RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI TIZI OUZOU

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master
en
Mathématiques
Option
Analyse Mathématique et Applications

Thème

Fonctions sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique et les polynômes balancials.

Présenté par
Melle OULD ALI Louiza
Dirigé par
Mr. GOUBI Mouloud

Devant le jury

Mr. GOUBI Mouloud	**MCB**	U.M.M.T.O	**Encadreur**
Mr. MENGUELTI Ali	**MAA**	U.M.M.T.O	**Expert**
Mr. AICHE Farid	**MCB**	U.M.M.T.O	**Expert**

Promotion : 2020/2021.

Remerciements

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à M.GOUBI Mouloud, pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissante pour la confiance qu'il m'a accordée.J'aimerais aussi le remercier pour ses précieux conseils qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Mes sincères remerciements vont aux membres de jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant de l'examiner et de l'enrichir par leurs propositions et remarques.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents et tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Introduction **1**

1 Aperçu sur les fonctions génératrices **2**
1.1 Introduction 2
1.2 Fonction génératrice des nombres 2
1.3 Exemples 2
1.3.1 les nombres de Fibonacci 2
1.3.2 les nombres de Lucas 3
1.3.3 Les nombres de Bernoulli 4
1.3.4 Les nombres d'Euler 4
1.4 Fonction génératrice des polynômes 5
1.4.1 Exemple 5
1.5 Produit de Cauchy 6
1.5.1 Application aux polynômes de Bernoulli 6
1.5.2 Application aux nombres d'Euler 7

2 Nombres balancials **9**
2.1 Introduction 9
2.1.1 Fonction génératrice des nombres balancials 11
2.1.2 Quelques propriétés des nombres balancials 12
2.1.3 Fonctions associées aux nombres balancials 13

3 Les polynômes balancials **19**
3.1 Fonctions génératrices des polynômes balancials 19
3.1.1 Lien entre les nombres et polynômes balancials 22
3.2 Formule de Binet 23
3.2.1 Exemple d'application 23
3.3 Quelques propriétés des polynômes balancials 24

4 Les nombres et polynômes balancials de Lucas **29**
4.1 Nombres balancials de Lucas 29
4.1.1 Fonction génératrice des nombres balancials de Lucas 29
4.1.2 La formule de Binet des nombres balancials de Lucas 30

4.1.3 Quelques propriétés hybrides nombres balancials de Lucas 31
4.2 Polynômes balancials de Lucas 32
4.2.1 Fonctions génératrices des polynômes balancials de Lucas 32
4.2.2 Formule de Binet 33
4.2.3 lien entre les nombres et les polynômes balancials de Lucas 34
4.2.4 Quelques propriétés des polynômes balancials de Lucas 34

5 Polyômes balancials et balancials de Lucas **37**
5.1 Introduction 37
5.2 Conclusion 45

Bibliographie **45**

Introduction

Depuis toujours les suites des nombres ont été le centre d'intérêt pour beaucoup de mathématiciens, comme la célèbre suite de Fibonacci et et les nombres de Bernoulli. Dans le but de trouver les solutions de l'équation

$$1 + 2 + 3 + ... + (n-1) = (n+1) + ... + (n+r)$$

dite diaphantienne, les deux mathématiciens indiens Behera et Panda ont introduit une suite de nombres qu'ils ont nommé les "balancing numbers" qu'on a tenté de traduire par "nombres balancials". Ces nombres sont générés par plusieurs façons dont on verra quelques unes dans ce travail. Ces nombres permettent aussi d'établir un lien entre des suites connues bien avant comme les nombres de Fibonacci et les nombres de Lucas.

Dans ce travail, nous développons l'article récent de M.Goubi : Relating Balancing Polynomials to Lucas-Balancing Polynomials via Bernoulli Numbers.

Dans le premier chapitre on donne un aperçu sur les fonctions génératrices. En général ces fonctions peuvent générer des suites de nombres si elles sont des fonctions à une seule variable et elles génèrent des polynômes si elles sont des fonctions à plusieurs variables.

Dans le chapitre deux, comme terrain d'applications des fonctions génératrices ; on étudie les nombres et les balancials. Ce qui nous permettera de trouver la formule générale de ces derniers et développer quelques propriétés non triviales avec les outils élémentaires d'Analyse.

Dans le troisième chapitre nous élargissons notre étude aux polynômes balancials et leurs propriétés grâce à la formule de Binet.

Le quatrième chapitre est consacré à une variété des nombres et des polynômes balacials. Où on va donner un aperçu sur les nombres et polynômes balancials de Lucas.

Dans le dernier chapitre nous établissons le lien entre les polynômes balancials et les balancials de Lucas.

