

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mouloud MAMMARI de Tizi-Ouzou
Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Electrotechnique



**Mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme
de Master Académique en Entraînements Electriques**

THEME

**Modélisation par éléments finis de
Phénomènes thermo-mécaniques d'une
structure type PBGA**

Promoteur :

M^R. Hassan MOHELLEBI

Co-promoteur:

M^R. Ahmed NAIT-OUSLIMANE.

Etudié par :

M^{ELLE}. Fadhila BOUTOUDJ

2012

Remerciements

Je tiens à remercier de manière très particulière et à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur *H.MOHELLEBI*, Professeur à l'Université Mouloud MAMMARI de Tizi-Ouzou, tout d'abord pour avoir été un excellent enseignant puis pour m'avoir proposé ce sujet et pour m'avoir dirigé, j'apprécie beaucoup son sens de responsabilité et sa serviabilité.

Je remercie aussi de manière très particulière Monsieur *R.CHAIBI*, Professeur à l'Université Mouloud MAMMARI de Tizi-Ouzou et responsable de la formation *Entraînements Electriques*, j'apprécie fortement ses hautes qualités scientifiques, j'apprécie aussi ses précieux conseils et son sens de responsabilité.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur *M.NEDJAR*, professeur l'Université de Mouloud MAMMARI de Tizi-Ouzou pour ses cours et pour tous les conseils qu'il n'a cessé de nous transmettre durant la première année Master.

Je veux ne veux pas rater cette occasion qui m'est offerte sans que Monsieur *S.H. OULD OUALI* puisse trouver sur cette page mes profonds remerciements, vous êtes un enseignant remarquable, merci pour tout ce que vous nous avez donné à moi et à mes camarades pendant ces deux dernières années.

Je profite de cette occasion pour exprimer ma gratitude et mes remerciements à Mademoiselle *Z.LARABI* pour son accueil au laboratoire H au département Electrotechnique et pour m'avoir initié à travailler sur le logiciel *COMSOL*.

Que Monsieur *A.NAIT OUSLIMANE* trouve ici ma gratitude et mes profonds remerciements pour son aide et ses conseils et pour le temps qu'il m'a accordé pendant la réalisation de ce travail, j'apprécie beaucoup.

Je remercie tous mes enseignants de la première et de seconde année Master pour leur sens de responsabilité.

Monsieur *F.HOCINI*.

Madame *Z.OUDNI*.

Monsieur *S.REZGUE*.

Monsieur *A. DICHE*.

Mes profondes reconnaissances et mes chaleureux remerciements pour Monsieur *A.BARIZ* pour son soutien indéfectible sur tous les plans.

Pour leur respect, leur générosité et leur aide, je remercie de manière très particulière mes camarades de classe Monsieur *R.RAHEM*, Monsieur *S.BOUCESBI*, Monsieur *S.BENREJDAL* et Monsieur *A.AHCENE*, je vous souhaite beaucoup de réussite.

Je remercie aussi : Monsieur *T.TOUATI*, Mademoiselle *M.TOUATI*, Mademoiselle *F. ZOUAOUI*, Mademoiselle *F. AMICHI* , Mademoiselle *O. GHEMOUR* et Mademoiselle *L.ASLI* sans oublier Mademoiselle *F.BERAI*.

Je remercie tous ceux qui ont consacré leurs vies pour la noblesse de l'enseignement.

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A mes très chers parents

*A mes très chers frères
et à ma très chère sœur*

*A mes belles-sœurs et à
mon beau-frère*

*A mes adorables nièces
et neveux*

*A tous mes proches ainsi
qu'à mes amis(es)*

Sommaire

Sommaire

Introduction Générale.....1

Chapitre I : Généralités sur le PBGA.

Introduction.....	3
I.1. Rôles et objectifs du « packaging ».....	3
I.2. Les principales technologies d'interconnexions.....	5
I.2.1. Muti-Chip-Modules (MCM).....	5
I.2.2. Tape-Automated Bonding (TAB).....	6
I.2.3. Flip-Chip.....	7
I.2.3.a. La connexion filaire	8
I.2.3.b. La connexion par microbilles.....	9
I.3. Le Plastic Ball Grid Array (PBGA).....	10
I.3.1. Introduction.....	10
I.4.2. Configuration et constitution d'un boîtier PBGA	10
I.4.2.a. Circuit intégré	11
I.4.2.b. Circuit imprimé	12
I.4.2.c. La matrice de billes (BGA)	13
I.4. Evaluation de la fiabilité des composants électroniques.....	14
I.4.1. Défaillances thermomécaniques	20
I.4.1.a. Conception pour réduire le risque de rupture fragile.....	16
I.4.1.b. Conception pour réduire la déformation plastique	16
I.4.2. Les bases de la méthodologie de prototypage de composants électroniques.....	17

Chapitre II : Lois fondamentales de l'électromagnétisme.

I.1.Introduction.....	20
II.2.Les différents types d'équations aux dérivées partielles	20
II.2.1. Equations de type elliptique	20
II.2.2. Equations de type parabolique	21
II.2.3. Equations de type hyperbolique	21

Sommaire

II.3. Equations de Maxwell	21
II.3.1. Forme différentielle des équations de Maxwell	21
II.3.2. Forme intégrale des équations de Maxwell.....	22
II.4. Lois du comportement du milieu	26
II.4.1. Relations du milieu	26
II.4.2. Loi d'Ohm	26
II.5. Les conditions aux limites et conditions de passages	27
II.5.1. Conditions aux limites.....	27
II.5.1.a. Condition de <i>Dirichlet</i>	27
II.5.1.b. Condition de <i>Newmann</i>	27
II.5.1.c. Condition mixte <i>Dirichlet-Newmann</i>	28
II.5.2. Conditions de passages	28
II.6. Méthode de résolution des équations aux dérivées partielles	29
II.6.1. Méthode de calcul analytique	29
II.6.2. Méthodes de calcul numérique	29
II.6.2.a. Méthodes des différences finis	30
II.6.2.b. Méthode d'intégrale de frontière	31
II.6.2.c. Méthode des éléments finis	32
a. Introduction	32
b. Décomposition de la méthode des éléments finis	32
c. Eléments de référence	32
d. La fonction d'interpolation	35
e. La fonction d'approximation.....	36
II.7. Formulation éléments finis.....	37
II.7.1. Introduction	37
II.7.2. Formulation variationnelle	38
II.7.3. Formulation résidus pondérés	39

Chapitre III : Etude des phénomènes thermiques et mécaniques.

III.1. Introduction	44
III.2. Concepts fondamentaux.....	44
III.2.1. Surfaces isothermes	44
III.2.2. Champ de température	44
III.2.3. Flux thermique et densité de flux thermique.....	44
III.2.4. Source interne.....	46
III.3. Différents modes de transfert de chaleur.....	46
III.3.1. Transfert par conduction	46
III.3.2. Transfert par convection.....	47
III.3.3. Transfert par rayonnement	47
III.4. Production d'énergie thermique	48
III.5. Equation de bilan thermique.....	49
III.6. La conduction thermique	50
III.6.1. Mécanisme du transfert conductif.....	50
III.6.2. Equation de la propagation de l'énergie thermique par conduction	51
III.6.3. Conditions aux limites	53
III.7. Comportement élastique de la matière.....	54
III.8. Déformation plane.....	56
III.9. Contrainte plane	56

Chapitre IV : Applications et résultats.

IV.1 Introduction.....	57
IV.2. Présentation du logiciel <i>COMSOL</i> (la partie thermique)	57
IV.3. Les différents modes de couplage	61
IV.3.1. Mode de couplage faible ou indirect	61
IV.3.2. Mode de couplage fort ou direct.....	64
IV.4. Applications et résultats.....	62
IV.4.1. Hypothèses simplificatrices.....	62
IV.4.2. Le dispositif à étudier.....	62
IV.4.3. Les propriétés physiques des matériaux à utiliser.....	62
IV.4.4. L'étude du problème thermique seul.....	65
IV.4.4.a. Les conditions aux limites.....	65
IV.4.4.b. Interprétations et résultats.....	66

Sommaire

IV.4.5. L'étude du problème couplé thermo- mécanique.....	69
IV.4.5.a. Les conditions aux limites.....	69
IV.4.5.b. Interprétations et résultats.....	69
Conclusion générale.....	73

Introduction
Générale

Introduction Générale

Depuis plusieurs années, l'électronique a envahi notre quotidien avec une utilisation de plus en plus grande dans plusieurs domaines comme la santé, la sécurité, les communications, l'éducation et les loisirs. Le développement de nouveaux microsystèmes est caractérisé par un besoin de miniaturisation des composants et une augmentation des fonctionnalités afin de satisfaire les demandes du marché [1].

Les microsystèmes se définissent comme des systèmes miniaturisés incorporant de manière monolithique des capteurs, des actionneurs et des dispositifs de traitement de l'information. Leurs dimensions sont comprises entre quelques micromètres et quelques millimètres. C'est aux Etats-Unis et au Japon qu'on trouve les premières réalisations au début des années 1980[4].

Plus de 65% des défaillances des composants électroniques sont dues à des problèmes thermomécaniques. Cette fiabilité thermomécanique reste un défi à surmonter en particulier avec les nouveaux composants [1].

L'utilisation d'outils de simulation et de prototypage virtuel est bien adaptée pour aider à l'évaluation des zones les plus fragiles, la mise en place des règles de conception et la détermination des paramètres les plus influents. Ils participent aussi à la réduction du coût et du temps de mise en marché d'un produit fiable avec une optimisation des performances. Face à ces défis, de très nombreux industriels utilisent aujourd'hui des outils d'ingénierie assistés par ordinateur. Les analyses de plus en plus nombreuses peuvent être traitées, les concepteurs et les ingénieurs peuvent donc avoir une compréhension plus précise des caractéristiques de performances du produit dès la phase de conception [1], [6].

Introduction Générale

L'un des facteurs les plus importants dans la miniaturisation et donc de l'encombrement de l'appareil électronique est le mode d'interconnexion des différents composants utilisés, pour satisfaire ce besoin, les boîtiers d'interconnexion de type *PBGA* ont été le modèle le plus satisfaisant.

Ce document se découpe en quatre chapitres.

Le premier chapitre de ce travail est consacré à la présentation de certaines généralités sur les principales technologies d'interconnexions, avec une focalisation sur la connexion par microbilles, un boîtier appelé *PBGA* (pour Plastic Ball Grid Array) le cœur d'une technologie très moderne appelée « Flip-Chip ».

Dans le deuxième chapitre seront présentées des lois fondamentales de l'électromagnétisme, ainsi que des méthodes de résolution numérique dont la méthode des éléments finis sera la plus détaillée.

Le troisième chapitre sera consacré à l'étude des phénomènes thermiques et mécaniques où seront présentées les plus importantes notions et équations de ces deux phénomènes.

Une brève présentation du logiciel *COMSOL* suivi d'une application en 2D pour une modélisation par éléments finis du phénomène thermique puis couplé thermique-mécanique d'une structure *PBGA* avec des résultats et des interprétations seront présentées dans le quatrième chapitre.

En fin, le travail s'achèvera avec une conclusion générale.

Chapitre I

I.1.Introduction :

Les paquets électroniques contiennent de nombreux composants électriques, les transistors assemblés sur des morceaux de circuit intégré, les résistances, les diodes, les condensateurs et d'autres composants, et pour réaliser des entités fonctionnelles, ces composants doivent être interconnectés entre eux [3].

Ces dernières années, l'évolution des circuits intégrés, des circuits imprimés ainsi que les méthodes d'interconnexion entre ces derniers s'est répercutée dans le domaine de l'équipement électronique : les appareils ont gagné donc en fonctionnalité et en fiabilité, tout en étant moins encombrants et plus économiques [1], [7]. La technologie informatique est la première à en avoir profité, l'effort de développement ayant essentiellement porté sur les puces de mémoire et les microprocesseurs, permettant ainsi la fabrication de micro-ordinateurs...d'autre part, cette évolution a conduit à l'amélioration de nombreuses autres technologies comme la télévision et à la multiplication des usages de la carte à puce qui ne cesse de gagner encore de la place dans notre vie quotidienne [2], [6].

I.2. Rôles et objectifs du « packaging » :

Si on fait l'analogie d'un composant électronique avec le corps humain, alors la puce en serait le cerveau et le boîtier (package) le reste du corps. En effet, le rôle du boîtier est de permettre à la puce de communiquer avec son environnement, de lui apporter de l'énergie et de la protéger [6].

Le schéma de la figure I.1 montre globalement le processus de fabrication d'un microsystème. La plaquette est l'élément de base à partir duquel les puces sont produites. Cette plaquette doit ensuite être découpée par sciage pour séparer chacun de ses éléments.

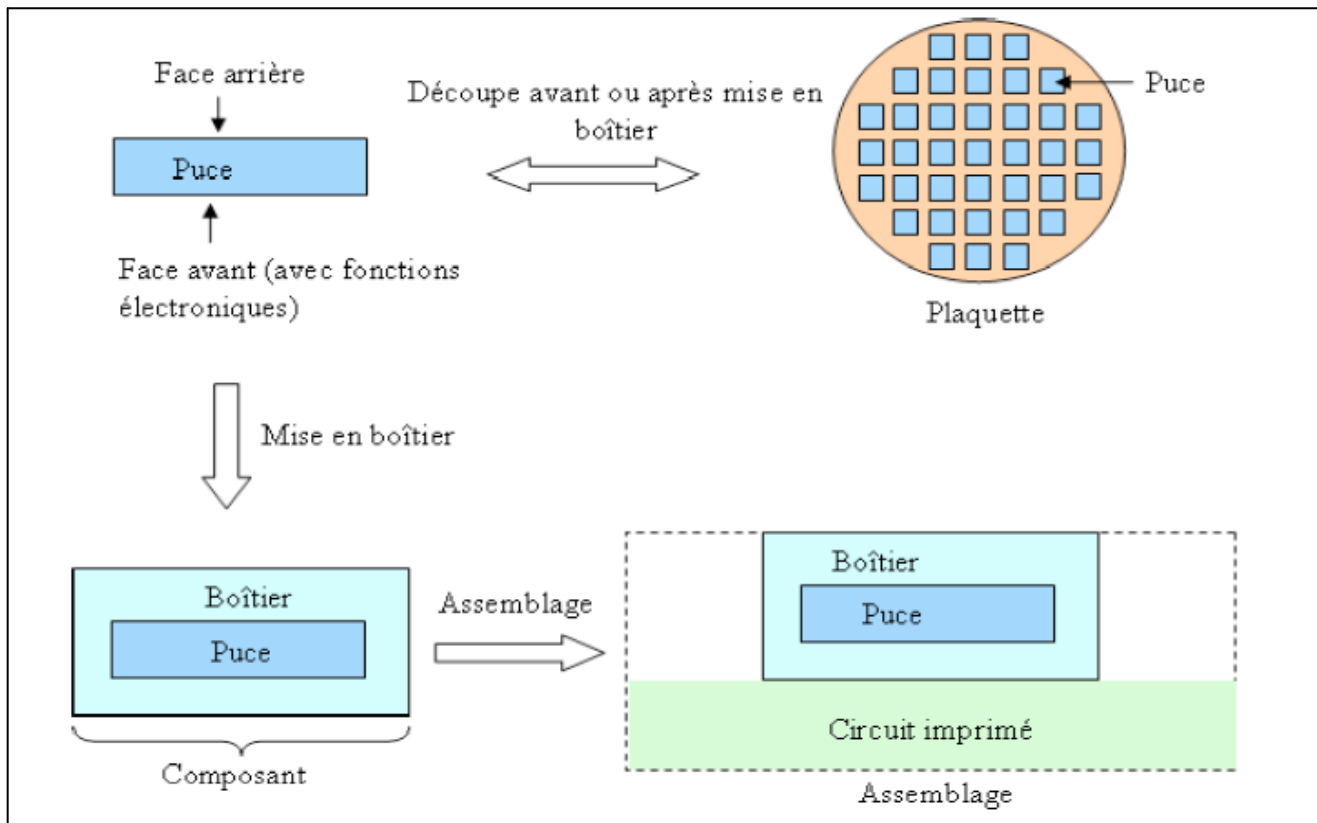


Figure I.1 : Le processus de la mise en boîtier [6].

Pour de nombreuses technologies, le processus de mise en boîtier est le suivant : production d'une plaquette, découpe de celle-ci puis mise en boîtier. Et pour d'autres technologies, le processus est différent car cette mise en boîtier consiste à souder des billes de brasure. Les billes sont déposées directement sur la plaquette puis refondues pour qu'elles puissent adhérer aux puces et la séparation des composants par sciage intervient ensuite [6].

Une fois que les microcircuits sont assemblés dans des boîtiers puis sur des substrats on peut dire que leurs rôles sont assurés dans le microsystème [1].

Le terme de « boîtier » est générique et regroupe une grande diversité de procédés pour assurer les fonctions suivantes [6] :

- Protéger la puce par rapport aux contraintes exercées par l'environnement extérieur comme les contraintes chimiques, mécaniques et thermiques.
- Lui permettre de communiquer avec d'autres éléments.
- L'alimenter électriquement.

Le choix d'un boîtier permet de déterminer la taille, la performance, le poids, le coût et la fiabilité du composant électronique final [1].

I.3. Les principales technologies d'interconnexions:

L'évolution qui caractérise principalement le domaine de la microélectronique est la réduction des dimensions des circuits intégrés, en effet, l'industrie des semi-conducteurs n'a cessé d'améliorer ses produits grâce à l'augmentation de la densité d'intégration, de la vitesse de fonctionnement et de la diminution du coût de fabrication. Pourtant, les effets de la réduction des dimensions ne se limitent pas à un simple facteur d'échelle : des effets secondaires apparaissent, des limitations physique et technologique font surgir de nouvelles contraintes. L'introduction de solutions innovantes se révèle donc indispensable. Parmi les diverses technologies d'interconnexion, on distingue les trois technologies les plus connues et les plus utilisées: la MCM, la TAB la Flip chip [5].

I.3.1. Muti-Chip-Module (MCM):

Le concept du MCM a été inventé dès les années 80, en reportant un nombre élevé de pastilles de circuits intégrés nues, directement sur un substrat multicouches en céramique. La figure I.2 représente un MCM-C (Multi-Chip Module-Céramique).

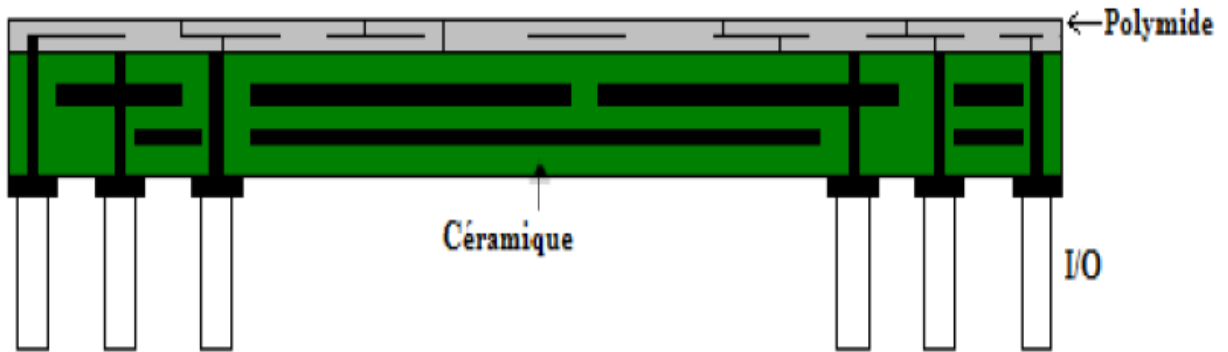
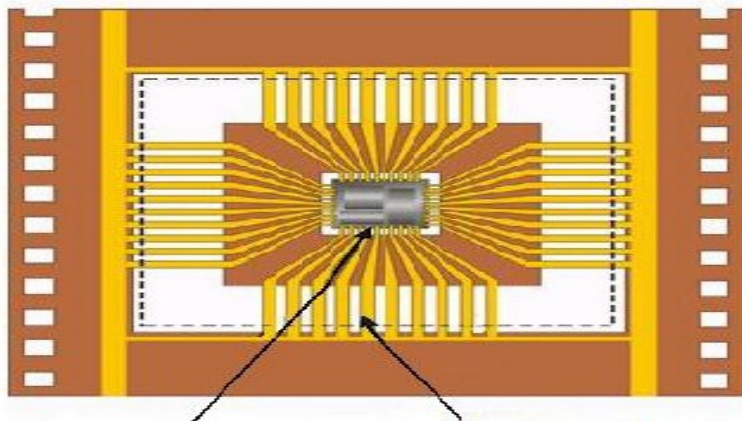


Figure I.2 : Exemple d'une structure MCM [2]

Les MCMs représentent l'un des plus importants pas en avant en packaging micro-électronique. Avec l'arrivée de ces technologies, on a assisté à une amélioration significative des performances des fonctions électroniques, accompagnée d'une réduction importante des tailles et du poids des appareils électroniques [2].

I.3.2. Tape-Automated Bonding (TAB):

La TAB est le Transfert Automatique sur Bande, une technique d'assemblage développée en 1969 par la société «General Electric ». Le mérite principal de cette technique est de faciliter le teste du composant électronique avant qu'il ne soit assemblé.



