

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERRI Tizi Ouzou.



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Automatique

Mémoire de fin d'études de MASTER Académique

Spécialité : Commande des systèmes
Filière : Génie Electrique

Présenté Par :
Hacene NEBRI

Mémoire dirigé par : Saïd DJENNOUNE Professeur UMMTO
et codirigé par : Lyes NECHAK Maître de conférences Ecole Centrale de Lyon

Thème :

Dynamique et stabilité des systèmes frottants avec prise en compte des incertitudes.

Mémoire soutenu publiquement le 21/09/2015 devant le jury composé de :

M. Kamal HAMMOUCHE	Professeur	UMMTO	Président
M. Amar SI AMMOUR	MCA	UMMTO	Examineur
Mme. Nadia DJEGHALI	MCB	UMMTO	Examineur

Thème proposé par M. NECHAK Lyes maître de conférences-Ecole Centrale de Lyon et réalisé au sein du Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP).

A tous ceux qui me sont chers...

A mon père et ma mère

*Et à tous ceux qui ont contribué à la réalisation
de cet humble travail*

« Quand les choses vont vraiment mal, comme elles savent si bien le faire quelques fois. Quand la route sur laquelle tu chemines péniblement semble s'achever au sommet d'une colline. Quand les fonds sont bas et les dettes culminent. Tu voudrais sourire et tu dois pousser des soupirs. Quand le souci te pousse dans la déprime repose toi si tu veux, mais N'ABANDONNE PAS. La vie est si étrange avec ses revers et ses détours comme chacun de nous a pu l'apprendre et beaucoup qui ont été abattus par un échec auraient pu réussir s'ils ont persévéré. N'abandonne pas, même si tout te semble aller lentement car un souffle peut apporter la réussite. Le succès n'est que le revers de l'échec, et tu ne peux jamais savoir à quelle distance se trouve le but qui te semble lointain. Aussi, continue ta lutte au plus fort du combat, car c'est quand tout te semble perdu que tu ne dois pas abandonner. »

Mouloud MAMMARI.

Remerciements

Je voudrais d'abord exprimer ma gratitude à M. DJENNOUNE Saïd Professeur à l'UMMTO, pour le temps qu'il a consacré à corriger ce mémoire et pour l'avoir enrichi avec ses précieuses remarques.

Je remercie M. NECHAK Lyes maître de conférences à l'Ecole Centrale de Lyon pour m'avoir proposé ce thème, pour tous les conseils qu'il m'a prodigués durant la préparation de ce mémoire et pour ses remarques pertinentes qui m'ont beaucoup aidé à mener à bien ce travail.

Mes sincères remerciements vont aussi à tous les membres du jury.

Enfin, un grand merci pour tous ceux qui m'ont soutenu durant la préparation de ce mémoire notamment mes parents et tous les membres de ma famille.

Résumé

Ce mémoire présente des méthodes d'analyse de la stabilité de systèmes mécaniques frottants. Ces derniers constituent une classe particulière des systèmes dynamiques trouvant applications dans de nombreux domaines industriels notamment ceux de l'automobile, de l'aéronautique et du ferroviaire. On peut citer, à titre d'exemples, les systèmes de freinage, d'embrayage et d'essuyage. Ces systèmes sont caractérisés par des comportements dynamiques très sensibles aux variations des paramètres de conception. Cette sensibilité peut se distinguer par des variations conséquentes des propriétés de stabilité (perte de stabilité, occurrence de bifurcation etc.). D'un autre côté, les paramètres de conception sont soumis à des dispersions pouvant être liées aux procédés de fabrications, aux conditions de fonctionnement, à l'usure etc. Il est alors nécessaire de développer des méthodes efficaces permettant d'analyser la stabilité de ces systèmes en prenant en compte ces dispersions pour en garantir la robustesse et pour aider, dans une perspective plus générale, à concevoir ces systèmes de façon robuste. Plusieurs approches sont développées pour aborder la stabilité de systèmes dynamiques à paramètres incertains. Le choix d'une approche dépend des modèles utilisés pour représenter les incertitudes. Nous nous sommes intéressés, dans le cadre de ce mémoire, à l'approche probabiliste plus particulièrement aux méthodes de Monte Carlo et du chaos polynomial généralisé combinées avec la méthode de Lyapunov. L'objectif principal de ce travail est d'évaluer les capacités préliminaires de la technique non-intrusive du chaos polynomial généralisé à être utilisée pour analyser efficacement la stabilité de systèmes mécaniques frottants à paramètres incertains. Ces capacités sont évaluées par une comparaison aux résultats d'analyse via la méthode de Monte Carlo considérée comme méthode de référence.

Mots clés : Systèmes frottants, Stabilité de Lyapunov, Simulation de Monte Carlo, Chaos polynomial généralisé, Chaos polynomial intrusif, Méthode de régression.

Table des matières

Introduction générale.....	1
-----------------------------------	----------

Chapitre 1 : Généralités sur les systèmes dynamiques

1.1. Introduction	3
1.2. Notion de système	3
1.2.1. Système linéaire	4
1.2.1.1. Système linéaire temps variant et système linéaire temps invariant	4
1.2.2. Système non linéaire	5
1.3. Modélisation d'un système	5
1.3.1. Système linéaire	5
1.3.1.1. Représentation d'état.....	5
1.3.1.2. Fonction de transfert.....	6
1.3.1.3. Réponse impulsionnelle	7
1.4. Notion de système frottant.....	8
1.4.1. Frottement.....	8
1.4.2. Coefficient de frottement	9
1.4.3. Angle de frottement	9
1.4.4. Mécanismes d'apparition des instabilités induites par le frottement	10
1.4.4.1. Stick slip.....	10
1.4.4.2. Sprag slip.....	11
1.4.4.3. Couplage de modes	12
1.5. Conclusion	13

Chapitre 2 : Notion de stabilité

2.1. Introduction	14
2.2. Concepts de stabilité.....	14
2.2.1. Stabilité des systèmes linéaires	14
2.2.1.1. Stabilité externe.....	15
2.2.1.2. Stabilité interne	17
2.2.1.3. Critères algébriques de stabilité	18
2.2.1.3.1. Critère de Routh.....	19

2.2.1.3.2. Critère de Hurwitz	20
2.2.1.4. Stabilité au sens de Lyapunov	21
2.2.1.4.1. Fonction de Lyapunov	21
2.2.1.4.2. Construction des fonctions de Lyapunov	22
2.2.1.4.3. Équation de Lyapunov	23
2.2.1.4.4. Étude des systèmes linéaires temps invariant	23
2.3. Conclusion	24

Chapitre 3 : Variable aléatoire et processus stochastiques

3.1. Introduction	25
3.2. Théorie des probabilités.....	25
3.3. Notion de variable aléatoire.....	26
3.3.1. Variable aléatoire continue (à densité).....	26
3.3.1.1. Lois de probabilité continues	26
3.3.2. Variable aléatoire discrète.....	28
3.3.2.1. Lois de probabilité discrètes.....	28
3.4. Processus stochastique.....	29
3.5. Méthodes probabilistes de propagation et de quantification des incertitudes	29
3.5.1. Méthode de Monte Carlo	30
3.5.2. Chaos polynomial	33
3.5.3. Chaos polynomial généralisé	34
3.5.4. Approximation des systèmes linéaires stochastiques en utilisant le chaos polynomial généralisé	36
3.5.4.1. Schéma de calcul intrusif	37
3.5.4.2. Schéma de calcul non intrusif : méthode régression	39
3.5.5. Analyse de la stabilité des systèmes stochastiques en utilisant le chaos polynomial	40
3.5.5.1. Analyse de la stabilité des valeurs propres.....	42
3.6. Conclusion	44

Chapitre 4 : Application des méthodes probabilistes pour l'analyse de la stabilité d'un système frottant

4.1. Introduction	45
4.2. Système avec frottement.....	45
4.2.1. Frein à tambour	45
4.2.2. Avantages et inconvénients.....	46
4.2.3. Description du modèle mécanique	47
4.2.4. Equations de mouvement.....	48
4.3. Analyse robuste de la stabilité	49
4.3.1. Analyse de la stabilité par la méthode de Monte Carlo	49
4.3.1.1. Conclusion.....	51
4.3.2. Application du chaos polynomial généralisé non-intrusif : méthode de régression	52
4.3.2.1. Conclusion.....	60
4.4. Conclusion	60
Conclusion générale	61
Références bibliographiques	62
Liste des figures	64
Liste des tableaux	64

Introduction générale

L'Automatique est une branche interdisciplinaire de l'ingénierie et des mathématiques qui s'intéresse au comportement des systèmes dynamiques. L'un des principaux buts de l'automaticien est de concevoir un système, appelé correcteur, capable de commander un système physique donné (également appelé processus physique), autrement dit de l'influencer de façon à ce qu'il se comporte d'une certaine façon désirée. L'intérêt est d'obtenir des processus autorégulés requérant un minimum d'intervention humaine pour fonctionner. Par exemple, le régulateur de vitesse d'une voiture a pour rôle de maintenir le véhicule à une vitesse donnée malgré des perturbations, comme l'état de la route ou le vent. Dans ce cadre, les méthodes d'analyse jouent un rôle central. En effet, la mise en œuvre d'un contrôleur suppose une connaissance et une compréhension du comportement du système ainsi que ses propriétés structurelles telles que sa commandabilité et son observabilité mais aussi, et surtout, sa stabilité. Il existe beaucoup de méthodes d'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques. Le choix de la méthode dépend du type du modèle considéré pour représenter le comportement dynamique du système. Par ailleurs, un modèle n'est qu'une approximation d'une réalité, très souvent, complexe du système. Ce caractère approximatif peut être lié à des hypothèses simplificatrices, à des phénomènes physiques mal compris ou mal connus et donc non pris en compte, à des paramètres mal identifiés ou évoluant en fonction du temps avec des lois non-identifiées etc. L'analyse de la stabilité doit ainsi être effectuée en tenant compte de ces formes d'incertitudes d'où la définition de la notion de la robustesse. En effet, un système est dit robuste vis-à-vis de la stabilité par rapport à une forme d'incertitude s'il reste stable même en présence de la dite incertitude. Toute la question est alors dans la définition des méthodes permettant d'analyser de façon robuste la stabilité de systèmes dynamiques incertains. Plusieurs approches sont proposées dans cette optique en littérature. Le choix de l'approche dépend aussi de la structure du modèle du système mais aussi du modèle considéré pour représenter les incertitudes. Ce mémoire se focalise sur l'approche probabiliste. De façon plus précise, il s'intéresse à l'analyse de la stabilité de systèmes dynamiques linéaires à temps invariant et à paramètres incertains décrits par des lois de probabilité. La technique du chaos polynomial généralisé est proposée dans cette perspective.

Le chaos polynomial généralisé définit un cadre mathématique permettant d'exprimer un processus stochastiques à variance finie par un développement en série de fonctions polynomiales orthogonales par rapport aux coordonnées probabilistes (variables modélisant les incertitudes) et pondérées par des coefficients déterministes dits 'modes stochastiques'. Ces derniers sont obtenus en utilisant des schémas numériques intrusifs ou non-intrusifs.

Le formalisme du chaos polynomial généralisé, proposé dans des études très récentes pour traiter de l'analyse de la stabilité presque-sûre (contrepartie de la notion de robustesse dans le cadre probabiliste) est reconsidérée et développé dans ce mémoire. L'objectif principal visé est d'évaluer ces capacités préliminaires à être efficacement utilisé pour analyser la stabilité des systèmes mécaniques frottants. Ces derniers, jouant un rôle central dans beaucoup de domaines industriels tels que l'automobile, l'aéronautique et le ferroviaire, présentent des comportements dynamiques très sensibles aux variations des paramètres de conception plus particulièrement le coefficient de frottement. Cette sensibilité peut être distinguée par des variations importantes des propriétés de stabilité (perte de la stabilité, bifurcation) et par conséquent des niveaux vibratoires. Par ailleurs, ces paramètres sont soumis à des dispersions pouvant être induites par les procédés de fabrication, par les conditions de fonctionnement, par l'usure ou carrément par des propriétés intrinsèques aux paramètres. Il est donc nécessaire de définir des méthodes d'analyse de la stabilité de ce type de systèmes en prenant en compte les incertitudes inhérentes à leurs paramètres. La méthode de Monte Carlo, basée sur l'échantillonnage des distributions probabilistes des paramètres incertains et sur l'analyse de la stabilité pour chaque tirage et considérée comme la méthode de référence dans le contexte probabiliste, s'avère très coûteuse. En effet, ses propriétés de convergence imposent un nombre de tirages très important pour garantir une précision et un niveau de confiance raisonnables pour les résultats. Par ailleurs, les systèmes frottants étant complexes, les modèles associés, issus des éléments finis, sont de grandes dimensions rendant l'analyse de la stabilité presque-sûre via la méthode de Monte Carlo impraticable dans beaucoup de cas. Le chaos polynomial généralisé est proposé aussi, dans le cadre de ce mémoire, pour évaluer ces capacités à se substituer aux techniques coûteuse de Monte Carlo. Pour ce faire, ce mémoire est organisé en quatre chapitres :

Le premier chapitre de ce mémoire abordera les notions de base et des généralités sur les systèmes dynamiques en rappelant la notion de systèmes frottants et leurs différentes caractéristiques.

Le deuxième chapitre sera consacré aux méthodes d'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires dans lequel nous allons aborder la méthode de Lyapunov.

Le troisième chapitre a pour objectif de présenter des notions sur la théorie de probabilités, des concepts de base tel celui de la variable aléatoire et des processus stochastiques. Les concepts de chaos polynomial et du chaos polynomial généralisé seront présentés dans ce chapitre ainsi que la méthode de Monte Carlo.

Dans le quatrième chapitre il sera question d'appliquer les méthodes vues dans le troisième chapitre à l'analyse de la stabilité d'un système mécanique frottant à deux degrés de liberté modélisant le fonctionnement d'un système de freinage à tambour dont le coefficient de frottement est régi par une loi de probabilité uniforme. Une conclusion générale est énoncée à la fin de ce mémoire.

Chapitre 1 : Généralités sur les systèmes dynamiques

1.1. Introduction

Ce chapitre a essentiellement pour objectif de présenter quelques rappels et définitions sur les systèmes dynamiques qui seront utiles pour l'analyse et l'étude de leurs performances notamment la stabilité. Ensuite, la notion de système frottant, qui fait l'objet d'étude de ce mémoire sera présentée.

1.2. Notion de système

Un système est une combinaison de composants interconnectés pour rendre à son environnement les services correspondants à sa finalité.

En automatique, on désigne par un système un procédé évoluant sous l'action de son entrée u (entrée de commande) générée par l'environnement extérieur. Cette évolution est caractérisée par sa sortie y , par laquelle le système agit sur l'environnement. Un système peut aussi être soumis à des entrées qui sont non commandables nommées les perturbations et notées d .

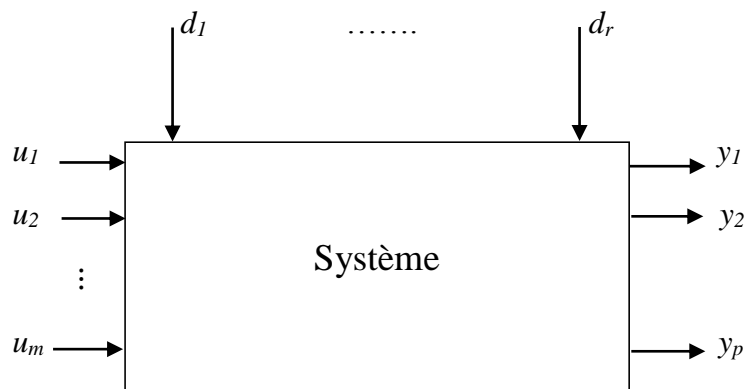


Figure 1.1 : Système comportant m entrées, p sorties et r perturbations.

A partir de la figure 1.1, on peut distinguer les systèmes mono-variables caractérisés par $m=p=1$ des systèmes multi-variables définis par le cas où $m>1$ et $p>1$.

1.2.1. Système linéaire

Un système linéaire est un système obéissant au principe de superposition.

Définition 1.1 : (principe de superposition)

Soient deux signaux d'entrées $u_1(t)$ et $u_2(t)$ engendrant deux signaux de sorties $y_1(t)$ et $y_2(t)$ (voir figure 1.2). La réponse à la somme des entrées $\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$ est la somme des réponses individuelles, i.e. $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$.

Un système linéaire est un système décrit par des équations différentielles linéaires d'ordre fini, c'est-à-dire sa fonction de transfert est une fraction rationnelle en s (s désigne la variable de Laplace).

Tout système obéissant au principe de superposition est un système linéaire, par conséquent tout système qui n'obéit pas au principe de superposition est un système non-linéaire.

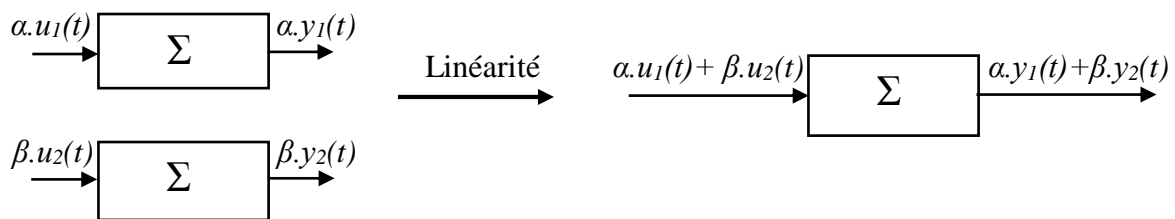


Figure 1.2 : Linéarité d'un système

1.2.1.1 Systèmes linéaires temps (paramètres) variant (LPV) et systèmes linéaires temps invariant (LTI)

Un système dynamique à paramètres linéaires temps invariant peut être décrit par des équations différentielles linéaires temps invariant (coefficients constants). De tels systèmes sont appelés systèmes linéaires temps invariant (LTI). Les systèmes décrits par des équations différentielles dont les paramètres dépendent du temps sont appelés systèmes linéaires temps (ou paramètres) variant (LPV). Si on prend, par exemple, un avion comme étant un système dynamique, ce système sera considéré comme un système linéaire temps variant. (La masse de l'avion, qui est un paramètre, varie en fonction de la consommation du carburant.)

1.2.2. Système non-linéaire

Par définition, un système non-linéaire est un système qui n'est pas linéaire, c'est-à-dire qui ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires. Le principe de superposition ne s'y vérifie pas.

Cette définition, explique la complexité et la diversité des systèmes non linéaires et des méthodes qui s'y appliquent. Il n'y a pas une théorie générale pour ces systèmes, mais il existe plusieurs méthodes adaptées à certaines classes de systèmes non linéaires.

Un système non linéaire est souvent décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.1)$$

1.3. Modélisation d'un système :

1.3.1. Système linéaire

Dans l'étude des systèmes nous devons être capables de modéliser la dynamique du système afin d'analyser ses caractéristiques. Le modèle mathématique d'un système est une relation mathématique qui relie l'entrée, le système et la sortie. Cette relation est censée permettre la détermination de la sortie du système pour n'importe quelle entrée donnée. Notons qu'un modèle mathématique n'est pas unique pour un système donné. En effet, un système peut être représenté de différentes manières, et par conséquent, peut avoir plusieurs modèles mathématiques. On y distingue essentiellement :

1.3.1.1. Représentation d'état (description interne)

Les équations d'état constituent une description dans le domaine temporel, qui peut être appliquée à une large catégorie de systèmes, linéaires, non-linéaires, temps variant et temps invariant, et à des systèmes dont les conditions initiales sont nulles ou non nulles...

