REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE.
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE.
UNIVERSITE MOULOUD MAAMERI DE TIZI-OUZOU
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Mémoire de Master
en
Mathématiques

Option :
Probabilités et statistique

Théme :

Estimation de l'Expected Shortfall

Présenté par
Zahia AIDENE

Devant le jury

Mr. MAMOU Mohamed	MAA	UMMTO	Président
Mr. BERKOUN Youcef	Professeur	UMMTO	Rapporteur
Mme. BOUALEM Karima	MCB	UMMTO	Examinatrice

Remerciements

Avant tout, je remercie le bon Dieu de m'avoir donnée le courage, la patience et la capacité pour mener ce travail à terme.

Je remercie mes parents qui se sont sacrifiés pour mon bien et qui m'ont encouragée et soutenue le long de mon cursus universitaire.

je remercie les personnes qui ont contribué au bon déroulement de mon travail.

Tout d'abord, et bien sûr, mon infinie gratitude et mes profonds remerciements sont destinés à mon promotteur Mr Le professeur Berkoun Youcef qui m'a accueillie au sein du laboratoire LMPA, de m'avoir bien conseillée et suivie pendant mon travail.

Je remercie Mr Mamou Mohamed et Madame Boualem Karima d'avoir accépter d'examiner mon travail et de participer au jury de ma soutenance

Je remercie vivement tous mes professeurs qui m'ont accompagnée durant mon cursus universitaire et pour leur aide et le savoir aussi précieux qu'ils m'ont apportée au sein de département de mathématiques a l'UMMTO.

Dedicace

Je dédie ce travail à :

Mes chers parents
Mes chères sœurs
Mon cher frére
Mon cher fiancé
Mes grands-mères
Mes chers amis
A tous ceux dont j'ai appris
de près ou de loin, un peu ou énormément,
humainement ou professionnellement.
A tous ceux qui me sont chers

Table des matières

Remerciements **2**

Dedicaces **3**

Introduction **6**

1 Théorie du risque **8**

1.1 Risques 8
1.1.1 Definition du risque 8
1.1.2 Types de risques 9
1.2 Mesure de risque 9
1.2.1 Definition 10
1.2.2 Cohérence d'une mesure de risque 10
1.3 La VaR (value at risk) 12
1.3.1 Historique 12
1.3.2 Présentation générale 12
1.3.3 Avantages et inconvinients de la VaR 14
1.3.4 Mesures alternatives à la VaR 15
1.4 L'Expected Shortfall 16
1.4.1 Definition de l'Expected Shortfall 16
1.4.2 La relation entre la VaR et l'Expected Shortfall 16
1.4.3 Cohérence de l'Expected Shortfall : 18
1.4.4 La relation entre la VaR, la ES, la TVaR et la CTE 19

2 Estimation de l'Expected Shortfall **20**

2.1 Théorie des valeurs extrêmes 20
2.1.1 Concepts et définitions 21
2.1.2 Distribution limite du maximum 23
2.1.3 Théorème de Fischer-Tippett 24
2.1.4 Distribution des valeurs extêmes génèralisée (GEV) 24
2.1.5 Domaine d'attraction du maximum (MDA) 25
2.1.6 Loi de Pareto 26
2.1.7 Distribution de Pareto génèralisée (GPD) 26

2.1.8 Fonction de répartition et moyenne des excés 27
2.1.9 Le choix du seuil μ 28
2.1.10 Théorème de Balkema-de Haan et Pickands 28
2.2 Estimation de la VaR et de l'expected shortfall par la théorie des valeurs extrêmes 28
2.2.1 Méthode des Blocs 29
2.2.2 Méthode POT - Peaks Over Threshold 36
2.3 Approche par Simulation Historique 39
2.3.1 Estimation de la VaR et de l'expected shortfall 39
2.3.2 Normalité asymptotique de l'estimateur de l'Expected Shortfall . . 40
2.3.3 Normalité asymptotique de l'estimateur de l'Expected Shortfall sous m-dépendace 43
2.3.4 Les points forts et les point faibles de la methode historique 44
2.3.5 Les estimateurs de l'ES par la méthode Historique : 46
2.4 Estimation de la VaR et l'Expected Shortfall basée sur les expectiles : 47
2.4.1 Les expectiles 47
2.4.2 Quelques propiétès des expectiles 47
2.4.3 La relation entre les expectiles et les quantiles 48
2.4.4 Estimation des expectiles 48
2.4.5 Estimation de l'expected shortfall 49
2.4.6 Normalité asymptotique 50

Conclusion **51**

Bibliographie **52**

Introduction

De nombreux évènements (risques), qu'il s'agisse de catastrophes naturelles ou d'accidents liés à l'activité humaine, ont présenté une menace réelle dans notre vie. Il est impératif de prendre en compte et d'anticiper les possibilités de survenance de tels phénomènes afin d'en limiter les impacts humains, environnementaux et économiques. C'est pour cela que les institutions financières (les banques et les compagnies d'assurance) ont toujours cherché à trouver de nouvelles règles pour gérer et évaluer ces risques et leurs potentiels ainsi que pour équilibrer un investissement risqué. Pour la gestion de ces risques, plusieurs mesures de risque ont été proposées. Chacune a ses avantages et ses inconvénients. Il est reconnu que l'approche standard utilisant la moyenne et la variance , introduite par *Markowitz*([26]) est généralement inadéquate pour le contrôle de risque. Pour cela, d'autres mesures de risque ont été introduites. Par exemple, depuis 1996, le comité de Bâle a proposé d'employer la Value-at-Risk (VaR) qui est un quantile de la distribution de profits et pertes. Depuis lors, beaucoup d'efforts ont été consacrés à l'étude des applications de la VaR dans le domaine de la gestion du risque. Cependant, de meilleures mesures de risque sont désirées pour la gestion des risques robustes. Ces mesures doivent tenir compte non seulement de la probabilité d'un mauvais évènement, mais également de sa grandeur (ampleur). *Artzner et al*([6]) suivent une approche systématique qui définit des mesures de risque cohérentes. Une mesure de risque est cohérente si elle satisfait des axiomes tels que la monotonie , l'invariance par translation, l'homogénéité positive et la sous-additivité. La VaR n'est pas une mesure de risque cohérente car elle ne satisfait pas la condition de la sous additivité. La convenance de ces axiomes est toujours un sujet de discussion. Dans la littérature, des auteurs ont proposé en particulier de remplacer la VaR standard par des mesures de risque alternatives telles l'Expected Shortfall (ES), la Conditional Tail Expectation (CTE) et la Tail Value-at-Risk (TVaR)(voir, par exemple, *Kass et al.*([22]), *Acerbi* ([2]), *Acerbi et Tasche* ([3]) et ([4]), *Rockafellar et Uryasev* ([30]) et [31]), et *Yamai et Yoshiba* ([35]) qui permettent de prendre en compte l'ampleur des pertes au-delà de la VaR. L'application de ces mesures alternatives a gagné un intérêt croissant dans la littérature et dans l'industrie.

Lorsque les risques sont majeurs et extrêmes (tels les tempêtes, les cyclones, les inondations,. . .), ils se caractérisent par une énorme gravité malgré leur faible fréquence. Leur impact représente une menace réelle à l'homme, son économie et son environnement. Pour cela, chaque institution doit surveiller les valeurs extrêmes (minimum ou maximum) pour pouvoir prévoir l'occurrence des crises et, si possible, leur intensité afin d'éviter des faillites retentissantes.

Dans ce mémoire qui s'articule autour de deux chapitres, nous définissons les mesures de risque et en étudions quelques unes parmi les plus connues comme la VaR et l'Expected Shortfall.

Chapitre 1

Dans ce chapitre, nous définissons les mesures des risques : au début nous présentons le risque, les types de risque et leur nature. Ensuite nous donnons quelques propiétés associés à ces mesures de risque. Nous nous focalisons sur la VaR et l'Expected Shotfall

Chapitre 2

Ce deuxième chapitre est consacré à la synthése des différentes méthodes d'estimation de l'Expected Shortfall. Nous avons choisi quelques méthodes d'estimation telles que l'approche par la théorie des valeurs extrêmes, la simulation historique et l'utilisation des éxpectiles. Enfin nous étudierons les propriétés asymptotiques de chaque estimateur.

Chapitre 1

Théorie du risque

Afin de limiter les effets négatifs des risques, il est impératif de prendre en compte et d'anticiper les possibilités de leurs survenance . Un risque est défini par la probabilité d'apparition d'un événement rare et par l'ampleur de ses conséquences (probabilité et impact). Un plan d'atténuation des risques s'attachera donc à maitriser leur probabilité de survenance mais aussi à réduire leur impact. Historiquement, la notion de risque était liée à celle de probabilité. Apparue au XVII-Siècle siècle dans l'analyse des jeux de hasard, elle fut appliquée au XVIII-Siècle par les assureurs maritimes pour devenir ensuite partie intégrante des schémas de prise de décision rationnelle associée à toute alternative de probabilité de succès ou d'échec.
Ce chapitre a pour but de synthétiser les connaissances principales sur les mesures de risque les plus utilisées qui sont par excellence la Value-at-Risk (VaR) et l'Expected Shortfall. Afin d'étudier ces mesures de risque à proprement parler, nous commençons par aborder le concept de mesure de risque cohérente. L'essentiel des développements présentés dans ce chapitre proviennent du livre de *Charpentier*([10]).

1.1 Risques

1.1.1 Definition du risque

Nous reprenons ici la définition de risque telle qu'elle est formalisée dans *Saidane.Hadda*([33])

Le risque correspond à l'occurrence d'un fait imprévisible (ou tout au moins incertain) susceptible d'affecter les membres, le patrimoine, l'activité de l'entreprise et de modifier son patrimoine et ses résultats. C'est donc la possibilité de survenance d'un événement susceptible de porter atteinte à l'équilibre naturel. Deux critères corrélés sont caractéristiques du risque : la conjonction d'un aléa (probabilité) et d'une vulnérabilité (conséquences sur les personnes et les biens exposés), ce qui détermine un niveau de risque. Le risque n'est toutefois pas une simple résultante entre aléa et vulnérabilité.

Définition 1.1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité induite . Un risque X est une variable aléatoire réelle definie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ par :

$$\begin{aligned} \mathrm{X} : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow \mathrm{X}(\omega) \end{aligned}$$

1.1.2 Types de risques

Les différents types de risque sont regroupés en cinqs grandes familles.

1. Les risques naturels sont des événements dommageables survenant dans un milieu vulnérable et qui peuvent être soit d'origine géologique (mouvement de terrain, séisme, volcanisme), soit d'origine météorologique (tempêtes, cyclones et précipitations induisant des inondations, avalanches ou feux de forêt, sécheresse,. . .).
2. Les risques technologiques sont d'origine anthropique, ils regroupent les risques industriels, nucléaires, biologiques et les ruptures de barrages.... L'aléa (ou dysfonctionnement) technologique pouvant être dû à une erreur humaine, une défaillance technique, une réaction parasite ou un facteur externe (catastrophe naturelle, attentat, . . .).
3. Les risques de transports collectifs (personnes, matières dangereuses) : Ce sont des risques technologiques. On en fait cependant un cas particulier car les enjeux varient en fonction de l'endroit où se développe l'accident
4. Les risques de la vie quotidienne :(accidents domestiques, accidents de la route,...
5. Les risques liés aux conflits : Ce sont les risques liés aux situations d'opposition entre deux personnes, groupes ou nations (comme les guerres)

1.2 Mesure de risque

Le principal outil théorique pour calculer le besoin en fonds propres est défini sous le vocable « mesures de risque ». Certaines de ces mesures de risque sont utilisées depuis fort longtemps par les actuaires, plus particulièrement dans le domaine de la tarification. Les mesures de risque utilisées pour le besoin en fonds propres ont donné lieu à de nombreux travaux actuariels ces dernières années. De manière générale, elles visent à fixer un niveau de capital pour un portefeuille de risques donné et mesurent le risque par un ou plusieurs nombres. Dans ce qui suit on donnera la définition d'une mesure de risque et les propriétés associées qui peuvent être recherchées pour évaluer le besoin en fonds propres, puis on présentera les principales mesures de risque permettant de fixer un niveau optimal de fonds propres.

1.2.1 Definition

Mathématiquement, une mesure de risque ou un besoin en capital, d'une variable aléatoire (v.a.) de perte X, est définie comme une fonction d'une perte aléatoire à un nombre réel.

Définition 1.2. Une mesure de risque est une fonction ρ de χ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} \rho : \chi &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathrm{X} &\rightarrow \rho(\mathrm{X}) \end{aligned}$$

où $\mathcal{X}$ est l'ensemble des variables aléatoires X réelles définies sur l'éspace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$

En termes économiques, nous interprétons $\rho(x)$ comme le montant du capital qui devrait être ajouté en tant qu'amortisseur pour un portefeuille avec une perte donnée par X, de sorte que le portefeuille devienne acceptable à un contrôleur externe ou interne de risque (elle doit saisir le risque sur les préférences du décideur).

1.2.2 Cohérence d'une mesure de risque

Le problème de la base axiomatique des mesures de risque a reçu beaucoup d'attention commençant par le papier séminal d'*Artzner et al.* ([6]), où la déffinition de la mesure de risque cohérente a été fournie la première fois.