ILB (Inner Lead Bonding)

OLB (Outer Lead Bonding)

Figure I.3 : Une structure TAB

Cette technologie est basée sur l'utilisation d'un ruban de format cinématographique sur lequel un réseau de conducteur est obtenu par gravure ou croissance chimique constituant ce qui est communément appelé une « araignée » d'interconnexions. Le ruban peut donc être considéré comme un support d'interconnexions particulier, constitué d'un seul niveau conducteur sur un isolant très stable dimensionnellement [1], [6].

Dans les débuts du procédé d'assemblage de circuits intégrés par TAB, les plots de sorties devaient recevoir un traitement spécifique, qui consistait à déposer une barrière de diffusion métallique (titane ou tungstène), puis une épaisseur d'or d'une vingtaine de micromètres d'épaisseur. Cette exigence imposait aux fabricants de circuits intégrés comme étant une étape supplémentaire [2].

I.3.3. Flip-Chip :

La technologie Flip-chip résulte d'un choix de construction d'assemblage où les interconnexions sont sous forme matricielle tout au long de la chaîne d'interconnexion. Les billes de soudure réalisent la liaison électrique et mécanique avec le niveau d'assemblage. La principale caractéristique de cette technologie d'assemblage est qu'elle permet un plus grand nombre de connexions [6].

L'assemblage d'un circuit intégré sur son support, dans la configuration Flip-Chip, peut s'effectuer par soudure ou par collage. Dans le premier cas, des billes de soudure sont disposées sur la puce, et permettent de créer un lien mécanique et électrique avec le support. Dans le second cas, c'est une substance adhésive qui provoque la jonction des deux corps; trois types d'adhésifs sont à distinguer : conducteur, isolant et isotrope (c'est-à-dire que le passage de courant s'effectue uniquement selon une direction précise). La technologie Flip-Chip favorise la miniaturisation des microsystemes : en effet c'est la technologie qui garantit une plus grande densité d'intégration tout en gardant les dimensions proches de celle de la puce [2], [6].

La technologie Flip-chip se compose de deux principales filières : on trouve les connexions filaires et les connexions par microbilles.

I.3.3.a. La connexion filaire:

Le soudage par fil est une technique d'interconnexion électrique qui utilise des fils fins et une combinaison d'énergies sous forme de chaleur, de pression et d'ultrasons. Il s'agit d'un procédé de soudure en phase solide pour lequel les deux métaux en contact (le fil et le plot) sont fortement liés. Une fois les métaux en contact, le partage d'électrons et la diffusion d'atomes permet la formation de la soudure. La chaleur permet d'accélérer la diffusion interatomique et donc la formation d'une soudure. Les procédés de soudage par fil peuvent être classés en trois catégories comme le montre le tableau I.1 [1].

Soudage par fil	Pression	Température	Energie ultrasonique	Fil	Plot
thermo compression	élevée	300-500 °C	non	Au	Al, Au
thermo sonique	basse	100-150 °C	oui	Au	Al, Au
ultrasonique	basse	25 °C	oui	Au, Au	Al, Au

Tableau I.1 : Méthodes de soudage par fils [6].

Concernant les plots, le revêtement peut aussi être en plomb (Pd) ou en argent (Ag) et selon le type de composant et la nature des fils (Au, Al, Cu), leurs diamètres varient de 17µm à quelques centaines de micromètres, ainsi que le pas qui varie à son tour de 50 µm à quelques centaines de micromètres.

Pour faire face à la réduction des pas d'interconnexion, on trouve aujourd'hui des puces superposées présentant plusieurs niveaux de connexions filaires. Cette méthode économique possède un très fort degré d'industrialisation [2].

I.3.3.b. La connexion par microbilles :

A l'origine, l'appellation CSP était l'abréviation pour « Chip Size Packaging » (boîtier de la même taille que la puce) mais très peu de boîtiers sont vraiment de la taille de la puce. La signification de l'acronyme a donc évolué, il veut maintenant dire « Chip Scale Packaging » : boîtier à l'échelle de la puce [3].

Au cœur de la technologie de connexion flip-chip, la connexion par microbilles est une méthode qui consiste l'introduction d'une microbille conductrice entre deux plots de connexion, leur rôle est donc d'assurer la connexion électrique entre le composant à assembler et son support, et l'établissement d'un lien mécanique [2].

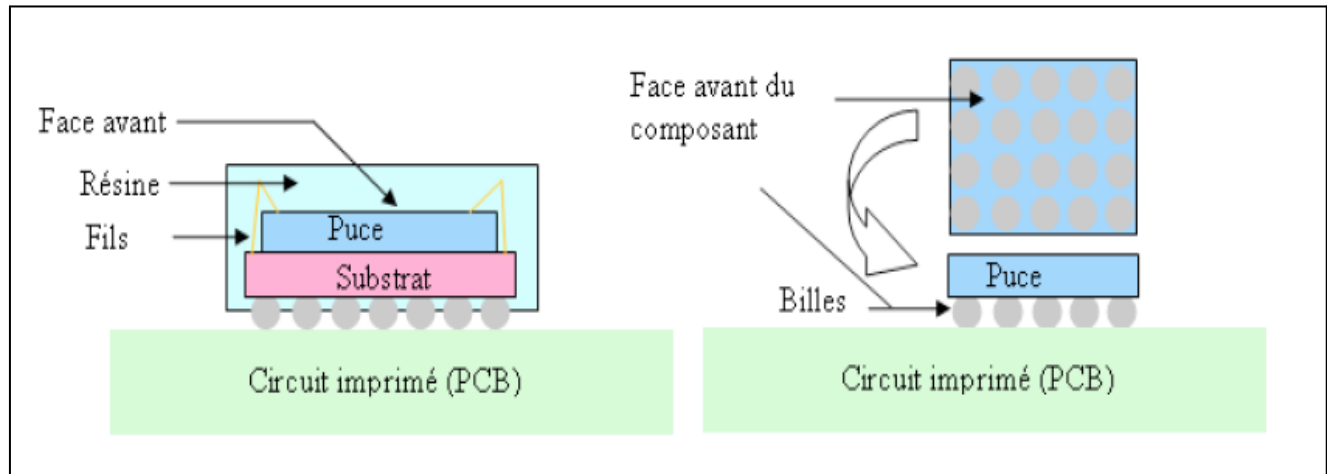


Figure I.4 : Exemple d'assemblage « flip-chip » utilisant les microbilles [1].

L'un des points les plus importants de ce type de connexion est de limiter la taille de la bille sur la puce, aussi, elle permet d'obtenir un assemblage à haute densité d'interconnexions (nombreuses entrées/sorties électriques) hautement performant (connexions plus courtes, faible bruit) et surtout elle permet de diminuer la taille des composants et la taille finale du packaging [2].

I.4. Le Plastic Ball Grid Array (PBGA):

I.4.1. Introduction:

Les boîtiers électroniques ont un rôle important dans la protection et le fonctionnement des circuits intégrés. Ces boîtiers ont beaucoup évolué pendant les vingt dernières années et aujourd'hui, ils se caractérisent d'une part par une augmentation du nombre des connexions et la complexité et d'autre part par une diminution de la taille globale [1].

Le boîtier *PBGA* (*pour Plastic Ball Grid Array*) est un type intéressant de CSP, en réponse aux tendances actuelles qui poussent à la fois à la miniaturisation, à des performances supérieures et à des produits plus petits et plus légers, ce type d'interconnexion a été fortement développé [6].

I.4.2. Configuration et constitution d'un boîtier PBGA:

Les paquets de *PBGA* emploient une combinaison de beaucoup de différents matériaux. L'exactitude des résultats de l'analyse numérique dépend de l'exactitude des modèles matériels utilisés [4].

La figure suivante représente la configuration globale d'un boîtier *PBGA*.

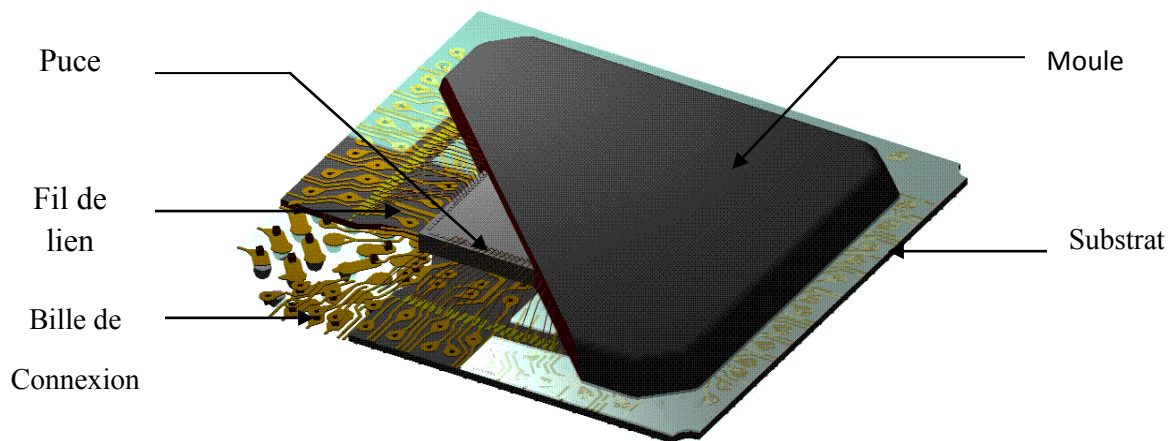


Figure I.5 : Configuration d'un boîtier PBGA incluant la puce [3], [7].

Pour mieux comprendre la structure d'un boîtier PBGA, la figure suivante représente une découpe de ce dernier monté sur un PCB.

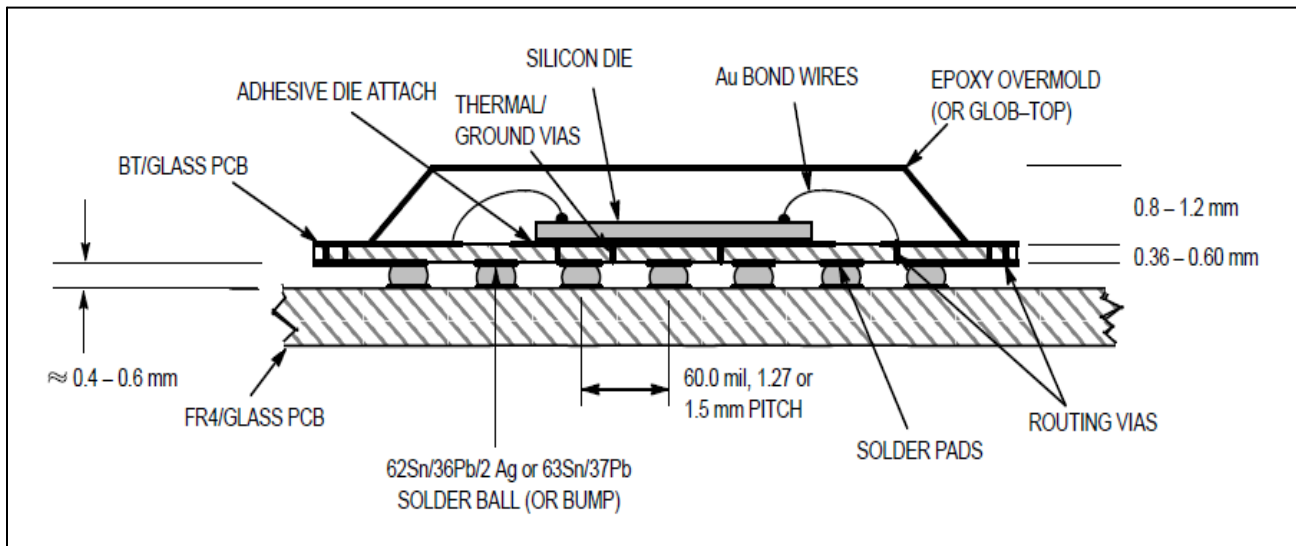


Figure I.6 : Vue de face d'une section d'un boîtier PBGA [4]

Pour mieux comprendre le fonctionnement et l'utilité de ce boîtier, des définitions des plus importants éléments constitutifs seront données dans ce qui suit :

I.4.2.a. Circuit intégré :

Un circuit intégré, que l'on appelle communément puce est une petite pastille de silicium cristallin ou d'un autre matériau semi-conducteur, sur laquelle sont gravés de nombreux composants électroniques interconnectés (transistors, condensateurs, résistances...). Les circuits intégrés sont classés suivant le nombre de composants qu'ils contiennent, cette plaque que l'on nomme donc une puce est d'une surface comprise généralement entre 0,2 et 2 cm². Afin de protéger et de faciliter l'utilisation de tous ces composants électroniques, les circuits intégrés sont alors ensuite collés dans des boîtiers rectangulaires en plastique ou en céramique [1], [7].

Depuis les premiers circuits intégrés apparus dans les années 1960, des progrès rapides et constants ont été réalisés dans ce domaine. Ainsi, tous les cinq ans en moyenne, on parvient à réaliser des gravures deux fois plus fines (donc à multiplier la densité d'intégration par 4), et c'est ainsi que le nombre de transistors par puce augmente. Aujourd'hui, les circuits intégrés peuvent être gravés avec une finesse de $0,25\ \mu\text{m}$, et c'est alors ainsi que les circuits intégrés d'aujourd'hui peuvent contenir plusieurs millions de transistors [1], [6].

I.4.2.b. Circuit imprimé :

Un circuit imprimé souvent nommé *PCB* de l'expression en anglais « *Printed Circuit Board* » est un support, permettant de relier électriquement un ensemble de composants électroniques entre eux, dans le but de réaliser un circuit électronique complexe. On le désigne aussi par le terme de carte électronique.

Il est constitué d'un assemblage d'une ou plusieurs fines couches de cuivre séparées par un matériau isolant. Les couches de cuivre sont gravées par un procédé chimique pour obtenir un ensemble de pistes, terminées par des pastilles. Le circuit imprimé est souvent recouvert d'une couche de vernis coloré qui protège les pistes de l'oxydation et d'éventuels courts-circuits.

Les circuits imprimés multicouches sont en général constitués de 3 à 6 couches et peuvent contenir jusqu'à 14 couches pour les applications spécifiques. Par rapport aux circuits imprimés classiques, ils présentent une plus grande densité de conducteurs. Ces derniers sont montés à l'intérieur du matériau. Ainsi, les circuits imprimés multicouches sont plus performants que les circuits classiques, mais ont néanmoins un coût de revient supérieur et leur production est plus délicate.

I.4.2.c. La matrice de billes (BGA) :

La matrice de billes (en anglais *Ball Grid Array* ou *BGA*) est un type de boîtier de circuit intégré, destiné à être soudé sur un circuit imprimé. Un boîtier BGA est composé d'une matrice de billes de soudures. Ces billes sont soudées sur un circuit imprimé possédant des plages d'accueil d'un diamètre adéquat. Il existe également des connecteurs qui permettent d'établir une liaison électrique entre un circuit intégré BGA et un circuit imprimé. Le pas entre billes est généralement de l'ordre du mm, il peut descendre à quelques dixièmes de mm.

Le montage de BGA est une étape très délicate, dépendante de plusieurs contraintes (précision du placement, nature de la pâte à braser, présence d'humidité ou d'impuretés pouvant faire exploser les billes lors de la chauffe, etc.). Enfin du point de vue de l'accessibilité, il est naturellement très difficile de faire des *rework* sur des BGA, ce qui rend l'étape de prototypage délicate.



Figure I.7 : Exemple d'un circuit intégré montrant la matrice de billes [8].

Les billes d'interconnexion sont constituées à partir d'un alliage, pendant des années, les alliages utilisés sont basés sur le système étain- plomb (63Sn-37Pb, 62Sn-36Pb-2Ag), sauf que l'intégration du plomb a causé des problèmes énormes, en effet, son ingestion entraîne à faible dose des troubles neurologiques ou des malformations à la naissance, à haute dose le plomb provoque un empoisonnement de l'organisme (saturnisme) [2], [6].

Depuis juillet 2006 déjà, la directive européenne *RoHS (Restriction of Hazardous Substances)* a interdit le plomb ainsi que d'autres substances dangereuses dans les équipements électroniques, pour ce fait, les alliages précédents ont été remplacés par l'alliage 95.5Sn-3.8Ag-0.7Cu [2].

I.5. Evaluation de la fiabilité des composants électroniques :

La définition adoptée par la Commission Electrotechnique Internationale (CEI) pour définir la fiabilité s'énonce en ces termes : « Caractéristique d'un dispositif, exprimée par la probabilité qu'il accomplisse une fonction requise dans des conditions données, pendant une durée donnée».

Dans le but d'assurer qu'un composant électronique soit fiable, deux approches sont utilisées. La première consiste à effectuer des tests de qualification accélérés. La deuxième approche consiste à évaluer la fiabilité dès la phase de conception et ces deux approches sont complémentaires.

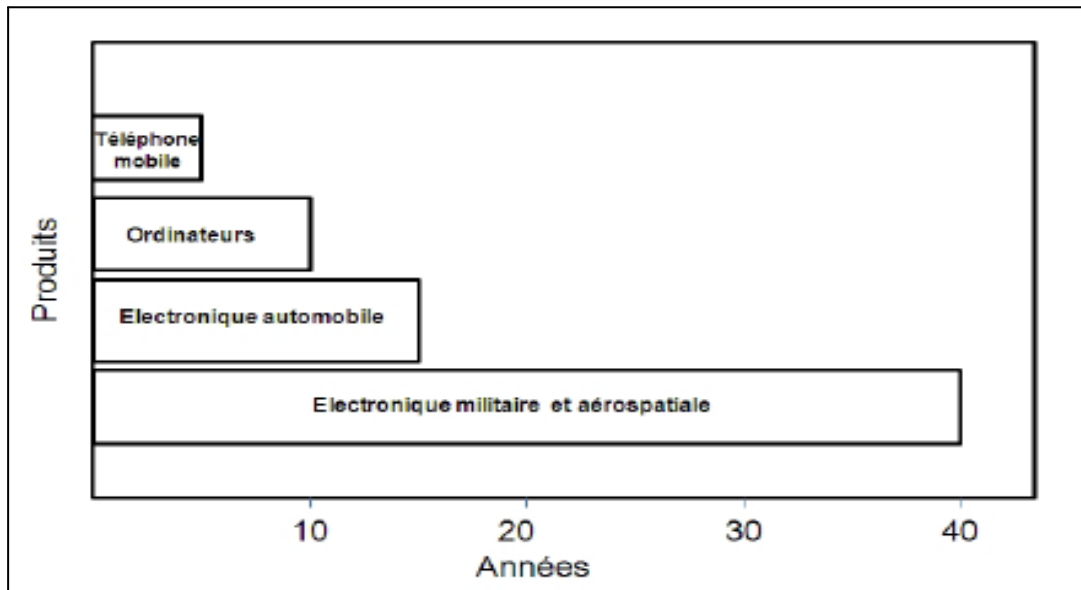


Figure I .8 : Durées de vie typique des composants électroniques [6]

I.5.1. Défaillances thermomécaniques:

Les défaillances thermomécaniques sont le résultat d'une augmentation des contraintes et des déformations sous l'effet de chargements thermiques et de la dissipation thermique interne du boîtier. Les boîtiers électroniques sont composés de plusieurs matériaux ayant des coefficients de dilatation thermique (CDT) différents. Sous l'effet d'un chargement thermique les différents matériaux et la disparité des CDT, les contraintes et les déformations vont augmenter. Prenons l'exemple d'une puce assemblée sur un circuit imprimé par des billes de brasures. La disparité dans les valeurs de CDT (silicium : 2,8 ppm/K ; brasure : 23ppm/K et circuit imprimé : 17 ppm/K) entraîne d'importantes forces de cisaillement sur la brasure. Une répétition progressive de ce cisaillement est un mécanisme d'usure par fatigue. Ceci est une source importante d'apparition de défaillances dans la brasure [9], [4].

I.5.1.a. Conception pour réduire le risque de rupture fragile :

La rupture des matériaux fragiles comme la céramique, le silicium et le verre est atteinte par le mécanisme de surcharge. Cette défaillance est appelée « rupture fragile ». Elle pourrait être observée dans les boîtiers contenant les circuits intégrés de silicium. Lorsque la contrainte appliquée sur un boîtier atteint une valeur critique on peut prévoir une rupture fragile du silicium.

Pour réduire ce risque on peut utiliser deux méthodes :

- Réduire les contraintes appliquées en utilisant des procédés et des matériaux qui produisent moins de contrainte.
- La résistance d'un circuit intégré en silicium dépend de la qualité de surface et de sciage du matériau. Ainsi en améliorant la qualité de rodage et en réduisant les défauts sur les bords, on peut réduire le risque de rupture fragile [9], [3].

I.5.1.b. Conception pour réduire la déformation plastique:

La déformation plastique est atteinte lorsque la déformation dépasse la zone élastique d'un matériau. La figure I.9 présente la contrainte en fonction de la déformation d'un matériau. Au dessous de cette limite, le matériau est en zone élastique et au dessus, il est en zone plastique. La déformation plastique n'affecte pas directement le fonctionnement électrique, cependant, l'accumulation continue et excessive de cette déformation plastique par des chargements cycliques pourrait conduire à la fissuration des couches de matériaux et entraîner la défaillance du composant [9].