Chapitre 1

Aperçu sur les fonctions génératrices

1.1 Introduction

Une fonction génératrice est une formule simple d'une série entière, dont les coefficients définissent une suite de nombres ou de polynômes. Souvent cette dernière est définie par une réccurence linéaire. Cette notion était introduite par Abraham De moivre en 1730 afin de trouver le n-ième terme d'une suite réccurente.

1.2 Fonction génératrice des nombres

Définition 1.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f est une fonction génératrice de la suite de nombres $(a_n)_{n\geq 0}$ si on a*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, |t| < R \tag{1.1}$$

On distingue deux types de fonctions génératrices : les fonctions génératrices ordinaires qui sont de la forme $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ et fonctions génératrices exponentielles qui prennent la forme $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$. (Voir [2])

1.3 Exemples

1.3.1 les nombres de Fibonacci

La suite des nombres, entiers, de Fibonacci F_n est définie par la récurrence suivante

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \tag{1.2}$$

avec les premiers termes $F_0 = 0$, $F_1 = F_2 = 1$. La fonction génératrice des nombres entiers de Fibonacci est établie dans la proposition suivante.

Proposition 1.1. *La fonction génératrice des nombres de Fibonacci est* $\frac{t}{1-t-t^2}$ *et on a*

$$\frac{t}{1-t-t^2} = \sum_{n\geq 0} F_n t^n. \tag{1.3}$$

Démonstration 1.1. *Pour démontrer l'equation* (1.3) *de la proposition 1.1 on considère la fonction Soit* f *la fonction génératrice des nombres de Fibonacci, alors* $f(t) = \sum_{n\geq 0} F_n t^n$. *D'après la récurrence qui définit la suite* F_n *on déduit que*

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n t^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (F_{n+1} - F_{n-1}) t^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} F_{n+1} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} t^n \\
&= \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} F_{n+1} t^{n+1} - t \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} t^{n-1} \\
&= \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{\infty} F_n t^n - t \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n \\
&= \frac{1}{t}(f(t) - t) - t f(t)
\end{aligned}$$

Donc

$$f(t) - \frac{1}{t} f(t) + t f(t) = -1$$

Ainsi

$$(-1 + \frac{1}{t} - t) f(t) = 1,$$

et le résultat désiré en découle.

1.3.2 les nombres de Lucas

La suite des nombres ,entiers positifs, de Lucas L_n est définie par la même récurrence que les nombres de Fibonacci avec juste $L_0 = 2$, $L_1 = 1$. De la même manière on montre que $f(t) = \frac{2-t}{t-1+t^2}$ est la fonction génératrice des nombres de Lucas et on a

$$\frac{2-t}{t-1+t^2} = \sum_{n\geq 0} L_n t^n. \tag{1.4}$$

1.3.3 Les nombres de Bernoulli

Par contre la suite B_n des nombres, rationnels, de Bernoulli est définie directement via sa fonction génératrice et on a :

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n\geq 0}B_n\frac{n!}{t^n}. \tag{1.5}$$

Les premiers termes de Bernoulli sont : $B_0=1$, $B_1=\frac{1}{2}$, $B_{2n+1}=0$ pour $n\geq 1$. On pose $f(t)=\frac{t}{e^t-1}$ alors $f(t)-1+\frac{1}{2}t=\frac{t}{e^t-1}-1+\frac{1}{2}t$, ainsi $g(t)=\frac{t}{e^t-1}-1+\frac{1}{2}t$ est une fonction paire ; c'est à dire $(g(t)=g(-t))$. Pour être sûr, on a la vérification suivante

$$\begin{aligned} g(t)-g(-t) &= \frac{t}{e^t-1}-1+\frac{1}{2}t+\frac{t}{e^{-t}-1}+1+\frac{1}{2}t \\ &= t(\frac{1}{e^t-1}+\frac{1}{e^{-t}-1}+1) \\ &= t\left(\frac{e^{-t}+e^t-2}{(e^t-1)(e^{-t}-1)}+1\right) \\ &= t\left(\frac{e^{-t}+e^t-2+(1-e^t-e^{-t}+1)}{(e^t-1)(e^{-t}-1)}\right)=0 \end{aligned}$$

Par contre $g(t)=\sum_{n\geq 2}B_n\frac{t^n}{n!}$; ce qui montre le résultat déjà cité en haut $B_{2n+1}=0;\ n\geq 1$. (Voir [18])