Définition 1.3. Une mesure de risque est dite cohérente si elle satisfait les quatre axiomes suivants :
Pour tout $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathcal{X}$

1. *L'invariance par translation :*

$$\rho(\mathrm{X} + m) = \rho(\mathrm{X}) + m \ , \ \forall m \in \mathbb{R}$$

2. *L'homogénité positive* :

$$\rho(\lambda \mathrm{X}) = \lambda \rho(\mathrm{X}) \ , \forall \lambda > 0$$

3. *La sous additivité* :

$$\rho(\mathrm{X} + \mathrm{Y}) \leq \rho(\mathrm{X}) + \rho(\mathrm{Y})$$

4. *La monotonicité* :

$$\rho(\mathrm{X}) \leq \rho(Y) \ si \ P(\mathrm{X} \leq \mathrm{Y}) = 1$$

Interprétation des propriétèes :

Nous expliquerons maintenant chaque axiome à leur tour :

1. L'invariance par translation :
   L'axiome d'invariance par translation peut être expliqué par le fait que l'investissement dans un bien plus risqué n'entrenne aucune perte avec la probabilité 1. Par conséquent nous devons toujours recevoir la quantité initiale investie. L'investissement initial est soustrait parce que le risque mesure la perte de mesure comme quantité positive, par conséquent un gain est négatif. La propriété d'invariance par translation signifie que l'addition (ou la soustraction) d'un montant initial sûr c au portefeuille initial et son investissement dans l'actif de référence décroît (accroît) simplement la mesure de risque ρ par c
2. L'homogénitè positive :
   Cet axiome est un cas limite de la propriété de sous additivité qui représente l'absence de diversification, elle assure que nous ne pouvons pas augmenter ou diminuer le risque en investissant des montants. En d'autres termes ; le risque résulte des provisions elle-même et n'est pas une fonction de la quantité achetée (note : ceci suppose que nous n'avons aucun risque de liquidité mais en réalité ce n'est pas vrai). Les critères de sous additivité et d'homogénéité positive sont intuitivement évident du point de vue économique. En effet, en se rappelant qu'une variable aléatoire X représente la perte par rapport à l'investissement dans un actif, il est clair que si une variable X a une perte moins importante qu'un autre investissement Y, alors ce dernier est nécessairement moins risqué.
3. La sous-additivité :
   C'est l'axiome le plus important ; elle peut être interprété comme la diversification pour ne pas accroitre les risques, parce qu'elle assure qu'une mesure de risque cohérente prend dans la diversification du portefeuille. Elle a une interprétions facile : la mesure de risque d'une somme de deux portefeuilles est inférieure à la somme des mesures de risque de ces deux portefeuilles. Ce résultat est du à la corrélation qui peut exister entres ces derniers. Dans le cas contraire, cela impliquerait, par exemple, que pour diminuer le risque, il pourrait être commode de fractionner une compagnie (ou un portefeuille) en plusieurs parties distinctes.
4. La monotonie :
   L'axiome de monotonie nous indique que nous associons un plus gros risque à une perte plus élevée i.e. si le portefeuille X domine le portefeuille Y , la mesure de risque du portefeuille X est supérieure à celle de Y . Ainsi, si le risque d'un portefeuille est supérieur à celui d'un autre, le capital requis pour le premier portefeuille est supérieur à celui requis pour le deuxième. Toute mesure de risque monotone et invariante par translation verifie l'inegalité $|\rho(X)-\rho(Y)| \leq \| X-Y \|_\infty$ pour la norme infinie $\| \,.\, \|_\infty$

1.3 La VaR (value at risk)

1.3.1 Historique

La Value-at-Risk (Valeur en risque) est apparue (sous ce nom) dans les années 90 en réponse à de nombreux désastres qui ont touché les marchés de capitaux à cette période. En fait, on peut remonter beaucoup plus tôt pour voir apparaître cette mesure de risque pour la première fois. Par exemple, lors des débats sur l'inoculation, avant l'invention de la vaccination (par Edward Jenner en 1796), c'était la maladie elle même qui était inoculée et non une forme atténuée (comme ce fut le cas avec la vaccine), les résultats étaient assez mauvais, parfois pires que la maladie elle-même. D'Alembert disait clairement qu'il ne faut pas seulement prendre en compte le gain « en moyenne » (dû au fait qu'un grand nombre de personnes développeront des anticorps) mais également le risque. Ce n'est donc ni la longueur de la vie moyenne, ni la petitesse du risque qui doit déterminer à l'inoculation ; c'est uniquement le rapport entre le risque d'une part, et d'autre part l'augmentation de la vie moyenne, historique repris dans *Charpentier A* [10]. Il rappelle plus précisément que le risque est la probabilité de mourir des suites d'une inoculation ou, plus généralement, la probabilité de survenance d'un événement désagréable. On le retrouve dans un cadre financier évoqué par *Arthur Roy*([32]), l'année où *Harry Markowitz H* [26] propose au contraire d'utiliser la variance comme mesure de risque . En 1993, *JP Morgan* ([27]) introduit une nouvelle mesure du risque : la Valu-at- Risk (VaR). Cette mesure permet d'évaluer le risque de baisse des valeurs de portefeuille. Elle correspond au montant de pertes qui ne devrait être dépassé qu'avec une probabilité donnée sur un horizon temporel donné. La VaR est devenue incontournable en 1997, à travers les accords de Bâle II, puisque c'est cette mesure que préconise le Comité pour mesurer le risque du marché.

1.3.2 Présentation générale

La VaR (de l'anglais value at risk) est une notion utilisée génèralement pour mesurer le risque du marché d'un portefeuille. Elle correspond au montant des pertes qui ne doivent pas être dépassé pour un niveau de confiance donné sur un horizon de temps donné.
On se donne un horison de temps T et un niveau de confiance $\alpha \in]0,1[$.
Soit $\mathrm{X_T}$ la valeur d'un portfeuille à cet horison alors, $VaR_{\mathrm{X}_T}(\alpha)$ verifie :

$$P(\mathrm{X}_T > VaR_{\mathrm{X}_T}(\alpha)) = (1-\alpha)$$

.

Définition 1.4. Value at Risque
On appelle VaR au niveau $\alpha \in [0,1]$ le quantile d'ordre α ; notée VaR_α ou $VaR[\mathrm{X},\alpha]$ et définie par :

$$VaR_\alpha = VaR[\mathrm{X},\alpha] = \mathrm{x}_\alpha$$

où

$$P(\mathrm{X} \leq \mathrm{x}_\alpha) = \alpha$$

Ou encore :

$$VaR_\alpha = inf\{\mathrm{x}, P(\mathrm{X} \leq \mathrm{x}) \geq \alpha\}$$

La VaR est liée a l'iverse génèralisé de F_X, où F_X est la fonction de répartition de la variable aléatoire X

Définition 1.5. 1. Pour une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante on appelle l'inverse génèralisé ou fonction quantil de F

$$F^{\leftarrow} : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}},\ F^{\leftarrow}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\}$$

2. Si $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ est une fonction de repartition , $q_\alpha(F) = F^{\leftarrow}(\alpha)$ est appelé $\alpha -$ *quantile* de F pour $\alpha \in (0,1)$

Lemme 1.1. *1. La fontion quantile $F^{\leftarrow}$ est croissante et continue à gauche.*

2. Si F est est continue et strictement croissante, alors $F^{\leftarrow} = F^{-1}$, i.e. *l'inverse gènèralisée est juste l'inverse de la fonction inversible F.*

3. On peut exprimer la VaR en terme de quantile

$$VaR_\alpha(X) = q_\alpha(F_X)$$

4. La VaR est invariante par translation :

$$VaR_\alpha(X + m) = VaR_\alpha(X) + m,\ \forall\ m \in \mathbb{R}$$

5. La VaR est positivement homogène :

$$VaR_\alpha(\lambda X) = \lambda VaR_\alpha(X),\ \forall \lambda > 0$$

Exemple :

Soit L une variable aléatoire de loi $N(\mu, \sigma^2)$. On peut l'écrire sous la forme $L = \mu + \sigma X$ pour un X suivant une loi normale centré et réduite . Si

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\frac{-y^2}{2}) dy$$

est la fonction de repartition de X, alors d'aprés le lemme(1.1) on a : $VaR_\alpha(X) = \Phi^{-1}(\alpha)$ et d'après (3) et (4) du même lemme on conclu que

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(L) &= \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha) \\ VaR_\alpha(L) &= \mu + \sigma VaR_\alpha(X) \qquad (1.1) \end{aligned}$$

1.3.3 Avantages et inconvinients de la VaR

– **Avantages de la Value-at-Risk** :

1. Elle tend à devenir un indicateur de risque largement utilisée par les établissements financiers car elle résume par une seule valeur tous les risques d'un portefeuille, quelle que soit leur nature (taux de change, actions, . . .). Elle présente l'avantage d'être plus facile à comprendre par des investisseurs qui ne sont pas spécialistes en techniques de gestion de portefeuille ou de gestion de risque.
2. Les mesures traditionnelles du risque comme la déviation standard et le degré de sensibilité ne donnent pas une perception de l'ampleur des pertes possibles mais simplement une information sur le pourcentage de la déviation du prix ou du rendement de l'actif par rapport à sa moyenne. Par contre la VaR permet d'évaluer de manière quantitative la perte potentielle maximale qu'une entité financière peut subir à un niveau de probabilité donné et dans un temps donné.
3. Elle est probabiliste et fournit à un gestionnaire des risques l'information utile sur les probabilités associées avec montants spécifiques de perte.

– **Inconvénients de la Value-at-Risk :**

1. La VaR correspond à un quantile donné, elle ne prend pas en compte les risques au-delà de ce quantile.
2. *Artzner et al.*([6]) ont montré que la VaR n'est pas une mesure de risque cohérente parceque elle ne satisfait pas la condition de sous-additivité :
   Si un portefeuille est composé de sous-portefeuilles A et B, alors la VaR du portefeuille total est inferieure à la somme des VaR des portefeuilles qui le composent. Cette inégalité est notamment expliquée par la prise en compte de la diversification.

Exemple : Dans l'exemple suivant, on montre la non sous-additivité de la VaR.
On considère deux risques indépendants X et Y de même la loi de Pareto(1,1) où

$$F_X(t) = F_Y(t) = \frac{1}{1+t} \ , \ t > 0$$

On a

$$VaR[X, \alpha] = VaR[Y, \alpha] = \frac{1}{1-\alpha} - 1, \ \forall \ \alpha \in [0, 1].$$

On peut vérifier que

$$P(X + Y \leq t) = 1 - \frac{2}{2+t} - 2\frac{\ln(1+t)}{(2+t)^2}, \ t > 0$$

Or

$$P(X + Y \leq 2VaR[X, \alpha]) = \alpha - \frac{(1-\alpha)^2}{2} \ln(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}) < \alpha$$

Donc
$$Var[X,\alpha] + VaR[Y,\alpha] < VaR[X+Y,\alpha]$$
est vraie quel que soit α.

1.3.4 Mesures alternatives à la VaR

Il s'est avérè que la mesure de risque VaR comprend certaines lacunes et n'est pas une bonne mesure qui refllète le risque d'un portfeuille parce qu'elle ne nous indique rien au sujet de la taille potentielle de la perte qui la dépasse ; pour allèger ce probléme inhérent à la VaR, de nombreuse mesure de risque alltérnatives ont ètè développées telles la Conditional Tail Expectation (CTE), la Tail Value at Risque (TVaR) et l'Expected Shortfall (ES) où ces mesures de risque permettent de prendre en compte l'ampleur des pertes au delà de la VaR.

- La Conditional Tail Expectation ou CTE représente la perte attendue sachant que la VaR est dépassée.
- La Tail Value-at-Risk ou TVaR est la moyenne des VaR de niveau supérieur à α
- L'Expected Shortfall, ou ES au niveau α, c'est l'espérance des pertes au delà de la VaR .

  Nous définissons précisément ces mesures ci-dessous.

Définition 1.6. (Conditional Tail Expectation).

Pour un risque X, la CTE au seuil $\alpha \in]0,1[$, notée par CTE_α ou par $CTE[X,\alpha]$, est définie par
$$CTE[X,\alpha] = \mathbb{E}[X/X > VaR[X,\alpha]]$$

Cette mesure de risque reflète non seulement la fréquence du défaut, mais également la valeur moyenne du défaut. Il est évident que la CTE sera toujours plus grande ou égal que la VaR pour la même valeur de α, puisque c'est la VaR plus la perte moyenne, c-à-d :
$$CTE[X,\alpha] = VaR[X,\alpha] + \mathbb{E}[X - VaR[X,\alpha]/X > VaR[X,\alpha]]$$

Un autre synonyme pour CTE qu'on peut rencontrer dans la littérature est la Valeur en Risque Conditionnel, notée par (CVaR, Conditional VaR).

Définition 1.7. (Tail Value at Risk)

Beaucoup d'auteurs et d'articles dans la littérature définissent la Tail Value-at-Risk (TVaR). C'est cependant l'approche de Charpentier ([10]) que nous retiendrons.
Pour un risque X, la TVaR au seuil $\alpha \in]0,1[$, est définie par
$$TVaR[X,\alpha] = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR[X,\alpha]d\alpha$$

Ainsi, la TVaR est juste la moyenne arithmétique des quantiles de X (de la VaR) de niveau supérieur à α. On peut réécrir la TVaR par la formule suivante

$$TVaR[X,\alpha] = \frac{1}{1-\alpha}\left\{\mathbb{E}[X] - \int_{\alpha}^{1} VaR[X,\alpha]\right\}$$

Il est à noter que $TVar[X,0] = \mathbb{E}[X]$ Comme la TV aR est une fonction croissante du niveau α, alors

$$TVaR[X,\alpha] \geq VaR[X,\alpha] \text{ et } TVaR[X,\alpha] \geq TVaR[X,0] = \mathbb{E}[X]$$

1.4 L'Expected Shortfall

1.4.1 Definition de l'Expected Shortfall

Définition 1.8. Expected Shortfall :.

Pour un risque X de répartition F, l'Expected Shortfall au seuil $\alpha \in]0,1[$ notée par : ES_α *ou* ES_α(X), est définie par :

$$\begin{aligned} ES_\alpha &= ES_\alpha(X) \\ &= \mathbb{E}[\mathrm{X}/_{\mathrm{X}>VaR[X,\alpha]}] \\ &= \frac{\mathbb{E}[\mathrm{X}\ \mathbb{I}_{(X>VaR[X,\alpha])}]}{P(\mathrm{X} > VaR[X,\alpha])} \\ &= \frac{\mathbb{E}[X\ \mathbb{I}_{(X>VaR[X,\alpha])}]}{1-\alpha} \end{aligned}$$

En d'autres termes l'Expected Shortfall au niveau α représente la perte moyenne quand cette perte dépasse la VaR au même niveau. Le résultat suivant nous indique comment calculer l'expected shortfall si la VaR ou la densité de la fonction de perte est connue.

1.4.2 La relation entre la VaR et l'Expected Shortfall

Lemme 1.2. *Si $f_X = F'_X$ est la densité de probabilité de X, on a*

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}(X\ \mathbb{I}_{(X>VaR[X,\alpha])}) \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{q_\alpha(F_X)}^{\infty} x f_X(x)dx \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} VaR_p(X)dp \qquad (1.2) \end{aligned}$$

Démonstration. (*Jan Kallese*,([20]))
Les deux premiéres égalités sont évidentes .Pour la troisième, on pose $y = F_X(x)$ avec $\frac{dy}{dx} = f_X(x)$

$$\begin{aligned}
\int_{q_\alpha}^{\infty} x f_X(x)dx &= \int_{q_\alpha}^{\infty} q_{F_X(x)} f_X(x)dx \\
&= \int_{F_X(q_\alpha)}^{F_X(\infty)} q_y(F_X)dy \\
&= \int_{\alpha}^{1} VaR_p(X)dp
\end{aligned}$$

□

Remarques :

1. Pour les lois de probabilié discrétes l'égalité $P(X \geq VaR_\alpha(X)) = 1 - \alpha$ peut ne pas être vraie dans ce cas on prend la définition
$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} VaR_p(X)dp$$
Dans le cas génèral
$$ES_\alpha(X) = \mathbb{E}(X\ \mathbb{I}_{(X > VaR_\alpha(X))}) + VaR_\alpha(X)(1 - \alpha - P(X > VaR_\alpha(X)))$$
2. L'expected shortfall ne depend que de la loi F_X, alors on écrit aussi $ES_\alpha(F_X)$
3. ES_α est positivement homogéne,
$$ES_\alpha(\lambda X) = \lambda ES_\alpha(X),\ \forall \lambda > 0$$
4. ES_α est invariante par translation,
$$ES_\alpha(X + m) = ES_\alpha(X) + m,\ \forall\ m \in \mathbb{R}$$

Example :
Loi Normale :
Soit Y une v.a suivant la loi $\mathrm{N}(0,1)$ de fonction de répatition Φ

$$\begin{aligned}
ES_\alpha(\mathrm{Y}) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{+\infty} y\varphi(y)dy \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{+\infty} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{y^2}{2})dy \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{y^2}{2})\right]_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} \\
&= \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}
\end{aligned}$$

%	99	98	97	96	95	94	93	92	91	90
VaR	2.326	2.054	1.881	1.751	1.645	1.555	1.476	1.405	1.341	1.281
ES	2.659	2.415	2.264	2.151	2.06	1.98	1.915	1.856	1.802	1.753

TAB. 1.1 – Valeur de VaR et ES : Loi Normale Centré Réduit

Si Y est de loi $N(\mu, \sigma^2)$, on peut écrire $Y = \mu + \sigma X$ où X est de loi $N(0, 1)$

$$\begin{aligned} ES_\alpha(\mathrm{Y}) &= ES_\alpha(\mu + \sigma\mathrm{X}) \\ &= \mu + \sigma ES_\alpha(\mathrm{X}) \\ &= \mu + \sigma\frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \\ &= \mu + \sigma ES_\alpha(X) \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$ES_\alpha(Y) = \frac{\sigma}{1-\alpha}\int_{VaR_\alpha(X)}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy + \frac{\mu}{1-\alpha}\int_{VaR_\alpha(X)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

.