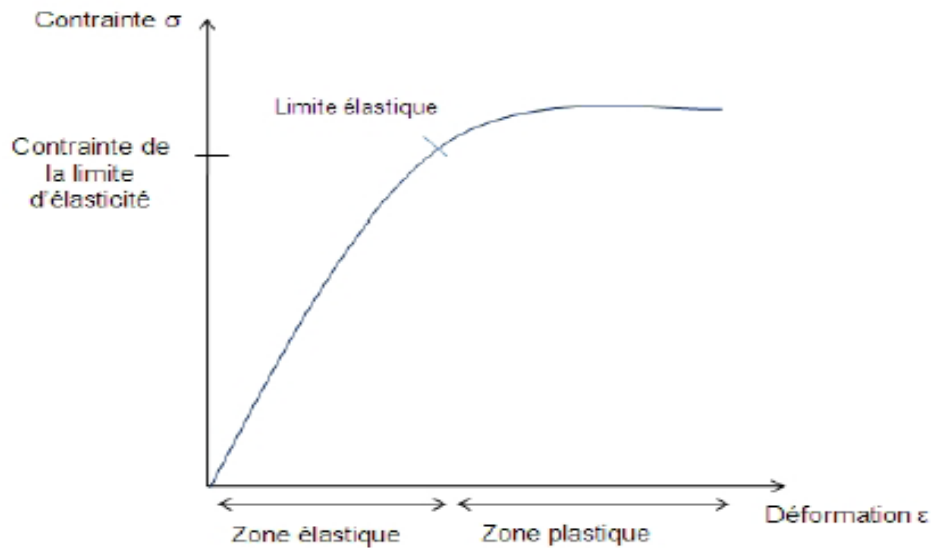


Figure I.9 : Courbe de la contrainte en fonction de la déformation pour un matériau élasto-plastique [6].

Afin de réduire le risque de déformation plastique on pourrait utiliser deux méthodes :

- La première approche consiste à réduire les contraintes appliquées sur le matériau car la déformation plastique se produit lorsque les contraintes appliquées sur le boîtier dépassent la limite élastique du matériau le plus fragile
- Une deuxième approche consiste à contrôler la déformation plastique locale en modifiant la conception pour éviter les zones de concentration de contraintes et essayer de la réduire au minimum [4].

I.5.2. Les bases de la méthodologie de prototypage :

Avec la complexité croissante de la technologie microélectronique, caractérisée par des multi-linéarités, des multi-procédés et des multi-paramètres, on cherche de plus en plus à utiliser le prototypage virtuel afin de prévoir, concevoir et optimiser les caractéristiques des composants électroniques et leurs performances avant les étapes de réalisation [2].

Afin de réussir cette étape de prototypage et d'optimisation on doit d'une part se baser sur des modèles de simulation fiables et efficaces. D'autre part, il faut utiliser des méthodes de simulation avancées basées sur des méthodes d'optimisation.

Comme le montre la figure I.10 ces deux étapes forment une base sur laquelle on peut atteindre les objectifs du prototypage virtuel.

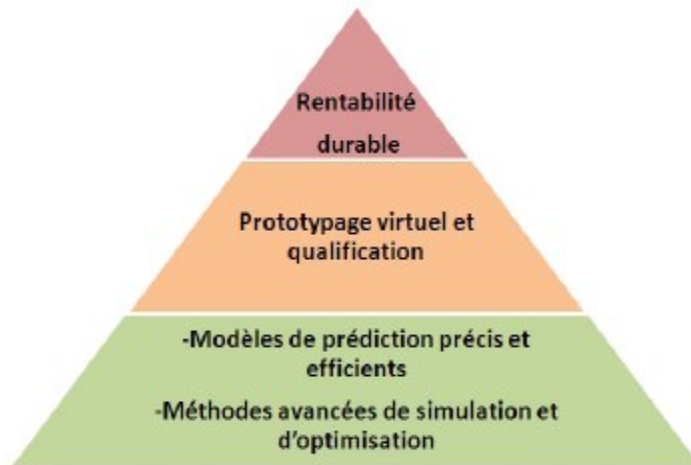


Figure I.10 : La stratégie générale des bases du prototypage virtuel de composants électroniques [6]

La figure I.11 présente les outils et les méthodes pour aboutir à des modèles précis et efficaces, parmi lesquels on peut citer :

- Des méthodes expérimentales efficaces pour vérifier les modèles de simulation.
- Des algorithmes fiables pour la modélisation non linéaire en éléments finis.
- Des méthodes de caractérisation et de modélisation des propriétés des matériaux.
- Une modélisation en fonction de l'évolution des défaillances,
- Les données d'entrée liées aux paramètres du produit et aux procédés de fabrication [6]

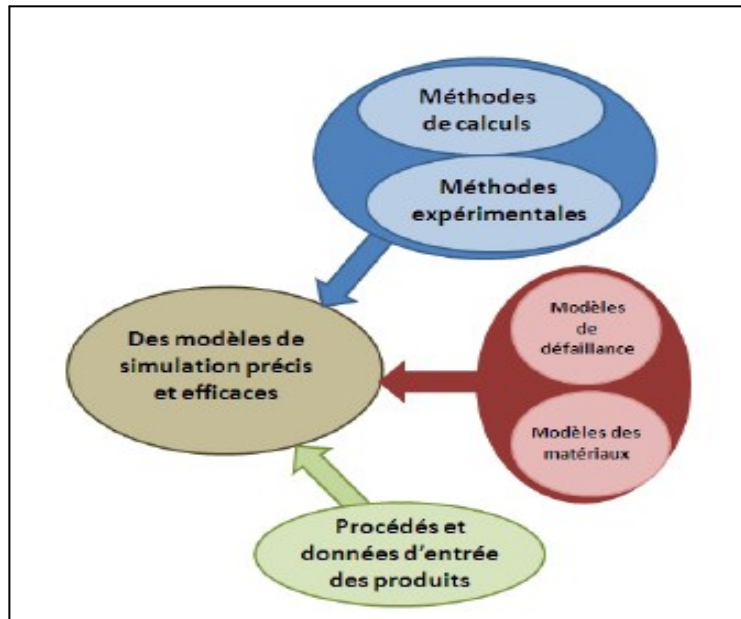


Figure I.11 : Développement de modèles fiables et efficaces [6]

Chapitre II

II.1.Introduction:

La majorité des phénomènes physiques sont représentés à l'aide des équations aux dérivées partielles, qui peuvent être linéaires ou non-linéaires. Le développement de la science passe en grande partie par la meilleure compréhension des propriétés des solutions de ces équations, bien que le progrès technique dans de nombreux domaines de l'industrie (aéronautique, nucléaire, de fusion contrôlée...) nécessite une résolution numérique de ces systèmes d'équations aux dérivées partielles [9].

Il existe de nombreuses méthodes de résolution, en effet, la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis sont beaucoup utilisées dans les milieux ferromagnétiques (charges), la méthode analytique ou la méthode d'intégrale de frontière pour les régions linéaires (inducteurs)...sauf que la méthode des éléments finis reste la plus utilisée car elle s'adapte bien à la représentation des géométries complexes et au traitement des comportements non-linéaires des matériaux [5], [13].

L'utilisation des méthodes numériques de discrétisation consiste à ramener la résolution de l'équation aux dérivées partielles dans le domaine d'étude, compte tenu des conditions aux limites à celle d'un système d'équations algébriques dont la solution conduit à la distribution des champs [5].

II.2.Les différents types d'équations aux dérivées partielles :

Les différentes équations aux dérivées partielles régissant la plupart des phénomènes physiques sont de trois types :

II.2.1. Equations de type elliptique :

Ce type d'équations traite les problèmes stationnaires (indépendant du temps), en coordonnées cartésiennes, l'équation peut être représentée sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II.1})$$

$\varphi(x, y, z)$: est la fonction inconnue du phénomène.

II.2.2. Equations de type parabolique :

Ce type d'équations est lié à l'étude des régimes transitoires comme l'équation de la pénétration des courants induits ou la diffusion de la chaleur en thermique, elles sont présentées en coordonnées cartésiennes sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.2})$$

II.2.3. Equations de type hyperbolique :

Ce type d'équations traite les problèmes de propagation d'onde et il est régit par l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.3})$$

II.3. Equations de Maxwell :

Hormis une étude expérimentale pure, trouver un modèle qui traduit fidèlement un phénomène physique est un préalable à son étude. En ce qui concerne les phénomènes électromagnétiques, James Clark Maxwell les a regroupés, dans quatre équations, en les associant aux équations dites de milieu et de passage. Cela permet de modéliser la majorité des systèmes électromagnétiques [10].

II.3.1. Forme différentielle des équations de Maxwell :

Les équations locales de l'électromagnétisme, ou les équations de Maxwell décrivent le comportement local dans le temps et dans l'espace des grandeurs électriques et magnétiques et leurs interactions mutuelles [9].

Les quarts équations suivantes présentent la forme la plus générale des équations de Maxwell.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{II.4})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.5})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II.6})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II.7})$$

Avec :

\vec{D} : Vecteur déplacement ou vecteur induction électrique [A.s/ m²].

ρ : Densité de la charge volumique [c/m³].

\vec{E} : Vecteur champ électrique [V/m].

\vec{B} : Vecteur induction magnétique [T].

\vec{H} : Vecteur champ magnétique [A/m].

\vec{J}_c : Vecteur densité de courant de conduction [A/m²].

t : Variable temporelle [s].

$J_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$: Densité de courant de déplacement [A/m²].

II.3.2. Forme intégrale des équations de Maxwell :

La formulation intégrale de la première équation de Maxwell est un théorème bien connu qui est le théorème de Gauss.

Nous avons :

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = \iiint_V \rho \cdot dv \quad (\text{II.8})$$

En appliquant le théorème de la divergence à la première équation de Maxwell, on obtient :

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \cdot dv = \iiint_V \rho \cdot dv \quad (\text{II.9})$$

D'où :

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \cdot dv = \oiint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} \quad (\text{II.10})$$

Finalement :

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = \iiint_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \cdot dv = Q_t \quad (\text{II.11})$$

Avec :

s : Surface qui entoure le volume v [m²].

Q_t : Charge totale contenue à l'intérieur de la surface s [Cb].

La formulation intégrale de la deuxième équation de Maxwell représente la loi de Faraday- Lenz. En intégrant les deux parties par rapport à la surface de la deuxième équation de Maxwell représentée précédemment par l'équation (II.5) on aura :

$$\iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{ds} = \iint_S \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \vec{ds} \quad (\text{II.12})$$

Dans le cas où le système ne se déforme pas, c'est-à-dire que la surface s est indépendante du temps on obtient :

$$\iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{ds} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S (\vec{B} \cdot \vec{ds}) \quad (\text{II.13})$$

Le flux magnétique du vecteur induction magnétique à travers une surface s s'exprime par :

$$\Phi = \oiint_S \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad (\text{II.14})$$

D'où :

$$\iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{ds} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{II.15})$$

Le théorème de Stokes est représenté par la formule suivante :

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \cdot \vec{ds} \quad (\text{II.16})$$

A partir de (II.15) et (II.16) on obtient l'équation suivante :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{II.17})$$

Avec:

ϕ : Flux magnétique traversant la section (s).

$d\vec{l}$: Élément de longueur orienté.

La troisième équation signifie que le flux de l'induction magnétique à travers une surface fermée est nul, cela traduit la conservation de flux magnétique [10].

En intégrant les deux parties de la troisième équation de Maxwell déjà représentée par l'équation (II.6) par rapport au volume on aura :

$$\iiint_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \cdot dv = 0 \quad (\text{II.18})$$

Finalement, en appliquant le théorème de la divergence on obtient :

$$\oiint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (\text{II.19})$$

La quatrième équation de Maxwell est aussi appelée loi de Maxwell-Ampère. En électrotechnique, les fréquences utilisées sont inférieures aux fréquences radio, aussi nous pouvons négliger le courant de déplacement [10]. L'équation (II.7) devient :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}c \quad (\text{II.20})$$

En intégrant les deux parties par rapport à la surface on aura :

$$\iint_s (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \cdot d\vec{s} = \iint_s \vec{J}c \cdot d\vec{s} \quad (\text{II.21})$$

Chapitre II : Lois fondamentales de l'électromagnétisme

Le théorème du rotationnel est le suivant :

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_s (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \cdot d\vec{s} \quad (\text{II.22})$$

En appliquant le théorème du rotationnel représenté par l'équation (II.22) pour l'équation (II.21) on obtient :

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_s \vec{J}c \cdot d\vec{s} \quad (\text{II.23})$$

Comme :

$$I = \iint_s \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (\text{II.24})$$

Et:

$$I = \sum_i I_i \quad (\text{II.25})$$

Alors:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_s \vec{J}c \cdot d\vec{s} = \sum_i I_i \quad (\text{II.26})$$

Les équations de Maxwell sous leurs formes différentielles et intégrales seront résumées dans le tableau suivant:

	Forme différentielle	Forme intégrale
Théorème de Maxwell Gauss	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$	$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iiint_v \rho \cdot dv$
Théorème de Maxwell Faraday	$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_s (\vec{B} \cdot d\vec{s})$
Conservation du flux magnétique	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$
Théorème de Maxwell Ampère	$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_s \vec{J}c \cdot d\vec{s}$

Tableau II.1 : Forme différentielle et intégrale des équations de Maxwell.

II.4. Lois du comportement du milieu :

La résolution des équations de Maxwell fait appel à des équations supplémentaires qui représentent les lois de comportement du milieu.

II.4.1. Relations du milieu :

Les relations du milieu expriment le lien entre le champ magnétique \vec{H} et l'induction magnétique \vec{B} à travers la perméabilité magnétique du milieu μ et celui liant l'induction électrique \vec{D} au champ électrique \vec{E} à travers la permittivité ε du milieu.

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{II.27})$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (\text{II.28})$$

Sachant que :

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0 \quad (\text{II.29})$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \quad (\text{II.30})$$

Avec :

μ_0 : Perméabilité du vide.

μ_r : Perméabilité relative.

ε_0 : Permittivité du vide.

ε_r : Permittivité relative.

Et :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [H/m]}.$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \text{ [F/m]}.$$

II.4.2. Loi d'Ohm :

La loi d'Ohm donne la relation qui lie la densité du courant électrique à la grandeur champ électrique à travers la conductivité électrique.

➤ Au repos :

$$\vec{J}_i = \sigma_i \cdot \vec{E}_i \quad (\text{II.31})$$

➤ Au mouvement:

$$\vec{J}_i = \sigma_i \cdot (\vec{E}_i + \vec{V}_i \wedge \vec{B}_i) \quad (\text{II.32})$$

Avec :

\vec{J}_i : Vecteur densité électrique du milieu i [A/m^2].

σ_i : Conductivité électrique du milieu i [Ωm]⁻¹.

\vec{E}_i : Vecteur champ électrique du milieu i [V/m].

\vec{V}_i : La vitesse de déplacement du milieu i [m/s].

\vec{B}_i : Vecteur induction magnétique du milieu i [T].

II.5. Les conditions aux limites et conditions de passages :

II.5.1. Conditions aux limites :

On envisage trois types de conditions aux limites.

II.5.1.a. Condition de *Dirichlet* :

Cette condition nous renseigne sur la valeur exacte de l'inconnu sur la frontière extérieur du domaine de résolution [11].

$$U = g \quad (\text{II.31})$$

Avec :

g : Constante

U : L'inconnu du problème.

II.5.1.b. Condition de *Newmann* :

Cette condition nous renseigne sur la valeur de la composante normale de l'inconnu sur la limite du domaine étudié et elle s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial n} = g \quad (\text{II.32})$$

II.5.1.c. Condition mixte *Dirichlet-Neumann* :

Appelée aussi condition de Cauchy ou Robin, elle s'exprime comme suit :

$$aU + b \frac{\partial U}{\partial n} = g \quad (\text{II.33})$$

Avec :

g : Valeur de l'inconnu sur la frontière.

a, b : Coefficients.

U : Inconnu du problème.

II.5.2. Conditions de passages :

Pour définir les relations entre les grandeurs de deux milieux électriquement ou magnétiquement différents, on intègre les équations de Maxwell entre deux points très voisins de part et d'autre d'une surface séparant ces deux milieux [11], [5].

Le résultat nous permet de constater que :

- La conservation de la composante tangentielle du champ électrique \vec{E} .

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \wedge \vec{n} = 0 \quad (\text{II.34})$$

- La conservation de la composante normale de l'induction magnétique \vec{B} .

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{II.35})$$

- La discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique \vec{H} due aux courants surfaciques \vec{J}_s , s'ils existent.

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \wedge \vec{n} = \vec{J}_s \quad (\text{II.36})$$

- La discontinuité de la composante normale de l'induction électrique \vec{D} due aux charges surfaciques q_S si elles existent.

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = q_S \quad (\text{II.37})$$

Avec :

\vec{n} : Vecteur normal à la surface de séparation dirigé d'un milieu (1) vers un milieu (2).

\vec{J}_S : Densité surfacique d'une nappe de courant entre les deux milieux.

II.6. Méthode de résolution des équations aux dérivées partielles :

II.6.1. Méthode de calcul analytique :

Les premiers travaux sont issus des méthodes analytiques basées sur les modèles à une dimension. Dans ces modèles, la charge est supposée axisymétrique et longue et les grandeurs physiques sont exprimées uniquement en fonction de r .

Ces méthodes ont l'avantage de donner un aperçu de la variation radiale des champs dans les zones particulières de la charge. Elles sont par contre incapables de déterminer précisément et dans tout le domaine la variation de toutes les grandeurs physiques. Donc on fait appel à des méthodes de résolution numérique.

II.6.2. Méthodes de calcul numérique :

Tous les modèles obtenus sont à équations aux dérivées partielles dont la résolution analytique n'est pas souvent évidente, aussi pour s'affranchir de cette difficulté des méthodes numériques ont été développées [10].

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères et pour dominer ces projets, l'ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement de systèmes physiques complexes, il peut ainsi prévoir l'influence de ses décisions au moment de la conception du système [15].

Il arrive aussi d'associer une solution analytique à une méthode numérique pour réduire le temps de calcul et augmenter la précision des résultats. En effet, une solution analytique est plus précise qu'une solution numérique parce que cette dernière est une approximation de la solution réelle [10].

II.6.2.a. Méthodes des différences finis :

La méthode des différences finies est basée sur la transformation de l'opérateur différentiel en un opérateur aux différences où chaque dérivée est approchée par une différence de valeur de l'inconnu à déterminer en un certain nombre de points du domaine de résolution. L'ensemble des points de discrétisation constitue un maillage [11], [5].

L'équation aux dérivées partielles est transformée en équation algébrique en chacun des points (nœuds). L'écriture de cette transformation pour tous les nœuds du maillage conduit à un système algébrique dont la solution permet d'obtenir la distribution de l'inconnue dans le domaine d'étude [5], [9], [13].

Les dérivées premières ou secondes de l'inconnue (A) au point p sont exprimées en fonction des valeurs de l'inconnue des points voisins.

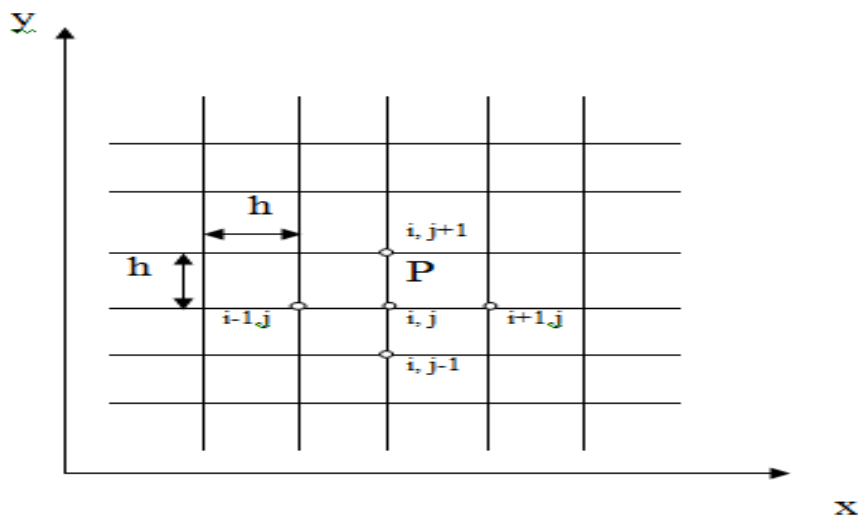


Figure II.1 : Domaine de discrétisation en différence finie

Pour les dérivées d'ordre 1:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2.h} \quad (\text{II.38})$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j-1}}{2.h} \quad (\text{II.39})$$

Pour les dérivées d'ordre 2:

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} + A_{i-1,j} - 2.A_{i,j}}{h^2} \quad (\text{II.40})$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} + A_{i,j-1} - 2.A_{i,j}}{h^2} \quad (\text{II.41})$$

Ainsi le *Laplacien* discrétisé s'écrit :

$$(\Delta A)_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_{i,j} + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{i,j} \quad (\text{II.42})$$

D'où :

$$(\Delta A)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j+1} + A_{i,j-1} - 4A_{i,j}}{h^2} \quad (\text{II.43})$$

La forme de cette dernière formule aux différents nœuds du domaine, aboutit au système matriciel suivant :

$$[M][A] = [F] \quad (\text{II.44})$$

Avec :

[M] : Matrice contenant les données du problème.

