

République Algérienne Démocratique et Populaire.  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.  
Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou.  
Faculté des Sciences.  
Département de Mathématiques.



Spécialité : Mathématiques  
Option : Probabilités et statistique  
Mémoire de fin de cycle intitulé :

---

Détection de rupture dans des modèles statistiques , application à un  
modèle de régression

---

Réalisé par :

Iboud Soumeya ép.Himeur

Encadrée par :

M<sup>me</sup> Belkacem Cherifa

Soutenu devant le jury d'examen composé de :

M <sup>r</sup> Fellag Hocine,	Professeur, UMMTO	Président
M <sup>me</sup> Atil Lynda,	Maître de conférence A, UMMTO	Examinatrice
M <sup>me</sup> Belkacem Cherifa,	Maître de conférence B, UMMTO	Rapporteur

Soutenu le : 03/07/2025

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Généralités sur les modèles de rupture</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction	9
1.2 Définition d'une rupture	9
1.3 Types de ruptures	10
1.3.1 Rupture dans la moyenne	10
1.3.2 Rupture dans la variance	10
1.3.3 Rupture dans les coefficients d'un modèle	10
1.3.4 Rupture dans la structure du modèle	11
1.4 Les différents modèles de ruptures	11
1.4.1 La rupture unique	11
1.4.2 La rupture multiple	12
1.4.3 La rupture épidémique	12
1.5 Importance de détection de rupture	13
1.6 Exemples de rupture dans différents domaines d'application	14
1.6.1 Domaine de la santé	14
1.6.2 Domaine climatique	15
1.6.3 Domaine de finance	15
<b>2 Différentes approches de détection de rupture</b>	<b>16</b>
2.1 Introduction	16
2.2 Approche classique de détection de rupture	16
2.2.1 Tests non paramétriques	17
2.2.2 Tests paramétriques	20
2.2.3 Méthode de maximum de vraisemblance(MLE)	23
2.2.4 La Méthode de la Somme Cumulative :	24
2.2.5 La détection de rupture par procédure de contraste pénalisé	24
2.2.6 La règle de Shewhart	24
2.3 Approche Bayésienne	25
2.3.1 Modèle Gaussien	25

2.3.2	Modèle Autorégressif . . . . .	33
2.3.3	Cas où les erreurs suivant une loi normale . . . . .	33
2.3.4	Cas où les erreurs suivant une loi exponentielle . . . . .	41
2.4	Simulation . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Approche Bayésienne de détection de rupture dans un modèle de régression</b>	<b>50</b>
3.1	Introduction . . . . .	50
3.2	Présentation du modèle . . . . .	50
3.3	Estimation Bayésienne . . . . .	51
3.3.1	Les lois a priori . . . . .	51
3.3.2	La fonction de vraisemblance . . . . .	52
3.3.3	La densité a posteriori jointe des paramètres $(\beta_1, \beta_2, \lambda_1, \lambda_2 \text{ et } m)$ .	53
3.3.4	La densité a posteriori marginale de point de rupture $m$ . . . . .	58
3.4	Application et simulation . . . . .	59
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>63</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>64</b>

# *Dédicaces*

Je dédie ce modeste travail :

À **mes chers parents**, piliers de ma vie et source inépuisable d'inspiration, votre amour, votre soutien indéfectible et vos sacrifices ont façonné la personne que je suis aujourd'hui. Je vous suis profondément reconnaissante pour l'éducation précieuse que vous m'avez donnée, qui guide chacun de mes pas. Vous demeurez à jamais gravés dans mon cœur avec une affection infinie.

À mes chères sœurs, **Sarah et Halla**, véritables sources de joie et de motivation au quotidien, merci pour votre présence rayonnante, vos paroles réconfortantes et votre confiance indéfectible. Je vous souhaite un avenir lumineux, empreint de bonheur, de sérénité et de belles réussites.

À mon petit frère **Abd El Barie**, précieux trésor de notre famille, nous te souhaitons de grandir entouré d'amour et de tendresse, et de construire un chemin rempli de bonheur, de succès et d'un avenir lumineux.

À mon compagnon et mon pilier dans les moments de doute, celui qui m'a toujours apporté force, réconfort et confiance. Ta présence constante et ton soutien sans faille ont été essentiels à chaque étape de ce parcours. Merci de croire en moi quand j'en avais le plus besoin et de m'accompagner avec tant d'amour. Ce travail est autant le tien que le mien.

À mes chères tantes **Zahia, Ourida, Razika et Djidji, Aldjia**, pour votre affection, votre sagesse et votre soutien inestimable tout au long de mon parcours. À toute ma famille, pour l'amour sincère, les encouragements et la présence constante qui m'ont portée dans les moments les plus difficiles. Recevez toute ma gratitude et mon affection à travers ce travail, qui vous est dédié du fond du cœur.

À mes chères cousines : **Shakira, Lisa, Khadidja, Hadjer, Amina, Manel, Yasmine, Hanane, Soundous, Aya et Imane**. Merci pour votre affection sincère, vos sourires partagés et votre présence si précieuse. Chacune de vous, à sa manière, a su illuminer mon parcours par sa bienveillance, sa douceur et ses encouragements. Je vous porte dans mon cœur avec une immense tendresse, et je vous souhaite un avenir radieux, empli de bonheur, de paix et de belles réussites.

À ma **belle famille**, dont le soutien, la gentillesse et la bienveillance m'ont profondément touchée. Merci pour votre accueil chaleureux et pour les liens de cœur que vous avez su créer

avec moi. À mes belles-sœurs, **Imane et Céline**, merci pour votre complicité, votre douceur et votre générosité. c'est avec une grande tendresse que je vous dédie une part de ce travail.

À mes chères camarades de la promotion Master 2 Probabilités et Statistique (**Ryma, Hanane, Amel.L, Lisa, Lila, Rachida, Thanina, Amel.K, Lydia, Karima**), vous avez été bien plus que de simples collègues d'études : vous êtes devenues, au fil du temps, une véritable famille. Votre présence a été une source constante de soutien, d'entraide et d'inspiration. Grâce à vous, cette aventure a été rythmée par des moments d'apprentissage intenses, de rires sincères et de souvenirs inoubliables. Chaque instant partagé à vos côtés a enrichi mon parcours, et c'est avec une immense reconnaissance que je vous dédie ce travail, reflet de notre belle complicité.

À mes amies **Randa, Farah, Amira et Fatima, Imane**, pour votre amitié sincère, vos rires partagés et votre soutien constant qui ont illuminé ce parcours. Votre présence a été un véritable trésor, aussi bien dans les moments de doute que dans ceux de joie.

À toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à cette étape de ma vie, votre soutien, vos encouragements et votre bienveillance ont été essentiels et m'ont permis de persévérer, recevez ici l'expression de ma reconnaissance la plus sincère.

# *Remerciements*

Avec l'expression de ma reconnaissance, je remercie **dieu** le tout puissant de m'avoir donnée suffisamment la santé ,la volonté et le courage afin de pouvoir accomplir ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à **mes chers** parents, qui m'ont soutenu et accompagné tout au long de ma vie. Leur appui constant a été le fondement de ma réussite, et ils méritent toute ma reconnaissance ainsi que mon affection profonde.

Je souhaite remercier tout particulièrement ma chère encadrante, **Madame Belkacem Cherifa**, pour son accompagnement précieux et sa patience tout au long de ce travail. Ses conseils avisés et son soutien constant ont été d'une grande aide et m'ont guidée à chaque étape. Sa disponibilité et son expertise ont grandement contribué à la réussite de ce mémoire. Je lui adresse ma sincère gratitude et mon profond respect.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à **Monsieur Fellag Hocine** pour sa disponibilité constante, sa patience exemplaire et ses conseils éclairés. Sa passion et sa générosité dans le partage de son savoir ont été déterminantes pour la réussite de mon travail. Plus qu'un simple enseignant, il a su être pour nous une véritable figure paternelle tout au long de ce parcours. J'adresse également mes sincères remerciements pour avoir accepté d'être président de jury

Je souhaite exprimer ma profonde reconnaissance à **Mme Atil Lynda**, dont l'engagement en tant qu'enseignante a grandement enrichi mon parcours. Sa bienveillance, sa patience et la clarté de ses explications ont constitué un soutien précieux tout au long de ce parcours. Je lui suis sincèrement reconnaissante pour la qualité de son enseignement ainsi que pour sa disponibilité constante. J'adresse également mes sincères remerciements pour avoir accepté d'être examinatrice et d'évaluer ce memoire

Je remercie chaleureusement l'ensemble de l'équipe de formation, ainsi que tous les enseignants, personnels administratifs et techniques, pour leur engagement et leur dévouement, qui ont contribué à créer un environnement propice à l'apprentissage et à l'épanouissement académique.

# Introduction Générale

La détection de ruptures structurelles constitue un enjeu majeur en statistique moderne, de données à des changements. Une rupture désigne un point dans le temps où les caractéristiques d'un modèle changent de manière significative. Cette problématique apparaît dans de nombreux domaines tels que l'économie, la finance, la climatologie ou encore l'ingénierie, où les phénomènes observés peuvent subir des transformations brusques dues à des événements externes ou internes.

Les premières contributions majeures remontent aux travaux pionniers de **Page** dans les années 1950, qui a introduit le test *CUSUM* (Cumulative Sum) pour détecter des changements dans la moyenne d'une suite de variables aléatoires indépendantes, dans le cadre du contrôle de qualité industrielle [24, 25, 26]. Par la suite, **CHERNOFF** et **ZACKS** (1964) ont proposé une approche Bayésienne paramétrique pour détecter un changement de moyenne dans une suite de variables gaussiennes indépendantes [8].

Dans les années 1960-1970, la problématique s'est étendue aux modèles de régression à deux régimes avec rupture unique, où la méthodologie bayésienne a été largement utilisée, notamment par **FERREIRA** (1975) [11]. Plus tard, la détection de ruptures a été appliquée à des séries chronologiques dépendantes, comme les modèles  $AR(p)$  (**Abdelli**, 1993) [1] et les modèles **ARCH** avec rupture (**Plotr**, **Kokoszka** et al., 2000) [30].

Les méthodes se sont ensuite diversifiées pour traiter la détection de ruptures multiples, avec des contributions importantes de **FOTOPOULOS** et al. (2010), **FEARNHEAD** (2006) et **RIGAILL** et al. (2012) [12, 10, 32].

Ce mémoire s'inscrit dans cette thématique en explorant, dans un premier temps, les différents types de ruptures, les principaux modèles permettant leur représentation, ainsi que leurs domaines d'application. Une compréhension claire de ces fondements est indispensable pour aborder les approches plus techniques de détection.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons aux différentes approches de détection des changements structurels. Nous présentons d'abord les méthodes classiques, notamment les tests paramétriques et non paramétriques, tels que le test de Chow, le test *CUSUM*, ainsi que la méthode du maximum de vraisemblance (MLE). Par la suite, nous abordons l'approche Bayésienne, illustrée à travers plusieurs travaux portant sur des modèles ayant subi une rupture dans la moyenne dans un cadre gaussien, ainsi que des séries chronologiques  $AR(1)$  avec des erreurs normales, puis exponentielles.

Enfin, dans le troisième chapitre, nous nous intéressons ainsi à un modèle de régression linéaire simple comportant un seul point de rupture, c'est-à-dire un instant inconnu où les paramètres du modèle changent brutalement. Nous supposons que les erreurs suivent une loi exponentielle, ce qui diffère de l'hypothèse classique de normalité.

Pour estimer ce point de rupture ainsi que les paramètres associés avant et après ce changement, nous adoptons une approche Bayésienne. Cette méthodologie permet d'intégrer l'incer-

titude sur la localisation du point de rupture et sur les paramètres du modèle, en combinant une modélisation probabiliste avec l'utilisation de lois a priori adaptées.

La suite détaille les fondements théoriques de cette approche Bayésienne appliquée au modèle considéré, ainsi que la procédure d'estimation mise en œuvre. Pour illustrer notre travail, nous présenterons également quelques résultats numériques obtenus à partir de données simulées, mettant en évidence la performance de notre méthode dans différentes configurations. Ce travail vise donc à offrir une vision à la fois théorique et appliquée de la détection de ruptures, en mettant en lumière les enjeux méthodologiques, les choix de modélisation, ainsi que les outils statistiques adaptés à cette problématique complexe mais essentielle.

Nous terminons par une conclusion et quelques perspectives de recherche

# Chapitre 1

## Généralités sur les modèles de rupture

### 1.1 Introduction

La notion de rupture occupe une place centrale en statistique, car elle représente un changement structurel pouvant modifier de manière significative la relation entre les variables d'un modèle. Qu'il s'agisse de séries temporelles, de régressions linéaires ou de modèles de comptage, une rupture indique un point de basculement où les paramètres du modèle ne restent plus stables dans le temps. Ce phénomène peut être déclenché par divers facteurs tels que des changements de politique économique, des innovations technologiques, des crises financières, ou encore des événements exceptionnels comme des catastrophes naturelles et changement climatique .

Une rupture d'un modèle paramétrique est définie par un changement de une ou plusieurs de ces caractéristiques. Il peut s'agir par exemple de la moyenne, de la variance, du moment d'ordre  $r$ , de la famille de la distribution... Plusieurs problèmes peuvent être définis similairement.

Ce chapitre propose d'explorer les différents types de ruptures, les principaux modèles utilisés pour leur identification, ainsi que l'importance et les domaines d'application de cette problématique dans divers secteurs.

### 1.2 Définition d'une rupture

**Définition 1.2.1** *On parle de rupture lorsqu'il existe un point ou un instant où le comportement du modèle se transforme de manière notable. Ce point est appelé point de rupture ou point de changement , en anglais il est connu sous le nom de shift point ou change point . Plus formellement, pour une suite de variables aléatoires  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$*

*on dit qu'il y a rupture s'il existe un entier  $m$  :avec  $(1 < m < n-1)$  tel que :*

- *Les variables aléatoire  $(X_1, X_2, \dots, X_m)$  avant le point de rupture suivent une loi de probabilité de fonction de répartition  $F_1(x/\theta_1)$*
- *Les variables aléatoires  $(X_{m+1}, \dots, X_n)$  après le point de rupture suivent une autre loi de probabilité de fonction de répartition  $F_2(x/\theta_2)$ .*

Avec  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont des paramètres inconnus réels ou vectoriels ( $\theta_1 \neq \theta_2$ ).

### 1.3 Types de ruptures

L'identification de points de rupture est essentielle pour comprendre les changements structurels dans une série de données. Ces ruptures peuvent se manifester de diverses manières, selon la nature du phénomène observé. On distingue généralement plusieurs types de ruptures

#### 1.3.1 Rupture dans la moyenne

**Définition 1.3.1** *Une rupture dans la moyenne correspond à un changement soudain et durable du niveau moyen des observations d'une série temporelle ou d'un ensemble de données.*

**Exemple :**

Après une réforme fiscale, le revenu moyen des ménages augmente de façon permanente. Avant la réforme, la moyenne était de 2 000 €, après la réforme, elle passe à 2 400 €.

**Conséquences :**

- L'ancienne moyenne ne permet plus de faire des prévisions fiables.
- Nécessite souvent de recalibrer les modèles ou d'introduire des variables indicatrices pour tenir compte du changement.

#### 1.3.2 Rupture dans la variance

**Définition 1.3.2** *Il s'agit d'une modification brutale de la dispersion des données autour de la moyenne, c'est-à-dire une augmentation ou une diminution soudaine de la (volatilité).*

**Exemple :** Après une crise financière, la volatilité des rendements boursiers augmente fortement, ce qui se traduit par une variance plus élevée des cours de bourse.

**Conséquences :**

- Les modèles supposant une variance constante (homoscédasticité) deviennent inadaptés
- Peut nécessiter l'utilisation de modèles à variance conditionnelle (ex : modèles ARCH/-GARCH).

#### 1.3.3 Rupture dans les coefficients d'un modèle

**Définition 1.3.3** *Ce type de rupture se produit lorsque la relation entre les variables explicatives et la variable dépendante change, autrement dit, les coefficients estimés dans un modèle ne sont plus stables dans le temps.*

**Exemple :**

La sensibilité (bêta) d'un actif financier par rapport à un indice boursier change après une réforme réglementaire ou un choc économique.

**Conséquences :**

- Les modèles prédictifs perdent en précision.
- Il peut être nécessaire de réestimer les coefficients ou de recourir à des modèles à coefficients variables dans le temps.

### 1.3.4 Rupture dans la structure du modèle

**Définition 1.3.4** *c'est la structure même du modèle qui change, par exemple le passage d'un modèle autorégressif d'ordre 1 (AR(1)) à un modèle d'ordre 2 (AR(2)), ou encore un changement de la distribution des erreurs.*

**Exemple :** Avant une crise, les rendements suivent un modèle AR(1), mais après la crise, ils suivent un modèle AR(2) ou passent d'une distribution normale à une distribution à queues épaisses (loi de Student).

**Conséquences :**

- Le modèle utilisé auparavant n'est plus approprié pour décrire la dynamique des données.
- Il faut réévaluer le choix du modèle et éventuellement en adopter un nouveau.

## 1.4 Les différents modèles de ruptures

### 1.4.1 La rupture unique

La rupture unique se produit lorsqu'un changement soudain survient dans un modèle statistique ou une série chronologique à un moment précis. Il peut y avoir un changement au niveau de la distribution ou simplement dans l'un de ses paramètres.

**Définition 1.4.1** *On considère qu'il y a une rupture dans une suite de variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  de fonctions de répartition  $F_i(x | \theta_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , s'il existe un entier  $m$  tel que  $1 < m < n - 1$  :*

$$X_i \sim \begin{cases} F_1(x | \theta_1), & \text{pour } i = 1, \dots, m, \\ F_2(x | \theta_2), & \text{pour } i = m + 1, \dots, n, \end{cases}$$

avec  $\theta_1$  et  $\theta_2$  des paramètres inconnus, réels ou vectoriels, et tels que  $\theta_1 \neq \theta_2$ .

### Exemple

La figure suivante représente le cas d'une loi exponentielle avec rupture unique dans la moyenne.

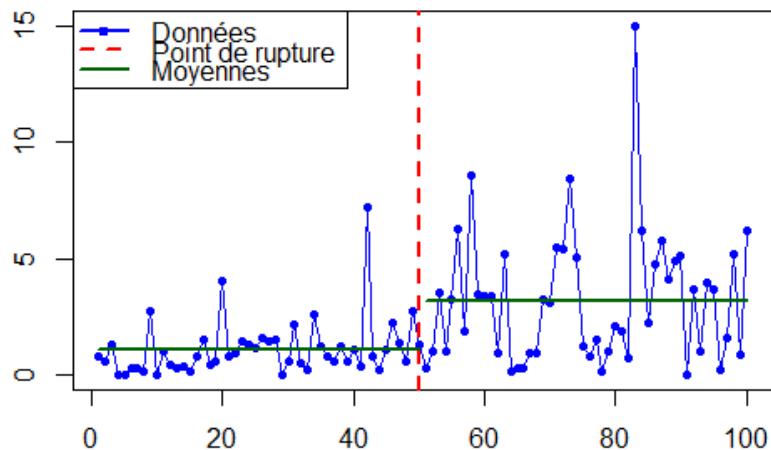


FIGURE 1.1 – La figure représente une rupture unique

### 1.4.2 La rupture multiple

Correspond à plusieurs points de rupture dans une même série ou un même modèle.