Grâce au relations (1.1) et (1.3), nous pouvons calculer Expected Shortfall à l'aide de la Table (1.1) qui représente les valeurs de VaR et ES pour la distribution normale centrée réduite. Les étapes pour calculer ES(resp. VaR) de niveau α sont les suivantes :

1. Calculer les paramètres μ et σ
2. Chercher dans Tabel (1.1) la valeur de ES (resp. VaR) α
3. Utiliser la formule (1.3)

1.4.3 Cohérence de l'Expected Shortfall :

Dans cette proposition, on montre la sous-additivité de l'Expected Shortfall. Les autres propriétés d'une mesure cohérente sont verifiées par l'ES du fait que cette derniére s'écrit en fonction de la VaR.

Proposition 1.1. *(Sous additivité de l'Expected Shortfall)(*Acerbi et al*,(2002).([4]))*

Soit X_1 *et* X_2 *deux variables aléatoires définies sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *telles que :* $\mathbb{E}(\mathrm{X}_i) < \infty,$ *pour* $i = 1, 2;$ *alors*

$$ES_\alpha(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2) \leq ES_\alpha(\mathrm{X}_1) + ES_\alpha(\mathrm{X}_2)$$

Preuve. *Pour* $\mathbb{E}(X_1) < \infty$ *et* $\mathbb{E}(X_2) < \infty$ *, on a :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{X_1\mathbb{I}_{(X_1 \leqslant VaR_{X_1})} & \;\mathbb{E}\;\; (\mathrm{X}_1 1_{\mathrm{X}_1 \geq Var_{\mathrm{X}_1}})\mathbb{E}\{X_1\mathbb{I}_{(X_1 \leq VaR_{X_1})} + X_2\mathbb{I}_{(X_2 \leq VaR_{X_2})} \\
& - \;\; (X_1 + X_2)\mathbb{I}_{(X_1+X_2 \geq VaR_{(X_1+X_2)})}\} \\
& = \;\; \sum_{i=1}^{2} \mathbb{E}\{X_i(\mathbb{I}_{(X_i \geq VaR_{X_i}} - \mathbb{I}_{(X_1+X_2 \geq VaR_{(X_1+X_2)})}\} \\
& = \;\; \sum_{i=1}^{2} \mathbb{E}\{(X_i - VaR_{X_i})(\mathbb{I}_{(X_i \geq VaR_{X_i})} - \mathbb{I}_{(X_1+X_2 \geq VaR_{(X_1+X_2)})} \\
& + \;\; VaR_{X_i}\mathbb{E}(\mathbb{I}_{(X_i \geq VaR_{X_i})} - \mathbb{I}_{(X_1+X_2 \geq VaR_{(X_1+X_2)})}\} \;\; \geq 0
\end{aligned}$$

Car le dernier terme est nul et l'avant dernier est une éspérance d'un produit de même signe.

1.4.4 La relation entre la VaR, la ES, la TVaR et la CTE

Le résultat suivant détaille les relations qui peuvent exister entre les quatre mesures de risque définies ci-dessus

Théorème 1.1. *(*Charpentier([10]) *Pour* $\alpha \in]0, 1[$*, on a :*

$$\begin{aligned}
TVaR[X, \alpha] &= VaR[X, \alpha] + \frac{1}{1 - \alpha} ES[X, \alpha] \\
CTE[X, \alpha] &= VaR[X, \alpha] + \frac{1}{1 - F(VaR[X, \alpha])} ES[X, \alpha] \\
CTE[X, \alpha] &= TVaR[X, F(VaR[X, \alpha])]
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Estimation de l'Expected Shortfall

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'estimation de la VaR et l'Expected Shortfall. Il existe plusieurs méthodes d'estimation des ces mesures de risque qu'on peut scinder en trois grandes catégories :
•**Méthodes Paramétriques :** Le calcul de la VaR paramétrique se fait de façon analytique sous des hypothèses théoriques assez contraignantes. Cettes dernières consistent à imposer des lois à priori sur les prix de marché, qui permettent ensuite de déduire la distribution de pertes après avoir calculer la matrice de variances/covariances des différents instruments dans le portefeuille
•**Méthodes semi-paramétriques :**Les méthodes semi-paramétriques imposent certaines contraintes légères sur la loi de distribution, ainsi que le comportement du quantile Parmi les approches semi-paramétriques figure d'abord la méthode GPD (Distribution de Pareto Généralisé) qui relève de la théorie des extrêmes (EVT). Une autre catégorie de méthodes semi-paramétriques se fonde sur la régression quantile. Elle consiste à modéliser le quantile directement à la place de la distribution globale de pertes.
• **Méthodes Non-paramétriques :**L'essentiel des méthodes Non-paramétriques est qu'aucune loi paramétrique à priori n'est imposée sur la distribution des pertes. Parmi les différentes méthodes non-paramétriques (Simulation Historique, Estimation de densité, etc.)

2.1 Théorie des valeurs extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes (TVE) est un thème classique de la théorie des probabilités et de la statistique mathématique qui a été élaboré pour l'évaluation de la probabilité d'occurrence des événements rares. EIle permet d'extrapoler le comportement des queues d'une distribution à partir des plus grandes observations. Un des problèmes fondamentaux rencontré en finance concerne la nécessité de mettre en place une évaluation journalière du risque. Le calcul (ou la mesure) des risques est aujourd'hui largement utilisé en finance internationale. Il s'agit par exemple d'éviter les faillites retentissantes et donc d'être capable de prévoir l'occurrence des crises et, si possible, leur intensité. Il est nécessaire d'être en mesure d'évaluer les possibilités d'apparition des événements rares qui sont caractérisés par une faible fréquence et une énorme gravité. Ainsi, la TVE qui consiste à analyser les occurrences présentant des fréquences très faibles apparaît comme un outil particulièrement bien adapté pour notre étude. Pour une présentation assez complète du sujet, on renvoi à l'ouvrage de *Embrechts*, *Klüppelberg* et *Mikosch* ([14])

2.1.1 Concepts et définitions

Soit $X_1, X_2, .., X_n$ n v.a indépendantes et identiquement distribuées de densité f et de fonction de répartition $F(x) = P(X \leq x)$
On note $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$, la fonction de survie (queue à droite).
Soit $X_{1:n}, X_{2:n}, .., X_{n:n}$ les statistiques d'ordre associés à $X_1, X_2, .., X_n$ où :

$$X_{1:n} = \min(X_1, X_2, .., X_n) \text{ et } X_{n:n} = \max(X_1, X_2, .., X_n)$$

Définition 2.1. (Point terminal (end point)).
Le poin terminal de la fonction de répartition F est le réel x_F défini par :

$$x_F = \sup\{x; \mathrm{F}(x) < 1\}$$

Définition 2.2. (Distributions à queues lourdes)
Une distributuion F est dite à queues lourdes si et seulement si :

$$\lim_{x \to \infty} \exp^{\lambda x}(1 - F(x)) = \infty, \ \forall \ \lambda > 0$$

Définition 2.3. (Fonction à variation réguliére)
On dit qu'une fonction f positive est à variation réguliére d'indice $\alpha \in \mathbb{R}$ au voisinage de l'infini, notée $f \in RV_\alpha$ si :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = x^\alpha \ \forall x > 0$$

Une fonction à variation régulière est une fonction qui se comporte asymptotiquement comme une fonction puissance.

Définition 2.4. (Fonction à variation lente)
On dit qu'une fonction l positive est à variation lente à l'infini si :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{l(tx)}{l(t)} = 1$$

Remarque 2.1. Une foncftion f à variation réguliére d'indice α peut toujours s'écrire sous la forme $f(x) = x^\alpha l(x)$, où l est une fonction à variation lente.

Définition 2.5. (Fontion à variation régulière du second ordre)
Soit $U(x) = (1/1 - F(x))^{\leftarrow}$ a une dérivée positive U'. Une fonction $\overline{F} \in MDA(\Phi_{\frac{1}{\epsilon}}, \epsilon > 0$ est à variation régulière du second ordre à l'infini, s'il existe un paramètre $\rho < 0$ et une fonction A qui tend vers 0 et ne change pas le signe au voisinage de l'infini tels que pour tout $x > 0$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{U(tx)/U(t) - x^{\epsilon}}{A(t)} = x^{\epsilon} \frac{x^{\rho} - 1}{\rho}$$

où ρ s'appelle le pramètre de second ordre, si $\rho = 0$, on interprète $(x^{\rho} - 1)/\rho$ comme $\log x$.

Représentation de Karamata

Théorème 2.1. *Soit L une fonction à variation lente bornée sur tout sous-ensemble compact de $[c, \infty[$, $c \geq 0$, alors*

$$\int_c^x t^{\alpha} L(t)dt \sim \begin{cases} \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} L(x) \ si \ \beta > -1 \ et \ x \to \infty \\ \\ -\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} L(x) \ si \ \beta < -1 \ et \ x \to \infty \end{cases}$$

Définition 2.6. (Stationnarité stricte)
Le processus X_t est dit strictement stationnaire si les vecteurs $(X_1, ..., X_k)'$ et $(X_{1+h}, ..., X_{k+h})'$ ont la même loi jointe, pout tout k et tout entier relatif h

Définition 2.7. (Fonction de répartition empirique)
Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aléatoires iid de loi commune F et notons $X_{1:n} \leq ... \leq X_{n:n}$ les statistiques d'ordres associées. La fonction de répartition empirique associée à $X_1, X_2, ..., X_n$ est définie par :

$$\mathrm{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(\mathrm{X}_{i:n} \leq x)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(\mathrm{X}_{(i)} \leq x)}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x < X_{1:n} \\ \frac{i-1}{n} \ si \ X_{i-1:n} \leq x < X_{i:n}, \ i = 1, ..., n \\ 1 \ si \ x \geq X_{n:n} \end{cases}$$

Convergence de la fonction de repartition empirique

Corollaire 2.1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

1. *consistance faible : $F_n(x) \xrightarrow{p} F(x)$ quand $n \to \infty$*
2. *consistance forte : $F_n(x) \xrightarrow{p.s} F(x)$ quand $n \to \infty$*

Théorème 2.2. *Glivenco-Cantelli (1933)*
Soit $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ *une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi F. On a*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \mid F_n(x) - F(x) \mid \overset{p.s}{\rightarrow} 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Définition 2.8. (Quantile empirique) .
On appelle quantile empirique d'ordre α associé a $X_1, X_2, ..., X_n$ la variable aléatoire notée : $X_{[n\alpha]:n}$ definie par :

$$X_{[n\alpha]:n} = \begin{cases} X_{[n\alpha]:n} \text{ si } n\alpha \text{ est un entier} \\ X_{[n\alpha+1]:n} \text{ sinon} \end{cases}$$

où $[n\alpha]$ désigne la partie entière de $n\alpha$
En particulier $X_{([\frac{n}{2}]+1:n)}$ est la médiane empirique.

Définition 2.9. (Fonction quantile empirique)

La fonction quantile empirique de l'échantillon $X_1, X_2, ..., X_n$ est définie par :

$$q_\alpha(F_n) = F_n^{\leftarrow}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F_n(x) \geq \alpha\},\ 0 \leq \alpha \leq 1$$

Pour $0 < \alpha < 1$, *on a*¡ .

$$q_n(\alpha) = X_{i:n} \text{ si } \frac{i-1}{n} < \alpha \leq \frac{i}{n},\ i = 1, ..., n$$

On note que pour $0 < \alpha < 1,\ X_{[n\alpha]+1:n}$ est le quantile empirique d'ordre α , où $[ns]$ désigne la partie entiére de $n\alpha$.

Corollaire 2.2. *Si* F *est strictement croissente, on a*

$$q_\alpha(F_n) \rightarrow q_\alpha(F) \text{ presque surement},\ \text{quand } n \rightarrow \infty \text{ et } \forall\ \alpha \in (0, 1).$$

2.1.2 Distribution limite du maximum

Dans cette section, on va s'intéresser au comportement asymptotique du maximum d'un échantillon.
On note $M_n = X_{n:n} = \max(X_1, X_2, .., X_n)$.
Comme les v.a sont i.i.d., la fonction de répartition de M_n s'écrit

$$F_{M_n}(x) = [F(x)]^n$$

Il n'est pas possible de déterminer la distribution du maximum à partir de ce résultat. La difficulté provient du fait que l'on ne connaît pas en général la fonction de répartition F. On s'intéresse alors à sa distribution asymptotique. En faisant tendre n vers l'infini, on a

$$\lim_{n\rightarrow\infty} F_{M_n}(x) = \lim_{n\rightarrow\infty} [F(x)]^n = \begin{cases} 0 \text{ si } x < x_F \\ 1 \text{ si } x \geq x_F \end{cases}$$

où x_F designe le point terminal.
On voit que la distribution asymptotique de M_n est une loi dégénérée.

Peut on trouver des constantes de normalisation : $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ et une loi non-dégénérèe de distribution $H(x)$ tels que

$$\lim_{n\to\infty} P[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x] \to H(x)$$

Fisher et Tippet ([16])ont trouvé en 1928 une solution a ce problème au moyen d'un théorème qui est la base de la TVE .

2.1.3 Théorème de Fischer-Tippett

Ce théorème précise les lois limites possibles pour le maximum normalisé M_n

Théorème 2.3. *(Fisher-Tippett([16]))*
Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aléatoires i.i.d de fonction de repartition F. S'il existe deux constantes de normalisation $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ et une distribution limite H non dégénérée tels que.