[A] : Vecteur des inconnues.

[F] : Terme source.

Dans les cas des dispositifs à géométries complexes, Cette méthode s'adapte difficilement, car elle présente des inconvénients relatifs à la définition des valeurs de l'inconnue sur la frontière du domaine d'étude [5], [11], [16].

II.6.2.b. Méthode d'intégrale de frontière :

Cette méthode permet la présentation du domaine tout en limitant la discrétisation à la frontière, Elle est souvent utilisée dans l'étude des structures de grande dimension, et elle s'adapte aux problèmes à frontières ouvertes (exemple : le vecteur $\vec{A} = 0$ à l'infini), généralement utilisée en magnétostatique [16].

L'inconvénient de cette méthode réside dans la nécessité de disposer d'un espace mémoire considérable et un temps de calcul important, car le système algébrique issu de cette méthode est à matrice pleine [11], [14].

II.6.2.c. Méthode des éléments finis :

a. Introduction :

La méthode des éléments finis est une méthode développée et appliquée en premier lieu en génie civile et en mécanique, elle est introduite en Electrotechnique vers 1970, par *P.P.Silvester* et *M.V. Chari* [16].

Cette méthode est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui, en effet, elle est générale et elle s'adapte mieux à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaire ou non stationnaire, linéaires ou non linéaires, définit dans un domaine à géométrie quelconque à une, deux ou trois dimensions, de plus elle s'adapte bien aux milieux hétérogènes[9], [11], [15]

b. Décomposition de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Elle fait appel aux trois domaines suivants.

- Loi de la physique pour construire les équations aux dérivées partielles.
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- Outils de résolution pour exécuter effectivement les calculs sur l'ordinateur.

c. Eléments de référence :

Un élément de référence Ω_r est un élément de forme très simple, repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en un élément réel Ω_e par une transformation géométrique τ^e [14], [15].

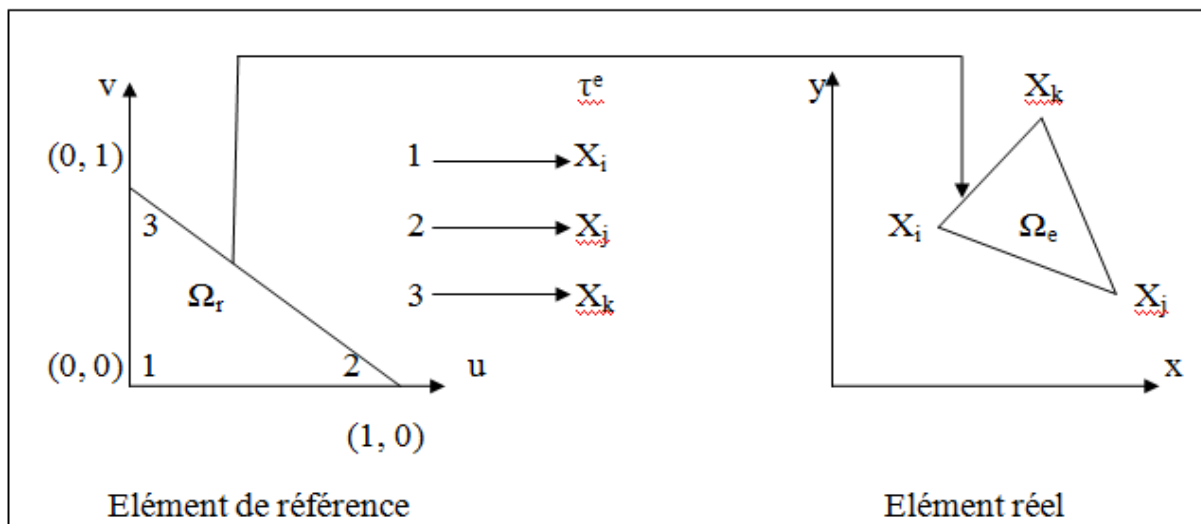


Figure II.2 : Transformation d'un élément de référence à un élément réel

La transformation τ^e définit les coordonnées de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées du point correspondant de l'élément de référence, aussi, la transformation τ^e dépend de la forme et de la position de l'élément réel, donc les coordonnées des nœuds géométriques qui le définissent [15].

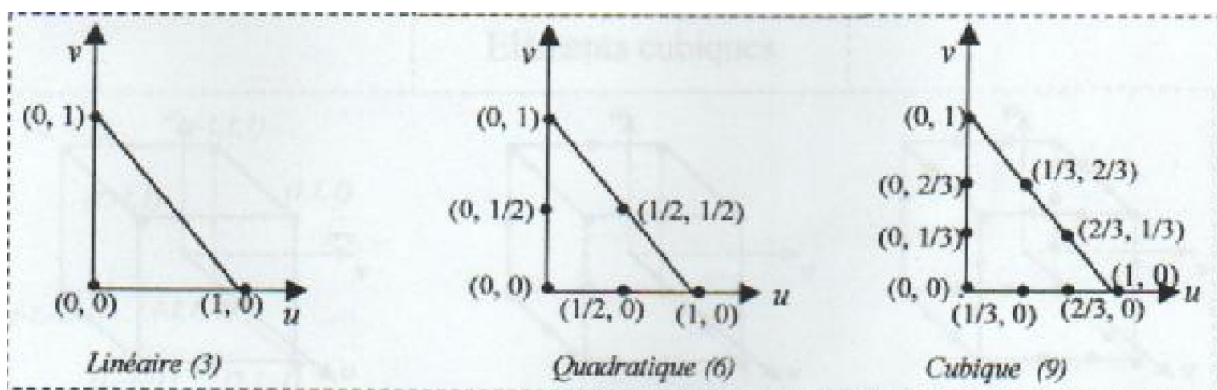
On utilise des éléments de référence de manière à simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, et les éléments les plus simple sont : le triangle, le rectangle, le tétraèdre et le parallélépipède, aux quels on associe un système de coordonnées. On distingue alors :

●Eléments de référence à une dimension 1D :

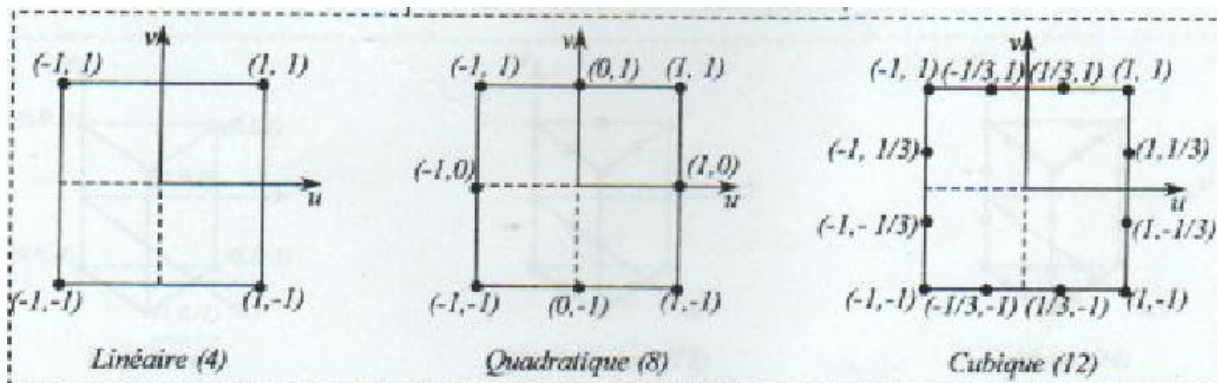


●Eléments de référence à deux dimensions 2D :

Eléments triangulaires :

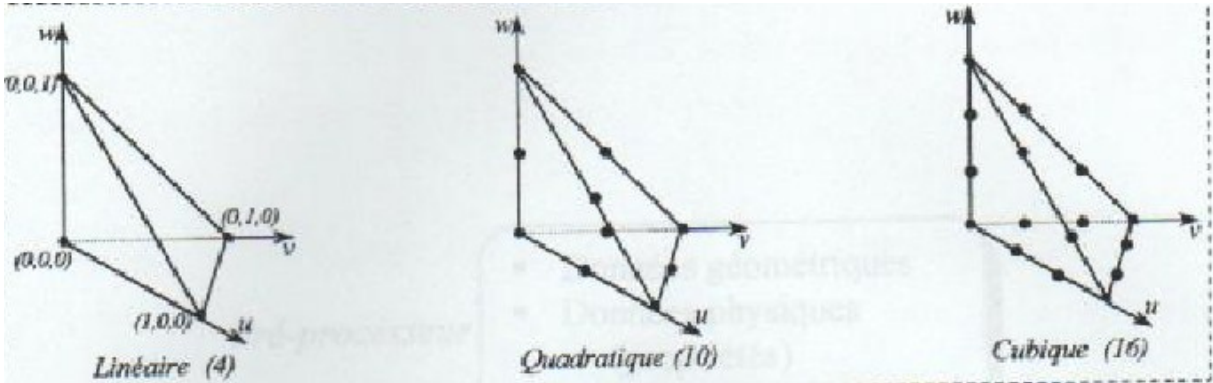


Eléments carrés :

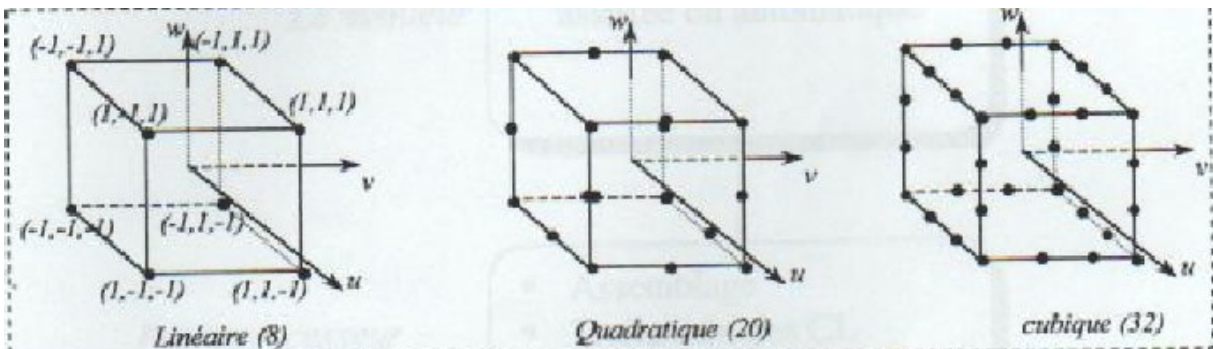


● **Eléments de référence à trois dimensions 3D :**

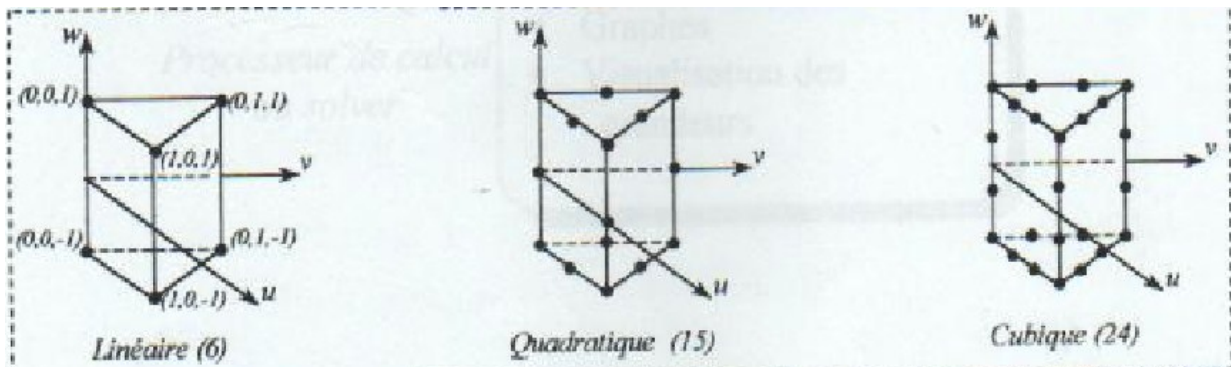
Eléments tétraédriques :



Eléments cubiques :



Eléments prismatiques:



d. La fonction d'interpolation :

Malgré qu'il n'existe pas de méthode systématique pour la construction de la fonction d'interpolation, il existe des règles et des conditions permettant sa construction, en effet, elle doit être toujours continue et de type polynomial, aussi, Le nombre de termes de la fonction doit être égal au nombre de nœuds de l'élément [11], [15].

Les fonctions d'interpolations sont obtenues à partir d'un triangle nommé le triangle de *PACAL*, donné ci-après :

	1			----- Ordre 0
	U	V		----- Ordre 1
U ²	UV	V ²		----- Ordre 2
U ³	U ² V	UV ²	V ³	----- Ordre 3

On peut citer un exemple d'une fonction d'interpolation :

$$A(U, V) = a + b U + c V + d UV + e U^2 + f V^2 + g U^2 V + h U^3 \tag{II.45}$$

D'où:

$$A(U, V) = [1 \ U \ V \ U^2 \ UV \ V^2 \ U^2 V \ U^3] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} \tag{II.46}$$

La base polynomiale est

$$P(U,V) = [1 \ U \ V \ UV \ U^2 \ V^2 \ U^2V \ U^3] \tag{II.47}$$

e. La fonction d'approximation :

La fonction d'approximation consiste à chercher la meilleure approximation d'une fonction $u(x)$ d'un domaine Ω de manière à satisfaire au mieux les lois physique auxquelles elle obéit, donc pour l'approximer une fonction $u(x)$ nous procédons comme suit :

Nous choisissons sur le domaine Ω un ensemble de n nœuds d'interpolation de coordonnées x_i , puis sur chaque élément Ω_e nous utilisons une approximation nodale de la fonction exacte $u_{ex}(x)$ [5], [11].

$$u_{ex}(x) \approx u(x) = \langle N_1^e(x) \ N_2^e(x) \ N_3^e(x) \ \dots \dots \dots \ N_n^e(x) \rangle \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n^e \end{Bmatrix} \tag{II.48}$$

Et de manière plus générale, on aura :

$$u_{ex} \approx u(x) = \langle N^e(x) \rangle \{u_n^e\} \tag{II.49}$$

Avec :

u_{ex} : La fonction exacte.

$u(x)$: Fonction d'approximation qui s'identifié à la fonction exacte.

$u_1^e, u_2^e, u_3^e, \dots, u_n^e$: Les valeurs associées aux nœuds d'interpolation de l'élément ou variables nodales

$N_1^e(x) \ N_2^e(x) \ N_3^e(x) \ \dots \ N_n^e(x)$: Les fonctions de forme de l'élément.

II.7. Formulation éléments finis :

II.7.1. Introduction :

La méthode des éléments finis est très avantageuse pour le traitement des problèmes à géométries complexes et à comportement non linéaire, son principe est basé sur la substitution à la forme différentielle que représentent les équations aux dérivées partielles et aux conditions aux limites associées à une formulation intégrale du phénomène à étudier [5], [10], [11].

Cette formulation intégrale peut être de deux types :

- Formulation variationnelle.
- Formulation projective (résidus pondérés).

II.7.2. Formulation variationnelle :

Cette formulation nécessite la connaissance au préalable de la fonction d'énergie du système à étudier, car cette méthode est basée sur l'action *Hamiltonienne* qui stipule l'existence d'une fonctionnelle de type intégrale et qui est définie comme suit :

$$F(u) = \int_{\Omega} L(u) d\Omega \quad (\text{II.50})$$

Sachant que :

$$L(u) = W_C - W_P \quad (\text{II.51})$$

Avec :

Ω : Domaine d'étude

$L(u)$: Fonction de *Lagrange*.

W_C : Energie cinétique du système.

W_P : Energie potentielle du système.

Chapitre II : Lois fondamentales de l'électromagnétisme

On peut citer l'exemple d'un problème magnétostatique, où la fonction L sera donnée par l'expression suivante :

$$L = \int_0^B v B dB - J \cdot A \quad (\text{II.52})$$

Alors l'expression de la fonctionnelle d'énergie sera donnée comme suit :

$$F(A) = \int_{\Omega} \left[\int_0^B v B dB - J \cdot A \right] d\Omega \quad (\text{II.53})$$

Avec :

L : Fonction de Lagrange.

A : Potentiel vecteur magnétique [T. m].

J : Densité de courant [A/m^2]

v : Réductivité magnétique [H/m]⁻¹

B : Induction magnétique [T].

Résoudre le problème variationnel défini par la fonctionnelle $F(A)$ revient à minimiser cette dernière par le principe de *Rayleigh-Ritz*, ce qui consiste à écrire que :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = 0 \quad (\text{II.54})$$

D'où :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_2} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_3} = \dots \dots \frac{\partial F(A)}{\partial A_n} = 0 \quad (\text{II.55})$$

Avec :

n : Nombre de nœuds du domaine d'étude.

A_i : Est l'inconnu aux nœuds i du domaine.

II.7.3. Formulation résidus pondérés :

La formulation résidus pondérés appelée aussi la méthode projective est la plus utilisée car elle ne nécessite pas la connaissance préalable d'une expression énergétique du système [15], [16].

Le principe de cette méthode est basé sur le théorème d'*Hilbert* qui stipule que seul le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace [9], [12]. Cette méthode consiste à rechercher des fonctions projectives Ψ_i de façon à minimiser l'intégrale du résidu dont l'équation est la suivante :

$$\int R(A) \Psi_i d\Omega = 0 \quad (\text{II.56})$$

Sachant que :

$$R(A) = L(A) - F \quad (\text{II.57})$$

Avec :

A : L'inconnu du problème.

L(A) : Opérateur différentiel.

Ψ_i : Fonction de projection ou de pondération.

F : Fonction définie sur le domaine Ω .

R : Représente le résidu de l'approximation.

Les valeurs de A permettent d'annuler l'intégrale et donc représentent la solution du système algébrique obtenu [16].

Le choix des fonctions de projection permet de définir plusieurs méthodes, parmi celle-ci, on cite les méthodes suivantes :

- La méthode de collocation par points
- La méthode de collocation par sous-domaines.
- La méthode des moindres carrées.
- La méthode de *Galerkin*.

La méthode projection de *Galerkine* est la plus utilisée en Electrotechnique, puisque elle conduit à un système matriciel symétrique.

Considérant $U(x)$ l'approximation de $f(x)$, sachant que $U(x)$ représente une grandeur physique qui peut être un champ magnétique, une température, un déplacement, une vitesse, une pression...alors $U(x)$ peut s'écrire comme suit :

$$U(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots \dots \dots \alpha_n x^{n-1} \tag{II.58}$$

$U(x)$ peut aussi s'écrire comme suit :

$$U(x) = \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x) \dots \dots \dots p_n(x) \rangle \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{bmatrix} \tag{II.59}$$

Avec:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \dots \alpha_n$: Variables nodales.

$p_1(x), p_2(x), p_3(x) \dots \dots \dots p_n(x)$: Des polynômes connus.

En utilisant l'approximation $U(x_i)$ concédée avec $f(x_i)$ en tout points, on aura la forme suivante :

$$\left. \begin{array}{l} U(x_1) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_1^2 + \dots \dots \dots \alpha_n x_1^{n-1} = f(x_1) \\ U(x_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_2^2 + \dots \dots \dots \alpha_n x_2^{n-1} = f(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ U(x_3) = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_3^2 + \dots \dots \dots \alpha_n x_3^{n-1} = f(x_3) \end{array} \right\} \tag{II.60}$$

Sous-forme matricielle on aura :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(x_1) \\ U(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U(x_n) \end{bmatrix} \quad (\text{II.61})$$

D'une manière plus généralement :

$$[M][X] = [F] \quad (\text{II.62})$$

Avec :

$[M]$: La matrice des données.

$[X]$: Vecteur des inconnues.

$[F]$: Le terme source.

Pour retrouver le vecteur des inconnues $[X]$, on procède comme suit :

On a:

$$[M][X] = [F] \quad (\text{II.63})$$

En multipliant les deux termes par $[M^{-1}]$ on obtient :

$$[M^{-1}][M][X] = [M^{-1}][F] \quad (\text{II.64})$$

Et comme :

$$[M^{-1}][M] = [I] \quad (\text{II.65})$$

On obtient alors :

$$[I][X] = [M^{-1}][F] \quad (\text{II.66})$$

Finalement on obtient :

$$[X] = [M^{-1}] [F] \quad (\text{II.67})$$

Avec :

$[I]$: La matrice identité.

$[M^{-1}]$: La matrice inverse de la matrice $[M]$.

Chapitre III

III.1. Introduction :

Le transfert de chaleur est l'un des modes les plus connus d'échange d'énergie, il intervient naturellement à chaque fois qu'un gradient de température existe à l'intérieur d'un système ou lorsque deux systèmes à températures différentes sont mis en contact [1], [18].

Le fonctionnement de tout dispositif électromagnétique engendre très souvent des phénomènes d'échauffement qui, suivant les applications, peuvent être bénéfiques ou néfastes. Sauf que dans la plus part des cas, la montée de la température de ces dispositifs constitue une contrainte sévère à leur bon fonctionnement [11].

III.2. Concepts fondamentaux :

III.2.1. Surfaces isothermes :

C'est le lieu des points ayant à chaque instant la même température, c'est-à-dire la température est uniforme sur les surfaces perpendiculaires à la direction de l'écoulement de la chaleur. Sachant qu'en régime variable, ces surfaces isothermes sont mobiles et invariantes en régime permanent [19].