1.3.4 Les nombres d'Euler

La suite E_n des nombres d'Euler, entiers positifs, est définie par la fonction génératrice suivante

$$\frac{2}{e^t+e^{-t}}=\sum_{n\geq 0}E_n\frac{t^n}{n!} \tag{1.6}$$

ou encore

$$\frac{2e^t}{e^{2t}+1}=\sum_{n\geq 0}E_n\frac{t^n}{n!} \tag{1.7}$$

les premiers termes de la suite des nombres d'Euler sont :$E_0=1$, $E_2=2$, $E_4=5$, $E_{2n+1}=0$ pour $n\geq 0$. Soit $f(t)=\frac{2}{e^t+e^{-t}}$ alors $f(t)=f(-t)$; donc la fonction génératrice des nombres d'Euler est paire. Cela justifie que $E_{2n+1}=0$. Voir(Boudrioua [2])

1.4 Fonction génératrice des polynômes

Soit $f(x,t)$, telle que $f : (R,R) \to R$, une fonction à deux variables

Définition 1.2. *f est dite fonction génératrice ordinaire des polynômes $P_n(x)$ si on a*

$$f(x,t) = \sum_{n\geq 0} P_n(x)t^n. \tag{1.8}$$

Elle est dite fonction génératrice exponentielle des polynômes $P_n(x)$ si on a

$$f(x,t) = \sum_{n\geq 0} Q_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{1.9}$$

Voir ([2])

1.4.1 Exemple

La suite des polynômes de Fibonacci est définie par la réccurence suivante :

$$F_{n+2}(x) = xF_{n+1}(x) + F_n(x) \tag{1.10}$$

ses premiers termes sont : $F_0(x) = 0$, $F_1(x) = 1$, $F_2(x) = x$, $F_3(x) = x^2 + 1$

Proposition 1.2. *La fonction génératrice des polynômes de Fibonacci est donnée par :*

$$f(t,x) = \sum_{n\geq 0} F_n(x)t^n = \frac{t}{1 - xt - t^2}$$

Démonstration 1.2.

$$\begin{aligned}
f(x,t) &= \sum_{n\geq 0} F_n(x)t^n \\
&= \sum_{n\geq 0} (F_{n+2}(x) - xF_{n+1}(x))t^n \\
&= \sum_{n\geq 0} F_{n+2}(x)t^n - x\sum_{n\geq 0} F_{n+1}(x)t^n \\
&= \frac{1}{t^2}\sum_{n\geq 0} F_{n+2}(x)t^{n+2} - \frac{x}{t}\sum_{n\geq 0} F_{n+1}(x)t^{n+1} \\
&= \frac{1}{t^2}\sum_{n\geq 2} F_n(x)t^n - \frac{x}{t}\sum_{n\geq 1} F_n(x)t^n \\
&= \frac{1}{t^2}(f(x,t) - t) - \frac{x}{t}f(x,t)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(1-\frac{1}{t^2}+\frac{x}{t})f(x,t) &= \frac{-1}{t}\\ \frac{t^2+xt-1}{t^2}f(x,t) &= \frac{-1}{t}\end{aligned}$$

D'où

$$f(x,t)=\frac{t}{1-xt-t^2}$$

1.5 Produit de Cauchy

Des fois la fonction génératrice en question est complexe, c'est le cas de produit de deux fonctions génératrices. Pour trouver la suite générée par cette fonction on utilise le produit de Cauchy. Soient $f(t)=\sum_{n\geq 0}a_nt^n$ et $g(t)=\sum_{n\geq 0}b_nt^n$,le produit $f(t)g(t)$ est une fonction génératrice de la forme : $f(t)g(t)=\sum_{n\geq 0}c_nt^n$. Le théorème suivant donne l'expression de c_n.

Théorème 1.1. *Soit $n\in N$*

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k} \tag{1.11}$$

Démonstration 1.3. *On a*

$$\left(\sum_{k\geq 0}a_kt^k\right)\left(\sum_{j\geq 0}b_jt^j\right)=\sum_{k,j\geq 0}a_kb_jt^{k+j}.$$

On considère le nouvel indice $n=k+j$. Dans ce cas on aura

$$\left(\sum_{k\geq 0}a_kt^k\right)\left(\sum_{j\geq 0}b_jt^j\right)=\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}t^n.$$

Ainsi l'expression désirée de c_n en découle.

