

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUDE MAMMERI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

**Mémoire de Fin
d'Etudes
En vue de l'obtention
du diplôme
de MASTER ACADEMIQUE en Electronique**
Spécialité : Télécommunication et Réseaux.
Filière : Génie Electrique.

Thème

**Analyse des signaux non-stationnaires
par l'opérateur d'énergie Teager-Kaiser
Application aux images sonars.**

Mémoire soutenu publiquement le 17 juin 2014

Présenté par :

M^r Kaci ISSAOUN
Melle Nassima FODIL

Mémoire dirigé par

M^r ATTAF Youcef

Promotion 2013-2014



Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents

Ma sœur Karima et son mari Madjid,

Leurs enfants Ciline, Aksil et Alicia

Ma sœur Nacira et son mari Mokrane et leur enfants Samy et lyna,

Ma sœur Radia qui ma soutenue durant mes études et son mari Hamid

Ma petite sœur lynda et son mari Jughurtha

Mon adorable frère Rezak

Tous mes ami(e) s

Nassima



Remerciements

Nous remercions le bon dieu qui nous a aidée à surmonter toutes les difficultés rencontrées au long de cette période pour ramener à terme ce travail.

Nous tenons à remercier et à exprimer notre profonde gratitude à notre promoteur Monsieur Attaf qui nous a suivis durant cette période à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Nous tenons à remercier les membres de jury d'avoir accepté de juger notre travail.



Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

- ✓ Mes parents et ma grand-mère.
- ✓ Mes frères (Farid et Hakim).
- ✓ Mes sœurs (Karima, Farida, Razika).
- ✓ Aux amis de cœurs Belaid et Amazigh.
- ✓ AMADLEDU Lynda.
- ✓ Aux souvenirs ineffaçables à l'université.

ISSAOUN Kaci

Chapitre I :

Figure I.1 : Représentation d'un signal physique réel	3
Figure I.2 : Evolution d'un signal à travers une chaîne d'acquisition et de restitution de données sans modification de valeurs. T_e est la période d'échantillonnage et T_s la période restitution supposée égale à T_e	5
Figure I.3 : Périodisation du spectre du signal échantillonné	6
Figure 1.4 : Les quatre types de signaux classés suivant leur morphologie (continu ou discret)	7
Figure 1.5 : Schéma de principe du traitement de signal	10
Figure 1.6 : Illustration de la modulation d'amplitude	11
Figure I.7 : Représentation fréquentielle d'un signal FM	12

Chapitre II :

Figure II.1 : Classification des signaux physiques	15
Figure II.2 : Signaux mono-composante et multi-composantes : évolution théorique des FI au cours du temps	16
Figure II.3 : Description temps-fréquence d'un signal par TWV	21
Figure II.4 : Propriétés d'une ondelette mère, contractée et dilatée	24
Figure II.5 : Principe d'estimation de la FI via le signal analytique $Z_x(t)$ de ()	27
Figure II.6 : Comparaison et estimation des FI d'un signal multi-composantes à partir de la transformée de Hilbert	29

Chapitre III :

Figure (III-1) : L'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser dépiste l'énergie fournie par la source sinusoïdale (normalisé par unité de masse ⁻¹) qui engendre ()	34
---	----

Chapitre IV :

Figure IV.1 : Les signaux $x(t)$ et $y(t)$ et les FI linéaires correspondantes	61
Figure IV.2 : Mesure d'interaction de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ par Ψ_B	62
Figure IV.3 : Images Sonar (Mine (a), Mine (b), Mine (c))	63
Figure IV.4 : Images Sonar (Mine (a), Mine (b), Mine (c))	64
Figure IV.5 : Application de DESA sur les trois images	64
Figure IV.6 : Application de DHODA sur les trois images	64

Introduction générale	1
Chapitre I : Notions et définitions fondamentales sur les signaux.	
Introduction	3
I.1 Définitions de base	3
I.1.1 Signal.....	3
I.1.2 Bruit	3
I.1.3 Rapport signal sur bruit	3
I.1.4 Système	4
I.1.5 Produit de convolution	4
I.1.6 Echantillonnage et théorème de Shanon	4
I.2 Classification des signaux	6
I.2.1 Classification phénoménologique	6
• Les signaux déterministes	6
• les signaux aléatoires (ou probabilistes)	6
✓ Signaux aléatoires stationnaires	6
✓ Signaux aléatoires non stationnaires	6
I.2.2 Classification énergétique	6
I.2.3 Classification morphologique	7
I.2.3.1 Signal à temps continu, à temps discret- signal quantifié ou non	7
I.3 Autres signaux usuels	8
I.3.1 Signal causal	8
I.3.2 Signal Echelon (fonction de Heaviside)	9
I.3.3 Signal fenetre ou impulsion	9
I.4. Théorie de la communication : traitement du signal et de l'information	10
I.5 Modulation de fréquence et d'amplitude	11
I.5.1 Modulation d'amplitude	11
I.5.2 Modulation de fréquence	12
I.6 La transformée de Fourier	13

Chapitre II : Méthodes d'estimation de la fréquence instantanée.

II.1 Introduction	14
II.2 Signal stationnaire et non stationnaire	14
II.3 Signal mono-composante et multi-composante	15
II.4 Signal mono-composante et fréquence instantanée	16
II.5 Méthodes d'analyse des signaux non-stationnaires	17
II.5.1.1 Transformée de Fourier à court terme (TFCT)	18
II.5.1.2 Transformée de Wigner-Ville	18
1. Distribution d'énergie	18
2. Quelques propriétés de la TWV	19
3. Transformée Pseudo-Wigner-Ville(TPWV).....	20
4. Pseudo-Distribution de Wigner-ville lissée (PDWVL)	20
II.5.2 Analyse temps échelle	22
II.5.2.1 Transformée en ondelettes (TO)	22
1. Ondelette Mère	22
2. Propriétés des ondelettes	23
3. La Transformée en Ondelette Continue	23
4. Transformée en ondelette discrète	25
II.6 Estimation de la fréquence instantanée	26
II.6.1 Estimation par transformée de Hilbert	26
II.6.2 Estimation par Représentations Temps-Fréquence (RTF)	30
II.6.3 Estimation par méthodes locales	31
II.7 Conclusion	31

Chapitre III : Opérateur d'énergie Teager-Kaiser.

III.1 Introduction	32
III.2 Opérateur de Teager-Kaiser $\Psi_{\mathbb{R}}$	32
III.2.1 Energie d'un système masse-ressort et $\Psi_{\mathbb{R}}$	33
III.2.2 Algorithme de Teager-Kaiser	34
III.2.2.1 Operateur d'énergie de Teager –Kaiser discret	34
III.2.2.2 Operateur d'énergie de Teager –Kaiser continu	36
III.2.3 Discrétisation de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{R}}$	37

III.2.4 Applications et limites de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{R}}$	38
III.3 L'opérateur d'énergie croisé de Teager-Kaiser Ψ_B	39
III.3.1 Extension de l'opérateur TKEO	39
III.3.2 Définition et propriétés remarquables de Ψ_B	40
III.3.2.1 Propriétés de Ψ_B	41
III.3.3 Relations entre Ψ_B et CWVD	44
III.4 Discrétisation de l'opérateur Ψ_B	46
III.4.1 Différences finies d'ordre un à gauche	47
III.4.2 Différences finies d'ordre un à droite	47
III.4.3 Différence finies d'ordre un centrées	48
III.5 Démodulation d'images avec les opérateurs de Teager-Kaiser	49
III.5.1 TKEO 2D	50
III.5.1.1 Algorithme discret DESA	51
III.5.1.2 Algorithme discret ESA	51
III.5.2 Opérateur de Teager-Kaiser d'ordre supérieur en 1D	52
III.5.3 Algorithme continu de démodulation CHOEDA (Continuous Higher Order Energy Demodulation Algorithm)	53
III.5.4 Algorithme de démodulation d'images mono-composantes basé sur les HODEO.....	53
III.5.4.1 Algorithme DHODA (Discret Higher Order demodulation Algorithm) ..	54
III.6 Mesure d'interaction entre deux signaux par Ψ_B	54
III.6.1 Interaction et similarité	55
III.6.2 Interaction et détection	56
III.7 Conclusion	57

Chapitre IV : Tests et résultats.

IV.1 Introduction	58
IV.2 Introduction à MATLAB	58
IV.3 Une session MATLAB	58
IV.3.1 Lancer, quitter MATLAB	59
IV.3.2 Fonctions et commandes	59
IV.3.3 Aide en ligne – help	59
IV.4 Les Toolboxes de Matlab	59

IV.4.1 Toolbox traitement de signal	60
IV.5 Application à la mesure d'interaction entre deux signaux	61
IV.6. Application à la segmentation d'ombres de mine dans les images sonars	63
IV.6.1 Images traitées par DESA et DHODA	64
IV.7 Conclusion.....	65
Conclusion générale	66

On appelle signal toute grandeur physique susceptible de contenir de l'information. Le traitement de signal est la discipline qui permet de développer et d'étudier les techniques de traitement (filtrage, amplification) d'analyse et d'interprétation des signaux. Il fait appel aux résultats de la théorie de l'information, des statistiques ainsi qu'à de nombreux autres domaines des mathématiques appliquées.

La plupart des signaux à traiter sont des signaux électriques ou devenus électriques à l'aide des capteurs et transducteurs (microphone, vitesse, accélération, et en général de toutes les grandeurs physiques et chimiques). Les signaux provenant des phénomènes physiques sont de nature non-stationnaire, voire également formés de composantes fréquentielles (signaux multi-composantes). Ces signaux présentent des oscillations qui évoluent au cours du temps, par exemple, les signaux de parole, biomédicaux, radar ou sonar...

Dans ce cas, la représentation temporelle classique d'un signal ne donne pas une bonne perception des composantes oscillantes multiples, tant dis que la représentation fréquentielle (transformée de Fourier) ne permet pas la localisation temporelle de ces composantes. Ainsi, partant des propriétés de ces signaux et des limitations de la transformée de Fourier (TF), il est naturel de s'orienter vers un schéma d'analyse temps-fréquence multi-composantes.

Les représentations temps-fréquence (RTF) sont, par définition, des transformations conjointes du temps et de la fréquence. Ces représentations permettent de donner l'information sur la façon dont la fréquence du signal varie au cours du temps.

L'objectif de notre travail est le traitement et l'analyse temps-fréquence des signaux non-stationnaires en utilisant l'opérateur d'énergie de Teager-kaiser qui permet d'estimer la fréquence instantanée (FI) et l'amplitude instantanée (AI).

Le travail présenté dans ce manuscrit s'organise autour de quatre chapitres :

Chapitre I : contient des définitions, quelques rappels fondamentaux sur les signaux. On a fait un rappel sur la définition et la classification des signaux, l'échantillonnage et le théorème de Shanon ainsi que la modulation et la transformée de Fourier.

Introduction générale

Chapitre II : nous avons fait un rappel sur les méthodes de représentation des signaux non-stationnaires dans le domaine temps-fréquence en présentant l'estimation des amplitudes et fréquences instantanées présentes dans un signal. Enfin, le concept et les méthodes classiques d'estimation de la fréquence instantanée.

Chapitre III : nous présentons les fondements physiques et théoriques de l'opérateur de Teager-Kaiser. Cet opérateur permet d'estimer l'énergie d'un système harmonique (masse-ressort) nécessaire à la génération d'un signal. L'énergie instantanée estimée permet alors de démoduler le signal en calculant son (AI) et sa (FI). Comme cet opérateur est limité aux signaux réels, on va proposer son extension aux signaux complexes et cette généralisation appelée l'opérateur complexe d'énergie de Teager-Kaiser Ψ_R . Nous montrons que le nouvel opérateur permet de mesurer l'interaction entre deux signaux complexes (mesure de similarité). On montre aussi que la maximisation de cette interaction permet de détecter la présence d'un signal dans un autre (détection) et de calculer le temps de retard entre les deux signaux.

Chapitre IV: Ce chapitre contient :

- Une introduction à MATLAB.
- Résultats d'application de l'opérateur de Teager-Kaiser croisé Ψ_B pour mesurer l'interaction énergétique entre deux signaux réels.
- Résultats d'application des deux algorithmes DHODA et DESA sur des images sonars.

Nous allons finir notre travail par une conclusion générale et une bibliographie.

Introduction :

Le traitement du signal est une discipline indispensable de nos jours. Il a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs d'informations. Son but est donc de réussir à extraire un maximum d'informations utiles sur un signal perturbé par du bruit en s'appuyant sur les ressources de l'électronique, de l'informatique et de la physique appliquée.

I.1 Définitions de base :

I.1.1 Signal :

Un signal est la représentation physique de l'information, qu'il convoie de sa source à son destinataire. La description mathématique des signaux est l'objectif de la théorie du signal. Elle offre les moyens d'analyser, de concevoir et de caractériser des systèmes de traitement de l'information. La figure suivante en est un exemple :

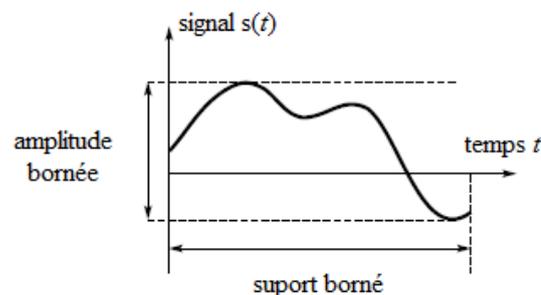


Figure I.1 : Représentation d'un signal physique réel.

I.1.2 Bruit :

Un bruit correspond à tout phénomène perturbateur gênant la transmission ou l'interprétation d'un signal, par analogie avec les nuisances acoustiques (interférences, bruit de fond, etc.).

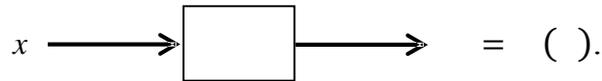
I.1.3 Rapport signal sur bruit

Le rapport signal sur bruit mesure la quantité de bruit contenue dans le signal. Il s'exprime par le rapport des puissances du signal (P_S) et du bruit (P_N). Il est souvent donné en décibels (dB).

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{\text{dB}} = 10 \log \frac{P_S}{P_N}$$

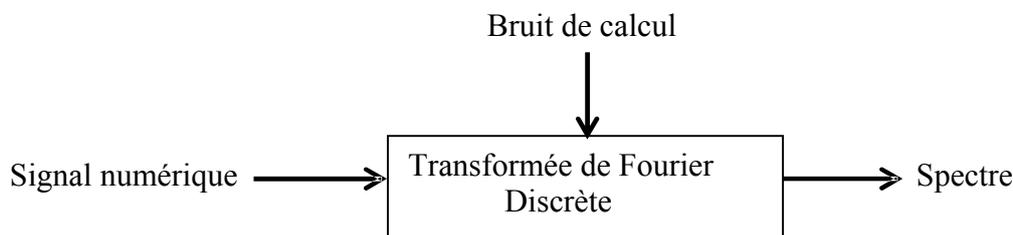
I.1.4 Système

Un système est un dispositif orienté (car rarement symétrique, réversible) possédant des entrées, des sorties et des perturbations (entrées non contrôlées).



Notation : Un système excité par un signal d'entrée répond par un signal de sortie = ().

Exemple d'un système numérique de traitement de signal (temps discret) :



I.1.5 Produit de convolution :

Soient deux signaux à temps continu (TC) (), () (respectivement à temps discret (), ()). Leur produit de convolution est défini par :

En TC : $(x) * (y) = \int (x)(t - \tau) (y)(\tau) d\tau$

En TD : $(x) * (y) = \sum (x)(n - k) (y)(k)$

I.1.6 Echantillonnage et théorème de Shanon :

L'échantillonnage consiste à représenter un signal analogique continu () par un ensemble de valeurs () avec n entier situées à des instants discrets espacés de constante, appelée période d'échantillonnage.

L'enchaînement de différents signaux dans une chaîne d'acquisition et de restitution de données par un système numérique est présenté sur la figure (I.2). Le signal analogique d'entrée est échantillonné pour donner un signal discrétisé temporellement ().

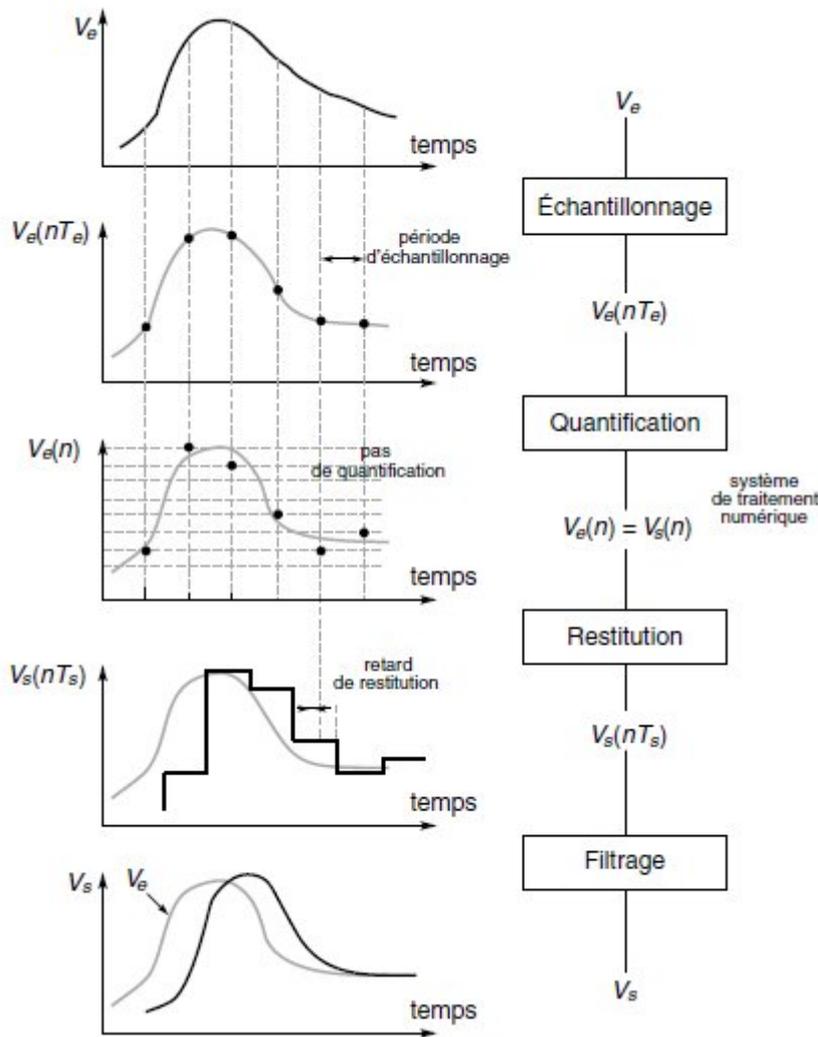


Figure I.2 : Evolution d'un signal à travers une chaîne d'acquisition et de restitution de données sans modification de valeurs. T_e est la période d'échantillonnage et T_s la période restitution supposée égale à T_e .

- Pour que la construction périodique du spectre () du signal échantillonné ne produise pas une déformation du motif répété du spectre () du signal initial. Il faut respecter la condition suivante (théorème de Shanon) :

$$\geq 2$$

Avec :

: Fréquence de répétition qui est la fréquence d'échantillonnage.

: Fréquence maximale contenue dans le signal initial

() : Signal quelconque ; () : TF () ; () : Le spectre échantillonné.