III.2.2. Champ de température :

Considérons un point $M(x, y, z)$ dans un milieu solide, liquide ou gazeux, on donc définir la température en fonction des coordonnées du point et du temps $T(M, t)$ [11].

III.2.3. Flux thermique et densité de flux thermique:

Considérons un planché chauffé de manière uniforme sur toute sa surface S , et soit dQ la quantité de chaleur échangée entre ce planché chauffé et l'air ambiant pendant le temps dt , on appelle :

Chapitre III : Etude des phénomènes thermiques et mécaniques

➤ Flux thermique : La puissance échangée par la surface S du planché.

$$\phi = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{III.1})$$

➤ Densité de flux thermique : La puissance échangée par unité de surface du planché.

$$\varphi = \frac{dQ}{S.dt} \quad (\text{III.2})$$

D'où :

$$\varphi = \frac{\phi}{S} \quad (\text{III.3})$$

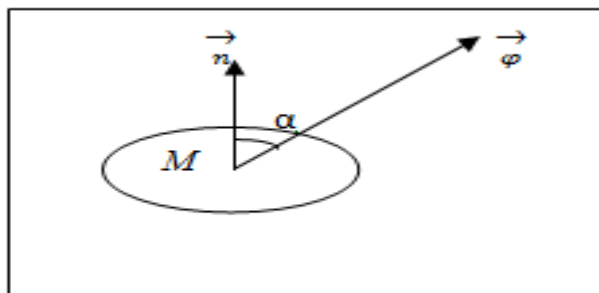


Figure III.1 : Densité locale du flux thermique

Avec :

$\vec{\varphi}$: Densité locale du flux thermique au point M .

α : Angle entre le vecteur $\vec{\varphi}$ et la normale.

D'une façon générale, pour un élément de surface dS orienté par sa normale unitaire \vec{n} , le flux élémentaire $d\phi$ peut être considéré comme le flux d'un vecteur $\vec{\varphi}$ à travers dS .

$$d\phi = \vec{\varphi} \cdot \vec{n}.dS = |\varphi| \cos \alpha.dS \quad (\text{III.4})$$

Chapitre III : Etude des phénomènes thermiques et mécaniques

Le vecteur $\vec{\varphi}$ caractérise en chaque point du milieu la direction, le sens et l'intensité du flux de chaleur.

III.2.4. Source interne:

Une source interne est définie par la puissance thermique P qu'elle produit par unité de volume du milieu. Dans le cas général P est fonction de la position du point, de la température et du temps $P(M, T, t)$ [11], [18].

III.3. Différents modes de transfert de chaleur:

Le transfert de chaleur se fait généralement par trois modes : conduction, convection et rayonnement.

III.3.1. Transfert par conduction :

La conduction est un phénomène au moyen duquel la chaleur s'écoule à l'intérieur d'un milieu (solide, liquide ou gazeux), d'une région à haute température vers une autre à basse température ou entre différents milieux mis en contact. Dans l'écoulement de chaleur par conduction, l'énergie se propage par contact directe des molécules sans un déplacement appréciables de ces dernières [11], [19].

La loi fondamentale de la conduction thermique a été énoncée par *Fourier* en 1822 et elle est donnée par [20] :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \vec{\nabla} T \quad (\text{III.5})$$

Avec :

$\vec{\varphi}$: Densité de flux thermique [W/m^2].

T : Température [K].

λ : Conductivité thermique [$\text{W}/\text{m.k}$]

Il est donc clair qu'en tout point d'un milieu isotrope, la densité du flux thermique du milieu instantanée est proportionnelle à la conductivité thermique du milieu et au gradient de la température [18].

Chapitre III : Etude des phénomènes thermiques et mécaniques

Par convention, $\vec{\varphi}$ est compté positivement dans le sens d'écoulement de la chaleur, c'est-à-dire vers les températures décroissantes, $\vec{\nabla}T$ est un vecteur porté par le même axe, mais de sens contraire à $\vec{\varphi}$, d'où le signe moins de la loi de *Fourier* [18],[19].

III.3.2. Transfert par convection :

Le transfert de la chaleur entre matériau solide et fluide est désigné selon le mode de l'écoulement du fluide par convection libre et convection forcée [8]. Lorsque le fluide est mis en mouvement par des courants dus à la variation de densité résultant du gradient de température, on dit que la convection est libre par contre si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, telle une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé convection forcée [19].

Le flux de chaleur transmis par convection entre une surface et un fluide peut être évalué par la loi de *Newton* :

$$\phi = h_c \cdot A \cdot (T_s - T_\infty) \quad (\text{III.6})$$

Avec:

ϕ : Flux de chaleur par convection [W].

A : L'aire de surface de transmission de chaleur [m²].

T_s : Température de la surface d'échange

T_∞ : Température du fluide sur la frontière.

h_c : Coefficient d'échange de chaleur par convection [W/m².k].

III.3.3. Transfert par rayonnement :

Le rayonnement est un mécanisme par lequel la chaleur se transmet d'un corps à haute température vers un autre à basse température lorsque ces corps sont séparés dans l'espace ou même lorsqu'un vide existe entre eux [19], [20].

Chapitre III : Etude des phénomènes thermiques et mécaniques

Le transfert de chaleur par rayonnement se fait spontanément par interaction naturelle des atomes qui perdent une partie de leur énergie cinétique transportée au moyen d'une onde électromagnétique appelée *onde thermique* [18], [19].

Les échanges de chaleur surfaciques par rayonnement sont donnés par la loi de *Boltzmann* suivante :

$$\varphi = \sigma_B \cdot \varepsilon \cdot (T^4 - T_\infty^4) \quad (\text{III.7})$$

Avec :

σ_B : Constante de *Boltzmann* [W/m².k].

ε : Coefficient d'émission ou émissivité.

T_∞ : Température du milieu extérieur [k].

III.4. Production d'énergie thermique :

L'énergie est une grandeur conservative : on ne peut donc ni la créer ni la faire disparaître, il est en revanche possible de transformer une forme énergétique en une autre. Par exemple, les dynamos et les moteurs réalisent réciproquement la conversion énergie mécanique-énergie électrique.

L'énergie thermique d'un système peut trouver sa source dans les réactions chimiques exothermiques, dans les réactions nucléaires, dans la dissipation de l'énergie mécanique (frottement) ou électrique (effet Joule) et dans l'absorption du rayonnement électromagnétique (chauffage solaire, four micro-ondes...)[20].

On caractérise ce phénomène en tout point A d'un système par la donnée d'une grandeur intensive $p_{th}(A)$, appelée production volumique d'énergie thermique (exprimée en [W/m³]).

Chapitre III : Etude des phénomènes thermiques et mécaniques

La puissance thermique produite à chaque instant dans un domaine D de volume V est donnée par la relation suivante.

$$P_{th} = \iiint_V p_{th}(A) dV \quad (\text{III.8})$$

Remarque1: La production volumique est une grandeur algébrique, elle est donc comptée positivement dans le cas où elle est absorbée et comptée négativement dans le cas où elle est cédée exemple dans réaction chimique endothermiques, on parle alors dans ce cas de *puits d'énergie thermique*.

Remarque2 : La production volumique par effet Joule dans un matériau de résistivité ρ_e parcouru par un courant de densité \vec{j} s'écrit comme suit :

$$P_{th} = \rho_e j^2 \quad (\text{III.9})$$

III.5. Equation de bilan thermique:

Un système qui produit de l'énergie thermique en stocke une partie et en échange une autre avec son environnement ce que nous traduisons par la relation très simple :

$$Production = Stockage + Echanges$$

Dans cette équation de bilan thermique, le terme *production* peut évidemment être nul : on dit alors que le système est *passif*, le terme *stockage* est nul en régime stationnaire, aussi, si le système est passif, le terme *échanges* est alors également nul, ce qui veut dire que les entrées d'énergie compensent les sorties [20].

Remarque 3 : Il est impossible d'isoler parfaitement un système, la paroi *adiabatique* n'existe pas, il est en revanche légitime, dans certains cas, de négliger le flux thermique traversant une surface par rapport à celui qui traverse d'autres surfaces, une hypothèse trop utilisée dans les problèmes thermiques [18], [20].

Chapitre III : Etude des phénomènes thermiques et mécaniques

Pour associer une forme mathématique à cette équation de bilan de l'énergie thermique, on doit considérer D continu de volume V indéformable et fixe, limité par la surface S , on note aussi par U l'énergie interne considérée.

En absence de déplacement, donc de travail, les considérations précédentes conduisent à écrire ce qui suit [20].

$$\underbrace{\iiint_V p_{th} dV}_{\text{la puissance produite}} = \underbrace{\frac{dU}{dt}}_{\text{la puissance stockée}} + \underbrace{\iint_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} ds}_{\text{la puissance échangée}} \quad (\text{III.10})$$

Cette équation peut être réécrite en fonction du champ de température à l'intérieur de D selon :

$$\iiint_V p_{th} dV = \iiint_V \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv + \iint_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} ds \quad (\text{III.11})$$

Avec:

ρ : La masse volumique [Kg/m^3].

C_p : La capacité calorifique ou la chaleur massique [$\text{J}/\text{Kg.K}$].

III.6. La conduction thermique :

III.6.1. Mécanisme du transfert conductif:

Le point de vue microscopique consiste à examiner les caractéristiques du transfert entre *porteurs* du milieu considéré, en intégrant celle-ci sur toutes les circonstances d'interaction, on parvient à l'effet global c'est-à-dire macroscopique.

- Dans les solides non métalliques, la conduction est assurée par le transfert de proche en proche de l'énergie de vibration des atomes, le porteur associé à ces ondes longitudinales et transversales est appelé *le phonon*.

Chapitre III : Etude des phénomènes thermiques et mécaniques

- Dans les métaux, l'échange vibrationnel est nettement dominé par le transfert de l'énergie de translation des électrons libres. Les bons conducteurs thermiques sont donc généralement des métaux et des alliages métalliques.
- Dans un gaz macroscopiquement immobile, la conduction thermique s'effectue par l'échange d'énergie de translation auquel il faut ajouter l'énergie rotationnelle et vibrationnelle dans le cas de molécules, notamment à haute température.
- Pour les liquides, deux mécanismes de propagation sont proposés : transfert collisionnel lié aux mouvements de faible amplitude effectués par chaque molécule autour de sa position d'équilibre et passage d'une molécule dans un trou(ou déplacement des trous) lorsque celle-ci peut rompre l'attraction des molécules voisines.

III.6.2. Equation de la propagation de l'énergie thermique par conduction :

Le flux thermique à l'intérieur d'un corps est lié à l'existence d'un gradient de température, comme on a déjà vu précédemment, *Fourier* a proposé de relier ces deux grandeurs par la relation suivante :

$$\vec{\varphi} = - \lambda \vec{\nabla} T \quad (\text{III.12})$$

En remplaçant le terme du flux exprimé par la relation (III.12) dans l'équation générale de bilan de l'énergie thermique exprimé précédemment par la relation (III.11), on aboutit à :

$$\iiint_V p_{th} dV = \iiint_V \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV - \iint_S \lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} dS \quad (\text{III.13})$$

Le théorème d'*Ostrogradski* permet de transformer l'intégrale de surface en une intégrale de volume, on obtient alors :

$$\iiint_V p_{th} dV = \iiint_V \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv - \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) dV \quad (\text{III.14})$$

Chapitre III : Etude des phénomènes thermiques et mécaniques

Les bornes de cette intégrale étant quelconques, on aboutit alors à l'expression suivante :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) = p_{th} \quad (\text{III.15})$$

La conductivité thermique est uniforme, on obtient alors l'équation de propagation suivante :

$$\Delta T - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{P_{th}}{\lambda} \quad (\text{III.16})$$

Avec:

Δ : Représente l'opérateur *Laplacien*.

$a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$, appelé la diffusivité thermique .

- En coordonnées cartésiennes (x, y, z) 3D, l'équation de propagation (III.16) s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{P_{th}(x,y,z)}{\lambda} \quad (\text{III.17})$$

- En coordonnées cylindriques (r, z) 2D l'équation de propagation (III.16) s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{P_{th}(r,z,t)}{\lambda} \quad (\text{III.18})$$

- En coordonnées sphérique (T dépend de r et de t), l'équation de propagation (III.16) s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{P_{th}(r,t)}{\lambda} \quad (\text{III.19})$$

III.6.3. Conditions aux limites :

Si le milieu étudié est constitué de plusieurs sous-domaines de caractéristiques différentes, il faut évidemment écrire et résoudre l'équation de bilan thermique local de chacun de ces sous-ensembles, on peut citer l'exemple d'un fil électrique, dont l'âme est en fil de cuivre tressé et le revêtement en matière plastique. Les solutions obtenues seront donc liées par ce que l'on appelle des conditions aux limites [18], [20].

Résoudre un problème de transfert thermique, c'est déterminer à tout instant le champ de température $T(x, y, z, t)$ et celui de la densité de flux $\vec{\varphi}(x, y, z, t)$. Pour cela, il faut établir les équations de bilan thermique local et écrire les conditions aux limites spatiales et temporelles. En régime temporel, il est évidemment et nécessaire de connaître la distribution de la température initiale $T(x, y, z, 0)$ pour prédire l'évolution du système étudié, et dans certains cas où la distribution de la température finale $T(x, y, z, \infty)$ est imposée, pour la prédire dans les autres cas, on résout l'équation de bilan thermique en régime stationnaire. Les conditions aux limites spatiales se résument principalement à l'écriture de la continuité de la densité de flux à la frontière du système étudié [18], [20].

Pour le contact entre deux milieux macroscopiquement immobiles, considérons un point M de la frontière de ces deux milieux repérés par les indices 1 et 2, les conditions limites spatiales rendent compte de la continuité du vecteur densité de flux et de la température en ce point, ce qui nous permet d'écrire que :

$$\vec{\varphi}_1 = \vec{\varphi}_2 \quad (\text{III.20})$$

D'où :

$$-\lambda_1 \vec{\nabla} T_1 = -\lambda_2 \vec{\nabla} T_2 \quad (\text{III.21})$$

Et :

$$T_1(M, t) = T_2(M, t) \quad (\text{III.22})$$

III.7. Comportement élastique de la matière

Prenons le cas d'un barreau encastré au niveau de l'une de ces extrémités. Une force perpendiculaire à la direction du barreau appliquée sur l'extrémité libre engendre un champ de déplacement et de déformation tel que à :

$x = 0$: On enregistre une déformation maximale et un déplacement minimal.

$x = L$: On enregistre une déformation minimale et déplacement maximal.

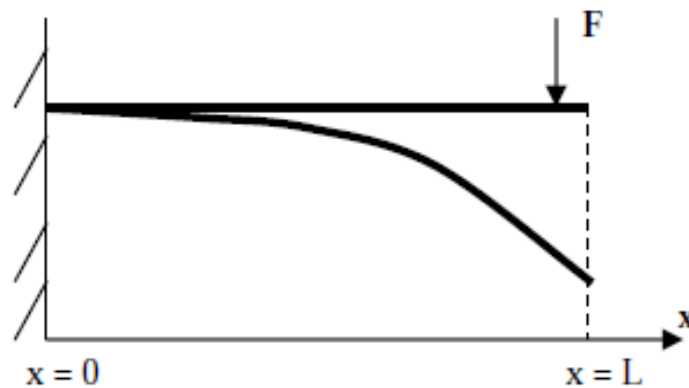


Figure III.2 : Déformation d'un barreau suivant sa direction longitudinale.

Le comportement élastique de toute structure dépend des propriétés mécaniques de son matériau. Ces propriétés sont données par les coefficients de Young et de Poisson [12].

Considérant un barreau de longueur « l », à qui une force f est appliqué dans la direction longitudinale. Dans le cas où la force tend à allonger le barreau, on parle de traction. Dans le cas où elle tend à le comprimer, on parle de compression [21].

Soumis à cette force, le barreau subit une déformation définie par :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{III.23})$$

Avec :

ε : La déformation longitudinale.

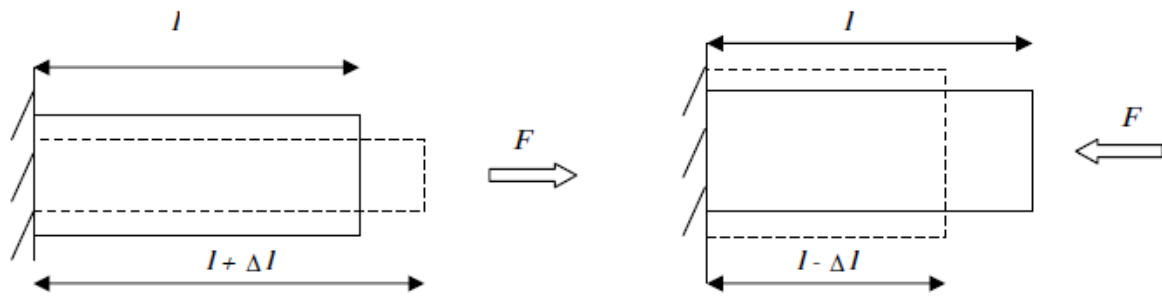


Figure III.3 : Déformation d'un barreau suivant sa direction longitudinale.

En désignant par S la section du barreau.

On définit la contrainte de traction par :

$$\sigma = \frac{F}{S} \text{ (N/m}^2\text{)} \quad (\text{III.24})$$

En 1678, en s'appuyant sur l'expérimentation, *Robert HOOKE*, établit que dans le domaine élastique linéaire, l'allongement d'une structure dans une direction donnée est proportionnel à la contrainte appliquée dans cette direction. La loi de *HOOKE* prend alors la forme suivante :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (\text{III.25})$$

Avec :

E : Module de Young appelé aussi le module d'élasticité.

En effet, le coefficient caractérise la raideur de la matière. A contrainte égale, un matériau ayant un module d'élasticité élevé subira une déformation plus faible qu'un matériau ayant un module d'élasticité petit. Ainsi, pour une contrainte donnée, ce module permet de calculer la déformation dans la direction du chargement qu'on note : « ε ». Le coefficient de Poisson « ν » permet de caractériser la contrainte de la matière perpendiculairement à la direction de l'effort appliquée. Il a été mis en évidence analytiquement par Denis POISSON [12], [21].

Chapitre III : Etude des phénomènes thermiques et mécaniques

La relation qui lie la déformation transverse et la déformation longitudinale est donnée par :

$$\varepsilon_{perpendiculaire} = \nu \cdot \varepsilon_{parallèle} \quad (\text{III.26})$$

III.8. Déformation plane :

On parle de déformation plane si on considère que les contraintes appliquées dans le plan (x,y) n'entraîne pas de déformations suivant l'axe Z et on a :

$$\varepsilon_{zz} = 0 \text{ et } \sigma_{zz} \neq 0.$$

La relation déformation contrainte s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{1}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

III.9. Contrainte plane :

Le modèle contrainte plane est une approximation qui convient aux plaques minces sollicitées dans leur plan par des forces de surface et de volume.

Toute contrainte suivant l'axe (oz) est considérée nulle ($\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$) et la relation déformation-contrainte devient [12].

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.28})$$

Chapitre IV

IV.1.Introduction :

Avec les progrès observés dans le domaine de la modélisation numérique, il est possible aujourd'hui d'avoir dans certains cas un traitement réaliste des phénomènes physiques. Ainsi plusieurs phénomènes sont traités par simulation numérique.

Les outils de prototypage virtuel permettent d'accélérer l'étape d'évaluation de la fiabilité et d'identification des zones critiques. Les tests expérimentaux permettent de compléter et de vérifier les résultats de simulation, et la précision reste toujours essentielle. Il est souvent nécessaire de mettre des hypothèses, dans le but d'une part de simplifier le modèle tout en gardant une évaluation suffisamment proche et représentative de la réalité.

Pour la détection des zones les plus fragiles et l'observation des plus importantes déformations causés par l'augmentation de la température dans un boîtier PBGA, ce qui se traduit par l'étude du phénomène couplé thermique-mécanique, le logiciel *COMSOL* a bien répondu à ce besoin, une brève présentation de ce logiciel sera alors donnée dans ce qui suit.

IV.2.Présentation du logiciel *COMSOL* (la partie thermique) :

Le logiciel multi physique *FEMLAB* (*Finite Element Method Laboratory*) introduit de nouvelles interfaces pour le transport de chaleur par conduction et convection. Et comme les transferts de chaleur sont impliqués dans presque tous les phénomènes physiques, *COMSOL* élargit des capacités déjà offertes par son logiciel de modélisation *FEMLAB* et crée un module entièrement dédié à l'étude des phénomènes thermiques, le module Transfert de Chaleur. Ce module propose de nouveaux modes d'application comme le rayonnement de surface à surface, l'écoulement non-isotherme, couches très conductrices et même équation de la chaleur dans le domaine biologique. Pour effectuer un travail sur *COMSOL* on procède comme suit :

- Dans les premières étapes se fait la classification des EDPs par module d'ingénieur, le choix du dimensionnement, le choix du régime ainsi que la fonction de base comme le résumant les images de la figure IV.1.