D'un point de vue mathématique, l'état d'un système est exprimé par ses variables d'état. Généralement un système est décrit par un nombre fini de variables d'état, qui sont notées $x_1(t)$, $x_2(t), \dots, x_n(t)$.

Le modèle d'état linéaire à temps invariant et à paramètres constants est défini par deux ensembles d'équations, un ensemble d'équations différentielles du premier ordre dite équations d'état et un ensemble d'équations de sortie. Elles sont définies comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

où :

A : matrice d'état, matrice carrée $n \times n$ (n ordre du système)

B : matrice de commande $n \times p$ (p nombre d'entrées)

C : matrice d'observation ou de sortie $q \times n$ (q nombre de sorties)

D : matrice de transmission directe, matrice $q \times p$ (si on a un système $p=1$ et $q=1$ D est un scalaire).

$u(t)$ représente le vecteur d'entrées

$x(t)$ représente le vecteur d'état

$y(t)$ représente le vecteur de sortie

on note par $\Delta(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ le polynôme caractéristique de A .

Si la représentation d'état est minimale (c'est à dire commandable et observable) alors l'ensemble des valeurs propres de A est identique à celui des pôles de la fonction de transfert.

La représentation d'état suppose une connaissance a priori de la structure interne du système. Lorsque cette structure est inconnue, il est possible de décrire le système d'une manière externe qui relie les entrées du système à ces sorties. Cependant, il existe des méthodes qui nous permettent de passer de la description interne à la description externe et vice versa.

1.3.1.2. Fonction de transfert (description externe)

La fonction de transfert d'un système linéaire temps invariant (LTI) est définie comme étant le rapport de la transformée de Laplace de sa sortie sur la transformée de Laplace de son entrée en supposant que les conditions initiales sont nulles.

Soit le système LTI défini par les équations différentielles suivantes :

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^m + b_1 u^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{u} + b_m u \quad (n \geq m) \quad (1.3)$$

où y est la sortie du système et u son entrée. La fonction de transfert de ce système est obtenue en appliquant la transformée de Laplace à l'équation (1.3) et en faisant le rapport de la sortie sur l'entrée avec les conditions initiales supposées nulles. On aura :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (1.4)$$

Le but de cette représentation est de pouvoir déterminer les caractéristiques de la sortie $y(t)$ connaissant la fonction de transfert $H(s)$ du système et le signal d'entrée $u(t)$.

$H(s)$ peut s'écrire sous la forme :

$$H(s) = \frac{(s-z_1)(s-z_2) \dots (s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2) \dots (s-p_n)} \quad (1.5)$$

L'ensemble des z_i forme les zéros de $H(s)$, l'ensemble des p_i forme les pôles de $H(s)$, et n l'ordre du système.

L'application de la fonction de transfert est limitée aux systèmes linéaires temps invariant, cette méthode est largement utilisée pour la modélisation et l'analyse de tels systèmes.

1.3.1.3. Réponse impulsionnelle (description externe)

Tout système physique est caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ qui est aussi sa fonction de transfert. On appelle réponse impulsionnelle d'un système sa réponse à une impulsion de Dirac notée :

$$\begin{cases} h(t) = C e^{At} B + D \delta(t) \\ Y(t) = H(t) \otimes U(t) = \int_0^t H(t - \tau) U(\tau) d\tau \end{cases} \quad (1.6)$$

L'évolution de cette réponse dans le temps permet de dire si un système est stable ou non.

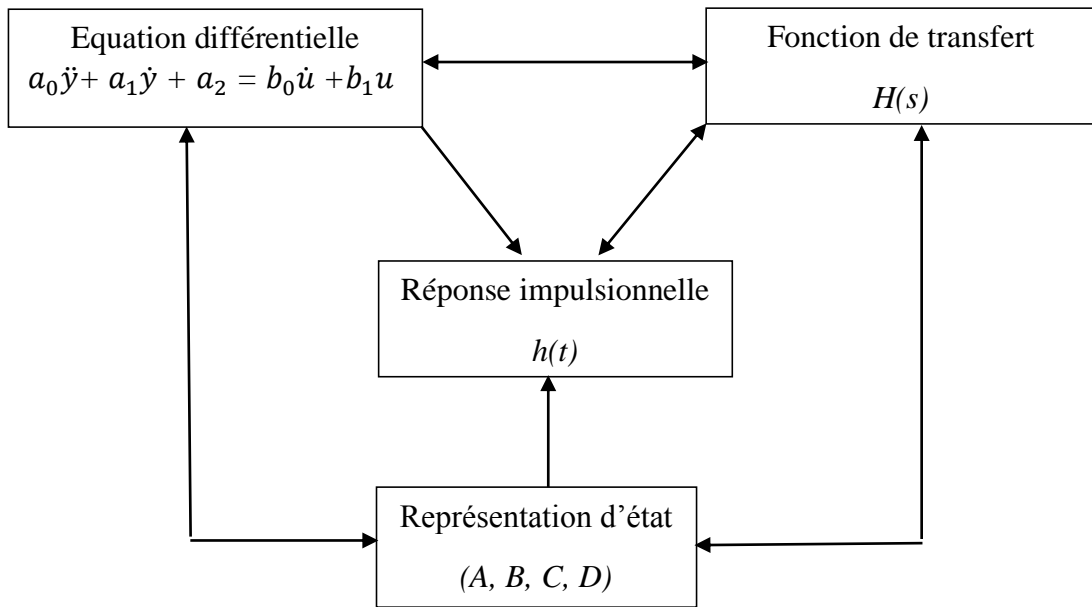


Figure 1.3 : Relation entre les différentes modélisations d'un système linéaire

1.4. Notion de système frottant

Les phénomènes liés au problème de contact mécanique et frottement sont présents dans de nombreuses applications domestiques et industrielles tel que le freinage, l'essuyage, l'embrayage...etc.

Le frottement provoque des pertes d'énergie, l'usure des surfaces et peut, sous de fortes contraintes, causer des fissures. Cependant, dans un certain nombre de cas, la prise en compte du frottement est nécessaire, soit pour en diminuer les effets (pertes d'énergie, amélioration du rendement, etc.), soit pour l'utiliser avec bénéfice (freins, embrayages, courroies, arc-boutement, équilibre ou stabilité de certains mécanismes, etc.).

Le contact demeure, encore aujourd'hui, l'un des problèmes de mécanique des solides qui représente les non-linéarités les plus difficiles à prendre en compte.

1.4.1. Frottement

Le frottement est une force qui s'oppose au glissement d'une surface sur une autre. Autrement dit c'est une force qui s'oppose à un mouvement prêt à s'établir ou déjà établi.

On parle de frottement sec dans le cas où les surfaces sont non lubrifiées et de frottement visqueux dans le cas inverse.

1.4.2. Coefficient de frottement

Le coefficient de frottement souvent symbolisé par la lettre grecque (μ), est une valeur scalaire sans dimension qui décrit le rapport entre la force de frottement entre deux corps et la force de pression les maintenant l'un contre l'autre.

Le coefficient de frottement est donné par $\mu = \tan(\varphi)$ φ : angle de frottement

Le coefficient de frottement dépend :

- Des matériaux en contact
- De l'état des surfaces en contact (rugosité)
- De la présence ou non de lubrifiant

1.4.3. Angle de frottement (Valentin L. Popov 2010)

On appelle angle de frottement φ , la valeur limite de l'angle d'inclinaison de la force de contact $\vec{A}_{0/1}$ au-delà de laquelle l'équilibre sera rompu.

Lorsque la force $\vec{A}_{0/1}$ est inclinée de l'angle φ , on est dans le cas de l'équilibre « limite » ou « strict ». On parle de contact avec adhérence.

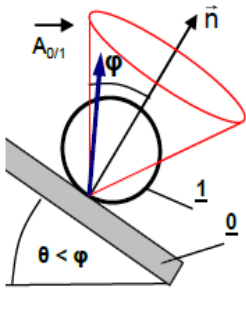
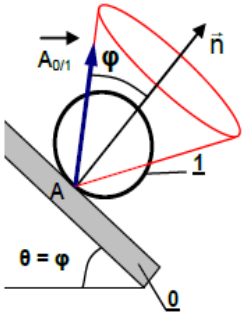
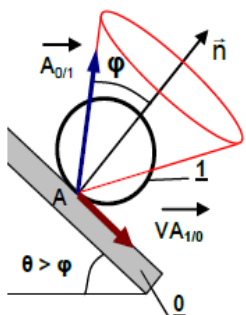
<u>Adhérence</u>	<u>Adhérence</u> « limite » ou « strict »	<u>Frottement</u>
<u>Pas de mouvement</u>		<u>Mouvement</u>
		
La force est à l' INTERIEUR du cône	La force est SUR le cône	La force est SUR le cône

Figure 1.4 : Illustration de l'angle de frottement

- **Frottement statique (Valentin L. Popov 2010)**

Le frottement statique est une force F_S qui empêche un mouvement de démarrer. C'est lui qui nous permet, en s'appuyant sur le sol, d'avancer et de tenir la route dans un virage.

Le frottement statique n'est pas consommateur d'énergie puisqu'il ne s'accompagne d'aucun déplacement. La force maximale de frottement statique F_{smax} , au-delà de laquelle il y a glissement est proportionnelle à la force normale F_N selon un coefficient de frottement statique μ_s dépendant des deux matériaux en contact.

$$F_{smax} = \mu_s \cdot F_N \quad (1.7)$$

- **Frottement cinétique (Valentin L. Popov 2010)**

Le frottement cinétique est la force qui tend à freiner un corps glissant sur une surface. Cette force F_C est égale et de sens opposé à la force motrice nécessaire pour maintenir le corps en mouvement uniforme. Elle est donnée par la formule $F_C = \mu_c \times F_N$, dans laquelle μ_c est le coefficient de frottement cinétique.

1.4.4. Mécanismes d'apparition des instabilités induites par le frottement

1.4.4.1. Stick slip

Le stick-slip est caractérisé par la succession de deux phénomènes: glissement (slip) et adhérence (stick). Ce phénomène a été avancé dès 1955 par les travaux de Sinclair et al. Puis largement étudié et expliqué (Oden et Martins 1985, Rabinowicz 1959, Ibrahim 1994).

D'un point de vue physique, le stick-slip se traduit par des oscillations auto-entretenues dues à la discontinuité du coefficient de frottement entre les phases "adhérence" et "glissement".

Deux modèles, masse(m)-ressort(k)-amortisseur(c), à un degré de liberté sont souvent utilisés pour étudier le phénomène de stick slip.

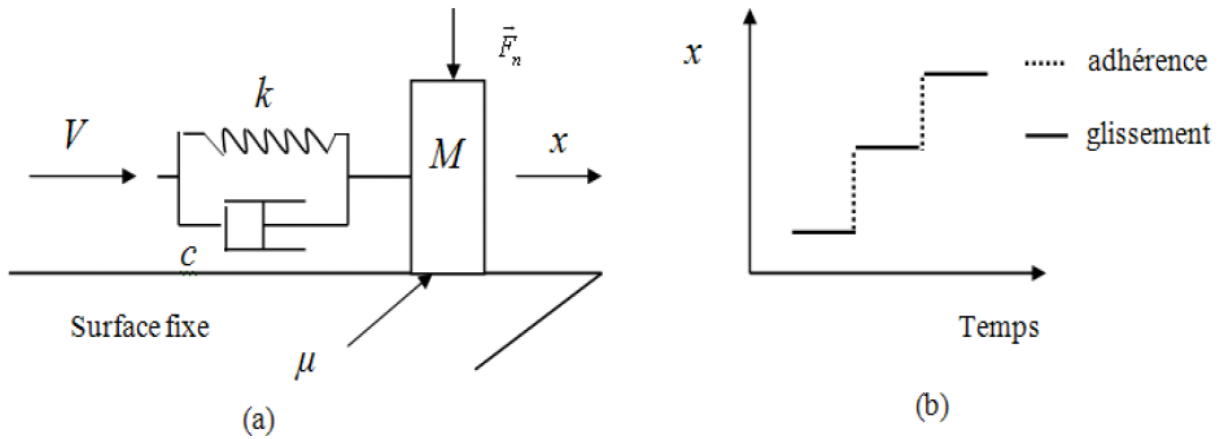


Figure 1.5 : (a) Premier modèle de stick slip.

(b) Déplacement en fonction du temps

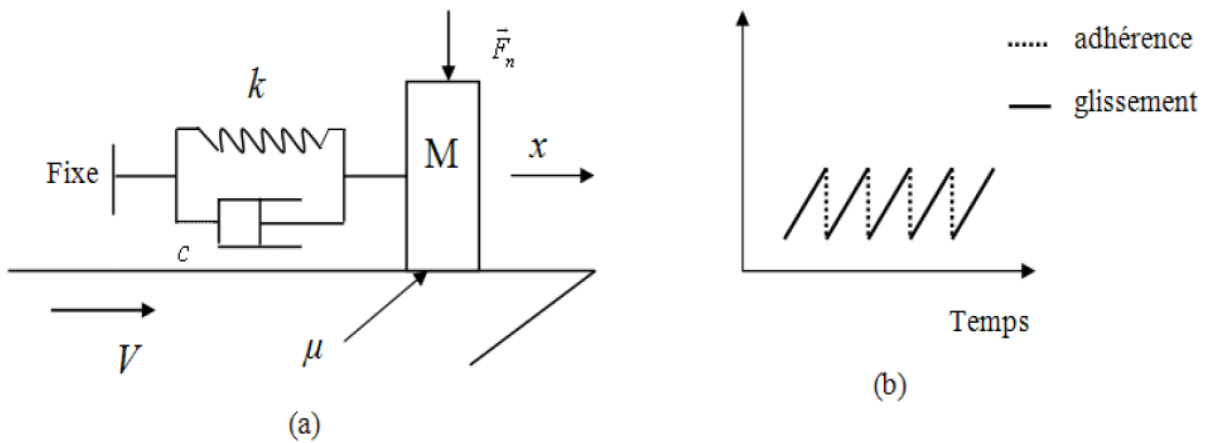


Figure 1.6 : (a) Deuxième modèle stick slip.

(b) Déplacement en fonction du temps

1.4.4.2. Sprag-slip

C'est un modèle développé par Spurr (1961), il consiste en une tige flexible, en contact glissant le long d'une surface et chargée par une force extérieure L . Le frottement est modélisé par la loi de Coulomb : $F_t = \mu.F_n$.

L'équilibre glissant du système est démontré par Spurr pour des forces tangentielle et normale vérifiant :

$$F_n = \frac{L}{1-\mu \tan(\theta)} \quad \text{et} \quad F_t = \frac{\mu L}{1-\mu \tan(\theta)}$$

A partir de l'expression de la force tangentielle, il apparaît que pour des valeurs de θ proches de $\arctan(1/\mu)$, la force tangentielle de frottement F_t atteint des valeurs très élevées et peut ainsi bloquer le mouvement : la tige s'arc-boute et emmagasine de l'énergie élastique qui se libère une fois que l'effort de flexion devient plus important que l'effort de frottement. La tige revient alors à sa position d'équilibre et un autre cycle commence définissant ainsi des instabilités au niveau du contact.

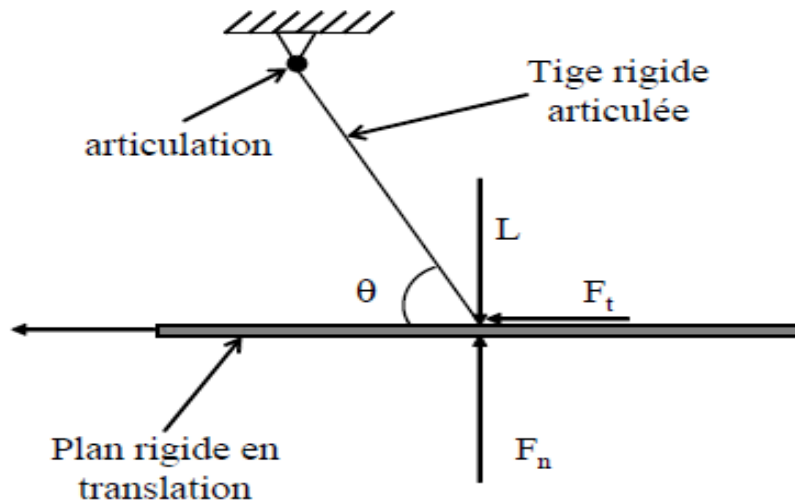


Figure 1.7 : Schéma de principe de sprag-slip

Les deux mécanismes présentés ci-dessus génèrent des vibrations qui, d'un côté, provoquent l'usure des surfaces, et de l'autre, produit des nuisances sonores, à cet effet l'analyse des systèmes frottants demeure indispensable pour comprendre l'origine de ces instabilités afin de les éliminer ou du moins les atténuer.

1.4.4.3. Couplage de modes

Le couplage de modes est défini par le cas où deux valeurs propres se rapprochent en fréquences jusqu'à égalité (coalescence). En parallèle, les parties réelles se séparent, dont une devient à partie réelle positive va induire des instabilités. Dans le cas des systèmes frottant, la coalescence se fait en fonction du coefficient de frottement et on parle d'instabilités induites par le frottement. La différence avec le stick slip est relative au fait que dans ce cas il y a instabilité avec un coefficient de frottement constant contrairement au stick slip dans lequel le coefficient de frottement est fonction de la vitesse relative de glissement.

1.5. Conclusion

Ce chapitre a été consacré à des généralités sur les systèmes dynamiques. Ainsi, nous avons commencé par rappeler des concepts et définitions élémentaires inhérentes aux systèmes dynamiques. Après avoir donné la notion de système nous avons défini les deux types de systèmes, à savoir les systèmes linéaires et les systèmes non-linéaires. Ensuite, on a vu les différentes méthodes de modélisation qui nous permettent d'analyser les performances des systèmes.

A la fin de ce chapitre la notion de système frottant a été abordée. Nous y avons donné les différentes caractéristiques d'un contact frottant, puis nous avons illustré trois mécanismes, à savoir le stick-slip, le sprag-slip et le couplage de modes, qui sont générateurs d'instabilités. Cette catégorie de systèmes est caractérisée par des instabilités dues à plusieurs facteurs. Ces instabilités peuvent causer beaucoup de nuisance tant pour le système (usure) que pour l'environnement (crissement). Il est alors nécessaire de définir des méthodes efficaces permettant d'analyser et de prédire ces instabilités, l'objectif étant d'améliorer les performances et d'augmenter la durée de vie des systèmes.

Chapitre 2 : Notion de stabilité

2.1. Introduction :

La stabilité est l'un des aspects essentiels dans l'étude des systèmes dynamiques linéaires et non-linéaires. Par conséquent, dans l'analyse des systèmes, la stabilité est le premier critère à prendre en considération.

La définition de la stabilité est liée principalement à la structure du modèle étudié. Globalement, deux définitions peuvent être adoptées. Un système est stable si, légèrement perturbé de sa position d'équilibre, il y revient. Il est instable, s'il s'en éloigne. Une autre définition basée sur le critère entrée/sortie stipule qu'un système est stable si sa réponse à une entrée bornée est bornée.

L'inconvénient des systèmes instables est que l'amplitude de, au moins, une variable d'état et/ou de sortie tend vers l'infini lorsque le temps augmente, même si l'entrée du système est bornée. Par conséquent, les effets d'un tel comportement peuvent être indésirables. Le système peut même être endommagé.

Dans ce chapitre nous allons aborder la notion de stabilité des systèmes dynamiques linéaires, et les différentes méthodes permettant de l'analyser. Nous allons commencer par analyser les systèmes linéaires dans leurs différentes représentations. Enfin, il sera question d'aborder la méthode de Lyapunov.