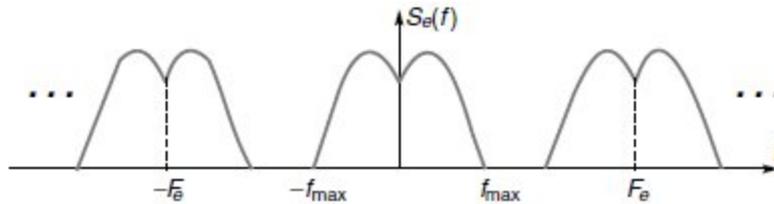


Figure I.3: Périodisation du spectre du signal échantillonné.

I.2 Classification des signaux :

On peut envisager plusieurs modes de classification pour les signaux suivant leurs propriétés.

I.2.1 Classification phénoménologique :

On considère la nature de l'évolution du signal en fonction du temps. Il apparaît deux types de signaux :

- **Les signaux déterministes** : ou signaux certains, leurs évolution en fonction du temps peut être parfaitement modélisée par une fonction mathématique. On retrouve dans cette classe les signaux périodiques, les signaux transitoires, les signaux pseudo-aléatoires, etc...

- **les signaux aléatoires (ou probabilistes)** : leur comportement temporel est imprévisible. Pour les décrire il faut faire appel à leurs propriétés statistiques.

Ces signaux peuvent être classés en deux catégories :

Signaux aléatoires stationnaires : leurs propriétés statistiques (moyenne, variance, écart type...) sont invariantes dans le temps.

Signaux aléatoires non stationnaires : Ils sont caractérisés par une « non-propriété » qui traduit une dépendance vis-à-vis du temps.

I.2.2 Classification énergétique :

On considère l'énergie des signaux. On distingue :

Les signaux à énergie finie : ils possèdent une puissance moyenne nulle et une énergie finie. Energie d'un signal $(t) \Rightarrow W(t) = \int | () |^2$

Les signaux à puissance moyenne finie: ils possèdent une énergie infinie et sont donc physiquement irréalisables.

Puissance d'un signal $x(t) \Rightarrow P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$.

I.2.3 Classification morphologique :

I.2.3.1 Signal à temps continu, à temps discret- signal quantifié ou non :

Un signal s'écrit $x(t) = x(nT_e)$

- Si t varie continument au moins par morceaux, donc $x(t)$ est un signal à temps continu (TC).
- Si n est discret (x ne peut prendre qu'un nombre fini \equiv limité de valeurs) noté généralement avec n entier et T_e réel (dans le cas par exemple de l'échantillonnage à la période T_e), $x(nT_e)$ noté aussi $x[n]$ est un signal à temps discret (TD).

Qu'il soit à TC ou TD le signal x peut être :

- A valeurs réelles : x est un réel (l'amplitude de x varie continument).
- A valeurs discrètes : x est un nombre codé sur m bits et peut ainsi avoir 2^m valeurs possibles (l'amplitude de x est discrète).

On distingue les signaux à variable continue des signaux à variable discrète ainsi que ceux dont l'amplitude est discrète ou continue.

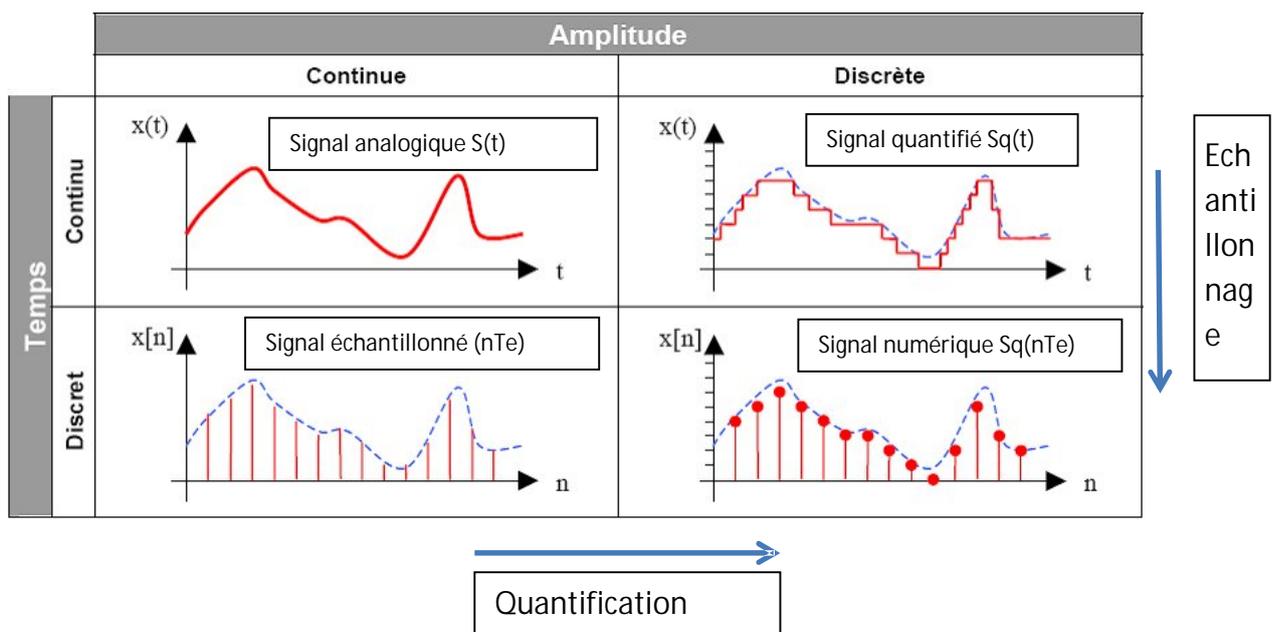


Figure 1.4: Les quatre types de signaux classés suivant leur morphologie (continu ou discret).

On obtient donc 4 classes de signaux :

- ✓ *Les signaux analogiques* dont l'amplitude et le temps sont continus
- ✓ *Les signaux quantifiés* dont l'amplitude est discrète et le temps continu
- ✓ *Les signaux échantillonnés* dont l'amplitude est continue et le temps discret
- ✓ *Les signaux numériques* dont l'amplitude et le temps sont discrets

I.3 Autres signaux usuels :

I.3.1 Signal causal :

Un signal causal est tout signal dont on connaît pas le futur, signal dont on démarre l'observation à $t=0$: cela se traduit par un signal nul au temps négatif ($t < 0$) :

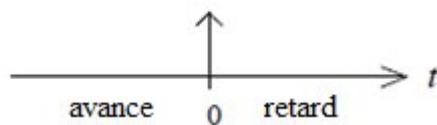
Le signal a un début, conventionnellement pris en 0, et il est réalisé pour $t > 0$. Ainsi, s'il était non nul à $t < 0$, le signal peut être interprété comme existant avant le début.

- Pour un signal causal, on ne peut se déplacer que dans le passé ou le présent.

Exemple 1 : Un signal radio reçu au vol.

- Un signal non causal est un signal pour lequel on peut accéder à son futur.

Exemple 2 : Un enregistrement.



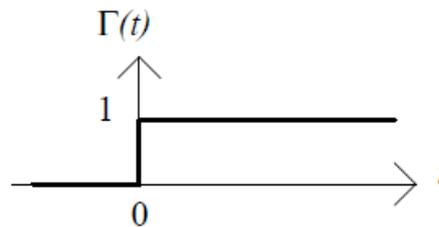
En effet, le rembobinage d'un signal enregistré permet de revenir en arrière, comme pour un signal causal, mais surtout son bobinage avant permet d'aller dans le futur, ce qui est impossible pour un signal causal.

I.3.2 Signal Echelon (fonction de Heaviside) : Noté Γ ou Φ ou même 1.

En temps continu, il est représenté comme suit :

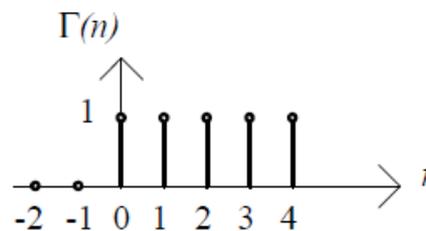
$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

(Non défini pour $t=0$)



En temps discret, il est représenté comme suit :

$$\Gamma(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

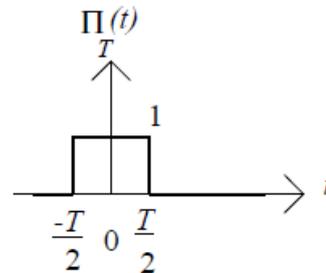


Ce signal permet de simuler un brusque changement de régime de fonctionnement.

I.3.3 Signal fenetre ou impulsion : Noté Π_T de largeur T.

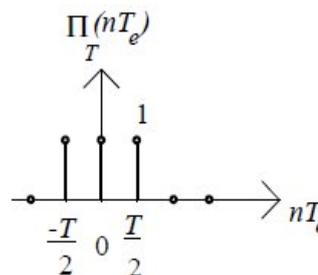
En temps continu, il est représenté comme suit :

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$



En temps discret, il est représenté comme suit :

$$\Pi_T(nT_e) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} < nT_e < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$



I.3. Théorie de la communication : traitement du signal et de l'information :

Le traitement de l'information fournit un ensemble de concepts permettant d'évaluer les performances des systèmes de transfert d'informations, en particulier lorsque le signal porteur de message est bruité.

Le traitement du signal est la discipline technique basée sur la théorie du signal qui a pour objectifs l'élaboration, la transmission et l'interprétation des signaux.

Il utilise les ressources de l'électronique, de l'informatique et de la physique appliquée et peut se décomposer de la façon suivante :

- système d'émission chargé de créer ou d'élaborer le signal afin d'y incorporer l'information (codage, échantillonnage, modulation).
- système de transmission chargé de transmettre le signal afin de transporter l'information (amplification, lignes électriques, réseaux, antennes).
- système de réception chargé d'interpréter le signal afin d'y extraire l'information (mesure, détection, filtrage, décodage, démodulation, estimation).

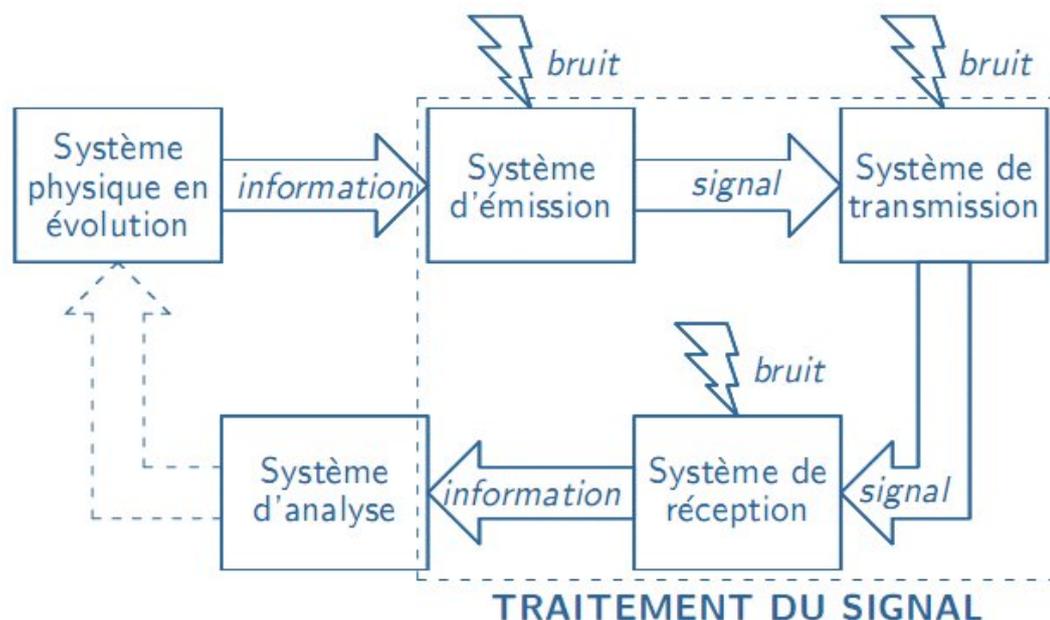


Figure 1.5 Schéma de principe du traitement de signal.

I.4 Modulation de fréquence et d'amplitude :

Le principe de modulation d'un signal est essentiellement utilisé pour la transmission des signaux. Il permet d'adapter le message à transmettre au canal de transmission.

I.4.1 Modulation d'amplitude :

Un signal $s(t)$ (courant ou tension) modulé en amplitude est un signal constitué par une porteuse sinusoïdale de fréquence ω_p dont l'amplitude A_p est modifiée suivant une loi linéaire par le signal informatif $u(t)$. Si nous prenons le cas d'un signal modulant sinusoïdal, l'expression de $s(t)$ est donc :

$$s(t) = A_p \cdot \cos(\omega_p t) \cdot k \cdot A_m \cdot \cos(\omega_m t) \cdot \cos(\omega_p t)$$

k est le facteur de proportionnalité du modulateur, (appelé sensibilité du modulateur).

La grandeur de k dépend des grandeurs de A_m et A_p .

Soit :

$$s(t) = A_p \cdot \left(1 + \frac{\Delta}{A_p} \cdot \cos(\omega_m t)\right) \cdot \cos(\omega_p t) = A_p \cdot (1 + m \cdot \cos(\omega_m t)) \cdot \cos(\omega_p t)$$

Dans le cas général l'expression d'un signal modulé en amplitude est :

$$s(t) = A_p \cdot (1 + m \cdot u(t)) \cdot \cos(\omega_p t)$$

Où m est le taux de modulation. Il est d'usage d'exprimer m en %.

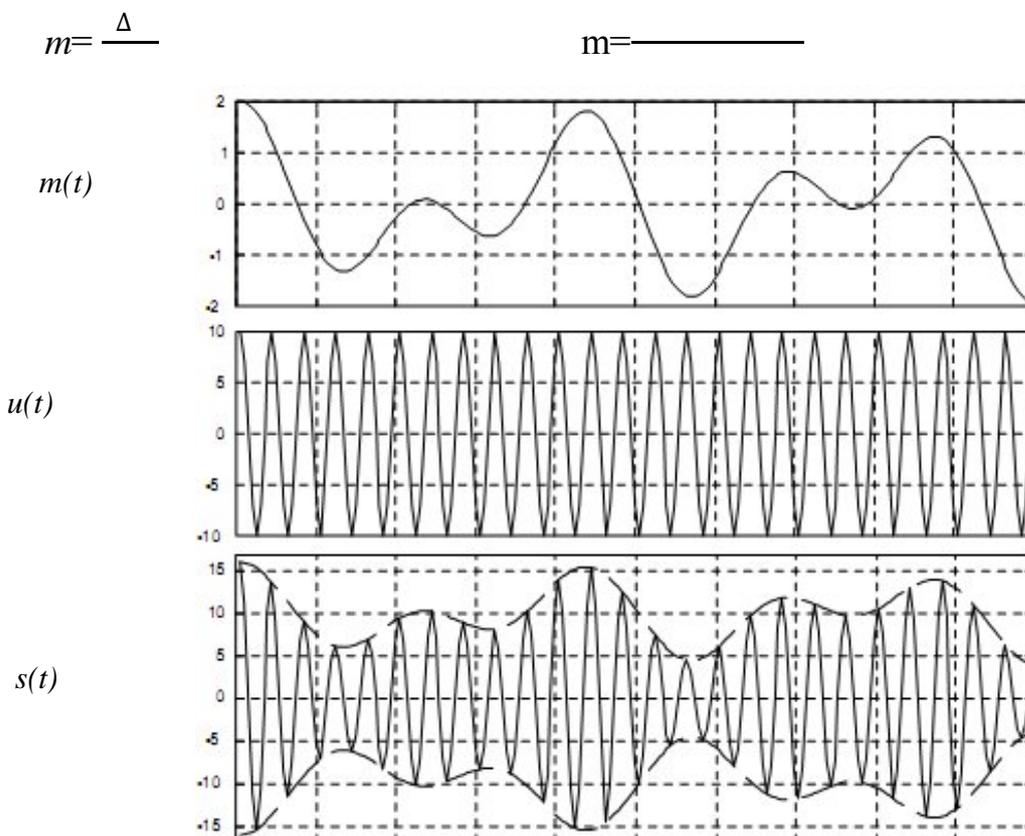


Figure 1.6 : Illustration de la modulation d'amplitude.

I.4.2 Modulation de fréquence :

La modulation de fréquence (F.M), est souvent employée en VHF (Very High Frequencies) ou en UHF (Ultra High Frequencies) pour la transmission des signaux audio, elle consiste à utiliser une porteuse dont la fréquence varie en fonction du signal modulant. Il est alors possible d'écrire :

$$s = p + (t) \text{ où } (t) \text{ est une fréquence variant linéairement avec le signal modulant } u(t).$$

C'est-à-dire :

$() = . ()$ avec facteur de proportionnalité du modulateur (en Hz/Am)(sensibilité du modulateur).

La fréquence de la porteuse étant constante, la phase instantanée de $s(t)$ est donnée par :

$$s(t) = \int (p + 2 . ()).$$

$$s(t) = p t + 2 . \int ().$$

Ou encore :

$$s(t) = p t + 2 . . \int ().$$

L'expression du signal $s(t)$ modulé en fréquence est alors :

$$S(t) = A_p \cos (\omega_p t + 2 . . \int ().).$$

Dans le cas d'un signal modulant sinusoïdal $u(t) = \cos(\omega_m t)$ avec $\omega_m \ll \omega_p$ l'expression du signal $s(t)$ est alors :

$$S(t) = A_p \cos(\omega_p t + \frac{*}{*} * A_m \sin(\omega_m t))$$

$$S(t) = A_p \cos(\omega_p t + \sin(\omega_m t))$$

Où est l'indice de modulation, avec $= (2 * * A_p) / \omega_m$.

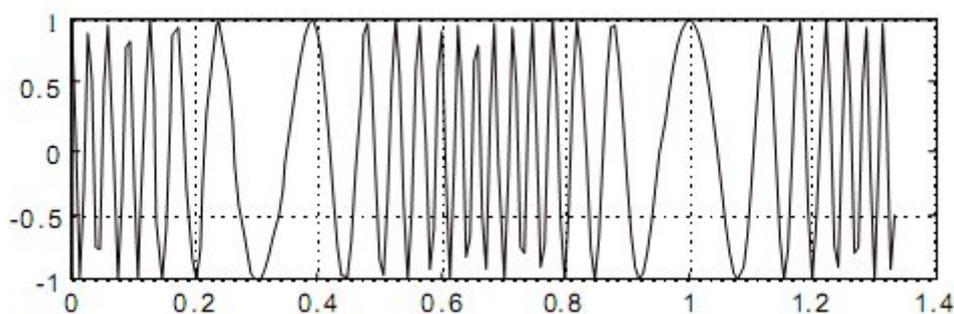


Figure I.7 : Représentation fréquentielle d'un signal FM.

Signal FM. Porteuse $f_p = 10,7\text{MHz}$, signal modulant sinusoïdal à $f_s = 15 \text{ kHz}$, indice modulation = 10.

La démodulation est l'opération inverse de la modulation. Elle consiste à reconstruire le signal modulant à partir du signal modulé. La qualité d'une modulation est déterminée par la facilité à récupérer le signal modulant et par son immunité aux bruits.

I.5 La transformée de Fourier :

La transformée de Fourier est un opérateur mathématique qui permet un passage de la représentation temporelle à la représentation fréquentielle. Elle exprime la répartition de l'amplitude, de l'énergie ou de la puissance des signaux considérés.