**Définition 1.4.2** *On dira qu'une suite de variable aléatoire admet des ruptures multiple s'il existe des entiers  $m, \dots, q$ , avec  $(1 \leq m_1 \leq m_q \leq n)$  tels que :*

$$\theta_1 = \dots = \theta_{m_1} \neq \theta_{m_1+1} = \dots = \theta_{m_q} \neq \theta_{m_q+1} = \dots = \theta_n$$

### Exemple

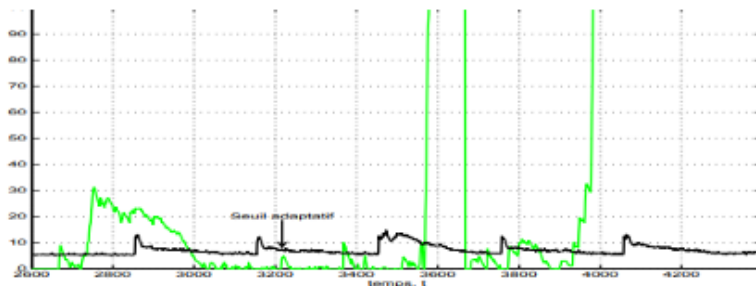


FIGURE 1.2 – La figure représente une série ayant subi plusieurs rupture par rapport au seuil adaptatif.

### 1.4.3 La rupture épidémique

Dans lequel le changement est temporaire, les données changent pendant une période, puis reviennent à leur état initial.

**Définition 1.4.3** *Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires réelles de répartition continues respective  $F_1, \dots, F_n$ .*

Considérons le modèle épidémique suivant : Il existe des entiers  $m$  et  $q$  ( $1 \leq m \leq q \leq n$ ) tels que :

$$F_1 = F_2 = \dots = F_m = F_{q+1} = \dots = F_n = F$$

$$F_{m+1} = \dots = F_q = G$$

Avec  $F \neq G$  c'est-à-dire

$$\underbrace{F_1 = F_2 = \dots = F_m}_F = \underbrace{F_{m+1} = \dots = F_q}_G = \underbrace{F_{q+1} \dots = F_n}_F$$

on note  $l=q-m$  la longueur de l'épidémie.

Et  $m, q$  les bornes de localisation

## Exemple

La figure suivante indique une rupture épidémique.

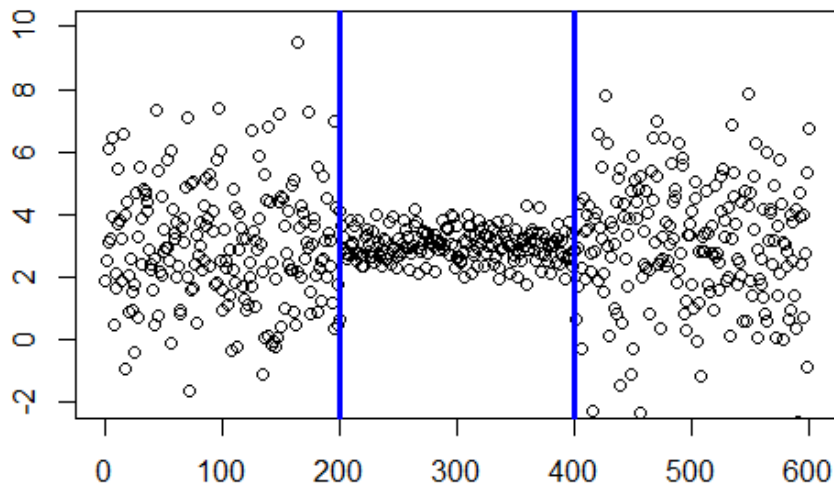


FIGURE 1.3 – La figure indique une rupture épidémique

## 1.5 Importance de détection de rupture

Ignorer la présence d'une rupture au sein des données peut entraîner des estimations biaisées, des erreurs de prédiction importantes, ainsi que des conclusions erronées. Il est donc essentiel de vérifier la stabilité des modèles étudiés afin de garantir la fiabilité des analyses et des résultats obtenus.

### Garantir la validité des modèles

Une rupture correspond à un changement significatif dans la distribution des données (moyenne, variance, etc.). Si elle n'est pas détectée, les modèles statistiques ou économétriques basés sur l'hypothèse de stabilité deviennent invalides, ce qui conduit à des estimations biaisées et des prévisions erronées.

### **Améliorer la précision des inférences**

La présence de ruptures peut fausser les tests statistiques classiques (tests d'hypothèses, intervalles de confiance). Détecter ces ruptures permet d'adapter les méthodes d'analyse (par exemple, segmenter la série en sous-périodes homogènes) et d'obtenir des résultats plus fiables.

### **Anticiper et comprendre les changements structurels**

Identifier les instants où surviennent des ruptures aide à comprendre les phénomènes sous-jacents (chocs économiques, crises, changements réglementaires). Cela permet d'ajuster les politiques ou stratégies en conséquence.

### **Éviter des conclusions erronées**

Ignorer une rupture peut conduire à interpréter un changement temporaire comme une tendance durable, ou inversement, ce qui fausse la prise de décision.

## **1.6 Exemples de rupture dans différents domaines d'application**

La notion de point de rupture joue un rôle essentiel dans l'analyse statistique de phénomènes réels, où des changements soudains ou progressifs peuvent altérer la structure d'un modèle. Ces ruptures, souvent provoquées par des événements exogènes ou des évolutions internes au système étudié, apparaissent dans de nombreux domaines d'application. Qu'il s'agisse de l'économie, de la finance, du climat ou encore de la santé, la détection de ces changements permet de mieux comprendre, anticiper et modéliser les comportements des séries observées. Dans ce qui suit nous présentons quelques exemples concrets

### **1.6.1 Domaine de la santé**

#### **Exemple 1**

Dans le domaine de la santé, un point de rupture peut être observé lors de l'évaluation de l'impact d'une politique publique sur un indicateur sanitaire. Par exemple, supposons qu'un gouvernement introduise une loi anti-tabac en janvier 2020, interdisant de fumer dans les lieux publics. En analysant les données mensuelles d'admissions hospitalières pour maladies respiratoires de 2018 à 2022, on peut constater une diminution significative du nombre de cas à partir de 2020. Ce changement dans la tendance constitue un point de rupture, marquant une modification du comportement de la série statistique. Il peut être modélisé par un changement dans les paramètres d'un modèle de régression ou de séries temporelles, permettant ainsi d'attribuer statistiquement une partie de l'évolution observée à l'effet de la politique de santé publique. L'identification de ce point de rupture permet d'évaluer l'efficacité de la mesure et de soutenir des décisions futures en matière de prévention.

#### **Exemple 2**

La pandémie de la COVID-19 a constitué une source majeure de rupture dans de nombreux phénomènes observés en santé publique. Par exemple, si l'on analyse l'évolution hebdomadaire du nombre de consultations médicales non urgentes dans les hôpitaux entre 2018 et 2021, on observe un changement brutal à partir de mars 2020, date à laquelle les premiers confinements

et mesures sanitaires strictes ont été instaurés. Ce changement soudain dans la tendance ou le niveau de la série temporelle peut être interprété comme un point de rupture, traduisant l'impact direct de la pandémie sur le comportement des patients et sur l'organisation des soins. Statistiquement, cette rupture peut être modélisée par un changement dans les paramètres d'un modèle (par exemple, dans une régression ou un modèle ARIMA), permettant d'isoler l'effet de la crise sanitaire sur les dynamiques habituelles du système de santé. Cette analyse est essentielle pour comprendre l'ampleur des perturbations causées par la COVID-19 et orienter les stratégies de résilience du secteur.

### 1.6.2 Domaine climatique

#### Exemple 1

**Point de rupture dans les vagues de chaleur extrêmes (2023)** En 2023, de nombreux pays ont connu des vagues de chaleur sans précédent, avec des températures records enregistrées en Europe du Sud, en Chine et en Amérique du Nord. L'analyse des données climatiques sur les températures maximales journalières révèle un changement statistique significatif à partir de cette année, traduisant une fréquence et une intensité accrues des vagues de chaleur. Ce phénomène peut être interprété comme un point de rupture dans la distribution des extrêmes climatiques, marquant une transition vers un nouveau régime thermique. Ce type de rupture peut être détecté à l'aide de méthodes basées sur les valeurs extrêmes ou les tests de rupture dans les moments de distribution. Ce signal fort alerte sur l'entrée dans une nouvelle phase du changement climatique, aux conséquences sanitaires, agricoles et économiques majeures.

#### Exemple 2

**Rupture dans le niveau des océans** Entre 2022 et 2024, des études satellites ont montré une accélération soudaine de l'élévation du niveau des mers, notamment dans certaines régions du Pacifique et de l'océan Indien. Cette accélération constitue un point de rupture dans la tendance observée depuis les années 1990. Elle est attribuée non seulement à la fonte accrue des glaces, mais aussi à un réchauffement accéléré des océans supérieurs. Ce changement structurel est modélisable par un modèle de régression avec changement de pente ou par une analyse de rupture multiple dans une série temporelle. Ce point de rupture a des implications directes pour les zones côtières, la gestion du risque d'inondation et la planification urbaine.

### 1.6.3 Domaine de finance

Dans le domaine de la finance, les points de rupture permettent d'identifier des changements structurels dans les marchés, souvent liés à des événements économiques ou politiques majeurs. Un exemple marquant est celui de la crise financière de mars 2020, déclenchée par la pandémie de COVID-19. À cette période, les marchés boursiers mondiaux, comme le SP 500 ou l'Euro Stoxx 50, ont subi une chute brutale suivie d'une reprise rapide grâce aux politiques de soutien mises en place. En analysant la volatilité des rendements journaliers, on observe un changement soudain dans le comportement de la série, caractérisé par une augmentation marquée de la variance. Ce point de rupture peut être détecté statistiquement à l'aide de modèles GARCH avec changement de régime ou de tests de rupture sur les moments de la distribution. L'identification de cette rupture est essentielle pour ajuster les modèles de risque, revaloriser les portefeuilles et adapter les stratégies de couverture.

## Chapitre 2

# Différentes approches de détection de rupture

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse plus particulièrement à l'inférence statistique et aux méthodes de détection des ruptures, qui permettent non seulement d'identifier la présence et la localisation des changements, mais aussi d'estimer leurs effets sur les modèles sous-jacents.

Pour répondre à la complexité des données modernes, un large éventail de méthodes de détection a été proposé. Ces approches varient selon qu'elles sont paramétriques ou non paramétriques, appliquées de manière *a posteriori* ou en temps réel, et selon les cadres théoriques sur lesquels elles reposent : approches classiques et méthodes Bayésiennes.

Les méthodes classiques s'appuient généralement sur des tests statistiques appliqués à des modèles linéaires ou de régression, comme le test de Chow([9]), le test CUSUM ou les approches fondées sur la log-vraisemblance. Ces outils sont bien adaptés aux situations où le modèle est correctement spécifié. En parallèle, les approches Bayésiennes offrent une plus grande flexibilité en intégrant l'incertitude liée à la localisation des ruptures et en permettant l'estimation conjointe des paramètres et des points de changement.

### 2.2 Approche classique de détection de rupture

La plupart des méthodes existantes supposent que le point de rupture correspond à l'un des instants d'observations et tentent de répondre à la question suivante : ya-t-il une rupture dans le modèle considéré ou non?. Ces procédures sont en général basées sur les tests d'hypothèses. Dans le cas où l'hypothèse nulle est rejetée, certains auteurs s'intéressent à l'estimation de ce point de rupture.

Dans la littérature, de nombreuses statistiques de tests de détection de ruptures ont été étudiées, telles que les statistiques basées sur la moyenne, celles basées sur le maximum de vraisemblance, ou encore celles proposées par, qui ont introduit des méthodes fondées sur les rangs de la fonction de répartition empirique. Pour déterminer la loi de la statistique de test, ont proposé des méthodes asymptotiques.

### 2.2.1 Tests non paramétriques

Dans cette section, quelques tests de rupture déjà présents dans la littérature seront décrits. Ces tests servent, comme leur nom l'indique, à détecter si un jeu de données possède ou non une rupture

#### Test Pettitt 1979

Nous allons présenter un test qui fait la détection de rupture au niveau de la fonction de répartition  $F(x)$ , le test de Pettitt (1979) ([29]). Ce test est considéré comme un test non paramétrique, il est basé sur le test de Mann-Whitney ([21]), qui est considéré comme un test de rang.

La statistique de test est donnée par :

$$K_n = \max_{1 \leq t < N} |U_{t,N}|$$

$U_{t,N}$  est la statistique de test Mann-Whitney, le test a comme hypothèse nulle :

$$H_0 : \text{Il n'existe pas de rupture.}$$

C'est à dire que le processus admet une seule distribution  $F(x)$  et  $\tau = N$ .

Contre l'hypothèse alternative,

$$H_1 : \text{Il existe une seule rupture à l'instant } \tau,$$

et le processus admet deux fonctions de distribution différentes:

$$F_1(x)_{(X_1, \dots, X_\tau)} \neq F_2(x)_{(X_{\tau+1}, \dots, X_N)}$$

Pettitt (1979) a donné la probabilité de dépassement approximative d'une valeur  $k$  par :

$$P(K_n > k) \simeq 2 \exp\left(\frac{-6k^2}{N^3 + N^2}\right)$$

Cette probabilité doit être comparée avec un risque  $\alpha$  de première espèce, c'est-à-dire : On rejette  $H_0$  si la valeur de la statistique de test est inférieure à  $\alpha$ , sinon on l'accepte.

#### Test de Lombard 1987

Supposons que l'on a des variables aléatoires  $y_1, \dots, y_T$  indépendantes qui suivent chacune une distribution continue  $F(y, \theta_1), \dots, F(y, \theta_T)$ .

On essaie d'étudier s'il y a un changement tel que les paramètres  $\theta_i$  ( $i \in 1, \dots, \tau$ ) soient de la forme  $\theta_1 = \dots = \theta_\tau \neq \theta_{\tau+1} = \dots = \theta_T$ .

Mais on a besoin d'un modèle plus général si les paramètres  $\theta_i$  changent graduellement dans un intervalle.

Alors, Lombard (1987) a introduit ce modèle :

$$\theta_i = \begin{cases} \rho & \text{si } i = 1, \dots, \tau_1; \\ \rho + \frac{i - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \delta & \text{si } i = \tau_1 + 1, \dots, \tau_2; \\ \rho + \delta & \text{si } i = \tau_2 + 1, \dots, T. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

pour  $\tau_1 < \tau_2$   
 $\rho$  et  $\delta$  inconnus.

Lombard (1987) utilise l'hypothèse suivante :

$$\begin{cases} H_0 : \delta = 0 \\ H_1 : \delta \neq 0 \end{cases}$$

Pour commencer, voici quelques notations :

- i)  $r_i$  est le rang de la variable aléatoire  $y_i$ .
- ii)  $\varphi$  représente une fonction de score avec

$$0 < \int_0^1 \varphi^2(w) dw < \infty,$$

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{T+1} \sum_{r=1}^T \varphi\left(\frac{r}{T+1}\right),$$

$$A^2 = \frac{1}{T+1} \sum_{r=1}^T \left[ \varphi\left(\frac{r}{T+1}\right) - \bar{\varphi} \right]^2$$

Alors, le score de classement de  $y_i$ , noté  $s(r_i)$ , est :

$$s(r_i) = \frac{1}{A} \left[ \varphi\left(\frac{r_i}{T+1}\right) - \bar{\varphi} \right] \quad \text{pour } i = 1, \dots, T.$$

Donc Lombard (1987) a introduit le test statistique suivant :

$$v_{\tau_1, \tau_2} = \sum_{j=\tau_1+1}^{\tau_2-1} S(r_j) = (\tau_2 - \tau_1) \sum_{i=1}^{\tau_1} S(r_i) + \sum_{i=\tau_1+1}^{\tau_2-1} (\tau_2 - i) S(r_i)$$

qui est le test de rang localement le plus puissant pour tester l'hypothèse nulle versus une hypothèse alternative unilatérale si  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont connus. La statistique dépend indirectement des  $y_i$  en utilisant le rang de  $y_{i,t}$   $i = 1, \dots, T$ . S'ils sont inconnus, Lombard propose le test suivant :

$$q_{1,T} = \sum_{t_1=1}^{T-1} \sum_{t_2=t_1+1}^T v_{t_1, t_2}^2$$

Si on observe une grande valeur, on rejette l'hypothèse nulle. Lorsque  $T$  tend vers l'infini, on note :

$$\frac{q_{1,T}}{T^5} \rightarrow q_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^4} Z_n^2 \quad \text{sous } H_0.$$

où  $Z = (Z_1, Z_2, \dots)^t$  est un vecteur de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale standard. Les points critiques pour différentes valeurs de  $\alpha$  et pour toute valeur de  $T$  sont présentés dans le tableau 2.1

Si on est intéressé à tester l'hypothèse nulle versus une hypothèse alternative unilatérale ( $\delta > 0$  ou  $\delta < 0$ ), Lombard propose trois différents scores :

$\alpha$	0.1	0.075	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
$q_1$	0.287	0.334	0.402	0.515	0.662	0.806	1.230
$q_{1,T}/T^5$	0.289	0.334	0.402	0.511	0.662	0.806	1.230

TABLE 2.1 – Valeurs critiques de  $q_1$  et  $q_{1,T}/T^5$

- i) Le score de Wilcoxon :  $\phi_1(u) = 2u - 1$ , pour tester des changements dans la position (une tendance centrale),
- ii) Le score de Mood :  $\phi_2(u) = (2u - 1)^2$ , pour tester les changements d'échelle,
- iii) Le score logarithmique :  $\phi_3(u) = \log(1 - u)$  (*les auteurs utilisent  $-\log(1 - u)$* ), pour tester des changements d'échelle dans une distribution ayant pour domaine  $[0, \infty)$ .

Pour le score de Wilcoxon, la fonction de score  $s(r_i)$  est équivalente à :

$$s(r_i) = \sqrt{\frac{12}{T(T+1)}} \left( r_i - \left\lfloor \frac{T+1}{2} \right\rfloor \right).$$

Lorsqu'on veut tester s'il y a l'apparition d'une tendance, c'est-à-dire que  $\tau_2 = T$  et que  $\tau_1 = \tau$ , la statistique du test de Lombard est modifiée tel que  $t_2 = T$  :

$$q_{1,T}^* = \sum_{t=1}^{T-1} v_{t,T}^2,$$

et, lorsque  $T$  tend vers l'infini, sous l'hypothèse nulle :

$$\frac{q_{1,T}^*}{T^4} \longrightarrow q_1^* = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n Z_n^2,$$

où  $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > 0$  sont les solutions positives réelles de

$$\tan\left(\gamma^{\frac{-1}{4}}\right) + \tanh\left(\gamma^{\frac{-1}{4}}\right) = 0.$$

Les points critiques pour différentes valeurs de  $\alpha$  et pour toute valeur de  $T$  sont présentés dans le tableau 2.2.