2.2. Concepts de stabilité

2.2.1. Stabilité des systèmes linéaires

La réponse d'un système linéaire est souvent décomposée en deux types : réponse à conditions initiales nulles et réponse à une entrée nulle. La stabilité de ces deux types est analysée séparément. Nous allons introduire la stabilité BIBO (entrée bornée-sortie bornée) dans le cas où les conditions initiales sont nulles, et la stabilité marginale et asymptotique pour une entrée nulle (stabilité interne).

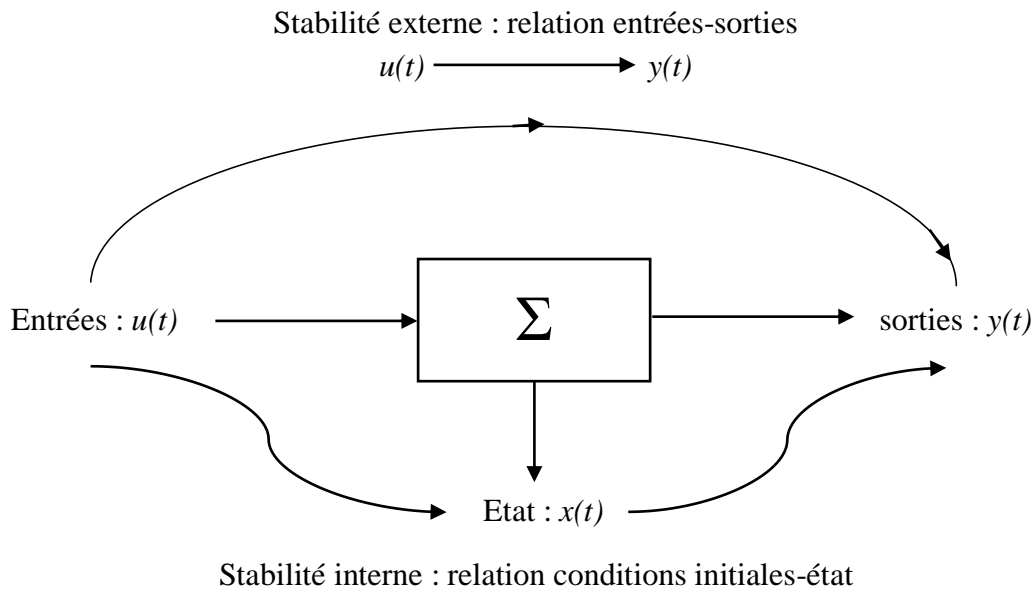


Figure 2.1 : Stabilité interne et stabilité externe

2.2.1.1. Stabilité externe

Soit un système LTI décrit par l'équation (2.1) :

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)u(t - \tau)d\tau \quad (2.1)$$

où $g(t)$ est la réponse impulsionnelle

une entrée $u(t)$ est bornée si $u(t)$ ne tend pas vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque $t \rightarrow \infty$, d'une manière générale il existe une constante u_m tel que :

$$|u(t)| \leq u_m < \infty \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (2.2)$$

Un système est dit BIBO stable si pour chaque entrée bornée la sortie correspondante est bornée. Cette stabilité est définie pour des conditions initiales nulles.

Théorème 2.1 (Chi-Tsong Chen 1999): un système mono-variable décrit par l'équation (2.1) est BIBO stable si et seulement si $g(t)$ est absolument intégrable sur l'intervalle $[0, \infty[$.

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt \leq M < \infty \quad (2.3)$$

M est une constante.

Si par contre $g(t)$ n'est pas absolument intégrable le système n'est pas BIBO stable. Si $g(t)$ n'est pas absolument intégrable alors il existe t_1 tel que :

$$\int_0^{t_1} |g(\tau)| d\tau = \infty \quad (2.4)$$

Théorème 2.2 (Chi-Tsong Chen 1999) : un système multi-variables dont la matrice réponse impulsionnelle est $G(t) = [g_{ij}(t)]$ est BIBO stable si et seulement si tout $g_{ij}(t)$ est absolument intégrable sur $[0, \infty[$

Pour un système décrit par sa fonction de transfert $H(s)$, sa stabilité est liée aux pôles de $H(s)$.

Soit le système linéaire décrit par sa matrice fonction de transfert

$$H(s) = C [sI_n - A]^{-1} B + D \quad (2.5)$$

Le polynôme caractéristique du système est :

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) \quad (2.6)$$

Où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A , qui sont les pôles de $H(s)$ dans le cas où la réalisation (A, B, C, D) est minimale.

Théorème 2.3 (Chi-Tsong Chen 1999) : un système décrit par une fonction de transfert $H(s)$ est BIBO stable si tous les pôles de $H(s)$ sont à partie réelle négative, c.-à-d. les pôles sont situés dans le demi-plan complexe gauche.

Théorème 2.4 (Chi-Tsong Chen 1999) : un système multi-variable ayant une matrice de transfert $H(s) = [h_{ij}(s)]$ est BIBO stable si et seulement si tous les pôles de chaque $h_{ij}(s)$ sont à partie réelle négative.

2.2.1.2. Stabilité interne

La stabilité interne consiste à analyser les solutions de l'équation d'état dues aux conditions initiales (entrées nulles). Si ces solutions divergent vers l'infini alors le système est instable. La stabilité interne est plus complète car elle tient compte de tous les modes internes du système. Par contre, pour la stabilité externe, seuls les modes apparaissant dans la relation entrée-état-sortie sont considérés. Dans le cas d'un système linéaire, la stabilité interne dépend des valeurs propres de la matrice d'état A . Un système linéaire est stable de manière interne si toutes les valeurs propres de A sont stables. La stabilité interne tient compte des modes cachés non commandables et/ou non observables.

Théorème 2.5 (Chi-Tsong Chen 1999) :

1. Le système décrit par l'équation $\dot{x} = Ax$ est marginalement stable s'il existe des pôles imaginaires purs de multiplicité 1 (simples), les autres pôles étant dans le demi-plan gauche du plan complexe.
2. Le système décrit par l'équation $\dot{x} = Ax$ est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle négative.

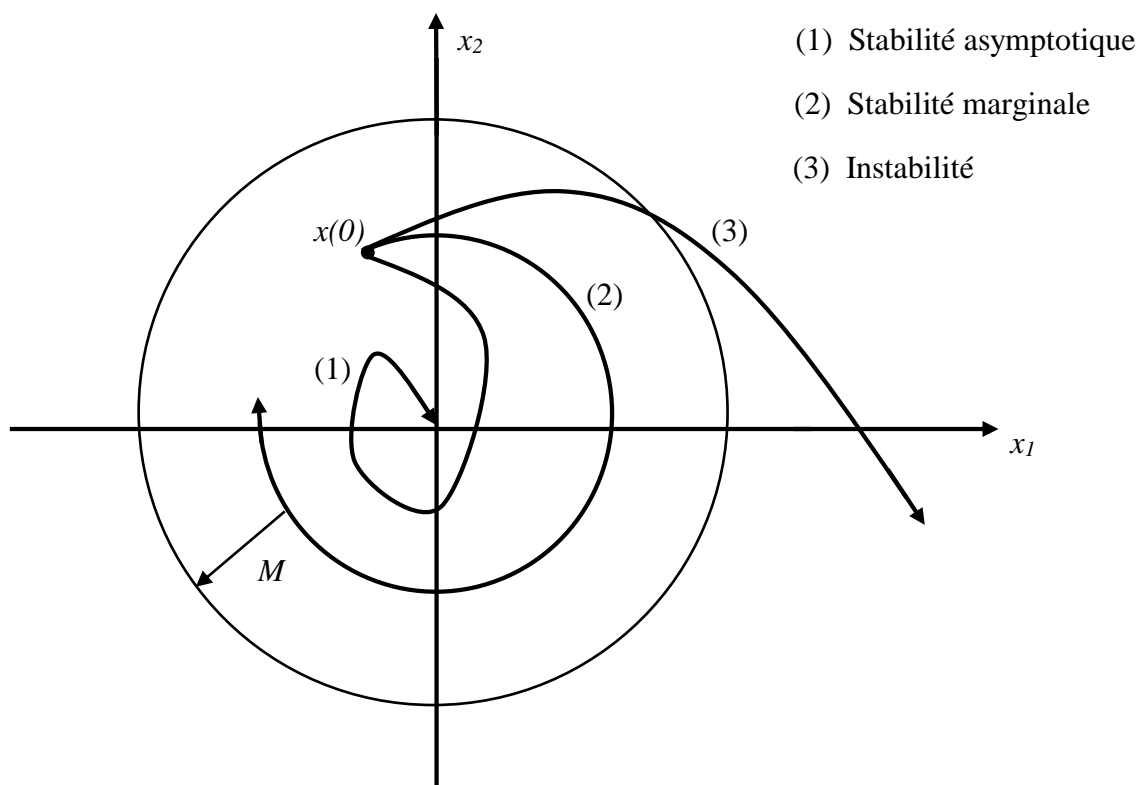


Figure 2.2 : Stabilité marginale, asymptotique et instabilité d'un système décrit par le modèle d'état.

Toutes les définitions vues au paragraphe précédent peuvent être utilisées pour l'étude de la stabilité. Cependant, leur application pose certains problèmes. Par exemple, la définition basée sur les équations d'état requiert la détermination du vecteur d'état $x(t)$, ce calcul est souvent difficile. La définition basée sur la matrice fonction de transfert $H(s)$ nécessite le calcul des pôles du polynôme caractéristique, une tâche qui devient plus complexe lorsque le degré de ce dernier est élevé. La définition basée sur la réponse impulsionnelle $h(t)$ nécessite la détermination de la matrice réponse impulsionnelle $h(t)$. La stabilité BIBO paraît être simple à appliquer, entre temps, pour analyser la stabilité d'un système en utilisant la stabilité BIBO on doit tester toutes les entrées bornées possibles, ce qui demande beaucoup de temps.

Parmi les méthodes présentées ci-dessus, la définition basée sur la fonction de transfert est considérée comme la plus simple du point de vue calculs. Néanmoins, plus le degré du polynôme caractéristique est élevé plus la détermination des pôles est difficile, voire impossible.

A partir de là, on peut conclure qu'il peut être coûteux et parfois difficile d'appliquer les définitions vues précédemment pour étudier la stabilité des systèmes. Pour contourner ces difficultés, plusieurs critères de stabilité ont été développés. Ces critères donnent l'information pertinente sur la stabilité des systèmes. Parmi les critères les plus répandus on trouve les critères algébriques, les méthodes fréquentielles basées sur le critère de Bode, le critère de Nyquist, le critère de Nichols, et la méthode de Lyapunov. Dans le paragraphe suivant, nous allons présenter deux critères algébriques à savoir le critère de Routh et le critère de Hurwitz. La méthode de Lyapunov sera abordée plus tard.

2.2.1.3. Critères algébriques de stabilité

Les critères algébriques les plus connus sont, le critère de Routh et le critère de Hurwitz. Le point commun entre ces deux critères est qu'ils permettent de déterminer si le système est stable ou non en utilisant des méthodes très simples permettant ainsi d'éviter le calcul des racines du polynôme caractéristique.

Considérons le polynôme caractéristique suivant :

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (2.7)$$

où les coefficients a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 sont des réels. On suppose que $a_0 \neq 0$ pour éviter d'avoir une racine à l'origine. Ensuite on donne le théorème suivant :

Théorème 2.6 (P. N. Paraskevopoulos 2002) : le polynôme $P(s)$ possède une ou plusieurs racines dans le demi-plan droit du plan complexe si au moins un de ses coefficients est égal à zéro et/ou les coefficients n'ont pas tous le même signe.

Le théorème 2.6 est très utile puisque il nous permet de déterminer l'instabilité du système en examinant le polynôme caractéristique. En effet, si $P(s)$ satisfait ce théorème, alors le système est instable. Dans le cas où $P(s)$ ne satisfait pas ce théorème i.e., aucun coefficient de $P(s)$ n'est égale à zéro et tous ses coefficients ont le même signe, alors on ne peut rien dire sur la stabilité du système. Dans ces cas-là les critères algébriques (Routh ou Hurwitz) peuvent constituer de bonnes alternatives.

2.2.1.3.1. Critère de Routh

Le critère de Routh nous permet de déterminer le nombre de racines du polynôme caractéristique $P(s)$ se situant dans le demi-plan droit du plan complexe (P. N. Paraskevopoulos 2002). Ce critère est appliqué en construisant la table de Routh, illustré dans le tableau 2.2. Dans cette table, les éléments $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ sont les coefficients de $P(s)$. Les éléments $b_1, b_2, b_3, \dots, c_1, c_2, c_3, \dots$, etc sont calculés comme suit :

$$b_1 = - \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}, \quad b_2 = - \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}, \dots$$

$$c_1 = - \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}, \quad c_2 = - \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}, \dots \quad \text{et ainsi de suite}$$

Le critère de Routh est donné par le théorème suivant (P. N. Paraskevopoulos 2002) :

Théorème 2.7 : une condition nécessaire et suffisante pour que $Re(\lambda_i) < 0, i = 1, 2, \dots, n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ désignant les racines du polynôme caractéristique $P(s)$, est que la première colonne du tableau de Routh ne doit pas changer de signe. S'il y a changement de signe, alors le système est instable. Le nombre de changements de signe est égal au nombre de racines de $P(s)$ qui ont une partie réelle positive ($Re(\lambda_i) > 0$).

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
s^{n-2}	b_1	b_3	b_5	...
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...
s^1	\vdots	\vdots	\vdots	...
s^0	\vdots			...

Tableau 2.1: Tableau de Routh

2.2.1.3.2. Critère de Hurwitz

Le critère de Hurwitz nous permet de déterminer si le polynôme caractéristique possède ou non des racines dans le demi-plan droit du plan complexe. Ce critère ne permet pas de déterminer le nombre de racines à partie réelle positive (P. N. Paraskevopoulos 2002).

Le critère de Hurwitz est appliqué en utilisant les déterminants de Hurwitz définis comme suit :

$$\Delta_n = a_n$$

$$\Delta_1 = a_{n-1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 0 & 0 & a_{n-2} & a_{n-4} \end{vmatrix} \text{ etc.}$$

Le critère de Hurwitz est donné par le théorème suivant (P. N. Paraskevopoulos 2002) :

Théorème 2.8 : la condition nécessaire est suffisante pour que $Re(\lambda_i) < 0, i=0,1,\dots, n,$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ désignant les racines du polynôme caractéristique $P(s)$, est que $\Delta_i > 0$ pour tout $i=1, 2, 3, \dots, n$

2.2.1.4. Stabilité au sens de Lyapunov

2.2.1.4.1. Fonction de Lyapunov

Pour analyser la stabilité du point d'équilibre (le point bas) du pendule, on utilise intuitivement l'analyse de la décroissance de l'énergie mécanique (énergie potentielle + énergie cinétique). Il est évident que si l'énergie mécanique décroît au cours du temps, c'est-à-dire que sa dérivée par rapport au temps est strictement négative alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable, c'est-à-dire que la masse va se stabiliser au point de repos (point bas du pendule). La dérivée de l'énergie mécanique est négative en présence de frottement. Si les frottements sont nuls alors, la dérivée de l'énergie mécanique est nulle, c'est-à-dire que l'énergie mécanique est constante ; ce qui implique qu'il y a un échange perpétuel entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. Dans ce cas la masse oscillera indéfiniment autour de son point d'équilibre. Le principe de la première méthode Lyapunov (la méthode directe) repose sur la généralisation de la notion de l'énergie aux systèmes quelconques qu'ils soient mécaniques, électrique, physico-chimiques... La généralisation consiste à introduire des fonctions $V(x)$ appelées fonctions de Lyapunov qui joueront le rôle de l'énergie.

Définition 2.1: une fonction continue $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est positive définie si :

- $W(0) = 0$
- $W(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ (resp. $0 < \|x\| < r$ où $r > 0$ est un nombre quelconque)

Définition 2.2: une fonction continue $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est négative définie si $-W$ est positive définie

Remarque : si dans les deux définitions ci-dessus $W \geq 0$ (resp. $W \leq 0$) c'est-à-dire que la fonction W s'annule pour $x \neq 0$, alors W est positive (resp. négative) semi défini.

Théorème 2.9 (E. Slotine 1991): un point d'équilibre $x_e = 0$ est stable au sens de Lyapunov, s'il existe une fonction continûment différentiable positive définie $V(x)$ telle que sa dérivée $\dot{V}(x)$ est négative semi défini.

Théorème 2.10 (E. Slotine 1991): un point d'équilibre $x_e = 0$ est asymptotiquement stable, s'il existe une fonction continûment différentiable positive définie $V(x)$ telle que sa dérivée $\dot{V}(x)$ est négative définie.

Théorème 2.11 (E. Slotine 1991): un point d'équilibre $x_e = 0$ est exponentiellement stable, s'il existe une fonction $V(x)$ et des constantes positives c_1, c_2 et c_3 telle que :

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2 \|x\|^2 \quad (2.8)$$

$$\dot{V}(x) \leq -c_3 \|x\|^2 \quad (2.9)$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathcal{B}(r) \subset \mathcal{D}_x, r > 0$

2.2.1.4.2. Construction des fonctions de Lyapunov

Pour les systèmes linéaires, la fonction de Lyapunov est définie par une fonction quadratique. Ce type de fonction de Lyapunov est aussi souvent utilisé pour analyser la stabilité des points d'équilibre des systèmes non linéaire.

Définition 2.3 : (fonction quadratique) une fonction quadratique de Lyapunov est définie comme suit :

$$V(x) = x^T P x \quad (2.10)$$

où P est une matrice carrée réelle de dimension $n \times n$ symétrique, x est un vecteur réel $n \times 1$. Pour que la fonction $V(x)$ soit positive (semi) définie, il suffit que la matrice P soit positive (semi) définie.

2.2.1.4.3. Équation de Lyapunov

Nous pouvons appliquer la première méthode de Lyapunov pour analyser la stabilité d'un système linéaire (2.11)

$$\dot{x} = Ax \quad (2.11)$$

A cet effet, nous choisissons la fonction de Lyapunov quadratique (2.10)

La dérivée de (2.10) est :

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \quad (2.12)$$

En remplaçant \dot{x} par l'équation (2.11) on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T A^T P x + x^T P A x \\ &= x^T (A^T P + P A) x \end{aligned}$$

On en déduit que le système (2.11) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice Q positive définie telle que l'équation suivante :

$$A^T P + P A = -Q \quad (2.13)$$

appelée *équation de Lyapunov*, possède une solution unique P positive définie.

2.2.1.4.4. Étude des systèmes linéaires temps invariant

Considérons un système linéaire temps invariant décrit par l'équation d'état :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad x(0) = x_0 \quad (2.14)$$

L'origine est le seul point d'équilibre (isolé). Remarquons qu'un système non-linéaire peut avoir différents points d'équilibre isolés stables et d'autres instables. Un système linéaire ne peut avoir qu'un seul point d'équilibre qui est l'origine ($x = 0$) de l'espace d'état. De ce fait, on attribue la propriété de stabilité à tout le système. La solution de l'équation d'état est donnée par :

$$x(t) = e^{At}x_0 \quad (2.15)$$

La solution peut s'écrire comme :

$$x(t) = \sum_{i=1}^n r_i e^{\lambda_i t} \quad (2.16)$$

où λ_i , $i=1, 2, \dots, n$ sont les valeurs propres de la matrice A et r_i , $i=1, 2, \dots, n$ sont les résidus correspondants qui dépendent des valeurs propres de A associés aux valeurs propres et aux conditions initiales x_0 . A partir de (2.16), on peut analyser la stabilité du système linéaire par les valeurs propres de la matrice A .