Elle est donnée par la formule suivante :

$$s(t) \xrightarrow{\text{TF}} S(\nu) = \int s(t) \cdot e^{-j2\pi\nu t} dt \dots\dots\dots(1)$$

Notée :

$$S(\nu) = \text{TF} \{s(t)\}$$

$$S(\nu) = \int s(t) \cos(2\pi\nu t) dt - j \int s(t) \sin(2\pi\nu t) dt \dots\dots\dots(2)$$

On peut écrire aussi

$$S(\nu) = A(\nu) - j B(\nu) \dots\dots\dots(3)$$

$$| S(\nu) | = \sqrt{[A(\nu)]^2 + [B(\nu)]^2} \quad \longrightarrow \text{ Spectre d'amplitude}$$

$$\Phi(\nu) = \text{Arctg}\left(\frac{B(\nu)}{A(\nu)}\right) \quad \longrightarrow \text{ Spectre de phase}$$

$$| S(\nu) |^2 = [A(\nu)]^2 + [B(\nu)]^2 \quad \longrightarrow \text{ Spectre de puissance}$$

II.1 Introduction :

La transformée de Fourier permet de caractériser le contenu fréquentiel d'un signal, mais ne permet pas de décrire comment celui-ci varie au cours du temps, ce qui est fondamental dans plusieurs situations. Les notions de fréquence et d'amplitude instantanées sont pourtant intuitives : pour un signal musical les hauteurs de notes sont définies à tout moment, de même que leurs amplitudes, qui varient en fonction des nuances. En radio-transmission, ces grandeurs instantanées sont connues, et servent à transmettre l'information soit par modulation de fréquence [FM] ou modulation d'amplitude [AM]. Afin de pouvoir étudier les signaux quasi-périodiques qui présentent des variations légères de l'amplitude et des durées des cycles, des théories ont été développées pour définir la fréquence instantanée, qui décrit la périodicité locale du signal, et aussi pour définir les méthodes permettant son estimation.

II.2 Signal stationnaire et non stationnaire :

Un signal est une grandeur physique pour la transmission d'une information et doit être physiquement réalisable. On a deux grandes catégories de signaux : aléatoires et déterministes.

On s'intéresse dans notre travail aux signaux aléatoires et plus précisément aux signaux non-stationnaires et pour cela il faut différencier ces derniers des signaux stationnaires.

Un signal est dit stationnaire si, dans le cas déterministe, il peut s'écrire comme la somme de sinusoides, et dans le cas aléatoire, ses propriétés statistiques sont invariantes par translation de l'origine du temps.

Un signal non-stationnaire est caractérisé par une « non-propriété » qui traduit une dépendance vis-à-vis de son contenu spectral. En pratique la grande majorité des signaux sont non-stationnaires.

Un signal est déterministe si on peut le définir par une formule mathématique. Un modèle est dit stochastique s'il fait appel à des calculs de probabilités.

Le schéma représenté sur la figure suivante permet de donner un aperçu sur les deux partitions des signaux physiques.

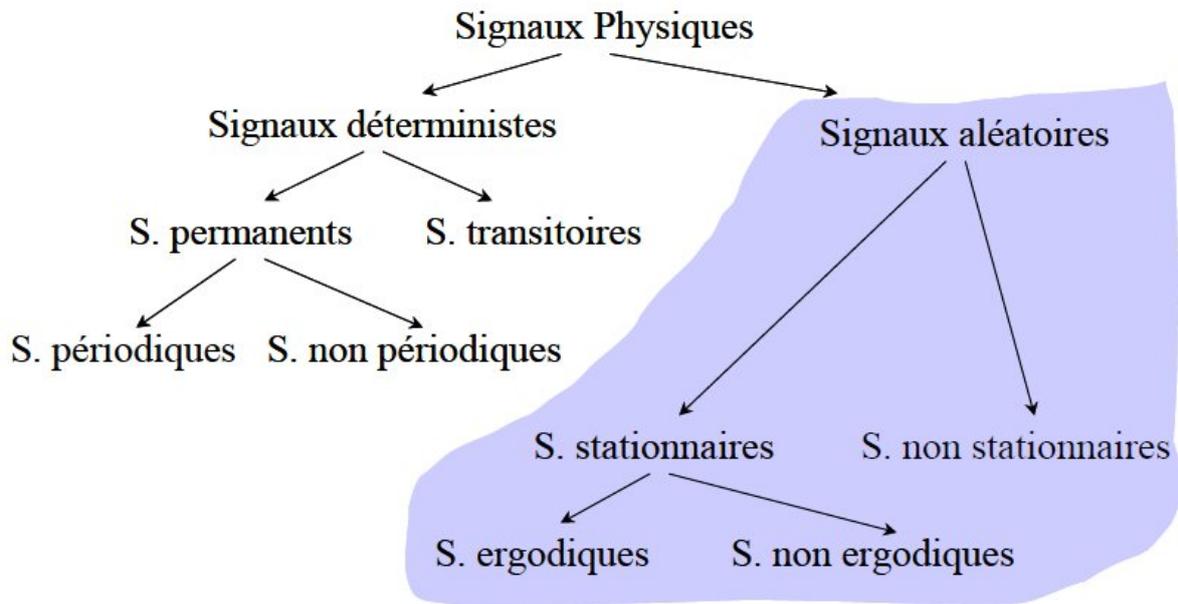


Figure II.1 Classification des signaux physiques.

II.3 Signal mono-composante et multi-composante :

Un signal AM-FM multi-composantes $x(t)$ peut être représenté par le modèle suivant :

$$x(t) = \sum_k a_k(t) \cos(\varphi_k(t)) + n(t) \tag{II.1}$$

Avec $n(t)$ un bruit additif représentant toute composante indésirable et N le nombre de composantes. On décrit le signal $a_k(t)$ comme signal mono-composante avec une amplitude instantanée (AI) $a_k(t)$ et une fréquence instantanée (FI) $v_{ik}(t)$ telle que la forme complexe $z_k(t)$ associée à $a_k(t)$ peut s'écrire :

$$z_k(t) = a_k(t) \cdot e^{j\varphi_k(t)} \tag{II.2}$$

Où :

$$\varphi_k(t) = \int v_{ik}(\tau) d\tau \tag{II.3}$$

Si $N=1$: Le signal est mono-composante.

Si $N \geq 2$: Le signal est dit multi-composantes.

Dans le cas général, un signal $x(t)$ peut être considéré comme un signal AM-FM multi-composantes (éq II.1), ou du moins comme la contribution de plusieurs signaux AM-FM (figure II.2).

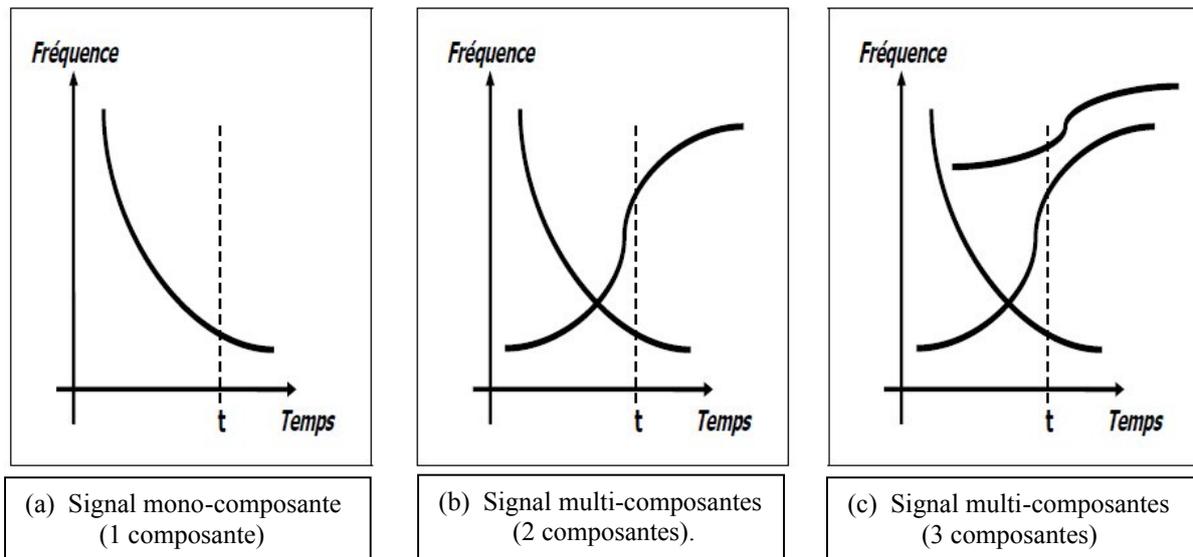


Figure II.2 : Signaux mono-composante et multi-composantes : évolution théorique des FI au cours du temps.

II.4 Signal mono-composante et fréquence instantanée :

Par définition la fréquence instantanée décrit la périodicité locale du signal. Il semble très nécessaire d'introduire les concepts de FI et AI notamment en communication où les signaux utilisés sont de types AM-FM.

Pour définir une notion de FI, il est commode de s'appuyer sur un signal $x(t)$ associé à une idée de régime permanent et qui présente une stabilité au cours du temps. Soit le signal sinusoïdal (monochromatique) décrit par l'équation suivante :

$$x(t) = a \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{II.4})$$

Où :

a : Amplitude ; $\omega = 2\pi v$: La pulsation, v : La fréquence et φ : Phase à l'origine.

A des situations évolutives on peut rendre la constante ω dépendante du temps et on peut introduire dans la fonction cosinus un argument dont la dérivée serait aussi fonction du temps (dans ce cas le signal n'est plus monochromatique).

$$x(t) = a(t) \cos(\varphi(t)) \quad (\text{II.5})$$

Où : $\varphi(t)$ est la phase instantanée du signal.

$a(t)$ et $\varphi(t)$ Permettent de définir sans ambiguïté le signal. Malheureusement cette expression n'est pas unique, contrairement au cas monochromatique, il apparaît une infinité de couples $[a(t)\varphi(t)]$ capables de décrire le signal.

Si l'on souhaite une relation bijective (bi-univoques) entre $a(t)$ et les couples, $[a(t)\varphi(t)]$ il faut introduire des conditions particulières permettant d'obtenir un seul et unique couple à partir de $x(t)$. Bien évidemment, l'AI doit être une grandeur positive et $\varphi(t)$ définie modulo 2π .

La fréquence instantanée impose qu'à chaque instant il y a une seule et unique fréquence d'où on déduit que le signal est mono-composante. Mais le problème qui se pose c'est qu'il n'y a pas une définition précise permettant de juger si le signal est mono-composante ou pas. A défaut de ça, on impose que le signal soit à bande étroite afin que la FI estimée à partir de l'équation (II.5) ait un sens physique.

II.5 Méthodes d'analyse des signaux non-stationnaires :

II.5.1 Analyse temps fréquence :

Les signaux tels les vocalisations humaines ont la particularité de présenter des modulations de fréquence. Ces signaux sont donc non-stationnaires. L'analyse spectrale classique, fondée sur la TF implique implicitement que les propriétés spectrales du signal sont stationnaires. Un des problèmes bien connu de la transformation de Fourier est que la représentation fréquentielle perd toute notion de l'évolution en fonction du temps. Les représentations d'un signal conjointement en temps et en fréquence permet une description des signaux non-stationnaires. Par les RTF, nous obtenons la mise en correspondance d'une fonction mono variable(en t) avec une fonction à deux variables : le temps t et la fréquence f , et aussi situent l'énergie dans le plan temps-fréquence.

II.5.1.1 Transformée de Fourier à court terme (TFCT) :

Comme la TF est limitée pour les signaux non-stationnaires, la solution est d'effectuer une analyse de Fourier non pas sur la totalité du signal mais sur une portion du signal. La solution est la transformée de Fourier à court terme (TFCT) qui est basée sur la décomposition du signal en petits segments supposés stationnaires et d'appliquer sur chacun (segment) la TF permettant d'obtenir des spectres locaux. Ces derniers indiquent comment le spectre varie en fonction du temps.

La distribution temps-fréquence, appelée TFCT, est définie par :

$$G_x(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(\tau - t) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (\text{II.6})$$

Où :

$x(\tau)$ est le signal ; t représente le paramètre de localisation de la fenêtre $g(\tau)$.

Le spectrogramme définit une fonction positive et conduit à des lissages de l'énergie instantanée en temps et en fréquence comme l'indique les relations suivantes :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_x(f, t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau) h(\tau - t)|^2 d\tau \quad (\text{II.7})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_x(f, t)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f) H(f - t)|^2 df \quad (\text{II.8})$$

II.5.1.2 Transformée de Wigner-Ville :

1. Distribution d'énergie :

En contraste avec les représentations linéaires temps-fréquence, l'objectif de la distribution d'énergie est de distribuer l'énergie du signal sur les deux variables : le temps et la fréquence. L'énergie d'un signal $x(t)$ peut être déduite à partir du carré du module du signal ou de sa transformée de Fourier.

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (\text{II.9})$$

$|x(t)|^2$ et $|X(f)|^2$: Densité d'énergie en temps et en fréquence.

Soit $x(t, f)$ une distribution d'énergie dans le plan temps-fréquence telle que :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_x(t, f) dt df \quad (\text{II.10})$$

Cette distribution d'énergie dans le plan temps fréquence est telle que :

$$\rho_x(t) = |x(t)|^2.$$

$$\rho_x(f) = |X(f)|^2.$$

Avec ces deux équations la distribution $\rho_x(t, f)$ respecte le principe de conservation de l'énergie. L'intégration de la représentation temps-fréquence sur l'axe du temps donne la densité spectrale d'énergie. L'intégration de la représentation temps-fréquence sur l'axe fréquentiel donne la puissance instantanée. Cela signifie que si l'on intègre la densité d'énergie temps-fréquence le long d'une variable, on obtient la densité d'énergie correspondant à l'autre variable.

2. Quelques propriétés de la TWV :

L'invariance par translation temporelle :

$$\rho_x(t - t_0, f) = \rho_x(t, f)$$

L'invariance par translation fréquentielle :

$$\rho_x(t, f - f_0) = \rho_x(t, f)$$

La WVD fournit d'excellents résultats pour des signaux mono-composantes, mais pour des signaux à composantes multiples elle présente des interférences indésirables. Supposons que x_1 et x_2 soient deux composantes d'un seul signal x , la WVD est alors :

$$\rho_{x_1+x_2}(t, \mathbf{v}) = \rho_{x_1}(t, \mathbf{v}) + \rho_{x_2}(t, \mathbf{v}) + 2\Re(\rho_{x_1, x_2}(t, \mathbf{v})). \quad (\text{II.11})$$

Avec

$$\rho_{x_1, x_2}(t, \mathbf{v}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau) x_2^*(t - \tau - \tau') e^{-j\mathbf{v}(\tau + \tau')} d\tau d\tau'. \quad (\text{II.12})$$

Pour avoir des résultats fiables il faut éviter les termes d'interférences entre toutes les composantes du plan temps fréquence par un postraitement. Pour ça on utilise des versions

modifiées de la transformation, c'est la représentation Pseudo-Wigner-Ville et Pseudo-Wigner-Ville lissée du signal ().

3. Transformée Pseudo-Wigner-ville (TPWV) :

L'idée principale est de n'effectuer l'étude que sur un signal vu à travers une fenêtre de durée fixée et finie.

On définit une fenêtre $h(t)$ donc la TPWV est définie par :

$$x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (II.13)$$

Où :

$h(t)$: La fenêtre réduisant les termes d'interférences dans le domaine temporel.

4. Pseudo-Distribution de Wigner-ville lissée (PDWVL) :

La PDWVL est l'équivalent d'une TWV lissée en temps et en fréquence, elle permet d'atténuer fortement les termes d'interférences présents dans la distribution générale et présente une meilleure résolution que la TFCT. Les lissages temporel et fréquentiel sont indépendants et peuvent être ajustés séparément. La PDWVL peut s'écrire comme suit :

$$x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) [\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau] \quad (II.14)$$

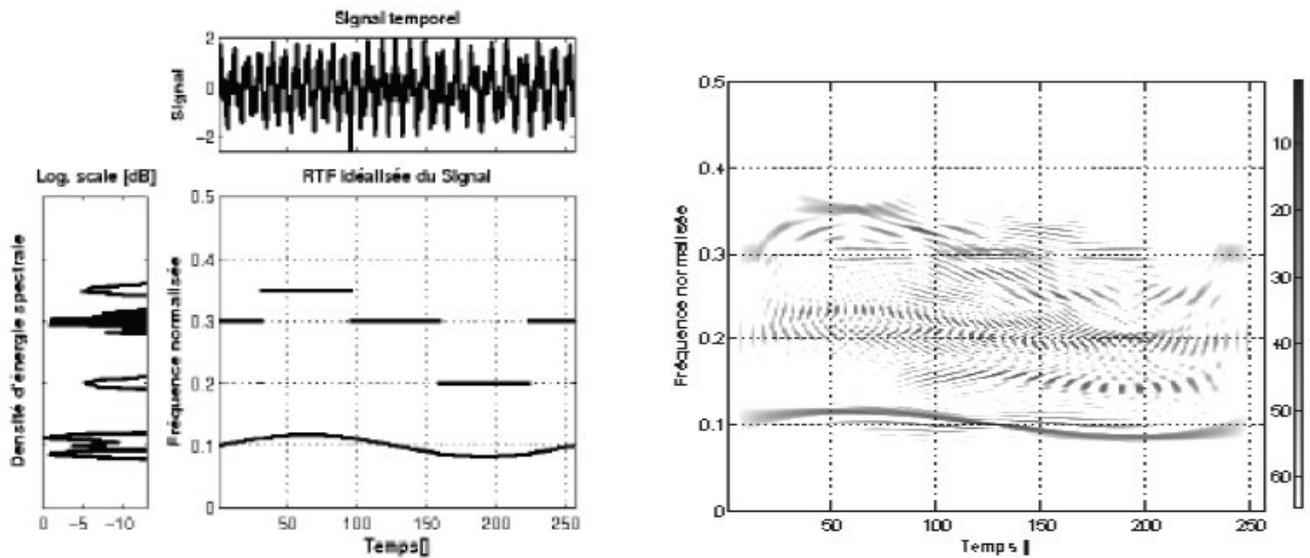
Où :

$h(\tau)$: La fenêtre réduisant les termes d'interférence dans le domaine fréquentiel.

$x(t, f)$: La fenêtre réduisant les termes d'interférence dans le domaine temporel.

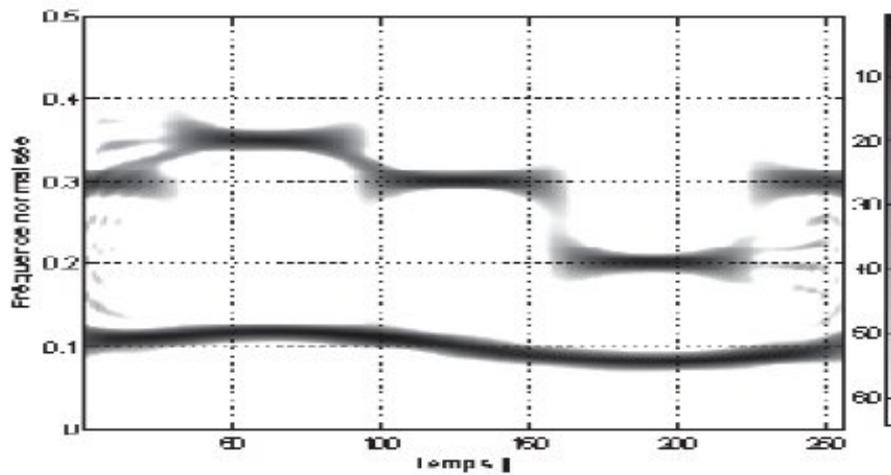
Le lissage temporel et fréquentiel a comme défaut l'élargissement des traces utiles temps-fréquence du signal. Lors de la représentation de la PDWVL (figure C), on remarque que le fait de filtrer en temps et en fréquence supprime en grande partie l'ensemble des interférences mais si on persiste à faire diminuer les interférences on peut pénaliser la résolution temps-fréquence. On remarque aussi que les transitions sont assez difficiles à déterminer.

