0855	0.1176	0.1335	0.1449	0.1634	0.1676

Table 1.3. Valeurs du biais sous contamination modèle(3), $n = 50$

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	0.0091	0.0091	0.0091	0.0091	0.0091	0.0091	0.0091	0.0091	0.0091
0.1	0.0091	0.0033	0.0144	0.0145	0.0181	0.0239	0.0316	0.0490	0.0595
0.2	0.0091	0.0100	0.0135	0.0205	0.0322	0.0417	0.0558	0.0779	0.0945
0.3	0.0091	0.0108	0.0171	0.0293	0.0419	0.0563	0.0779	0.0914	0.1118
0.4	0.0091	0.0115	0.0224	0.0396	0.0607	0.0828	0.0965	0.1250	0.1477
0.5	0.0091	0.0126	0.0282	0.0514	0.0872	0.1083	0.1306	0.1629	0.1800

Table 1.4. Valeurs de MSE sous contamination modèle(3), $n = 50$

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	-0.0020	-0.0020	-0.0020	-0.0020	-0.0020	-0.0020	-0.0020	-0.0020	-0.0020
0.1	-0.0020	-0.0020	-0.0016	-0.0032	-0.0064	-0.0058	-0.0046	-0.0092	-0.0183
0.2	-0.0020	0.0007	0.0058	0.0104	0.0172	0.0156	0.0182	0.0220	0.0215
0.3	-0.0020	0.0047	0.0187	0.0346	0.0466	0.0544	0.0624	0.0688	0.0710
0.4	-0.0020	0.0115	0.0369	0.0662	0.0832	0.1026	0.1097	0.1250	0.1270
0.5	-0.0020	0.0196	0.0609	0.0998	0.1285	0.1480	0.1589	0.1786	0.1877

Table 1.5. Valeurs du biais sous contamination modèle(3) , $n = 100$

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	0.0046	0.0046	0.0046	0.0046	0.0046	0.0046	0.0046	0.0046	0.0046
0.1	0.0046	0.0049	0.0056	0.0087	0.0123	0.0171	0.0241	0.0388	0.0520
0.2	0.0046	0.0053	0.0077	0.0132	0.0219	0.0338	0.0436	0.0684	0.0855
0.3	0.0046	0.0054	0.0103	0.0205	0.0378	0.0514	0.0686	0.0938	0.1135
0.4	0.0046	0.0062	0.0152	0.0333	0.0518	0.0756	0.0923	0.1281	0.1470
0.5	0.0046	0.0073	0.0218	0.0497	0.0800	0.1068	0.1278	0.1610	0.1850

Table 1.6. Valeurs de MSE sous contamination modèle(3), $n = 100$

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	-0.0009	-0.0009	-0.0009	-0.0009	-0.0009	-0.0009	-0.0009	-0.0009	-0.0009
0.1	-0.0009	-0.0005	-0.0001	0.0023	0.0025	-0.0018	-0.0018	-0.0012	-0.0034
0.2	-0.0009	0.0009	0.0080	0.0140	0.0198	0.0286	0.0316	0.0345	0.0369
0.3	-0.0009	0.0059	0.0213	0.0369	0.0528	0.0659	0.0707	0.0841	0.0866
0.4	-0.0009	0.0118	0.0412	0.0686	0.0914	0.1107	0.1197	0.1348	0.1451
0.5	-0.0009	0.0200	0.0625	0.1051	0.1356	0.1582	0.1740	0.1896	0.2000

Table 1.7. Valeurs du biais sous contamination modèle(3) , $n = 200$

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	0.0024	0.0024	0.0024	0.0024	0.0024	0.0024	0.0024	0.0024	0.0024
0.1	0.0024	0.0026	0.0032	0.0053	0.0082	0.0131	0.0194	0.0348	0.0485
0.2	0.0024	0.0027	0.0047	0.0100	0.0182	0.0292	0.0411	0.0651	0.0819
0.3	0.0024	0.0031	0.0074	0.0179	0.0324	0.0491	0.0645	0.0882	0.1098
0.4	0.0024	0.0036	0.0122	0.0296	0.0509	0.0740	0.0912	0.1238	0.1445
0.5	0.0024	0.0045	0.0182	0.0458	0.0757	0.1047	0.1299	0.1621	0.1842

Table 1.8. Valeurs de MSE sous contamination modèle(3), $n = 200$

3.5 Annexe B

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	-0.0238	-0.0238	-0.0238	-0.0238	-0.0238	-0.0238	-0.0238	-0.0238	-0.0238
0.1	-0.0238	-0.0283	-0.0387	-0.0541	-0.0706	-0.0831	-0.0923	-0.0109	-0.1300
0.2	-0.0238	-0.0269	-0.0405	-0.0560	-0.0658	-0.0785	-0.0948	-0.1080	-0.1177
0.3	-0.0238	-0.0255	-0.0238	-0.0349	-0.0461	-0.0421	-0.0525	-0.0572	-0.0636
0.4	-0.0238	-0.0214	-0.0128	-0.0084	0.0057	0.0024	0.0053	0.0005	-0.0076
0.5	-0.0238	-0.0110	0.0161	0.0393	0.0557	0.0584	0.0668	0.0732	0.0731

Table 2.1. Valeurs du biais sous contamination modèle(3), $n = 20$

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	0.0351	0.0351	0.0351	0.0351	0.0351	0.0351	0.0351	0.0351	0.0351
0.1	0.0351	0.0391	0.0421	0.0459	0.0508	0.0563	0.0565	0.0714	0.0797
0.2	0.0351	0.0392	0.0471	0.0548	0.0589	0.0681	0.0757	0.0855	0.0939
0.3	0.0351	0.0395	0.0489	0.0531	0.0667	0.0704	0.0723	0.0802	0.0906
0.4	0.0351	0.0415	0.0482	0.0597	0.0651	0.0774	0.0845	0.0843	0.0966
0.5	0.0351	0.0429	0.0503	0.0670	0.0783	0.0843	0.0885	0.1046	0.1025