Théorème 2.12 (H.K. Khalil 2002): le système linéaire est stable au sens de Lyapunov si toutes les valeurs propres de la matrice A sont à parties réelles négatives et si les valeurs propres à parties réelles nulles sont simples.

Théorème 2.13 (H.K. Khalil 2002) : le système linéaire est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres de la matrice A sont à parties réelles strictement négatives.

Remarque : les solutions d'un système linéaire asymptotiquement stable décroissent vers zéro de manière exponentielle. Donc, pour un système linéaire, la stabilité asymptotique est équivalente à la stabilité exponentielle.

Remarque : lorsque la matrice A possède des valeurs propres à parties réelle strictement négatives, alors la matrice A est dite d'Hurwitz

2.3. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons abordé les différentes méthodes d'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires. Nous avons vu que la stabilité des systèmes linéaires dépend d'abord du modèle du système dans le sens où pour chaque modèle nous avons une méthode qui nous permet de statuer sur la stabilité du système. Quoique toutes ces méthodes nous permettent d'analyser la stabilité, elles représentent quelques inconvénients. Les critères algébriques de Routh et de Hurwitz sont utilisés pour contourner ces inconvénients. Par la suite la méthode de Lyapunov pour l'analyse des systèmes linéaires a été abordée. Lyapunov a développé deux méthodes pour l'analyse de la stabilité, la première consiste à analyser les valeurs propres de la matrice d'état. Cependant, la deuxième est basée sur l'analyse de la décroissance de l'énergie mécanique, cette méthode nécessite la détermination d'une fonction appelée fonction de Lyapunov à partir de laquelle on analyse la stabilité. La détermination de telle fonction n'est pas toujours évidente ce qui représente l'inconvénient de cette méthode.

Cette méthode sera utilisée par la suite en combinaison avec des méthodes probabilistes pour analyser la stabilité des systèmes ayant des paramètres incertains.

Chapitre 3 : méthodes probabilistes pour l'analyse presque sûre de la stabilité.

3.1. Introduction :

Ce chapitre traite de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires à paramètres incertains régis par des densités de probabilité. Pour ce faire, les approches basées sur le chaos polynomial sont proposées pour modéliser et approximer des fonctions et/ou processus aléatoires, en combinaison avec les méthodes d'analyse de Lyapunov, pour traiter de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires à paramètres aléatoires. Par ailleurs, la méthode de Monte Carlo est présentée et sera utilisée, dans la suite de ce mémoire, comme méthode de référence.

Quelques rappels relevant de la théorie des probabilités sont donnés au début de ce chapitre.

3.2. Théorie des probabilités

Définition 3.1 : une probabilité définie sur l'ensemble (Ω, \mathcal{C}) , est une application de \mathcal{C} dans $[0, 1]$ telle que :

- $Pr(\Omega) = 1$
- $Pr(\cup A_i) = \sum_i Pr(A_i)$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{C}, Pr)$ est un espace probabilisé, la mesure Pr ainsi définie est une mesure positive.

Définition 3.2 : Une expérience est appelée aléatoire s'il est impossible de prévoir à l'avance son résultat et si, répétée dans des conditions identiques, elle peut donner des résultats différents. L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est caractérisé formellement par la notion de l'univers Ω .

Définition 3.3 : On appelle univers associé à une expérience aléatoire l'ensemble Ω de tous les résultats possibles, notés ω , de cette expérience.

3.3. Notion de variable aléatoire

Les variables aléatoires constituent un espace fondamental d'éléments aléatoires. Un tel élément est défini par référence à une expérience aléatoire.

Si $(\Omega, \mathcal{C}, Pr)$ désigne un espace probabilisé et (E, \mathcal{E}) un espace probabilisable, un élément aléatoire, défini sur $(\Omega, \mathcal{C}, Pr)$ et à valeurs dans (E, \mathcal{E}) , est une application mesurable de (Ω, \mathcal{C}) dans (E, \mathcal{E}) . Cet élément est appelé :

- Variable aléatoire réelle si l'espace (E, \mathcal{E}) est l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, où \mathcal{B} est la tribu de Borel de \mathbb{R}
- Variable aléatoire vectorielle ou vecteur aléatoire, de dimension n , si l'espace (E, \mathcal{E}) est l'espace $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$.

Définition 3.4 : un vecteur aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction $X = (X_1, \dots, X_d)$ à valeurs dans \mathbb{R}^d telle que les coordonnées X_i soient des variables aléatoires.

3.3.1 Variable aléatoire continue (à densité)

Définition 3.5 : Une variable aléatoire X est continue si pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et pour tous nombres a et b avec $a \leq b$,

$$Pr(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx \quad (3.1)$$

La fonction f doit satisfaire $f(x) \geq 0$ pour tout x et $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. On appelle f la fonction de densité de probabilité de X .

- Espérance mathématique :

$$E(x) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx \quad (3.2)$$

- variance :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx - [E(X)]^2 \quad (3.3)$$

3.3.1.1. Loïs de probabilité continues

- **Loi uniforme :** une variable aléatoire réelle X , suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, si sa loi de probabilité admet une densité f égale à :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.4)$$

Cette loi est notée $U(a, b)$

- Fonction de répartition :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x \leq a \\ F(x) = \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ F(x) = 1 & \text{si } x \geq b \end{cases} \quad (3.5)$$

- Espérance mathématique et variance :

$$E(X) = \frac{(b+a)}{2} \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (3.6)$$

- **Loi exponentielle** : une variable aléatoire réelle positive X suit une loi exponentielle, de paramètre λ positif, si sa densité de probabilité est donnée par :

$$\begin{cases} f(x) = \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

cette loi est notée $Exp(\lambda)$

- Fonction de répartition :

$$F(a) = Pr(X < a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda a} \quad (3.8)$$

- Espérance mathématique et variance :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (3.9)$$

- **Loi normale (Gaussienne)**: une variable aléatoire réelle, prenant ses valeurs dans \mathbb{R} , suit une loi normale avec des paramètres μ et $\sigma^2 > 0$ si sa fonction de densité de probabilité f est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ si } -\infty < x < \infty \quad (3.10)$$

Cette loi est notée $N(\mu, \sigma)$

- Fonction de répartition :

$$Pr(X < a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \quad (3.11)$$

- Espérance mathématique et variance :

$$E(X) = \mu \quad Var(X) = \sigma^2 \quad (3.12)$$

3.3.2. Variable aléatoire discrète

Soit l'univers Ω , une variable aléatoire discrète est une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui prend ses valeurs sur un ensemble fini ou dénombrable de points. La loi de probabilité d'une telle variable est appelée loi discrète. Une loi de probabilité discrète est caractérisée par l'énumération des valeurs x_i appartenant à \mathbb{R} ou à un intervalle de \mathbb{R} .

3.3.2.1. Loïs de probabilité discrètes

- **Loi de Bernoulli** : une variable aléatoire discrète X suit une loi de *Bernoulli* avec un paramètre p , où $0 \leq p \leq 1$, si sa fonction de répartition est donnée par :

$$Pr(X = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ 1 - p & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.13)$$

cette loi est notée $Ber(p)$

- **Loi binomiale** : une variable aléatoire discrète X suit une loi binomiale avec des paramètres n et p , où $n = 1, 2, \dots$ et $0 \leq p \leq 1$, si sa fonction de répartition est donnée par :

$$Pr(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.14)$$

cette loi est notée $Bin(n, p)$

Définition 3.6 : un vecteur aléatoire X défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, Pr)$ et à valeur dans \mathbb{R}^n est dit du second ordre si :

$$E[\|X(\omega)\|^2] = \int \|X(\omega)\|^2 Pr(\omega) < +\infty \quad (3.15)$$

où $\|X(\omega)\|^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$

Définition 3.7 : (Espace d'Hilbert) soit $(\Omega, \mathcal{C}, Pr)$ un espace probabilisé. L'espace Θ des fonctions mesurables de Ω dans \mathbb{R} est défini par :

$$\Theta = \{g / g : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \}$$

Le produit interne (appelé aussi produit scalaire) $\langle . \rangle$ sur Θ est défini comme suit :

$$\langle g, h \rangle = \int_{\Omega} g(\omega) h(\omega) dPr(\omega) \quad (3.16)$$

Soit $X(\omega)$ une variable aléatoire dont la densité de probabilité est notée f . L'espace Θ des fonctions mesurables qui associent à tout élément $\omega \in \Omega$ une valeur dans \mathbb{R} et muni de produit interne $\langle X, Y \rangle = E[XY]$ définit un espace d'Hilbert noté $L^2(\Omega, \mathcal{C}, Pr)$.

Une variable aléatoire $X(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{C}, Pr)$ est une variable de second ordre qui vérifie (3.15)

3.4. Processus stochastique (aléatoire)

Un système est à évolution aléatoire s'il peut prendre au cours du temps une série d'états successifs, sans qu'il soit possible d'en prévoir sa configuration exacte à un instant futur.

Définition 3.8 : Un processus stochastique ou aléatoire représente la modélisation d'un phénomène évoluant au cours du temps. C'est une application de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, Pr)$ dans un espace probabilisable de fonctions (Ω', \mathcal{C}') . Un processus associe à tout élément ω de Ω une fonction de la variable $t \in T$ telle que :

$$\omega \rightarrow X_t(\omega)$$

$X_t(\omega)$ étant l'application :

$$t \rightarrow X_t(\omega)(t) = X(\omega, t)$$

Un processus aléatoire est donc décrit par une suite de variables aléatoires indexées par la variable t , on écrit $(X_t, t \in T)$ ou plus simplement (X_t) .

3.5. Méthodes probabilistes de propagation et de quantification des incertitudes.

En pratique, la majorité des systèmes sont soumis à des incertitudes inhérentes à leurs cycles de vie. Certaines de ces incertitudes sont inévitables et ne peuvent pas être éliminées entièrement, par conséquent, leur prise en compte est nécessaire durant l'analyse, la conception et l'utilisation du système.

Les incertitudes des systèmes dynamiques peuvent être d'origines différentes. On peut distinguer entre autres :

- Des incertitudes statistiques dues au manque de connaissance du système.
- Des incertitudes liées aux modèles théoriques (simplifications, approximations, hypothèses phénomènes non pris en compte...)
- Manque de connaissance sur le comportement du système dans des conditions réelles.

De façon générale les incertitudes peuvent être classées en deux principales catégories :

- **incertitudes aléatoires** : Une mesure est affectée par une incertitude aléatoire si son résultat varie quand elle est effectuée plusieurs fois de la même façon. Quand la mesure ne peut être effectuée qu'une seule fois, mais qu'on sait qu'elle varierait si on la recommençait, on doit lui associer une incertitude aléatoire. Un système physique est en permanence le lieu de nombreux phénomènes dont les effets influent sur le résultat de la mesure. Ces phénomènes font donc varier le résultat de la mesure lorsqu'elle est répétée. Cette variation est aléatoire, car ces phénomènes ne pouvant être tous mesurés ou prédits simultanément, on ne sait pas dans quelle direction va avoir lieu la variation. Certains sont de plus aléatoires par nature.
- **Incertitudes épistémiques** : sont liées à un manque de connaissances sur les phénomènes incarnés par le système traduits en général par des hypothèses, des approximations et simplifications. En théorie, elles peuvent être réduites voire éliminées par l'acquisition de connaissances supplémentaires. L'incertitude épistémique est caractérisée comme une incertitude due au manque de connaissance sur des valeurs constantes mais mal connues. Elles peuvent être liées à différentes hypothèses et approximations effectuées pour simplifier la modélisation au sens large que ça soit celle liée au système ou à ses paramètres.

3.5.1. Méthode de Monte Carlo

Le terme méthode de Monte Carlo, désigne une famille de méthodes algorithmiques visant à calculer une valeur numérique approchée en utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes. Le nom de ces méthodes, qui fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monte Carlo, a été inventé en 1947 par Nicholas Metropolis, et publié pour la première fois en 1949 dans un article coécrit avec Stanislaw Ulam.

Domaines d'application : on a souvent recours à ce type de simulation :

- Lorsque le problème est trop complexe pour qu'une résolution par voie purement mathématique soit envisageable,
- Lorsque le problème est trop volumineux (en particulier, contient un très grand nombre de variables) pour que les techniques d'approximation numériques puissent conduire à un résultat précis dans un temps acceptable,
- Dans le cas où la variable (les paramètres d'étude d'un système) ne peut pas être estimée, ou l'information n'est pas disponible,

Avantages et inconvénients

La simulation de Monte Carlo est utilisée pour caractériser la réponse à une excitation aléatoire ou pour mener une étude de propagation d'incertitudes. Elle est en général applicable à des problèmes de type numériques, ou bien à des problèmes de nature elle-même probabiliste.

- Elle n'est pas limitée par le nombre d'états du système étudié ;
- Elle permet la prise en compte de n'importe quelle loi de probabilité ;
- Elle permet l'association dans le même modèle des phénomènes déterministes et des phénomènes aléatoires ;
- Son implémentation informatique est facile ;
- Les données produites par la simulation de Monte Carlo facilitent la représentation graphique des différents résultats et de leur chance de se produire. La présentation des conclusions de l'analyse en est d'autant plus simple.

La méthode Monte Carlo permet de donner des résultats avec une certaine incertitude qui diminue avec l'augmentation du nombre de tirages. Celui-ci peut devenir assez important pour avoir une précision et un niveau de confiance donnés. Une précision raisonnable nécessite un grand nombre de tirages ce qui rend la méthode prohibitive en termes de coût de calcul. C'est l'inconvénient majeur de cette méthode.

Algorithme de la méthode

L'algorithme de la méthode de Monte Carlo peut être résumé en 5 étapes :

- Etape 1 : Identification et caractérisation probabilistes des paramètres incertains dans le modèle.
- Etape 2 : Echantillonnage et génération aléatoire de réalisations suivant les lois probabilistes identifiées et les corrélations entre les paramètres.
- Etape 3 : Propagation de l'incertitude c'est-à-dire exécuter le code numérique (modèle) pour chaque jeu d'entrée et relever les sorties correspondantes.
- Etape 4 : Analyse statistique du jeu de sortie correspondant.
- Etape 5 : Analyse de la convergence de la distribution de la sortie du modèle.

Soit $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mathématique analytique (ou algorithmique) modélisant un système quelconque et x un vecteur de paramètres incertains modélisés par un vecteur aléatoire $X = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_d]$. La réponse Y du modèle est aléatoire, solution de l'équation du modèle (3.17) :

$$Y = M(X) \quad (3.17)$$

La méthode de Monte Carlo est utilisée pour estimer la loi de distribution de la sortie dont les caractéristiques statistiques sont données par la valeur moyenne μ_Y et l'écart type σ_Y . Ces dernières sont estimées via un ensemble de N tirages comme suit :

$$\begin{cases} \hat{\mu}_Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M(X^{(i)}) \\ \hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (M(X^{(i)}) - \hat{\mu}_Y)^2 \end{cases} \quad (3.18)$$

La convergence de la méthode de Monte Carlo est certifiée par le théorème de la limite centrale selon lequel l'écart entre l'espérance μ_Y de Y et son estimé $\hat{\mu}_Y$ converge vers une loi normale de moyenne nulle et d'écart type égal à σ_Y/\sqrt{N} .

Les moments statistiques déterminés à base d'un ensemble de tirages sont des grandeurs aléatoires. Une utilisation rigoureuse d'un procédé de Monte Carlo nécessite la donnée des intervalles de confiance des résultats. A titre d'exemple, pour un niveau de confiance $1 - \alpha$ fixé et un nombre N donné de tirages, l'intervalle de confiance correspondant à la valeur moyenne dont l'estimateur est supposé gaussien selon le théorème de la limite centrale, est donné par :

$$\hat{\mu}_Y - \frac{u_{\alpha/2} \hat{\sigma}_Y}{\sqrt{N-1}} \leq \mu \leq \hat{\mu}_Y + \frac{u_{\alpha/2} \hat{\sigma}_Y}{\sqrt{N-1}} \quad (3.19)$$

où $u_{\alpha/2} = -F_x^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)$, F_x étant la fonction de répartition définie par $F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-z^2} dz$.

Alternativement, l'inéquation (3.19) peut être utilisée avec une largeur de l'intervalle de confiance donnée. En voulant estimer la valeur moyenne avec une erreur relative $\pm \varepsilon_{\mu_Y}$ avec un niveau de confiance donné égal à $1 - \alpha$, alors le nombre de tirages minimal nécessaire est donné par :

$$N_{min} = 1 + \text{ceil} \left[\left(\frac{u_{\alpha/2} \hat{C}_Y}{\varepsilon_{\mu_Y}} \right)^2 \right] \quad (3.20)$$

où $\text{ceil}[x]$ arrondi x à la valeur entière la plus proche et $\hat{C}_Y = \hat{\sigma}_Y/\hat{\mu}_Y$ désigne le coefficient de variation de la réponse Y .

3.5.2. Chaos polynomial

La méthode du chaos polynomial basée sur le développement en série de polynômes d'Hermite d'une variable aléatoire a été introduite par Ghanem et Spanos (Ghanem et Spanos, 1991) et basée sur le chaos homogène introduit par Wiener en 1938.

Soit $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$ un ensemble infini dénombrable de variables aléatoires gaussiennes indépendantes et normalisées. Les espaces suivants sont définis :

- $\hat{\Gamma}_p$ l'espace de toutes les fonctions polynomiales des variables $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$ de degré inférieur ou égal à p
- Γ_p est l'ensemble des polynômes de $\hat{\Gamma}_p$ qui sont orthogonaux à ceux de l'espace $\hat{\Gamma}_{p-1}$.
- $\tilde{\Gamma}_p$ l'espace généré par Γ_p

$$\hat{\Gamma}_p = \hat{\Gamma}_{p-1} \oplus \tilde{\Gamma}_p, \quad \Theta = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \tilde{\Gamma}_i \quad (3.21)$$

Le chaos homogène d'ordre p est défini par le sous espace $\tilde{\Gamma}_p$ de Θ et Γ_p est appelé chaos polynomial d'ordre p .

Le chaos polynomial d'ordre p est constitué de tous les polynômes orthogonaux d'ordre p fonction de toutes les combinaisons possibles des variables aléatoires de l'ensemble $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$.

La théorie du chaos polynomial pose la possibilité d'exprimer toute variable aléatoire du second ordre $X(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{C}, Pr)$ par une représentation en polynômes de chaos sous la forme suivante

$$\begin{aligned} X(\omega) = & \bar{x}_0 \Gamma_p + \sum_{i_1=1}^{\infty} \bar{x}_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}(\omega)) \\ & + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \bar{x}_{i_1 i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega)) \\ & + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \bar{x}_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega), \xi_{i_3}(\omega)) \\ & + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \sum_{i_4=1}^{i_3} \bar{x}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \Gamma_4(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega), \xi_{i_3}(\omega), \xi_{i_4}(\omega)) + \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

où $\Gamma_p(\cdot)$ désignent les polynômes d'Hermite d'ordre p , fonction des variables distinctes de l'ensemble $\{\xi_i\}_{i=1 \dots \infty}$

L'expression générale des polynômes d'Hermite est donnée par :

$$\Gamma_p \left(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_p} \right) = e^{\frac{1}{2\xi^T \xi}} (-1)^p \frac{\partial^p}{\partial \xi_{i_1} \dots \partial \xi_{i_p}} e^{\frac{1}{2\xi^T \xi}} \quad (3.23)$$

Par exemple, les polynômes d'Hermite de dimension 1 sont :

$$\phi_0 = 1, \quad \phi_1 = \xi, \quad \phi_2 = \xi^2 - 1, \quad \phi_3 = \xi^3 - 3\xi, \dots \quad (3.24)$$

Théorème 3.1 : convergence du développement en chaos polynomial, (Cameron et Martin, 1947) :

Soient $X \in L^2(\Omega, \mathcal{C}, Pr)$ une variable aléatoire de carré intégrable, $\{\xi_i\}_{i=1 \dots \infty}$ un ensemble infini de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites et Γ_p le chaos polynomial.