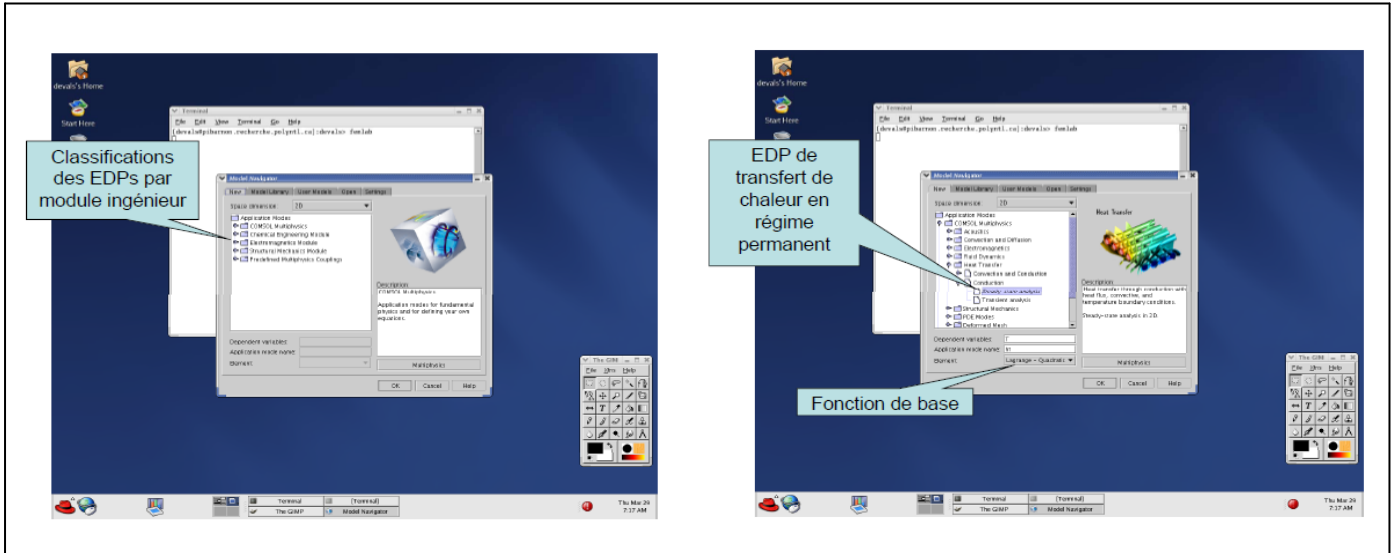


Figure IV.1 : Le choix des EDPs, le dimensionnement et le régime sur *COMSOL*.

- Une fois la classification des EDPs, le dimensionnement et choix du régime sont faits, on accède à l'environnement de travail pour le tracé des géométries voulues.

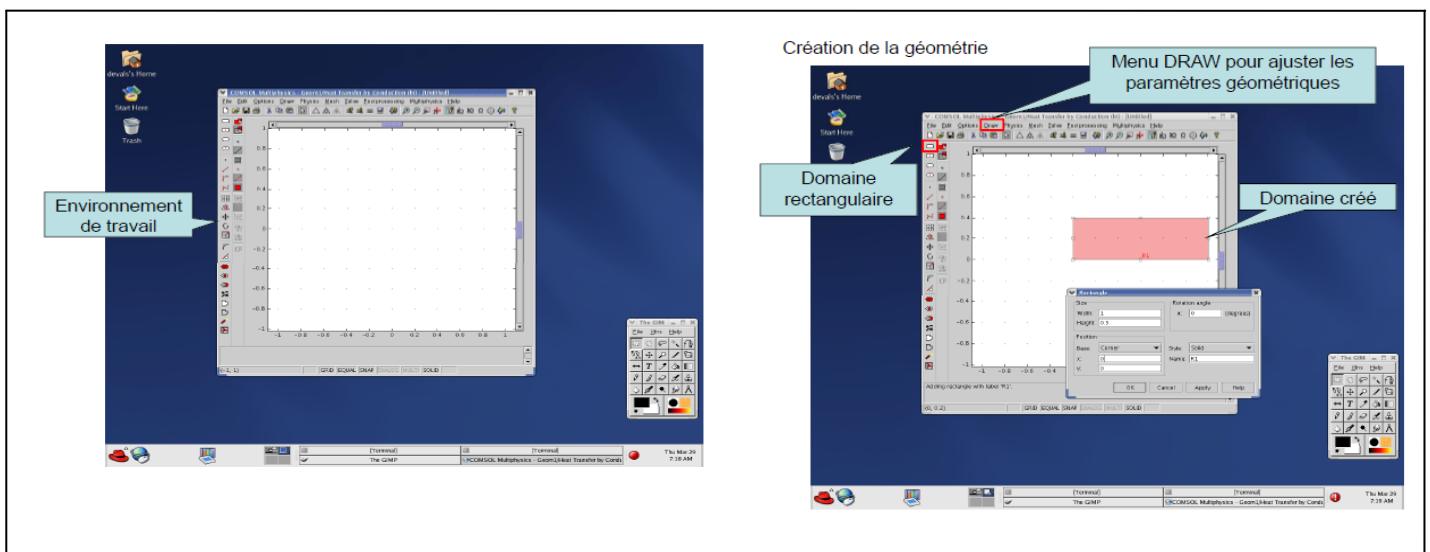


Figure IV.2 : Environnement de travail de *COMSOL* et des géométries.

- Les étapes suivantes consistent à ajuster les constantes physiques et le paramétrage des modèles physiques et des conditions aux limites comme le montrent les images des figures IV.3 et IV.4.

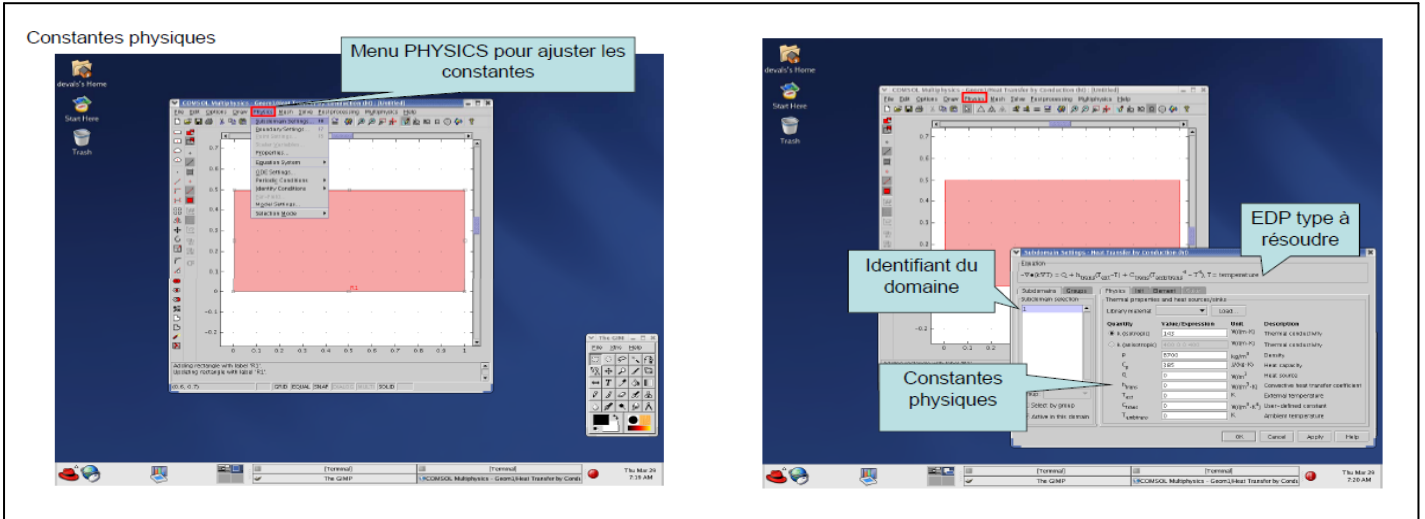


Figure IV.3

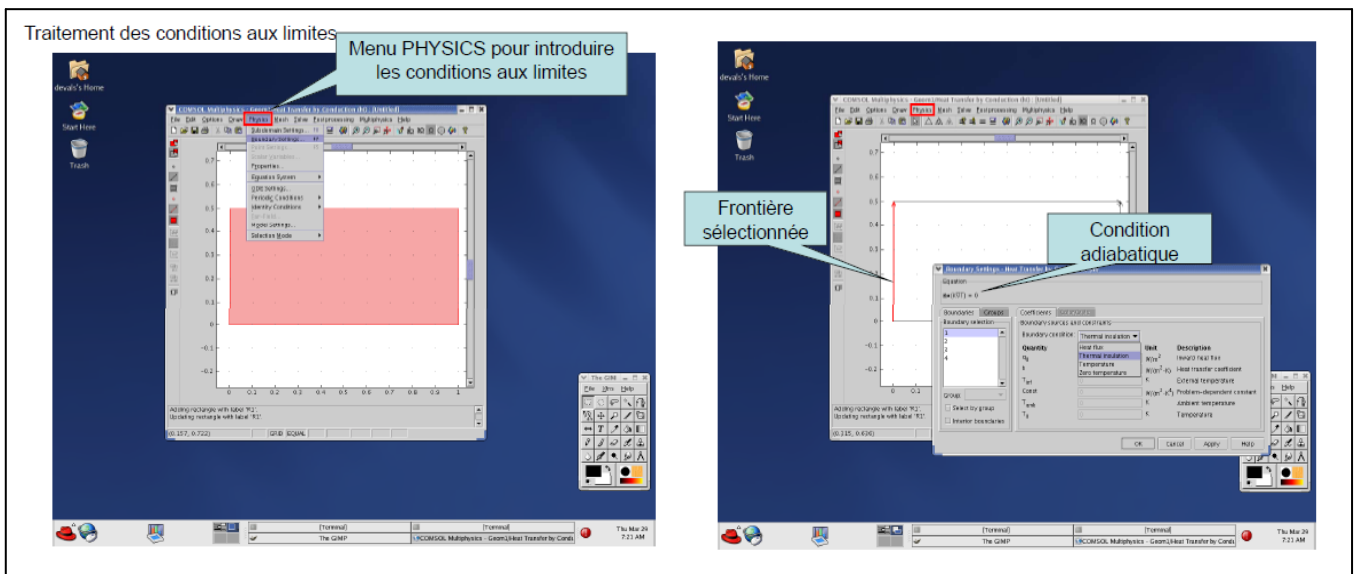


Figure IV.4

Figure IV.3 et figure IV.4 : Paramétrage des modèles physiques et conditions aux limites.

- Maintenant on arrive à l'étape de la création du maillage.

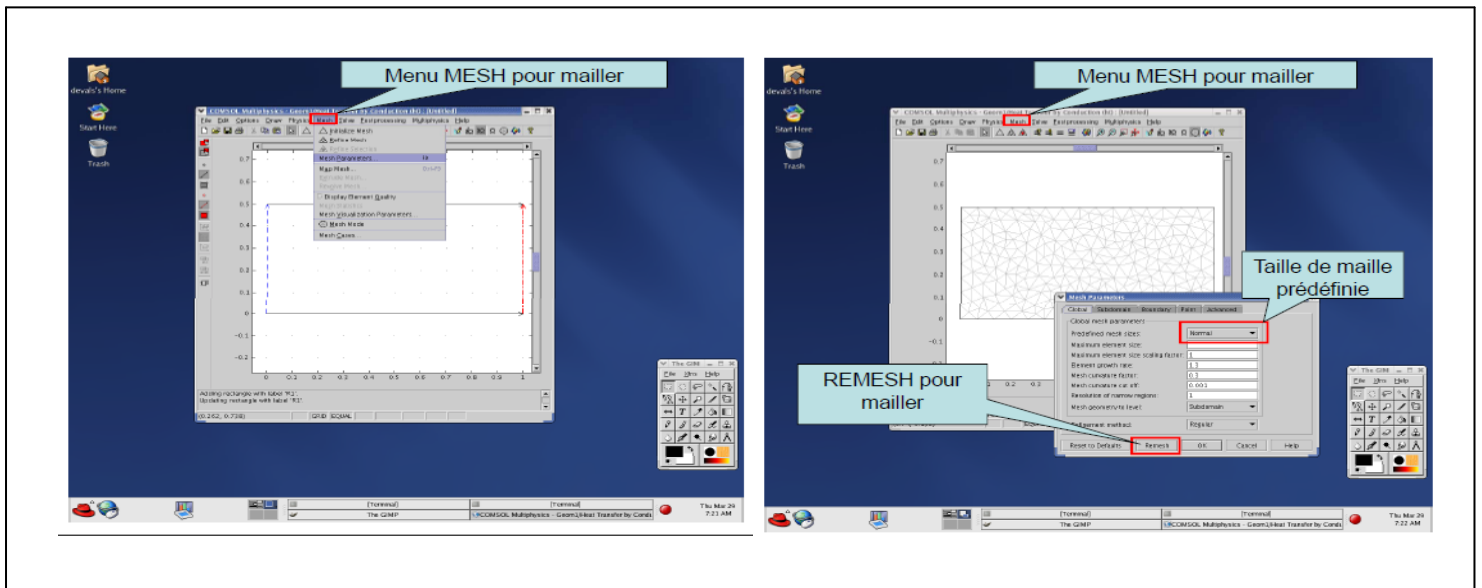


Figure IV.5 : Création du maillage.

- L'avant dernière étape est l'étape de la résolution.

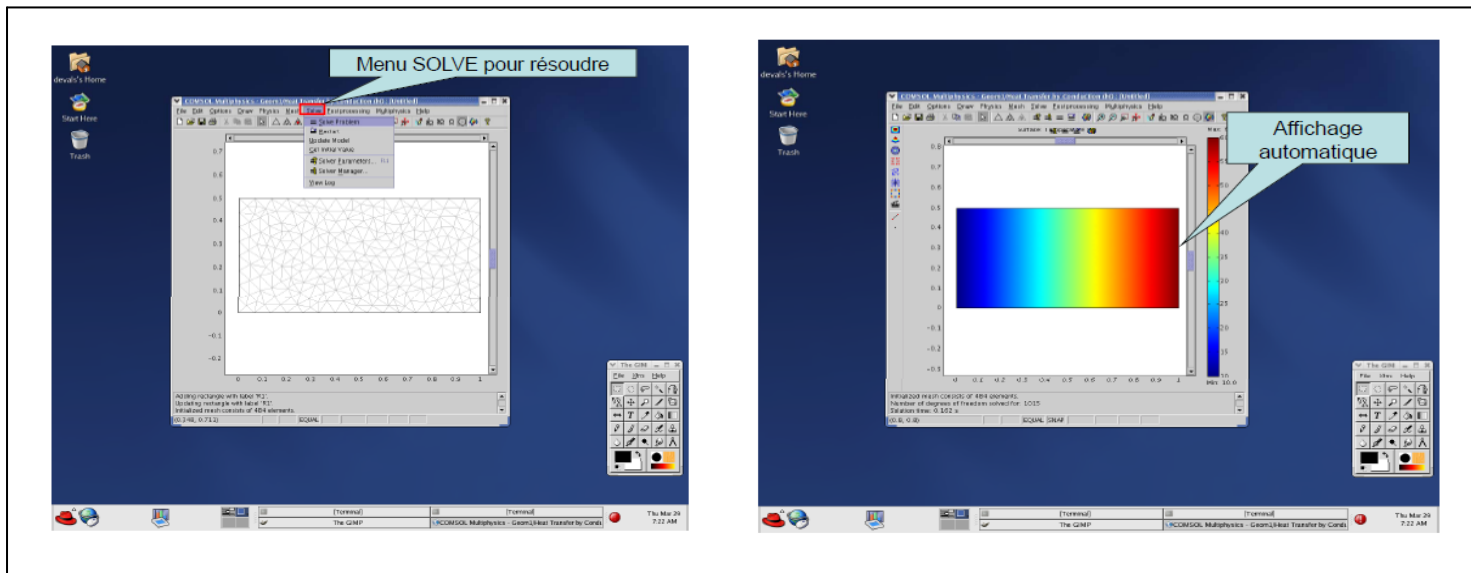


Figure IV.6 : L'étape de la résolution.

- La dernière étape est appelée le *poste traitement* et qui consiste à l'analyse des résultats.

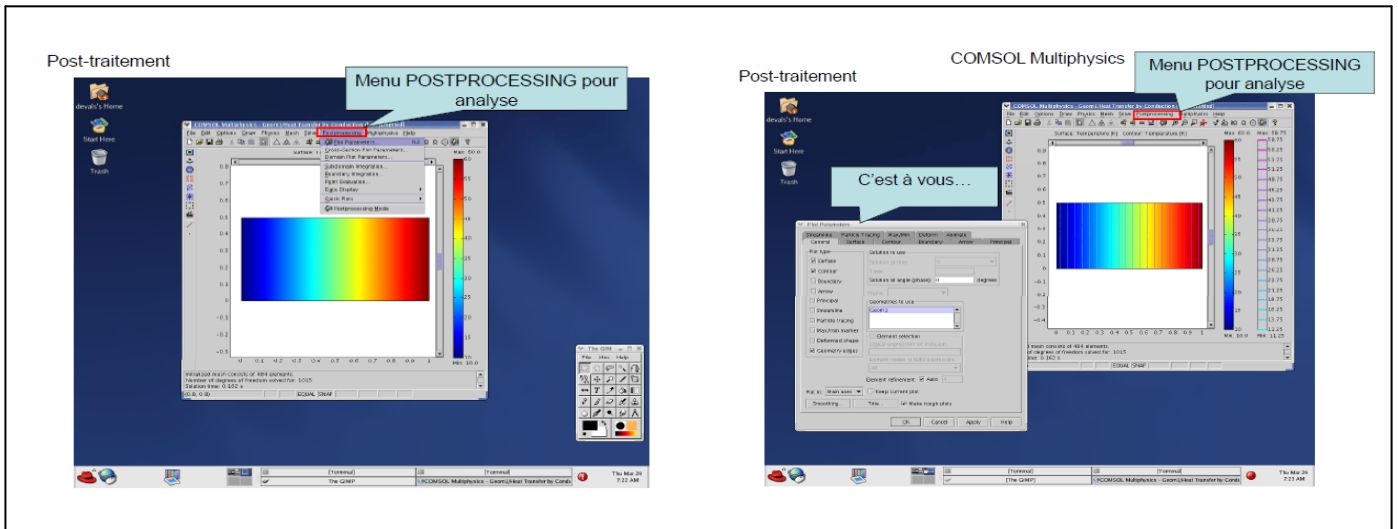


Figure IV.7 : L'analyse des résultats.

IV.3. Les différents modes de couplage :

Deux principaux modes de couplage des équations thermique et mécanique peuvent être utilisés : le model de couplage faible ou indirect et le model de couplage fort ou direct.

IV.3.1. Mode de couplage faible ou indirect :

Suivant le principe de cette modélisation, les problèmes thermique et mécanique sont résolus séparément, et le couplage se fait donc par le transfert des données de l'un des deux problèmes vers l'autre.

IV.3.2. Mode de couplage fort ou direct :

Le mode de couplage direct consiste à résoudre simultanément les deux équations. Il peut être avantageusement utilisé dans le cas de problèmes fortement couplés. Ce model présente l'avantage de ne pas nécessiter le transfert des données.

Dans le cas présent à étudier, le mode de couplage est le mode faible.

IV.4. Applications et résultats :

IV.4.1. Hypothèses simplificatrices:

Pour le model à étudier:

- On ne considère qu'un quart du plan du système à étudier.
- On le considère constituer d'un circuit imprimé (PCB) constitué lui aussi de cinq couches ; deux en FR4 ; deux en PVC et une en Cuivre, une puce en Silicium, des billes d'interconnexions de (95.5Sn-3.8Ag-0.7Cu), un substrat en BT, une résine en époxy.

IV.4.2. Le dispositif à étudier :

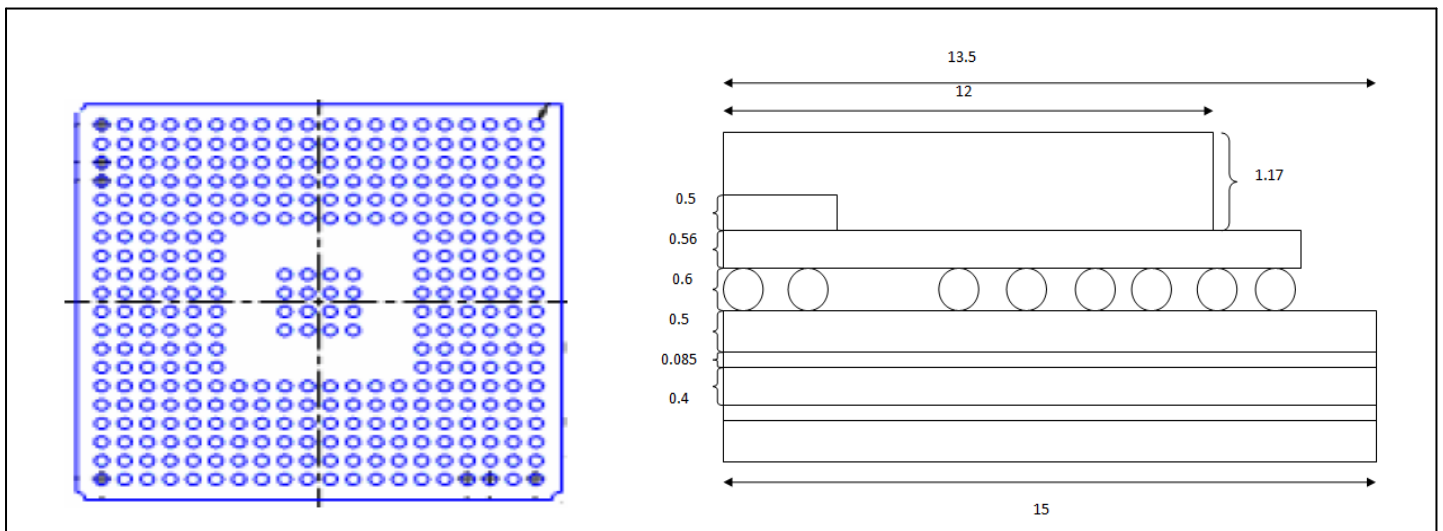


Figure IV.8 : structure et dimensions du système à étudier.