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right] = \lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = H(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

alors H appartient à l'une des trois lois limites possibles suivantes :

- *Loi de Fréchet :*

$$\Phi_\beta(x) = \begin{cases} o\ si\ \ x < 0 \\ \exp[-(x)^{-\beta}],\ si\ x \geq 0\ et \beta > 0, \end{cases}$$

- *Loi de Weibull :*

$$\Psi_\beta(x) = \begin{cases} \exp[-(-x)^{-\beta}],\ si\ x < 0\ et\ \beta > 0 \\ 1,\ \ si\ x \geq 0\ et\ \beta > 0 \end{cases}$$

- *Loi de Gumbel :*

$$\Lambda(x) = \exp[-\exp(-x)],\ si\ x \in \mathbb{R}$$

où H est la distribution des valeurs extrêmes (EVD) et les trois distributions Φ_β, $\Psi_\beta$et Λ sont appelées les distributions standards des valeurs extrêmes.

2.1.4 Distribution des valeurs extêmes génèralisée (GEV)

Il est possible de regrouper les distributions limites possibles en une seule représentation dite représentation de *Jenkinson*([21]).

Définition 2.10. Distribution des valeures extême génèralisé (GEV)
La loi des valeurs extremes génèralisée "Generalised êstreme Value distribution" notée par $GEVD$ ou GEV a pour fonction de repartition, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $1 + \epsilon x > 0$

$$H_\epsilon(x) = \begin{cases} \exp\{-[1+\epsilon x]^{\frac{-1}{\epsilon}}\}, \ si \ \epsilon \neq 0, \\ \exp\{-\exp[-x]\}, \ si \ \epsilon = 0 \end{cases}$$

ϵ

Proposition 2.1. *(Φ_β, Ψ_β etΛ en terme de H_ϵ)*
Φ_α, Ψ_α etΛ s'écrivent en terme de la distribution limite H_ϵ comme suit :

$$\Phi_\beta(x) = H_{\frac{1}{\beta}}(\beta(x-1)), \ x > 0.$$

$$\Psi_\beta(x) = H_{\frac{-1}{\beta}}(\beta(x+1)), \ x < 0$$

$$\Lambda(x) = H_0(x), \ x \in \mathbb{R}$$

En d'autres termes, une famille paramétrique $\{H_\epsilon, \epsilon \in \mathbb{R}\}$ est présentée. Elle fournit une représentation unifiée commode pour les trois types de distributions limites.

$$H_\epsilon = \begin{cases} \Phi_{\frac{1}{\epsilon}} \ si \ \epsilon > 0, \\ \Psi_{\frac{-1}{\epsilon}} \ si \ \epsilon < 0, \\ \Lambda \ si \ \epsilon = 0 \end{cases}$$

Pour les variables aléatoires non centrées et non réduites, H_ϵ s'écrit

$$H\mu, \sigma, \epsilon = \begin{cases} \exp\left\{-\left[1+\epsilon\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{\frac{-1}{\epsilon}}\right\}, \ si \ \epsilon \neq 0 \\ \exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}, \ si \ \epsilon = 0 \end{cases}$$

où μ est un paramétre de localisation et σ un paramétre de dispersion. Le paramétre ϵ est couramment appele "indice de queue" ou "indice de valeur extrême". Plus cet indice est eleve en valeur absolue, plus le poids des extremes dans la distribution initiale est important. On parle alors de distributions a "queues epaisses".

2.1.5 Domaine d'attraction du maximum (MDA)

On dit qu'une distribution F appartient au domaine d'attraction du maximum de la distribution des valeurs extrêmes H_ϵ, notée $F \in MDA(H_\epsilon$, s'il existe des constante $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ tels que la condition (2.1) soit véfiriiée
Selon le signe de ϵ, on distingue trois domaines d'attraction

1. Si $\epsilon > 0$ on dit que $F \in \ MDA(\Phi_\beta)$.
2. Si $\epsilon < 0$ on dit que $F \in \ MDA(\Psi_\beta)$

3. Si $\epsilon = 0$ on dit que $F \in\ MDA(\beta)$

Exemples :

– Les distributions de Pareto, Log-Gamma et de Student appartiennent au MDA Fréchet.
– Les distributions exponentielles, Gamma et Log-normale appartiennent au MDA Gumbel
.
– Les distributions uniformes appartiennent au MDA Weibull .

2.1.6 Loi de Pareto

Selon des études antérieures, il a été prouvé que les rendements des actifs financiers suivent la loi de Pareto pendant les moments de crise. Afin d'estimer l'épaisseur de la queue durant ces moments, nous allons avoir besoin de cette définition.

Définition 2.11. (Loi de Pareto).
Soit X une variable aléatoire , nous disons que X suit une loi de Pareto de paramétre (x_0, α) si : pour tout $x \geq x_0$ sa fonction de répatition $\mathrm{F_X}(x) = 1 - (\frac{x}{x_0})^{-\alpha}$ où $\alpha > 0$ et $x_0 > 0$ La quantité α est l'indice de la queue de la distribution.
Si on pose $(x_0)^\alpha = c$,l'ecriture de la loi de Pareto devient :

$$\mathrm{F_X}(x) = 1 - cx^{-\alpha}$$

pour tout $\alpha > 0$ et $x > x_0$

2.1.7 Distribution de Pareto gènèralisée (GPD)

Définition 2.12. (Distribution de Pareto gènèralisée).
La fonction de repartition de Pareto gènèralisée standard GPD, notée par G_ϵ est définie pour $\epsilon \in \mathbb{R}$ comme suit

$$G_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \epsilon x)^{\frac{-1}{\epsilon}},\ \epsilon \neq 0 \\ 1 - \exp(-y),\ si\ \epsilon = 0 \end{cases}$$

avec le support

$$x \geq 0, \quad si \quad \epsilon \geq 0$$
$$0 \leq x \leq \frac{-1}{\epsilon}, \quad si \quad \epsilon < 0$$

Une forme gènèrale de la GPD, est notée par

$$G_{\epsilon,\mu,\sigma} = G_\epsilon(\frac{y - \mu}{\sigma})$$

où : $(\mu \in \mathbb{R}),\ et\ (\sigma > 0)$ sont les paramétres de position et d'échelle respectivement.

Remarque 2.2. 1. la densité de la distribution GPD ($G_{\epsilon,\sigma}$) s'écrit comme suit :

$$g_{\epsilon,\sigma}(x) = \begin{cases} \sigma^{-1}(1+\epsilon\frac{x}{\sigma})^{-\frac{1}{\epsilon}-1}, & si\ \epsilon \neq 0 \\ \sigma^{-1}\exp(-\frac{y}{\sigma}) \end{cases}$$

2. Le quantile q_α de la distribution $G_{\epsilon,\sigma}$, qui est également la VaR au niveau de confiance élevè de α , est donné par

$$q_\alpha = VaR_\alpha = \mu + \frac{\sigma}{\epsilon}\left\{\left(\frac{n}{\mathcal{N}_\mu}\alpha\right)^{-\epsilon} - 1\right\}$$

où $\mathcal{N}_\mu$ est le nombre d'observations dépassant le seuil μ

3. Il ya un rapport simple entre la GPD standard G_ϵ et la GEV standard $H_\epsilon(x)$:

$$G_\epsilon(x) = 1 + \log H_\epsilon(x),\ si\ \ \log H_\epsilon(x) > -1$$

2.1.8 Fonction de répartition et moyenne des excés

Définition 2.13. Fonction de répartition et moyenne des excés.
Pour tout $\mu < x_f$, et pour tout $0 < y < x_f - \mu$, la fonction

$$F_\mu(y) = P\{X - \mu \leq y / X > \mu\} = 1 - \frac{\overline{F}(\mu+y)}{\overline{F}(\mu)}$$

est appelée le fonction de répartition des excés au-dessus du seuil μ .
La fonction de moyenne des excés(Mean-excess function). $e(\mu)$ correspondante est définie par :

$$e(\mu) = \mathbb{E}(X - \mu / X > \mu),\ \mu < x_f,$$

qui s'exprime également sous la forme

$$e(\mu) = \frac{1}{\overline{F}(\mu)}\int_\mu^\infty \overline{F}(t)dt,\ \mu < x_f$$

Remarques :

1. Si X est une v.a de fonction de répartition F à variation réguliére d'indice $\alpha > 0$ alors

$$\begin{aligned} \overline{F}_\mu(x) &= 1 - F_\mu(x) \\ &= \frac{P(X > x+\mu)}{P(X > \mu)} \\ &= \frac{\overline{F}(\mu+x)}{\overline{F}(\mu)} \end{aligned} \tag{2.2}$$

2. Pour une variable aléatoire qui suit une $G_{\epsilon,\sigma,\mu}$ où $\epsilon < 1$, on a

$$e(\mu) = \frac{\sigma + \mu\epsilon}{1-\epsilon} \tag{2.3}$$

2.1.9 Le choix du seuil μ

Il existe différentes méthodes pour choisir le seuil μ au dessus duquel les valeurs sont modélisées par une GPD

Méthode des moyennes des excés

Davison et *Smith*[34] ont proposé une méthode graphique de l'estimation du seuil. Cette méthode consiste à tracer la fonction des moyennes des excés pour différents seuils μ

$$\{(\mu, e_n(\mu)) : X_{1:n} \leq \mu \leq X_{n:n}\}$$

où $e_n(\mu)$ est la moyenne des excés empirique qui est donnée par

$$e_n(\mu) = \frac{1}{\overline{F}_n(\mu)} \int_{\mu}^{\infty} \overline{F}_n(t)dt = \frac{1}{\mathcal{N}_\mu} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)\mathbb{I}_{\{x_i > \mu\}}$$

L'idée est de retenir le seuil μ pour lequel la fonction des moyennes des excés $e_n(x)$ est approximativement linéaire pour $x \geq \mu$ ce qui est justifié par le fait que cette fonction est linéaire en μ pour une GPD.

2.1.10 Théorème de Balkema-de Haan et Pickands

Théorème 2.4. (Balkema-de Haan et Pickands,[15]) *Si F appartient à l'un des trois domaines d'attraction de la loi des valeurs extrêmes* (Fréchet, Gumbel ou Weibull)*, alors il existe une fonction $\sigma(\mu)$ strictement positive et un réel ϵ tels que*

$$\lim_{\mu \to x_f} \sup_{0 < x < x_f - \mu} \mid \mathrm{F}_\mu(x) - \mathrm{G}_{\epsilon,\sigma(\mu)} \mid = 0 \tag{2.4}$$

où $G_{\epsilon,\sigma(\mu)}$ est la fonction de répartition de la loi de Pareto généralisée et F_μ est la f.r des excès au dela du seuil μ

Ce théorème signifie que l'on peut approcher la loi des excès pour un seuil élevé (proche du point terminal) par une loi de Pareto généralisée de variance inconnue (dépendant de μ).

2.2 Estimation de la VaR et de l'expected shortfall par la théorie des valeurs extrêmes

Deux méthodes principales de modélisation des événements rares sont possibles : la méthode BlockMaxima (BM) qui modélise la distribution des extrêmes par la distribution Generalized Extreme Value (GEV) et la méthode Peaks Over Threshold (POT) qui modélise la distribution des excès au-dessus d'un seuil (en anglais threshold) élevé par la Generalized Pareto Distribution (GPD).

2.2.1 Méthode des Blocs

Il se peut qu'on ait un nombre relativement petit de valeurs supérieurs à un certain seuil μ relativement grand. Estimer un paramètre avec un nombre relativement petit est problèmatique.
Pour palier à cet insuffisance, on utilise la méthode des blocs qui consiste à partitionner les observations en blocs de même taille et de prendre le maximum dans chaque bloc.

Modelisation paramétrique de la distribution des maxima par blocs

Cette estimation des queues de distribution s'appuie sur le théorème de Fisher- Tippet et nous supposons que l'échantillon de maxima suit exactement une loi GEV.

Construction des blocs

On divise l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$ en k blocs de même taille n $(soit\ N = nk)$. Le j^{eme} chaque bloc est défini par $(X_{(j-1)n+1}, ..., X_{(j-1)n+n})$, il faut que la taille n et le nombre de bloc soient suffisament grands. On calcule le maximum $M_{n:j}$ de bloc j défini par :

$$M_{n:j} = max(X_{(j-1)n+1}, ..., X_{(j-1)n+n}),\ j = \{1, ..., k\}$$

Sélection de la taille des blocs

Il n'y a pas d'outils statistiques d'aide à la sélection de la taille des blocs. Il faut cependant que la condition asymptotique soit vérfiée et donc que n soit suit suffisamment grand. Mais, il faut aussi que nous ayons un nombre suffisant de maxima pour que l'estimation des paramètres de la GEV soit assez précise.

Estimation des paramétres de la GEV par la méthode du Maximum de Vraisemblance

A partir de l'échantillon des maxima construit précédemment, nous pouvons estimer les paramètres de la GEV. Dans ce paragraphe nous étudions l'estimation par Maximum de Vraisemblance (EMV) .
Soit l'échantillon de maxima supposé iid $Y = (Y_1, ..., Y_n)$ et $h_{\epsilon,\mu,\sigma}$ la densité de la GEV. Cette derniére s'écrit pour $\epsilon \neq 0$

$$h_{\epsilon,\mu,\sigma}(y) = \frac{1}{\sigma}\left[1 + \epsilon\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} \exp\left\{-\left[1 + \epsilon\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}^{-\frac{1}{\epsilon}}$$

Et la vraisemblance de l'échantillon Y est égale à :

$$\mathcal{L}(\epsilon, \mu, \sigma; Y) = \prod_{i=1}^{n} h_{\epsilon,\mu,\sigma}(Y_i)$$

Il est fait appel à des procédures numériques (algorithme de Quasi-Newton) pour la maximisation de la vraisemblance. Le calcul des estimateurs ne pose pas de sérieux problèmes. En revanche, rien ne nous assure de leur régularité (estimateurs asymptotiquement efficaces et normaux) surtout lorsque l'échantillon est de petite taille. Dans le cas où $\epsilon = 0$, la log-vraisemblance est égale à :

$$L(0, \mu, \sigma; Y) = -n \log \sigma - \sum_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{Y_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i - \mu}{\sigma}$$

En dérivant cette fonction relativement aux deux paramètres, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} n - \sum_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{Y_i-\mu}{\sigma}\right) = 0 \\ \\ n + \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i-\mu}{\sigma} \left[\exp\left(-\frac{Y_i-\mu}{\sigma}\right) - 1\right] = 0 \end{array} \right.$$

Précisons cependant qu'il n'existe pas de solution explicite à ces équations de maximisation (utilisation de méthodes numériques, type algorithmes de Newton- Raphson).

Estimation des paramétres de la GEV par les méthodes d'estimation d'indice de queue

Le quantile de la GEV

Il suffit d'inverser la fonction$H_{\mu,\sigma,\epsilon}$ pour obtenir le quantile $x_\alpha = H^{-1}_{\mu,\sigma,\epsilon}(1 - \alpha)$:

$$q_\alpha(F) = \left\{ \begin{array}{l} \mu - \frac{\sigma}{\epsilon} \left\{1 - (-\log(1 - \alpha))^{-\epsilon}\right\} \;\; \epsilon \neq 0 \\ \mu - \sigma \log\left\{\log(1 - \alpha)\right\} \end{array} \right.$$

où ϵ est l'indice des qeues extrême.