Alors, la représentation de X dans la base du chaos polynomial est convergente au sens des moindres carrés telle que :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left[\left(\bar{x}_0 \Gamma_0 + \dots + \sum_{i_1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_p=1}^{i_p-1} \bar{x}_{i_1 \dots i_p} \Gamma_p \left(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_p} \right) - X \right)^2 \right] = 0 \quad (3.25)$$

Pour des considérations pratiques, les termes dans l'expression (3.22) sont réordonnés sous la forme d'une simple somme telle que :

$$X(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j \phi_j(\xi(\omega)) \quad , \quad \xi = (\xi_1, \xi_1, \dots) \quad (3.26)$$

où il existe une correspondance, une à une, entre les fonctions $\phi_i(\cdot)$ Et les fonctions $\Gamma_p(\cdot)$.

3.5.3. Chaos polynomial généralisé (chaos de Wiener-Askey)

Le chaos d'Hermite (chaos homogène) est une méthode qui permet la résolution des équations différentielles stochastiques avec des paramètres aléatoires modélisés par des variables aléatoires gaussiennes, ainsi que certains types de variables non gaussiennes. Cependant, pour les systèmes avec des variables non gaussienne, la rapidité et la précision de convergence sont non satisfaisant (convergence lente, précision insuffisante).

Afin de généraliser l'utilisation du chaos d'Hermite pour des variables non gaussiennes Xiu et Karniadakis (Xiu et Karniadakis, 2002) ont introduit le chaos polynomial généralisé (chaos de Wiener-Askey). Le développement dans la base du chaos polynomial généralisé est basé sur un ensemble de polynômes orthogonaux du schéma d'Askey. La convergence dépend des caractéristiques probabilistes des variables aléatoires $\xi(\omega)$.

Soit $(\Omega, \mathcal{C}, Pr)$ un espace de probabilité, où Ω est l'univers des résultats possibles, \mathcal{C} est une σ -algèbre des sous-ensembles de Ω , et Pr est une mesure de probabilité. Soit $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \dots, \xi_d(\omega)) : (\Omega, \mathcal{C}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ une variable aléatoire continue sur \mathbb{R}^d . Un processus de second ordre $X(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{C}, Pr)$ peut être exprimé dans la base du chaos polynomial comme suit :

$$X(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \phi_i(\xi(\omega)) \quad (3.27)$$

où ω est un évènement aléatoire et $\phi_i(\xi(\omega))$ désigne la base du chaos polynomial généralisé d'ordre p en fonction de la variable aléatoire $\xi(\omega)$. Les fonctions $\{\phi_i\}$ est une famille de polynômes orthogonaux dans la base $L^2(\Omega, \mathcal{C}, Pr)$ qui satisfait la relation suivante :

$$\int_{\mathcal{D}_{\xi(\omega)}} \phi_i \phi_j f(\xi(\omega)) d\xi(\omega) = h_i^2 \delta_{ij} \quad (3.28)$$

Où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, h_i est un terme constant correspondant à $\int_{\mathcal{D}_{\xi(\omega)}} \phi_i^2 f(\xi) d\xi$, \mathcal{D}_{ξ} est le domaine de la variable aléatoire $\xi(\omega)$, et $f(\xi)$ est la fonction poids. Pour des raisons de simplification $\xi(\omega)$ sera noté ξ . Pour certaines variables aléatoires ξ , les fonctions $\{\phi_i\}$ peuvent être choisies de telle manière à ce que la fonction poids $f(\xi)$ aie la même forme que la fonction densité de probabilité. Ainsi :

$$\int_{\mathcal{D}_{\xi(\omega)}} \phi_i \phi_j f(\xi) d\xi = E[\phi_i \phi_j] = E[\phi_i^2] \delta_{ij} \quad (3.29)$$

où $E[.]$ désigne l'espérance mathématique par rapport à la mesure de probabilité $dp(\xi(\omega)) = f(\xi(\omega)) d\xi(\omega)$ et la loi de densité de probabilité $f(\xi(\omega))$. Soit le produit interne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit par :

$$\langle g(\xi), h(\xi) \rangle = \int_{\mathcal{D}(\xi)} g(\xi), h(\xi) f(\xi) d\xi \quad (3.30)$$

Qui est équivalent à $E[g(\xi), h(\xi)]$. Si $p(\xi)$ est un polynôme de degré inférieur à i , alors $p(\xi)$ est orthogonal à $\phi_i(\xi)$ i.e.

$$\langle p(\xi), \phi_i(\xi) \rangle = 0 \quad (3.31)$$

Le développement dans la base du chaos polynomial généralisé est basé sur un ensemble de polynômes orthogonaux du schéma d'Askey, dont la convergence dépend des caractéristiques probabilistes des variables aléatoires $\xi(\omega)$. Le tableau (3.1) résume la correspondance entre la distribution de la variable aléatoires $\xi(\omega)$ et les familles des polynômes orthogonaux.

	Variable aléatoire ξ	Wiener-Askey PC $\{\phi_i\}$	support
Continue	Uniforme	Legendre	[a, b]
	Gaussienne	Hermite	$]-\infty, \infty[$
	Gama	Laguerre	$[0, \infty[$
	Beta	Jacobi	[a, b]
discontinue	Poisson	Charlier	$\{0, 1, 2, \dots\}$
	Binomiale	Krawtchouk	$\{0, 1, 2, \dots, N\}$

Tableau 3.1 : Correspondance entre le type de distribution et le type de la base du chaos polynomial

3.5.4. Approximation des systèmes linéaires stochastiques en utilisant le chaos polynomial généralisé

La propagation des incertitudes en utilisant le chaos polynomial généralisé repose sur 3 étapes fondamentales à savoir :

- ✓ Le choix de la base polynômiale appropriée au problème : le choix se fait en fonction de la loi de probabilité régissant le paramètre aléatoire. Voir tableau 3.1.
- ✓ La fixation de l'ordre de troncation P : celui-ci est fixé en général par une étude de convergence qui consiste à l'augmenter et à évaluer la qualité de la représentation à mesure que l'ordre augmente.
- ✓ Le calcul des coefficients (modes stochastiques) : Le calcul d'une représentation par le chaos polynomial généralisé nécessite la détermination de $P+1$ modes stochastiques. Deux approches sont utilisées: une intrusive et une autre non intrusive.

3.5.4.1. Schéma de calcul intrusif

Soit un système linéaire stochastique décrit comme suit :

$$\dot{x}(t, \xi) = A(\xi)x(t, \xi) + B(\xi)u(t, \xi) \quad (3.32)$$

où $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$. Le système possède des paramètres incertains, caractérisés par $A(\xi), B(\xi)$ qui sont des matrices fonction de variables aléatoires $\xi \equiv \xi(\omega) \in \mathbb{R}^d$. En raison de la nature stochastique de (A, B) le comportement du système sera aussi stochastique. La commande $u(t)$ peut être ou stochastique ou déterministe.

Soit $x_i(t, \xi), A_{ij}(\xi), B_{ij}(\xi)$, les composants de $x(t, \xi), A(\xi)$ et $B(\xi)$ respectivement, en appliquant le chaos polynomial généralisé à un ordre fini à $x_i(t, \xi), A_{ij}(\xi), B_{ij}(\xi)$, on obtient :

$$\hat{x}_i(t, \xi) = \sum_{k=0}^p x_{i,k}(t) \phi_k(\xi) = x_i(t)^T \phi(\xi), \quad (3.33)$$

$$\hat{u}_i(t, \xi) = \sum_{k=0}^p u_{i,k}(t) \phi_k(\xi) = u_i(t)^T \phi(\xi), \quad (3.34)$$

$$\hat{A}_{ij}(\xi) = \sum_{k=0}^p a_{ij,k} \phi_k(\xi) = a_{ij}^T \phi(\xi), \quad (3.35)$$

$$\hat{B}_{ij}(\xi) = \sum_{k=0}^p b_{ij,k} \phi_k(\xi) = b_{ij}^T \phi(\xi), \quad (3.36)$$

où $x_i(t), a_{ij}, b_{ij}, \phi(\xi) \in \mathbb{R}^p$ sont définis par :

$$x_i(t) = [x_{i,0}(t) \dots x_{i,p}(t)]^T$$

$$u_i(t) = [u_{i,0}(t) \dots u_{i,p}(t)]^T$$

$$a_{ij} = [a_{ij,0} \dots a_{ij,p}]^T$$

$$b_{ij} = [b_{ij,0} \dots b_{ij,p}]^T$$

$$\phi(\xi) = [\phi_0(\xi) \dots \phi_p(\xi)]^T$$

Le nombre de termes p est déterminé par la dimension d de ξ et l'ordre r des polynômes $\{\phi_k\}$, est donné par :

$$P+1 = \frac{(d+r)!}{d!r!} \quad (3.37)$$

Les coefficients $a_{ij,k}$ et $b_{ij,k}$ sont obtenus via une projection de Galerkin sur $\{\phi_k\}_{k=0}^p$ donnés par :

$$a_{ij,k} = \frac{\langle A_{ij}(\xi), \phi_k(\xi) \rangle}{\langle \phi_k(\xi)^2 \rangle} \quad (3.38)$$

$$b_{ij,k} = \frac{\langle B_{ij}(\xi), \phi_k(\xi) \rangle}{\langle \phi_k(\xi)^2 \rangle} \quad (3.39)$$

Dépendant du système, $u_i(t, \xi)$ peut-être soit déterministe ou stochastique. Quand $u_i(t, \xi)$ est déterministe $u_i(t) = u_{i,0}(t)$.

Les $n(p+1)$ coefficients $\{x_{i,k}(t)\}; i=1, \dots, n; k=0, \dots, p$ sont obtenus en substituant la solution estimée dans l'équations d'état (3.32) et en opérant une projection de Galerkin dans la base $\{\phi_k\}_{k=0}^p$ pour donner $n(p+1)$ équations différentielles linéaires donné par :

$$\dot{X} = AX + BU \quad (3.40)$$

Avec $X \in \mathbb{R}^{n(p+1)}$; $A \in \mathbb{R}^{n(p+1) \times n(p+1)}$; $B \in \mathbb{R}^{n(p+1) \times n(p+1)}$ et

$$X = [x_1^T \ x_2^T \ \dots \ x_n^T], \quad (3.41)$$

$$U = [u_1^T \ u_2^T \ \dots \ u_n^T], \quad (3.42)$$

Une forme plus pratique peut être obtenue de la manière suivante. Soit $\hat{e}_{ijk} = \frac{\langle \phi_i, \phi_j \phi_k \rangle}{\langle \phi_i^2 \rangle}$. Le système linéaire peut être exprimé comme suit :

$$\dot{x}_{i,l} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^p \sum_{q=0}^p a_{ij,k} x_{j,q} \hat{e}_{lkq} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^p \sum_{q=0}^p b_{ij,k} u_{j,q} \hat{e}_{lkq} \quad (3.43)$$

Soit la matrice ϕ_k tel que :

$$\phi_k = \begin{bmatrix} \hat{e}_{0k0} & \hat{e}_{0k1} & \dots & \hat{e}_{0kp} \\ \hat{e}_{1k0} & \hat{e}_{1k1} & & \hat{e}_{1kp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{e}_{pk0} & \hat{e}_{pk1} & \dots & \hat{e}_{pkp} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Les matrices A et B peuvent être écrites comme suit :

$$A = [A_{ij}], \quad \text{où } A_{ij} = \sum_{k=0}^p a_{ij,k} \phi_k \quad (3.45)$$

$$B = [B_{ij}], \quad \text{où } B_{ij} = \sum_{k=0}^p b_{ij,k} \phi_k \quad (3.46)$$

Une autre expression de A et B :

$$A = \sum_{k=0}^p A_k \otimes \phi_k, \quad (3.47)$$

$$B = \sum_{k=0}^p B_k \otimes \phi_k, \quad (3.48)$$

où \otimes est le produit de Kronecker et les matrices A_k et B_k sont les projections de $A(\xi)$ et $B(\xi)$ dans la base du chaos polynomial. Par conséquent, la transformation d'un système linéaire stochastique avec $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, avec un développement en chaos polynomial d'ordre p , produit un système déterministe de dimension $n(p+1)$.

3.5.4.2. Schéma de calcul non intrusif : méthode de régression

Les coefficients du chaos polynomial (ou modes stochastiques) peuvent être estimés en résolvant un problème de moindres carrés. Cette méthode, non-intrusive, n'exploite pas l'orthogonalité des polynômes. Elle consiste à calculer les modes stochastiques de telle sorte à minimiser, au sens des moindres carrés, l'écart ε entre la solution du modèle stochastique et son approximation dans la base du chaos polynomial généralisé.

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^Q [x_i(t, \xi^{(k)}) - \sum_{j=0}^P \bar{x}_{i,j}(t) \phi_j(\xi^{(k)})]^2 \quad (3.49)$$

où Q est le nombre de simulations nécessaires pour que la solution du problème des moindres carrés soit admissible, tel que $Q \geq P+1$

On désigne par $\bar{Y} = (y_0, y_1, \dots, y_p)^T$ le vecteur des coefficients modaux et par Z la matrice d'éléments $z_{k,l} = \phi_l(\xi^{(k)})$ définie comme suit :

$$Z = \begin{pmatrix} \phi_0(\xi^{(1)}) & \phi_1(\xi^{(1)}) & \dots & \phi_P(\xi^{(1)}) \\ \phi_0(\xi^{(2)}) & \phi_1(\xi^{(2)}) & \dots & \phi_P(\xi^{(2)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(\xi^{(n)}) & \phi_1(\xi^{(n)}) & \dots & \phi_P(\xi^{(n)}) \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

La solution des moindres carrés est donnée par l'équation suivante :

$$\bar{y} = (Z^T Z)^{-1} Z^T Y \quad (3.51)$$

La matrice $(Z^T Z)$ est la matrice de Fisher.

3.5.5. Analyse de la stabilité des systèmes stochastiques en utilisant le chaos polynomial

L'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques par la méthode de Lyapunov peut être développée pour analyser la stabilité presque sûre des systèmes stochastiques. Soit le système stochastique décrit par l'équation (3.52)

$$\dot{x}(t, \xi) = A(\xi)x(t, \xi) \quad (3.52)$$

ξ étant le paramètre aléatoire. Soit $\hat{x}(t) = X(t)^T \phi(\xi)$ l'approximation de $x(t, \xi)$. Ainsi le système déterministe correspondant dans la base du chaos polynomial est :

$$\dot{X} = AX \quad (3.53)$$

Le système (3.52) est dit presque sûrement stable au sens stochastique (Fisher et al. 2009) si et seulement si :

$$Pr[\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, \xi) \rightarrow 0] = 1 \quad (3.54)$$

La stabilité des systèmes stochastiques peut aussi être déterminée en analysant la stabilité des moments du processus stochastique décrit par l'équation (3.52). Ainsi l'analyse de la stabilité devient un problème d'analyse de la croissance ou de la décroissance de la solution de (3.52), qui sont des fonctions déterministes.

Définition 3.9 : le point d'équilibre $x_e = 0$ du système (3.52) est dit stable au $p^{\text{ème}}$ moment si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que :

$$\sup E[x(t; x(t_0))^p] \leq \epsilon, \quad \forall x(t_0) : |x(t_0)| \leq \delta, \quad t \geq 0 \quad (3.55)$$

Pour les systèmes LTI la stabilité des moments est équivalente à la stabilité presque sûre.

Définition 3.10 : le point d'équilibre $x_e = 0$ est asymptotiquement stable au $p^{\text{ème}}$ moment s'il est stable au $p^{\text{ème}}$ moment et :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[x(t; x(t_0))^p] = 0, \quad (3.56)$$

Pour tout $x(t_0)$ au voisinage du point d'équilibre.

Définition 3.11 : le point d'équilibre $x_e = 0$ est exponentiellement stable au $p^{\text{ème}}$ moment s'il existe des constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $\delta > 0$ suffisamment petit tel que :

$$E[x(t; x(t_0))^p] \leq c_1 |x(t_0)|^p e^{-c_2 t}, \quad \forall x(t_0) : |x(t_0)| \leq \delta, \quad (3.57)$$

Dans ce qui suit nous allons présenter des résultats sur la stabilité en fonction du chaos polynomial.

Proposition 3.1 : le système décrit par l'équation (3.52) est stable à tous les moments tel que défini par les équations (3.55) et (3.57) si $\exists P = P^T$ tel que :

$$A^T P + P A < -Q \quad (3.58)$$

Qui résulte d'un choix de la fonction de Lyapunov $V = X^T P X$

Démonstration : soit $X = [x_0, x_1 \dots]^T$ le vecteur des coefficients du chaos polynomial généralisé de l'équation (3.52), les moments en fonction de $x_i(t)$ sont donnés par :

$$m_1(t) = \sum_{i_1=0}^P x_{i_1}(t) \int_{\mathcal{D}_\xi} \phi_{i_1}(\xi) f(\xi) d\xi \quad (3.59)$$

$$m_2(t) = \sum_{i_1=0}^P \sum_{i_2=0}^P x_{i_1}(t) x_{i_2}(t) \int_{\mathcal{D}_\xi} \phi_{i_1}(\xi) \phi_{i_2}(\xi) f(\xi) d\xi \quad (3.60)$$

$$m_p(t) = \sum_{i_1=0}^P \dots \sum_{i_p=0}^P x_{i_1}(t) \dots x_{i_p}(t) \int_{\mathcal{D}_\xi} \phi_{i_1}(\xi) \dots \phi_{i_p}(\xi) f(\xi) d\xi \quad (3.61)$$

Stabilité marginale : si l'équation (3.58) est vérifiée, cela veut dire que $X(t)$ est borné ce qui implique que $x_i(t)$ est borné. Par conséquent d'après les définitions des moments dans les équations (3.59), (3.61), $m_i(t)$ est borné. Ainsi, si l'équation (3.58) est vérifiée, l'équation (3.55) est satisfaite.

Stabilité asymptotique : si l'équation (3.58) est vérifiée $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \rightarrow 0$. Par conséquent, $\lim_{t \rightarrow \infty} m_i(t) \rightarrow 0$ pour $i=1, 2, \dots$ et l'équation (3.56) est satisfaite.

Stabilité exponentielle : si l'équation (3.58) est vérifiée, cela veut dire que $X(t)$ est exponentiellement décroissante, ce qui implique que $x_i(t)$ est aussi exponentiellement décroissant. Par conséquent, $m_i(t)$ peut-être bornée par une fonction exponentielle décroissante et l'équation (3.57) est satisfaite.

3.5.5.1. Analyse de la stabilité des valeurs propres

Soit un système linéaire (3.52) à un paramètre aléatoire ξ uniformément distribué sur l'intervalle $[-1, 1]$.

$$\dot{x}(t, \xi) = A(\xi)x(t, \xi)$$

Comme ξ est incertain toutes les valeurs propres $\lambda^{(i)}$ ($i = 1, \dots, n$) du système vont être des fonctions aléatoires. Les polynômes de Legendre sont, suivant le schéma d'Askey, plus appropriés pour traiter des incertitudes uniformes.