1.5.1 Application aux polynômes de Bernoulli

Avec le produit de Cauchy on peut calculer les polynômes de Bernoulli en fonction des nombres de Bernoulli.
On a d'après l'article de K. Wu Chen [18] :

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n\geq 0}B_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

Alors cette fonction est le produit de Cauchy de :

$$e^{xt} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} t^n \quad et \quad \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} t^n$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{B_n(x)}{n!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{B_{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} x^k. \end{aligned}$$

On vient de démontrer le théorème suivant

Théorème 1.2. *Soient $n \in N$, $B_n(x)$ le polynôme de Bernoulli au point x et B_n un nombre de Bernoulli*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} x^k \tag{1.12}$$

1.5.2 Application aux nombres d'Euler

La fonction génératrice des polynômes d'Euler est donnée par l'expression suivante :

$$E(x,t) = \frac{2e^{tx}}{e^t + 1} = \sum_{n\geq 0} E_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} E_n(x) \frac{t^n}{n!} &= \frac{2e^{tx}}{e^t + 1} = \frac{2e^{tx}}{e^t + 1} \frac{e^{\frac{-t}{2}}}{e^{\frac{-t}{2}}} \\ &= \frac{2}{e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{-t}{2}}} e^{t(x-\frac{1}{2})} \\ &= \left(\sum_{n\geq 0} \frac{E_n}{n! 2^n} \right) \left(\sum_{n\geq 0} \frac{(x-\frac{1}{2})^n}{n!} t^n \right) \\ &= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{E_k}{k! 2^k} \frac{(x-\frac{1}{2})^{n-k}}{(n-k)!} \right) t^n \end{aligned}$$

Par identification on aura

$$\begin{aligned} E_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{E_k}{2^k} (x - \frac{1}{2})^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{E_k}{2^k} (x - \frac{1}{2})^{n-k} \end{aligned}$$

Chapitre 2

Nombres balancials

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on résout l'équation

$$1+2+....+(n-1)=(n+1)+(n+2)+....+(n+r)$$

qui donne naissance aux nombres balancials et on étudiera quelques propriétés. Pour plus de propriétés on invite le lecteur à voir (A.Behera [1]).

Définition 2.1. *On dit que $n \in \mathbb{N}$ est un nombre balancial avec la balance r si on a :*

$$1+2+....+(n-1)=(n+1)+(n+2)+....+(n+r).$$

On sait que

$$1+2+....+(n-1)=\sum_{k=1}^{n-1} k=\frac{1}{2}n(n-1),$$

alors

$$(n+1)+(n+2)+....+(n+r)=rn+\sum_{k=1}^{r} k=rn+\frac{1}{2}r(r+1).$$

Donc

$$n^2-n=r^2+2nr+r.$$

Enfin on aurra

$$r^2+(2n+1)r+(n-n^2)=0.$$

La résolution de cette équation donne

$$r=\frac{-2n-1+\sqrt{8n^2+1}}{2}.$$

Ainsi pour que r soit un entier et vérifie la diaphantienne, il faut et il suffit que $8n^2+1$

soit un carré parfait, c'est à dire $8n^2+1=m^2$. Donc n est un nombre balancial si on a $8n^2+1=m^2$, avec m un entier positif. La proposition suivante donne la caractérisation des nombres balancials via l'équation diophantienne

$$8y^2+1=x^2.$$

Proposition 2.1. *Considérons $x_1=x$ et $y_1=y$ alors (x_k,y_k) ,$k\in \boldsymbol{N}$, sont des solutions de $8y^2+1=x^2$ si $x_k+y_k\sqrt{8}=(x+y\sqrt{8})^k$ et $x_k-y_k\sqrt{8}=(x-y\sqrt{8})^k$.*

Démonstration 2.1. *La démonstration est par recurrence. Pour $k=1$, on pose $x_1=x$ et $y_1=y$ et le résultat est valable. Pour $k\geq 2$, on suppose que $x_k^2-8y_k^2=1$ est vraie et on montre qu'il est vraie pour $k+1$.*

$$\begin{aligned} x_{k+1}^2-8y_{k+1}^2 &= (x_{k+1}-\sqrt{8}y_{k+1})(x_{k+1}+\sqrt{8}y_{k+1}) \\ &= (x-\sqrt{8}y)(x_k-\sqrt{8}y_k)(x+\sqrt{8}y)(x_k+\sqrt{8}y_k) \\ &= (x^2-8y^2)(x_k^2-8y_k^2) \\ &= 1\times 1=1 \end{aligned}$$

Toutes les solutions sont déduites de cette équation $(x_k+y_k\sqrt{8})=(x+y\sqrt{8})^k$

$$\begin{aligned} x_k+y_k\sqrt{8}=(x+y\sqrt{8})^k &= (x+y\sqrt{8})(x+y\sqrt{8})^{k-1} \\ &= (x+y\sqrt{8})(x_{k-1}+y_{k-1}\sqrt{8}) \\ &= (xx_{k-1}+8yy_{k-1})+(xy_{k-1}\sqrt{8}+yx_{k-1}\sqrt{8}) \\ &= (xx_{k-1}+8yy_{k-1})+\sqrt{8}(xy_{k-1}+yx_{k-1}) \end{aligned}$$