$\alpha$	0,1	0,075	0,05	0,025	0,01
$q_1^*$	0,0879	0,1027	0,1242	0,162	0,21
$\frac{q_{1,T}^*}{T^4}$	0,0882	0,1026	0,1242	0,158	0,2035

TABLE 2.2 – Valeurs critiques de  $q_1^*$  et  $\frac{q_{1,T}^*}{T^4}$

Lorsqu'on veut tester s'il y a un changement abrupt, c'est-à-dire que  $\tau_1 = \tau$  et  $\tau_2 = \tau + 1$ , toujours en utilisant la fonction de score de Wilcoxon, la statistique de test de Lombard devient :

$$q_{1,T}^0 = \sum_{t=1}^{T-1} v_{t,t+1}^2 = \sum_{t=1}^{T-1} \left[ \sum_{i=1}^t S(r_i) \right]^2$$

et, sous l'hypothèse nulle, la distribution limite de  $\frac{q_{1,T}^0}{T^2}$  converge vers la distribution limite du test d'adéquation de Cramer von Mises ( $q_1^0$ ). Une fois de plus, pour toute valeur de  $T$ , les points critiques sont présentés dans le tableau 2.3.

$\alpha$	0,1	0,075	0,05	0,025	0,01
$q_{1,T}^0$	0,3473	0,3939	0,4614	0,5608	0,7435
$\frac{q_{1,T}^0}{T^2}$	0,3431	0,3870	0,4521	0,5596	0,7022

TABLE 2.3 – Valeurs critiques de  $q_{1,T}^0$  et  $q_{1,T}^0/T^2$

## 2.2.2 Tests paramétriques

### Test de Jarušková

Le test de Jarušková (1997) ([18]) est un test paramétrique de type « maximum ». Tout comme le test de Lombard (1987), supposons que l'on observe des variables aléatoires  $y_1, \dots, y_T$ .

L'hypothèse nulle stipule que  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ .

L'hypothèse alternative stipule qu'il existe un point dans le temps  $\tau \in \{1, \dots, T-1\}$  qui fait en sorte que le modèle est :

$$y_i \sim \begin{cases} N(\mu_1, \sigma^2) & \text{si } i = 1, \dots, \tau; \\ N(\mu_2, \sigma^2) & \text{si } i = \tau + 1, \dots, T; \end{cases} \quad (2.2.2)$$

où  $\mu_1 \neq \mu_2$ .

En supposant  $\sigma^2$  inconnu, le test de Jarušková, noté  $J(T)$ , est le suivant :

$$J(T) = \max_{1 \leq \tau < T} |J_\tau| = \max_{1 \leq \tau < T} \frac{1}{S_\tau} \sqrt{\frac{(T-\tau)\tau}{T}} |\bar{y}_\tau - \bar{y}_\tau^*|,$$

où

$$\bar{y}_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{\tau} y_j, \quad \bar{y}_\tau^* = \frac{1}{T-\tau} \sum_{j=\tau+1}^T y_j,$$

$$S_\tau = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{\tau} (y_j - \bar{y}_\tau)^2 + \sum_{j=\tau+1}^T (y_j - \bar{y}_\tau^*)^2}{T-2}}.$$

L'hypothèse nulle est rejetée lorsque la statistique  $J(T)$  est plus grande qu'une certaine valeur critique (voir le tableau 2.4).

Si l'hypothèse nulle est vraie, alors  $\bar{y}_\tau$  et  $\bar{y}_\tau^*$  devraient être d'environ la même valeur. Jarušková (1997) obtient celles-ci par simulations. Une statistique tronquée peut aussi être utilisée :

$$J_1(T) = \max_{t_0 T \leq \tau \leq (1-t_0)T} |J_\tau|,$$

où :  $t_0 \in (0; 0,5)$  (Jarušková utilise  $t_0 = 0,05$ ).

Jarušková (1997) obtient aussi les valeurs critiques par simulations et sont aussi présentées dans le tableau 2.4.

T	$J(T)$	$J_1(T)$	$J(T)$	$J_1(T)$
	$\alpha = 0,05$		$\alpha = 0,01$	
50	3,15	3,08	3,76	3,69
100	3,16	3,06	3,71	3,62
200	3,19	3,07	3,72	3,61
300	3,21	3,08	3,73	3,62
500	3,24	3,09	3,73	3,62

TABLE 2.4 – Valeurs critiques de  $J(T)$  et  $J_1(T)$

### Test du rapport de vraisemblance

Posons :  $S_i = x_1 + x_2 + \dots + x_i$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$ .

La racine carrée du log de la statistique du rapport de vraisemblance pour ce test est donnée par :

$$\max_{1 \leq K < n} \left| \left[ \frac{KS_n/n - S}{\sqrt{K(1 - K/n)}} \right] \right|$$

L'expression  $\left[ \frac{|KS_n/n - S|}{\sqrt{K(1 - K/n)}} \right]$  représente la différence entre les moyennes des  $K$  premières observations et les  $n - K$  dernières, c'est-à-dire un test d'égalité de deux moyennes de deux échantillons gaussiens.

Le maximum est recherché pour retrouver le point qui sépare l'échantillon en deux sous-échantillons de moyennes différentes.

Ce test ([17]) est invariant si on change l'emplacement des observations, on peut aussi réduire le nombre d'observations et dans ce cas le test ne dépend pas directement des  $x_i$  mais des différences  $y_i = x_i - x_1$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ .

Pour des valeurs données de  $m$  et de  $\delta = \mu_i - \mu_1$ , le rapport de vraisemblance de  $y$  sous  $H_1$  et  $H_0$  est :

$$\exp \left\{ \delta (mS_n/n - S) - \frac{1}{2} m(1 - m/n) \delta^2 \right\} \tag{2.2.3}$$

En s'intéressant au test unilatéral, on suppose que le signe de  $d$  est connu, voir  $\delta > 0$ , dans ce cas la statistique du rapport de vraisemblance peut s'écrire sans valeur absolue et donc la généralisation suivante peut être considérée comme une statistique de ce test :

$$\max_{n_0 \leq K < n_1} [KS_n/n - S] \{K(1 - K/n)\}^{1/2}$$

avec :  $1 \leq n_0 < n_1 < n$

### Test de Pettit(1980)

Reprenons la statistique précédente (2.2.3) :

$$\exp \left\{ \delta (mS_n/n - S_m) - \frac{1}{2} m(1 - m/n) \delta^2 \right\}$$

En dérivant le log de cette dernière expression, avec  $\delta = 0$  on obtient la statistique suggérée par Pettitt en 1980([17]) qui est :

$$\max_{1 \leq K \leq n} (KS_n/n - S_K)$$

### Test de Brown et al (1975)

Est un test statistique utilisé pour détecter des ruptures structurelles dans une série temporelle, notamment des changements dans la moyenne ou la pente d'un modèle de régression. La statistique de ce test est celle proposée par Brown et Al en 1975 ([7]) qui est définie comme suit :

$$\max_{1 < K < n} \frac{(\tilde{S}_{n-1} - \tilde{S}_{n-K})}{(K-1)^{1/2}}$$

avec

$$\tilde{S}_i = z_1 + z_2 + \dots + z_i$$

où

$$z_i = \frac{i}{\sqrt{i+1}}(x_{i+1} - \bar{x}_i),$$

on remarque que sous  $H_0$ , les  $z_i$  sont des variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée et réduite

### Test de Chernoff et Zacks, 1964

Le test de Chernoff et Zacks (1964)([8])([16]) est une procédure bayésienne paramétrique destinée à détecter un changement (rupture) dans la moyenne d'une série de variables aléatoires indépendantes et normalement distribuées avec variance connue  $\delta$  tend vers zéro, on suppose que le point de rupture  $i$  suit une loi a priori uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$

Le changement de moyenne  $\theta$  est proche de zéro, ce qui permet de développer une statistique de test dite quasi-bayésienne.

La statistique de test est construite à partir des résidus récursifs  $z_i$ , qui mesurent localement les écarts par rapport à la moyenne initiale, est donnée par :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \{i(i+1)\}^{1/2} z_i$$

où

$z_i$  est le résidu récursif .

### Test de Chow (1960)(Cas de régression)

Le test de Chow(1960) ([9]) permet de détecter une rupture structurelle à un point donné dans un modèle de régression linéaire. Il compare la qualité d'ajustement d'un modèle global avec celle de deux modèles distincts estimés sur deux sous-périodes.

Soit un modèle de régression linéaire global sur  $N = N_1 + N_2$  observations, et deux modèles séparés sur les sous-échantillons de tailles  $N_1$  et  $N_2$ .

On note :

- $SCR$  la somme des carrés des résidus du modèle global.
- $SCR_1$  et  $SCR_2$  les sommes des carrés des résidus des modèles sur les deux sous-périodes.
- $k$  le nombre de paramètres estimés dans chaque modèle.

La statistique de test est donnée par :

$$F = \frac{(SCR - (SCR_1 + SCR_2))/k}{(SCR_1 + SCR_2)/(N_1 + N_2 - 2k)}$$

Sous l'hypothèse nulle d'égalité des coefficients (pas de rupture), cette statistique suit une loi de Fisher  $F(k, N_1 + N_2 - 2k)$ .

Si  $F$  est supérieure à la valeur critique pour un niveau de confiance donné, on rejette l'hypothèse nulle et on conclut à une rupture structurelle au point considéré.

### Test de Reeves et al(2007)(Cas de régression)

Les tests de Reeves et al. (2007)([31]) détectent un changement de moyenne dans une série de données, notamment un changement dans la moyenne ou la tendance d'un modèle de régression. en utilisant les sommes des carrés des résidus, comparées à une loi de Fisher. Sous l'hypothèse nulle, toutes les observations sont indépendantes et identiquement distribuées. Sous l'hypothèse alternative, il existe un point de rupture  $\tau$  où la moyenne change.

Le modèle s'écrit :

$$y_i = \begin{cases} \mu_1 + \beta_1 x_i + \epsilon_i & \text{si } i = 1, \dots, \tau \\ \mu_2 + \beta_2 x_i + \epsilon_i & \text{si } i = \tau + 1, \dots, T \end{cases} \quad (2.2.4)$$

avec  $x_1 \leq \dots \leq x_T$ ,  $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , et  $\beta_1, \beta_2, \mu_1, \mu_2, \tau$  inconnus.

Une contrainte de continuité impose que  $\mu_2 = \mu_1 + (\beta_1 - \beta_2)x_\tau$ .

### 2.2.3 Méthode de maximum de vraisemblance(MLE)

Soit  $X_1, \dots, X_n$  une suite de variables aléatoires continues, indépendantes et ordonnées dans le temps, définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Soit  $F(\cdot, \lambda)$ , pour  $\lambda \in \Theta$ , la fonction de répartition supposée absolument continue, et soit  $f(\cdot, \lambda)$  la fonction de densité de probabilité correspondante. Supposons que  $\lambda$  change de  $\lambda_0$  à  $\lambda_1$  (avec  $\lambda_0 \neq \lambda_1$ ) à un instant inconnu  $m$ , tel que :

$$f(X_i) = \begin{cases} f(x_i; \lambda_0) & \text{pour } \lambda_0 \in \Theta, \quad i = 1, \dots, m, \\ f(x_i; \lambda_1) & \text{pour } \lambda_1 \in \Theta, \quad i = m + 1, \dots, n, \end{cases}$$

où  $m \in \{1, \dots, n - 1\}$ .

Notre problème est d'estimer le point de changement  $m$  lorsque  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$  sont inconnus. Même lorsque  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$  sont connus, ce problème est réputé complexe. Nous dérivons d'abord l'estimateur du maximum de vraisemblance pour  $m$ , en suivant l'approche de Hinkley (1972)([14]).

Pour des valeurs fixes et connues de  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$ , la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$L(m) = \prod_{i=1}^m f(X_i; \lambda_0) \prod_{i=m+1}^n f(X_i; \lambda_1).$$

Suivant Bhattacharya (1994)([4])([13]), l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $m$  est donné par :

$$\hat{m}_n = \arg \max_{1 \leq j \leq n-1} \sum_{i=1}^j \log \left( \frac{f(X_i; \lambda_0)}{f(X_i; \lambda_1)} \right).$$

### 2.2.4 La Méthode de la Somme Cumulative :

La règle CUSUM Depuis son introduction par Page [24], cette méthode a été développée par de nombreuses littératures, grâce à son intérêt et sa simplicité. Plusieurs résultats d'optimalité étaient obtenus, citons Moustakides (1986)([22]) Lorden (1971)([20]), l'hypothèse fondamentale de la règle est l'indépendance entre les observations. D'autres travaux étaient proposés avec une dépendance entre les variables. Le principe de la règle de CUSUM est la maximisation du rapport entre la vraisemblance sous l'hypothèse  $H_0$  et la vraisemblance sous l'hypothèse  $H_1$ , qui sera comparé avec une valeur critique choisie par l'expérimentateur, le livre de Basseville, M. et Nikiforov est considéré comme une référence de CUSUM.

### 2.2.5 La détection de rupture par procédure de contraste pénalisé

C'est la méthode la plus courante pour la détection d'une ou plusieurs ruptures. Le principe de cette méthode est la minimisation ou maximisation d'un contraste construit à partir des données du processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ , en ajoutant une fonction bien choisie qui dépend du nombre de paramètres de contraste.

Marc Lavielle et al. (2000)([19]), dans leurs fameux travaux sur la détection de rupture au niveau du spectre d'un processus stationnaire, se basent sur un contraste pénalisé pour détecter les ruptures. Ce contraste est construit à partir de la fonction log-vraisemblance (contraste de Whittle), qui a fourni une vitesse de convergence en  $O_p(n^{-1})$ .

Bardet et al. (2002)([2]) proposent une autre vision du contraste utilisé : ils ont construit un contraste à partir de la régression "log-log" de la variance des coefficients d'ondelettes. Leur vitesse de convergence était acceptable mais pas optimale. La détection de rupture par programmation dynamique a aussi été abordée dans Bardet et al., le contraste pénalisé étant construit à partir de la fonction de quasi-vraisemblance, qui a fourni une vitesse de convergence proche de  $O_p(1)$ . Dans notre travail, nous adaptons le contraste pénalisé utilisé dans Bardet et al. avec plusieurs pénalités, mais nous avons stabilisé sur une fonction de type  $2\sqrt{n}$ .

### 2.2.6 La règle de Shewhart

La règle de Shewhart repose sur le même principe général de détection de rupture que la règle CUSUM. Le rapport de vraisemblance sur un échantillon de taille  $n$  est également utilisé ici

mais cette règle est considérée comme une *méthode en ligne* (ou *on-line*), que nous aborderons plus en détail par la suite.

Si le rapport de vraisemblance, calculé sous les deux hypothèses  $H_0$  et  $H_1$ , est significatif par rapport à une valeur seuil déterminée à partir d'une table statistique, alors une alarme est déclenchée. Dans ce cas, on rejette l'hypothèse  $H_0$  et on accepte l'hypothèse  $H_1$  : il s'agit d'un *temps d'arrêt*.

Sinon, on reconstruit un nouvel échantillon entre  $n$  et  $t > n$  et on répète la procédure.

### 2.3 Approche Bayésienne

Dans cette section, nous citons quelques résultats d'estimation d'un point de rupture de certains modèles, ayant subi un changement de structure, par la méthodologie Bayésienne.

L'analyse bayésienne, introduite par Thomas Bayes puis approfondie par Pierre-Simon de Laplace, consiste à modéliser l'incertitude portant sur un paramètre inconnu à l'aide des outils du calcul des probabilités. Elle débute par la formulation d'une hypothèse sur ce paramètre, représentée par une loi de probabilité dite *a priori*, qui traduit les connaissances disponibles avant l'observation des données.

Contrairement à l'approche fréquentiste, qui considère le paramètre comme une valeur fixe mais inconnue, l'analyse bayésienne le traite comme une variable aléatoire.

Une fois les données observées, cette loi *a priori* est mise à jour grâce à la formule de Bayes, pour donner naissance à une nouvelle loi, appelée distribution *a posteriori*, qui reflète l'état actualisé des connaissances sur le paramètre après prise en compte des observations.

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  une suite de variables aléatoires indépendantes de paramètre  $\theta$ .

La densité *a posteriori* du modèle  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est définie par :

$$\pi(\theta | X) = \frac{L(X | \theta) \cdot \pi(\theta)}{\int_{\Theta} L(X | \theta) \cdot \pi(\theta) d\theta}$$

où :

- $\pi(\theta | X)$  : densité *a posteriori* du paramètre  $\theta$  sachant les données  $X$ ,
- $L(X | \theta)$  : fonction de vraisemblance,
- $\pi(\theta)$  : densité *a priori* du paramètre  $\theta$ .
- $\int_{\Theta} L(X | \theta) \cdot \pi(\theta) d\theta$  : constante de normalisation .

#### 2.3.1 Modèle Gaussien

La nature précise du changement du modèle est déterminée par le problème considéré. En analyse des échantillons aléatoires, le changement peut porter sur la moyenne, la variance ou sur d'autres paramètres inconnus de la distribution.

Dans cette section, nous nous intéressons à l'analyse Bayésienne du problème de rupture dans une suite de variables aléatoires gaussiennes, où un changement dans la moyenne intervient à un instant inconnu. Cette approche a été notamment développée par Broemeling et Holbert ([5]).

Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$  une suite de variables aléatoires gaussiennes et indépendantes.

$$X_1, X_2, \dots, X_m \sim \mathcal{N}(\phi_0, \sigma^2)$$

et

$$X_{m+1}, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\phi_1, \sigma^2)$$

## Présentation du modèle

Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$  considérons le modèle suivant

$$X_i = \begin{cases} \phi_0 + \varepsilon_i, & i = 1, 2, \dots, m \\ \phi_1 + \varepsilon_i, & i = m + 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Où

- $\phi_0$  et  $\phi_1$  sont des constantes réelles, inconnues et différentes. Elles représentent les moyennes des variables aléatoires  $X_i$  avant et après le changement respectivement.
- Les  $\varepsilon_i$  représentent les erreurs aléatoires, qui peuvent être indépendantes ou autocorrélées.
- Le paramètre  $m$  représente le point de rupture. C'est un entier qui varie entre 1 et  $n - 1$ ,  $n$  étant la taille de l'échantillon.

## Cas où les erreurs sont indépendantes

Nous considérons le modèle (2.3.1) et nous supposons que les erreurs aléatoires  $\varepsilon_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , sont gaussiennes, indépendantes et identiquement distribuées de moyenne nulle et de variance constante et inconnue  $\sigma^2$  :  $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

## La fonction de vraisemblance

$$\begin{cases} X_i \sim \mathcal{N}(\phi_0, \sigma^2) \text{ pour } i = 1, \dots, m \\ X_i \sim \mathcal{N}(\phi_1, \sigma^2) \text{ pour } i = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

Donc

$$f(X_i) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(X_i - \phi_0)^2\right), & i = 1..m \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(X_i - \phi_1)^2\right), & i = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

Donc la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$L(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1 | X) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^m (X_i - \phi_0)^2 + \sum_{i=m+1}^n (X_i - \phi_1)^2 \right]\right\} \quad (2.3.2)$$

## L'analyse a posteriori

La densité conjointe a posteriori des paramètres  $(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1)$  est donnée en vertu du théorème de Bayes, qui est proportionnelle au produit de la fonction de vraisemblance et la densité jointe a priori.

$$\pi_1(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1 | X) = \frac{L(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1 | X) \cdot \pi_0(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1)}{\sum_{m=1}^{n-1} \int_0^{+\infty} \int_R \int_R L(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1 | X) \cdot \pi_0(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1) d\sigma^2 d\phi_0 d\phi_1} \quad (2.3.3)$$

$$\pi_1(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1 | X) \propto L(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1 | X) \cdot \pi_0(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1) \quad (2.3.4)$$

Avec  $\pi_0(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1)$  la densité conjointe a priori des différents paramètres du modèle.