La représentation des valeurs propres $\lambda^{(i)}$ dans la base du chaos polynomial de Legendre peut être donnée par l'équation suivante :

$$\lambda_i(\xi) \approx \sum_{j=0}^P \bar{\lambda}_{i,j} L_j(\xi) \quad (3.62)$$

ξ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle $[-1, 1]$, intervalle d'orthogonalité des polynômes de Legendre.

Le problème est alors d'étudier la stabilité du système en prenant en compte la variabilité du paramètre ξ . Pour cela deux méthodes seront développées, l'étape commune entre les deux méthodes est le calcul des modes stochastiques $\bar{\lambda}_{i,j}$. Une fois les modes stochastiques sont calculés, la stabilité de ce système sera analysée par la méthode indirecte de Lyapunov.

- **Première méthode**

La première méthode est basée sur l'échantillonnage du paramètre incertain ξ puis la reconstruction des valeurs propres. La stabilité est alors analysée avec la première méthode de Lyapunov (méthode indirecte). Ainsi, pour un nombre d'échantillons $\xi^{(k)}$ donné le système est :

- Asymptotiquement Stable si : $\forall i \in \{1, \dots, n\} / \text{Re}(\lambda_i(\xi^{(k)})) < 0 \quad (3.63)$

- Instable si : $\exists i \in \{1, \dots, n\} / \text{Re}(\lambda_i(\xi^{(k)})) > 0 \quad (3.64)$

- Marginalement stable si : $\exists j \in \{1, \dots, n\} / \text{Re}(\lambda_i(\xi^{(k)})) = 0 \quad (3.65)$

L'avantage de cette méthode est qu'elle aide à surpasser les difficultés de calcul de la méthode de Monte Carlo. Cette dernière, permet d'analyser la stabilité en résolvant le polynôme caractéristique pour chaque échantillon pour obtenir les valeurs propres. En utilisant les polynômes de Legendre, nous n'avons pas besoin de résoudre l'équation caractéristique du système, pour obtenir les valeurs propres il suffit juste d'évaluer les polynômes de Legendre aux échantillons donnés.

- **Deuxième méthode**

Pour éviter l'opération d'échantillonnage de la première méthode, une deuxième méthode est proposée basée sur la résolution d'un problème d'optimisation qui permet d'obtenir les maxima et les minima des parties réelles de chaque valeur propre.

$$\begin{cases} \max / \min \left(\operatorname{Re}(\lambda_{i=1, \dots, n}(\xi)) = \sum_{j=0}^P \bar{\lambda}_{i,j} L_j(\xi) \right) \\ \xi \in [-1, 1] \end{cases} \quad (3.66)$$

La stabilité du système peut être analysée par la méthode indirecte de Lyapunov. Ainsi le système (3.48) est :

- asymptotiquement stable pour $\xi \in [-1, 1]$ si :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \max_{\xi \in [-1, 1]} \left(\operatorname{Re}(\lambda_i(\xi)) \right) < 0 \quad (3.67)$$

- Instable si :

$$\exists i \in \{1, \dots, n\}, \min_{\xi \in [-1, 1]} \left(\operatorname{Re}(\lambda_i(\xi)) \right) > 0 \quad (3.68)$$

- Marginalement stable si :

$$\exists i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, n\} / \max_{\xi \in [-1, 1]} \left(\operatorname{Re}(\lambda_i(\xi)) \right) \geq 0 \wedge \min_{\xi \in [-1, 1]} \left(\operatorname{Re}(\lambda_j(\xi)) \right) \leq 0 \quad (3.69)$$

La conclusion sur la stabilité du système (3.52) par ces deux méthodes dépend de la précision de l'approximation (3.52). Donc, il est important de bien choisir l'ordre de troncation P qui permet de donner une bonne approximation.

3.6. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons abordé des concepts de base sur les processus stochastiques ainsi que des méthodes qui nous permettent de les présenter. Les méthodes basées sur les concepts du chaos polynomial et la méthode de Monte Carlo ont été introduites. Ces méthodes seront utilisées dans le prochain chapitre en combinaison avec des méthodes d'analyse de la stabilité telle que la méthode de Lyapunov pour analyser la stabilité d'un système mécanique frottant incertain.

Chapitre 4 : Application des méthodes probabilistes pour l'analyse de la stabilité d'un système frottant.

4.1. Introduction :

Dans ce chapitre il s'agira d'appliquer les méthodes de Monte Carlo et du chaos polynomial généralisé, présentées dans le chapitre précédent, pour l'analyse de la stabilité d'un système mécanique frottant à deux degrés de liberté tout en prenant en compte l'incertitude du coefficient de frottement. Ce système est introduit en littérature pour représenter le comportement d'un frein à tambour.

En premier lieu il sera question d'analyser la stabilité du système par la méthode de Monte Carlo. Celle-ci permet d'obtenir des résultats de référence. Ces derniers sont exploités pour valider l'analyse par la méthode basée sur le chaos polynomial généralisé. Dans ce cadre, nous allons appliquer le schéma non-intrusif pour calculer les représentations par chaos polynomial généralisé lesquelles seront associées aux valeurs propres pour analyser la stabilité.

4.2. Système avec frottement

4.2.1. Frein à tambour

Un frein à tambour est un système de freinage constitué d'une cloche (le tambour), à l'intérieur de laquelle se trouvent au moins deux mâchoires munies de garnitures. Leur fonction est de s'écarter grâce à des cames ou des pistons qui provoquent le frottement de la garniture dans le tambour. Ces cames sont actionnées par une commande mécanique (câble, tirant) et les pistons sont actionnés par une commande hydraulique.

Le frein à tambour comporte au sein du moyeu :

- deux mâchoires de frein venant s'écarter et frotter sur l'intérieur du tambour ;
- un actionneur : une ou deux cames pour pousser les mâchoires sur le tambour ou par des pistons pour les freins à commande hydraulique ;
- des ressorts sont chargés de ramener les mâchoires à leur position de repos.

Les freins à tambour ont d'abord été utilisés dans l'automobile, puis dans l'aviation. Du fait de leur manque de résistance à l'échauffement et des risques de blocage, les avions ont assez rapidement évolué vers les freins à disque. Les automobiles ont évolué vers les freins à disque au travers de la compétition qui a eu besoin de freins plus puissants et plus performants que les automobiles "grand public" de l'époque. Aujourd'hui, la plupart des automobiles sont équipées de freins à disque au minimum sur les roues avant.

4.2.2. Avantages et inconvénients

Par rapport au frein à disque caractérisé par sa progressivité, le frein à tambour a tendance à freiner en tout ou rien, car lorsque les mâchoires sont écartées, elles se trouvent « aspirées » par le tambour. Lorsque le frein à tambour est puissant, il provoque facilement des blocages de roues, ce qui est dangereux pour la stabilité du véhicule.

Lorsque les mâchoires sont écartées par une seule came, le frein est peu efficace mais le risque de blocage est faible. Lorsqu'elles sont écartées en plusieurs points (frein double came, ou plus), le nombre de points d'aspiration des garnitures augmente, et avec lui, la force de freinage et le risque de blocage. C'est la raison pour laquelle la plupart des véhicules, surtout les véhicules à deux roues, sont maintenant équipés de freins à disque.

Sur le plan technique, le frein à tambour est étanche aux poussières et à l'eau. Cette étanchéité lui confère un inconvénient, le refroidissement, qui n'est pas très efficace et peut entraîner une surchauffe en cas de freinages longs ou répétés. Un frein à tambour se refroidit généralement par son pourtour extérieur, muni d'ailettes pour dissiper la chaleur. Certains modèles disposent d'ouïes de refroidissement qui forcent l'air à circuler à l'intérieur, mais au détriment de l'étanchéité.

Un autre inconvénient du frein à tambour est sa faculté à parfois s'encrasser de manière importante, chose qui n'arrive pas avec un frein à disque, car les poussières issues du freinage sont automatiquement évacuées vers l'extérieur. Les déformations des tambours et leur faible endurance à l'échauffement entraînent la disparition progressive de ce type de frein sur les véhicules récents. De plus, les freins à disques engendrent moins d'effet gyroscopique particulièrement préjudiciable aux motocyclettes.

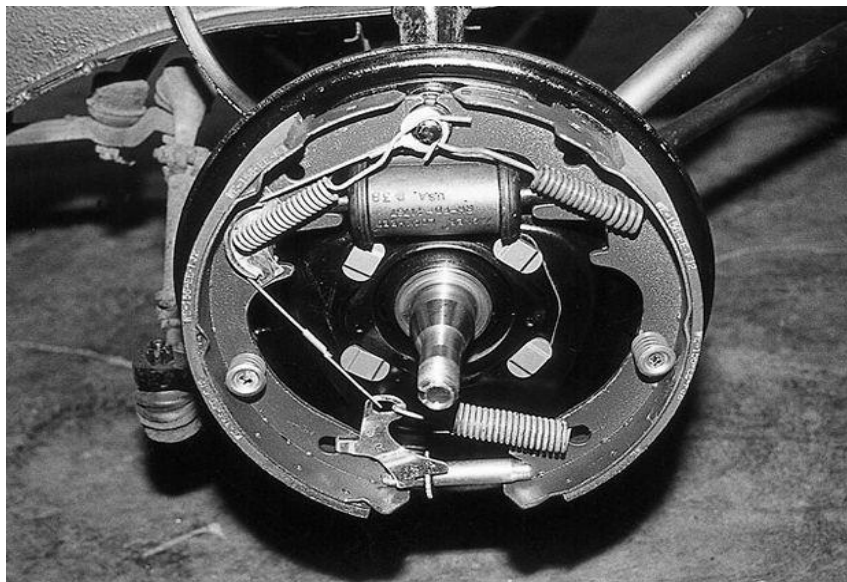


Figure 4.1 : Système de freinage à tambour.

4.2.3. Description du modèle mécanique

Le modèle représenté dans la figure 4.2 est constitué d'une masse tenue contre une bande en déplacement. Le contact entre la masse et la bande est modélisé par deux plaques soutenues par deux raideurs linéaires différentes. La masse et la surface de la bande sont supposées être toujours en contact. Le coefficient de frottement au contact est supposé constant tout comme la vitesse de déplacement de la bande. La vitesse relative entre la bande et les vitesses \dot{X}_1 et \dot{X}_2 est supposée positive car la direction de la force de frottement est considérée constante. Toutes ces hypothèses sont prises en considération pour obtenir un modèle linéaire à deux degrés de liberté, simplifié mais ayant un comportement représentatif de celui des systèmes de freinage à tambour (Hultèn 1993).

La force tangentielle F_T due au frottement dans le contact est supposé proportionnelle à la force normale F_N tel que c'est indiqué par la loi de coulomb : $F_T = \mu F_N$.

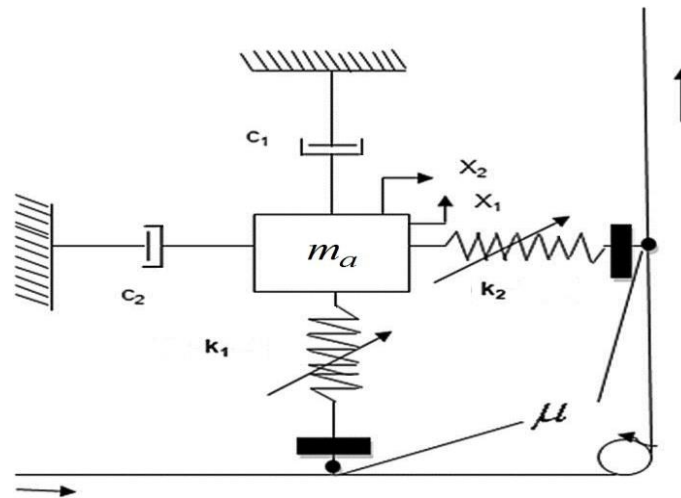


Figure 4.2 : Système à deux degrés de liberté de Hultèn.

4.2.4. Les équations de mouvement

Le système représenté dans la figure (4.2) a deux degrés de liberté qui sont les déplacements X_1 et X_2 . Les actions s'exerçant sur le système sont : les forces de rappel liées aux raideurs $(k_1), (k_2)$, les forces d'amortissement liées aux amortisseurs c_1, c_2 et les forces tangentielles de frottement au niveau des deux points de contact. L'application du principe fondamental de la dynamique permet ainsi de générer les équations différentielles régissant les déplacements instantanés $X_1(t)$ et $X_2(t)$.

$$\begin{cases} m_a \ddot{X}_1(t) + c_1 \dot{X}_1(t) + k_1 X_1(t) = \mu(k_2 X_2(t)) \\ m_a \ddot{X}_2(t) + c_1 \dot{X}_2(t) + k_2 X_2(t) = -\mu(k_1 X_1(t)) \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} m_a \ddot{X}_1(t) + c_1 \dot{X}_1(t) + k_1 X_1(t) - \mu k_2 X_2(t) = 0 \\ m_a \ddot{X}_2(t) + c_1 \dot{X}_2(t) + \mu k_1 X_1(t) + k_2 X_2(t) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

De manière équivalente, le système d'équations précédent peut être exprimé comme suit :

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = 0 \quad (4.3)$$

où $X(t)=[X_1(t) X_2(t)]^T$, $\ddot{X}(t), \dot{X}(t)$ et $X(t)$ sont, respectivement, les vecteurs bidimensionnels de l'accélération, de la vitesse et du déplacement, M est la matrice masse, C désigne la matrice amortissement, K est la matrice raideur. Ces paramètres sont définis comme suit :

$$M = \begin{bmatrix} m_a & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k_1 & -\mu k_2 \\ \mu k_1 & k_2 \end{bmatrix},$$

La représentation (4.3) est standardisée en considérant le coefficient d'amortissement relatif

$$\eta_i = c_i / \sqrt{m_a k_i} \quad (i=1,2) \text{ et les pulsations propres } \omega_{0,i} = \sqrt{k_i/m_a}$$

d'où le système (4.4) suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{X}_1(t) \\ \ddot{X}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \omega_{0,1} & 0 \\ 0 & \eta_2 \omega_{0,2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{0,1}^2 & -\mu \omega_{0,2}^2 \\ \mu \omega_{0,1}^2 & \omega_{0,2}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

L'analyse robuste de la stabilité du système (4.4) sera considéré à base de la représentation dans l'espace de phase défini par les déplacements $x_1(t) = X_1(t)$, $x_3(t) = X_2(t)$, et les vitesses $x_2(t) = \dot{X}_1(t)$, $x_4(t) = \dot{X}_2(t)$. Le système (4.4) est ainsi représenté dans l'espace d'état par (4.5) :

$$\dot{x}(t) = A(\mu)x(t) \quad (4.5)$$

où $x(t) = (x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t))^T$, $A(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_{0,1}^2 & -\eta_1 \omega_{0,1} & \mu \omega_{0,2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\mu \omega_{0,1}^2 & 0 & -\omega_{0,2}^2 & -\eta_2 \omega_{0,2} \end{bmatrix}$

4.3. Analyse robuste de la stabilité

4.3.1. Analyse de la stabilité par la méthode de Monte Carlo

La simulation de Monte Carlo est une méthode habituellement utilisée pour l'évaluation d'un modèle utilisant un ensemble de paramètres aléatoires. La méthode est utilisée pour propager et quantifier les incertitudes sur une performance donnée. Dans le cas de cette étude, on voudrait propager l'incertitude du coefficient de frottement et analyser la stabilité en tenant compte de cette incertitude.

Cette méthode consiste à créer une grille de valeurs numériques à partir du support probabiliste du coefficient de frottement μ puis à calculer les valeurs propres du système pour chacune des valeurs de la grille.

Les étapes d'analyse de la stabilité par la méthode de Monte Carlo sont les suivantes :

- 1- Détermination du modèle : dans notre cas il sera question d'analyser la stabilité du système décrit par l'équation (4.5). Ce système est linéaire, ayant un paramètre incertain à savoir, le coefficient du frottement μ à valeur constante mais incertaine.
- 2- Génération des données aléatoires : considérons le cas où le coefficient de frottement μ est régi par une loi de distribution uniforme sur l'intervalle $[0 \ 0.5]$. un nombre de 10.000 échantillons sera généré sur cet intervalle. Ce nombre a été fixé pour garantir un niveau de confiance de 99% avec une marge de précision de 1%. Ce nombre est déterminé à partir de l'équation (3.20).

$$N_{min} = 1 + \text{ceil} \left[\left(\frac{u_{\alpha/2} \hat{C}_Y}{\varepsilon_{\mu_Y}} \right)^2 \right]$$

- 3- Evaluation du modèle : le modèle sera évalué pour chacune des 10.000 valeurs générées sur l'intervalle $[0 \ 0.5]$ en calculant les valeurs propres pour chaque point. La stabilité sera ainsi analysée en observant le signe des parties réelles des valeurs propres obtenues pour chaque valeur du coefficient de frottement.
- 4- Analyse des résultats obtenus : l'analyse du signe des parties réelles permet alors de séparer les régions de stabilité des régions d'instabilité.

L'évolution des parties réelles et imaginaires des valeurs propres est tracée, dans la figure 4.3, en fonction du coefficient du frottement. Elle correspond aux valeurs paramétriques suivantes :

$$\omega_1 = 2\pi \times 100 \text{ rad/s}, \omega_2 = 2\pi \times 75 \text{ rad/s}, \eta_1 = \eta_2 = 0.02.$$

Ayant deux degrés de liberté, le système (4.5) possède 4 valeurs propres. Ces dernières, selon l'évolution illustrée dans la figure (4.3), sont deux à deux conjuguées.

$$\begin{cases} \lambda_1 = r_1 + jm_1 \\ \lambda_2 = r_2 + jm_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lambda_3 = r_3 + jm_3 \\ \lambda_4 = r_4 + jm_4 \end{cases}$$

Avec les parties réelles $r_1 = r_2$, $r_3 = r_4$ et les parties imaginaires (pulsations) $m_2 = -m_1$, $m_4 = -m_3$

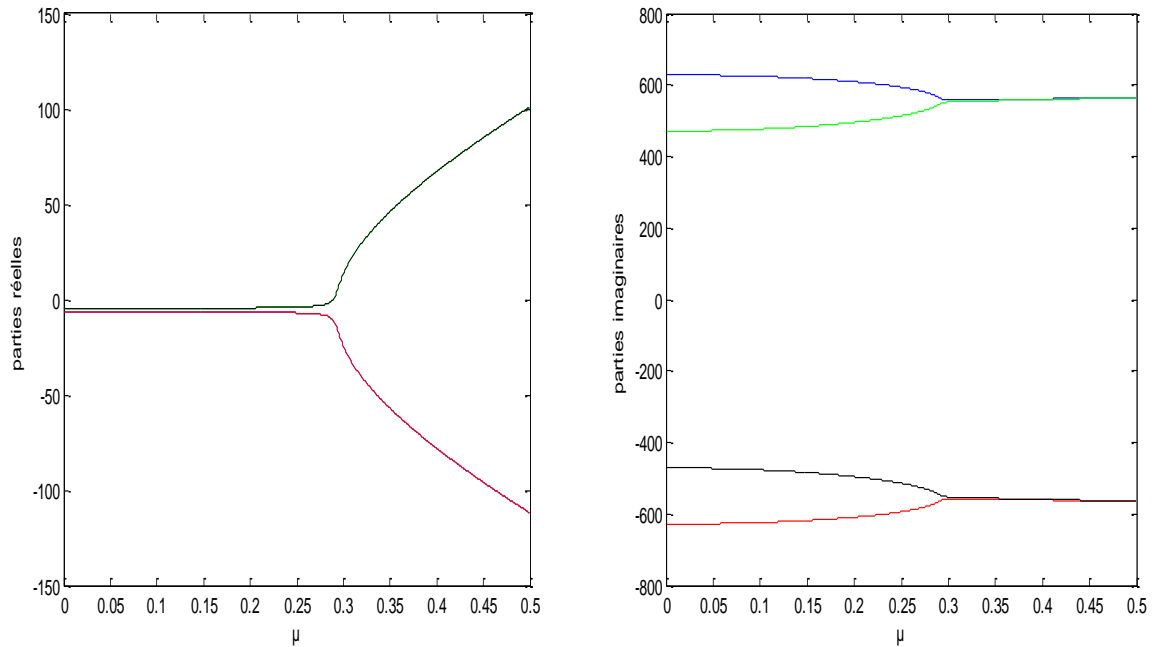


Figure 4.3 : Evolution des parties réelles et imaginaires du système en fonction du coefficient de frottement (μ).