IV.4.3. Propriétés physiques des matériaux à utiliser :

Comme tout dispositif électronique, un boîtier de type PBGA utilise une combinaison de plusieurs matériaux ayant de différentes propriétés thermique et mécanique. Dans ce qui suit seront données les caractéristiques des différents milieux du dispositif à étudier.

1. Le FR4 :

- $C_p = 1369.$
- $\lambda = 0.3.$
- $\rho = 1900.$
- $E = 22 \text{ e}^9.$
- $\nu = 0.28.$
- $a = 18 \text{ e}^{-6}.$

2. Le PVC :

- $C_p = 1046.$
- $\lambda = 0.1.$
- $\rho = 1760.$
- $E = 2.9 \text{ e}^9.$
- $\nu = 0.26.$
- $a = 100 \text{ e}^{-6}.$

3. Le cuivre Cu :

- $C_p = 385.$
- $\lambda = 400.$
- $\rho = 8700.$
- $E = 110 \text{ e}^9.$
- $\nu = 0.35.$
- $a = 17 \text{ e}^{-6}.$

4. L'alliage (95.5Sn-3.8Ag-0.7Cu) :

- $C_p = 150.$
- $\lambda = 50$
- $\rho = 9000.$
- $E = 30 \text{ e}^9.$
- $\nu = 0.35.$
- $a = 21 \text{ e}^{-6}.$

5. Le substrat en BT :

- $C_p = 703$.
- $\lambda = 1.38$.
- $\rho = 2203$.
- $E = 22 \text{ e}^9$.
- $\nu = 0.28$.
- $a = 18 \text{ e}^{-6}$.

6. Le silicium Si :

- $C_p = 703$.
- $\lambda = 163$.
- $\rho = 2330$.
- $E = 131 \text{ e}^9$.
- $\nu = 0.3$.
- $a = 2.8 \text{ e}^{-6}$.

7. L'Epoxy :

- $C_p = 1300$.
- $\lambda = 0.8$.
- $\rho = 1760$.
- $E = 15.5 \text{ e}^9$.
- $\nu = 0.25$.
- $a = 15 \text{ e}^{-6}$.

Avec :

C_p : La capacité calorifique [W/Kg. K].

λ : La conductivité thermique [W/m. K]

ρ : La densité volumique [Kg/ m³].

E : Module de Young [pa].

ν : Coefficient de Poisson.

a : Coefficient de dilatation thermique [1/K].

IV.4.4. L'étude du problème thermique seul :

Pour observer la répartition de la température dans le dispositif à étudier, et pour distinguer les zones où les valeurs de cette température sont plus importantes par rapport à d'autres, on s'intéresse dans un premier cas à l'étude du problème thermique seul.

IV.4.4.a. Les conditions aux limites :

Pour le choix des conditions aux limites, on considère qu'il y a un flux de chaleur sur toutes les frontières extérieurs et qu'il y a une continuité sur les frontières intérieur.

Après avoir introduit la géométrie et caractéristiques thermiques de notre dispositif, on distingue le maillage éléments finis donné par la figure IV.9 donnée ci-dessous.

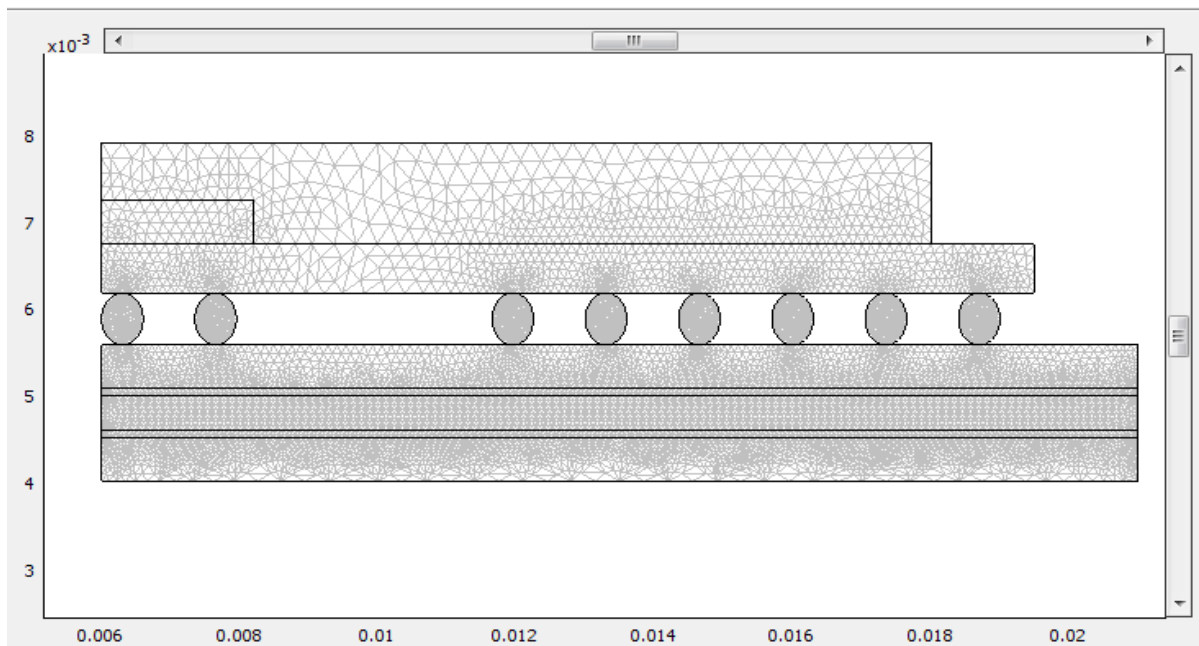


Figure IV.9. Maillage élément finis.

Une fois le problème est résolu, on observe la répartition de la température dans notre structure à des temps différents, pour ceci, les figures qui suivent nous aident à mieux visualiser ces répartitions dans les différentes zones du système.

VI.4.4.b. Interprétations et résultats :

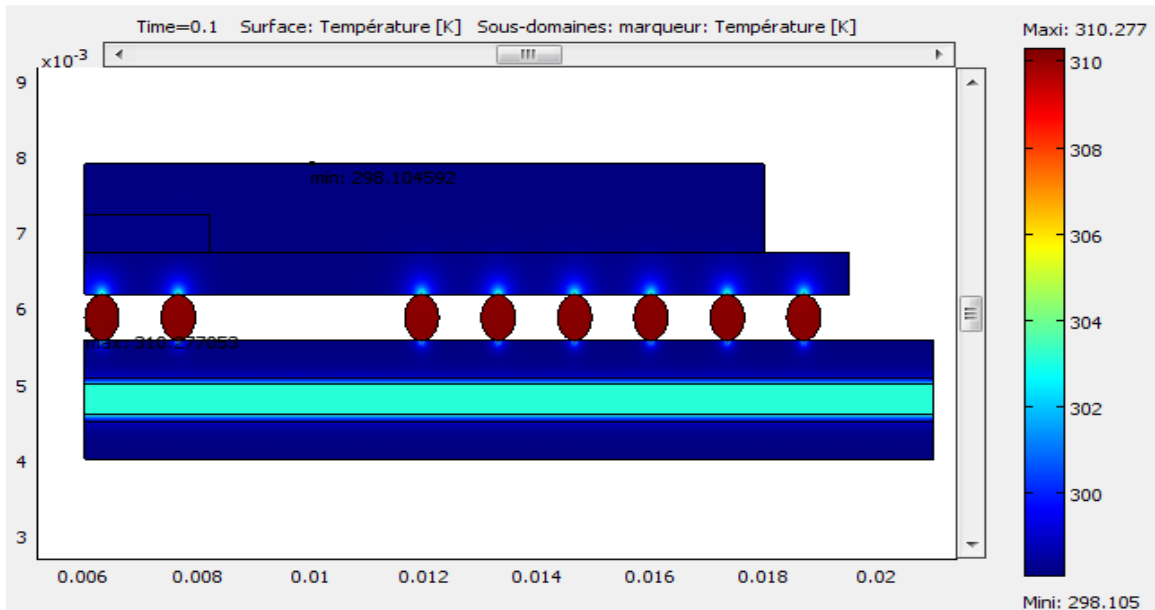


Figure IV.10. La répartition de la température à $t= 0.1s$.

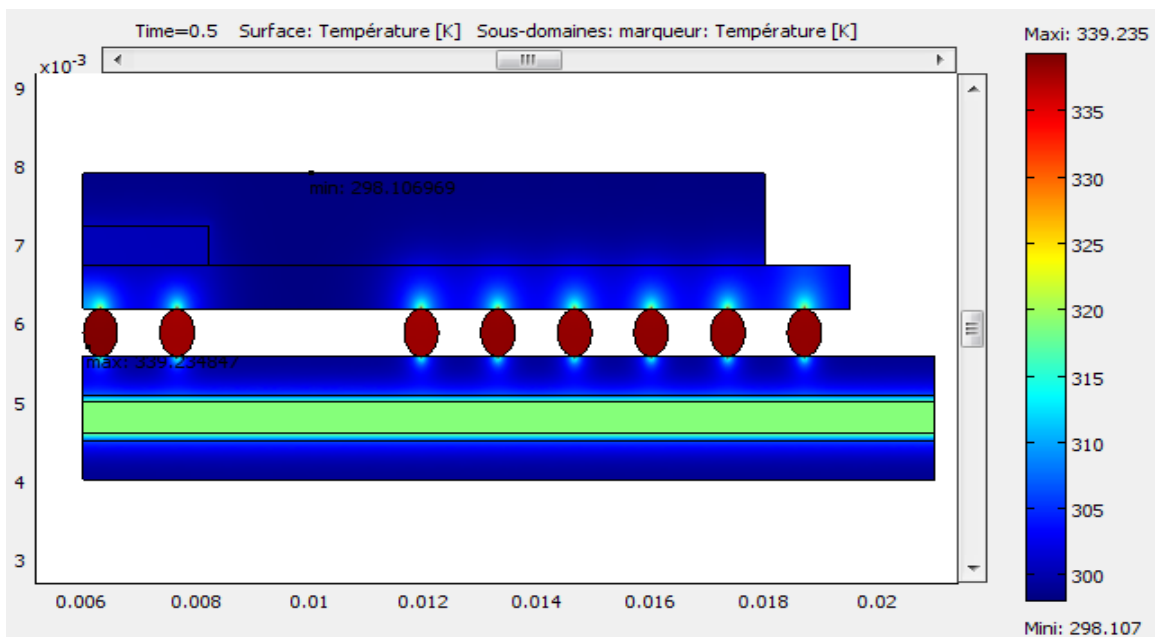
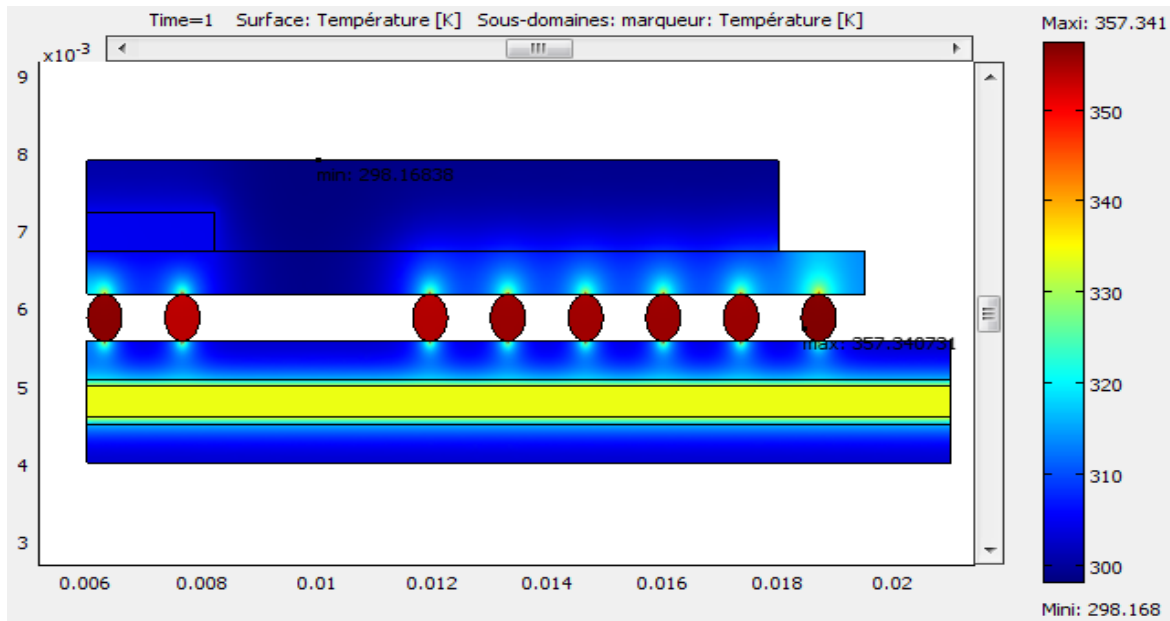
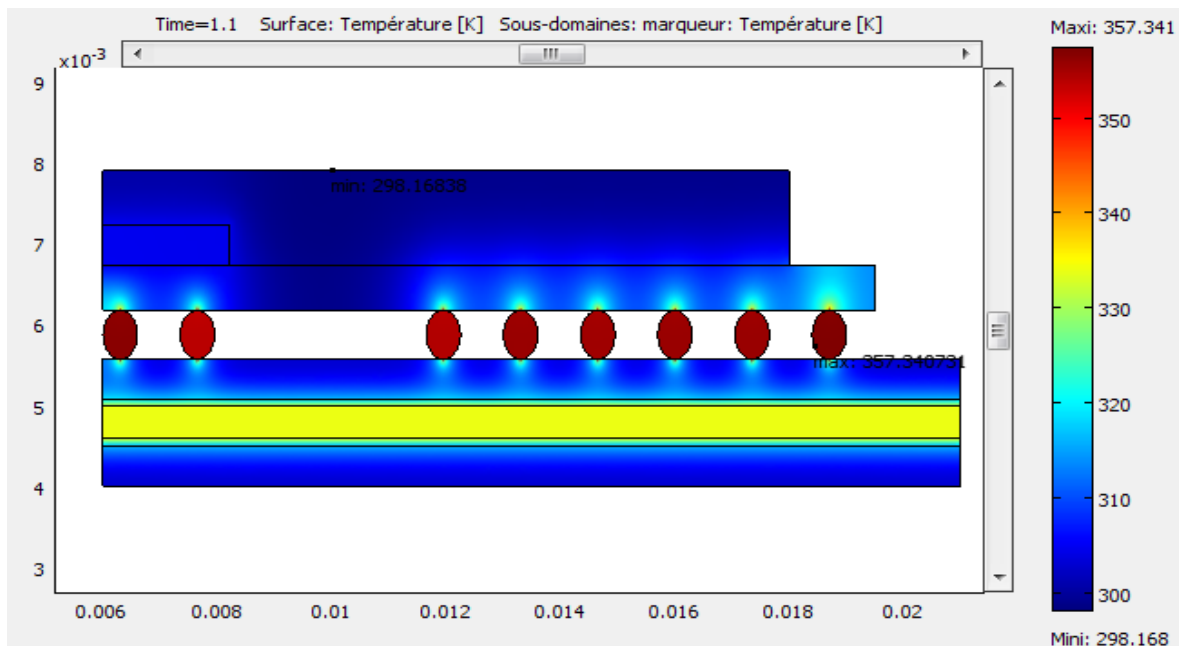


Figure IV.11. La répartition de la température à $t=0.5 s$.

Figure IV.12. La répartition de la température à $t = 1$ s.Figure IV.13. La répartition de la température à $t = 1.1$ s.

La répartition de la température pour des temps différents ($t=0.1$ s, $t=0.5$ s, $t=1$ s et $t=1.1$ s) reste la même, en effet, elle est toujours plus élevée au niveau des billes d'interconnexion, assez considérable dans le cuivre et moins importantes dans le restant de la structure. Ce qui change sont les valeurs de ces températures prises à des temps différents, à $t= 0.1$ s, la température maximum est $T_{\max}=310.277$ K, elle passe à $T_{\max}=339.25$ K pour $t=0.5$ s jusqu'à $T_{\max}=357.341$ K pour $t=1$ s et reste inchangée pour $t=0.1$ s.

Pour mieux voir cette augmentation de la température en fonction du temps puis sa stabilité à partir de $t=1s$, on trace deux courbes pour un point situé à l'intérieur de l'une des billes d'interconnexion, les résultats sont les suivants.

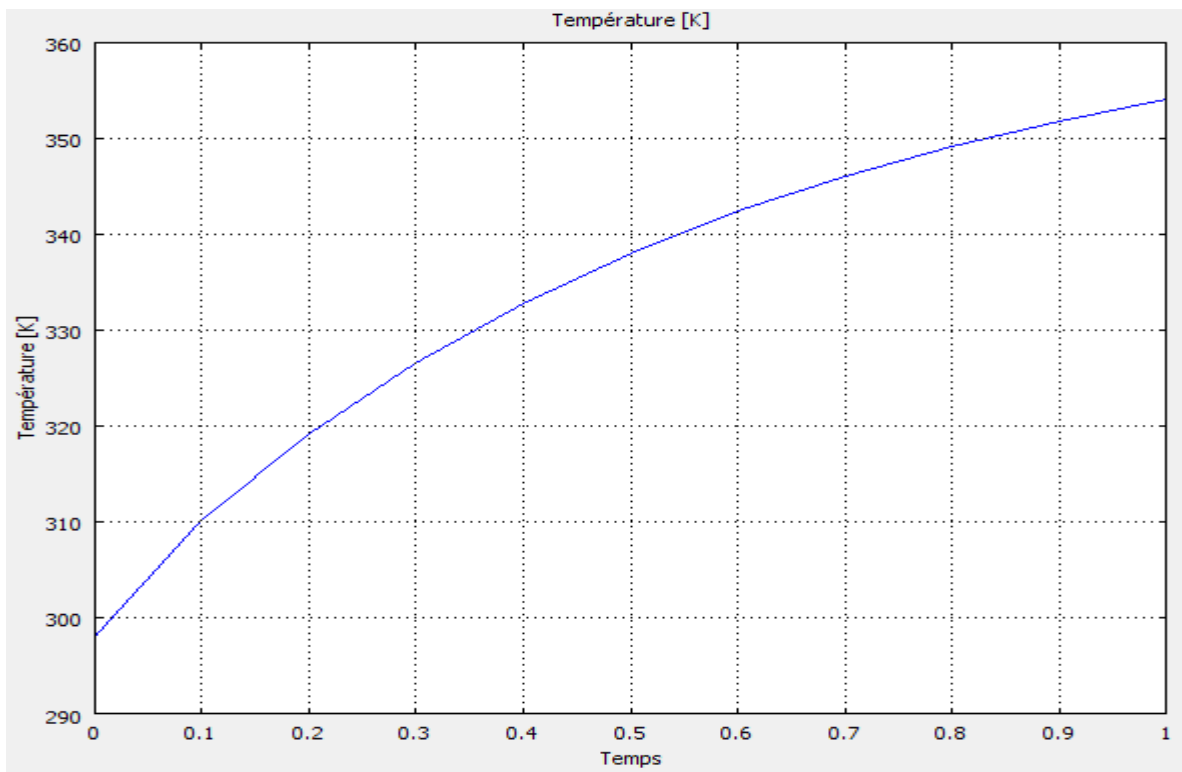


Figure IV.14. Variation de la température en fonction du temps pour $t = [0-1]$ s.