Estimation de la Var par la méthode des blocs

Supposons que l'échantillon des maxima suit exactement une loi GEV ; Le quantile extrême $q_\alpha(F)$ est la VaR.

1. Approche par l'estimateur de Hill

1.1 Estimateur de l'indice de queue

Estimateur de l'indice de queue qui a été présenté par *Hill* ([16]) est le plus célébre parmi tous les estimateurs de l'indice de queue, bien que ce ne pourrait pas être le meilleur. Il s'applique seulement dans le cas où l'indice de queue est positif ($\epsilon > 0$), ce qui correspond

aux distributions appartenant au domaine d'attraction de Fréchet ($F \in MDA(\Phi_{\frac{1}{\epsilon}})$), c.à.d, quand la queue de distribution a une forme de Pareto (distributions à queues lourdes).
Soit $X_1, ..., X_n$ un echantillon d'une variable aléatoire de fonction de répartition F où $\overline{F}$ est à variation régulière.
En utilisant le théorème de Karamata. On a $f \sim g$ équivaut à $\frac{f}{g} \to 1$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\overline{F}(\mu)} \int_{\mu}^{\infty} (\log(x) - \log(\mu)) dF(x) \\
= & \frac{1}{\overline{F}(\mu)} \left(\left[-(\log(x) - \log(\mu)) \overline{F}(x) \right]_{\mu}^{\infty} + \int_{\mu}^{\infty} \frac{\overline{F}(\mu)}{x} dx \right) \\
= & \frac{1}{\mu^{-\epsilon} L(\mu)} \int_{\mu}^{\infty} x^{-\epsilon-1} L(x) dx \\
\to & \frac{1}{\epsilon} \; quand \; \mu \to \infty
\end{aligned}$$

Pour estimer ϵ, on utilise l'integration par parties et on remplace F par sa fonction de repartition empirique.
On obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon} & \simeq \frac{1}{\overline{F}(\mu)} \int_{\mu}^{\infty} (\log(x) - \log(\mu)) F(x) \qquad (2.5) \\
& \simeq \frac{1}{\overline{F}_n(X_{k:n})} \int_{X_{k:n}}^{\infty} (\log(x) - \log(X_{k:n})) dF_n(x) \\
& = \frac{n}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} (\log(X_{j:n}) - \log(X_{k:n})) \frac{1}{n} \\
& \simeq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} (\log(X_{j:n}) - \log(X_{k:n})) \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Si $k = k(n)$ avec $k \to \infty$ et $\frac{k}{n} \to 0$, on obtient la convergence de (2.6) vers $\frac{1}{\epsilon}$

Donc l'estimateur de Hill est

$$\widehat{\epsilon}_{k,n}^{(H)} = \frac{k}{\sum_{j=1}^{k-1} (\log(X_{j:n}) - \log(X_{k:n}))}$$

Théorème 2.5. *Propriétés asymptotiques de* $\widehat{\epsilon}_{k:n}^{(H)}$.
Si $F \in MDA(\Phi_{\frac{1}{\epsilon}}), \epsilon > 0, k \to \infty, \; \frac{k}{n} \to 0$ *quand* $n \to \infty$

$$\widehat{\epsilon}_{k,n}^{(H)} \xrightarrow{p} \epsilon \; quand \; n \to \infty$$

– *Si* $k/\log\log n \to \infty$ *quand* $n \to \infty$ *alors*

$$\widehat{\epsilon}^{(H)}_{k,n} \xrightarrow{p.s} \epsilon, \ quand\ n \to \infty$$

– *Normalité asymptotique :*

Soit $F \in MDA(\Phi_{\frac{1}{\epsilon}})$, $k(n)_{n\geq 1}$ *une suite d'entiers telle que* $1 \leq k(n) \leq n$ *où* $k(n) \to \infty$ *et* $\frac{k(n)}{n} \to 0$. *Si* F *verifie la condition de second ordre avec* $\lim \sqrt{k}A(\frac{n}{k}) = 0$, *alors*

$$\sqrt{k}(\widehat{\epsilon}^{(H)}_{n,k} - \epsilon) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \epsilon^2)\ quand\ n \to \infty$$

1.2 Estimation de la VaR

On veut estimer $VaR_\alpha(F) = q_\alpha(F)$ pour un α assez grand. Si $\overline{F}$ est a variation régliére d'indice ϵ et $X_{k:n}$ suffisemment grand , on a

$$\begin{aligned}
\overline{F}(x) &= \overline{F}\left(\frac{x}{X_{k:n}} X_{k:n}\right) \\
&\approx \left(\frac{x}{X_{k:n}}\right)^{\epsilon} \overline{F}(X_{k:n}) \\
&\approx \left(\frac{x}{X_{k:n}}\right)^{-\widehat{\epsilon}^{(H)}_{k,n}} \overline{F}_n(X_{k:n}) \\
&\approx \left(\frac{x}{X_{k:n}}\right)^{-\widehat{\epsilon}^{(H)}_{k,n}} \frac{k-1}{n} \\
&\approx \frac{k}{n}\left(\frac{x}{X_{k,n}}\right)^{-\widehat{\epsilon}^{(H)}_{k,n}}
\end{aligned}$$

Or

$$\widehat{\overline{F}(x)} = \frac{k}{n}\left(\frac{x}{X_{k:n}}\right)^{-\widehat{\epsilon}^{(H)}_{k,n}}$$

On obtient l'estimateur suivant

$$\begin{aligned}
\widehat{q_\alpha(F)} &= \inf\left\{x \in \mathbb{R} : \widehat{\overline{F}(x)} \leq 1-\alpha\right\} \\
&= \inf\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{k}{n}\left(\frac{x}{X_{k:n}}\right)^{-\widehat{\epsilon}^{(H)}_{k,n}} \leq 1-\alpha\right\} \\
&= \left(\frac{n}{k}(1-\alpha)\right)^{--\widehat{\epsilon}^{(H)}_{k,n}} X_{k:n} \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

1.3 Estimation de l'Expected Shortfall

En utilisant l'estimateur (2.7) dans la relation (1.2),on obtient l'estimateur suivant de l'Expected Shortfall.

$$\begin{aligned}
\widehat{ES}_\alpha(F) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \widehat{q_\alpha(F)}d\alpha \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\left[-\left(1-\frac{1}{\widehat{\epsilon}_{k,n}^{(H)}}\right)^{-1}(1-\alpha)^{1-\frac{1}{\widehat{\epsilon}_{k,n}^{(H)}}}\right]_\alpha^1 \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{-1}{\widehat{\epsilon}_{k,n}^{(H)}}} X_{k:n} \\
&= \left(1-\frac{1}{\widehat{\epsilon}_{k,n}^{(H)}}\right)^{-1}\left(\frac{n}{k}(1-\alpha)\right)^{-\frac{1}{\widehat{\epsilon}_{k,n}^{(H)}}} \\
&= \left(1-\frac{1}{\widehat{\epsilon}_{k,n}^{(H)}}\right)^{-1}\widehat{q_\alpha(F)}
\end{aligned}$$

Choix du seuil k

Les estimateurs de l'indice de queue sont basé sur l'utilisation des k plus grandes observations. La question que l'on peut poser est comment choisir le seuil k ? Le seuil doit être choisi de façon à faire un compromis : plus le seuil est élevé, plus le biais est réduit et la variance est grande ce qui donne un meilleur modèle. Par ailleurs, plus le seuil est petit, plus le biais est grand et la variance de l'estimateur est réduite car plus de données participent à l'estimation. .L'idée est de choisire k graphiquement.
La méthode graphique consiste à tracer le graphe

$$\left\{(k,\widehat{\epsilon}_{k,n}^{(H)}) : k=2,...,n\right\}$$

et de choisir le seuil k dans la première région pour laquelle le graphe des $\widehat{\epsilon}(k)$ est approximativement horizontal.

2. Approche par l'estimateur de Pickands

2.1 Estimateur de l'indice de queue

Cet estimateur a étè introduit par *Pickands*.([29]
Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aléatoires iid de fonction de repartition F appartenant au domaine d'attraction de H_ϵ et $X_{1:n} \le X_{2:n} \le ... \le X_{n:n}$ les statistiques d'ordres associées.

On note $\widehat{\epsilon}_n^{(P)}$ l'estimateur de Pickands de ϵ. Pour une suite $k = k(n)$ l'estimateur de Pickands est defini comme suit :

Définition 2.14. Estimateur de Pickands

$$\widehat{\epsilon}_n^{(p)} = \widehat{\epsilon}_n^{(p)}(k) = \frac{1}{\log 2}\log(\frac{X_{n-k+1:n} - X_{n-2k+1:n}}{X_{n-2k+1:n} - X_{n-4k+1:n}})$$

Sous certaines conditions sur la suite d'entier $k = k(n)$ et la fonction de répartition F ,cet estimateur a des bonnes propriétès résumées dans le théoème suivant :

Théorème 2.6. *Propriétèes asymptotiques de* $\widehat{\epsilon}_n^{(p)}$.

Soit $F \in MDA(H_\epsilon)$, $\epsilon \in \mathbb{R}$,$k \to +\infty$ *et* $k/n \to 0$ *quand* $n \to \infty$

–
$$\widehat{\epsilon}_n^{(P)} \xrightarrow{p} \epsilon \text{ } quandn \to \infty$$

– *si* $k/\log\log n \to \infty$ *quand* $n \to \infty$ *alors*
$$\widehat{\epsilon}_n^{(P)} \xrightarrow{p.s} \epsilon, \text{ } quand \text{ } n \to \infty$$

– *Normalité asymptotique :.*
Si $U(x) = (1/1 - F(x))^{\leftarrow}$ *a une dérivée positive* U' *et s'il existe une fonction* $a(.)$ *positive telles que , pour* $x > 0$ *et* $\epsilon \in \mathbb{R}$ *on a :*
$$\lim_{t\to\infty} \frac{(ts)^{1-\alpha}U'(tx) - (t)^{1-\alpha}U'(t)}{a(t)} = \binom{+}{-} \log(x)$$
Si $k = o(n/g^{\leftarrow}(n))$, *où* $g(t) = t^{3-2\alpha}(U'(t)/a(t))^2$, *alors*
$$\sqrt{k}(\widehat{\epsilon}_n^{(P)} - \epsilon) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\epsilon)), \text{ } quand \text{ } n \to \infty,$$
avec
$$\sigma^2(\alpha) = \begin{cases} \frac{\epsilon^2(2^{2\epsilon+1}+1)}{[2(2^\epsilon-1)\log 2]^2}, & \epsilon \neq 0, \\ \\ \frac{3}{\log^4 2}, & \epsilon = 0 \end{cases}$$

2.2 Estimateur de la Var

$$\widehat{VaR_\alpha} = \frac{\left(\frac{k}{n(1-\alpha)}\right)^{\widehat{\epsilon}_{(n,k)}^{(P)}} - 1}{1 - 2^{-\widehat{\epsilon}_{(n,k)}^{(P)}}}(X_{(n-k+1:n)} - X_{(n-2k+1:n)}) + X_{(n-k+1:n)}$$
.

2.3 Estimateur de l'Expected Shortfall

$$\begin{aligned} \widehat{ES}_\alpha(F) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \widehat{VaR}_\alpha^{(P)} d\alpha \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \frac{\left(\frac{k}{n(1-\alpha)}\right)^{\widehat{\epsilon}_{(n,k)}^{(P)}} - 1}{1 - 2^{-\widehat{\epsilon}_{(n,k)}^{(P)}}}(X_{(n-k+1:n)} - X_{(n-2k+1:n)}) + X_{(n-k+1:n)} d\alpha \end{aligned}$$

3. Estimateur des moments de Dekkers - Einmahl- De Haan

Un inconvénient de l'estimateur de Hill est qu'il est conçu seulement pour l'indice de queue des distributions à queues lourdes. En 1989, *Dekkers*, *Einmahl et* de *Haan*[13] ont proposé l'estimateur des moments comme généralisation directe de l'estimateur de Hill pour $\epsilon \in \mathbb{R}$

3.1 Estimateur de l'indice de queue

Définition 2.15. L'estimateur des moments est défini comme suit :

$$\widehat{\epsilon}_n^{(M)} = \widehat{\epsilon}_n^{(M)}(k) = M_n^1 + \frac{1}{2}(1 - \frac{(M_n^1)^2}{M_n^{(2)}})^{-1}$$

avec

$$M_n^{(r)} = M_n^{(r)}(k) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(logX_{n-i+1:n} - \log X_{n-k:n})^r,\ r = 1, 2,$$

où $M_n^{(1)}$ est l'estimateur de Hill $\widehat{\epsilon}_n^{(H)}$

Théorème 2.7. *(Propriétés asymptotiques de $\widehat{\epsilon}_n^{(M)}$).*
Dekkers-Einmahl-DeHaan *([13]) ont démontré la consistance faible, la consistance forte et la normalité asymptotique de cet estimateur.*
Soient $F \in MDA(H_\epsilon, \alpha \in, k \to \infty,\ \frac{k}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$

–
$$\widehat{\epsilon}_n^{(M)} \xrightarrow{p} \epsilon \ quandn \to \infty$$

– *si $k/(\log n)^\delta \to \infty$ quand $n \to \infty$, pour $\delta > 0$, alors*
$$\widehat{\epsilon}_n^{(M)} \xrightarrow{p.s} \epsilon,\ quand\ n \to \infty$$

– *Normalité asymptotique :.*
Si les conditions du théoreme 3.1 de (Dekkers,Einmahl et de Haan,[13]) sont satisfaites et si $k = o(n/g_1^{\leftarrow}(n))$ ou $g_1(t) = t(U(t)/a(t))^2$ alors
$$\sqrt{k}(\widehat{\epsilon}_n^{(M)} - \epsilon) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\alpha))\ quand\ n \to \infty$$
avec
$$\sigma^2(\alpha) = \begin{cases} 1 + \alpha^2 \ si\ \alpha \geq 0 \\ (1-\alpha)^2(1-2\alpha)[4 - 8\frac{1-2\alpha}{1-3} + \frac{(5-11\alpha)(1-2\alpha)}{(1-3\alpha)(1-4\alpha)}],\ si\ \alpha < 0. \end{cases}$$

3.2 Estimateur de l VaR

$$\widehat{VaR}_{(\alpha)}^{(M)} = X_{n-k:n} + \widehat{a}_n^{(M)}(k)\frac{\left(\frac{k}{n\alpha}\right)^{\widehat{\epsilon}_{n,k}^{(M)}} - 1}{\widehat{\epsilon}_{n,k}^{(M)}}\ ,\ pour\ k < n$$

avec

$$a_n^{(M)}(k) = \frac{M_n^{(1)}(k)}{\rho_1(\widehat{\epsilon}_{n,k}^{(M)})} X_{n-k:n}$$

$$\rho_1(\epsilon) = \begin{cases} 1 \ si \ \epsilon \geq 0 \\ \frac{1}{1-\epsilon} \ si \ \epsilon > 0 \end{cases}$$

3.3 Estimateur de l'Expected Shortfall

$$\widehat{ES}_\alpha(F) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \widehat{VaR}_{(\alpha)}^{(M)} d\alpha \quad = \quad \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 X_{n-k:n} + \widehat{a}_n^{(M)}(k)\frac{\left(\frac{k}{n\alpha}\right)^{\widehat{\epsilon}_{n,k}^{(M)}} - 1}{\widehat{\epsilon}_{n,k}^{(M)}} \ d\alpha$$

2.2.2 Méthode POT - Peaks Over Threshold

Pickands a introduit la méthode POT (Peaks-over-Threshold) ou méthode des excès au delà d'un certain seuil réel μ, inférieur au point terminal $\mu < x_f$. Cette méthode consiste à observer non pas le maximum ou les plus grandes valeurs mais toutes les valeurs des réalisations qui excèdent le seuil élevé μ . Donc, l'idée de base de cette approche consiste à choisir un seuil suffisamment élevé et à étudier les excès au-delà de ce seuil.
On note par $\mathcal{N}_\mu$ le nombre d'observations dépassant le seuil μ.