L'évolution des parties réelles et imaginaires des valeurs propres nous permet de distinguer deux régions. La première région caractérisée par des petites valeurs du coefficient de frottement (jusqu'à $\mu \approx 0.2894$), est caractérisée par des valeurs propres deux à deux conjuguées dont les parties réelles sont négatives. Cette région est asymptotiquement stable. Dans la deuxième région ($\mu > 0.2894$), les valeurs imaginaires se rapprochent jusqu'à coalescence alors que les parties réelles associées s'éloignent les unes des autres. A partir de ce point on observe le phénomène de couplage de modes. Dans cette région il y a apparition de modes instables dont les parties réelles sont positives.

4.3.1.1. Conclusion

La méthode de Monte Carlo est une méthode spectrale qui nous permet d'analyser les systèmes à paramètres incertains régis par des densités de probabilité. Cette méthode donne, sous certaines conditions de convergence, des résultats précis au sens statistique. Cependant, elle nécessite un grand nombre d'échantillons pour assurer une grande précision ce qui la rend prohibitive en terme de calcul. Cette méthode nous permet de distinguer une région de stabilité asymptotique presque sûre et une région d'instabilité presque sûre. Le caractère presque sûr de la stabilité est mesuré par la précision et le niveau de confiance imposé par le nombre d'échantillons utilisé pour les calculs. Ce caractère se substitue dans ce cadre, probabiliste, au caractère robuste. Ils deviennent équivalents lorsqu'on fait tendre le nombre d'échantillons à l'infini.

4.3.2. Application du chaos polynomial généralisé : méthode de régression

On se propose dans ce qui suit d'utiliser le formalisme du chaos polynomial généralisé pour analyser la stabilité du système (4.5) en prenant en compte l'incertitude du coefficient de frottement. L'idée est d'exprimer les valeurs propres, fonctions aléatoires de par le caractère probabiliste du coefficient de frottement, dans l'espace des chaos polynomiaux généralisés. Les polynômes de Legendre sont, selon le schéma de correspondance d'Askey associé au chaos polynomial généralisé, les mieux indiqués pour traiter des incertitudes gouvernées par des lois uniformes. Les développements tronqués des valeurs propres en polynômes de Legendre sont donnés comme suit:

$$\lambda_i(\xi) \approx \sum_{j=0}^P \bar{\lambda}_{ij} L_j(\xi) \quad i=1, \dots, n \quad (4.6)$$

Le problème revient alors à calculer les modes stochastiques ($\bar{\lambda}_{ij}$), l'objectif étant de reconstruire les valeurs propres du système (4.5).

La technique non-intrusive de régression est utilisée dans cette étude pour calculer les modes stochastiques en minimisant, au sens des moindres carrés, l'écart entre la solution exacte et la solution approchée par le chaos polynomial généralisé, sur un certain nombre de point de calcul choisi judicieusement. L'erreur à minimiser est donnée par l'équation suivante:

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^Q [\lambda_i(t, \xi^{(k)}) - \sum_{j=0}^P \bar{\lambda}_{i,j}(t) L_j(\xi^{(k)})]^2 \quad (4.7)$$

avec Q le nombre de simulations du système tel que $Q \geq P + 1$.

La solution du problème classique des moindres carrés résultant est, comme présenté dans le chapitre précédent, donnée comme suit :

$$\bar{\lambda}_i = (Z^T Z)^{-1} Z^T Y_i \quad (4.8)$$

où Z est la matrice dont les éléments sont définis par $z_{qj} = L_j(\xi^{(q)})$ et Y_i est le vecteur des valeurs propres $\lambda_i^{(q)}$ correspondant aux réalisations $\xi^{(q)}$ $q=1, \dots, Q$.

Deux problèmes se posent pour calculer les modes stochastiques en utilisant la méthode de régression. Le premier concerne le choix de l'ordre du chaos polynomial généralisé p . tandis que le second concerne le choix du nombre de points de calcul Q sachant que dans le cas d'un seul paramètre incertain il suffit d'avoir $Q \geq p + 1$ ($p+1$ étant le nombre de modes stochastiques à calculer).

Concernant le nombre de points de calcul Q , celui-ci peut être déterminé soit d'une manière aléatoire ou déterministe (dans le cas déterministe, ils sont déterminés par les zéros d'un polynôme de Legendre d'ordre supérieur à l'ordre du chaos de Legendre fixé). On présentera tout d'abord l'étude permettant de fixer l'ordre du chaos puis nous présenterons une étude de l'effet du nombre de points de calcul sur la précision du développement.

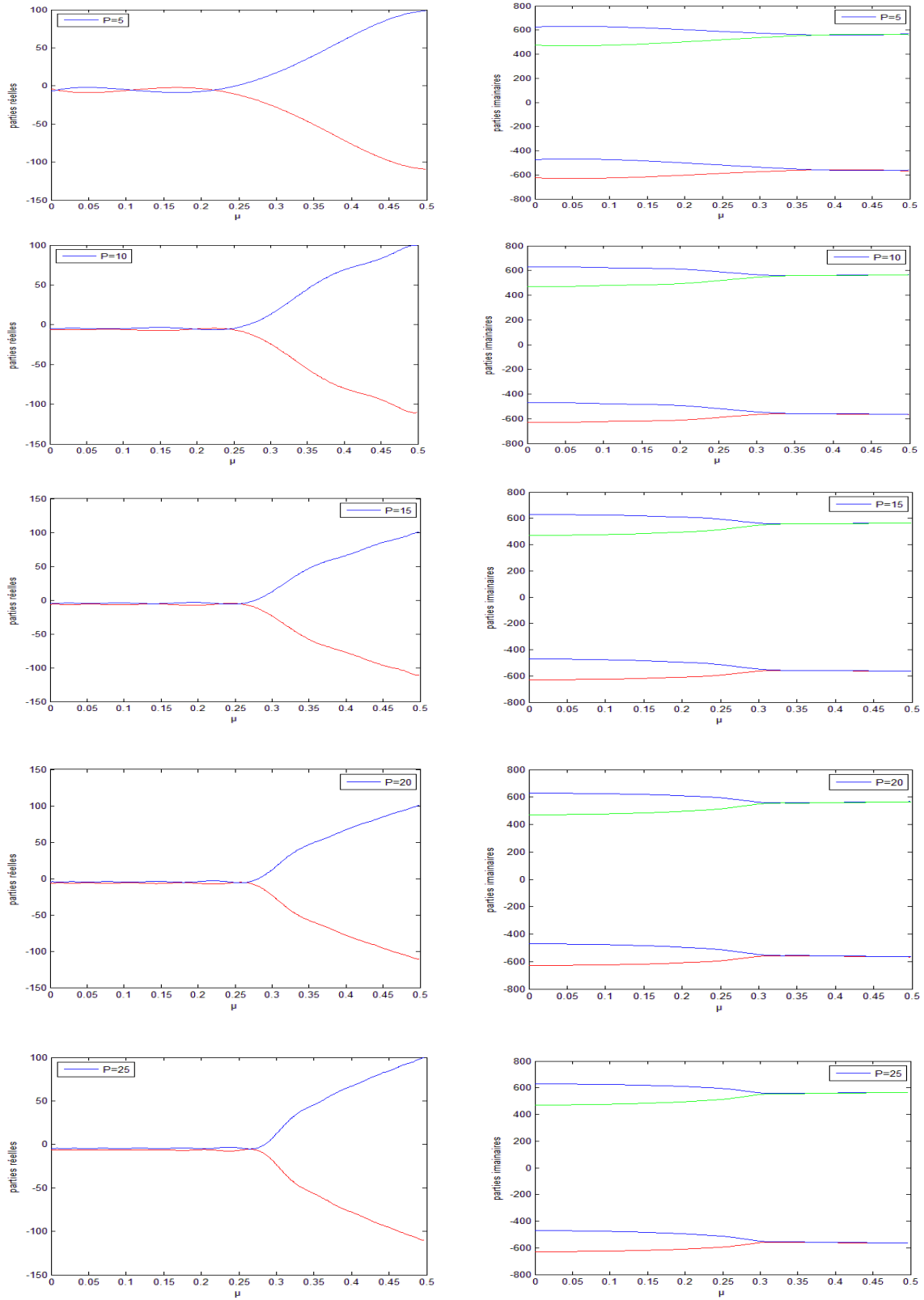
a) Analyse de la convergence

Comme on ne dispose pas de critère permettant de fixer au préalable un ordre du chaos polynomial garantissant une précision acceptable des estimations des valeurs propres, on effectue une analyse de la convergence du développement (4.6). Pour ce faire, on augmente l'ordre du chaos polynomial généralisé p de façon continue jusqu'à l'obtention d'une forme de stationnarité d'un critère d'erreur entre des développements successifs. Dans le cas de cette étude, nous avons choisi la moyenne des erreurs au carré donnée comme suit:

$$e = \left(\frac{1}{Q}\right) \sum_{k=0}^Q \left(\sum_{j=0}^P \bar{\lambda}_{ij} L_j(\xi^{(k)}) - \sum_{j=0}^{P+1} \bar{\lambda}_{ij} L_j(\xi^{(k)}) \right)^2 \quad (4.9)$$

A noter que le nombre de point de calcul dans cette étude est gardé fixe ($Q=44$). De plus ces points sont générés de façon déterministe (les zéros du polynôme de Legendre de degré $p = 44$).

Les modes stochastiques des différentes valeurs propres sont donc calculés pour différentes valeurs de p . L'évolution des parties réelles et imaginaires en fonction du coefficient de frottement μ est reconstruites via les développements (4.6) ainsi calculés. Les résultats sont présentés dans la figure (4.4).



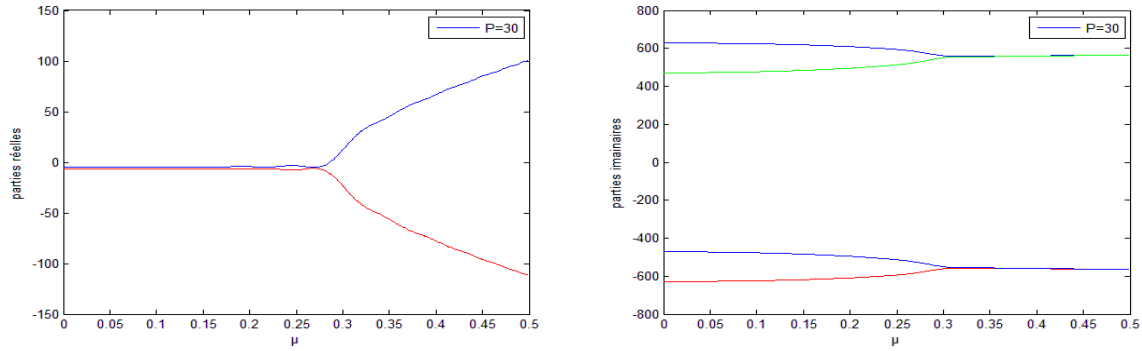


Figure 4.4 : Evolution des parties réelles et des parties imaginaires pour différents ordres P pour un nombre de calculs déterministes égale à 44.

Les figures précédentes montrent que l'évolution des parties réelles et imaginaires des valeurs propres dépend fortement de l'ordre du chaos polynomial généralisé. Le phénomène de couplage de modes est modélisé avec une précision s'améliorant avec l'augmentation de l'ordre du chaos. Ainsi, les régions de stabilité et d'instabilité diffèrent d'un ordre à l'autre. Par conséquent, le point de coalescence de modes, qui sépare les régions de stabilité et d'instabilité, est obtenu pour des valeurs de μ différentes.

Ces résultats montrent bien que, effectivement, le choix de l'ordre du chaos polynomial est crucial pour une analyse précise de la stabilité en prenant en compte l'incertitude du coefficient de frottement.

La figure suivante nous donne l'évolution de l'erreur (4.9) en fonction de l'ordre du chaos.

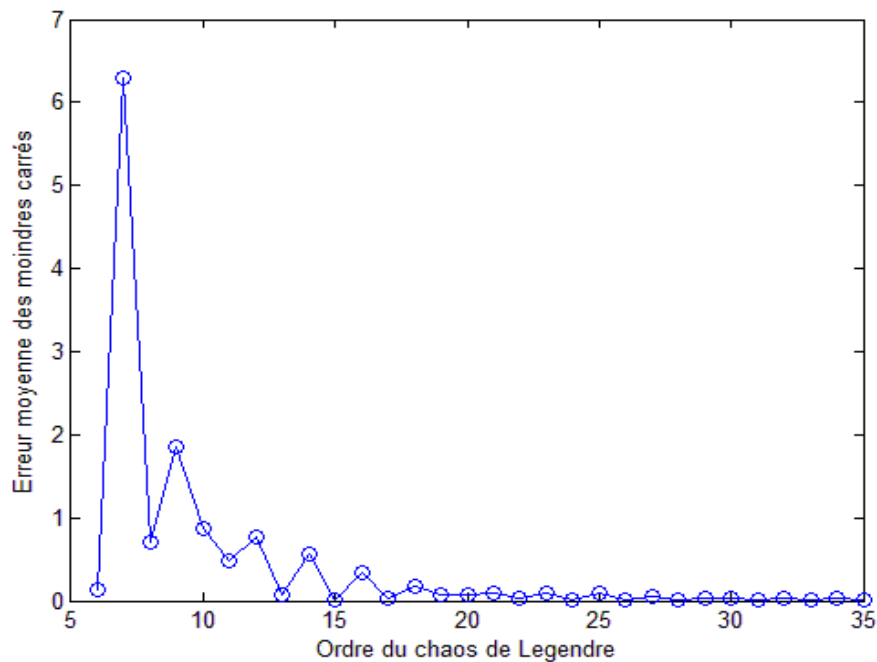


Figure 4.5 : Evolution de l'erreur des moindres carrés (4.9) en fonction de l'ordre du chaos polynomial

La figure (4.5) montre que l'erreur moyenne des moindres carrés (4.9) dépend de l'ordre p du chaos polynomial généralisé. L'évolution de l'erreur présente deux phases. La première montre une décroissance de l'erreur pour $p=5$ jusqu'à $p=20$ à partir duquel on peut observer que l'erreur commence à montrer une stationnarité par rapport à p .

Pour fixer un ordre du chaos polynomial généralisé assurant une précision satisfaisante, il est très important de bien estimer le point de coalescence de modes désignant la frontière entre la zone de stabilité et d'instabilité. Les points de coalescence de modes estimés par les développements d'ordre $p=10$, $p=20$ et $p=30$ sont relevés dans le tableau (4.1). Les erreurs relatives déterminées par rapport au point de coalescence estimé par la méthode de MC y sont aussi relevées.

	$P=10$	$P=20$	$P=30$
Valeur de coalescence de modes MC ($\mu=0.2894$)	0.2696	0.2817	0.2863
Pourcentage d'erreur (%)	6.84	2.66	1.07

Tableau 4.1 : Estimation du point de coalescence de modes

D'après ce tableau, l'ordre $P=30$ nous donne la plus petite erreur. C'est avec cet ordre qu'on obtient un point de coalescence de modes plus proche de celui obtenu avec la méthode de Monte Carlo. Ainsi on peut conclure qu'un ordre $P=30$ peut être choisi comme ordre de troncature.

b) Etude de l'effet du nombre de points Q

L'étude précédente a été faite avec un nombre d'échantillons déterminés d'une manière déterministe fixé à $Q=44$. Dans cette partie, on se propose d'analyser la convergence par rapport au nombre de points de calcul Q tout en gardant l'ordre du chaos fixé à $p=30$. On analysera en premier lieu la convergence en considérant des points de calcul générés de façon déterministe puis de façon aléatoire.

L'évolution de l'erreur pour différents nombres d'échantillons est donnée par les figures suivantes :

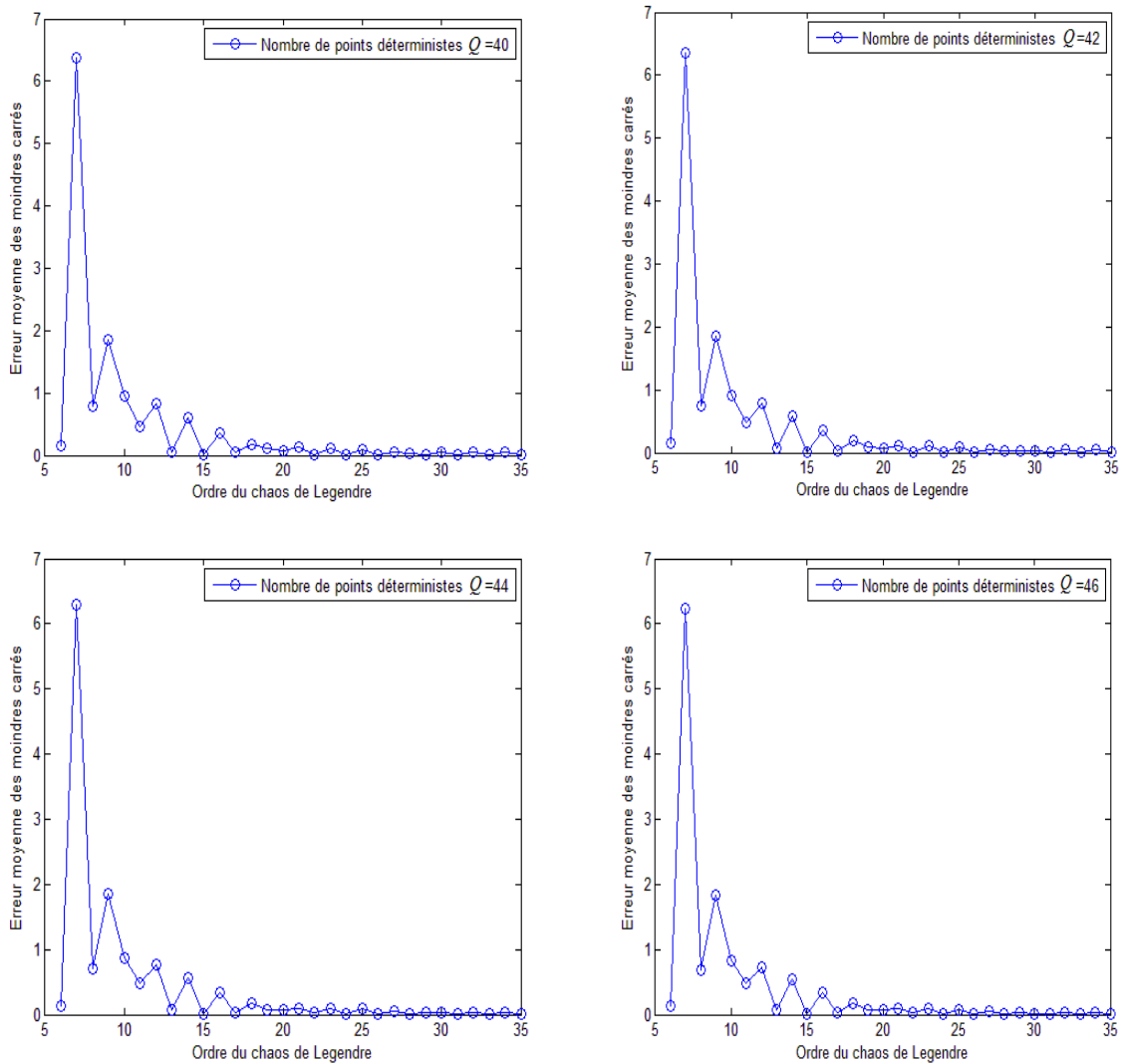


Figure 4.6 : Evolution de l'erreur pour différents nombres de points de calculs générés d'une manière déterministe.