En assignant des lois a priori impropres (ou non informatives) aux paramètres  $\sigma^2$  et  $(\phi_0, \phi_1)$  et une loi uniforme sur  $1, 2, \dots, n - 1$  pour le point de rupture  $m$ , le théorème suivant nous détermine la masse de probabilité marginale a posteriori du point de rupture  $m$ .

**Théorème 2.3.1** (*L.D. Broemeling et D. Holbert*) [5]

*Étant donné le modèle (2.3.1)*

$$\begin{cases} X_i = \phi_0 + \varepsilon_i, & i = 1, 2, \dots, m \\ X_i = \phi_1 + \varepsilon_i, & i = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

où

$\phi_0 \neq \phi_1$  et  $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  avec  $\sigma > 0$ , et  $\phi_0, \phi_1$  et  $\sigma$  sont des paramètres inconnus.

Les densités a priori des paramètres  $\sigma^2, (\phi_0, \phi_1)$  et du point de rupture  $m$  sont données respectivement par :

$$\begin{cases} \pi_0(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \\ \pi_0(\phi_0, \phi_1) \propto \text{constante sur } R^2 \\ \pi_0(m) \propto \frac{1}{n-1}, \quad \text{pour } m = 1, 2, \dots, n - 1 \end{cases} \quad (2.3.5)$$

et que  $\sigma^2, \phi_0, \phi_1$  et  $m$  sont indépendants.

## La densité conjointe a priori des différents paramètres

On note par  $\pi_0(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1)$  la densité conjointe a priori des paramètres  $(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1)$ .

En utilisant l'indépendance des paramètres  $m, \sigma^2$  et  $(\phi_0, \phi_1)$ , on déduit

$$\pi_0(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1) \propto \pi_0(m) \cdot \pi_0(\sigma^2) \cdot \pi_0(\phi_0, \phi_1)$$

Ce qui nous donne

$$\pi_0(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1) \propto \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{n-1} \quad (2.3.6)$$

**La densité a posteriori jointe des différents paramètres  $(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1)$**

Étant donné

$$\pi_1(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1 | X) \propto L(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1 | X) \cdot \pi_0(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1)$$

En remplaçant (2.3.4) et (2.3.6) par leurs valeurs, nous aurons le résultat suivant

$$\pi_1(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1 | X) \propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^m (X_i - \phi_0)^2 + \sum_{i=m+1}^n (X_i - \phi_1)^2 \right] \right\} \cdot \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{n-1}$$

Après simplification

$$\pi_1(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1 | X) \propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^m (X_i - \phi_0)^2 + \sum_{i=m+1}^n (X_i - \phi_1)^2 \right] \right\}$$

**Et la densité a posteriori du point de rupture  $m$  est**

$$\pi_1(m) \propto \int_0^{+\infty} \int_R \int_R \pi_1(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1) d\sigma^2 d\phi_0 d\phi_1$$

**En intégrant  $\pi_1(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1)$  par rapport a  $\sigma^2$ , on trouve la densité a posteriori des paramètres  $(m, \phi_0, \phi_1)$**

$$= \int_0^{+\infty} \pi_1(m, \sigma^2, \phi_0, \phi_1) d\sigma^2$$

**Pour calculer cette intégrale, posons**

$$\sigma^2 = \frac{1}{r} \Rightarrow d\sigma^2 = -\frac{1}{r^2} dr$$

Donc

$$\pi_1(m, \phi_0, \phi_1) \propto \int_0^{+\infty} r^{\frac{n}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{r}{2} \left[ \sum_{i=1}^m (X_i - \phi_0)^2 + \sum_{i=m+1}^n (X_i - \phi_1)^2 \right] \right\} dr$$

En utilisant les propriétés de la densité d'une loi Gamma

$$\int_0^{+\infty} \frac{b^a}{\Gamma(a)} r^{a-1} e^{-br} dr = 1$$

On obtient

$$\pi_1(m, \phi_0, \phi_1) \propto \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^m (X_i - \phi_0)^2 + \sum_{i=m+1}^n (X_i - \phi_1)^2 \right] \right)^{\frac{n}{2}}} \times$$

$$\underbrace{\int_0^\infty \frac{b^a}{\Gamma(a)} r^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \exp \left\{ -\frac{r}{2} \left[ \sum_{i=1}^m (X_i - \phi_0)^2 + \sum_{i=m+1}^n (X_i - \phi_1)^2 \right] \right\} dr}_{1}$$

Avec  $a = \frac{n}{2}$  et  $b = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^m (X_i - \phi_0)^2 + \sum_{i=m+1}^n (X_i - \phi_1)^2 \right]$

Cette équation peut être réécrite comme suit [3]

$$\pi_1(m, \phi_0, \phi_1) \propto \left[ \sum_{i=1}^m (X_i - \phi_0)^2 + \sum_{i=m+1}^n (X_i - \phi_1)^2 \right]^{-\frac{n}{2}} \quad (2.3.7)$$

Pour retrouver  $\pi_1(m, \phi_0)$  on intègre (2.3.7) par rapport à  $\phi_1$

$$\pi_1(m, \phi_0) = \int_R \pi_1(m, \phi_0, \phi_1) d\phi_1$$

Pour le calcul de cette intégrale posons

$$I = \sum_{i=1}^m (X_i - \phi_0)^2 + \sum_{i=m+1}^n (X_i - \phi_1)^2$$

Sans perte de généralité ,on peut récrire comme suit

$$I = \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X}_1^m + \bar{X}_1^m - \phi_0)^2 + \sum_{i=m+1}^n (X_i - \bar{X}_{m+1}^n + \bar{X}_{m+1}^n - \phi_1)^2$$

Avec  $\bar{X}_j^k = \frac{1}{k-j+1} \sum_{i=j}^k X_i$

On a

$$2 \sum_{i=1}^m ((X_i - \bar{X}_1^m)(\bar{X}_1^m - \phi_0)) = 2 \sum_{i=m+1}^n (X_i - \bar{X}_{m+1}^n)(\bar{X}_{m+1}^n - \phi_1) = 0$$

Ce qui nous donne

$$I = (m)(\bar{X}_1^m - \phi_0) + (n - m)(\bar{X}_{m+1}^n - \phi_1) + S_1^m + S_{m+1}^n \quad (2.3.8)$$

Avec  $S_j^k = \sum_{i=j}^k (X_i - \bar{X}_j^k)^2$

Et

$$Q_1 = m(\bar{X}_1^m - \phi_0)^2 + S_1^m$$

Donc

$$\begin{aligned}\pi_1(m, \phi_0) &\propto \int_R [Q_1 + S_{m+1}^n + (n-m)(\bar{X}_{m+1}^n - \phi_1)^2]^{-\frac{n}{2}} d\phi_1 \\ &= (Q_1 + S_{m+1}^n)^{-\frac{n}{2}} \int_R \left[ 1 + \left( \frac{\bar{X}_{m+1}^n - \phi_1}{\sqrt{\frac{Q_1 + S_{m+1}^n}{(n-m)}}} \right)^2 \right]^{-\frac{n}{2}} d\phi_1\end{aligned}$$

En posant

$$\frac{z}{\sqrt{n-1}} = \frac{\bar{X}_{m+1}^n - \phi_1}{\sqrt{(Q_1 + S_{m+1}^n)/(n-m)}}$$

Et en tenant compte des propriétés d'une loi de Student à n degré de liberté on obtient

$$\begin{aligned}\pi_1(m, \phi_0) &\propto (Q_1 + S_{m+1}^n)^{-\frac{n-1}{2}} (n-1)^{-\frac{1}{2}} (n-m)^{-\frac{1}{2}} \int_R \left( 1 + \frac{z^2}{n-1} \right)^{-\frac{n}{2}} dz \\ &\propto (Q_1 + S_{m+1}^n)^{-\frac{n-1}{2}} [(n-1)(n-m)]^{-\frac{1}{2}} (n-1)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\pi_1(m, \phi_0) \propto (Q_1 + S_{m+1}^n)^{-\frac{n-1}{2}} (n-m)^{-\frac{1}{2}}$$

Une dernière intégration de  $\pi_1(m, \phi_0)$  par rapport à  $\phi_0$  nous donne la densité a posteriori du point de rupture m

$$\pi_1(m) = \int_R (Q_1 + S_{m+1}^n)^{-\frac{n-1}{2}} (n-m)^{-\frac{1}{2}} d\phi_0$$

Nous avons

$$\begin{aligned}Q_1 + S_{m+1}^n &= S_1^m + S_{m+1}^n + m(\bar{X}_1^m - \phi_0)^2 \\ &= S_1^m + S_{m+1}^n + m((\bar{X}_1^m)^2 - 2\phi_0\bar{X}_1^m + \phi_0^2) \\ &= S_1^m + S_{m+1}^n + m\phi_0^2 + \left(\sum_{i=1}^m X_i\right)^2 + 2\phi_0 \sum_{i=1}^m X_i\end{aligned}$$

D'où

$$Q_1 + S_{m+1}^n = S_1^m + S_{m+1}^n + m \left( \phi_0 - \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{m} \right)^2$$

Donc

$$\begin{aligned}\pi_1(m) &\propto \int_R (n-m)^{-\frac{1}{2}} \left[ S_1^m + S_{m+1}^n + m \left( \phi_0 - \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{m} \right)^2 \right]^{-\frac{n-1}{2}} d\phi_0 \\ &= (n-m)^{-\frac{1}{2}} [S_1^m + S_{m+1}^n]^{-\frac{n-1}{2}} \int_R \left[ 1 + \left( \frac{\phi_0 - \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{m}}{\sqrt{S_1^m + S_{m+1}^n/m}} \right)^2 \right]^{-\frac{n-1}{2}} d\phi_0\end{aligned}$$

Posons

$$\frac{z}{\sqrt{n-2}} = \left( \frac{\phi_0 - \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{m}}{\sqrt{S_1^m + S_{m+1}^n/m}} \right)$$

Donc

$$\pi_1(m) \propto m^{-\frac{1}{2}} (n-m)^{-\frac{1}{2}} [S_1^m + S_{m+1}^n]^{-\frac{n-1}{2}} [S_1^m + S_{m+1}^n]^{-\frac{1}{2}} \int_R \left[ 1 + \left( \frac{z}{\sqrt{n-2}} \right)^2 \right]^{-\frac{n-1}{2}} dz$$

Et comme  $\int_R \left[ 1 + \left( \frac{z}{\sqrt{n-2}} \right)^2 \right]^{-\frac{n-1}{2}} dz \propto (n-2)^{\frac{1}{2}}$  (loi de Student à  $(n-1)$  degrés de liberté )

**Alors la densité a posteriori du point de rupture  $m$  est**

$$\pi_1(m) \propto [m(n-m)]^{-\frac{1}{2}} [S_1^m + S_{m+1}^n]^{-\frac{n-2}{2}}$$

Pour déterminer les densités a posteriori marginales des paramètres  $\phi_0$ ,  $\phi_1$  et  $\sigma^2$  nous avons le corollaire suivant

**Corollaire 2.1**[5]

Sous les hypothèses du théorème précédent, les densités a posteriori marginales des paramètres  $\phi_0$ ,  $\phi_1$  et  $\sigma^2$  sont données respectivement par

$$i) \pi(\phi_0 | X) \propto \sum_{m=1}^{n-1} \pi_1(m) t(n-2, y) \sqrt{m} (S_1^m + S_{m+1}^n)^{-1/2}$$

Où

$t(n-2, y)$  est la densité d'une loi de Student à  $(n-2)$  degrés de liberté de variable  $y$ , avec

$$y = \sqrt{m(n-2)} (\bar{X}_1^m - \phi_0) / \sqrt{S_1^m + S_{m+1}^n}.$$

$$ii) \pi(\phi_1 | X) \propto \sum_{m=1}^{n-1} \pi_1(m) t(n-2, z) \cdot \sqrt{n-m} (S_1^m + S_{m+1}^n)^{-1/2}$$

Où

$t(n-2, z)$  est la densité d'une loi de Student à  $(n-2)$  degrés de liberté de variable  $z$ , avec

$$z = \sqrt{n-m} \left( (\bar{X}_{m+1}^n - \phi_1) / \sqrt{S_1^m + S_{m+1}^n} \right)$$

$$\text{iii) } \pi(\sigma^2 | X) \propto \sum_{m=1}^{n-1} \pi_1(m) g(r, a^*, S_1^m + S_{m+1}^n)$$

Où

$r = \sigma^{-2}$  et  $g$  est la densité d'une loi gamma de paramètres  $a^* = n/2 + 1$ ,  $b = (S_1^m + S_{m+1}^n)$

### Cas où les erreurs sont autocorrélées

Supposons que les moyennes  $\phi_0$  et  $\phi_1$  du modèle (2.3.1) sont différentes et inconnues. Les  $\epsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , suivent un processus autorégressif d'ordre 1

$$\epsilon_i = \rho \epsilon_{i-1} + e_i \text{ telle que } e_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2), \quad i = 2, \dots, n,$$

où  $\sigma_i^2$  sont inconnus.

La dépendance des variables  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , intervient dans la corrélation des erreurs

### La fonction de vraisemblance

Comme les  $e_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , alors

$$\mathcal{L}(X/\theta) \propto (\sigma^2)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} A(\theta)\right)$$

Avec

$$A(\theta) = \sum_{i=1}^m (X_i - \rho X_{i-1} - \phi_0(1-\rho))^2 + (X_{m+1} - \rho X_m - \phi_1)^2 + \sum_{i=m+2}^n (X_i - \rho X_{i-1} - \phi_1)^2$$

### L'analyse a posteriori

En assignant une densité conjointe a priori impropre aux paramètres  $m$ ,  $\phi_0$ ,  $\phi_1$ , et  $\sigma^2$ , nous déterminons la masse de probabilité marginale a posteriori du point de rupture  $m$ .

Soit le théorème suivant

**Théorème 2.3.2** (L.D. Broemeling et D. Holbert) [5]

Considérons le modèle (2.3.1) :

$$X_i = \begin{cases} \phi_0 + \epsilon_i, & i = 1, 2, \dots, m \\ \phi_1 + \epsilon_i, & i = m+1, \dots, n \end{cases}$$

où

$$\epsilon_i = \rho \epsilon_{i-1} + e_i ; \quad e_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2), \quad i = 2, \dots, n,$$

$\rho$  et  $\sigma^2$  sont inconnus.

Si on suppose que la densité conjointe a priori des paramètres  $m, \phi_1, \phi_2, \rho$ , et  $\sigma^2$  est :

$$\pi_0(m, \phi_0, \phi_1, \rho, \sigma^2) \propto \frac{1}{(n-1)\sigma^2}$$

Alors la masse de probabilité a posteriori du point de rupture  $m$  est donnée par :

$$\pi_1(m) = \int_R \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 a - \beta_1^2}} \left[ \alpha_3 - \frac{\beta_2^2}{a} - \left( \frac{(\alpha_2 a + \beta_1 \beta_2)}{\sqrt{\alpha_1 a^2 - \beta_1^2 a}} \right)^2 \right]^{-(n/2-1)} d\rho$$

Où

$$\begin{aligned} a &= m(1-\rho)^2 + \rho^2 \\ \alpha_1 &= (n-m-1)(1-\rho)^2 + 1 \\ \alpha_2 &= (1-\rho) \sum_{i=m+2}^n (X_i - \rho X_{i-1}) + (X_{m+1} - \rho X_m) \\ \alpha_3 &= \sum_{i=2}^n (X_i - \rho X_{i-1})^2 \\ \beta_1 &= \rho \\ \beta_2 &= (1-\rho) \sum_{i=2}^m (X_i - \rho X_{i-1}) + \rho(X_{m+1} - \rho X_m) \end{aligned}$$

**Remarque 2.3.1.1** Dans ce cas gaussien, la fonction coût utilisé par les auteurs est la coût 0-1. L'estimateur de Bayes associée est le mode a posteriori.

### 2.3.2 Modèle Autorégressif

Dans cette partie nous nous intéressons à l'estimation d'un point de rupture dans un processus autorégressif d'ordre un AR(1), en utilisant l'approche Bayesienne.

Pour cela, nous cherchons la densité a posteriori des paramètres du modèle étudié, puis nous déduisons l'estimateur de Bayes en utilisant des fonctions coûts usuelles

### 2.3.3 Cas où les erreurs suivant une loi normale

#### Présentation du modèle

Nous nous intéressons à un processus autorégressif d'ordre un (AR(1)), basé sur l'article de Mayuri .P, Karichnam.B et Pandya.CH(2012)[28] ayant subi un changement de structure à un instant inconnu  $m$ . Le changement concerne à la fois le coefficient d'autocorrélation et la variance des erreurs.

Le modèle s'écrit donc comme suit :

$$X_i = \begin{cases} \beta_1 X_{i-1} + \epsilon_i, & i = 1, 2, \dots, m \\ \beta_2 X_{i-1} + \epsilon_i, & i = m + 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.3.9)$$

Avec

- $\beta_1, \beta_2$  sont les coefficients d'autocorrélation supposés inconnus ( $\beta_1 \neq \beta_2$ ).
- $X_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  observation de la variable dépendante,  $i = \overline{1, n}$ ,  $n$  étant la taille de l'échantillon.

- $\epsilon_i$  sont les erreurs du modèle, elles sont supposées indépendantes, identiquement distribuées suivant une loi normale  $N(0, \sigma^2)$ .
- les  $\beta_i$ ,  $i = \overline{1, 2}$  sont distribués suivant une loi normal de paramètres respectivement  $\sigma_1 = 1$  et  $\sigma_2 = 4$  Avec  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$  connues.
- $m$  est le point de rupture, c'est un paramètre aléatoire prenant les valeurs  $1, 2, \dots, n - 1$ .