Par identification on aura

$$\begin{cases} xx_{k-1}+8yy_{k-1}=x_k \\ xy_{k-1}+yx_{x-1}=y_k \end{cases}$$

On considère la solution triviale $(3,1)$ et $y=1$ est un nombre balancial, on aura

$$\begin{cases} 3x_{k-1}+8y_{k-1}=x_k \\ 3y_{k-1}+x_{x-1}=y_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_{k-1}+8y_{k-1}=x_k.....(1) \\ -9y_{k-1}-3x_{k-1}=-3y_k....(2) \end{cases}$$

de $(1)+(2)$ on obtient :

$$x_k=3y_k-y_{k-1}$$

on remplace x_k dans

$$\begin{cases} 3x_k + 8y_k = x_{k+1} \\ 3y_k + x_k = y_{k+1} \end{cases}$$

Et on obtient :

$$y_{k+1} = 3y_k - y_{k-1} + 3y_k = 6y_k - y_{k-1}$$

Alors le k-ième balancing number est donné par :

$$B_k = 6B_{k-1} - B_{k-2} \qquad pour (k \geq 2)$$

avec $B_1 = 1$, $B_2 = 6$

Remarque 2.1. *$B_0 = 0$. On peut l'avoir facilement en remplaçant "k" par "2" dans $B_{k-2} = 6B_{k-1} - B_n$ et on obtient $B_0 = 6B_1 - B_2 = 6(1) - 6 = 0$*

2.1.1 Fonction génératrice des nombres balancials

La fonction génératrice des nombres balancials est donnée par la proposition suivante

Proposition 2.2.

$$\frac{t}{t^2 - 6t + 1} = \sum_{n \geq 0} B_n t^n. \tag{2.1}$$

Démonstration 2.2.

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k \geq 0} B_k t^k \\ &= \sum_{k \geq 2} (6B_{k-1} - B_{k-2}) t^k + B_0 t^0 + B_1 t^1 \\ &= 6 \sum_{k \geq 2} B_{k-1} t^k - \sum_{k \geq 2} B_{k-2} t^k + t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 6t \sum_{k \geq 2} B_{k-1} t^{k-1} - t^2 \sum_{k \geq 2} B_{k-2} t^{k-2} + t \\ &= 6t \sum_{k \geq 1} B_k t^k - t^2 \sum_{k \geq 0} B_k t^k + t \\ &= 6t \sum_{k \geq 0} B_k t^k - t^2 \sum_{k \geq 0} B_k t^k + t \quad (car B_0 = 0) \\ f(t) &= 6t f(t) - t^2 f(t) + t \\ f(t)(t^2 - 6t + 1) &= t \end{aligned}$$

D'où

$$f(t) = \frac{t}{t^2 - 6t + 1}$$

2.1.2 Quelques propriétés des nombres balancials

Proposition 2.3. *le k-ième balancing nombre est donné par :*

$$B_k = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[(3 + 2\sqrt{2})^k - (3 - 2\sqrt{2})^k) \right] \tag{2.2}$$

Démonstration 2.3. *On a :*

$$\begin{aligned} f(t) = \sum_{n \geq 0} B_n t^n &= \frac{t}{t^2 - 6t + 1} \\ &= \frac{t}{(t - (3 + 2\sqrt{2})(t - (3 - 2\sqrt{2}))} \end{aligned}$$

On pose $(3 + 2\sqrt{2}) = \alpha$ *et* $(3 - 2\sqrt{2}) = \delta$. *Alors*

$$\begin{aligned} \frac{t}{(t - \alpha)(t - \delta)} &= \frac{A}{t - \alpha} + \frac{B}{t - \delta} \\ &= \frac{A(t - \delta) + B(t - \alpha)}{(t - \alpha)(t - \delta)} \\ &= \frac{(A + B)t - B\alpha - A\delta}{(t - \alpha)(t - \delta)} \end{aligned}$$

Par identification on aura

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A\delta + B\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = 1 - A \\ A\delta + (1 - A)\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{\alpha}{\alpha - \delta} = \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} \\ B = 1 - \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} = \frac{-\delta}{4\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{\alpha}{t-\alpha}-\frac{\delta}{t-\delta}\right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\delta-t}-\frac{\alpha}{\alpha-t}\right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1-\frac{t}{\delta}}-\frac{1}{1-\frac{t}{\alpha}}\right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{\delta^k}-\frac{1}{\alpha^k}\right)t^k \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{k\geq 1}\frac{\alpha^k-\delta^k}{\alpha^k\delta^k}t^k \end{aligned}$$

sachant que $(\alpha\delta)^k = \Big((3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\Big)^k = 1$

$$\begin{aligned} \textit{Alors} \qquad f(t) &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{k\geq 1}(\alpha^k-\delta^k) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{k\geq 1}\Big((3+2\sqrt{2})^k-(3-2\sqrt{2})^k\Big)t^k \\ \textit{D'ou} \qquad B_k &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\Big((3+2\sqrt{2})^k-(3-2\sqrt{2})^k\Big) \end{aligned}$$

2.1.3 Fonctions associées aux nombres balancials

On considère x un nombre balancial, la proposition suivante donne les fonctions qui génèrent les nombres balancials associés à x.