Pour ce cas d'étude un nombre d'échantillons $Q=44$ nous donne une bonne précision.

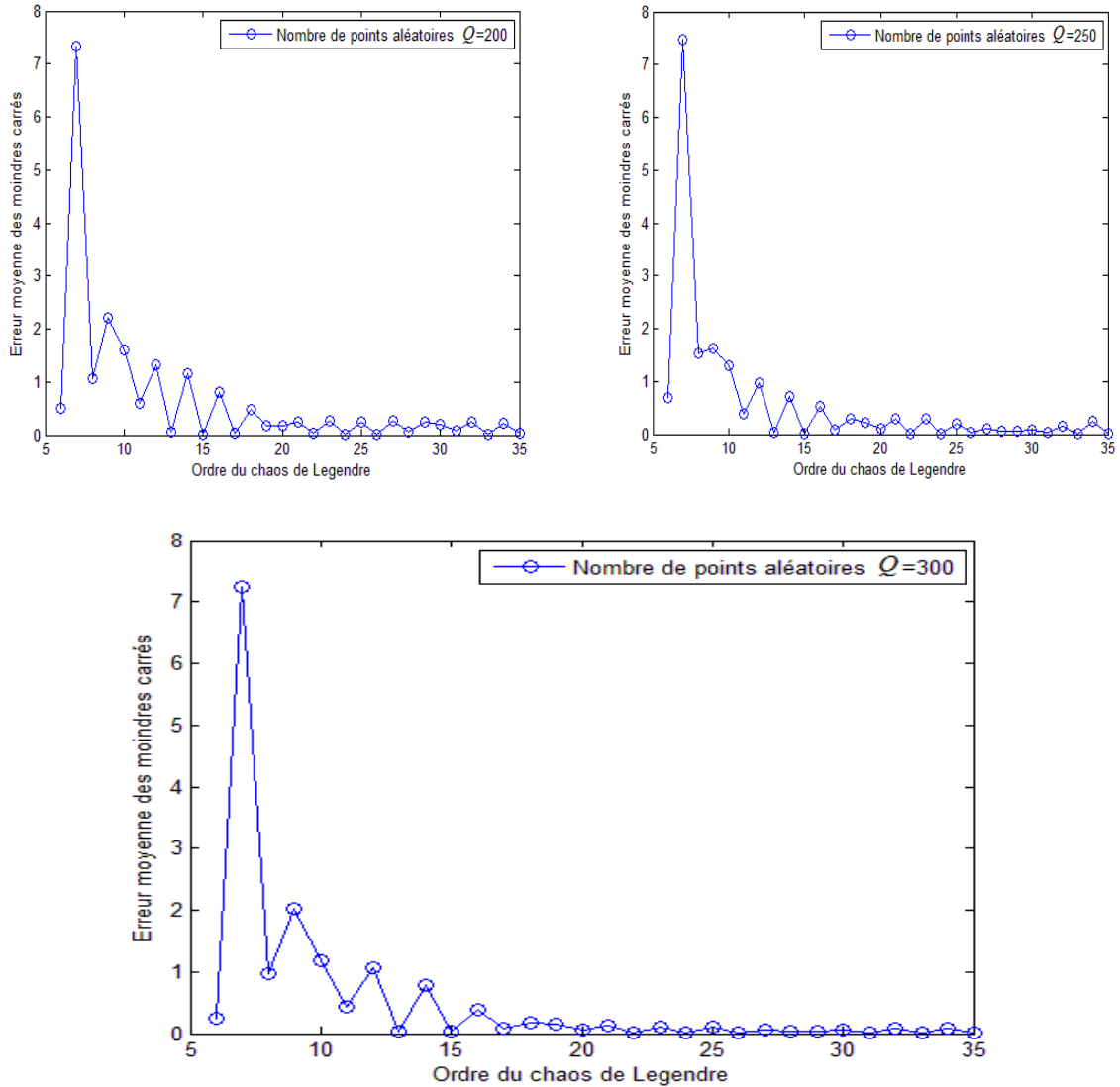


Figure 4.7 : Evolution de l'erreur pour différents nombres de points de calculs générés d'une manière aléatoire

Une précision similaire au cas où les points de calcul sont générés de manière déterministe est obtenue, pour ce cas, pour un nombre d'échantillons $Q=300$.

A partir de ces résultats on constate que le nombre de points de calcul utilisé est plus petit lorsque les points sont déterminés d'une façon déterministe (les zéros d'un polynôme de Legendre). Ainsi, un choix de calcul déterministe nous permet d'obtenir une précision désirée en minimisant le nombre de calculs.

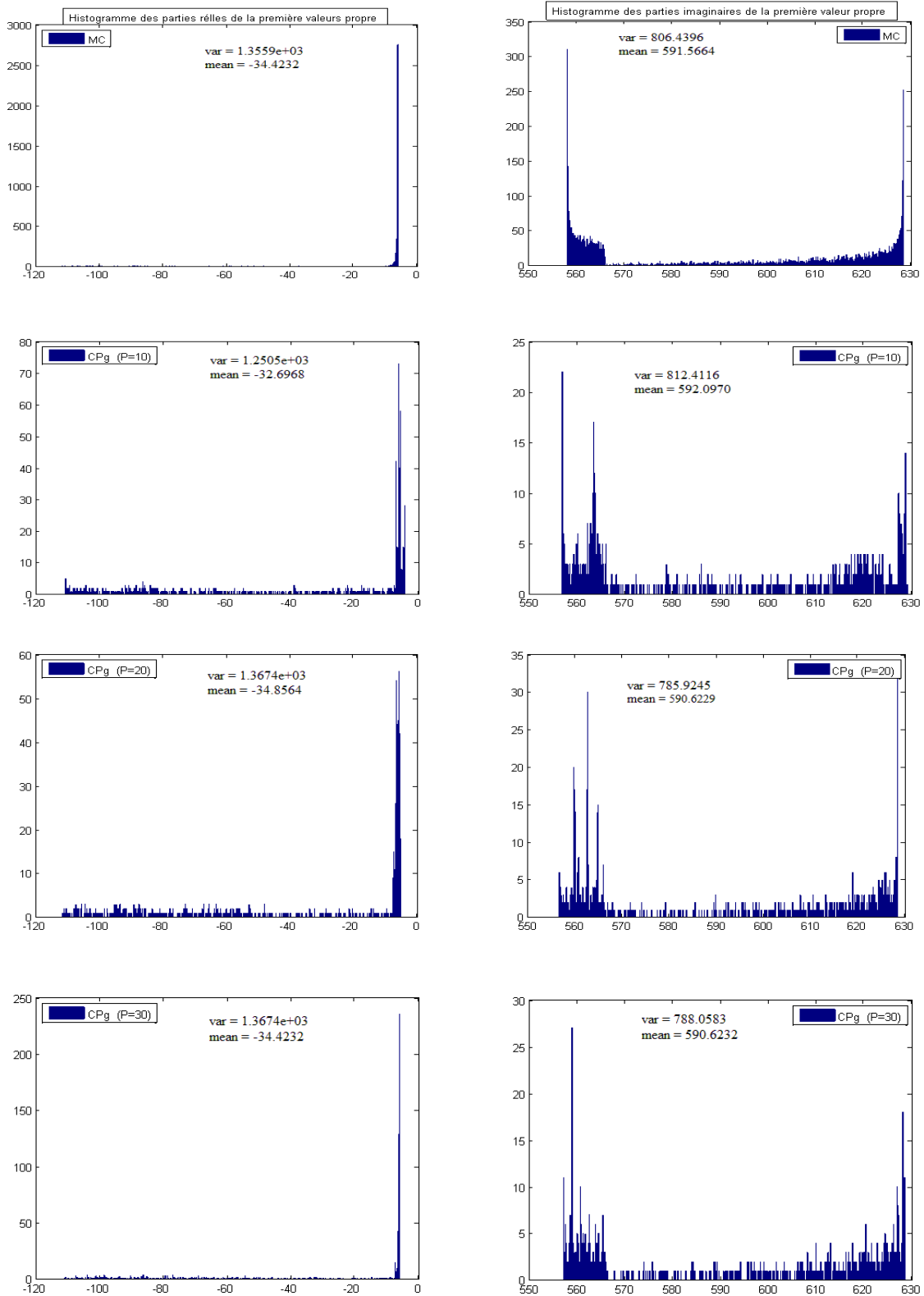


Figure 4.8 : Distribution des parties réelles et imaginaires des valeurs propres obtenues avec MC et différents ordres du chaos polynomial.

La figure 4.8 nous donne la répartition des parties réelles et imaginaires d'une valeur propre pour différents ordres de chaos polynomial en comparaison avec la méthode de MC. Ces histogrammes montrent que l'ordre $p=30$ nous donne des répartitions des parties réelles et imaginaires plus proches de celles de Monte Carlo.

4.3.2.1. Conclusion

Dans cette section nous avons présenté une méthode d'analyse de la stabilité d'un système mécanique de freinage en tenant compte de l'incertitude du coefficient de frottement. Cette méthode est basée sur l'approche non intrusive du chaos polynomial via la méthode de régression. L'objectif de cette approche est de calculer les modes stochastiques afin de pouvoir reconstruire les valeurs propres du système pour, par la suite, analyser la stabilité du système en utilisant l'approche classique qui consiste à analyser le signe des parties réelles des valeurs propres.

Cette méthode nécessite au préalable la détermination de deux paramètres qui nous permettent d'assurer une précision désirée. A savoir, la détermination de l'ordre de troncature du chaos polynomial et la détermination du nombre de points de calcul. Une étude de convergence de l'erreur au sens des moindres carrés permet de déterminer ces deux paramètres. Les points de calcul peuvent être déterminés d'une manière aléatoire ou déterministe (dans le cas déterministe les points sont des zéros d'un polynôme de Legendre d'ordre supérieur à l'ordre de troncature choisi). D'après l'étude qui a été faite, nous avons constaté que la méthode qui consiste à utiliser les points de calcul déterministes utilise moins de calculs que l'autre méthode. Une étude de convergence nous permet, par ailleurs, de fixer un ordre de troncature. Puis, les modes stochastiques vont être calculés en résolvant un problème de moindres carrés.

La méthode de régression n'utilise pas la propriété d'orthogonalité des polynômes et n'opère aucun changement sur les équations d'état du système ainsi que cette méthode utilise moins de calculs par rapport à la méthode de Monte Carlo où il nous a fallu un nombre d'échantillons $Q=10000$ contre un nombre beaucoup moins inférieur pour cette méthode où un nombre $Q=44$ (dans le cas déterministe) suffit pour assurer une bonne précision.

4.4. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons analysé la stabilité d'un système mécanique frottant ayant un paramètre incertain régi par une loi uniforme. Les méthodes d'analyse de la stabilité des systèmes stochastiques vues dans le chapitre précédent ont été appliquées.

La méthode de Monte Carlo a été appliquée en premier lieu dans le but de d'utiliser ses résultats comme référence pour les autres méthodes. Ensuite, le système est analysé avec la méthode du chaos polynomial généralisé. Cette méthode est développée pour contourner les contraintes de calculs de la méthode de MC.

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons présenté des méthodes probabilistes permettant d'analyser la stabilité de systèmes dynamiques linéaires à paramètres incertains. Ces méthodes ont été développées dans le but d'évaluer leurs capacités à permettre une analyse efficace de la stabilité de systèmes mécaniques frottants dont les lois de frottements sont sujettes à des dispersions probabilistes.

Généralement, les problèmes d'analyse de la stabilité des systèmes linéaires à paramètres stochastiques sont difficiles à résoudre analytiquement. Par conséquent, des méthodes basées sur l'échantillonnage des paramètres incertains sont utilisées.

La première méthode abordée dans ce mémoire était la méthode de Monte Carlo. Cette méthode, basée sur l'échantillonnage des paramètres incertains, tend à faire une approximation de la distribution de probabilité en utilisant un grand nombre de tirages et en analysant la stabilité pour chaque point ce qui permet de déterminer si le système est stable pour toute la distribution. Ses résultats, qui sont exactes au sens statistique, sont souvent utilisés comme référence pour valider les résultats des autres méthodes. Le seul inconvénient de la méthode est qu'elle nécessite un grand nombre de tirages pour assurer une grande précision, ce qui rend la méthode prohibitive en termes de temps de calcul.

L'autre méthode est basée sur le chaos polynomial. Cette méthode permet d'approximer les valeurs propres caractérisant la stabilité par des développements en séries de fonctions polynomiales, modélisant l'aléa des paramètres (coefficient de frottement), orthogonale par rapport à la mesure probabiliste associée à l'aléa. La répartition des valeurs propres peut alors être obtenue en échantillonnant la distribution de l'aléa. Les résultats obtenus ont montré une efficacité très intéressante. En effet, il a été montré qu'avec un nombre de calcul très largement inférieur à celui requis par la méthode de référence de Monte Carlo, on peut analyser avec une précision très acceptable la stabilité de systèmes linéaires à paramètres incertains.

La méthode basée sur le chaos polynomial généralisé a été évaluée sur un système de frein à deux degrés de liberté. Une première perspective de ce travail serait de l'évaluer sur un système plus réaliste. Plusieurs difficultés peuvent alors apparaître comme celle relative au suivi des valeurs propres. En effet, en pratique, il est difficile de suivre les valeurs en fonction d'un ou plusieurs paramètres compte tenu des interactions existant entre elles notamment celle relatives aux phénomènes de couplages de modes. Une deuxième perspective de ce travail serait aussi de considérer l'analyse de la stabilité en prenant en compte plusieurs paramètres incertains. Dans ce cas aussi, des difficultés peuvent apparaître en particulier lorsque l'ordre du chaos polynomial requis est élevé. Dans ce cas le nombre de point de calcul peut augmenter très rapidement et peut, par conséquent, altérer l'efficacité de la méthode. Des algorithmes d'optimisation du nombre de calcul peuvent alors être utilisés. Celui de Smolyak peut être une alternative intéressante.

Références bibliographiques

- B. Pascual, S. Adhikari. Hybrid perturbation-Polynomial Chaos approaches to the random algebraic eigenvalue problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 217-220 (2012) 153-167.
- D. Xiu, G.E Karniadakis. Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos. *Journal of Computational Physics* 187 (2003) 137–167.
- E. Haro Sandoval, F. Anstett-Collin, M. Basset. Sensitivity study of dynamic systems using polynomial chaos. *Reliability Engineering and System Safety* 104 (2012) 15–26.
- J.R Fisher, R. Bhattacharya. Linear quadratic regulation of systems with stochastic parameter uncertainties. *Automatica* 45 (2009) 2831-2841.
- J.R. Fisher. Stability analysis and control of stochastic dynamic systems using polynomial chaos. Phd thesis, Texas A&M University 2008.
- J.J.E Slotine, Weiping Li. *Applied nonlinear control*. 1991 Prentice hall, INC.
- J. Lian, X. Li and Hai Lin. Stability Analysis of Systems with Stochastic Parametric Uncertainties. 9th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA) Santiago, Chile, December 19-21, 2011.
- K. Ogata. *Modern Control Engineering Fourth Edition*, Prentice hall 2002.
- L. Nechak. *Approches robustes du comportement dynamique des systèmes non linéaires : Application aux systèmes frottants*. Mémoire de thèse, Université de Haute Alsace-Mulhouse, 2011.
- L. Nechak, Sebastien Berger, Evelyne Aubry. Non-intrusive generalized polynomial chaos approach to the stability analysis of uncertain nonlinear dynamic systems. 2011 8th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices.
- P. N. Paraskevopoulos. *Modern Control Engineering*. Marcel, Dekker, Inc 2002.
- R. Veysseyre. *Aide-mémoire : Statistique et probabilités pour l'ingénieur 2^e édition*. Dunod, Paris, 2001, 2006.
- R.G. Ghanem, Pol D. Spanos. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Springer-Verlag New York Inc 1991.
- R.S. Burns. *Advanced Control Engineering*. Butterworth-Heinemann 2001.
- S. Dia. *Modélisation d'un contact dynamique non-linéaire : application au développement et à l'optimisation de Modalsens*. Mémoire de thèse Université de Haute Alsace-Mulhouse, 2010.
- T. Crestaux, Olivier Le Maître, Jean-Marc Martinez. Polynomial chaos expansion for sensitivity analysis. *Reliability Engineering and System Safety* 94 (2009) 1161–1172.

Valentin L. Popov. Contact Mechanics and Friction: Physical Principles and Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010.

Wassim M. Haddad, VijaySekhar Chellaboina. Nonlinear Dynamical Systems and control. 2008 Princeton University Press.

N. Wiener, (1938). The homogeneous chaos. American Journal of Mathematics, 60, 897-936.

X. Fenfen, Chen Shishi, Xiong Ying. Dynamic system uncertainty propagation using polynomial chaos. Chinese journal of aeronautics, (2014), 27(5): 1156-1170.

Liste des figures

Figure 1.1 : Système comportant m entrées, p sorties et r perturbations.	3
Figure 1.2 : Linéarité d'un système.	4
Figure 1.3 : Relation entre les différentes modélisations d'un système.	8
Figure 1.4 : Illustration de l'angle de frottement.	9
Figure 1.5 : (a) Premier modèle de stick slip. (b) déplacement en fonction du temps.	11
Figure 1.6 : (a) Deuxième modèle stick slip. (b) déplacement en fonction du temps.	11
Figure 1.7 : Schéma de principe de sprag-slip.	12
Figure 2.1 : Stabilité interne et stabilité externe.	15
Figure 2.2 : Stabilité marginale, asymptotique et instabilité d'un système décrit par le modèle d'état.	17
Figure 4.1 : Système de freinage à tambour.	46
Figure 4.2 : Système à deux degrés de liberté de Hultèn.	47
Figure 4.3 : Evolution des parties réelles et imaginaires du système en fonction du coefficient de frottement (μ).	51
Figure 4.4 : Evolution des parties réelles et des parties imaginaires pour différents ordres P pour un nombre de calculs déterministes égale à 44.	55
Figure 4.5 : Evolution de l'erreur des moindres carrés (4.20) en fonction de l'ordre du chaos polynomial.	55
Figure 4.6 : Evolution de l'erreur pour différents nombres de points de calculs générés d'une manière déterministe.	57
Figure 4.7 : Evolution de l'erreur pour différents nombres de points de calculs générés d'une manière aléatoire.	58
Figure 4.8 : Distribution des parties réelles et imaginaires des valeurs propres obtenues avec MC et différents ordres du chaos polynomial.	58

Liste des tableaux

Tableau 2.1 : Tableau de Routh.	20
Tableau 3.1 : Correspondance entre le type de distribution et le type de la base du chaos polynomial.	36
Tableau 4.1 : Estimation du point de coalescence de modes.	56