## La fonction de vraisemblance

Soit

$$X_i = \begin{cases} \beta_1 x_{i-1} + \epsilon_i, & i = 1, 2, \dots, m \\ \beta_2 x_{i-1} + \epsilon_i, & i = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

d'où

$$\epsilon_i = \begin{cases} x_i - \beta_1 x_{i-1}, & i = 1, 2, \dots, m \\ x_i - \beta_2 x_{i-1}, & i = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \epsilon_i &\sim N(0, \sigma_1^2), \text{ pour } i = 1, \dots, m \\ \epsilon_i &\sim N(0, \sigma_2^2), \text{ pour } i = m + 1, \dots, n \end{aligned}$$

La densité des  $\epsilon_i$

$$f(\epsilon_i) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\epsilon_i^2}, & i = 1, 2, \dots, m \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}\epsilon_i^2}, & i = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

d'où

$$f(X_i) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x_i - \beta_1 x_{i-1})^2}, & i = 1, 2, \dots, m \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x_i - \beta_2 x_{i-1})^2}, & i = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

Comme les  $\epsilon_i$  sont indépendantes, Alors la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$\begin{aligned}
 L(\beta_1, \beta_2, m | X) &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \right)^m \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{i=1}^m (x_i - \beta_1 x_{i-1})^2 \right] \\
 &\quad \times \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \right)^{n-m} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{i=m+1}^n (x_i - \beta_2 x_{i-1})^2 \right] \\
 &= (2\pi)^{-n/2} \sigma_1^{-m} \sigma_2^{-(n-m)} \\
 &\quad \times \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_1^2} \left( \sum_{i=1}^m x_i^2 - 2\beta_1 \sum_{i=1}^m x_i x_{i-1} + \beta_1^2 \sum_{i=1}^m x_{i-1}^2 \right) \right] \\
 &\quad \times \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_2^2} \left( \sum_{i=m+1}^n x_i^2 - 2\beta_2 \sum_{i=m+1}^n x_i x_{i-1} + \beta_2^2 \sum_{i=m+1}^n x_{i-1}^2 \right) \right] \\
 &= (2\pi)^{-n/2} \sigma_1^{-m} \sigma_2^{-(n-m)} \\
 &\quad \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \beta_1^2 \frac{S_{1m}}{\sigma_1^2} - 2\beta_1 \frac{S_{2m}}{\sigma_1^2} + \frac{S_{3m}}{\sigma_1^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \left( \beta_2^2 \frac{S'_{1m}}{\sigma_2^2} - 2\beta_2 \frac{S'_{2m}}{\sigma_2^2} + \frac{S'_{3m}}{\sigma_2^2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
 S_{m1} &= \sum_{i=1}^m x_i^2 \\
 S_{m2} &= \sum_{i=1}^m x_i x_{i-1} \\
 S_{m3} &= \sum_{i=1}^m x_{i-1}^2 \\
 K_1 &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 L(\beta_1, \beta_2, m | X) &= K_1 \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta_1^2 \left( \frac{S_{m1}}{\sigma_1^2} \right) + \beta_1 \left( \frac{S_{m2}}{\sigma_1^2} \right) - \frac{S_{m3}}{2\sigma_1^2} \right] \sigma_1^{-m} \sigma_2^{-(n-m)} \\
 &\quad \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta_2^2 \left( \frac{S_{n1} - S_{m1}}{\sigma_2^2} \right) + \beta_2 \left( \frac{S_{n2} - S_{m2}}{\sigma_2^2} \right) - \left( \frac{S_{n3} - S_{m3}}{2\sigma_2^2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

## Les lois a priori

Les distributions a priori des paramètres inconnus sont attribuées comme suit

- Une loi normale de moyenne  $\mu_i$  et de variance  $a_i$ , pour les  $\beta_i$  avec  $i = 1, 2$ .
- Une loi uniforme discrète sur l'intervalle  $[1, n - 1]$

Dans la littérature, c'est pratiquement la seule utilisée car elle est naturelle.

De plus nous supposons que les paramètres  $\beta_1, \beta_2$  et  $m$  sont indépendants.

Ce qui nous donne

$$\begin{cases} \pi_0(\beta_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a_1}} e^{-\frac{1}{2a_1}(\beta_1 - \mu_1)^2}; & a_1, \mu_1 > 0 \text{ et } \beta_1 \in R \\ \pi_0(\beta_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a_2}} e^{-\frac{1}{2a_2}(\beta_2 - \mu_2)^2}; & a_2, \mu_2 > 0 \text{ et } \beta_2 \in R \\ \pi_0(m) = \frac{1}{n-1} \end{cases}$$

**La densité a priori jointe des paramètres  $\beta_1, \beta_2$  et  $m$  est donnée par**

$$\begin{aligned}\pi_0(\beta_1, \beta_2, m) &= \pi_0(\beta_1) \times \pi_0(\beta_2) \times \pi_0(m) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a_1}} \exp\left[-\frac{1}{2a_1}(\beta_1 - \mu_1)^2\right] \times \frac{1}{\sqrt{2\pi a_2}} \exp\left[-\frac{1}{2a_2}(\beta_2 - \mu_2)^2\right] \times \frac{1}{n-1} \\ &= \frac{1}{(2\pi)\sqrt{a_1 a_2}(n-1)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(\beta_1 - \mu_1)^2}{a_1} + \frac{(\beta_2 - \mu_2)^2}{a_2}\right)\right]\end{aligned}$$

Posons

$$K_ = (2\pi(n-1)\sqrt{a_1}\sqrt{a_2})^{-1}$$

Donc

$$\pi_0(\beta_1, \beta_2, m) = K_ \exp\left[\frac{-1}{2a_1}(\beta_1^2 - 2\beta_1\mu_1 + \mu_1^2)\right] \exp\left[\frac{-1}{2a_2}(\beta_2^2 - 2\beta_2\mu_2 + \mu_2^2)\right]$$

**La densité a posteriori jointe des différents paramètres ( $\beta_1, \beta_2$  et  $m$ )**

En vertu du théorème de Bayes nous avons

$$\pi_0(\beta_1, \beta_2, m | X) = \frac{L(\beta_1, \beta_2, m | X)\pi_0(\beta_1, \beta_2, m)}{\sum_{m=1}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(\beta_1, \beta_2, m | X)\pi_0(\beta_1, \beta_2, m)d\beta_1 d\beta_2}$$

Posons

$$h(X) = \sum_{m=1}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(\beta_1, \beta_2, m | X)\pi_0(\beta_1, \beta_2, m)d\beta_1 d\beta_2$$

Donc

$$\begin{aligned}
\pi_1(\beta_1, \beta_2, m | X) &= h(X)^{-1} K_1 K_2 \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta_1^2 \left( \frac{Sm_1}{\sigma_1^2} \right) + \beta_1 \left( \frac{Sm_2}{\sigma_1^2} \right) - \frac{Sm_3}{2\sigma_1^2} \right] \sigma_1^{-m} \sigma_2^{-(n-m)} \\
&\times \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta_2^2 \frac{(Sn_1 - Sm_1)}{\sigma_2^2} + \beta_2 \frac{(Sn_2 - Sm_2)}{\sigma_2^2} - \frac{Sn_3 - Sm_3}{2\sigma_2^2} \right] \\
&= \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \beta_1^2 \left( \frac{Sm_1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{a_1} \right) - 2\beta_1 \left( \frac{Sm_2}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_1}{a_1} \right) \right) \right] \\
&\times \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \beta_2^2 \left( \frac{Sn_1 - Sm_1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{a_2} \right) - 2\beta_2 \left( \frac{Sn_2 - Sm_2}{\sigma_2^2} + \frac{\mu_2}{a_2} \right) \right) \right] \\
&= \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{Sm_1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{a_1} \right) \left( \beta_1 - \frac{Sm_2/\sigma_1^2 + \mu_1/a_1}{Sm_1/\sigma_1^2 + 1/a_1} \right)^2 \right] \\
&\times \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{Sn_1 - Sm_1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{a_2} \right) \left( \beta_2 - \frac{(Sn_2 - Sm_2)/\sigma_2^2 + \mu_2/a_2}{(Sn_1 - Sm_1)/\sigma_2^2 + 1/a_2} \right)^2 \right] \\
&\times \exp \left[ \frac{(Sm_2/\sigma_1^2 + \mu_1/a_1)^2}{2(Sm_1/\sigma_1^2 + 1/a_1)} + \frac{((Sn_2 - Sm_2)/\sigma_2^2 + \mu_2/a_2)^2}{2((Sn_1 - Sm_1)/\sigma_2^2 + 1/a_2)} \right] K_1 K_2 h(X)^{-1} \sigma_1^{-m} \sigma_2^{-(n-m)} \\
&= K_1 K_2 \exp \left[ -\frac{1}{2a_1} (\beta_1^2 - 2\mu_1\beta_1 + \mu_1^2) \right] \exp \left[ -\frac{1}{2a_2} (\beta_2^2 - 2\mu_2\beta_2 + \mu_2^2) \right] h(X)^{-1} \\
&= K_1 K_2 h(X)^{-1} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{Sm_1}{\sigma_1^2} \right) \left( \beta_1 - \frac{\mu_1/a_1 + Sm_2/\sigma_1^2}{1/a_1 + Sm_1/\sigma_1^2} \right)^2 \right] \\
&\times \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_2} + \frac{Sn_1 - Sm_1}{\sigma_2^2} \right) \left( \beta_2 - \frac{\mu_2/a_2 + (Sn_2 - Sm_2)/\sigma_2^2}{1/a_2 + (Sn_1 - Sm_1)/\sigma_2^2} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

Posons

$$A_{1m} = \frac{Sm_1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{a_1}, \quad A_{1m} > 0$$

$$B_{1m} = \frac{Sm_2}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_1}{a_1}$$

$$A_{2m} = \frac{Sn_1 - Sm_1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{a_2}, \quad A_{2m} > 0$$

$$B_{2m} = \frac{Sn_2 - Sm_2}{\sigma_2^2} + \frac{\mu_2}{a_2}$$

$$K_3 = K_1 K_2 \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\mu_1^2}{a_1} + \frac{\mu_2^2}{a_2} \right) \right] \exp \left[ -\frac{1}{2} Sn_3 \sigma_2^{-2} \right]$$

Donc

$$\begin{aligned} \pi_1(\beta_1, \beta_2, m | X) &= K_3 h^{-1}(X) \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta_1^2 A_{1m} + \beta_1 B_{1m} \right] \\ &\quad \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta_2^2 A_{2m} + \beta_2 B_{2m} \right] \\ &\quad \times \exp \left[ -\frac{1}{2} S_{3m} (\sigma_1^{-2} - \sigma_2^{-2}) \right] \sigma_1^{-m} \sigma_2^{-(n-m)} \end{aligned}$$

Calcul de la marginale de  $h(X)$

$$\begin{aligned} h(X) &= \sum_{m=1}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(\beta_1, \beta_2, m | X) g(\beta_1, \beta_2, m) d\beta_1 d\beta_2 \\ &= K_3 \sum_{m=1}^{n-1} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta_1^2 A_{1m} + \beta_1 B_{1m} \right] d\beta_1 \right) \\ &\quad \times \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta_2^2 A_{2m} + \beta_2 B_{2m} \right] d\beta_2 \right) \\ &\quad \times \exp \left[ -\frac{1}{2} S_{3m} (\sigma_1^{-2} - \sigma_2^{-2}) \right] \sigma_1^{-m} \sigma_2^{-(n-m)} \end{aligned}$$

Calcul de l'intégrale  $I_1$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta_1^2 A_{1m} + \beta_1 B_{1m} \right] d\beta_1$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \exp \left[ -\frac{1}{2} A_{1m} \left( \beta_1 - \frac{B_{1m}}{A_{1m}} \right)^2 \right] &= \exp \left[ -\frac{1}{2} A_{1m} \left( \beta_1^2 - 2\beta_1 \frac{B_{1m}}{A_{1m}} + \frac{B_{1m}^2}{A_{1m}^2} \right) \right] \\ &= \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta_1^2 A_{1m} + \beta_1 B_{1m} - \frac{B_{1m}^2}{2A_{1m}} \right] \\ &= \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta_1^2 A_{1m} + \beta_1 B_{1m} \right] \exp \left[ -\frac{B_{1m}^2}{2A_{1m}} \right] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2} A_{1m} \left( \beta_1 - \frac{B_{1m}}{A_{1m}} \right)^2 \right] \exp \left[ \frac{B_{1m}^2}{2A_{1m}} \right] d\beta_1 \\ &= \exp \left[ \frac{B_{1m}^2}{2A_{1m}} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2A_{1m}^{-1}} \left( \beta_1 - \frac{B_{1m}}{A_{1m}} \right)^2 \right] d\beta_1 \\ &= \exp \left[ \frac{B_{1m}^2}{2A_{1m}} \right] \sqrt{2\pi} \sqrt{A_{1m}^{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi A_{1m}^{-1}}} \exp \left[ -\frac{1}{2A_{1m}^{-1}} \left( \beta_1 - \frac{B_{1m}}{A_{1m}} \right)^2 \right] d\beta_1 \\ I_1 &= \frac{\sqrt{2\pi} e^{\frac{B_{1m}^2}{2A_{1m}}}}{\sqrt{A_{1m}}} \end{aligned}$$

Calcul de l'intégrale  $I_2$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta_2 A_{2m} + \beta_2 B_{2m} \right] d\beta_2$$

nous avons

$$\begin{aligned} \exp \left[ -\frac{1}{2} A_{2m} \left( \beta_2 - \frac{B_{2m}}{A_{2m}} \right)^2 \right] &= \exp \left[ -\frac{1}{2} A_{2m} \left( \beta_2^2 - 2\beta_2 \frac{B_{2m}}{A_{2m}} + \frac{B_{2m}^2}{A_{2m}^2} \right) \right] \\ &= \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta_2^2 A_{2m} + \beta_2 B_{2m} - \frac{B_{2m}^2}{2A_{2m}} \right] \\ &= \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta_2^2 A_{2m} + \beta_2 B_{2m} \right] \exp \left[ -\frac{B_{2m}^2}{2A_{2m}} \right] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2} A_{2m} \left( \beta_2 - \frac{B_{2m}}{A_{2m}} \right)^2 \right] \exp \left[ \frac{B_{2m}^2}{2A_{2m}} \right] d\beta_2 \\ &= \exp \left[ \frac{B_{2m}^2}{2A_{2m}} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2A_{2m}^{-1}} \left( \beta_2 - \frac{B_{2m}}{A_{2m}} \right)^2 \right] d\beta_2 \\ &= \exp \left[ \frac{B_{2m}^2}{2A_{2m}} \right] \sqrt{2\pi} \sqrt{A_{2m}^{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi A_{2m}^{-1}}} \exp \left[ -\frac{1}{2A_{2m}^{-1}} \left( \beta_2 - \frac{B_{2m}}{A_{2m}} \right)^2 \right] d\beta_2 \\ I_2 &= \frac{\sqrt{2\pi} e^{\frac{B_{2m}^2}{2A_{2m}}}}{\sqrt{A_{2m}}} \end{aligned}$$

d'où

$$h(X) = K_3 \sum_{m=1}^{n-1} T_1(m)$$

avec

$$T_1(m) = I_1(m) I_2(m) \exp \left[ -\frac{1}{2} S_{m3} (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \right] \sigma_1^{-m} \sigma_2^{-(n-m)}$$

et

$$K_3 = K_1 K_2 \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2} \right) \right] \exp \left[ -\frac{1}{2} S_{n3} \sigma_2^2 \right]$$

Donc

$$\begin{aligned} \pi_1(\beta_1, \beta_2, m | X) &= \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta_1^2 A_{1m} + \beta_1 B_{1m} \right] \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta_2^2 A_{2m} + \beta_2 B_{2m} \right] \\ &\quad \exp \left[ -\frac{1}{2} S_{3m} (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \right] \sigma_1^{-m} \sigma_2^{-(n-m)} [h(X)]^{-1} \end{aligned}$$

**Les densités a posteriori marginales des paramètres  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  et  $m$**   
**distribution a posteriori marginale du point  $\beta_1$**

$$\begin{aligned}\pi_1(\beta_1 | X) &= \sum_{m=1}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_1(\beta_1, \beta_2, m | X) d\beta_2 \\ &= K_3 \sum_{m=1}^{n-1} \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta_1^2 A_{1m} + \beta_1 B_{1m} \right] I_2(m) \\ &\quad \times \exp \left[ -\frac{1}{2} S_{m3} (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \right] \sigma_1^{-m} \sigma_2^{-(n-m)} [h(X)]^{-1}\end{aligned}$$

**La distribution a posteriori marginale du point  $\beta_2$**

$$\begin{aligned}\pi_1(\beta_2 | X) &= \sum_{m=1}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_1(\beta_1, \beta_2, m | X) d\beta_1 \\ &= K_3 \sum_{m=1}^{n-1} \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta_2^2 A_{2m} + \beta_2 B_{2m} \right] I_1(m) \\ &\quad \times \exp \left[ -\frac{1}{2} S_{m3} (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \right] \sigma_1^{-m} \sigma_2^{-(n-m)} [h(X)]^{-1}\end{aligned}$$

**La distribution a posteriori marginale du point  $m$**

$$\begin{aligned}\pi_1(m | X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_1(\beta_1, \beta_2, m | X) d\beta_1 d\beta_2 \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( -\frac{1}{2} \beta_1^2 A_{1m} + \beta_1 B_{1m} \right) d\beta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( -\frac{1}{2} \beta_2^2 A_{2m} + \beta_2 B_{2m} \right) d\beta_2 \right] \\ &\quad \times \exp \left[ -\frac{1}{2} S_{m3} (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \right] \sigma_1^{-m} \sigma_2^{-(n-m)} \left[ \sum_{m=1}^{n-1} T_1(m) \right]^{-1}\end{aligned}$$

D'où

$$\pi_1(m | X) = \frac{T_1(m)}{\sum_{m=1}^{n-1} T_1(m)}$$

avec

$$T_1(m) = I_1(m) I_2(m) \exp \left[ -\frac{1}{2} S_{m3} (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \right] \sigma_1^{-m} \sigma_2^{-(n-m)}$$

**Estimateur Bayésien du point de rupture sous différentes fonctions coûts**

**a. la fonction coût quadratique**

La fonction coût quadratique est définie par

$$L_1(\alpha, d) = (\alpha - d)^2$$

L'estimateur de Bayes  $m^*$  associé à la distribution marginale  $\pi_1(m | X)$  sous la fonction coût quadratique est la moyenne a posteriori de  $m$ .

L'estimateur de Bayes est

$$m^* = E(m) = \sum_{m=1}^{n-1} m \pi_1(m | X)$$

$$m^* = \sum_{m=1}^{n-1} m \left( \frac{T_1(m)}{\sum_{m=1}^{n-1} T_1(m)} \right)$$

$T_1(m)$  définie précédemment.

### b. La fonction coût absolu

La fonction coût absolu est la fonction définie par :

$$L_2(\alpha, d) = |\alpha - d|$$

L'estimateur de Bayes de  $m$  associée à la distribution marginale  $\pi_1(m | X)$  sous la fonction coût absolu est la médiane de la distribution a posteriori.

### c. La fonction coût 0-1

La fonction coût 0-1 est la fonction définie par

$$\begin{cases} 0 & \text{si } |\alpha - d| < \epsilon, \quad \epsilon > 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'estimateur de Bayes associée à la distribution marginale  $\pi_1(m | X)$  sous la fonction coût 0-1 est le mode de la distribution a posteriori.

## 2.3.4 Cas où les erreurs suivant une loi exponentielle

### Présentation du modèle

Nous nous intéressons à un processus autorégressif d'ordre un (AR(1))[27], ayant subi un changement de structure à un instant inconnu  $m$ . Le changement concerne à la fois les coefficients d'autocorrélation  $\beta_1$  et  $\beta_2$ ,  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc indépendant suivant une loi exponentielle de moyenne  $\theta_1$  avant le point de changement, puis de moyenne  $\theta_2$  après  $m$ .

Le modèle s'écrit donc comme suit

$$X_i = \begin{cases} \beta_1 X_{i-1} + \varepsilon_i, & i = 1, \dots, m \\ \beta_2 X_{i-1} + \varepsilon_i, & i = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

Et

$$\varepsilon_i \sim \begin{cases} \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta_1}}, & i = 1, \dots, m \\ \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta_2}}, & i = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

$\beta_1, \beta_2$  sont les coefficients d'autocorrélation supposés inconnus avec :  $(\beta_1 \neq \beta_2)$ .