Proposition 2.4. *[12] Les fonctions* $f(x) = 2x\sqrt{8x^2+1}$, $g(x) = 3x+\sqrt{8x^2+1}$ *et* $h(x) = 17x+6\sqrt{8x^2+1}$ *génèrent des nombres balancials.*

Démonstration 2.4. *[1]*
x est un balancing nombre si $8x^2+1$ est un carré parfait. On calcule $8f^2(x)+1$

$$\begin{aligned} 8(2x\sqrt{8x^2+1})^2+1 &= 8(4x^2(8x^2+1))+1 \\ &= 32x^2(8x^2+1)+1 = 256x^4+32x^2+1 \\ &= 256(x^{^2}+\frac{1}{16})^2 = 16^2(x^{^2}+\frac{1}{16})^2 \end{aligned}$$

Alors $8f^2(x)+1$ est un carré parfait pour tout x. Et donc $f(x)$ génère des nombres balancials.

Remarque 2.2. *si x est un nombre balancial alors $f(x)$ est toujours paire.*

On procède de la même manière pour $g(x)$, on a

$$\begin{aligned} 8g^2(x)+1 &= 8(9x^2+(8x^2+1)+6x\sqrt{8x^2+1})+1 \\ &= 8(17x^2+6x\sqrt{8x^2+1}+1)+1 = 136x^2+48x\sqrt{8x^2+1}+9 \\ &= (8x+3\sqrt{8x+1})^2 \end{aligned}$$

$8g^2(x)+1$ est aussi un carré parfait. D'où $g(x)$ génère des nombres balancials.

Remarque 2.3. *Si x est un nombre balancial pair alors $g(x)$ est impair car ça serait une somme d'un nombre pair et d'un autre impair. Si x est un nombre balancial impair alors $g(x)$ est pair, car ça serait une somme de deux nombres impairs.*

Si $x = g(x)$ alors $g(g(x))$ le serait certainement, en effet

$$\begin{aligned} g(g(x)) &= 3(3x+\sqrt{8x^2+1})+\sqrt{8(3x+\sqrt{8x^2+1})^2+1} \\ &= 9x+3\sqrt{8x^2+1}+\sqrt{8(9x^2+(8x^2+1)+6x\sqrt{8x^2+1})+1} \\ &= 9x+3\sqrt{8x^2+1}+\sqrt{(8x+3\sqrt{8x^2+1})^2} \\ &= 9x+3\sqrt{8x^2+1}+8x+3\sqrt{8x^2+1} \\ &= 17x+6\sqrt{8x^2+1} = h(x) \end{aligned}$$

Remarque 2.4. *De même que pour $g(x)$, la fonction $h(x)$ génère des nombres pairs et impairs.*

Proposition 2.5. *[12]*
Si x est un nombre balancial, alors il n'ya aucun nombre balancial y tel que $x < y < 3x+\sqrt{8x^2+1}$.

Démonstration 2.5. *[1] On a $g(x) = 3x+\sqrt{8x^2+1}$, $x < g(x)$, $g : [0,\infty[\to[1,\infty[$. $g(x)$ est continue et strictement croissante car $g'(x) = 3+\frac{8x}{\sqrt{8x^2+1}} > 0$. Donc $g(x)$ est bijective et $g^{-1}(x)$ existe, elle est continue et strictement croissante. On pose $u = g^{-1}(x)$, $u = 3x-\sqrt{8x^2+1}$ car*

$$\begin{aligned} g(3x-\sqrt{8x^2+1}) &= 3(3x-\sqrt{8x^2+1})+\sqrt{8(3x-\sqrt{8x^2+1})^2+1} \\ &= 9x-3\sqrt{8x^2+1}+\sqrt{136x^2+9-48x\sqrt{8x^2+1}} \\ &= 9x-3\sqrt{8x^2+1}+(3\sqrt{8x^2+1}-8x) \\ &= x \end{aligned}$$