On donne un exemple sur les deux méthodes dans la figure suivante :



(a) RTF idéalisée

(b) RTF par Wigner-Ville



(c) RTF par Pseudo-Wigner-Ville lissée

Figure II.3 : Description temps-fréquence d'un signal par TWV.

II.5.2 Analyse temps échelle :

Si la transformée de Fourier à court terme (TFCT) est utile dans certaines applications, car elle offre un compromis entre localisation en temps et en fréquence, elle ne permet pas d'analyser les signaux transitoires quelconques, car la taille de la fenêtre est fixe, pour remédier à ce problème la théorie des ondelettes est introduite.

II.5.2.1 Transformée en ondelettes (TO) :

La transformée en ondelette (TO) (wavelet transform, WT) est un outil mathématique qui décompose un signal en fréquences en conservant une localisation temporelle. Le signal de départ est projeté sur un ensemble de fonctions de base qui varient en fréquence et en temps. Ces fonctions de base s'adaptent aux fréquences du signal à analyser.

1. Ondelette Mère :

L'analyse en ondelette adopte une fonction prototype d'ondelettes connue sous le nom « ondelette mère » qui permet de spécifier les caractéristiques du signal que l'on souhaite détecter, elle permet la représentation de n'importe quel signal de L^2 par une base d'ondelettes qui ne sont que des versions dilatées et translatées de l'ondelette mère.

Cette fonction est définie par :

$$\psi_b^a(t) = \left| \frac{t-b}{a} \right|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) ; \quad (\text{II.15})$$

$$a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R},$$

$\psi(\cdot)$: Représente l'ondelette fille.

b : Facteur de translation.

a : Facteur d'échelle.

$\psi(\cdot)$: Ondelette mère.

$| \cdot |^{-1/2}$: Facteur de normalisation de l'énergie afin que le signal transformé $\psi_b^a(t)$ ait la même énergie que (\cdot) à toutes les échelles ($\neq 0$).

2. Propriétés des ondelettes :

Toute fonction oscillante d'énergie finie et de moyenne nulle :

$$\left. \begin{aligned} \int (\cdot) &= 0 && \text{(Moyenne nulle) ;} \\ \int |(\cdot)|^2 &< \infty && \text{(Énergie finie),} \end{aligned} \right\} \text{ Est une ondelette possible.}$$

Pour que puisse être utilisée comme une ondelette analysante est qu'elle vérifie la condition d'admissibilité il faut :

$$0 < c_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(w)|^2}{|w|} dw < \infty$$

3. La Transformée en Ondelette Continue (TOC):

La transformée en ondelette continue (TOC) utilise des translations et des dilatations (les paramètres de dilatation et de translation (a, b) varient continument), de la fonction ondelette mère durant tout l'intervalle temporel de manière continue. Elle est définie par :

$$CWT_x(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \psi_b^a(t) dt \tag{II.16}$$

Pour réaliser une analyse par ondelettes, il faut choisir la fonction analysante (l'ondelette mère). Pour ce faire il est important de choisir la forme de l'ondelette et les

paramètres déterminant les résolutions de la transformées dans le temps et les fréquences, donc choisir sa durée et sa largeur de bande.

L'ondelette B-Spline cubique permet de faire une transformation continue des signaux et d'accéder à une localisation temporelle des fréquences proche de l'optimum.

Cette ondelette est une fonction polynomiale non-orthogonale. Elle converge vers une fonction gaussienne modulée.

La (Figure II.4) présente les propriétés temporelles et fréquentielles de 3 échelles différentes d'une ondelette :

- $a=0.5$ correspond à une ondelette contractée,
- $a=1$ correspond à l'ondelette de base ou l'ondelette mère,
- $a=2$ correspond à une ondelette dilatée.

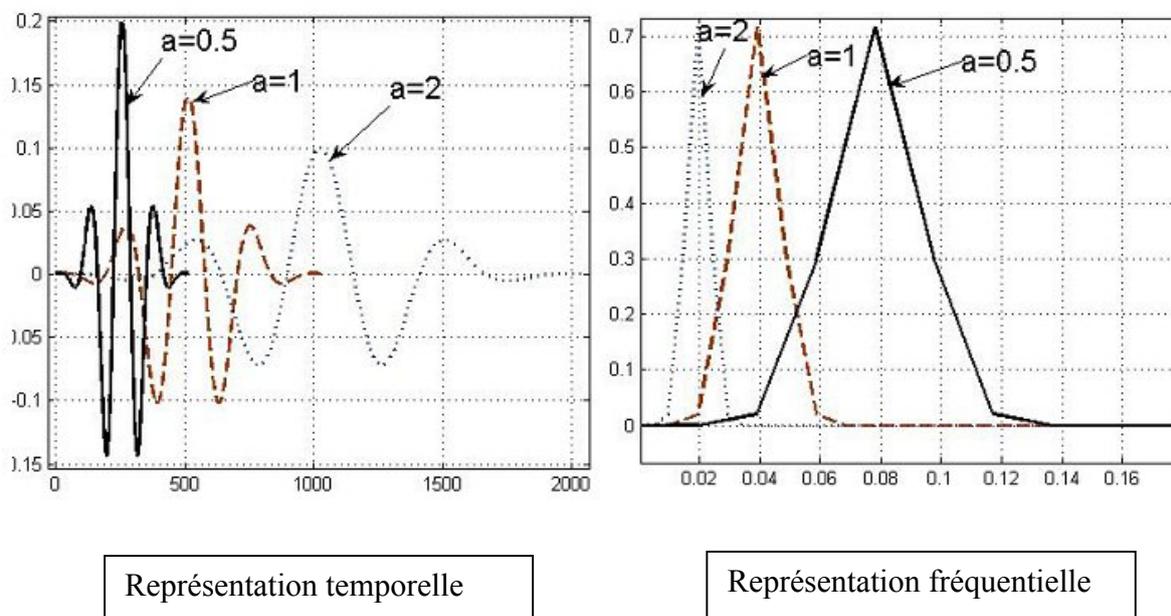


Figure II.4 : Propriétés d'une ondelette mère, contractée et dilatée.

Ces images montrent que l'ondelette dilatée est plus diffusée dans le temps et que son spectre est plus concentré autour de sa fréquence centrale. Comportement inverse pour l'ondelette contractée.

4. Transformée en ondelette discrète (TOD) :

La transformée en ondelettes discrète (TOD) est produite pour surmonter le problème de redondance de la TOC. Cette redondance mobilise une grande quantité de ressources de calculs (intégral, équations analytique etc.), c'est donc aux ordinateurs de calculer cette transformée, et pour remédier à ces problèmes il est nécessaire de discrétiser les transformées.

La TOD, fournit suffisamment d'information, tant pour l'analyse que pour la reconstruction du signal original, en un temps de calcul t réduit. La TOD est considérablement plus simple à implémenter que la TOC.

La TOD translate et dilate l'ondelette selon des valeurs discrètes des facteurs d'échelle et de translation telles que:

$$a = a_0^j; \quad b = k b_0 a_0^j;$$

Où

$$a_0 > 1; \quad b_0 > 0; \quad k, j \in \mathbb{Z}.$$

La TOD est définie par :

$$D_x(a_0, b_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \psi_{b_0}^{a_0}(t) dt \quad (\text{II.17})$$

$$\psi_{b_0}^{a_0}(t) = |a_0^j|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t - k b_0 a_0^j}{a_0^j}\right) \quad (\text{II.18})$$

Si on choisit $a_0=2$ et $b_0=2$ on obtient la transformée discrète dyadique.

Dans la TOD on parle d'approximation qui correspond à la haute échelle c'est-à-dire aux composantes de basse fréquence du signal, et on s'intéresse aux détails qui sont à basses échelles (les composantes de hautes fréquences).

II.6 Estimation de la fréquence instantanée :

II.6.1 Estimation par transformée de Hilbert :

Après l'étude du concept de la FI ci-dessus, on passe aux méthodes permettant son estimation (FI). On associe au signal réel $x(t)$ un signal complexe $z_x(t)$, opération que l'on note $z_x(t) = [x(t)]$. Il existe plusieurs façons d'y parvenir par exemple en introduisant le signal analytique SA.

Il est nécessaire alors d'imposer les deux conditions suivantes :

$$1- [x(t)] = \exp(j\phi(t)), \quad \forall t > 0 \quad (\text{II.19})$$

Il s'agit d'une extension au cas général d'une approche qui doit s'appliquer au cas sinusoïdal.

2- Si l'AI de $x(t)$ est $\phi(t)$ alors celle de $z_x(t)$ doit être $\phi(t)$, l'opération doit être linéaire. Par extension, il suffit d'imposer que l'application $[.]$ soit un filtrage linéaire.

Alors on peut donner une définition au signal analytique $z_x(t)$ associé au signal réel $x(t)$.

Définition :

- Le signal $z_x(t)$ s'exprime sous la forme suivante :

$$z_x(t) = x(t) + j [x(t)] \quad (\text{II.20})$$

Avec :

La partie réelle du SA $z_x(t)$ est $x(t)$ lui-même et la partie imaginaire est obtenue à partir d'un filtrage linéaire H en quadrature avec $[x(t)]$.

$$[x(t)] = - \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t} \quad (\text{II.21})$$

H : Transformée de Hilbert de $x(t)$.

p : La valeur principale de l'intégrale de Cauchy.

- Le spectre du SA est donné par l'équation suivante :

$$Z_x(v) = (v) + (-v) = 2 (v) \quad (II.22)$$

(v) L'échelon unité de Heaviside. Son spectre est nul pour toutes les fréquences négatives. $z_x(t)$ est complexe avec un encombrement spectral deux fois plus petit que celui du signal réel ().

Les notions d'amplitude et de phase d'un signal réel () non-stationnaire sont associés à un unique signal $z_x(t)$ dont le module définit l'AI $|z_x(t)|$ et l'argument définit la phase instantanée $\arg z_x(t) = ()$ du signal ().

La FI et l'AI d'un signal () sont définis sous la forme suivante :

$$a_x(t) \equiv |z_x(t)| \quad (II.23)$$

$$v(t) \equiv - \frac{d}{dt} \arg z_x(t) \quad (II.24)$$

La fréquence s'exprime comme la dérivée de la phase instantanée et en observant les (équations II-20, II-21 et II-23) on peut noter que la définition de la fréquence instantanée du signal fait intervenir un filtre non causal et non instantané. L'estimation de l'AI et de la FI d'un signal par la TH est schématisé dans la figure (II.5) suivante :

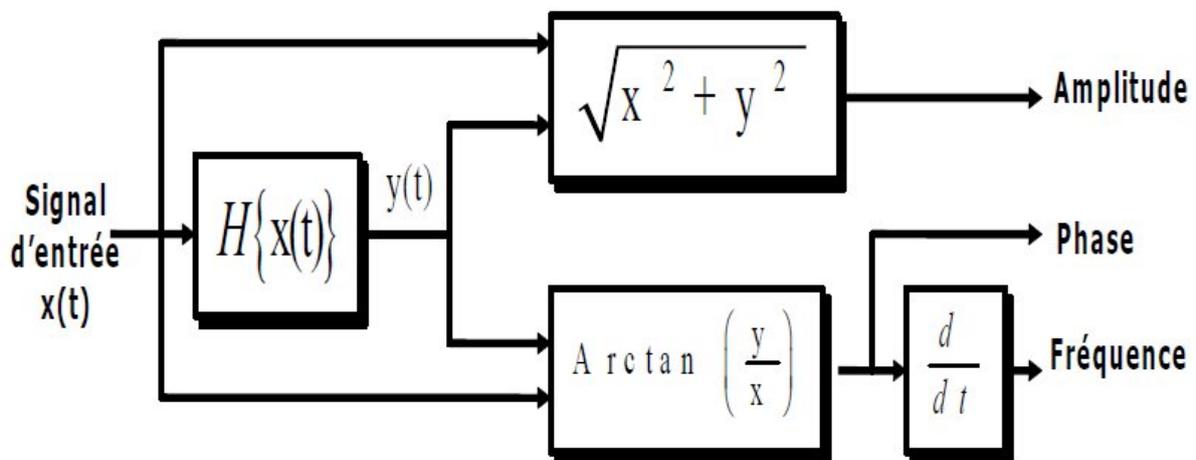


Figure II.5 : Principe d'estimation de la FI via le signal analytique $Z_x(t)$ de ().

La FI définit le comportement fréquentiel local en fonction du temps. De même on définit le retard du groupe $t_x(\nu)$, quantité duale de la FI, par :

$$t_x(\nu) = - \frac{d}{d\nu} \arg z(\nu). \quad (\text{II.25})$$

Où : $Z_x(\nu)$ est la TF de $z(t)$.

Cette grandeur $t_x(\nu)$ décrit le comportement temporel local d'un signal (x) en fonction de la fréquence et mesure l'instant d'apparition d'une fréquence.

La FI et le retard du groupe $t_x(\nu)$ ont deux représentations différentes. Quand le produit $B \times T$ est large (B la largeur de la bande normalisée en fréquence et T est la durée du signal). Ils sont approximativement identiques.

Dans le cas d'un signal mono-composante pour lequel, à l'instant t , le signal est supposé n'exister qu'autour d'une fréquence unique, la FI permet une description facilement interprétable, mais dans le cas contraire (signal multi-composantes) l'interprétation est plus difficile. Cette remarque est valable dans l'espace dual pour le retard du groupe.

Pour illustrer nos propos, on considère le signal (x) la somme de deux sinusoïdes à FI distinctes et constantes :

$$x(n) = \begin{cases} A_1 \cos(2\pi \nu_1 n) & 1 \leq n \leq 600 \\ A_2 \cos(2\pi \nu_2 n) & 425 \leq n \leq 1024 \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

Avec $A_1=A_2=1$; $\nu_1=0.1$; $\nu_2=0.3$ le signal est constitué de $N=1024$ points.

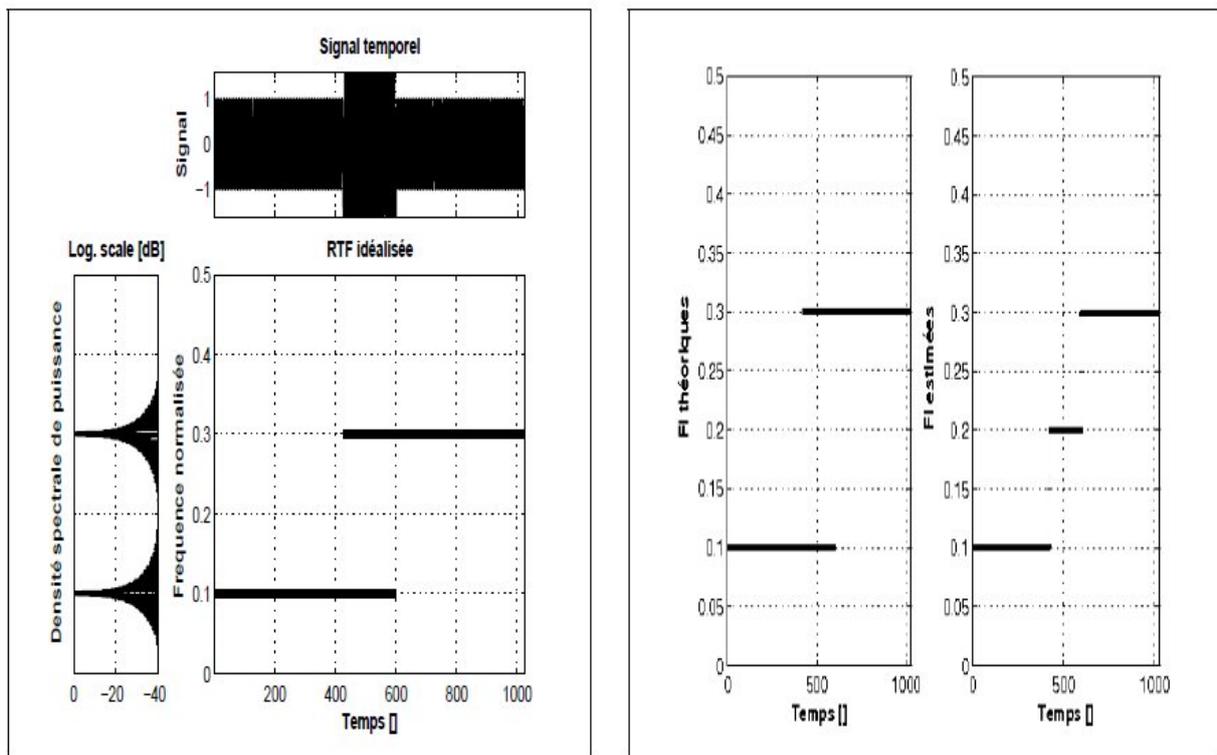
Interprétation :

Sur l'intervalle $t \in [1, 424]$ seul le signal basse fréquence est présent.

Sur l'intervalle $t \in [425, 600]$ les deux fréquences coexistent simultanément

Sur l'intervalle $t \in [601, 1024]$ seul le signal haute fréquence est présent

Nous vérifions bien le fait que si une seule sinusoïde est présente, alors la FI estimée coïncide avec la fréquence du signal () tandis que, dans le cas contraire, la FI est plutôt une version « é » modulé en amplitude. Figure (II.6).



Caractéristiques du signal (n) (eq II.26)

Comparaison de la FI théorique et estimée par TH

Figure II.6 : Comparaison et estimation des FI d'un signal multi-composantes à partir de la transformée de Hilbert.

Pour que la FI ait une signification physique une autre contrainte est imposée.

On interprète les deux exemples suivant pour la déduire :

1- $() = \sin \Rightarrow$ SA est $X_a(t) = \sin + \cos$ d'où la FI est une constante.

2- $() = +$ (signal décalé en amplitude) \Rightarrow Le signal analytique est

$X_a(t) = \sin + \cos +$ d'où la fréquence instantanée n'est plus constante mais dépend de la valeur de .

Donc cette contrainte impose au signal dont on calcule la FI d'être de moyenne nulle. Cette contrainte est ajoutée à la notion de bande étroite d'un signal mono-composante pour que la FI estimée se prête à une interprétation physique.

Avec la transformée de Hilbert la définition de la FI repose d'une part sur un filtre non causal et non instantané et d'autre part sur la transformée de Fourier du signal analytique.

II.6.2 Estimation par Représentations Temps-Fréquence (RT F):

Face à la problématique des signaux multi-composantes, l'une des solutions élégantes pour résoudre ce problème repose sur les RTF.

Par exemple, en considérant la distribution de Wigner-Ville (WVD), la FI $\nu_x(t)$ d'un signal $()$ est définie comme le moment d'ordre 1 en fréquence de la WVD.

$$\nu_x(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \nu W_{x_a}(t, \nu) d\nu}{\int_{-\infty}^{+\infty} W_{x_a}(t, \nu) d\nu} \quad (\text{II.27})$$

Avec x_a le signal analytique associé au signal $x(t)$.

Pour remonter aux lois d'évolution des différentes FI présentes dans un signal multi-composantes divers travaux se basent sur cette représentation conjointe en temps-fréquence.