Table 2.2. Valeurs de MSE sous contamination modèle(3), $n = 20$

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	-0.0091	-0.0091	-0.0091	-0.0091	-0.0091	-0.0091	-0.0091	-0.0091	-0.0091
0.1	-0.0091	-0.0131	-0.0189	-0.0321	-0.0402	-0.0593	-0.0704	-0.0962	-0.1072
0.2	-0.0091	-0.0155	-0.0172	-0.0261	-0.0335	-0.0456	-0.0572	-0.0721	-0.0816
0.3	-0.0091	-0.0088	-0.0021	-0.0060	-0.0032	-0.0123	-0.0108	-0.0106	-0.0231
0.4	-0.0091	0.0001	0.0160	0.0354	0.0474	0.0422	0.0494	0.0478	0.0487
0.5	-0.0091	0.0104	0.0429	0.0742	0.0905	0.1060	0.1153	0.1241	0.1231

Table 2.3. Valeurs du biais sous contamination modèle(3), $n = 50$

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	0.0146	0.0146	0.0146	0.0146	0.0146	0.0146	0.0146	0.0146	0.0146
0.1	0.0146	0.0150	0.0161	0.0173	0.0202	0.0248	0.0292	0.0386	0.0440
0.2	0.0146	0.0146	0.0174	0.0203	0.0259	0.0290	0.0322	0.0450	0.0442
0.3	0.0146	0.0161	0.0180	0.0223	0.0273	0.0329	0.0372	0.0461	0.0522
0.4	0.0146	0.0162	0.0212	0.0290	0.0352	0.0399	0.0470	0.0539	0.0553
0.5	0.0146	0.0168	0.0250	0.0358	0.0458	0.0542	0.0667	0.0768	0.0780

Table 2.4. Valeurs de MSE sous contamination modèle(3), $n = 50$

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	-0.0053	-0.0053	-0.0053	-0.0053	-0.0053	-0.0053	-0.0053	-0.0053	-0.0053
0.1	-0.0053	-0.0079	-0.0160	-0.0304	-0.0451	-0.0582	-0.0720	-0.1028	-0.1139
0.2	-0.0053	-0.0078	-0.0140	-0.0259	-0.0388	-0.0455	-0.0584	-0.0797	-0.0832
0.3	-0.0053	-0.0030	-0.0013	-0.0057	-0.0058	-0.0090	-0.0151	-0.0216	-0.0254
0.4	-0.0053	0.0029	0.0178	0.0311	0.0355	0.0415	0.0422	0.0459	0.0434
0.5	-0.0053	0.0109	0.0425	0.0745	0.0881	0.1043	0.1122	0.1165	0.1193

Table 2.5. Valeurs du biais sous contamination modèle(3), $n = 100$

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	0.0070	0.0070	0.0070	0.0070	0.0070	0.0070	0.0070	0.0070	0.0070
0.1	0.0070	0.0071	0.0077	0.0096	0.0127	0.0144	0.0194	0.0317	0.0364
0.2	0.0070	0.0074	0.0088	0.0116	0.0159	0.0211	0.0250	0.0363	0.0418
0.3	0.0070	0.0077	0.0096	0.0143	0.0187	0.0235	0.0298	0.0393	0.0420
0.4	0.0070	0.0079	0.0122	0.0174	0.0248	0.0322	0.0375	0.0466	0.0478
0.5	0.0070	0.0083	0.0148	0.0277	0.0377	0.0483	0.0554	0.0663	0.0697

Table 2.6. Valeurs de MSE sous contamination modèle(3), $n = 100$

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	-0.0036	-0.0036	-0.0036	-0.0036	-0.0036	-0.0036	-0.0036	-0.0036	-0.0036
0.1	-0.0036	-0.0046	-0.0157	-0.0271	-0.0397	-0.0579	-0.0721	-0.0972	-0.1109
0.2	-0.0036	-0.0056	-0.0134	-0.0206	-0.0313	-0.0451	-0.0587	-0.0707	-0.0773
0.3	-0.0036	-0.0022	-0.0012	-0.0021	-0.0024	-0.0037	-0.0093	-0.0163	-0.0162
0.4	-0.0036	0.0044	0.0226	0.0337	0.0422	0.0489	0.0523	0.0494	0.0506
0.5	-0.0036	0.0155	0.0509	0.0807	0.0998	0.1127	0.1174	0.1254	0.1276

Table 2.7. Valeurs du biais sous contamination modèle(3), $n = 200$

$\epsilon \setminus \Delta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0	0.0034	0.0034	0.0034	0.0034	0.0034	0.0034	0.0034	0.0034	0.0034
0.1	0.0034	0.0035	0.0040	0.0055	0.0075	0.0111	0.0159	0.0250	0.0311
0.2	0.0034	0.0037	0.0045	0.0068	0.0107	0.0159	0.0213	0.0318	0.0350
0.3	0.0034	0.0037	0.0054	0.0095	0.0139	0.0195	0.0244	0.0325	0.0369
0.4	0.0034	0.0040	0.0078	0.0133	0.0208	0.0286	0.0342	0.0414	0.0449
0.5	0.0034	0.0045	0.0116	0.0233	0.0345	0.0456	0.0522	0.0627	0.0657

Table 2.8. Valeurs de MSE sous contamination modèle(3), $n = 200$