$X_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  observation de la variable dépendante,  $i = \overline{1, n}$ ,  $n$  étant la taille de l'échantillon.

### La fonction de vraisemblance

Soit

$$X_i = \begin{cases} \beta_1 x_{i-1} + \epsilon_i, & i = 1, 2, \dots, m \\ \beta_2 x_{i-1} + \epsilon_i, & i = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

d'où

$$\epsilon_i = \begin{cases} x_i - \beta_1 x_{i-1}, & i = 1, 2, \dots, m \\ x_i - \beta_2 x_{i-1}, & i = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

Nous avons

$$\epsilon_i \sim \exp\left(\frac{1}{\theta_1}\right), \text{ pour } i = 1, \dots, m$$

$$\epsilon_i \sim \exp\left(\frac{1}{\theta_2}\right), \text{ pour } i = m + 1, \dots, n$$

La densité des  $\epsilon_i$  :

$$f(\epsilon_i) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{\epsilon_i}{\theta_1}}, & i = 1, 2, \dots, m \\ \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{\epsilon_i}{\theta_2}}, & i = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

d'où

$$f(X_i) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\theta_1}\right) e^{-\frac{x_i - \beta_1 x_{i-1}}{\theta_1}}, & i = 1, 2, \dots, m \\ \left(\frac{1}{\theta_2}\right) e^{-\frac{x_i - \beta_2 x_{i-1}}{\theta_2}}, & i = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

Comme les  $\epsilon_i$  sont indépendantes, Alors la fonction de vraisemblance est donnée par

$$L(\beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2, m | X) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x)$$

$$L(\beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2, m | X) = \frac{1}{\theta_1^m} e^{-\frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^m (X_i - \beta_1 X_{i-1})} \cdot \frac{1}{\theta_2^{n-m}} e^{-\frac{1}{\theta_2} \sum_{i=m+1}^n (X_i - \beta_2 X_{i-1})}$$

$$\theta_1, \theta_2 > 0, X_0 = 0$$

$$L(\beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2, m | X) = \frac{1}{\theta_1^m} e^{-\frac{1}{\theta_1} (s_m - \beta_1 s_m^*)} \cdot \frac{1}{\theta_2^{n-m}} e^{\frac{\beta_2}{\theta_2} (s_n^* - s_m^*)} e^{-\frac{1}{\theta_2} (s_n - s_m)}$$

Avec

$$\begin{aligned} s_m &= \sum_{i=1}^m X_i \\ s_m^* &= \sum_{i=1}^m X_{i-1} \\ s_n &= \sum_{i=1}^n X_i \\ s_n^* &= \sum_{i=1}^m X_{i-1} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} L(\beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2, m | X) &= \frac{1}{\theta_1^m} \cdot e^{-A/\theta_1} \cdot (\theta_2)^{-(n-m)} \cdot e^{-B/\theta_2} \\ \theta_1, \theta_2 &> 0, \quad X_0 = 0 \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} A &= S_m - \beta_1 S_m^* \\ B &= S_n - S_m - \beta_2 (S_n^* - S_m^*) \end{aligned}$$

## Les lois a priori

Les distributions a priori des paramètres sont attribuées comme suit

- Une loi Beta pour les  $\beta_i$  avec  $i = 1, 2$ , de moyenne  $\mu_1$  et  $\mu_2$  respectivement
- Une loi uniforme discrète sur l'intervalle  $[1, n-1]$  pour le point de rupture  $m$

Ce qui nous donne

$$\begin{cases} \pi_0(\beta_1) = \frac{\beta_1^{a_1-1}(1-\beta_1)^{b_1-1}}{B(a_1, b_1)}, & 0 < \beta_1 < 1, \quad a_1 > 0, \quad b_1 > 0 \\ \pi_0(\beta_2) = \frac{\beta_2^{a_2-1}(1-\beta_2)^{b_2-1}}{B(a_2, b_2)}, & 0 < \beta_2 < 1, \quad a_2 > 0, \quad b_2 > 0 \\ \pi_0(\theta_1, \theta_2) \propto \frac{1}{\theta_1 \theta_2} \\ \pi_0(m) = \frac{1}{n-1} \end{cases}$$

Si l'information a priori est donnée sous forme de moyennes ( $\mu, \mu_i$ ) et d'écart-type ( $\sigma$ ), les hypers paramètres peuvent être obtenus en résolvant un système d'équations liant ces valeurs aux moments de la distribution choisie (moyenne, variance).

$$\begin{aligned} a_i &= \sigma^{-2}[(1 - \mu_i)\mu_i^2 - \mu_i\sigma^2], \quad i = 1, 2 \\ b_i &= \mu_i^{-1}(1 - \mu_i)a_i, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Supposons que les paramètres  $\beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2, \beta_2$  et  $m$  sont indépendants

**La densité a priori jointe des paramètres ( $\beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2, \beta_2$  et  $m$ ) est donnée par**

$$\pi_0(\beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2, m) = k_1 \frac{\beta_1^{a_1-1}(1-\beta_1)^{b_1-1} \beta_2^{a_2-1}(1-\beta_2)^{b_2-1}}{(\theta_1 \theta_2)}$$

Avec

$$k_1 = \frac{1}{\beta(a_1, b_1)\beta(a_2, b_2)(n-1)}$$

### La densité a posteriori jointe des paramètres $\beta_1$ $\beta_2$ $\theta_1$ $\theta_2$ et $m$

La densité a posteriori est donnée par

$$\pi_1(\beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2, m | \mathbf{X}) = k_1 \theta_1^{(m+1)} e^{-A/\theta_1} \theta_2^{(n-m)-1} e^{-B/\theta_2} \beta_1^{a_1-1} (1-\beta_1)^{b_1-1} \beta_2^{a_2-1} (1-\beta_2)^{b_2-1} / h_1(\mathbf{X})$$

où

$h_1(\mathbf{X})$  est la densité marginale de  $\mathbf{X}$  donnée par

$$h_1(\mathbf{X}) = k_1 \sum_{m=1}^{n-1} T_1(m)$$

avec

$$\begin{aligned} T_1(m) &= \Gamma m \Gamma(n-m) \cdot \left\{ \left( \frac{1}{a_1} \right) (S_m)^{-m} \text{Appel}_1 F_1 \left( a_1, m, b_1, 1 + a_1, \frac{S_m^*}{S_m}, 1 \right) \right\} \\ &\times \left\{ \left( \frac{1}{a_2} \right) [(S_n - S_m)]^{-(n-m)} \text{Appel}_1 F_1 \left( a_2, n-m, n-b_2, 1 + a_2, \frac{S_n^* - S_m^*}{S_n - S_m}, 1 \right) \right\} \end{aligned}$$

**Remarque 2.3.4.1** La fonction hypergéométrique d'Appel  $F_1(a, b_1, b_2, c; x, y)$  est définie par

$$\text{Appel } F_1(a, b_1, b_2, c; x, y) = \frac{\Gamma c}{\Gamma a \Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{c-a-1} (1-ux)^{-b_1} (1-uy)^{-b_2} du$$

Les densités marginales a posteriori des paramètres  $\beta_1$   $\beta_2$   $\theta_1$   $\theta_2$  et  $m$  est donnée par

$$\pi_1(m | X) = \frac{T_1(m)}{\sum_{m=1}^{n-1} T_1(m)}$$

Les densités marginales a posteriori de  $\beta_1$  et  $\beta_2$ , notées  $\pi_1(\beta_1 | X)$  et  $\pi_1(\beta_2 | X)$ , sont données par

$$\begin{aligned} \pi_1(\beta_1 | X) &= \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^\infty \pi_1(\beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2, m | X) d\theta_1 d\theta_2 d\beta_2 \\ &= k_1 \sum_{m=1}^{n-1} \beta_1^{a_1-1} (1-\beta_1)^{b_1-1} \frac{\Gamma m \Gamma(n-m)}{A^m} \left\{ \frac{1}{a_2} [(S_n - S_m)]^{-(n-m)} \right. \\ &\quad \times \left. \text{Appel}_1 F_1 \left[ a_2, n-m, -b_2, 1 + a_2, \frac{S_n^* - S_m^*}{S_n - S_m}, 1 \right] \right\} / h_1(X) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \pi_1(\beta_2 | X) &= k_1 \sum_{m=1}^{n-1} \beta_2^{a_2-1} (1-\beta_2)^{b_2-1} \frac{\Gamma m \Gamma(n-m)}{B^{n-m}} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{a_1} (S_m)^{-m} \text{Appel}_1 F_1 \left[ a_1, m, -b_1, 1 + a_1, \frac{S_m^*}{S_m}, 1 \right] \right\} / h_1(X) \end{aligned}$$

Les densités marginales a posteriori de  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , notées  $\pi_1(\theta_1 | X)$  et  $\pi_1(\theta_2 | X)$  sont données par

$$\begin{aligned} \pi_1(\theta_1 | X) &= \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^\infty \pi_1(\beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2, m | X) d\theta_2 d\beta_1 d\beta_2 \\ &= k_1 \sum_{m=1}^{n-1} \theta_1^{-(m+1)} \int_0^1 \frac{\beta_1^{a_1-1} (1-\beta_1)^{b_1-1}}{e^{-A/\theta_1}} d\beta_1 \Gamma(n-m) \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{a_2} [(S_n - S_m)]^{-(n-m)} \text{Appel}_1 F_1 \left[ a_2, n-m, -b_2, 1+a_2, \frac{S_n^* - S_m^*}{S_n - S_m}, 1 \right] \right\} / h_1(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \pi_1(\theta_2 | \mathbf{X}) &= \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^\infty \pi_1(\beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2, m | \mathbf{X}) d\theta_1 d\beta_1 d\beta_2 \\ &= k_1 \sum_{m=1}^{n-1} \theta_2^{-(n-m)} \Gamma m \int_0^1 \frac{\beta_2^{a_2-1} (1-\beta_2)^{b_2-1}}{e^{-B/\theta_2}} d\beta_2 \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{a_1} (S_m)^{-m} \text{Appel}_1 F_1 \left[ a_1, m, -b_1, 1+a_1, \frac{S_m^*}{S_m}, 1 \right] \right\} / h_1(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

## Estimateur Bayésien du point de rupture sous différentes fonctions coûts

### a. la fonction coût quadratique

La fonction coût quadratique est définie par :

$$L_1(\alpha, d) = (\alpha - d)^2$$

L'estimateur de Bayes  $m^*$  associé à la distribution marginale  $\pi_1(m | X)$  sous la fonction coût quadratique est la moyenne a posteriori de  $m$ .

L'estimateur de Bayes est :

$$\begin{aligned} m^* &= E(m) = \sum_{m=1}^{n-1} m \pi_1(m | X) \\ m^* &= \sum_{m=1}^{n-1} m \left( \frac{T(m)}{\sum_{m=1}^{n-1} T(m)} \right) \end{aligned}$$

$T_1(m)$  définie précédemment.

### b. La fonction coût absolu

La fonction coût absolu est la fonction définie par :

$$L_2(\alpha, d) = |\alpha - d|$$

L'estimateur de Bayes de  $m$  associée à la distribution marginale  $\pi_1(m | X)$  sous la fonction coût absolu est la médiane de la distribution a posteriori.

### c. La fonction coût 0-1

La fonction coût 0-1 est la fonction définie par :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } |\alpha - d| < \epsilon, \quad \epsilon > 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'estimateur de Bayes associée à la distribution marginale  $\pi_1(m | X)$  sous la fonction coût 0-1 est le mode de la distribution a posteriori.

## 2.4 Simulation

Considérons le modèle suivant

$$X_i = \begin{cases} 0.1X_{i-1} + \epsilon_i, & i = 1, 2, \dots, 10 \\ 0.3X_{i-1} + \epsilon_i, & i = 11, \dots, 20 \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Les  $\epsilon_i$  pour  $t = \overline{1, 20}$  sont supposées indépendantes

Nous allons généré 20 observations issue d'un processus autoregressif d'ordre 1 (AR(1)), donnée par le modèle(2.4.1) avec

$$\epsilon_i \sim N(0, \sigma_1^2), \text{ pour } i = 1, \dots, 10$$

$$\epsilon_i \sim N(0, \sigma_2^2), \text{ pour } i = 11, \dots, 20$$

et les  $\beta_i, i = \overline{1, 2}$  sont distribuées suivant une loi normale des paramètres respectivement  $a_1 = 0.1$  et  $a_2 = 0.1$ ,  $\mu_1 = 0.1$  et  $\mu_2 = 0.3$

$$\begin{cases} \beta_1 \sim N(\mu_1, a_1) \\ \beta_2 \sim N(\mu_2, a_2) \end{cases}$$

Les résultats observes sont données dans le tableau 2.5 suivante

<b>I</b>	$\epsilon_i$	$X_i$	<b>m</b>	$\epsilon_i$	$X_i$
1	-0.2194347	-0.2194347	11	-3.2479663	-3.4669360
2	0.4048758	0.3829323	12	-3.2668835	-4.3069643
3	1.7709775	1.8092708	13	-7.6887946	-8.908838
4	-1.8790781	-1.6981511	14	8.5584491	5.8642290
5	1.8484049	1.3199486	15	-0.7197613	-0.1007535
6	1.5994697	1.3149988	16	3.8939070	4.2057592
7	-0.6150157	-0.4419189	17	-6.9634980	-5.7017703
8	0.5532121	0.5090202	18	0.1475997	-1.5629314
9	0.1723484	0.2232504	19	-0.3870226	-0.8559020
10	-0.7522240	-0.7298990	20	0.8666289	0.698583

TABLE 2.5 – Les observations générées à partir d'un processus autorégressif d'ordre un (AR(1))

La densité a posteriori de  $m$  est donnée par :

$$\pi_1(m | X) = \frac{T_1(m)}{\sum_{m=1}^{n-1} T_1(m)}$$

Avec

$$T_1(m) = I_1(m)I_2(m)\exp\left[-\frac{1}{2}S_{m3}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)\right]\sigma_1^{-m}\sigma_2^{-(n-m)}$$

Les valeurs simulées de la distribution a posteriori marginale de  $m$  sont données par le tableau suivant

<b>m</b>	$\pi_1(m   X)$	<b>m</b>	$\pi_1(m   X)$
1	5.076146e-05	11	3.467914e-01
2	9.941465e-05	12	1.830399e-12
3	1.569535e-04	13	2.319560e-17
4	5.656141e-04	14	3.551508e-17
5	2.016433e-03	15	2.225317e-21
6	8.038438e-03	16	7.060802e-23
7	1.133415e-02	17	6.263011e-28
8	3.851864e-02	18	2.372646e-27
9	1.284848e-01	19	1.010043e-26
10	4.639798e-01		

TABLE 2.6 – Valeurs de la distribution a posteriori  $\pi_1(m | X)$  de  $m$

## Calculs des estimateurs Bayésien du point de rupture $m$ :

Nous allons utiliser les différentes fonctions coût usuelles : la quadratique, la coût 0 – 1 et l’absolue. Pour cela, nous allons calculer la moyenne, la médiane et le mode a posteriori.

### La moyenne a posteriori

La moyenne a posteriori est donnée par :

$$m_q^* = \sum_{m=1}^{n-1} m\pi_1(m | X) = 9.694367$$

### Le mode a posteriori

Nous avons calculé la plus grande valeur de  $\pi_1(m)$ , d’après les résultats  $\max(\pi_1(m)) = 0.4639798$ . La valeur correspondante à ce max est égale à 10. donc l’estimateur retrouvé est ;

$$m_{0-1}^* = 10$$

### La médiane a posteriori

Afin de calculer la médiane a posteriori, nous allons calculer la distribution a posteriori cumulée de  $m$ . Elle est donnée dans le tableau suivant :

m	$F_1(m   X)$	m	$F_1(m   X)$
1	7.305731e-05	11	7.648541e-01
2	2.312670e-04	12	8.110281e-01
3	7.029119e-04	13	9.754911e-01
4	2.493687e-03	14	9.845896e-01
5	5.119849e-03	15	9.998782e-01
6	1.408152e-02	16	9.999573e-01
7	3.609041e-02	17	9.999729e-01
8	1.134532e-01	18	1.000000e+00
9	4.096029e-01	19	1.000000e+00
10	5.787293e-01		

D'après le tableau des distributions a posteriori cumulées de  $m$ , la médiane a posteriori est la valeur de  $m$  telle que la fonction de répartition cumulative  $F_1(m | X)$  soit égale à 0,50. Dans notre cas, cette valeur est  $F_1(10 | X) = 0.57$ , ce qui correspond à la valeur la plus proche de 0,50.

Donc l'estimateur retrouvé est :

$$m_{abs}^* = 10$$

### Conclusion

D'après les résultats de simulation retrouvés, nous remarquons que la méthode bayésienne estime bien la valeur du point de rupture. Nous constatons également que, quel que soit le choix de la fonction coût (quadratique, coût 0-1 ou absolue), nous obtenons de très bons estimateurs bayésiens.

## Chapitre 3

# Approche Bayésienne de détection de rupture dans un modèle de régression

### 3.1 Introduction

La régression est un outil statistique incontournable pour l'analyse de données, largement utilisé dans des domaines comme les sciences sociales ou la médecine. Si l'on suppose généralement que les coefficients de régression sont constants, la théorie permet également de modéliser des situations où certains paramètres changent, notamment en présence d'un point de rupture signalant un changement structurel. Plusieurs travaux, tels que ceux de Holbert (1982)([15]), Broemeling & Tsurumi (1986)([6]) et Oluwadare O. Ojo(2021)([23]) ont exploré cette problématique des changements structurels dans les modèles linéaires en adoptant une approche Bayésienne. Dans ces articles, les auteurs considèrent que les erreurs du modèle suivent une loi gaussienne.

Dans notre travail, nous supposons que les erreurs suivent plutôt une loi exponentielle. Nous nous intéressons ainsi à un modèle de régression linéaire simple, comportant un seul point de rupture. Nous adoptons une approche Bayésienne afin d'estimer ce point de ce modèle, comme détaillé dans la suite et nous allons illustrer le travail avec des résultats obtenus à partir des données simulées .

### 3.2 Présentation du modèle

Soit le modèle de régression défini comme suit

$$y_t = \begin{cases} \beta_1 x_t + \varepsilon_t & t = 1, 2, \dots, m \\ \beta_2 x_t + \varepsilon_t & t = m + 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.2.1)$$

- Où  $\varepsilon_t$ , pour  $t = \overline{1 \dots n}$ , sont les erreurs du modèle, représentant des variables aléatoires i.i.d. suivant une loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{\lambda}$ .
- $\beta_1, \beta_2$  les coefficients de régression avant et après le point de rupture  $m$ , tels que  $(\beta_1) \neq (\beta_2)$ .
- $m$  est le point de rupture, c'est un paramètre aléatoire prenant la valeur  $n$  si aucune

perturbation ne se remarque. Si  $m$  prend les valeurs de l'ensemble  $\{1, \dots, n - 1\}$ , alors une seule perturbation a lieu.