Estimation des paramétres de la GPD.
Il existe plusieurs méthodes d'estimation paramétrique, comme la méthode du maximum de vraisemblance (MV), la méthode des moments et la méthode des moments de probabilités pondérés (PWM) (*Hosking et al.* [17]). Pour estimer les paramètres des distributions GPD, on s'intéresse à la très populaire méthode du MV qui est, sous certaines conditions, la plus efficace (voir *Smith* [34]).
La fonction log-vraisemblance $l_{\epsilon,\sigma}$ associée à l'echantillon $(Y_1, ..., Y_{N_\mu})$ des excés est obtenue à partir de la distribution GPD . Pour $\epsilon \neq 0$ on a :

$$l_{\epsilon,\sigma}(y_1, ..., y_{N_\mu}) = -N_\mu \log\sigma - (\sum_{i=1}^{N_\mu}) \log(1 + \frac{\epsilon}{\sigma} y_i)$$

où $(y_1, ..., y_{N_\mu})$ sont des réalisations de $(Y_1, ..., Y_{N_\mu}$. L'anuulation des dérivées partielles par rapport à ϵ et σ conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{N_\mu}\sum_{j=1}^{N_\mu} \log(1 + \frac{\epsilon}{\beta} y_i) = \epsilon \\ \\ \frac{1}{N_\mu}(1 + \frac{1}{\epsilon}\sum_{j=1}^{N_\mu} \frac{y_j/\sigma}{1+\epsilon y_j/\sigma} = \frac{1}{1+\epsilon}, \end{cases}$$

dont les solutions sont $(\widehat{\epsilon}_{N_\mu}, \widehat{\sigma}_{N_\mu})$ représentent les EMV de $(\epsilon_{N_\mu}, \sigma_{N_\mu})$ .Ce systéme n'a pas de solution explicite. .Lorsque $\epsilon > \frac{-1}{2}$,Smith a démontré la normalité asymptotique des EMV .En effet , quand $N_\mu \to \infty$

$$\sqrt{\mathcal{N}_\mu}\begin{pmatrix} \widehat{\epsilon}_{N_\mu} - \epsilon \\ \frac{\widehat{\sigma}_{N_\mu}}{\sigma} - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N_2\left[0, (1+\epsilon)\begin{pmatrix} 1+\epsilon & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right]$$

où N_2 étant la distribution Gaussienne bivariée. Ce résultat permet de calculer les bornes de confiance pour les estimateurs du MV.

Estimation de la fonction de répartition des excées

Soit $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires *i.i.d* de distribution de Pareto génèralisé de paramétres ϵ et σ .Notons $\widehat{\epsilon}$ et $\widehat{\sigma}$ les estimateurs des paramétres ϵ et σ.
Soit $\frac{\mathcal{N}_\mu}{n}$ un estimateur de $\overline{F}(\mu)$, où μ est le seuil.
D'aprés le remarque (2.2) et le théorème (2.4) on a :

$$\begin{aligned} \overline{F}(\mu + x) &= \overline{F}(\mu)\overline{F}_\mu(x) \\ &\approx \frac{\mathcal{N}_\mu}{n}\left(1 + \frac{\epsilon x}{\sigma}\right)^{\frac{-1}{\epsilon}} \\ &\approx \frac{\mathcal{N}_\mu}{n}\left(1 + \frac{\widehat{\epsilon} x}{\widehat{\sigma}}\right)^{\frac{-1}{\epsilon}} \end{aligned}$$

donc

$$\widehat{\overline{F}(\mu + x)} = \frac{\mathcal{N}_\mu}{n}\left(1 + \frac{\widehat{\epsilon} x}{\widehat{\sigma}}\right)^{\frac{-1}{\epsilon}}$$

Estimation de la VaR

On a

$$\begin{aligned} q_\alpha(X) &= \inf\{x \in \mathbb{R} : \overline{F}(x) \leq 1 - \alpha\}; \\ &= \inf\{\mu + x \in \mathbb{R} : \overline{F}(\mu + x) \leq 1 - \alpha\} \end{aligned}$$

Un estimateur naturel pour le quantile,

$$\begin{aligned} \widehat{VaR_\alpha(F)} &= \widehat{q_\alpha(F)} \\ &= \inf\{\mu + x \in \mathbb{R} : \widehat{\overline{F}(\mu + x)} \leq 1 - \alpha\} \\ &= \mu + \inf\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{\mathcal{N}_\mu}{n}\left(1 + \frac{\widehat{\epsilon} x}{\widehat{\sigma}}\right)^{\frac{-1}{\widehat{\epsilon}}} \leq 1 - \alpha\right\} \\ &= \mu + \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\beta}}\left(\left(\frac{n}{\mathcal{N}_\mu}(1 - \alpha)\right)^{-\widehat{\epsilon}} - 1\right) \end{aligned}$$

Estimation de l'expected shortfall

On va montrer que

$$\widehat{ES_\alpha(F)} = \widehat{q_\alpha(F)} + \frac{\widehat{\sigma} + \widehat{\epsilon}(\widehat{q_\alpha(F)} - \mu)}{1 - \widehat{\epsilon}}$$

est un estimateur de l'expected shortfall pour un seuil μ suffisement grand.
Pour cela, rappelons que

$$ES_\alpha(X) = \mathbb{E}(X/_{X > VaR_{\alpha(F)}})$$

De plus, on sait que,

$$\mathbb{E}(Z) = \int_0^\infty P(Z > z)dz$$

pour des variables aléatoires positives

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty P(Z > z)dz &= \int_0^\infty \int \mathbb{I}_{(Z>z}dP\ dz \\
&= \int \int_0^\infty \mathbb{I}_{\{Z>z\}}dz\ dP \\
&= \int ZdP \\
&= \mathbb{E}(Z)
\end{aligned}$$

On conclut que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X\ \mathbb{I}_{(X>q_\alpha(X))}) &= \int_0^\infty P(X\ \mathbb{I}_{(X>q_\alpha(X))} > z)dz \\
&= q_\alpha(F)\overline{F}(q_\alpha(F)) + \int_{q_\alpha(F)}^\infty \overline{F}(z)dz \\
&= q_\alpha(F)\overline{F}(q_\alpha(F)) + \int_{q_\alpha(F)}^\infty \overline{F}(\mu)\overline{F}(z-\mu)dz
\end{aligned}$$

De plus,

$$\mathbb{E}(X\ \mathbb{I}_{(X>q_\alpha(F))}) = P(X > q_\alpha(F)) = \overline{F}(q_\alpha(F))$$

Donc

$$\begin{aligned}
ES_\alpha(F) &= q_\alpha(F) + \frac{\overline{F}(\mu)}{\overline{F}(q_\alpha(F) - \mu)} \int_{q_\alpha(F)}^\infty \overline{F}_\mu(z-\mu)dz \\
&= q_\alpha(F) + \frac{1}{\overline{F}_\mu(q_\alpha(F) - \mu)} \int_{q_\alpha(F)}^\infty \overline{F}_\mu(z-\mu)dz
\end{aligned}$$

En remplaçant dans ce qui précède F_μ et $q_\alpha(F)$ par leur esttimateurs,
$\widehat{\overline{F}_\mu(t-\mu)} = \overline{G}_{\widehat{\epsilon},\widehat{\mu}}(t-\mu)$ et $\widehat{q_\alpha(F)}$, on obtient, l'estimateur de l'expected shortfall

$$\begin{aligned}\widehat{ES_\alpha(F)} &= \widehat{q_\alpha(F)} + \frac{\int_{\widehat{q_\alpha(F)}}^{\infty}\left(1+\frac{\widehat{\epsilon}(z-\mu)}{\widehat{\sigma}}\right)^{\frac{-1}{\widehat{\epsilon}}} dz}{\left(1+\frac{\widehat{\epsilon}(\widehat{q_\alpha(F)}-\mu)}{\widehat{\mu}}\right)^{\frac{-1}{\widehat{\epsilon}}}} \\ &= \widehat{q_\alpha(F)} + \frac{\widehat{\mu}+\widehat{\epsilon}(\widehat{q_\alpha(F)}-\mu)}{1-\widehat{\epsilon}}\end{aligned}$$

Remarque : En résumé la méthode POT consiste à :

1. Choisir un seuil μ suffisemment grand basé sur le graphe de la fonction des excées, et on determine $\mathcal{N}_\mu$,
2. Calculer les estimateurs du maximum de vraisemblance de σ,β basé sur les observations $Y_1, Y_2, ..., Y_n$.
3. Utiliser ces estimateurs pour calculer $\overline{F}(\mu + x), VaR_\alpha(F), ES_\alpha(F)$.

2.3 Approche par Simulation Historique

La méthode de Simulation Historique, connue également sous le nom de méthode historique, est sans doute la méthode la plus simple dans sa conception et sa mise en oeuvre puisqu'elle ne fait aucune hypothèse sur la forme de la distribution des rentabilités. Il suffit en fait de disposer des données historiques des gains et des pertes journalières du portefeuille dont on souhaite éstimer la VaR. A partir de ces données, il est possible de reconstituer la distribution empirique des gains et des pertes journaliéres et d'en déduire la VaR.
Le principal avantage de cette méthode est qu'elle n'utilise pas d'hypothèse distributionnelle sur la variable aléatoire rendement. Elle présente aussi d'autres avantages en terme de simplicité et de flexibilité. Ce pendant, cette méthode est particulièrement affaiblie par sa grande dépendance des données qu'elle utilise.

2.3.1 Estimation de la VaR et de l'expected shortfall

Considérons un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de X, et notons $(X_{1:n}, X_{2:n}, ..., X_{n:n})$ les statistiques d'ordre associées.
Posons

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(X_{i:n} \leq x)}$$

D'aprés la définition (1.5) et le lemme (1.1)

$$VaR_\alpha(X) = F^{-1}(x)$$

D'aprés le théorème (2.2) et la définition (2.9) Si $\alpha \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[$ on estime la VaR par :

$$\widehat{VaR_\alpha(X)} = F_n^{-1}(x) = X_{i:n}$$

Or on a

$$\begin{aligned}
ES_\alpha(X) &= \mathbb{E}[X/X > VaR_\alpha(X)] \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F^{-1}(x)dx \\
\int_\alpha^1 F^{-1}(x)dx &= \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} F^{-1}(x)dx + \int_{\frac{i+1}{n}}^{\frac{i+2}{n}} F^{-1}(x)dx + ... + \int_{\frac{n-1}{n}}^{1} F^{-1}(x)dx \\
&\simeq \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} F_n^{-1}(x)dx + \int_{\frac{i+1}{n}}^{\frac{i+2}{n}} F_n^{-1}(x)dx + ... + \int_{\frac{n-1}{n}}^{1} F_n^{-1}(x)dx \\
&= \frac{1}{n}[X_{i:n}, X_{i+1:n} + ... + X_{n:n}]
\end{aligned}$$

$$\widehat{ES_\alpha(X)} = \frac{1}{n(1-\alpha)}\sum_{i=[n\alpha]}^{n} X_{i:n}$$

Remarques :

1. En pratique, on doit choisire le nombre d'observations passées n avec prudence. Même si un long enregistrement des données est disponible, il peut être préférable de n'utiliser que les plus récentes. En effet, il n'est pas évident de savoir si la stationarité détient vraiment des horizons à long terme. Cependant l'utilisation de trop peu d'observations, conduit à des estimations peu fiables en raison de leur grande variance.
2. Les estimations ci-dessus sont faciles à calculer et ne reposent pas sur des hypothèses paramétriques qui pourraient ne pas être vérifiées.

2.3.2 Normalité asymptotique de l'estimateur de l'Expected Shortfall

Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires de fonction de répartition F et $X_{1:n}, X_{2:n}, ..., X_{n:n}$ les statistiques d'ordre associées.
On note k_n une suite d'entiers telle que

$$1 \leq k_n \leq n,\ k_n \to \infty\ et\ \frac{k_n}{n} \to 0\ quand\ n \to \infty; \tag{2.8}$$

Or

$$k_n = [n\alpha]\ avec\ 0 < \alpha < 1$$

On veut étudier la normalitée asymptotique de

$$\sum_{i=1}^{k_n} X_{n+1-i:n} = \sum_{i=n-k_n+1}^{n} X_{i:n}$$

Soit H une fonction continue a gauche définie par

$$H(s) = -F^{\leftarrow}(1-s),\ 0 \leq s \leq 1$$

Si $U_{1:n} \leq ... \leq U_{n:n}$ sont les statistiques d'ordre de n variables aléatoires de loi uniforme (0,1) alors

$$(X_{1:n}, ..., X_{n:n}) \xrightarrow{d} (-H(U_{n:n}), ..., -H(U_{1:n}))$$

Pour $0 \leq s \leq t \leq 1$, on consider la variance

$$\sigma^2(s,t) = \int_s^t \int_s^t (\upsilon \wedge \nu - \upsilon\nu) dH(\upsilon) dH(\nu)$$

où $\upsilon \wedge \nu = \min(\upsilon, \nu)$
Et pour toute suite k_n qui verifie (2.8), on pose $b_n = \sigma(\frac{1}{n}, \frac{k_n}{n})$ et

$$a_n = \begin{cases} b_n,\ si\ b_n > 0 \\ 1\ sinon \end{cases}$$

On choisie une suite de constantes positives δ_n telle que $\delta_n < 1$ et $n\delta_n \to 0$ quand $n \to \infty$.
Les deux suites de fonctions suivantes