II.6.3 Estimation par méthodes locales :

Elles sont dites aussi instantanées. Ces approches n'utilisent que les valeurs du signal, si nécessaire, ses dérivées à l'instant même où l'on souhaite estimer la FI et l'AI.

Parmi de nombreuses méthodes de démodulations « é » des signaux AM-FM multi-composantes on peut citer celles basées sur :

- L'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser.
- L'opérateur de Dyn.
- L'opérateur de Shekel.
- Les méthodes de Hankel et Toeplitz.

Par la suite on s'intéresse essentiellement à l'opérateur TKEO.

Cette transformation non-linéaire se démarque des autres pour plusieurs raisons :

- Son expression provient de l'étude d'un système physique (énergie de l'oscillateur harmonique).
- Certaines caractéristiques liées à l'enveloppe et à la FI ressortent mieux.
- Sa complexité est faible et sa mise en œuvre informatique est simple.
- Elle ne nécessite pas de post-traitement en général, si on respecte les restrictions sur le signal.

II.7 Conclusion :

La description d'un signal mono-composante passe par l'estimation de deux grandeurs : l'AI et la FI. Afin d'estimer la FI d'un signal, nous avons présenté les approches les plus courantes : la TH, les RTF et les méthodes locales.

Il existe deux stratégies pour estimer la fréquence instantanée :

- La première approche repose sur l'estimation d'une RTF qui permet d'estimer les FI des différentes composantes présentes dans le signal.
- Les secondes approches (TH et méthodes locales) permettent d'estimer tout d'abord les FI et (AI) du signal pour aboutir finalement à l'élaboration de la description temps-fréquence.

III.1 Introduction :

Nous allons présenter dans ce chapitre l'opérateur de Teager-Kaiser qui est destiné à la démodulation en amplitude et/ ou en fréquence des signaux AM-FM, et aussi à la mesure d'interaction de deux signaux non-stationnaires pour l'estimation des temps de retard. On va faire appel aux principes de base de l'opérateur de Teager-Kaiser et aussi ses avantages et ses inconvénients. Puis, on va présenter un nouveau opérateur généralisant celui de Teager-Kaiser, nous proposons également une discrétisation de cet opérateur pour sa mise en œuvre informatique. On va finir par montrer que le nouvel opérateur est une mesure d'interaction non linéaire qui permet la détection des signaux ou le calcul des temps de retard.

III.2 Opérateur de Teager-Kaiser \mathbb{R} :

Teager et Kaiser ont montré l'insuffisance du modèle linéaire de la parole pour la production des voyelles dans le conduit vocal. En effet, la production de la parole fait appel à une série de mécanismes non-linéaires qu'il est difficile d'expliquer avec une approche linéaire. La courbe d'énergie nécessaire à la production de la parole, présentée dans les résultats de Teager et Kaiser, montre l'évidence du modèle non-linéaire de la parole. Ces mêmes auteurs ont montré que les fréquences de résonances (formants) qui apparaissent dans le conduit vocal du signal de parole peuvent varier rapidement en fréquence et en amplitude. Ainsi, ces variations de caractéristiques du signal de parole peuvent être modélisées comme une combinaison linéaire de signaux AM-FM. Cependant, l'algorithme ou la méthode de calcul de l'énergie du système ayant généré le signal de parole n'a pas été présenté. En effet, ce problème a suscité l'intérêt de Kaiser, ce dernier part du constat suivant : Un signal de 10Hz et un autre de 1000Hz peuvent avoir la même énergie mais l'énergie du système pour créer le signal à 1000Hz est plus importante que celle de 10Hz. Pour expliquer cette différence d'énergie, Kaiser montre dans le cas d'un système simple (oscillateur harmonique) que l'énergie nécessaire pour créer le signal oscillant est proportionnelle au carré du produit de l'amplitude et de la fréquence du signal. Ainsi, l'énergie est fonction des caractéristiques du signal qu'on souhaite créer. Partant de ce système, Kaiser a proposé un algorithme simple et rapide pour estimer l'énergie, appelé opérateur de Teager-Kaiser, pourvu que la restriction liée à la largeur de bande du signal (signal bande étroite) soit respectée. L'une des premières applications de l'opérateur de Teager-Kaiser est la détection des modulations AM-FM des formants en estimant le produit

de leur amplitude et de leur fréquence. En se basant sur ce résultat de cet opérateur, Maragos et al, sont les premiers à proposer une méthode de démodulation des signaux AM-FM.

III.2.1 Energie d'un système masse-ressort et \mathbb{R} :

On applique le principe fondamental de la dynamique à un système formé d'une masse m et d'un ressort de raideur k et on aura :

$$\frac{d^2(x)}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{III.1}$$

L'expression (III-1) est une équation de second ordre qui permet de décrire le mouvement du système masse-ressort. Si on suppose que k est constant on aura le modèle de l'oscillateur harmonique non-amorti.

$x(t)$ Représente la position de la masse à l'instant t , donc la solution de l'équation (III-1) est une oscillation périodique donné par :

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \phi) \tag{III.2}$$

Où :

A : Amplitude des oscillations ; ϕ : La phase initiale.

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ La pulsation propre d'oscillation (fréquence angulaire).

L'énergie totale E_x du système masse-ressort (oscillateur harmonique) est la somme de l'énergie potentielle du ressort et de l'énergie cinétique de la masse :

$$E_x = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \tag{III.3}$$

Si on remplace \dot{x} par $-\Omega x \sin(\Omega t + \phi)$ et la position x par $\cos(\Omega t + \phi)$ dans l'équation (III-3) on aura :

$$E_x = \frac{1}{2} m \Omega^2 A^2 \tag{III.4}$$

$$E_x \approx \Omega^2 A^2 \tag{III-5}$$

L'énergie de l'oscillateur harmonique est proportionnelle au carré de l'amplitude et au carré de la pulsation des oscillations. La valeur de E_x représente l'énergie du système masse-ressort nécessaire pour générer le signal sinusoïdal ().

III.2.2 Algorithme de Teager-Kaiser :

III.2.2.1 Operateur d'énergie de Teager –Kaiser discret :

Soient x_n les échantillons du signal () représentant le mouvement de l'oscillateur. On peut écrire sa solution comme suit :

$$x_n = A \cos(\Omega n + \Phi) \tag{III.6}$$

Où :

$\Omega = \frac{\omega}{f_s}$ La pulsation numérique.

ω : La fréquence et f_s : La fréquence d'échantillonnage.

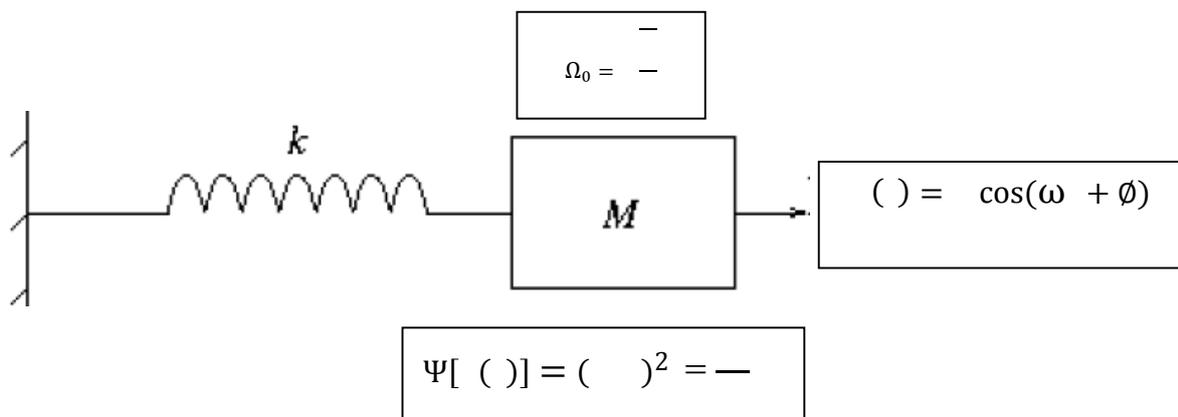


Figure (III-1) L'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser dépiste l'énergie fournie par la source sinusoïdale (normalisé par unité de masse $^{-1}$) qui engendre ().

Nous supposons que l'échantillonnage est régulier. L'équation (III.6) a trois paramètres ou inconnues (A, Ω, Φ) qui peuvent être calculés à partir des trois échantillons du signal. Pour la résoudre on utilise les échantillons suivant : x_{n+1} et x_{n-1} .

$$x_n = A \cos(\Omega n + \Phi) \tag{III.7}$$

$$x_{n+1} = A \cos((n+1)\Omega + \phi) \quad (\text{III.8})$$

$$x_{n-1} = A \cos((n-1)\Omega + \phi) \quad (\text{III.9})$$

A l'aide des relations trigonométriques suivantes :

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} [2 \sin \alpha \sin \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta]$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

On aura :

$$x_{n+1} x_{n-1} = A^2 \cos[(n+1)\Omega + \phi] \cos[(n-1)\Omega + \phi] \quad (\text{III.10})$$

$$= A^2/2 [2 \cos^2(\Omega + \phi) + 1 - 2 \sin^2 \Omega] \quad (\text{III.11})$$

$$= A^2 \cos^2(\Omega + \phi) - A^2 \sin^2 \Omega \quad (\text{III.12})$$

$$x_{n+1} x_{n-1} = x_n^2 - A^2 \sin^2 \Omega \quad (\text{III.13})$$

$$\text{III-15} \Rightarrow A^2 \sin^2 \Omega = x_n^2 - x_{n+1} x_{n-1} \quad (\text{III.14})$$

Si on limite les valeurs de Ω à $\Omega < \pi = 0.7854$, c'est-à-dire $\Omega < \frac{1}{8}$ l'erreur commise en approximant $\cos \Omega$ par $\cos \Omega$ est de $\frac{1}{\sqrt{1}} \approx 11\%$ et c'est ce qui permet d'écrire l'équation (III-14) sous la forme suivante :

$$A^2 \Omega^2 = x_n^2 - x_{n+1} x_{n-1} \quad (\text{III.15})$$

L'équation (III-15) donne la mesure de l'énergie du signal (x_n) dont la fréquence d'échantillonnage est telle que $\Omega > 8$ (c'est-à-dire au moins deux points dans chaque quart de cycle de l'oscillation sinusoïdale). L'algorithme nécessite alors une fréquence d'échantillonnage à peu près de 8 fois supérieure de la composante la plus élevée du signal à traiter. Ainsi, la relation (III-15) est vue comme un algorithme de calcul de l'énergie d'un signal mono-composante :

$$E_n = x_n^2 - x_{n+1} x_{n-1} = A^2 \sin^2 \Omega \approx A^2 \Omega^2 \quad (\text{III.16})$$

Avec : E_n est la sortie de l'algorithme ; x_n le signal à traiter.

L'équation (III-16) est indépendante de la phase initiale. Notons que lorsqu'on inverse le signal en temps et ça en changeant x_n par x_{-n} ou de n en $-n$ cet algorithme est symétrique par conséquent l'énergie du signal ne va pas changer. L'algorithme est facile à mettre en œuvre et rapide car il ne nécessite que trois échantillons.

Comme la version discrète de l'opérateur de Teager-Kaiser ait été définie avant la version continue. On va commencer par la définition de l'opérateur continu en fonction de t .

III.2.2.2 Operateur d'énergie de Teager –Kaiser continu :

L'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser (TKEO) $\Psi_{\mathbb{R}}[x(t)]$ d'un signal $x(t)$ à valeurs réelles est défini dans le domaine continu par :

$$\Psi_{\mathbb{R}}[x(t)] = \left(\dot{x}(t)\right)^2 - x(t)\ddot{x}(t) \tag{III.17}$$

Ou encore :

$$\Psi_{\mathbb{R}}(x) = \dot{x}^2 - x\ddot{x} \tag{III.18}$$

Avec : $x \equiv x(t)$, $\dot{x} \equiv \frac{dx(t)}{dt}$ et $\ddot{x} \equiv \frac{d^2x(t)}{dt^2}$

On insert $x(t) = A \cos(\omega t)$ dans l'équation (III-18). Donc l'opérateur TKEO associé au mouvement de l'oscillateur harmonique vaut:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbb{R}}[x(t)] &= (\dot{x}(t))^2 - x(t)\ddot{x}(t) \\ &= \omega^2 A^2 (\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) \\ &= \omega^2 A^2 \end{aligned} \tag{III.19}$$

L'énergie de l'oscillateur harmonique peut s'écrire :

$$E_x = \frac{1}{2} \Psi_{\mathbb{R}}[x(t)] \tag{III.20}$$

Où : x : Energie du processus ; α : Coefficient de proportionnalité.

$\Psi_{\mathbb{R}}[x(t)]$: Opérateur d'énergie de Teager-Kaiser.

L'opérateur TKEO qui est un opérateur différentiel non-linéaire permet de décrire les propriétés locales d'un signal réel $x(t)$, de même grandeur qu'une énergie. Il s'exprime simplement à partir du signal ainsi que de ses dérivées premières et secondes. Son expression peu complexe permet une mise en œuvre informatique et il possède une très bonne résolution temporelle.

III.2.3 Discrétisation de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{R}}$:

On peut avoir différentes formules discrètes de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{R}}$ et ça en fonction de la forme de discrétisation choisie pour l'opérateur de dérivation.

On considère un seul cas dans notre travail : les différences finies du premier ordre à gauche. La variable t étant remplacée par nT (T est la période d'échantillonnage), la valeur du signal x à l'instant nT sera notée $x(n)$ ou plus simplement x_n . Les dérivées d'ordre un et deux au point nT peuvent s'exprimer par :

$$\dot{x}(n) = \frac{x(n) - x(n-1)}{T},$$

$$\ddot{x}(n) = \frac{x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)}{T^2}.$$

L'opérateur TKEO discrétisé vaut donc :

$$\Psi_{\mathbb{R}} = \frac{x(n)^2 - x(n-1)^2 - 2T \dot{x}(n) x(n-1)}{T^2} \quad (\text{III.21})$$

Si on ignore le décalage d'un échantillon et on normalise par le facteur T^{-2} on obtient la définition dans le domaine discret de l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser (TKEO).

Définition :

Soit un signal discret $(x[n])$ à valeur réelle. L'opérateur discret de Teager-Kaiser

$\Psi_R[x[n]]$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Psi_R[x[n]] = x[n]^2 - (x[n-1] - x[n+1])^2 \quad (\text{III.22})$$

Par la suite, nous omettrons les indices n et d de Ψ_R (: si on se réfère au domaine continu et d : au domaine discret). Notons que le fait de discrétiser l'opérateur de dérivation par une différence finie d'ordre un a plusieurs conséquences dont l'importante est la sensibilité de l'opérateur discret vis-à-vis du bruit.

III.2.4 Applications et limites de l'opérateur Ψ_R :

La démodulation AM-FM du signal de parole a été l'une des premières applications significatives de l'opérateur TKEO. Teager et Kaiser abordent et exposent les premiers concepts de démodulation AM-FM basés sur l'opérateur TKEO par la suite développés dans d'autres contributions. L'opérateur TKEO a été utilisé dans le domaine de l'analyse de la parole, de la reconnaissance d'interlocuteurs. Il a été généralisé aux signaux AM-FM pour l'estimation de l'enveloppe instantanée et de la FI. Il est aussi à la base de développements récents et d'extensions nombreuses aussi bien dans le domaine du signal que dans le domaine de l'image.

A ce moment, l'opérateur TKEO est un outil familier au sein de la communauté du traitement du signal (notamment démodulation) et depuis peu en traitement d'images. Il apparaît comme une méthode alternative de démodulation et permet de définir une grandeur locale ayant la dimension d'une énergie pour les signaux oscillants. Cependant, étant donnée son origine physique (énergie de l'oscillateur harmonique) et son expression littérale (équation III-23) cet opérateur énergétique de démodulation est limité aux signaux bande étroite et mono-composante. Si le signal est multi-composantes donc on fait appel au filtre passe-bande pour isoler les différentes composantes du signal avant d'estimer la FI et l'AI de chacune des composantes extraites. Face à ses limitations, par exemple sa sensibilité au bruit, cet opérateur non-linéaire présente des avantages comme par exemple son extrême simplicité pour sa mise en œuvre, ou le fait que la FI ne nécessite pas le calcul du SA(signal analytique).

III.3 L'opérateur d'énergie croisé de Teager-Kaiser Ψ_B :

III.3.1 Extension de l'opérateur TKEO :

L'équation (III-17) permet de définir l'opérateur TKEO pour un signal réel. Plusieurs auteurs ont proposé des extensions pour un signal complexe. En effet, nous rencontrons habituellement des signaux à valeurs complexes en traitement du signal et en particulier dans le signal analytique. Après une transformation de Fourier ou en traitement d'antenne. Ainsi, Maragos et al. Proposent pour un signal $x(t)$ à valeur dans \mathbb{C} la formulation :

$$\Psi_{C1}[x(t)] = | \dot{x}(t) |^2 - \Re [x^*(t) \ddot{x}(t)] \quad (\text{III.23})$$

Hamila et al ont proposé une autre formulation :

$$\Psi_{C2}[x(t)] = \dot{x}(t) \dot{x}^*(t) - [\dot{x}(t) \ddot{x}^*(t) + \dot{x}^*(t) \ddot{x}(t)] \quad (\text{III.24})$$

Ils ont montré aussi que l'on a :

$$\Psi_{C2}[x(t)] = \Psi_R[x_r(t)] + \Psi_R[x_i(t)] \quad (\text{III.25})$$

Avec $x(t) = x_r(t) + j x_i(t)$ où (x_r, x_i) sont à valeurs dans \mathbb{R} . D'après les auteurs cette forme permet de mieux appréhender la symétrie de l'opérateur. Les auteurs relient l'opérateur Ψ_{C2} avec WVD, ainsi qu'avec la fonction d'ambiguïté. Parallèlement à ces extensions sur des signaux complexes, Kaiser propose pour représenter l'interaction entre deux signaux une extension permettant d'estimer l'énergie d'interaction croisée entre deux signaux à valeurs dans \mathbb{R} . Pour deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ à valeurs réelles, cet opérateur est défini par :

$$\Psi_{2R}(x,y) = \dot{x} \dot{y} - x \ddot{y} \quad (\text{III.26})$$

Son symétrique est définie par :

$$\Psi_{2R}(y,x) = \dot{y} \dot{x} - y \ddot{x} \quad (\text{III.27})$$

Où : $(\dot{\cdot}, \ddot{\cdot})$ et $(\ddot{\cdot}, \dot{\cdot})$ représentent les dérivées temporelles du premier et du second ordre du couple (x, y) . Cette fonction peut être considérée comme une mesure d'interaction-énergétique entre deux signaux réels. Par analogie avec l'étude énergétique effectuée sur le système masse-ressort, si x et y représentent une quantité équivalente à un mouvement de déplacement,

alors $\Psi(x, y)$ ou $\Psi(x, x)$ a la dimension d'une énergie. Notons que si $x=y$, alors nous retrouvons l'expression de l'opérateur TKEO.

L'opérateur Ψ_{2R} est limité, par exemple $\Psi_{2R}(x, y) \neq \Psi_{2R}(y, x)$, il n'est pas commutatif. On va présenter par la suite une forme étendue et symétrique de l'opérateur Ψ_R pour des signaux complexes : l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser (CTKEO pour Cross Teager-Kaiser Energy Operator).