- Les variables  $X_t$  représentent la ou les variables explicatives (ou prédicteurs) mesurées à l'instant  $t$ . Ces variables servent à expliquer ou prédire la variable dépendante  $Y_t$

### 3.3 Estimation Bayésienne

L'estimation Bayésienne s'appuie sur la notion de distribution a priori, qui reflète les connaissances disponibles sur les paramètres avant toute observation. Cette information initiale est actualisée à partir des données observées via la fonction de vraisemblance, ce qui conduit à la distribution a posteriori. Cette dernière combine ainsi l'information a priori et celle issue des observations pour fournir une estimation complète des paramètres.

Dans notre étude, notre objectif est de mettre un accent particulier sur la localisation du point de rupture, paramètre clé qui marque un changement structurel dans la relation étudiée. L'approche Bayésienne nous permet ainsi d'intégrer à la fois les données observées et les connaissances a priori pour obtenir des estimations plus robustes et informées.

#### 3.3.1 Les lois a priori

Les distributions a priori des paramètres sont attribuées comme suit :

- Une loi Beta pour les  $\beta_i$  avec  $i = 1, 2$ , de moyenne  $\mu_1$  et  $\mu_2$  respectivement
- Une loi uniforme discrète sur l'intervalle  $[1, n-1]$  pour le point de rupture  $m$

Ce qui nous donne

$$\begin{cases} \pi_0(\beta_1) &= \frac{\beta_1^{a_1-1}(1-\beta_1)^{b_1-1}}{B(a_1, b_1)}, & 0 < \beta_1 < 1, & a_1 > 0, & b_1 > 0 \\ \pi_0(\beta_2) &= \frac{\beta_2^{a_2-1}(1-\beta_2)^{b_2-1}}{B(a_2, b_2)}, & 0 < \beta_2 < 1, & a_2 > 0, & b_2 > 0 \\ \pi_0(\lambda_1, \lambda_2) &\propto \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \\ \pi_0(m) &= \frac{1}{n-1} \end{cases}$$

Si l'information a priori est donnée sous forme de moyennes ( $\mu_1, \mu_2$ ) et d'écart-type ( $\sigma$ ), les hypers paramètres peuvent être obtenus en résolvant un système d'équations liant ces valeurs aux moments de la distribution choisie (moyenne, variance).

$$\begin{aligned} a_i &= \sigma^{-2}[(1 - \mu_i)\mu_i^2 - \mu_i\sigma^2], & i = 1, 2 \\ b_i &= \mu_i^{-1}(1 - \mu_i)a_i, & i = 1, 2 \end{aligned}$$

Supposons que les paramètres  $\beta_1, \beta_2, \lambda_1, \lambda_2$  et  $m$  sont indépendants. La densité a priori jointe est donnée par

$$\pi_0(\beta_1, \beta_2, \lambda_1, \lambda_2, m) = k_1 \frac{\beta_1^{a_1-1} (1-\beta_1)^{b_1-1} \beta_2^{a_2-1} (1-\beta_2)^{b_2-1}}{(\lambda_1 \lambda_2)}$$

Avec

$$k_1 = \frac{1}{\beta(a_1, b_1) \beta(a_2, b_2) (n-1)}$$

**Remarque 3.3.1.1** Les paramètres  $\beta_1, \beta_2 \in R$ , mais nous avons choisi des lois a priori définies sur l'intervalle  $[0, 1]$  car nous nous intéressons à un cas particulier.

### 3.3.2 La fonction de vraisemblance

soit le modèle (3.2.1)

$$y_t = \begin{cases} \beta_1 x_t + \varepsilon_t & t = 1, 2, \dots, m \\ \beta_2 x_t + \varepsilon_t & t = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

D'où

$$\varepsilon_t = \begin{cases} y_t - \beta_1 x_t & t = 1, 2, \dots, m \\ y_t - \beta_2 x_t & t = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \epsilon_i &\sim \exp\left(\frac{1}{\lambda_1}\right), \text{ pour } i = 1, \dots, m \\ \epsilon_i &\sim \exp\left(\frac{1}{\lambda_2}\right), \text{ pour } i = m + 1, \dots, n \end{aligned}$$

La densité des  $\epsilon_i$

$$f(\epsilon_i) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_1} e^{-\frac{\epsilon_i}{\lambda_1}}, & i = 1, 2, \dots, m \\ \frac{1}{\lambda_2} e^{-\frac{\epsilon_i}{\lambda_2}}, & i = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

d'où

$$f(Z_i) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\lambda_1}\right) e^{-\frac{y_i - \beta_1 x_i}{\lambda_1}}, & i = 1, 2, \dots, m \\ \left(\frac{1}{\lambda_2}\right) e^{-\frac{y_i - \beta_2 x_i}{\lambda_2}}, & i = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

Comme les  $\varepsilon_i$  sont indépendantes, Alors la fonction de vraisemblance est donnée par

$$\begin{aligned}
 L(\beta_1, \beta_2, \lambda_1, \lambda_2, m \mid Z) &= \prod_{i=1}^n f_{Z_i}(z_i) \\
 &= \prod_{i=1}^m f_{Z_i}(z_i) \times \prod_{i=m+1}^n f_{Z_i}(z_i) \\
 &= \prod_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_1} \exp\left(-\frac{1}{\lambda_1}(y_i - \beta_1 x_i)\right) \times \prod_{i=m+1}^n \frac{1}{\lambda_2} \exp\left(-\frac{1}{\lambda_2}(y_i - \beta_2 x_i)\right) \\
 &= \frac{1}{\lambda_1^m} \exp\left(-\frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^m (y_i - \beta_1 x_i)\right) \\
 &\quad \times \frac{1}{\lambda_2^{n-m}} \exp\left(-\frac{1}{\lambda_2} \sum_{i=m+1}^n (y_i - \beta_2 x_i)\right) \\
 &= \frac{1}{\lambda_1^m} \exp\left[-\frac{1}{\lambda_1} \left(\sum_{i=1}^m y_i - \beta_1 \sum_{i=1}^m x_i\right)\right] \\
 &\quad \times \frac{1}{\lambda_2^{n-m}} \exp\left[-\frac{1}{\lambda_2} \left(\sum_{i=m+1}^n y_i - \beta_2 \sum_{i=m+1}^n x_i\right)\right].
 \end{aligned}$$

Alors,

$$L(\beta_1, \beta_2, \lambda_1, \lambda_2, m \mid Z) = \lambda_1^{-m} \cdot e^{-A/\lambda_1} \cdot \lambda_2^{-(n-m)} \cdot e^{-B/\lambda_2}, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

où

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{i=1}^m y_i - \beta_1 \sum_{i=1}^m x_i, & B &= \sum_{i=m+1}^n y_i - \beta_2 \sum_{i=m+1}^n x_i \\
 A &= S_m - \beta_1 S_m^*, & B &= S_n - \beta_2 S_n^*
 \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 s_m &= \sum_{i=1}^m Y_i \\
 s_m^* &= \sum_{i=1}^m X_i \\
 s_n &= \sum_{i=m+1}^n Y_i \\
 s_n^* &= \sum_{i=m+1}^n X_i
 \end{aligned}$$

### 3.3.3 La densité a posteriori jointe des paramètres $(\beta_1, \beta_2, \lambda_1, \lambda_2$ et $m)$

$$\begin{aligned}
 \pi_1(\beta_1, \beta_2, \lambda_1, \lambda_2, m \mid Z) &= \frac{L(\beta_1, \beta_2, \lambda_1, \lambda_2, m \mid Z) \pi_0(\beta_1, \beta_2, \lambda_1, \lambda_2, m)}{\sum_{m=1}^{n-1} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} L(\beta_1, \beta_2, \lambda_1, \lambda_2, m \mid X) \pi_0(\beta_1, \beta_2, \lambda_1, \lambda_2, m) d\lambda_1 d\lambda_2 d\beta_1 d\beta_2} \\
 &= \frac{\lambda_1^{-m} \cdot e^{-A/\lambda_1} \cdot (\lambda_2)^{-(n-m)} \cdot e^{-B/\lambda_2} \times k_1 \cdot \frac{\beta_1^{a_1-1} (1-\beta_1)^{b_1-1} \beta_2^{a_2-1} (1-\beta_2)^{b_2-1}}{\lambda_1 \lambda_2}}{h(z)}
 \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 h(z) &= \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} L(\beta_1, \beta_2, \lambda_1, \lambda_2, m | X) \pi_0(\beta_1, \beta_2, \lambda_1, \lambda_2, m) d\lambda_1 d\lambda_2 d\beta_1 d\beta_2 \\
 &= \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda_1^{-m} \cdot e^{-A/\lambda_1} \cdot \lambda_2^{-(n-m)} \cdot e^{-B/\lambda_2} \\
 &\quad \times k_1 \cdot \frac{\beta_1^{a_1-1}(1-\beta_1)^{b_1-1} \cdot \beta_2^{a_2-1}(1-\beta_2)^{b_2-1}}{\lambda_1 \lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2 d\beta_1 d\beta_2
 \end{aligned}$$

Nous calculons  $h(z)$

$$\begin{aligned}
 h(z) &= \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \lambda_1^{-m} \cdot e^{-A/\lambda_1} \cdot \lambda_2^{-(n-m)} \cdot e^{-B/\lambda_2} \\
 &\quad \times k_1 \cdot \frac{\beta_1^{a_1-1}(1-\beta_1)^{b_1-1} \cdot \beta_2^{a_2-1}(1-\beta_2)^{b_2-1}}{\lambda_1 \lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2 \beta_1 \beta_2 \\
 &= k_1 \cdot \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{+\infty} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda_1} \frac{1}{\lambda_1^m} \cdot e^{-A/\lambda_1} \lambda_2^{-(n-m)}}_{I_1} \\
 &\quad \times e^{-B/\lambda_2} \frac{\beta_1^{a_1-1}(1-\beta_1)^{b_1-1} \cdot \beta_2^{a_2-1}(1-\beta_2)^{b_2-1}}{\lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2 d\beta_1 d\beta_2
 \end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda_1} \frac{1}{\lambda_1^m} \cdot e^{-A/\lambda_1} d\lambda_1$$

On pose :

$$\begin{aligned}
 \mu &= \frac{1}{\lambda_1} \Rightarrow d\mu = -\frac{1}{\lambda_1^2} d\lambda_1 \\
 \lambda_1 &= \frac{1}{\mu} \Rightarrow d\lambda_1 = -\frac{1}{\mu^2} d\mu
 \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mu^2} \mu^{m+1} \cdot e^{-A\mu} d\mu \\
 &= \int_0^{+\infty} \mu^{m-1} \cdot e^{-A\mu} d\mu
 \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de la densité d'une loi Gamma

$$\int_0^{\infty} \frac{b^a}{\Gamma(a)} r^{a-1} e^{-br} dr = 1$$

Donc

$$I_1 = \frac{\Gamma(m)}{A^m} \sim \Gamma(m, A)$$

on calcul  $h(Z)$  par rapport a  $\lambda_2$

$$h(z) = \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\lambda_2} \cdot \lambda_2^{-(n-m)} \cdot e^{-B/\lambda_2}}_{I_2} \cdot \frac{\Gamma(m)}{A^m} \\ \times k_1 \cdot \beta_1^{a_1-1} (1 - \beta_1)^{b_1-1} \cdot \beta_2^{a_2-1} (1 - \beta_2)^{b_2-1} d\lambda_2 d\beta_1 d\beta_2$$

On a

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda_2} \lambda_2^{-(n-m)} \cdot e^{-B/\lambda_2} d\lambda_2$$

Posons

$$\mu = \frac{1}{\lambda_2} \Rightarrow d\mu = -\frac{1}{\lambda_2^2} d\lambda_2 \\ \lambda_2 = \frac{1}{\mu} \Rightarrow d\lambda_2 = -\frac{1}{\mu^2} d\mu$$

Alors

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \mu^{n-m+1} \cdot e^{-B\mu} \cdot \frac{1}{\mu^2} d\mu \\ = \int_0^{+\infty} \mu^{n-m-1} \cdot e^{-B\mu} d\mu \sim \Gamma(n - m, B) \\ = \frac{\Gamma(n - m)}{B^{n-m}}$$

On calcul cette fois par rapport à  $\beta_1$  et  $\beta_2$

$$h(z) = \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{B^{n-m}} \cdot \beta_2^{a_2-1} (1 - \beta_2)^{b_2-1} \\ \times k_1 \cdot \frac{\Gamma(m)}{A^m} \cdot \Gamma(n - m) \cdot \beta_1^{a_1-1} (1 - \beta_1)^{b_1-1} d\beta_1 d\beta_2 \\ = \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^1 \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{B^{n-m}} \cdot \beta_2^{a_2-1} (1 - \beta_2)^{b_2-1}}_{I_3} \\ \times k_1 \cdot \frac{\Gamma(m)}{A^m} \cdot \Gamma(n - m) \cdot \beta_1^{a_1-1} (1 - \beta_1)^{b_1-1} d\beta_1 d\beta_2$$

Alors

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 \beta_2^{a_2-1} (1 - \beta_2)^{b_2-1} \cdot \frac{1}{B^{n-m}} d\beta_2 \\ &= \int_0^1 \beta_2^{a_2-1} (1 - \beta_2)^{b_2-1} \cdot \frac{1}{[S_n - \beta_2 S_n^*]^{n-m}} d\beta_2 \end{aligned}$$

Avec  $B = S_n - \beta_2 S_n^*$

Donc

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 [S_n - \beta_2 S_n^*]^{-(n-m)} \beta_2^{a_2-1} (1 - \beta_2)^{b_2-1} d\beta_2 \\ &= \int_0^1 [S_n - \beta_2 S_n^*]^{-(n-m)} \beta_2^{a_2-1} (1 - \beta_2)^{b_2-1} d\beta_2 \\ &= [S_n]^{-(n-m)} \int_0^1 \left[ 1 - \beta_2 \left( \frac{S_n^*}{S_n} \right) \right]^{-(n-m)} \beta_2^{a_2-1} (1 - \beta_2)^{b_2-1} d\beta_2 \end{aligned}$$

**Remarque 3.3.3.1** La fonction  $Appel_1 F_1$  est une fonction hypergéométrique à deux variables qui généralise la fonction hypergéométrique gaussienne

$$Appel_1 F_1(a_1, b_1, b_2; c; x, y) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(c-a_1)} \int_0^1 u^{a_1-1} (1-u)^{c-a_1-1} (1-ux)^{-b_1} (1-uy)^{-b_2} du$$

Ce qui nous donne

$$\int_0^1 \left[ 1 - \beta_2 \left( \frac{S_n^*}{S_n} \right) \right]^{-(n-m)} \beta_2^{a_2-1} (1 - \beta_2)^{b_2-1} d\beta_2 = Appel_1 F_1 \left( a_2; -(n-m), -b_2 + 1; a_2 + 1; \frac{S_n^*}{S_n}, 1 \right)$$

Donc

$$I_3 = [S_n]^{-(n-m)} \cdot \frac{\Gamma(a_2)\Gamma(1)}{\Gamma(a_2+1)} \cdot Appel_1 F_1 \left( a_2; -(n-m), -b_2 + 1; a_2 + 1; \frac{S_n^*}{S_n}, 1 \right)$$

Calculons par rapport à  $\beta_1$

$$\begin{aligned} h(Z) &= \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^1 \frac{1}{A^m} \cdot \beta_1^{a_1-1} (1 - \beta_1)^{b_1-1} \cdot \Gamma(n-m) \cdot \Gamma(m) \\ &\quad \times k_1 \frac{1}{a_2} [S_n - S_m]^{-(n-m)} \cdot Appel_1 F_1 \left( a_2; -(n-m), -b_2 + 1; a_2 + 1; \frac{S_n^*}{S_n}, 1 \right) d\beta_1 \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{A^m} \cdot \beta_1^{a_1-1} (1 - \beta_1)^{b_1-1}}_{I_4} \cdot \Gamma(n-m) \cdot \Gamma(m) \\ &\quad \times k_1 \frac{1}{a_2} [S_n]^{-(n-m)} \cdot Appel_1 F_1 \left( a_2; -(n-m), -b_2 + 1; a_2 + 1; \frac{S_n^*}{S_n}, 1 \right) d\beta_1 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_0^1 \frac{1}{A^m} \beta_1^{a_1-1} (1 - \beta_1)^{b_1-1} d\beta_1 \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{(S_m - \beta_1 S_m^*)^m} \beta_1^{a_1-1} (1 - \beta_1)^{b_1-1} d\beta_1 \\
 &= \int_0^1 (S_m - \beta_1 S_m^*)^{-m} \beta_1^{a_1-1} (1 - \beta_1)^{b_1-1} d\beta_1 \\
 &= (S_m)^{-m} \int_0^1 \left[ 1 - \beta_1 \frac{S_m^*}{S_m} \right]^{-m} \beta_1^{a_1-1} (1 - \beta_1)^{b_1-1} d\beta_1
 \end{aligned}$$

Après calcul, on obtient

$$\int_0^1 \left[ 1 - \beta_1 \frac{S_m^*}{S_m} \right]^{-m} \beta_1^{a_1-1} (1 - \beta_1)^{b_1-1} d\beta_1 = \text{Appel}_1 F_1 \left( a_1; -m, -b_1 + 1; a_1 + 1; \frac{S_m^*}{S_m}, 1 \right)$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
 I_4 &= (S_m)^{-m} \cdot \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(1)}{\Gamma(a_1 + 1)} \cdot \text{Appel}_1 F_1 \left( a_1; -(n - m), -b_2 + 1; a_2 + 1; \frac{S_m^*}{S_m}, 1 \right) \\
 &= (S_m)^{-m} \cdot \frac{1}{a_1} \cdot \text{Appel}_1 F_1 \left( a_1; -(n - m), -b_2 + 1; a_2 + 1; \frac{S_m^*}{S_m}, 1 \right)
 \end{aligned}$$

D'ou

$$\begin{aligned}
 h(Z) &= \sum_{m=1}^{n-1} k_1 \cdot \Gamma(m)\Gamma(n - m) \\
 &\quad \times \left\{ \frac{1}{a_2} [S_n - S_m]^{-(n-m)} \cdot \text{Appel}_1 F_1 \left( a_2; -(n - m), -b_2 + 1; a_2 + 1; \frac{S_n^*}{S_n}, 1 \right) \right. \\
 &\quad \left. \times (S_m)^{-m} \cdot \frac{1}{a_1} \cdot \text{Appel}_1 F_1 \left( a_1; -m, -b_1 + 1; a_1 + 1; \frac{S_m^*}{S_m}, 1 \right) \right\} \\
 h(Z) &= \sum_{m=1}^{n-1} T(m)
 \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 T(m) &= k_1 \cdot \Gamma(m)\Gamma(n - m) \quad \times \left\{ \frac{1}{a_2} [S_n - S_m]^{-(n-m)} \cdot \text{Appel}_1 F_1 \left( a_2; -(n - m), -b_2 + 1; a_2 + 1; \frac{S_n^*}{S_n}, 1 \right) \right. \\
 &\quad \left. \times (S_m)^{-m} \cdot \frac{1}{a_1} \cdot \text{Appel}_1 F_1 \left( a_1; -m, -b_1 + 1; a_1 + 1; \frac{S_m^*}{S_m}, 1 \right) \right\}
 \end{aligned}$$

### 3.3.4 La densité a posteriori marginale de point de rupture $m$

$$\begin{aligned}
 \pi(m | Z) &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \pi_1(\beta_1, \beta_2, \lambda_1, \lambda_2, m | Z) d\lambda_1 d\lambda_2 d\beta_1 d\beta_2 \\
 &= \frac{1}{\sum_{m=1}^{n-1} T(m)} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} L(\beta_1, \beta_2, \lambda_1, \lambda_2, m | X) \pi_0(\beta_1, \beta_2, \lambda_1, \lambda_2, m) d\lambda_1 d\lambda_2 d\beta_1 d\beta_2 \\
 &= \frac{T(m)}{\sum_{m=1}^{n-1} T(m)}
 \end{aligned}$$

D'ou la densité a posteriori marginale de point de rupture est

$$\pi_1(m | Z) = \frac{T(m)}{\sum_{m=1}^{n-1} T(m)}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 T(m) &= k_1 \cdot \Gamma(m) \Gamma(n-m) \times \left\{ \frac{1}{a_2} [S_n - S_m]^{-(n-m)} \cdot \text{Appel}_1 F_1 \left( a_2; -(n-m), -b_2+1; a_2+1; \frac{S_n^*}{S_n}, 1 \right) \right. \\
 &\quad \left. \times (S_m)^{-m} \cdot \frac{1}{a_1} \cdot \text{Appel}_1 F_1 \left( a_1; -m, -b_1+1; a_1+1; \frac{S_m^*}{S_m}, 1 \right) \right\}
 \end{aligned}$$

## Estimateur Bayésien du point de rupture sous différentes fonctions coûts

### a.la fonction coût quadratique

La fonction coût quadratique est définie par :

$$L_1(\alpha, d) = (\alpha - d)^2$$

L'estimateur de Bayes  $m^*$  associé à la distribution marginale  $\pi_1(m | Z)$  sous la fonction coût quadratique est la moyenne a posteriori de  $m$ .