Comme $8(g^{-1}(x))^2+1 = (8x-3\sqrt{8x+1})^2$ donc $g^{-1}(x)$ est un nombre balancial. Maintenant on procède par récurrence pour démontrer que $g(B_{n-1}) = B_n$. Pour $n = 0$ on a : $g(B_0) = 3(0)+\sqrt{8(0)^2+1} = 1 = B_1$ donc il n'ya aucun nombre balancial entre B_0 et B_1. On suppose

que notre hypothèse est juste pour n. On suppose qu'il existe un y tel que $B_n < y < B_{n+1}$ *donc* $g^{-1}(y)$ *est un nombre balancial et comme* $g^{-1}(x)$ *est strictement croissante alors* $g^{-1}(B_n) < g^{-1}(y) < g^{-1}(B_{n+1}) \Rightarrow B_{n-1} < g^{-1}(y) < B_n$ *ce qui contredit la vérité de notre hypothèse. Donc si x est un nombre balancial alors* $g(x)$ *est le nombre balancial qui le suit.*

Corollaire 2.1. *Soit x est un nombre balancial, alors le nombre balancial qui le précède est* $3x - \sqrt{8x^2+1}$.

Démonstration 2.6. $g(3x - \sqrt{8x^2+1}) = g(u) = x$

De ces deux dernières proposition on déduit trois autres récurrence définissant les balancing nombres :

Corollaire 2.2. *Les assertions suivantes sont vraies.*

$$B_{n+1} = 3B_n + \sqrt{8B_n^2+1}$$

$$B_{n-1} = 3B_n - \sqrt{8B_n^2+1}$$

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}$$

Remarque 2.5. *Pour le reste des propriétés de ce chapitre on utilisera cette dernière récurrence* $B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}$ *qui admet pour fonction génératirice, la fonction suivante*

$$\sum_{n\geq 0} B_n t^n = t\sum_{n\geq 0} B_n t^{n-1} = t\sum_{n\geq 1} B_{n+1} t^n.$$

avec $B_0 = 1$, *donc*

$$\sum_{n\geq 1} B_{n+1} t^n = \frac{1}{t^2 - 6t + 1}.$$

Proposition 2.6. *[12]*
On a les relation de réccurence suivantes :

$$B_{n+1}B_{n-1} = (B_n + 1)(B_n - 1) \tag{2.3}$$

$$B_n = B_k B_{n-k} - B_{k-1}B_{n-k-1} \tag{2.4}$$

$$B_{2n} = B_n^2 - B_{n-1}^2 \tag{2.5}$$

$$B_{2n+1} = B_n(B_{n+1} - B_{n-1}) \tag{2.6}$$

Démonstration 2.7. *[1]*

On a $B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}$ *et* $B_n = 6B_{n-1} - B_{n-2}$. *Alors*

$$\begin{cases} \frac{B_{n+1}+B_{n-1}}{B_n} = 6.....(1) \\ \frac{B_n+B_{n-2}}{B_{n-1}} = 6.....(2) \end{cases}$$

La différence $(1) - (2)$ *donne*

$$\frac{(B_{n+1})(B_{n-1}) + (B_{n-1}^2) - B_n^2 - B_nB_{n-2}}{B_nB_{n-1}} = 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} B_n^2 - B_{n-1}B_{n+1} &= B_{n-1}^2 - B_{n-2}B_n \\ &= B_{n-2}^2 - B_{n-3}B_{n-1} \\ &= B_{n-3}^2 - B_{n-4}B_n \\ &= B_{n-4}^2 - B_{n-5}B_{n-1} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &= B_{n-(n-1)}^2 - B_{(n-1)-(n-1)}B_{(n+1)-(n-1)} \\ &= B_1^2 - B_0B_2 = (6)^2 - 1 * 35 = 1. \end{aligned}$$

Donc

$$B_n^2 - 1 = B_{n-1}B_{n+1}$$

On démontre la relation $B_n = B_kB_{n-k} - B_{k-1}B_{n-k-1}$ *par récurrence sur* k. *Pour* $k = 1$ *on aura* $B_n = B_1B_{n-1} - B_0B_{n-2} = 6B_{n-1} - B_{n-2}$. *On suppose que* $B_n = B_kB_{n-k} - B_{k-1}B_{n-k-1}$ *est vraie, et on verra pour* $k = r + 1$ *:*

$$\begin{aligned} B_{r+1}B_{n-r-1} - B_rB_{n-r} &= (6B_r - B_{r-1})(B_{n-r-1}) - B_rB_{n-r-2} \\ &= 6B_rB_{n-r-1} - B_{r-1}B_{n-r-1} - B_rB_{n-r-2} \\ &= B_r(6B_{n-r-1} - B_{n-r-2}) - B_{r-1}B_{n-r-1} \\ &= B_rB_{n-r} - B_{r-1}B_{n-r-1}. \end{aligned}$$