III.3.2 Définition et propriétés remarquables de Ψ_B :

La construction de nouveau opérateur d'énergie croisée de Teager-Kaiser repose sur un premier opérateur Ψ_C défini comme suit :

Définition 1:

Soient deux signaux x et y distincts à valeurs dans \mathbb{C} . L'opérateur Ψ_C s'exprime sous la forme :

$$\Psi_C(x,y) = - [\dot{x}^* \dot{y} + \dot{y}^* \dot{x}] - [x \ddot{x}^* + x^* \ddot{x}] \tag{III.28}$$

$$\Psi_C(y,x) = - [\dot{x}^* \dot{y} + \dot{y}^* \dot{x}] - [y \ddot{y}^* + y^* \ddot{y}] \tag{III.29}$$

Où le symbole $*$ désigne la conjugaison complexe. Notons que si $x=y$ nous retrouvons l'équation (III-24) :

$$\Psi_C(x,x) = \Psi_{C2}(x) = \dot{x} \ddot{x}^* - [\ddot{x}^* + x \ddot{x}]$$

A partir de l'expression de $\Psi_C(x, y)$, une des solutions simples pour résoudre cet opérateur symétrique est de combiner $\Psi_C(x, y)$ et son symétrique $\Psi_C(y, x)$ dans une même expression afin d'obtenir $\Psi_B(x, y)$.

Définition 2: l'opérateur $\Psi_B(x, y)$ est défini par :

$$\Psi_B(x, y) = - [\Psi_C(x, y) + \Psi_C(y, x)] \tag{III.30}$$

$$= - [\dot{x}^* \dot{y} + \dot{y}^* \dot{x}] - [x \ddot{x}^* + x^* \ddot{x} + y \ddot{y}^* + y^* \ddot{y}] \tag{III.31}$$

Ψ_B est bien symétrique : $\Psi_B(x, y) = \Psi_B(y, x)$. De plus si $x=y$ alors :

$$\begin{aligned} \Psi_B(x, y) &= \Psi_C(x, y) = \Psi_C(y, x) \\ &= \Psi_{C2}(x, y) \end{aligned} \tag{III.32}$$

Si on s'intéresse à construire autour de l'opérateur une mesure de similarité pour les signaux la symétrie est intéressante. Nous retrouvons bien l'expression de l'équation (III-24). Pour plus de clarté par la suite on utilise la notation $\Psi_B(x, y) \equiv \Psi_B(x, y)$. Par ailleurs, on considère la fonction d'autocorrélation instantanée définie pour le signal $x(t)$ par :

$$R_x(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t - \tau) dt \tag{III.33}$$

L'opérateur $\Psi_B[x(t)]$ vérifie la relation proposée par Hamila et al.

$$\Psi_B[x(t)] = -2 \frac{d}{dt} R_x(x, y) \tag{III.34}$$

Par la suite on va étudier quelques propriétés remarquables de l'opérateur Ψ_B et aussi pour simplifier on procède comme suit :

On note Ψ_B de (x, y) et $(x, y; t)$ par $\Psi_B(x, y; t)$.

III.3.2.1 Propriétés de Ψ_B :

- Ψ_B est une mesure de similarité :
 - $\Psi_B(x, y; t) \geq 0$,
 - $\Psi_B(x, y; t) = \Psi_B(y, x; t)$.
- Ψ_B est à valeurs réelles :
 - $\Psi_B(x, y; t) = \Psi_B^*(x, y; t)$.
- Ψ_B est invariable par translation temporelle :
 - $\Psi_B(x(t-t_0), y(t-t_0); t) = \Psi_B(x, y; t-t_0)$.
- Ψ_B conserve les lois d'évolution en amplitude :
 - $\Psi_B(x(t), y(t)) = \Psi_B(x, y; t)$.

Cette relation montre par exemple que l'instant du maximum d'interaction est indépendant de l'échelle des amplitudes.

- Dilatation en temps :

$$\Psi_B(x(at), y(at)) = a^2 \Psi_B(x, y; t).$$

A partir des propriétés citées ci-dessus, on peut en déduire aisément quelques relations simples (x et y étant deux signaux distincts à valeurs dans \mathbb{C} , a et b deux constantes dans \mathbb{R}) :

- 1- $\Psi_B(0, x) = \Psi_B(x, 0) = 0$. L'interaction entre un signal $x(t)$ et 0 est nulle, il n'y a pas d'échange énergétique.
- 2- $\Psi_B(a, x) = \Psi_B(x, a) = -\Re[\]$.
- 3- $\Psi_B(x+a, y) = \Psi_B(x, y) + \Psi_B(a, y)$.
- 4- $\Psi_B(x+a, x) = \Psi_C(x) - \Re[\]$.
- 5- $\Psi_B(ax, y) = a \cdot \Psi_B(x, y)$.
- 6- $\Psi_B(ax, x) = a \cdot \Psi_C(x)$.
- 7- $\Psi_B(x+y, x+y) = \Psi_B(x) + \Psi_B(y) + 2\Psi_B(x, y)$.
- 8- $\Psi_B(\quad, \quad) = \frac{1}{2} \cos(\omega_1 + \omega_2)t$.
- 9- $\Psi_B(a, b) = 0$.

La relation 9 signifie que l'interaction entre deux constantes est nulle : si on considère deux systèmes au repos alors il ne peut pas y avoir d'échange (interaction) entre les deux processus.

La relation 7 montre que Ψ_B répond au principe de superposition quadratique.

On va établir quelques propositions qui vont permettre d'interpréter et d'appliquer l'opérateur Ψ_B .

Proposition1 :

Soient deux signaux x et y à valeurs dans \mathbb{C} . $\Psi_B(x, y)$ est une forme bilinéaire symétrique et $\Psi_C(x) = \Psi_B(x, x)$ est la forme quadratique associée.

Démonstration :

1. La symétrie de l'opérateur est établie par construction.
2. Linéarité selon x.

$$\begin{aligned}
 \Psi_B(ax_1 + bx_2, y) &= -[a \dot{x}_1^* + b \dot{x}_2^* + a \dot{y}_1^* + b \dot{y}_2^*] - [ax_1 \ddot{x}_1^* + bx_2 \ddot{x}_2^* + ax_1 \ddot{y}_1^* \\
 &\quad + bx_2 \ddot{y}_2^* + ay_1 \ddot{x}_1^* + by_2 \ddot{x}_2^* + ay_1^* \ddot{y}_1^* + by_2^* \ddot{y}_2^*] \\
 &= -[\dot{x}_1^* + \dot{y}_1^*] + -[\dot{x}_2^* + \dot{y}_2^* (t)^*] - [x_1 \ddot{x}_1^* + \dot{y}_1^* \ddot{y}_1^*] \\
 &\quad - [x_2 \ddot{x}_2^* + x_2 \ddot{y}_2^* + y_2 \ddot{y}_2^*] \\
 &= a \Psi_B(x_1, y) + b \Psi_B(x_2, y).
 \end{aligned}$$

3. De manière similaire, linéarité selon y :

$$\Psi_B(x, ay_1 + by_2) = a \Psi_B(x, y_1) + b \Psi_B(x, y_2)$$

4. Forme quadratique :

$$\Psi_B(x, x) = \Psi_C(x, x) = \Psi_C(x) \quad \text{(d'après l'équation III.30).}$$

Proposition 2 :

L'opérateur CTKEO_B de deux signaux dans \mathbb{C} est égal à la somme des énergies croisées de Teager de leurs parties réelles et de leurs parties imaginaires.

$$\Psi_B(x, y) = \Psi_B(x_r, y_r) + \Psi_B(x_i, y_i) \tag{III.35}$$

Avec $() = x_r(t) + j x_i(t)$ et $() = y_r(t) + j y_i(t)$ avec $(x_r; x_i; y_r; y_i)$ sont à valeurs dans \mathbb{R} .

Démonstration :

$$\begin{aligned} \Psi_B(x, y) &= -[(\dot{x}_r - j\dot{x}_i)(\dot{x}_i + j\dot{x}_r) + (\dot{x}_i + j\dot{x}_r)(\dot{x}_r - j\dot{x}_i)] - [(\dot{y}_r + j\dot{y}_i)(\dot{y}_i - j\dot{y}_r)] \\ &\quad + (x_r - jx_i)(\ddot{x}_i + j\ddot{x}_r) + (y_r + jy_i)(\ddot{y}_i - j\ddot{y}_r) + (y_r - jy_i)(\ddot{y}_r - j\ddot{y}_i) \\ \Psi_B(x, y) &= \dot{x}_r \dot{x}_r - [x_r \ddot{x}_r + \dot{x}_i \dot{x}_i + [x_i \ddot{x}_i + \dot{y}_i]] \end{aligned} \tag{III.36}$$

Cette proposition permet d'estimer séparément la partie réelle indépendamment de la partie complexe et vice-versa.

Par ailleurs, les expressions (équation III.30 et III.36) permettent de retrouver les définitions proposées par Maragos al et par Hamila al :

$$\begin{aligned} \Psi_B(x, x) &= \Psi_C(x, x) \equiv \Psi_B(x) \equiv \Psi_C(x) \\ &= \Psi_{C1}(x) \\ &= \Psi_{C2}(x). \end{aligned}$$

Après la présentation de quelques propriétés mathématique de l'opérateur Ψ_B , on va maintenant étudier l'une de ses propriétés, à savoir l'interaction énergétique entre deux signaux.

III.3.3 Relations entre Ψ_B et CWVD :

La corrélation croisée instantanée pour deux signaux distincts x et y complexes est donnée par :

$$\Psi_{xy}(t) = \frac{1}{2} (\dot{x}_r \dot{y}_r + \dot{x}_i \dot{y}_i) + \frac{j}{2} (\dot{x}_r \dot{y}_i - \dot{x}_i \dot{y}_r) \tag{III.37}$$

Ou encore :

$$\Psi_{xy}(t) = \frac{1}{2} (\dot{x}_1)^* \dot{x}_2 \tag{III.38}$$

Avec :

$$1 = x; \quad 2 = y$$

: Variable temporelle de décalage (retard temporel).

D'autre part, on peut noter :

$$\begin{aligned}
 x^*y^*(\tau) &= (x^*(\tau))^* \cdot (y^*(\tau))^* \\
 &= (x^*(\tau))^* \cdot (y^*(\tau))^*
 \end{aligned}
 \tag{III.39}$$

Exemple :

Soient x et y deux signaux dans \mathbb{C} . La relation entre R_y et Ψ_B est donnée par :

$$\Psi_B(x, y) = - \frac{2}{2} \frac{(x, y)}{\tau=0} - \frac{2}{2} \frac{* (x, y)}{2}
 \tag{III.40}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
 \frac{(x, y)}{2} &= - [(x(1)y^*(2) - (x(1))^* (y(2))] \\
 \frac{2}{2} \frac{(x, y)}{2} &= - [(x(1)y^*(2) - 2 (x(1))^* (y(2)) + (x(1))^* (y(2))] \\
 \frac{2}{2} \frac{(x, y)}{2} \Big|_{\tau=0} &= - [(x(\tau)y^*(\tau) - 2 (x(\tau))^* (y(\tau)) + (x(\tau))^* (y(\tau))] \\
 &= - [(x(\tau))^* (y(\tau)) + - [(x(\tau)y^*(\tau) + (x(\tau))^* (y(\tau))]
 \end{aligned}$$

De façon identique :

$$\frac{2}{2} \frac{* (x, y)}{2} \Big|_{\tau=0} = - [(x(\tau))^* (y(\tau)) + - [x(\tau) (y^*(\tau)) + (x(\tau))^* (y(\tau))]$$

Et finalement :

$$\Psi_B(x, y) = - \frac{2}{2} \frac{(x, y)}{\tau=0} - \frac{2}{2} \frac{* (x, y)}{2} \Big|_{\tau=0}$$

Si l'on pose $u = y$ alors la relation entre $R(u, \tau)$ et $\Psi_B[x(t)]$ est donnée par :

$$\Psi_B[x(t)] = -2 \frac{(x, x)}{2} \Big|_{\tau=0}$$

La Distribution de Wigner-Ville Croisée (CWVD pour Cross Wigner-Ville Distribution) de x et y est définie par:

$$C_{xy}(t, \tau) = \int_{\mathbb{R}} R_{xy}(t, \tau) dt \quad (III.41)$$

D'autre part, nous avons aussi les relations suivantes :

$$C_{xy}^*(\tau, t) = \int_{\mathbb{R}} R_{x^*y^*}(t, \tau) dt$$

$$C_{x^*y^*}(\tau, t) = \int_{\mathbb{R}} R_{x^*y^*}(t, \tau) dt$$

$$C_{x^*y^*}(\tau, -t) = \int_{\mathbb{R}} R_{x^*y^*}(t, \tau) dt$$

$$C_{xy}^*(\tau, t) = C_{x^*y^*}(\tau, -t)$$

Donc suite à ces rappels la relation entre CWVD et CTKEO_B peut être établie.

III.4 Discrétisation de l'opérateur CTKEO_B :

On va s'intéresser à la discrétisation de l'opérateur CTKEO_B.

Dans le domaine continu On notera l'opérateur CTKEO_B par Ψ_{Bc} , et dans le domaine discret par Ψ_{Bd} .

L'expression de Ψ_{Bc} dans le domaine continu pour des signaux complexes $x(t)$ et $y(t)$ est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \Psi_{Bc}[x(t), y(t)] &= -[\Psi_{Cc}[x(t), y(t)] + \Psi_{Cc}[x^*(t), y^*(t)]] \\ &= -[\int_{\mathbb{R}} x^*(t) y(t) dt] - [\int_{\mathbb{R}} x^*(t) y^*(t) dt] \end{aligned} \quad (III.42)$$

Où $\Psi_{Cc}(x, y)$ est donnée par:

$$\Psi_{Cc}[x(t), y(t)] = [\int_{\mathbb{R}} x^*(t) y(t) dt] - [\int_{\mathbb{R}} x^*(t) y^*(t) dt] \quad (III.43)$$

Nous avons montré précédemment que $\Psi_{Bc}(x, y)$ est une forme bilinéaire symétrique réelle (proposition1) et $\Psi_{Bc}(x, x)$ est sa forme quadratique associée. Nous avons aussi montré que $\Psi_{Bc}(x, y)$ pour deux signaux complexes x et y est égale à la somme de $\Psi_{Bc}(x, y)$ de leurs

parties réelles et de leurs parties imaginaires (Proposition.2), Par conséquent, la discrétisation de $\Psi_{Bc}(x, y)$ sera étudiée uniquement sur la quantité $\Psi_{Bc}[x_k, y_k]$ avec $k \in \{r, i\}$.

La discrétisation de l'opérateur de dérivation peut s'exprimer sous les différentes formes suivantes : les différences finies d'ordre un à gauche, à droite et centrées.

III.4.1 Différences finies d'ordre un à gauche :

Cette méthode permet d'estimer les dérivées en un point à l'aide $(n), (n+1), (n+2), \dots$

Ces expressions reposent sur un développement limité de Taylor de la fonction $x(t)$ ou $y(t)$.

Si on procède de la même manière que la discrétisation de l'opérateur Ψ_R et celle appliqué par Maragos et Al à Ψ_R , on pourra écrire :

$$\Psi_{Bc}[x(n), y(n)] \rightarrow \Psi_{Bd}[x_r(n), y_r(n)] + \Psi_{Bd}[x_i(n), y_i(n)] \quad (\text{III.44})$$

Avec :

$$\begin{aligned} \Psi_{Bd}[x_k(n), y_k(n)] = & x_k(n)y_k(n) - [x_k(n+1)y_k(n-1) \\ & + y_k(n+1)x_k(n-1)] \text{ avec } k \in \{r, i\} \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

III.4.2 Différences finies d'ordre un à droite :

Dans le cas des différences finies d'ordre un à droite, les dérivées d'ordre un et deux au point n se calculent par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(n) &= \frac{x(n) - x(n-1)}{\Delta t} \\ \ddot{x}(n) &= \frac{x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)}{(\Delta t)^2} \end{aligned}$$

L'expression obtenue pour la forme discrète de l'opérateur $\Psi_{Bd}[x_k(n), y_k(n)]$ avec

$k \in \{i, r\}$ sera la même que dans le cas des différences finies d'ordre un à gauche.

III.4.3 Différence finies d'ordre un centrées :

Les dérivées d'ordre un et deux au point n dans le cas des différences finies d'ordre centrées se calculent par :

$$\begin{aligned} \dot{f}(n) &= \frac{f(n+1) - f(n-1)}{2} \\ \ddot{f}(n) &= \frac{f(n+2) - 2f(n) + f(n-2)}{2} \end{aligned}$$

L'expression obtenue par l'opérateur Ψ_{Bd} [$x_k(n), y_k(n)$] avec $k \in \{i, r\}$ est un peu plus compliquée :

$$\Psi_{Bc}[f(n), g(n)] \rightarrow \Psi_{Bd}[x_r(n), y_r(n)] + \Psi_{Bd}[x_i(n), y_i(n)] \quad (\text{III.46})$$

Avec :

$$\begin{aligned} \Psi_{Bd}[x_k(n), y_k(n)] &= 2[x_k(n) y_k(n) \\ &\quad - [x_k(n+1) y_k(n-1) + y_k(n+1) x_k(n-1)] \\ &\quad + x_k(n-1) y_k(n-1) \\ &\quad - - [x_k(n) y_k(n-2) + y_k(n) x_k(n-2)] \\ &\quad + x_k(n+1) y_k(n+1) \\ &\quad - - [x_k(n+2) y_k(n) + y_k(n+2) x_k(n)] . \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

Si on regroupe les deux termes entre eux on aura l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \Psi_{Bd}[x_k(n), y_k(n)] &= \Psi_{Bd}[x_k(n+1), y_k(n+1)] + 2\Psi_{Bd}[x_k(n), y_k(n)] \\ &\quad + \Psi_{Bd}[x_k(n-1), y_k(n-1)] . \text{ Avec } k \in \{i, r\} \end{aligned} \quad (\text{III.48})$$

Avec :

- Ψ_{Bd} égale à l'expression (III.45)
- L'équation (III.48) correspond à une moyenne pondérée de $\Psi_{Bd} [x_k(n), y_k(n)]$.

Lorsqu'on discrétise l'opérateur on obtient une expression simple à mettre en œuvre, mais induit un certain nombre d'erreur. En effet, il faut noter que le recours à la formulation numérique des opérateurs de dérivation peut conduire à des erreurs très importantes. L'approche numérique revient à estimer la définition de la dérivée comme la différence entre deux grandes quantités et il s'agit de $(x + \Delta t)$ et (x) pour en obtenir :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

L'opérateur de dérivation est très sensible au bruit et ça à cause de la différence des termes (x) et $(x + \Delta t)$.

D'après les propriétés théoriques de l'opérateur Ψ_B , ce dernier peut être appliqué à des problématiques bien spécifiques telles que :

- Etude de ses propriétés d'interaction entre deux signaux.
- Etude de ses propriétés de similarité pour la classification de séries temporelles.
- Estimation des retards sur une ligne de capteurs en acoustiques sous-marine.

Dans notre travail on s'intéresse à l'étude de ses propriétés d'interaction entre deux signaux, ainsi son application à une image sonar.