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \frac{k_n^{1/2}\{H(k_n/n + x(k_n^{1/2}/n - H(k_n/n)\}}{n^{1/2}a_n} si\ \ -\frac{k^{1/2}n}{2} \leq x \leq \frac{k_n^{1/2}}{2}, \\ \\ \psi_n\left(-\frac{k_n^{1/2}}{2}\right)\ si\ \ -\infty < x < -\frac{k_n^{1/2}}{2} \\ \\ \psi_n\left(\frac{k_n^{1/2}}{2}\right)\ si\ \frac{k_n^{1/2}}{2} < x < \infty \end{cases}$$

et

$$\varphi_n(y) = \begin{cases} \frac{H(y/n) - H(1/n)}{n^{1/2}a_n},\ si\ 0 < y \leq n - n\delta_n, \\ \\ \frac{H(1-\delta_n) - H(1/n)}{n^{1/2}a_n},\ si\ n - n\delta_n < y < \infty \end{cases}$$

Soit (n_1) une sous suite d'entiers positives de la suite (n), (A_{n_1}) une suite de constantes positives et (k_{n_1}) est la sous suite correspendante à la suite (k_n) de (1)

Les conditions nécessaires et suffisantes que ces fonctions doivent satisfaire sont :

1. Il existe une fonction ψ non-decroissante, continue à gauche sur $]-\infty, +\infty[$ avec $\psi(0) \leq 0,\ \psi(0^+)$ telle que :

$$\psi^*_{n_1}(x) = \frac{n_1^{1/2} a_{n_1}}{A_{n_1}} \psi_{n_1}(x) \to \psi(x)\ quand\ n_1 \to \infty,$$

pour tout point de continuitée de ψ

2. Il existe une fonction φ non décroissante, continue à gauche sur $]0, +\infty$ avec $\varphi(1) \leq 0$ et $\varphi(1^+) \geq 0$ telle que

$$\varphi^*_{n_1}(y) = \frac{n_1^{1/2} a_{n_1}}{A_{n_1}} \varphi_{n_1}(y) \to \varphi(y) \textit{ quand } n_1 \to \infty,$$

pour tout point de continuitée de φ

3. Il existe une constante $0 \leq a < \infty$ telle que

$$n_1^{1/2} b_{n_1}/A_{n_1} \to a \textit{ quand } n_1 \to \infty$$

Théorème 2.8. *(Csorgo,Erich haeusler et Dzvid M.Mason)*
S'il existe une sous-suite $(n_1) \subset (n)$ et deux suites A_{n_1} et C_{n_1}, de telle sorte que

$$\frac{1}{A_{n_1}} \left\{ \sum_{i=1}^{k_{n_1}} X_{n_1+1-i:n_1} - C_{n_1} \right\} \xrightarrow{d} V \tag{2.9}$$

où V est une variable aléatoire non dégénérée.
alors il existe une sous-suite $(n_2) \subset (n_1)$ telle que A_{n_2} vérifie les conditions (1),(2) et (3) et la condition (2.9)
La variable aléatoire V est de la forme $V(\varphi, \psi, b, r, \alpha) + c$
où

$$\psi(x) \geq -ar/(1-\alpha), \; -\infty < x < \infty$$

$$\int_\epsilon^\infty (\varphi(y) - \varphi(\infty))^2 dy < \infty \; \forall \; \epsilon > 0.$$

$$0 \leq b \leq a$$

$$0 \leq r \leq (1-\alpha)^{1/2}$$

et

$$-\infty < c < \infty$$

Corollaire 2.3. *(Csorgo,Erich haeusler et Dzvid M.Mason) Soit (n_1) une suite d'entiers positives. Il existe des suites de constantes $A^*_{n_1} > 0$ et C_{n_1} telles que*

$$\frac{1}{A^*_{n_1}} \left\{ \sum_{i=1}^{k_{n_1}} X_{n_1+1-i:n_1} - C_{n_1} \right\} \xrightarrow{d} Z \textit{ quand } n_1 \to \infty$$

Z est une variable aléatoire de loi normale si et seulement si les conditions (1) et (2) sont vérifiées quand $A_{n_1} \equiv n_1^{1/2} a_{n_1}$, $\psi \equiv 0$ et $\varphi \equiv 0$.
Si de plus

$$C_{n_1} = -n \int_{1/n}^{k_n/n} H(u) du - H\left(\frac{1}{n}\right)$$

Z est de loi normale centrée et réduite.

Remarque 2.3. Dans le cas de variables aléatoires m-dependantes, la normalité asymptotique de l'Expected Shortfall est aussi obtenue
On donne dans ce qui suit, la normalité asymptotique de l'expexted shortfall sous m-dependance

2.3.3 Normalité asymptotique de l'estimateur de l'Expected Shortfall sous m-dépendace

Définition 2.16. Variables aléatoires m-dépendantes
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. (X_n) est dite m-dependante si X_r et X_s sont independantes pour $s - r > m$

Soit (X_t) une suite de variables aléatoires m-dependantes, de fonction de répartition commune F, telle que $F \in MDA(H_\epsilon)$.
Posons

$$T_n = \sum_{i=1}^{s_n} X_{n+1-i:n}$$

où s_n est une suite d'entiers telle que $1 \leq s_n \leq n$; $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0$; $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$

Falk et Schmid(1993)([15]), ont donné les conditions suffisantes pour établir la normalité asmptotique de (T_n)

Soit

$$\omega(F) = \sup\{x \in \mathbb{R}, F(x) < 1\}$$
$$\upsilon(F) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) > 0\}$$

F une fonction de repartition continue
$\forall\ \omega(F) < \mu < \upsilon(F)$, F_μ est definie par :

$$F_\mu(x) = \begin{cases} (F(x) - F(\mu))/(1 - F(\mu)) \ si\ x \geq \mu \\ 0\ si\ x < \mu \end{cases}$$

Si le moment d'ordre 2 de F existe on a

$$m(\mu) = \mathbb{E}(X(\mu))\ et\ \sigma^2(\mu) = \mathbb{E}((X(\mu) - m(\mu))^2)$$

où $X(\mu) \sim F_\mu$
De plus, on utilise la notation

$$r(\mu) = m(\mu) - \mu = \frac{1}{1 - F(\mu)} \int_\mu^{\omega(F)} (1 - F(t))dt$$

Posons :

$$p_n = \frac{s_n}{n}\ , b_n = F^{\leftarrow}(1 - p_n)\ et\ X_{ni} = \max\{X_i, b_n\}\ \forall\ i \in \mathbb{N}$$

Théorème 2.9. *(*Falk *et* Schmid*(1993)([15])) Supposons*

$$P(X_1 = X_j) = 0,\ \forall\ j = 2, ..., m+1$$

$$\frac{1}{r(b_n)}\left(X_{n-s_n:n} - b_n\right) \xrightarrow{P} 0 \text{ quand } n \to \infty$$

$$\frac{1}{p_n}\left(P(X_1 > b_n, X_j > b_n) - p_n^2\right) = o(1)\ \forall\ j = 2, ..., m+1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Cov(X_{n1,X_{nj}})}{VaR(X_{n1})} = 0\ \forall\ j = 2, ..., m+1$$

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$ *quand* $n \to \infty$

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{2s_nCr(b_n)}}\left(T_n - n\int_{1-p_n}^{1} F^{\leftarrow}(\mu)d\mu\right) \leq x\right) \to \Phi(x) \text{ quand } n \to \infty$$

où $\Phi(x)$ *est la fonction de répartition de la loi* $N(0,1)$

2.3.4 Les points forts et les point faibles de la methode historique

1. Les points forts de la méthode historique

L'avantage majeur de la méthode historique réside dans le fait qu'elle allie simplicité et large application : ·

- La méthode Simulation Historique représente manifestement la plus intuitive des techniques de calcul de la VaR. La procédure est en effet simple et fournit des résultats faciles à interpréter. ·
- La méthode de Simulation Historique ne formule aucune hypothèse quant à la forme des distributions des rendements, à la linéarité des relations entre les prix et les facteurs de risque. Elle parvient ainsi à s'adapter avec les spécificités des positions traitées et des marchés. Elle convient donc pour gérer tout type de position dans toute condition de marché. ·
- De plus, son caractère non paramétrique lui évite d'estimer des paramètres, étant implicitement présents dans l'historique des variations des facteurs de marché. La Simulation Historique ne requiert donc pas de calculs préliminaires.
- La méthode Simulation Historique échappe au risque de choix de modèle puisque, du fait de son caractère non paramétrique et de l'absence d'hypothèses ; elle n'utilise aucun modèle d'évaluation.

Les points faibles de la méthode historique

Les difficultés liées à l'utilisation de données passées pour prévoir une perte sont particulièrement problématiques dans le cadre de la méthode historique. En effet,

- La méthode historique construit la distribution des rendements futurs du portefeuille sur la base des prix passés. Pour calculer sa VaR sur base de la Simulation Historique, l'institution financière est donc tenue de récolter et de stocker une quantité importante de données historiques relatives à un grand nombre de facteurs de risque. Ces exigences en matière de données peuvent poser problème, particulièrement lorsque des instruments financiers sont récents ou proviennent de marchés émergents. Ainsi, si le gestionnaire calcule une VaR sur un portefeuille qui détient un titre récent, il ne pourra donc pas récupérer la distribution des rendements de ce titre et en déduire les rendements fictifs historiques du portefeuille. Une possibilité pour le risk manager est d'utiliser les cours de l'indice sectoriel correspondant à ce récent titre. ·
- Dans le cadre de la Simulation Historique, les données passées jouent un rôle crucial dans l'estimation de la VaR mais celles-ci présentent les inconvénients suivants : tout d'abord, la méthode historique ne tient pas compte des événements extrêmes, puisque le volume des données historiques utilisées est forcément limité pour pouvoir tenir compte de ces événements très rares. De plus, cette approche, dans sa version la plus répandue, assigne le même poids pour toutes les données, anciennes ou récentes. Or on sait que les données les plus récentes jouent un rôle plus important dans l'estimation.
- L'utilisation de données historiques pose encore problème du fait que ces données sont traitées comme si elles provenaient toutes de la même distribution de probabilité, alors que celles-ci changent au cours du temps. Par conséquent la méthode SH considère les données extrêmes, observées durant les périodes de turbulence des marchés comme des « outliers ». En réalité, celles-ci proviennent d'une distribution dont la dispersion est plus élevée. En procédant de la sorte, la méthode historique ignore les hausses temporaires de la volatilité comme l'a souligné G.Holton en 1998. De plus, la méthode SH est incapable de prendre en compte des événements futurs plausibles si ceux-ci n'apparaissent pas dans le passé d'après K.Dowd, en 1998.
- La méthode historique présente l'inconvénient de supposer la stationnarité des rendements des actifs détenus en portefeuille. Cette hypothèse qui est généralement vérifiée par les titres boursiers ne devrait pas poser de problème en théorie. Cependant, un calcul rigoureux devrait prendre en compte l'hypothèse de non stationnarité de chacun des titres mais elle remettrait en cause la pertinence du calcul de la VaR sur ce portefeuille, sans compter que le test de stationnarité qui peut être réalisé par un test de Dickey-Fuller dont la mise en oeuvre est longue et compliquée en pratique, voire inenvisageable pour un calcul quotidien ·
- Enfin, le choix de la période d'observation pose problème. D'un côté, beaucoup de données sont nécessaires pour observer les événements rares, de l'autre, la prise en compte de données trop anciennes peut affaiblir la pertinence des estimations. En effet, la simulation historique prend en compte l'historique de chaque actif qui compose le portefeuille et les conjectures de marché actuelles (interactions des actifs entre eux) sont très différentes à celles d'un passé trop lointain.

2.3.5 Les estimateurs de l'ES par la méthode Historique :

L'estimateur *de Brazauskas et al.*

Pour les series financiéres, *Brazauskas* et *al.*(2008)([9]) proposent l'estimateur suivant :

$$\widehat{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \widehat{F_n}^{-1}(\mu) d\mu$$

où :
$\widehat{F_n}(.)$ designe la fonction empirique et $\widehat{F}^{-1}(.)$ sa fonction des quantiles.

L'estimateur de *Yamai et Yoshiba*

Yamai et Yoshiba,(2002)([35]) proposent l'estimateur de l'ES suivant :

$$\widehat{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{n(\alpha-\beta)} \sum_{i=n\beta}^{n\alpha} X_i$$

où : α est supposé etre beaucoup plus grand que β.

L'estimateur de *Chen*

Chen,(2008)([11]) propose l'estimateur suivant :

$$\widehat{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{n\alpha} \sum_{i=1}^{[n\alpha]} X_{(i)} + (1 - \frac{n\alpha}{n\alpha}) X_{([n\alpha]+1)}$$

L'estimateur de *Jadhavet et al* :

Jadhavet et al.(2009).([19]) proposent aprés plusieurs modifications l'estimateur historique de l'Expected Shortfall :

$$\widehat{ES}_\alpha(X) = \frac{\sum_{i=0}^{[n\alpha^{1+a}]+1} X_{(i)}}{[n\alpha^{1+a}]+2}$$

où $i = [(n+1)\alpha'(i)]$.

$$\alpha'(i) = \alpha - \frac{i\alpha}{[n\alpha]+1} \ ; \ i = 0, 1, ..., [n\alpha^{1+a}] + 1$$

et a une constante telle que : $a \in [0, 0.1]$

2.4 Estimation de la VaR et l'Expected Shortfall basée sur les expectiles :

Dans cette partie nous utiliserons les expectiles pour estimer la VaR et l'expected shortfall. La VaR et l'Expected Shortfall sont basées sur l'utilisation des quantiles pour quantifier le risque impliqué par la variabilité des pertes et les queues de leur distributions. L'utilisation des expectiles comme moyen alternatif pour quantifier le risk est due au fait que les expectiles sont plus alerte que les quantiles à l'empleur des rares pértes catastrophiques et ils dépendent à la fois des réalisations des queues des variables aléatoires et de leurs probabilités tandis que les quantiles ne dépendent que de la fréquence des réalisations de queue (voir *Kuan et al*,2009,[23]). De plus Kuan et al ont prouvé que les expectiles sont les seule M-quantiles qui présentent une mesure de risque cohérente et trés récement, Ziegel (2016)([36])a montré que les expectiles sont les seules mesure cohérentes invariantes par changement de distribution du risque.