L'estimateur de Bayes est :

$$\begin{aligned}
 m^* &= E(m) = \sum_{m=1}^{n-1} m \pi_1(m | Z) \\
 m^* &= \sum_{m=1}^{n-1} m \left( \frac{T(m)}{\sum_{m=1}^{n-1} T(m)} \right)
 \end{aligned}$$

$T(m)$  est définie précédemment.

### b.La fonction coût absolu

La fonction coût absolu est la fonction définie par :

$$L_2(\alpha, d) = |\alpha - d|$$

L'estimateur de Bayes de  $m$  associée à la distribution marginale  $\pi_1(m | Z)$  sous la fonction coût absolu est la médiane de la distribution a posteriori.

### c.La fonction coût 0-1

La fonction coût 0-1 est la fonction définie par :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } |\alpha - d| < \epsilon, \quad \epsilon > 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'estimateur de Bayes associée à la distribution marginale  $\pi_1(m | Z)$  sous la fonction coût 0-1 est le mode de la distribution a posteriori.

## 3.4 Application et simulation

Considérons le modèle (3.2.1) suivant

$$y_t = \begin{cases} 0.1x_t + \varepsilon_t & t = 1, 2, \dots, 10 \\ 0.8x_t + \varepsilon_t & t = 11, \dots, 20 \end{cases}$$

Les  $\varepsilon_t$  pour  $t = \overline{1, 20}$  sont supposées indépendantes

Nous allons généré 20 observations d'un modèle de régression simple donne par (3.2.1) avec  $\lambda_1 = 1.5$  et  $\lambda_2 = 1$

$$\begin{cases} \varepsilon_t \sim \exp(\frac{1}{\lambda_1}) & \text{pour } t = 1, 2, \dots, 10 \\ \varepsilon_t \sim \exp(\frac{1}{\lambda_2}) & \text{pour } t = 11, 2, \dots, 20 \end{cases}$$

et les  $\beta_i, i = \overline{1, 2}$  sont distribuées suivant une loi Bêta des paramètres respectivement  $a_1 = 1.5$  et  $a_2 = 0.5$  ,  $b_1 = 1.7$  et  $b_2 = 1.5$

$$\begin{cases} \beta_1 \sim \text{beta}(a_1, b_1) \\ \beta_2 \sim \text{beta}(a_2, b_2) \end{cases}$$

Les résultats observes sont données dans le tableau 3.1 suivante

$t$	$\epsilon_t$	$y_t$	$t$	$\epsilon_t$	$y_t$
1	0.8799806	0.9193867	11	0.1664801	0.2513972
2	0.4875617	0.5340523	12	0.5702717	1.1053567
3	2.5660874	2.6228316	13	0.5221066	0.6860001
4	3.4224967	3.4861430	14	0.1038401	0.7552155
5	4.4347814	4.5331150	15	0.1666734	0.6855342
6	2.5930574	2.6674530	16	1.5687757	2.1618435
7	2.3829318	2.4177535	17	0.4288374	0.4478874
8	1.3924244	1.4651128	18	2.7828935	3.0859326
9	2.3356759	2.3733740	19	0.7673925	1.4894777
10	0.1394189	0.1523007	20	0.3440224	0.9256907

TABLE 3.1 – Les observations générées d’une régression simple

La densité a posteriori de  $m$  est donnée par :

$$\pi_1(m | Z) = \frac{T(m)}{\sum_{m=1}^{n-1} T(m)}$$

Avec

$$T(m) = k_1 \cdot \Gamma(m)\Gamma(n-m) \times \left\{ \frac{1}{a_2} [S_n - S_m]^{-(n-m)} \cdot \text{Appel}_1 F_1 \left( a_2; -(n-m), -b_2+1; a_2+1; \frac{S_n^*}{S_n}, 1 \right) \right. \\ \left. \times (S_m)^{-m} \cdot \frac{1}{a_1} \cdot \text{Appel}_1 F_1 \left( a_1; -m, -b_1+1; a_1+1; \frac{S_m^*}{S_m}, 1 \right) \right\}$$

Les valeurs simulées de la distribution a posteriori marginale de  $m$  sont données par le tableau suivant

$m$	$\pi_1(m   Z)$	$m$	$\pi_1(m   Z)$
1	0.05462802	11	0.03166367
2	0.06167917	12	0.02501520
3	0.02323350	13	0.02069439
4	0.02136203	14	0.01952739
5	0.04428791	15	0.02367177
6	0.05900891	16	0.03101183
7	0.09865113	17	0.03887488
8	0.07091884	18	0.05653042
9	0.14503867	19	0.11554197
10	0.05866029		

TABLE 3.2 – La distribution a posteriori de  $m$

## Calculs des estimateurs Bayésien du point de rupture $m$ :

Nous allons utiliser les différentes fonctions coût usuelles : la quadratique, la coût 0 – 1 et l’absolue. Pour cela, nous allons calculer la moyenne, la médiane et le mode a posteriori.

### La moyenne a posteriori

La moyenne a posteriori est donnée par :

$$m_q^* = \sum_{m=1}^{n-1} m\pi_1(m | Z) = 9,974365$$

### Le mode a posteriori

Nous avons calculé la plus grande valeur de  $\pi_1(m)$ , d’après les résultats  $\max(\pi_1(m)) = 0,1450387$ . La valeur correspondante à ce max est égale à 9. donc l’estimateur retrouvé est ;

$$m_{0-1}^* = 9$$

### La médiane a posteriori

Afin de calculer la médiane a posteriori, nous allons calculer la distribution a posteriori cumulée de  $m$ . Elle est donnée dans le tableau suivant :

$m$	$F_1(m   Z)$	$m$	$F_1(m   Z)$
1	0.05462802	11	0.66913215
2	0.11630719	12	0.69414735
3	0.13954070	13	0.71484174
4	0.16090273	14	0.73436913
5	0.20519064	15	0.75804090
6	0.26419956	16	0.78905273
7	0.36285069	17	0.82792762
8	0.43376952	18	0.88445803
9	0.57880819	19	1.00000000
10	0.63746848		

TABLE 3.3 – La distribution a posteriori cumulée

D'après le tableau des distributions a posteriori cumulées de  $m$ , la médiane a posteriori est la valeur de  $m$  telle que la fonction de répartition cumulative  $F_1(m | Z)$  soit égale à 0,50. Dans notre cas, cette valeur est  $F_1(10 | Z) = 0.57$ , ce qui correspond à la valeur la plus proche de 0,50.

Donc l'estimateur retrouvé est :

$$m_{abs}^* = 9$$

### Discussion des résultats

D'après les résultats obtenus lors des simulations, nous constatons que la méthode Bayésienne permet d'estimer avec précision le point de rupture. Nous remarquons également que, quel que soit le type de fonction coût utilisé (quadratique, absolue ou 0-1), nous retrouvons des bons estimateurs .

Pour illustrer ces résultats nous avons simulés 10000 échantillons du modèle( 3.2.1), les résultats obtenus pour différents valeurs  $m$  et  $n$  pour la fonction coût quadratique sont donnée dans le tableau suivant

$n$	$m$	$m^*$
20	5	8.8
	10	10.74
	12	11.02
	18	17.44
50	8	6.37
	17	12.93
	25	26.07
	45	32.84
100	8	13.98
	45	42.50
	50	52.24
	70	66.88

TABLE 3.4 – les valeurs de  $n$ ,  $m$ ,et  $m^*$

Les résultats retrouvés indiquent que la précision des estimations s'améliore lorsque la taille de l'échantillon est réduite , plus la contamination s'éloigne du centre, moins la précision est bonne.

# Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la problématique de la détection de points de rupture dans les modèles statistiques. Nous avons tout d'abord présenté les différents types de ruptures ainsi que les principaux modèles permettant de les représenter, tout en introduisant les notions fondamentales qui leur sont associées. Nous avons ensuite étudié les problèmes de rupture et les diverses méthodes de détection associées. Parmi ces méthodes, nous avons examiné les approches classiques permettant de détecter la présence d'une rupture, ainsi que l'approche Bayésienne appliquée à différents modèles, notamment dans un cadre gaussien, les modèles autorégressifs AR(1) avec erreurs gaussiennes et exponentielles. L'approche Bayésienne, de par sa souplesse et sa capacité à intégrer l'incertitude, s'est révélée particulièrement adaptée aux problèmes de détection de rupture. Elle permet non seulement d'estimer la position des ruptures, mais aussi d'en évaluer la vraisemblance selon différents critères.

Enfin, nous avons mis en œuvre une étude par simulation dans laquelle nous avons appliqué l'estimation Bayésienne à un modèle de régression linéaire simple comportant un point de rupture. Les résultats obtenus à l'aide des trois estimateurs bayésiens : moyenne, mode et médiane a posteriori, se sont révélés satisfaisants, confirmant ainsi la pertinence de cette approche dans un contexte appliqué.

Comme perspectives, on peut utiliser d'autres fonctions coût, d'autres lois a priori, étudier d'autres modèles et s'intéresser à l'amplitude de la contamination ne pas seulement à son lieu. Intégrer des méthodes numériques plus performantes pour l'estimation des lois a posteriori (ex. : méthodes MCMC).

# Bibliographie

- [1] ABDELLI, Z. « Détection de ruptures dans les modèles AR(p) ». Thèse de doctorat. Université «8 Mai 1945» – Guelma, 1993.
- [2] BARDET, J.-M. et al. « Wavelet estimator of long-range dependent processes ». In : *Statistical Inference for Stochastic Processes* 5 (2002), p. 61-82. DOI : 10.1023/A:1013890023731.
- [3] BELKACEM, C. et FELLAG, H. « Bayesian change-point estimation in the presence of a single outlier ». In : *Afrika Statistika* 7 (2012), p. 381-390.
- [4] BHATTACHARYA, P. K. « Some Aspects of Change-Point Analysis ». In : *Lecture Notes-Monograph Series*. T. 23. Accessed 7 May 2025. Institute of Mathematical Statistics, 1994, p. 28-56. URL : <http://www.jstor.org/stable/4355761>.
- [5] BROEMELING, L. D. et HOLBERT, D. « Bayesian inference related to shifting sequences and two-phases regression ». In : *Communications in Statistics - Theory and Methods* 6.3 (1977), p. 265-275.
- [6] BROEMELING, L. D. et TSURUMI, H. « Bayesian analysis of structural change in linear models ». In : *Journal of Econometrics* 32.1 (1986). Supplement, p. 45-65.
- [7] BROWN, R. L., DURBIN, J. et EVANS, J. M. « Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships over Time ». In : *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 37.2 (1975), p. 149-192.
- [8] CHERNOFF, H. et ZACKS, S. « Estimating the current mean of a normal distribution which is subject to changes in time ». In : *The Annals of Mathematical Statistics* 35.3 (1964), p. 999-1018.
- [9] CHOW, G. C. « Tests of Equality Between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions ». In : *Econometrica* 28.3 (1960), p. 591-605. DOI : 10.2307/1910133.
- [10] FEARNHEAD, P. « Exact and efficient Bayesian inference for multiple change-point problems ». In : *Statistics and Computing* 16.2 (2006), p. 203-213.
- [11] FERREIRA, J. T. « Bayesian analysis of change-point problems ». In : *Biometrika* 62.2 (1975), p. 371-383.
- [12] FOTOPOULOS, S. et al. « Multiple change-point detection in time series ». In : *Statistical Methods and Applications* 19.2 (2010), p. 123-142.
- [13] FOTOPOULOS, S. B., JANDHYALA, V. K. et KAPALOVA, A. « Exact asymptotic distribution of change-point MLE for change in the mean of Gaussian sequences ». In : *The Annals of Applied Statistics* 4.2 (2010), p. 1081-1104. DOI : 10.1214/09-AOAS294.
- [14] HINKLEY, D. V. « Inference about the change-point in a sequence of random variables ». In : *Biometrika* 59.3 (1972), p. 509-523. DOI : 10.1093/biomet/59.3.509.
- [15] HOLBERT, D. « A Bayesian analysis of a switching linear model ». In : *Journal of Econometrics* 19.1 (mai 1982), p. 77-87.
- [16] JAMES, B., JAMES, K. L. et SIEGMUND, D. « Tests for a Change-Point ». In : *Biometrika* 74.1 (1987), p. 71-83. DOI : 10.1093/biomet/74.1.71. URL : <https://www.jstor.org/stable/2336022>.
- [17] JAMES, B. et al. « Tests for a Change-Point ». In : *Biometrika* 74.1 (1987). Accessed 7 May 2025, p. 71-83. DOI : 10.2307/2336022. URL : <https://doi.org/10.2307/2336022>.
- [18] JARUŠKOVÁ, D. « Change-point estimator in gradually changing sequences ». In : *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 39.3 (1998), p. 551-561. URL : <https://eudml.org/doc/248232>.
- [19] LAVIELLE, M. et MOULINES, E. « Detection of multiple changes in a sequence of dependent variables ». In : *Signal Processing* 81.1 (2001), p. 39-53. DOI : 10.1016/S0165-1684(00)00112-3.

- [20] LORDEN, G. « Procedures for reacting to a change in distribution ». In : *Annals of Mathematical Statistics* 42.6 (1971), p. 1897-1908. DOI : 10.1214/aoms/1177693055.
- [21] MANN, H. B. et WHITNEY, D. R. « On a Test of Whether One of Two Random Variables Is Stochastically Larger Than the Other ». In : *The Annals of Mathematical Statistics* 18.1 (1947), p. 50-60. DOI : 10.1214/aoms/1177730491.
- [22] MOUSTAKIDES, G. V. « Optimal stopping times for detecting changes in distributions ». In : *Annals of Statistics* 14.4 (1986), p. 1379-1387. DOI : 10.1214/aos/1176350164.
- [23] OJO, O. O. « Bayesian Inference on Regression Model with an Unknown Change Point ». In : *Asian Journal of Probability and Statistics* 13.2 (2021), p. 48-55. DOI : 10.9734/ajpas/2021/v13i230305.
- [24] PAGE, E. S. « Continuous Inspection Schemes ». In : *Biometrika* 41.1/2 (1954), p. 100-115. DOI : 10.1093/biomet/41.1-2.100.
- [25] PAGE, E. S. « A test for a change in a parameter occurring at an unknown point ». In : *Biometrika* 42.3/4 (1955), p. 523-527.
- [26] PAGE, E. S. « On problems in which a change in a parameter occurs at an unknown point ». In : *Biometrika* 44.1/2 (1957), p. 248-252.
- [27] PANDYA, M. « Bayesian Estimation of AR (1) with Change Point under Asymmetric Loss Functions ». In : *Statistics Research Letters (SRL)* 2.2 (2013), p. 8. URL : [http://www.arpapress.com/Volumes/Vol13Issue1/IJRRAS\\_13\\_1\\_04.pdf](http://www.arpapress.com/Volumes/Vol13Issue1/IJRRAS_13_1_04.pdf).
- [28] PANDYA, M., BHATT, K. et PANDYA, H. « Bayesian estimation of change-point autoregressive process ». In : (2012), p. 41-52.
- [29] PETTITT, A. N. « A non-parametric approach to the change-point problem ». In : *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)* 28.2 (1979), p. 126-135. DOI : 10.2307/2346729. URL : <https://www.jstor.org/stable/2346729>.
- [30] PLOTR, J. et KOKOSZKA, P. « Detection of changes in ARCH models ». In : *Journal of Time Series Analysis* 21.6 (2000), p. 705-722.
- [31] REEVES, J. et al. « A Comparison of Various Changepoint Detection Techniques for Climate Data ». In : *Journal of Applied Meteorology and Climatology* 46.6 (2007), p. 900-915.
- [32] RIGAILL, G. et al. « Pruned dynamic programming for optimal multiple change-point detection ». In : *Journal of Computational and Graphical Statistics* 22.3 (2012), p. 671-689.

# Abstract

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la problématique de la détection de points de rupture dans les modèles statistiques. Nous avons d'abord présenté les différents types de ruptures ainsi que les principaux modèles permettant de les représenter, tout en introduisant les notions fondamentales associées. Ensuite, nous avons étudié les diverses méthodes de détection, qu'elles soient classiques ou bayésiennes, en particulier dans des cadres gaussiens et autorégressifs AR(1) avec erreurs gaussiennes et exponentielles. L'approche bayésienne, de par sa flexibilité et sa capacité à intégrer l'incertitude, s'est révélée particulièrement bien adaptée à ce type de problèmes. Enfin, une étude par simulation a été réalisée sur un modèle de régression linéaire simple comportant une rupture, permettant d'évaluer l'efficacité des estimateurs bayésiens (moyenne, médiane, mode a posteriori), avec des résultats concluants.

In this work, we focused on the issue of change-point detection in statistical models. We first introduced the different types of structural breaks and the main models used to represent them, while presenting the fundamental concepts involved. We then explored various detection methods, both classical and Bayesian, particularly within Gaussian frameworks and AR(1) autoregressive models with Gaussian and exponential errors. The Bayesian approach, due to its flexibility and ability to incorporate uncertainty, proved to be particularly suitable for this type of problem. Finally, we conducted a simulation study on a simple linear regression model with a structural break, demonstrating the effectiveness of Bayesian estimators (posterior mean, median, and mode), with satisfactory results.

**Mots-clés :** Détection de rupture, changement de structure, modèles statistiques, change point, approche Bayésienne, régression linéaire, simulation, moyenne a posteriori, médiane a posteriori, mode a posteriori, simulation numérique, incertitude, erreurs gaussiennes, erreurs exponentielles, tests d'hypothèses, formule de Bayes, estimateurs, fonctions coûts.