III.5 Démodulation d'images avec les opérateurs de Teager-Kaiser :

Pour cette application, on introduit les modèles AM-FM et les notions de démodulation d'images. On va étudier une approche initiée par Maragos et al. Il s'agit de l'algorithme discret, le DESA (Discret Energy Separation Algorithm), et sa version continue, l'ESA (Energy Separation Algorithm), proposée par Maragos et Bovik. Ces deux algorithmes se basent sur l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser (TKEO), initialement introduit par Teager afin de pallier à l'insuffisance d'une approche linéaire pour modéliser la parole. le TKEO 1D

permet d'estimer l'énergie nécessaire à la création du signal de parole à bande étroite et pour lequel les fréquences instantanées sont centrées autour de la fréquence de résonance d'une porteuse sinusoïdale. Le DESA et ESA ne sont applicables que pour des images à bande étroite. La grande majorité des images naturelles ont des informations très riches, et par conséquent, l'approche mono-composante s'avère insuffisante pour les modéliser. Bovik et al, ont montré qu'une approche multi-composantes permet de démoduler les images réelles. Ils proposent alors une méthode de décomposition en sous-bandes pour séparer chacune des composantes de l'image avant de leur appliquer par exemple l'algorithme DESA. Cette méthode permet d'éviter les artefacts provenant de l'application directe de l'algorithme DESA sur les parties ainsi séparées.

Dans notre travail on va étudier les deux algorithmes DESA et ESA pour une image à bande étroite.

III.5.1 TKEO 2D :

L'extension du TKEO discret en 2D, noté Ψ_d , est faite par Yu et al. pour la détection des contours de l'image.

Définition 1 : Soit une image I de taille $M \times N$. On a $\forall (k, l) \in [0, M] \times [0, N]$:

$$\Psi_d [(k, l)] = 2(I(k, l))^2 - (I(k-1, l))^2 - (I(k+1, l))^2 - (I(k, l-1))^2 - (I(k, l+1))^2 \quad (\text{III.49})$$

C'est une extension du TKEO discret pour les signaux, suivant les lignes et les colonnes.

Etant donnée une image discrète $I(k, l) = A \cos(\Omega_1 k + \Omega_2 l)$, on montre que :

$$\Psi_d [(k, l)] = 4A^2 (\sin^2(\Omega_1) + \sin^2(\Omega_2)) \quad (\text{III.50})$$

La version continue pour les signaux multidimensionnels est introduite par la définition suivante :

Définition 2 : Soit I interpolée continue d'une image discrète définie sur un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^2 . On suppose que I est de classe C^2 sur Ω . Alors $\forall x \in \Omega$, on a :

$$\Psi [(x)] = \| \nabla I(x) \|^2 - I(x) \Delta I(x) \quad (\text{III.51})$$

Où

Δ : est l'opérateur Laplacien et ∇ : l'opérateur gradient.

Pour une image $I(x) = a(x) \cos(\phi(x))$, Maragos et Bovik montrent que :

$$\Psi[I(x)] \approx [I(x)]^2 - |\nabla I(x)|^2 \quad (\text{III.52})$$

Dans ce qui suit, on parle de la démodulation des images avec les opérateurs TKEO en 2D ainsi définis.

III.5.1.1 Algorithme discret DESA :

Les approximations respectives de la composante AM et des composantes horizontale et verticale FM sont données par :

$$a(k, l) \approx \sqrt{\frac{\Psi_d[I(k, l)]}{\sin^2(|U(k, l)|) + \sin^2(|V(k, l)|)}} \quad (\text{III.53})$$

$$|U(k, l)| \approx \arcsin \sqrt{\frac{\Psi_d[I(k+1, l) - I(k-1, l)]}{4\Psi_d[I(k, l)]}} \quad (\text{III.54})$$

$$|V(k, l)| \approx \arcsin \sqrt{\frac{\Psi_d[I(k, l+1) - I(k, l-1)]}{4\Psi_d[I(k, l)]}} \quad (\text{III.55})$$

III.5.1.2 Algorithme discret ESA :

En continu, Maragos et Bovik montrent qu'il est possible de séparer l'énergie de l'image de ses composantes AM et FM avec l'ESA en 2D. Les composantes de l'amplitude sont données par l'équation suivante :

$$a(x_1, x_2) \approx \frac{\Psi[I(x_1, x_2)]}{\sqrt{\Psi\left[\frac{\partial I}{\partial x_1}(x_1, x_2)\right] + \Psi\left[\frac{\partial I}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right]}} \quad (\text{III.56})$$

Les fréquences horizontales et verticales de la composante FM sont données respectivement pour $i = 1$ et $i = 2$ par :

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, x_2) \right| \approx \sqrt{\frac{\Psi\left[\frac{\partial I}{\partial x_i}(x_1, x_2)\right]}{\Psi[I(x_1, x_2)]}} \quad (\text{III.57})$$

Notons que ces deux algorithmes, DESA et ESA, supposent que les images à démoduler soient à bande étroite. Pour ce qui est des images à large bande un filtre passe-bande (filtre de Gabor, Ondelette...) est nécessaire avant l'application de ces deux méthodes.

III.5.2 Opérateur de Teager-Kaiser d'ordre supérieur en 1D :

Les opérateurs d'ordre supérieurs sont introduits pour les signaux 1D par Maragos et Potamianos, constituant une généralisation de l'opérateur continu TKEO. Ces auteurs désignent alors ces opérateurs par Higher Order Differential Energy Operator (HODEO).

Définition : Soit un signal $S(x)$ admettant les dérivées jusqu'à l'ordre k quelconque. Le TKEO de $S(x)$ d'ordre k est défini par :

$$\phi_k [S(x)] = \frac{dS}{dx}(x) \cdot \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} [S(x)] - S(x) \cdot \frac{d^k}{dx^k} S(x) \quad (\text{III.58})$$

Pour $k = 2$ on retrouve le TKEO.

Comme pour le DESA ou le ESA, on considère que le signal $S(x)$ est à bande étroite et que son amplitude ainsi que sa fréquence ne varient ni rapidement, ni beaucoup par rapport à la fréquence de la porteuse. L'algorithme de démodulation qui en découle repose sur la combinaison des opérateurs d'ordre 2 et 4. Les estimations de la fréquence et de l'amplitude respectivement notées par $\hat{\omega}$, \hat{A} sont données par :

$$\hat{\omega} = \sqrt{\frac{-\phi_4 [S(x)]}{\phi_2 [S(x)]}}$$

$$|\hat{A}| = \frac{\phi_2 [S(x)]}{\sqrt{-\phi_4 [S(x)]}}$$

III.5.3 Algorithme continu de démodulation CHOEDA (Continuous Higher Order Energy Demodulation Algorithm) :

Une des limitations des deux opérateurs DESA et ESA est que les composantes horizontale et verticale de la composante FM doivent obligatoirement être comprises entre 0 ET $-\pi$. Cela veut dire que les fréquences spatiales de l'image ne sont estimées, au plus, qu'au quart du plan fréquentiel d'échantillonnage. La raison principale est que le TKEO 2D proposé est juste une extension simple de l'opérateur en 1D suivant les directions verticale et horizontale.

Soit I une image définie sur Ω et de classe C^2 . L'opérateur d'ordre 2 qu'on utilise est défini :

$$\Phi_2 [I(x_1, x_2)] = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial I}{\partial x_1} \right)^2 - I \frac{\partial^2 I}{\partial x_1^2} \right] + \left[\left(\frac{\partial I}{\partial x_2} \right)^2 - I \frac{\partial^2 I}{\partial x_2^2} \right]}_{1^{\text{er}} \text{ terme}} + 2 \underbrace{\left[\left(\frac{\partial I}{\partial x_1} \frac{\partial I}{\partial x_2} \right) - I \frac{\partial^2 I}{\partial x_1 \partial x_2} \right]}_{2^{\text{eme}} \text{ terme}}. \quad (\text{III.59})$$

Cette équation comprend deux termes essentiels :

- Le 1^{er} terme représente le TKEO en 2D.
- Le 2^{eme} mesure l'énergie d'interaction entre les directions horizontale et verticale.

III.5.4 Algorithme de démodulation d'images mono-composantes basé sur les HODEO:

Nous allons proposer un algorithme discret de démodulation d'images mono-composantes basé sur les HODEO en 2D. Nous ferons ensuite la comparaison avec l'algorithme DESA.

III.5.4.1 Algorithme DHODA (Discret Higher Order demodulation Algorithm):

On pose pour tout $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$:

$$I_1(k, l) = - [(k+1, l) - (k-1, l)]$$

$$I_2(k, l) = - [(k, l+1) - (k, l-1)]$$

$$I_{12}(k, l) = - [I_2(k+1, l) - I_2(k-1, l)].$$

L'équation (IV.11) discrétisée est :

$$\Phi_2^d [I(k, l)] = \underbrace{2 [I(k, l)]^2 - I(k-1, l) I(k+1, l) - I(k, l-1) I(k, l+1)}_{1^{er} \text{ terme}} + \underbrace{2 [I_1(k, l) I_2(k, l) - I(k, l) I_{12}(k, l)]}_{2^{ieme} \text{ terme}},$$

Cette équation comprend aussi deux termes intéressants :

- Le 1^{er} terme correspond au TKEO discret en 2D de l'image.
- Le 2^{eme} terme mesure l'énergie d'interaction des pixels entre les lignes et les colonnes.

III.6 Mesure d'interaction entre deux signaux par Φ_B :

La corrélation croisée (CC) est l'une des méthodes classiques pour mesurer l'interaction entre deux signaux. Cette mesure est bien adaptée dans le cas où le lien entre les signaux est linéaire. En pratique, l'interaction entre signaux est non-linéaire et par conséquent le maximum de la CC ne correspond pas nécessairement au maximum d'interaction entre les signaux. Ainsi, par exemple, la mesure des temps de retard (TR) entre capteurs (acoustique) pose problème. La non-linéarité peut provenir des phénomènes sous-jacents aux signaux ou des capteurs dont la réponse est non-linéaire.

III.6.1 Interaction et similarité :

Comme cité précédemment que Ψ_B est une mesure de similarité entre deux signaux. Si (x) et (y) sont deux signaux de type AM-FM alors l'énergie d'interaction peut être estimée à l'opérateur Ψ_B .

Considérons deux signaux AM-FM : $(x) = A \cos(\phi_1)$ et $(y) = B \cos(\phi_2)$. On peut donc montrer l'interaction énergétique :

$$\Psi_B(x, y) = [-\dot{\phi}^2 + (a \dot{\phi} - b \ddot{\phi})] \cos(\phi_{21}) + [-\ddot{\phi}_{21} + (a \dot{\phi} - b) \dot{\phi}^2] \sin(\phi_{21}) \tag{III.60}$$

Où : $\dot{\phi} = \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2$; $\phi_{21} = \phi_2 - \phi_1$; $\ddot{\phi}_{21} = \ddot{\phi}_2 - \ddot{\phi}_1$.

On peut établir la proposition suivante à partir de la relation citée ci-dessus :

Proposition 3 :

Soit $(x) = A \cos(\phi_1)$ et $(y) = B \cos(\phi_2)$ deux signaux AM. Le maximum d'interaction énergétique entre ces deux signaux est donné par :

$$|\Psi_B(x, y)| \leq \frac{A^2 B^2}{2} \tag{III.61}$$

Où $\frac{A}{2}$ et $\frac{B}{2}$ sont respectivement les fréquences de (x) et (y) .

Soit $(x) = A \sin(\phi_1)$ et $(y) = B \sin(\phi_2)$ deux signaux FM. Le maximum d'interaction énergétique entre ces deux signaux est donné par :

$$|\Psi_B(x, y)| \leq \frac{A^2 B^2}{2} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)^2 + (\ddot{\phi}_2 - \ddot{\phi}_1) \tag{III.62}$$

Démonstration :

Si x et y sont deux signaux AM alors ϕ_1 et ϕ_2 sont constants et l'équation (III.60) se réduit à :

$$\Psi_B(x, y) = \frac{1}{2} \left[(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)^2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \right] \quad (\text{III.63})$$

Si on prend la valeur absolue de chaque côté de l'égalité de l'expression (III.63) on aura l'expression (III.61).

Si x et y sont deux signaux FM alors ϕ_1 et ϕ_2 sont constants et l'équation (III.60) se réduit à :

$$\Psi_B(x, y) = \frac{1}{2} \left[(\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2)^2 \cos(\phi_{21}) + (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \sin(\phi_{21}) \right] \quad (\text{III.64})$$

Si on prend la valeur absolue de chaque côté de l'égalité de l'expression (III.64) on aura l'expression (III.62).

A partir de l'expression (III.62) on peut dire que l'interaction énergétique entre deux signaux AM-FM repose sur une expression fonction des FI des deux signaux et des dérivées secondes et premières de leurs phases.

III.6.2 Interaction et détection :

Les propriétés d'interaction énergétique de Ψ_B peuvent être appliquées dans une problématique de détection. Considérons le cas de deux capteurs qui enregistrent des versions décalées en temps et bruitées d'un même signal $s(t) = e^{j\omega t}$:

$$x(t) = s(t) + n_1(t)$$

$$y(t) = s(t - \tau) + n_2(t) \quad (\text{III.65})$$

Où :

- α : coefficient d'atténuation constant.
- τ et ω caractérise le retard et le décalage fréquentiel entre deux mesures de capteurs.

- Les bruit $\{n_1(t)\}$ et $\{n_2(t)\}$ sont supposés de moyenne nulle, décorrelés, et indépendants de $x(t)$ et $y(t)$. la problématique est de pouvoir estimer le décalage temporel τ .

On pose :

$$x(t) \equiv \phi(t) + n_1(t) \quad \text{et} \quad y(t) \equiv \phi(t - \tau) + n_2(t)$$

$$\text{Et } \phi_2(t) = \phi_1(t - \tau) + \omega(t - \tau).$$

Le système (équation III-42) peut alors s'écrire :

$$x(t) = \phi(t) + n_1(t)$$

$$y(t) = \phi(t - \tau) + n_2(t)$$

III.7 Conclusion :

Nous avons présenté dans ce chapitre l'opérateur de Teager-Kaiser qui permet d'estimer l'énergie d'un système nécessaire à la génération d'un signal. Cet opérateur ne nécessite pas d'hypothèse de stationnarité du signal. L'opérateur de Teager-Kaiser est local et ne nécessite que trois échantillons pour le calcul d'énergie à chaque instant, ce qui lui rend facile à mettre en œuvre.

L'opérateur est limité aux signaux mono-composante et à bande étroite, mais pour les signaux multi-composantes un filtre passe bande est nécessaire avant d'appliquer cet opérateur. Ainsi, la fréquence d'échantillonnage doit être à peu près 8 fois plus supérieure à la fréquence la plus élevée du signal. L'opérateur de Teager-Kaiser donne l'information liée au carré du produit de la FI par l'enveloppe de la modulation en amplitude.

Nous avons aussi étendu cet opérateur aux signaux complexes et généralisé au cas de deux signaux complexes en introduisant un nouveau opérateur d'énergie croisé Ψ_B . Ce nouveau opérateur nous a permis d'établir un lien avec la distribution de Wigner-Ville.

Enfin et d'après ces résultats théoriques on constate que Ψ_B permet l'analyse des signaux non-stationnaires (de type mono-composante) et aussi permet la mesure d'interaction entre deux signaux complexes (mesure de similarité).

IV.1 Introduction :

Après l'étude de l'opérateur de Teager-Kaiser et de ses propriétés, on est arrivé maintenant à la phase des tests et de l'interprétation.

Dans ce présent chapitre, on va appliquer l'opérateur de Teager-Kaiser pour mesurer l'interaction entre deux signaux FM, et puis on va l'appliquer pour une image Sonar.

Mais, avant ça on va rappeler quelques définitions sur l'environnement de programmation MATLAB.

IV.2 Introduction à MATLAB :

MATLAB (MATrix LABoratory) est une application qui a été conçue afin de fournir un environnement de calcul matriciel simple, efficace, interactif et portable, permettant la mise en œuvre des algorithmes développés dans le cadre des projets linpack et eispack.

MATLAB est constitué d'un noyau relativement réduit, capable d'interpréter puis d'évaluer les expressions numériques matricielles qui lui sont adressées :

- Soit directement au clavier depuis une fenêtre de commande ;
- Soit sous forme de séquences d'expressions ou scripts enregistrées dans des fichiers-texte appelés m-files et exécutées depuis la fenêtre de commande ;
- Soit plus rarement sous forme de fichiers binaires appelés mex-files ou fichiers. mex générés à partir d'un compilateur C ou fortran.

Ce noyau est complété par une bibliothèque de fonctions prédéfinies, très souvent sous forme de fichiers m-files, et regroupés en paquetages ou toolboxes. A côté des toolboxes requises local et Matlab, il est possible d'ajouter des Toolboxes spécifiques à tel ou tel problème mathématique, Optimization Toolbox, Signal Processing Toolbox par exemple ou encore des toolboxes créés par l'utilisateur lui-même. Un système de chemin d'accès ou path permet de préciser la liste des répertoires dans lesquels MATLAB trouvera les différents fichiers m-files.

IV.3 Une session MATLAB :

L'interface-utilisateur de MATLAB varie légèrement en fonction de la version de MATLAB et du type de machine utilisée. Elle est constituée d'une fenêtre de commande qui

peut être complétée par une barre de menu et pour les versions les plus récentes de deux fenêtres, l'une affichant l'historique de la session et l'autre la structure des répertoires accessibles par MATLAB.

Avant la première utilisation de MATLAB, il est vivement recommandé à chaque utilisateur de créer un répertoire de travail, tp MI

IV.3.1 Lancer, quitter MATLAB :

Dans l'environnement Unix, on tape la commande Matlab sur la ligne de commande active ; dans l'environnement Windows, il suffit de cliquer sur l'icône de l'application.

La fenêtre de commande de MATLAB s'ouvre et on entre alors les commandes ou les expressions à évaluer à droite du prompt >>. Le processus d'évaluation est déclenché par la frappe de la touche<enter>.

A chaque début session, l'utilisateur indiquera à MATLAB que le répertoire tp MI défini précédemment est le répertoire de travail de la session en tapant la commande cd suivie du chemin d'accès au répertoire tp MI.

On quitte MATLAB en tapant quit dans la fenêtre de commande ou en sélectionnant quit dans le menu File de la barre de menu pour les versions Windows.

IV.3.2 Fonctions et commandes :

Certaines fonctions de MATLAB ne calculent pas de valeur numérique ou vectorielle, mais effectuent une action sur l'environnement de la session en cours. Ces fonctions sont alors appelées commandes. Elles sont caractérisées par le fait que leurs arguments (lorsqu'ils existent) ne sont pas placés entre parenthèses. Les autres fonctions se comportent de façon assez semblable aux fonctions mathématiques et la valeur qu'elles calculent peut être affectée à une variable.

IV.3.3 Aide en ligne – help :

MATLAB comporte un très grand nombre d'opérateurs, de commandes et de fonctions. Tous ne seront pas décrits dans ce document d'autant qu'une aide en ligne efficace peut être utilisée.

IV.4 Les Toolboxes de Matlab :

Les toolboxes sont des caisses à outils comportant une collection de fonctions relatives à plusieurs domaines scientifiques et techniques.

Les toolboxes existant à partir de la version 5.3 sont :

- Statistics Toolbox, Signal Processing Toolbox, Image Processing Toolbox, Fuzzy Logic Toolbox,
- Neural Networks Toolbox, Spline Toolbox, Wavelet Toolbox, Mapping Toolbox,
- Control System Toolbox, Optimization Toolbox, Robust Control Toolbox, System Identification Toolbox, Higher-Order Spectral Analysis Toolbox, DSP Blockset, Frequency Domain, Mu Analysis and Synthesis Toolbox, Power System Blockset, Data Acquisition Toolbox,
- Database Toolbox, Financial Toolbox, Communications Toolbox, MATLAB Web Server,
- Symbolic Math Toolbox, Partial Differential Equations (PDE) Toolbox,

Nous allons essayer, dans ce qui suit, de décrire les toolboxes les plus couramment utilisées en traitement du signal.