2.4.1 Les expectiles

Pour obtenir l'expectile d'ordre $\tau \in [0,1]$, on doit minimiser

$$\varepsilon_\tau = \arg\min_{\theta \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\{\eta_\tau(Y-\theta) - \eta_\tau(Y)\} \tag{2.10}$$

où : $\eta_\tau(y) = \mid \tau - \mathbb{I}_{(Y \leq 0)} \mid y^2$, et $\tau = \mathbb{E}\{\mid Y - \varepsilon_\tau \mid \mathbb{I}_{(Y \leq \varepsilon_\tau)} / \mathbb{E} \mid Y - \varepsilon_\tau \mid$
Ou d'une façon equivalente, selon Newey et Powell([28]), l'expectile d'ordre $\alpha \in [0,1]$ peut être defini commme le minimiseur de

$$\varepsilon_\tau = \arg\min_{\theta \in \mathbb{R}} \tau \mathbb{E}((Y-\theta)_+^2 - Y_+^2) + (1-\tau)\mathbb{E}((Y-\theta)_-^2 - Y_-^2)$$

$Y_+ = \max(0,y),\ Y_- = \max(-Y,0)$
La condition necessaire et suffisante d'optimalité de (2.10) est que

$$\varepsilon_\tau - \mathbb{E}(Y) = \frac{2\tau-1}{1-\tau}\mathbb{E}[(Y-\varepsilon_\tau)_+]$$

ait une solution unique pour toute variable aléatoire Y telle que $\mathbb{E} \mid Y \mid < \infty$

2.4.2 Quelques propiétès des expectiles

1. Invariance par changement de loi : Soit Y et Y' deux variables aléatoires intégrables ,de densités continues. Y et Y' ont la méme distribution si et seulement si $\varepsilon_{(\tau,Y)} = \varepsilon_{(\tau,Y')}\ \forall\ \tau$
2. L'invariance par transformation linéaire :
Soit $\overline{Y} = a + bY$, où , $a, b \in \mathbb{R}$

$$\varepsilon_{(\tau,Y')} = \begin{cases} a + b\varepsilon_{(\tau,Y)}\ si\ b > 0 \\ \\ a + b\varepsilon_{(1-\tau,Y')}\ si\ b \leq 0 \end{cases}$$

3. Consistance :
   Si Y est telle que $P(Y = c) = 1$ on a :
$$\varepsilon_{(\tau,Y)} = c \ \forall \tau$$
4. Monotonie stricte par rapport à τ :

   Si $\tau_1 < \tau_2$ avec $\tau_1, \tau_2 \in [0,1]$, alors : $\varepsilon_{\tau_1} < \varepsilon_{\tau_2}$
5. Préservation de l'ordre stochastique :
   Si $Y \leq Y'$ telque $P(Y \leq Y') = 1$ alors :
$$\varepsilon_{(\tau,Y)} \leq \varepsilon_{(\tau,Y')} \ \forall \tau \in [0,1]$$
6. La sous-additivité :
   Pour toutes variables aléatoires $Y, Y' \in \mathrm{L}_1$ on a :
$$\varepsilon_{(\tau,Y+Y')} \leq \varepsilon_{(\tau,Y)} + \varepsilon_{(\tau,Y)} \ \forall \tau \geq \frac{1}{2}$$
   et
$$\varepsilon_{(\tau,Y+Y')} \geq \varepsilon_{(\tau,Y)} + \varepsilon_{(\tau,Y')} \ \forall \tau \leq \frac{1}{2}$$

2.4.3 La relation entre les expectiles et les quantiles

Mao et Yang,(2015),([25]) et *Bellini et Di Bernardo*,(2017),([8]) ont decrit la relation entre les expectiles ε_τ et les quntiles extrêmes q_τ quand F_Y appartient au domaine de Frechet d'indice γ on a
$$\frac{\overline{F}_Y(\varepsilon_\tau)}{\overline{F}_Y(q_\tau)} \sim \gamma^{-1} - 1 \ quand \ \tau \to 1$$
Où $q_\tau = F_Y^{-1}(\tau) = \inf\{y \in \mathbb{R} : F_Y(y) \geq \tau\}$

2.4.4 Estimation des expectiles

Soit $Y_1, Y_2, .., Y_n$ n variables aléatoires i.i.d et soit $Y_{1:n}, Y_{2:n}, ..., Y_{n:n}$ les statistiques d'ordre associées.
Un estimateur de l'expectile ε_τ est donné par
$$\widehat{\varepsilon}_{\tau_n} \sim (\gamma^{-1} - 1)^{-\widehat{\gamma}} \widehat{q}_{\tau_n}$$
où $\widehat{q}_{\tau_n} = Y_{n-[n(1-\tau_n)],n}$ et $\widehat{\gamma}$ est l'stimateur de l'indice γ .

Un estimateur de l'indice des queue γ, simple et trés utilisé est l'estimateur de Hill donné par :
$$\widehat{\gamma}_H = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \log \frac{Y_{n-i+1,n}}{Y_{n-k,n}}$$

où $k = k(n)$ telle que $\frac{k(n)}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$

Théorème 2.10. *(* James W.Taylor.*(2008)([18])) Supposons que F_Y est strictement croissante et à variation régulière du second ordre ,avec $0 < \gamma < 1$ et $\tau_n \to 1$.*

Posons

$$\sqrt{n(1-\tau_n)}\left(\widehat{\gamma}-\gamma, \frac{\widehat{q_{\tau_n}}}{q_{\tau_n}}-1\right) \to (\Gamma, \Theta)$$

où

$$\Theta \sim N(0,1) \ et \ \Gamma \sim N(\frac{\lambda_2}{(1-\rho)}, \gamma^2)$$

Si

$$\sqrt{n(1-\tau_n)}q_n^{-1} \to \lambda_1 \in \mathbb{R} \ et \ \sqrt{n(1-\tau_n)^{-1})} \to \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

.

alors

$$\sqrt{n(1-\tau_n)}\left(\frac{\widehat{\varepsilon}_{\tau_n}}{\varepsilon_{\tau_n}}-1\right) \xrightarrow{d} m(\gamma)\Gamma + \Theta - \lambda$$

où

$$m(\gamma) = (1-\gamma)^{-1} - \log(\gamma^{-1}-1)$$

et

$$\lambda = \gamma(\gamma^{-1}-1)^{\gamma}\mathbb{E}(Y)\lambda_1 + \left(\frac{(\gamma^{-1}-1)^{-\beta}}{1-\beta-\gamma} + \frac{(\gamma^{-1}-1)^{-\beta}-1}{\beta}\right)\lambda_2$$

Définition 2.17. L'Expected Shortfall basé sur les expectiles

On peut définir l'Expected Shortfall basé sur les expectiles noté $XES_{(\tau)}$ comme suit

$$XES_{(\tau)} = \frac{1}{1-\tau}\int_{\tau}^{1} \varepsilon_\alpha d\alpha$$

2.4.5 Estimation de l'expected shortfall

Proposition 2.2. *Abdelaati Daouia et al ([1])*
Soit Y une variable aléaoire de fonction de répartition F à variation régulière, alors

$$\frac{XES_{(\tau)}}{ES_{(\tau)}} \sim \frac{\varepsilon_\tau}{q_\tau}$$

et

$$\frac{XES_{(\tau)}}{\varepsilon_\tau} \sim \frac{1}{1-\gamma} \quad quand \quad \tau \to 1$$

Cette propsition nous sera utile pour déterminer un estimateur de XES_τ

Soit $\tau = \tau'_n$ telle que $\tau'_n \to 1$ quand $n \to \infty$.
On a

$$XES_{\tau'_n} \sim (1-\gamma)^{-1}\varepsilon_{\tau'_n}$$

Un estimateur de XES_τ est défini par

$$\widehat{XES}_{\tau'_n} = (1-\widehat{\gamma})^{-1}\widehat{\varepsilon}_{\tau'_n}$$

où $\widehat{\varepsilon}_{\tau_n}$ est l'estimateur des expectiles .

2.4.6 Normalité asymptotique

Corollaire 2.4. *Supposons F_Y strictement croissante et à variation réguliére au second ordre, avec $0 < \gamma < 1$ et $\rho < 0$, et que $\tau_n, \tau'_n \to 1$ quand $n(1-\tau_n) \to \infty$ et $n(1-\tau'_n) \to c < \infty$ Supposons que*

$$\sqrt{n(1-\tau_n}\left(\widehat{\gamma}-\gamma, \frac{\widehat{q}_{\tau_n}}{q_{\tau_n}}\right) \xrightarrow{d} (\Gamma, \Theta)$$

où

$$\Theta \sim N(0,1) \ et \ \Gamma \sim N(\frac{\lambda_2}{(1-\rho)}, \gamma^2)$$

Si

$$\sqrt{n(1-\tau_n} q_{\tau_n}^{-1} \to \lambda_1 \in \mathbb{R} \ et \ \sqrt{n(1-\tau_n} A((1-\tau_n)^{-1}) \to \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

, alors

$$\frac{\sqrt{n(1-\tau_n}}{\log[(1-\tau_n)/(1-\tau'_n)]}\left(\frac{\widehat{XES(\tau'_n)}}{XES(\tau'_n)} - 1\right) \xrightarrow{d} \Gamma$$

Conclusion

La gestion du risque prend une part importante (et de plus en plus prépondérante) dans la gestion d'un établissement financier. Un certain nombre de risques peuvent être qualifiés de "risques extrêmes" car ils présentent une probabilité d'occurrence très faible. Ils correspondent à des événements rares.
Nous avons présenté la base axiomatique des mesures de risque en présentant les mesures de risque usuelles, en particulier la Value-at-Risk et l'expected shortfall. Premièrement nous avons traité la théorie des valeurs extrêmes sous indépendance en appliquant deux grands critères (ou Théorèmes), la représentation de Jenkison-Von mises GEV (utilisé dans la méthode des blocs) qui regroupe les trois formes de la distribution de maximum et le théorème de Balkema-De Haan-Pickands qui se base sur la GPD (utilisé dans la méthode Peak over Threshold POT).L'avantage de la méthode est que nous n'imposons pas de fortes hypothèses sur la distribution initiale.
Elle nous a permis d'établir des relations explicites et simples entre la VaR et l'ES. Néanmoins, les estimateurs obtenus sont souvent sensibles au choix du seuil, raison pour laquelle nous devons bien le choisir. Puis, la méthode de simulation historique est la méthode la plus simple à mettre en œuvre. Mais la VaR calculée par cette méthode n'est pas calculée selon un ensemble d'informations disponibles à la date t. Par conséquent la prévision de la VaR selon la méthode de Simulation Historique sera invariante aux modifications de l'environnement économique.
Finalement, les expectiles (moyen alternatif pour quantifier le risque) sont plus alertes que les quantiles à l'ampleur des rares pertes. Parmi les perspectives de ce travail, nous pouvons dégager les points suivants.

- La recherche d'autres méthodes dans le but d'améliorer l'approximation des valeurs des estimateurs aux valeurs réelles, en prenant en considération le cas où il y a une dépendance entre les évènements.
- L'estimation de l'Expected Shortfall sous données manquantes pour certains modèles de séries chronologiques.

Bibliographie

[1] Abdelaati Daouia, Stéphane Girard, Gilles Stupfler. Estimation of Tail Risk based on Extreme Expectiles. 2017.

[2] Acerbi, C. (2002). Spectral Measures of Risk : A Coherent Representation of Subjective Risk Aversion. Journal of Banking and Finance, 26, 1505-1518.

[3] Acerbi, C. and Tasche, D. (2002). Expected Shortfall : A Natural Coherent Al- ternative to Value-at-Risk. Economic, 31 (2), 379-388.

[4] Acerbi, C. and Tasche, D. (2002). On the Coherence of Expected Shortfall. Journal of Banking and Finance, 26, 1487-1503.

[5] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. and Heath, D. (1997). Thinking Coherently. Risk, 10, 68-71.

[6] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. and Heath, D. (1999). Coherent,9 (3), 203-228. Measures of Risk., Mathematical Finance

[7] Balkema, A.A. and de Haan, L. (1974). Residual Life Time at Great Age. Annals of Probability, 2, 792-804.

[8] Bellini, F. and Di Bernardino, E. (2015). Risk Management with Expectiles, The European Journal of Finance.

[9] Brazauskas, V., Jones, B., Madan, L. and Zitikis, R. (2008). Estimating conditional tail expectation with actuarial application in view. Journal of Statistical Planning and Inference

[10] Charpentier, A. (2010). Mesures de Risque. Université Rennes 1, France.

[11] Chen, S. X. (2008). Nonparametric estimation of expected shortfall. Journal of Financial6, 87-107. Econometrics,

[12] Csörgo, S. and Mason, D.M. (1985). Central Limit Theorems for Sums of Extreme Values. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 19 (2), 783-811.

[13] Dekkers, A.L.M., Einmahl, J.H.J. and de Haan, L. (1989). A Moment Estimator for the Index of an Extreme-Value Distribution. Annals of Statistics,17 (4), 1795-1832.

[14] Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T. (1997). Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer-Verlag, Berlin.

[15] Flak, T. and Schmid. W. (1993a). An outlier test for linear processes. Metrika,Sankhy¯a : The Indian Journal of Statistics 1995, 57, Series A, Pt. 2,186 - 201

[16] Fisher, R.A. and Tippett, L.H.C. (1928). Limiting Forms of the Frequency Dis- tribution of the Largest or Smallest Member of a Sample. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society , 24, 180-190.

[17] Hosking, J.R.M., Wallis, J.R. and Wood, E.F. (1985). Estimation of the Generalized Extreme Value Distribution by theMethod of Probability-WeightedMoments. Technometrics, 27, 251-261.

[18]James W. Taylor.(2008)Estimating Value at Risk and Expected Shortfall Using Expectiles Saïd Business School University of Oxford Journal of Financial Econometrics

[19] Jadhav, D., Ramanathan, T. V. and Naik-Nimbalkar, U. V. (2009). Modied estimators of the expected shortfall. Journal of Emerging Market Finance, .

[20] Jan Kallsen.(2014). Risk Managment,

[21] Jenkinson, A. F. (1955). The Frequency Distribution of the Annual Maximum (or Minimum) values of Meteorological Elements. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society .

[22] Kaas R.Goovaerts M. Dhaene J and Denuit M.(2008) Modern actuariat risk theory, usingR. Springer-Verglag, Berlin

[23]Kuan, C-M., Yeh, J-H. and Hsu, Y-C. (2009). Assessing value at risk with CARE, the Conditional Autoregressive Expectile models, Journal of Econometrics

[24] Lehmann, E.L. and Casella, G. (1998). Theory of Point Estimation. Springer.

[25] Mao, T. and Yang, F. (2015). Risk concentration based on Expectiles for extreme risks under FGM, 64, 429-439.

[26] Markowitz H portfolio silection. Journal of finance

[27] Morgan, J.P. (1996). Risk Metrics-Technical Documents, 4th Edition, New York.

[28] Newey, W.K. and Powell, J.L. (1987). Asymmetric least squares estimation and testing,55, 819-847. Econometrica

[29] Pickands III, J. (1975). Statistical Inference Using Extreme Order Statistics. The Annals of Statistics, 3, 119- 131.

[30] Rockafellar, R.T. and Uryasev, S. (2000). Optimization of Conditional Value-at- Risk, The Journal of Risk, 2 (3), 21-41.

[31] Rockafellar, R.T. and Uryasev, S. (2002). Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions. Journal of Banking and Finance 26, 1443-1471.

[32] Roy A D. Safety first and the holding of assets. Econometrica

[33] Saidane hadda. sur l'estimation des mesures de risque, Mémoire de magistère (école doctorale) spécialité : mathématiques, option : statistique, université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, mai 2012

[34] Smith, R.L. (1985). Maximum Likelihood Estimation in a Class of Non Regular Cases. Biometrika, 15, 1174-1207.

[35] Yamai, Y. and Yoshiba, T. (2002). Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk (3) : their Validity underMarket Stress. IMES Discussion Paper No 2002-E-2, Bank of Japan.20 (2),95-115.

[36] Ziegel, J.F. (2014). Coherence and elicitability, Mathematical Finance,