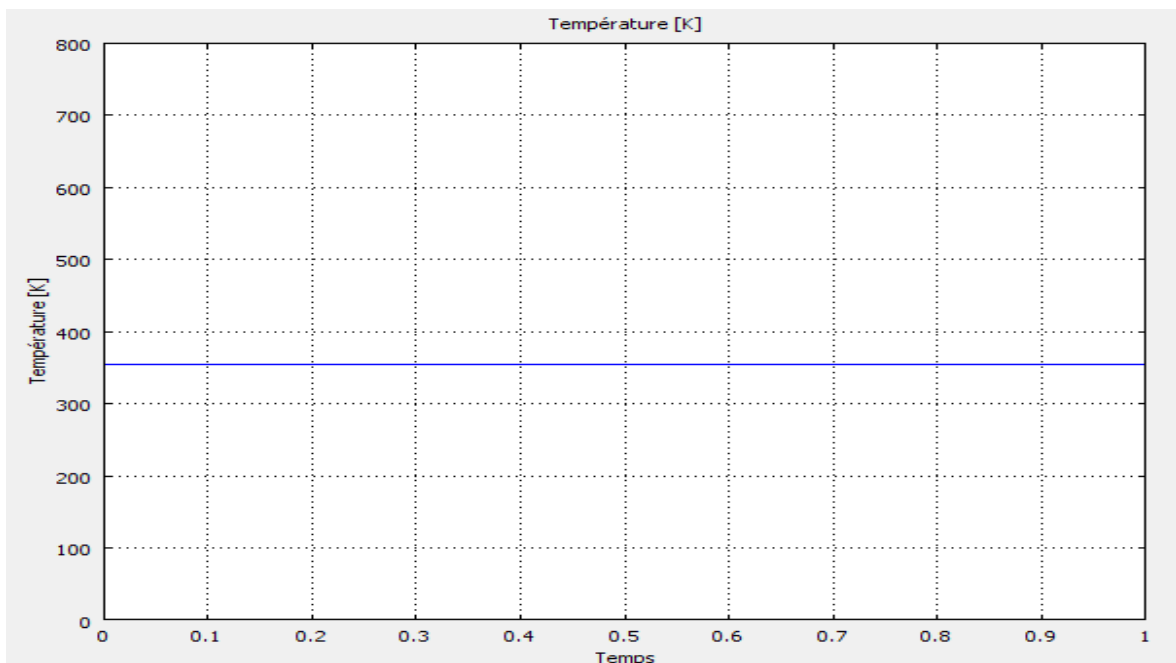


Figure IV.15. Variation de la température en fonction du temps pour $t = [1-2]$ s.

La figure IV.14 montre que la température augmente en fonction du temps lorsque ce dernier se situe dans l'intervalle [0-1] mais cette augmentation cesse à $t=1s$ pour se stabiliser à une valeur $T = 357.341 K$ comme on peut le voir sur la figure IV.15 ; ce qui s'explique par l'atteinte du régime stationnaire.

IV.4.5. L'étude du problème couplé thermo- mécanique:

IV.4.5.a. Les conditions aux limites :

Dans ce deuxième cas, on considère que les billes, la partie inférieure du BT et la partie supérieure du circuit imprimé sont laisser libres tandis que le restant de la structure reste encastéré.

IV.4.5.b. Interprétations et résultats :

La figure ci-dessous nous montre la déformation de la structure.

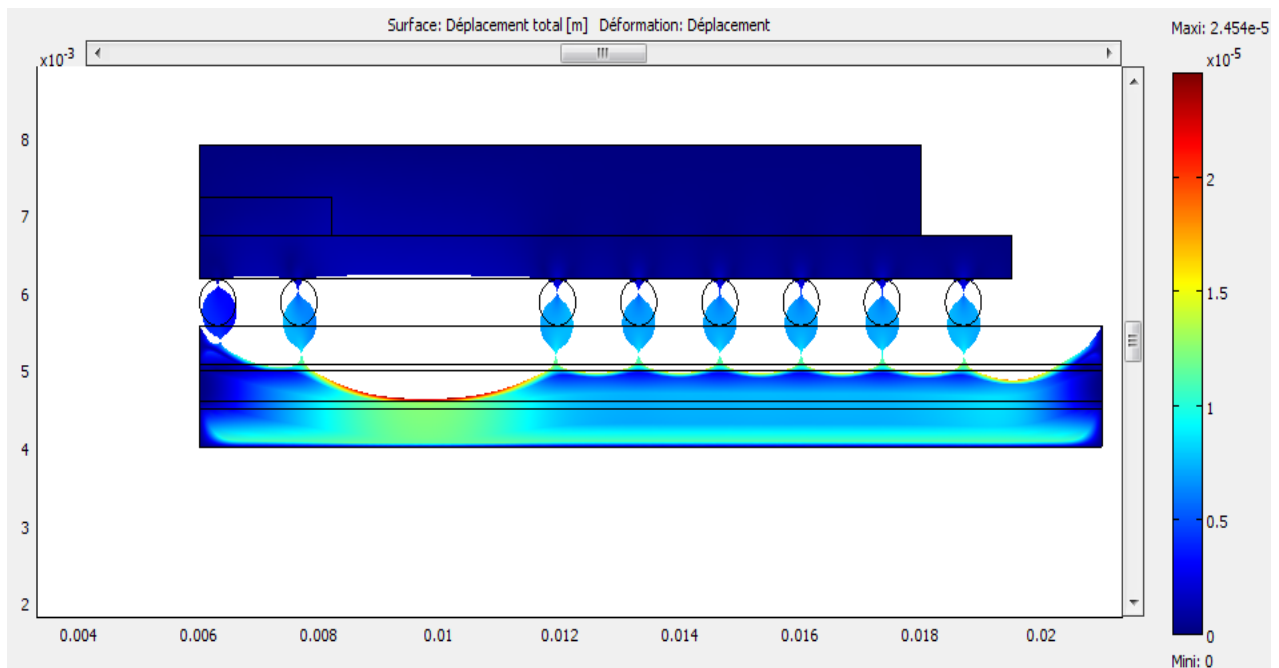


Figure IV.16 : La déformation de la structure.

On voit sur la figure IV.16 que le maximum de déformation est atteint au niveau des billes d'interconnexion et sur la partie supérieure du circuit imprimé, la température maximum aussi a été atteinte dans les mêmes zones car les billes sont une source de chaleur, ce qui fait que la contrainte est a son maximum dans les mêmes zones ce qui explique le résultat précédent.

Pour mieux voir cette déformation, on peut la visualiser en surface sur une seule bille (il est plus intéressant de choisir la bille qui se déforme le plus), puis sur la partie supérieure du circuit imprimé comme le montre les figures suivantes, on peut distinguer plusieurs déformations principales, et voila quelques unes :

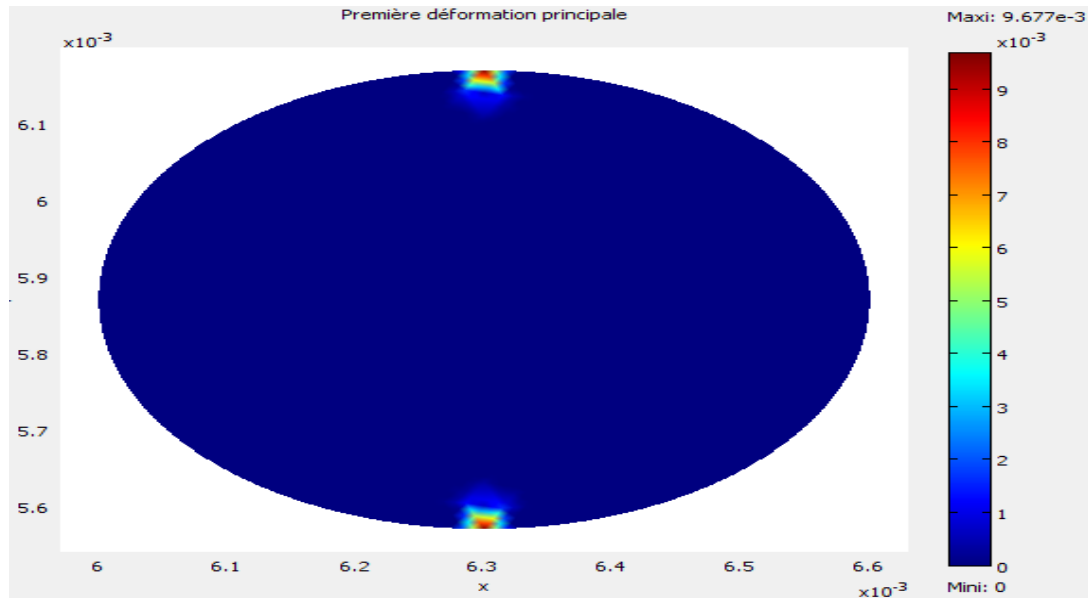


Figure IV.17. La première déformation principale sur une bille.

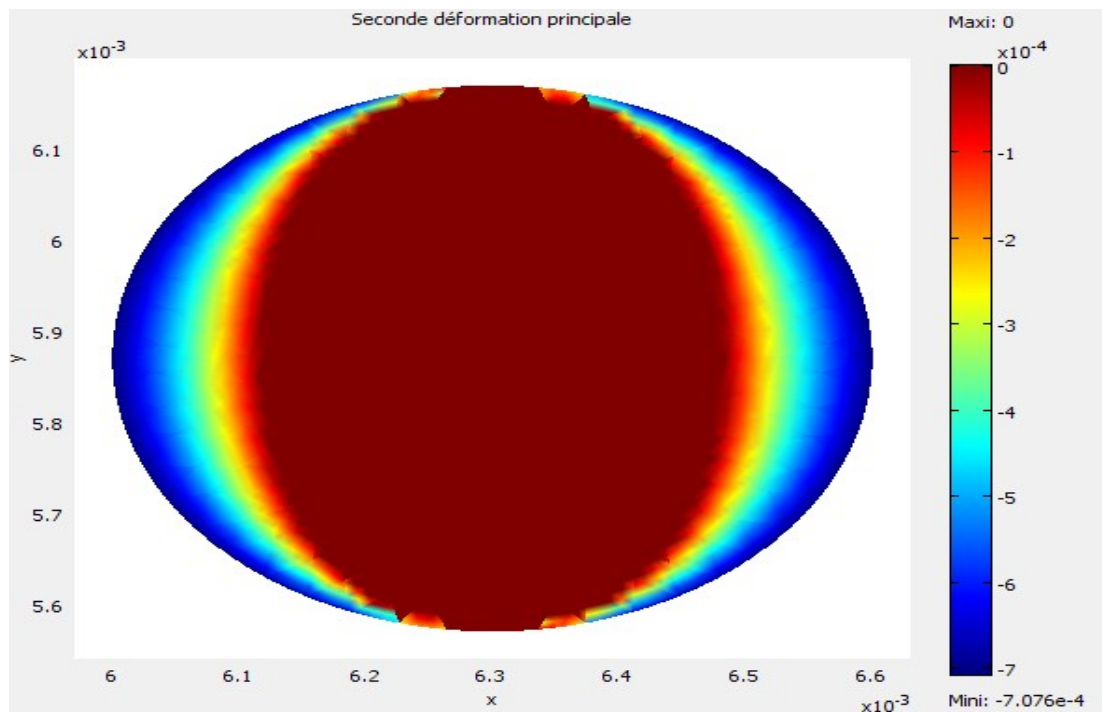


Figure IV.18. La deuxième déformation principale sur une bille.

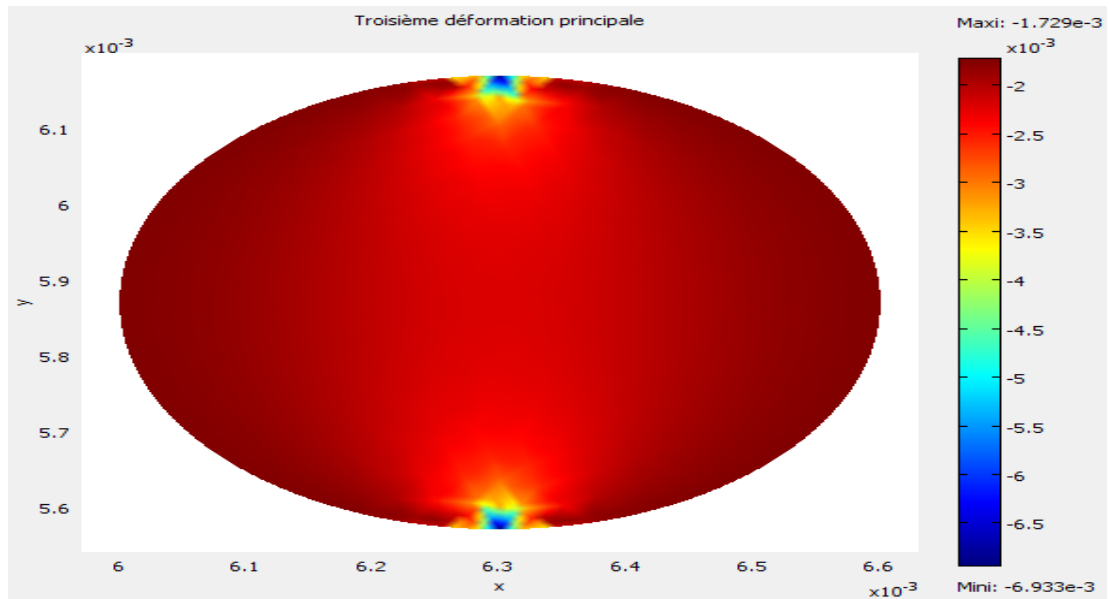


Figure IV.19 : La troisième déformation principale sur une bille.

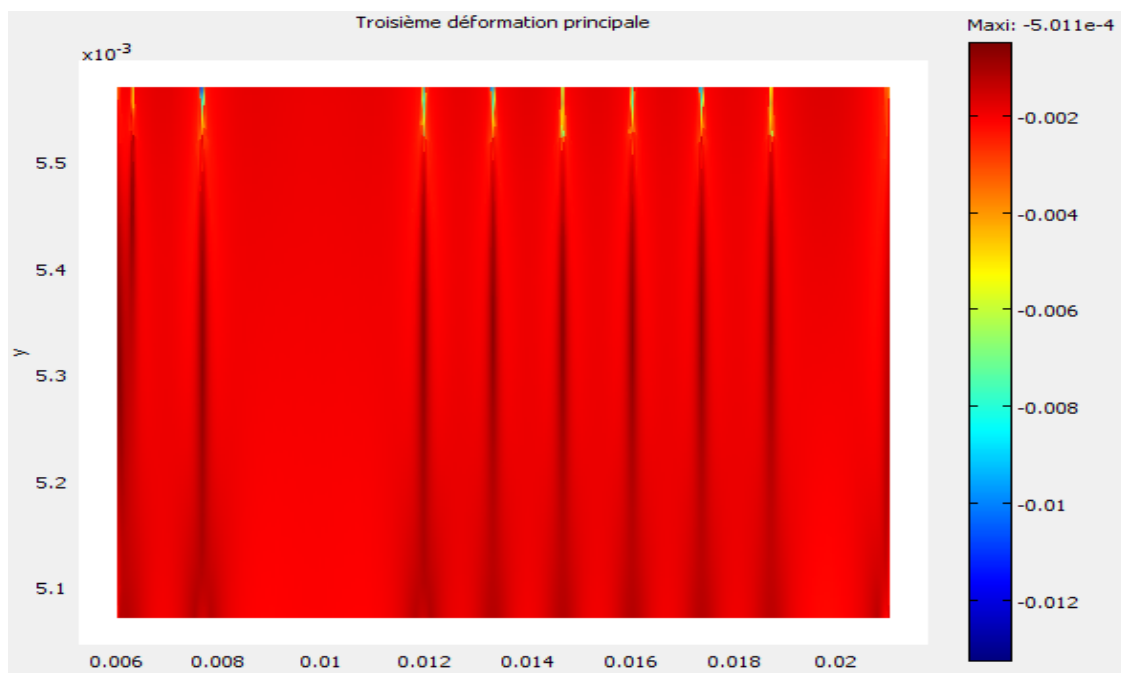


Figure IV.20 : La troisième déformation principale sur la partie supérieure du circuit imprimé (FR4).

Les figures IV.17, IV.18 et IV.19 montrent que la troisième déformation principale est plus importante que la deuxième, aussi la cette dernière est plus importante que la première, il est évident que l'accumulation de ces déformations conduit avec le temps et après de divers utilisations à la défaillance de l'appareil électronique.

La déformation est aussi important sur le FR4 du coté supérieur du circuit imprimé comme le montre assez bien l'image de la figure IV.20 pour lequel on s'est contenté de prendre directement la troisième déformation principale. Il est très clair que les endroits les plus déformés sont ceux situés tout en bas des billes, ce qui s'explique par l'effet de la contrainte appliquée sur les billes.

Conclusion
Générale

Conclusion générale

L'objectif de ce travail était la visualisation et la détection des zones les plus conforter à des déformations thermomécaniques pour une structure *PBGA*, pour ceci, on a suivi la méthode scientifique qui est la recherche bibliographique, le choix d'un logiciel qui répondait au besoin tracé était aussi principal.

Les résultats de la simulation ont été sensiblement liés aux choix des conditions aux limites ainsi qu'aux propriétés physiques des matériaux utilisés, la raison pour laquelle il a fallu récolter des données correctes et exactes en sachant les tirer à partir des documents publiés et en s'approchant des spécialistes du domaine.

L'étude du problème thermique seul dans un premier cas à beaucoup aidé à mieux comprendre les résultats du problème couplé thermo- mécanique, en effet, Les défaillances thermomécaniques sont le résultat d'une augmentation des contraintes et des déformations sous l'effet de chargements thermiques et de la dissipation thermique interne du boîtier, La déformation plastique est atteinte lorsque la déformation dépasse la zone élastique d'un matériau. Au dessous de cette limite, le matériau est en zone élastique et au dessus, il est en zone plastique. La déformation plastique n'affecte pas directement le fonctionnement électrique, cependant, l'accumulation continue et excessive de cette déformation plastique par des chargements cycliques pourrait conduire à la fissuration des couches de matériaux et entraîner la défaillance du composant.

Références

Bibliographiques

Références bibliographiques

[1] SAMED BERNAT

«Etude prédictive de fiabilité de nouveaux concepts d'assemblage pour des 'system-in-package' hétérogènes »

Thèse de Doctorat en Electrotechnique, université Bordeaux I, 2011.

[2] NORCHENE JEMAI

«Développement de la technique de sérigraphie pour la formation de billes de connexions inférieures à 100 µm pour l'assemblage 3D : optimisation et étude de fiabilité »

Thèse de Doctorat en Microélectronique, université Toulouse III, 2010.

[3] KRISHNA RAJARAM TUNGA

«Experimental and theoretical assessment of PBGA reliability in conjunction with field-use conditions »

Master of science in mechanical engineering, Georgia institute of technology , 2004.

[4] ANDREW MAWER

«Plastic Ball Grid Array (PBGA) »

Semiconductor Technical Data, MOTOROLA.

[5] GERADRD MEUNIER, RENE LE DOEUF, JEAN- CLAUD SABONNADIERE

« Electromagnétisme et problèmes couplés »

Hermès Science Publication, Paris, 2002.

[6] CEDRIC LE COQ

« Prédiction de la fiabilité de composants électroniques de type WL-CSP soumis à des sollicitations mécaniques »

Thèse de Doctorat en Génie Mécanique et Systèmes, université François- Rabelais, 2010.

[7] « Plastic Ball Grid Array »

Application Report, Texas Instruments, SSZA002, AUGUEST 2009.

[8] « Introduction to the Blastic Ball Grid Array (PBGA) »

Freescale Semiconductor, 2008.

Références Bibliographiques

[9] MICHEL RAPPAZ, MICHEL BELLET, MICHEL DEVILLE

« Modélisation numérique en science et génie des matériaux »

Presses polytechniques et universitaires romandes, CH-1015 Lausanne, 1998, première édition.

[10] OULD OUALI SAMY HASSANI

« Intégration de l'hystérésis magnétique dans un calcul éléments finis en vue de l'estimation des pertes dans les tôles des machines électriques »

Thèse de Doctorat en Electrotechnique, université Mouloud MAMMERY de Tizi-Ouzou, 2010.

[11] NAIT KADI LARBI, NAIT OUSLIMANE AHMED

« Mise en œuvre du couplage magnétodynamique pour l'étude de la répartition de la température en utilisant la méthode des éléments finis : Application aux dispositifs de chauffage par induction et lanceurs électromagnétiques »

Mémoire d'ingénieur en Electrotechnique, Université Mouloud MAMMERY, Tizi-Ouzou ,2002.

[12] NAIT OUSLIMANE AHMED

« Etude tridimensionnelle de structure micro-électromécanique (MEMS) en régime dynamique »

Mémoire de magister en Electrotechnique, Université Mouloud MAMMERY, Tizi-Ouzou ,2008.

[13] GOURI DHATT, JEAN-LOUIS BATOZ

« Modélisation des structures par éléments finis »

Edition Hermès, Paris, 1990,1995.

[14] FAYCAL REJIBA

« Modélisation de la propagation des ondes électromagnétiques en milieux hétérogènes –application au Radar Sol-»

Thèse de doctorat en Géophysique Appliquée, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 2002.

[15] GOURI DHATT, GILBERT TOUZOT, EMMANUEL LEFRANCOIS

« Méthode des éléments finis »

Edition Lavoisier, Paris, 2005.

Références Bibliographiques

[16] L.HAOUDI, M.KAOUDJ

« Etude théorique et expérimentale d'une machine linéaire à induit conducteur »

Mémoire d'ingénieur en Electrotechnique, Université Mouloud MAMMERRI, Tizi-Ouzou, 2009.

[17] « Numerical approach on thermal characteristics for PBGA based on integrating 3D model »

Document interne, 2011.

[18] J.F.SACADURA

« Initiation aux transferts thermiques »

Edition Lavoisier, Paris, 1993.

[19] F.KREITH

« Transmission de chaleur et thermodynamique »

Masson et C^{ie} Editeurs, Paris, 1967.

[20] BRUNO CHERON

« Transferts thermiques »

Ellipses, édition marketing S.A, Paris, 1999.

[21] YVES DEBARD

« Elasticité »

Institut universitaire de technologie du Mans, département de génie mécanique et productique, 2011.