IV.4.1 Toolbox traitement de signal :

L'un des premiers principes du traitement du signal est la représentation du signal dans une base vectorielle de fonctions (signaux simples) dans le but d'une meilleure extraction et interprétation des propriétés de ce signal.

$$f(t) = \sum_i F_i g_i(t)$$

$f(t)$: est le signal à analyser,

$g_i(t)$: sont les fonctions de représentation auxquelles on exige de former une base vectorielle orthonormées.

Les fonctions sinus et cosinus sont les fonctions idéales pour cette représentation.

En effet, Joseph Fourier a démontré que tout signal pouvait être représenté sous la forme d'une somme (souvent infinie) de signaux sinusoïdaux de fréquences et de phases différentes.

Si le signal est périodique, on parle de série de Fourier. Pour un signal quelconque (cas général), c'est plutôt la transformée de Fourier qui est utilisée.

Le signal et sa transformée de Fourier sont liés par les expressions suivantes.

$$f(t) = \int_i F(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega \text{ et } F(\omega) = \int_i f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

Notons que cette somme est plus souvent représentée sous forme d'intégrale.

IV.5 Application de Ψ_B à la mesure d'interaction entre deux signaux :

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux qui sont caractérisés par des fréquences instantanées (FI) qui varient linéairement. Alors, on propose d'étudier l'interaction énergétique de l'opérateur Ψ_B . Pour ça, on traite les signaux de la figure suivante :

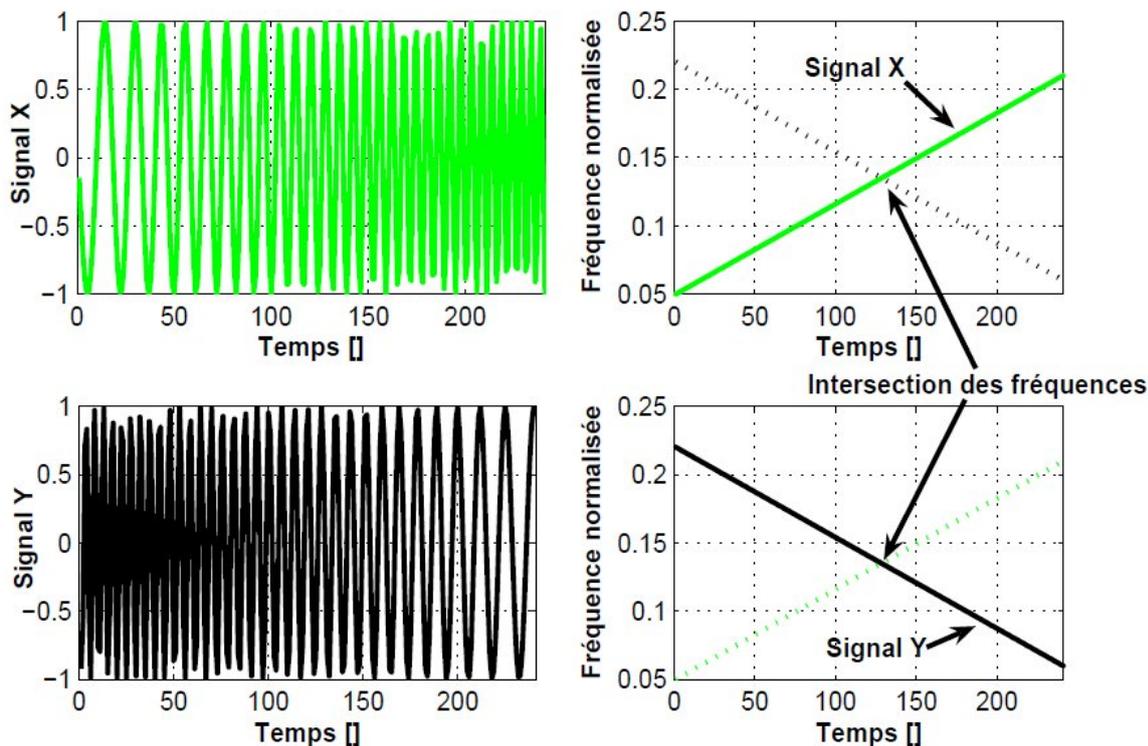


Figure IV.1 Les signaux $x(t)$ et $y(t)$ et les FI linéaires correspondantes.

Interprétation :

- Le signal $x(t)$ présente une modulation linéaire croissante tandis que la fréquence instantanée(FI) associée à $y(t)$ est décroissante.
- Le signal $y(t)$ présente une modulation linéaire décroissante tandis que la fréquence instantanée(FI) associée à $x(t)$ est croissante.
- Pour chaque signal on superpose la FI de l'autre signal pour visualiser les deux FI coïncide.

La figure ci-après montre le comportement de trois grandeurs $\Psi_B[x(t)]$, $\Psi_B[y(t)]$

et $\Psi_B[x(t), y(t)]$.

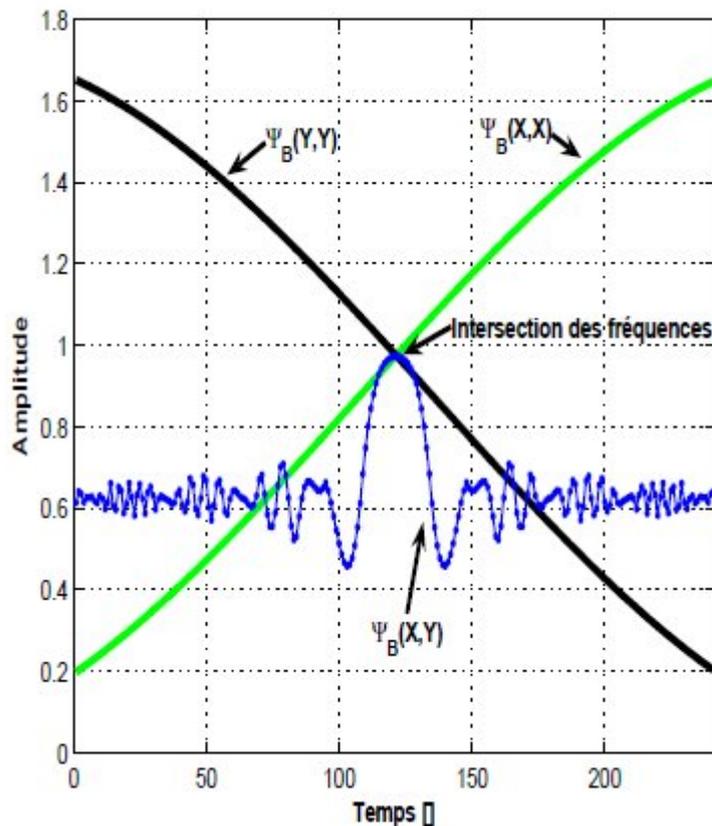


Figure IV.2 Mesure d'interaction de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ par B .

Interprétation :

- A $t = 125$, l'énergie $\Psi_B[x(t), y(t)]$ coïncide à l'intersection de deux courbes énergétiques $\Psi_B[x(t)]$ et $\Psi_B[y(t)]$.
- La valeur de $\Psi_B[x(t), y(t)]$ oscille autour d'une valeur faible (environ 0.6) si les deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ ont des FI éloignées.

Alors, en termes d'interaction énergétique on peut dire que les deux signaux ont peu d'interaction entre eux.

- A l'endroit où les deux FI coïncident l'échange énergétique (ou l'interaction énergétique) tend à augmenter pour présenter une valeur maximale.

Notons que l'étude de cet exemple montre que la mesure d'interaction fait apparaître des informations supplémentaires.

IV.6 Application à la segmentation d'ombres de mine dans les images sonars :

Les images illustrées dans la figure suivante sont trois mines (Mine (a), Mine (b), Mine (c)), qui ont des structures un peu plus complexes. Elles se composent de trois parties : un écho, une réverbération et l'ombre de la mine.



Figure IV.3 : Images Sonar (Mine (a), Mine (b), Mine (c)).

IV.6.1 Images traitées par DESA et DHODA:

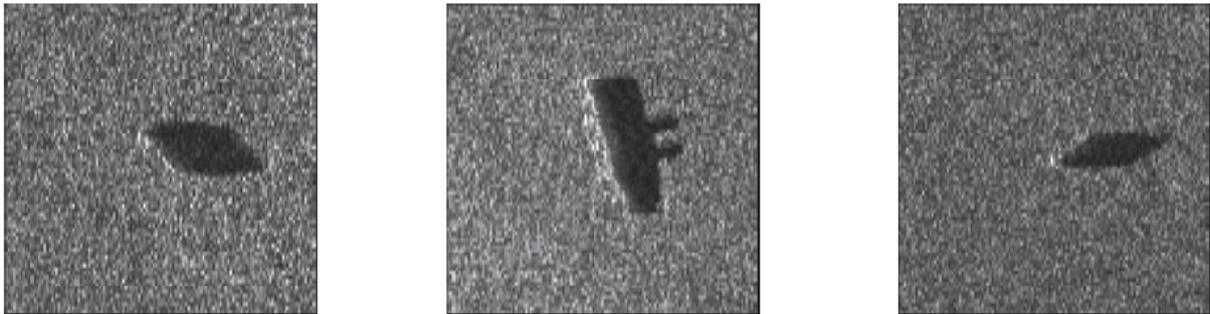


Figure IV.4 : Images Sonar (Mine (a), Mine (b), Mine (c)).

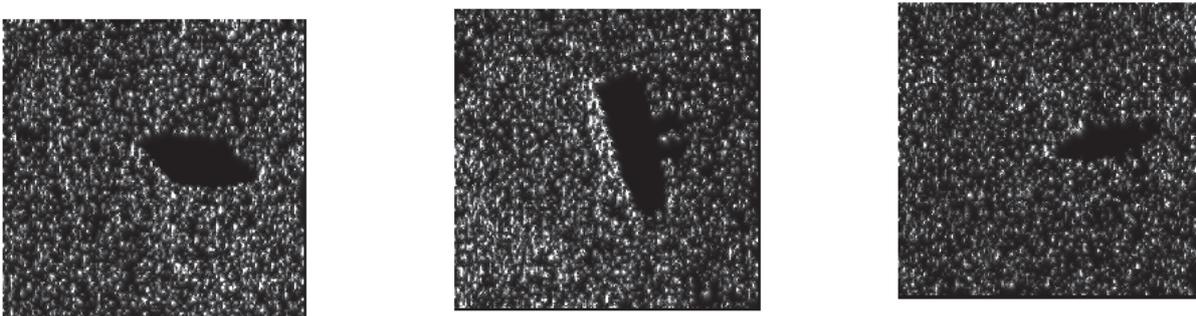


Figure IV.5 : Application de DESA sur les trois images.

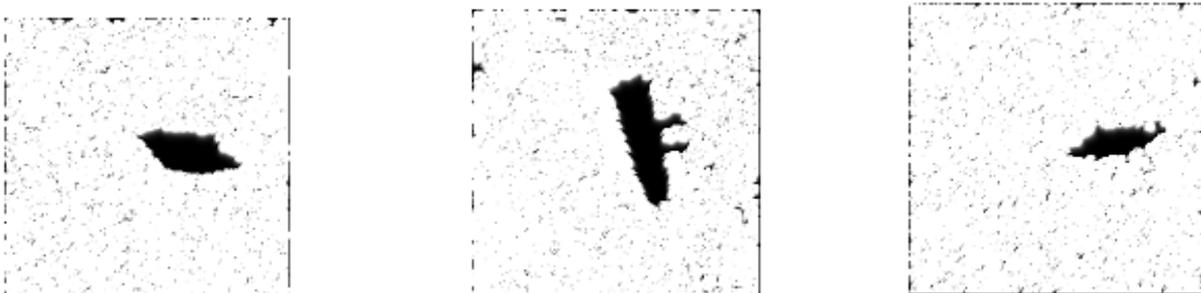


Figure IV.6 : Application de DHODA sur les trois images.

Interprétation :

Comme cité ci-dessus, les images sonar traitées se composent de trois parties essentielles : un écho, une réverbération, et l'ombre de la mine. La partie la plus importante reste l'ombre de la mine. L'algorithme DHODA arrive à extraire ces parties dans ces images sonar, et ça grâce aux composantes AM qui nous renseigne sur le niveau de contraste des textures, plus précisément, sur la disparité en intensité entre les textures sombres et brillantes Figure (IV.6).

Contrairement à l'algorithme DHODA, l'algorithme DESA n'arrive pas à faire ressortir ces parties importantes de ces images. Donc on peut conclure que les algorithmes de démodulation d'ordres supérieurs donnent de meilleurs résultats que les autres algorithmes classiques.

IV.7 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons exploré l'application de l'opérateur d'énergie croisée de Teager-Kaiser Ψ_B pour la mesure d'interaction entre deux signaux qui présentent des FI qui varient linéairement. En utilisant trois grandeurs $\Psi_B[x(t)]$, $\Psi_B[y(t)]$ et $\Psi_B[x(t), y(t)]$ nous avons pu déduire une relation entre les FI et $\Psi_B[x(t), y(t)]$.

Après l'application des deux algorithmes DESA et DHODA sur des images sonars, nous avons pu constater que le DHODA permet de mettre en évidence l'information la plus pertinente avec les composantes AM et qu'il peut être appliqué à la segmentation d'ombres de mine de ces mêmes images (sonars), d'une meilleure manière que le DESA.

Conclusion générale.

L'objectif de ce travail est de proposer et d'introduire de nouveaux outils de traitement et d'analyse des signaux non-stationnaires. L'idée est de proposer des outils simples et rapides.

Nous nous sommes intéressés aux signaux non-stationnaires par exemple les signaux de paroles, sonars. Pour ça il faut les différencier des signaux stationnaires. Nous avons présenté les méthodes d'analyse des signaux non-stationnaires et il s'agit de l'analyse temps-fréquence et l'analyse temps-échelle.

Pour ce qui est de l'analyse temps-fréquence on a traité la transformée de Fourier à court terme (TFCT) et la transformée de Wigner-Ville (TWV). Pour la méthode temps-échelle on a traité la transformée en ondelettes.

Après l'introduction du concept de l'amplitude instantanée (AI) et de la fréquence instantanée (FI), nous nous sommes orientés vers les méthodes d'estimation de la fréquence instantanée, et on parle de l'estimation par transformée de Hilbert, l'estimation par représentation temps-fréquence (RTF) et l'estimation par méthodes locales.

Nous avons présenté les fondements physique et théorique de l'opérateur de Teager-Kaiser (TKEO) Ψ_R . Nous avons mis l'accent sur le fait que cet opérateur ne calcule pas l'énergie d'un signal mais l'énergie du système qui génère le signal. Cette énergie, qui est égale au carré du produit de la fréquence et de l'amplitude, est destinée à la démodulation en amplitude et/ou en fréquence du signal AM-FM. Nous avons montré aussi que cet opérateur est limité aux signaux mono-composantes et à bande étroite, et pour l'appliquer la fréquence d'échantillonnage doit être à peu près 8 fois supérieure à la fréquence la plus élevée du signal.

Nous avons également présenté l'opérateur d'énergie croisée de Teager-Kaiser Ψ_B qui permet de mesurer l'interaction entre deux signaux réels qui présentent des FI qui varient linéairement. En utilisant trois grandeurs $[x(t)]$, $\Psi_B[y(t)]$ et $\Psi_B[x(t), y(t)]$ nous avons pu définir une relation entre les FI et $\Psi_B[x(t), y(t)]$.

Conclusion générale.

Enfin, nous avons utilisé des images sonars pour leurs appliquer l'opérateur de Teager-Kaiser Ψ_B . Pour ça, nous avons présenté deux algorithmes basés sur le (TKEO) DESA et ESA qui sont destinés à la démodulation des images à bande étroite. Ainsi, nous avons présenté l'algorithme de démodulation d'ordre supérieur des images mono-composantes DHODA.

Nous avons pris comme exemple des images de mines pour leurs appliquer les deux algorithmes DESA et DHODA. Nous avons conclu que le DHODA peut être appliqué à la segmentation d'ombres de mines dans ces images et il donne de meilleurs résultats que le DESA.

Ce travail qui se relève du traitement de signal a été très bénéfique pour nous. Nous espérons qu'il servira d'outils ou de supports de travail pour les promotions à venir.

✓ **Thèses :**

- Signal processing using the Teager Energy Operator and other nonlinear operators
University of Oslo Department of Informatics (Cand. Scient Thesis Eivind Kvedalen
May 2003).
- Analyse des signaux non-stationnaires par Transformation de Huang, Opérateur de
Teager-Kaiser, et Transformation de Huang-Teager (THT) (Jean-Christophe Cexus)
Université de Rennes 1 (2005).
- Modèles AM-FM et approche par équations aux dérivées partielles de la décomposition
modale empirique pour l'analyse des signaux et des images (El Hadji Samba DIOP)
Université de Rennes 1 (30 Novembre 2009).
- Transformée de Huang-Hilbert : Application à la détection des défauts (HAMDAD
Nassima) université Mouloud MAMMERI Tizi-Ouzou (2013).
- Analyse des signaux multicomposantes, Contributions à la décomposition Modale
Empirique, auxx représentation temps-fréquence et au Synchronizing.(Thomas
Oberlin) Université de Grenoble (2013).

Livre

- Théorie et traitement du signal Tome.1
- Théorie et traitement du signal Tome.2 - Méthodes de base pour l'analyse et le
traitement du signal (cours et exercices corrigés) Messaoud Benidir ; édition 2004
- AIDE-MEMOIRE traitement du signal (Francis Cottet) ; édition 2005

✓ Documents

- COURS DE TELECOMMUNICATION

IUT DE VILLETANEUSE Département Génie Télécom et Réseaux

A. DUPRET, A. FISCHER **pour la Modulation AM et FM**

- Rappels Traitement du Signal Note de cours (T.Dumartin) (année 2004/2005).
- Notion de traitement du signal.
- Eléments d'analyse temps-fréquence (Patrick Flandrin) (CNRS & Ecole Normale
Supérieure de Lyon) (2006).

- Représentations Temps-Fréquence et Temps-Echelle (André QUINQUIS)
(ENSIETA, BREST France) (2002).
- Analyse Temps-Fréquence et Temps-Echelle (Olivier Rioul) (Dept.COMELEC
GET/ENST) (2007).

L'objectif de ce travail est d'introduire de nouveaux outils de traitement et d'analyse des signaux non-stationnaires.

Partant des caractéristiques des signaux non-stationnaires qui présentent des oscillations qui évoluent au cours du temps, nous introduisons le concept de la fréquence instantanée, qui décrit la périodicité locale du signal, et de l'amplitude instantanée. Nous introduisons les méthodes d'estimation de la fréquence instantanée. Nous présentons l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser qui permet d'estimer l'énergie d'un système qui génère le signal, et puis nous définissons l'opérateur d'énergie croisée de Teager-Kaiser qui permet la mesure d'interaction entre deux signaux réels.

Pour l'extension de ce travail au domaine d'images nous définissons des algorithmes de démodulation d'images classiques et d'ordre supérieur basés sur l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser. En appliquant un algorithme de chaque classe sur des images sonars on déduit que les algorithmes d'ordre supérieur sont plus efficaces et donnent de meilleurs résultats que les algorithmes classiques.

Mots clés :

Représentation temps-fréquence ; Opérateur d'énergie de Teager-Kaiser ; l'opérateur d'énergie croisée de Teager-Kaiser ; fréquence instantanée ; Signal mono-composante ; Mesure d'interaction entre deux signaux réels ; Images sonars.