Pour la $B_{2n} = B_n^2 - B_{n-1}^2$, *on a* $B_n = B_kB_{n-k} - B_{k-1}B_{n-k-1}$, *on remplace* n *par* $2n$ *et* k *par* n, *on obtient*

$$\begin{aligned} B_{2n} &= B_nB_{2n-n} - B_{n-1}B_{2n-n-1} \\ &= B_nB_n - B_{n-1}B_{n-1} = B_n^2 - B_{n-1}^2 \end{aligned}$$

Enfin pour la dernière relation, on a $B_n = B_kB_{n-k} - B_{k-1}B_{n-k-1}$, *on remplace* n *par* $2n+1$

et k par n, on obtient

$$\begin{aligned} B_{2n+1} &= B_n B_{2n+1-n} - B_{n-1} B_{2n+1-n-1} \\ &= B_n(B_{n+1} - B_{n-1}). \end{aligned}$$

Théorème 2.1.

$$(B_m + B_n)(B_m - B_n) = B_{m+n} B_{m-n}$$

Démonstration 2.8. *on a*

$$B_n = \frac{1}{4\sqrt{2}}((3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n).$$

Donc

$$\begin{aligned} B_{m+n}B_{m-n} &= \frac{1}{32}\left[\left((3+2\sqrt{2})^{m+n} - (3-2\sqrt{2})^{m+n}\right)\left((3+2\sqrt{2})^{m-n} - (3-2\sqrt{2})^{m-n}\right)\right] \\ &= \frac{1}{32}\left[(3+2\sqrt{2})^{2m} - (3+2\sqrt{2})^{m+n}(3-2\sqrt{2})^{m-n} - (3-2\sqrt{2})^{m+n}(3+2\sqrt{2})^{m-n}\right] \\ &= \frac{1}{32}\left((3+2\sqrt{2})^{2m} - (3+2\sqrt{2})^{2n}(3+2\sqrt{2})^{m-n}(3-2\sqrt{2})^{m-n}\right) \\ &- \frac{1}{32}\left((3-2\sqrt{2})^{2n}(3-2\sqrt{2})^{m-n}(3+2\sqrt{2})^{m-n} + (3+2\sqrt{2})^{2m}\right). \end{aligned}$$

Sachant que$((3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}))^k = 1$ alors

$$= \frac{1}{32}\left[(3+2\sqrt{2})^{2m} + (3-2\sqrt{2})^{2m} - (3+2\sqrt{2})^{2n} + (3-2\sqrt{2})^{2n}\right] = B_m^2 B_n^2$$

Lemme 2.1. *on a $f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ et*

$$a_n = \frac{1}{n!}\frac{d}{dt^n} f(t) \downarrow_{t=0}$$

Démonstration 2.9. *(voir A.Behera [1]).*

Théorème 2.2. *[1]*
De la fonction génératrice, on obtient

$$B_n = 6^n - \binom{n-1}{1}6^{n-2} + \binom{n-2}{2}6^{n-4} - ... + (-1)^{[\frac{n}{2}]}\binom{n-[\frac{n}{2}]}{[\frac{n}{2}]}6^{n-[\frac{n}{2}]} = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\binom{n-k}{k}6^{n-2k},$$

où $[\frac{n}{2}]$ est la partie entière de $\frac{n}{2}$.

Démonstration 2.10. *Pour* $|6t-t^2|<1$, *on a*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{t^2-6t+1} = (1-(6t-t^2))^{-1} \\ &= 1+(6t-t^2)+(6t-t^2)^2+(6t-t^2)^3+.....(*) \end{aligned}$$

Si n *est pair, les termes qui contiennent* t^n *sont :* $(6t-t^2)^{\frac{n}{2}}$,$(6t-t^2)^{\frac{n}{2}+1}$, ...,$(6t-t^2)^n$. *Mais*

$$(6t-t^2)^{\frac{n}{2}} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{\frac{n}{2}}{k} (6t)^{\frac{n}{2}-k}(-t^2)^k = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{\frac{n}{2}}{k} (6)^{\frac{n}{2}-k}(-1)^k(t)^{\frac{n}{2}+k}.$$

Pour avoir le coefficient de t^n *il suffit de remplacer* k *par* $\frac{n}{2}$ *et on obtient :* $6^0(-1)^{\frac{n}{2}}$. *de même jusqu'à* n. *D'autre part on a*

$$(6t-t^2)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} (6t)^{n-2-k}(-t^2)^k = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} (6)^{n-2-k}(-1)^k(t)^{n-2+k}.$$

Pour avoir le coefficient de t^n *il suffit de remplacer* k *par* 2 *et on obtient :* $\binom{n-2}{2}6^{n-4}(-1)^{\frac{n}{2}}$.

$$(6t-t^2)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (6t)^{n-1-k}(-t^2)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (6)^{n-1-k}(-1)^k(t)^{n-1+k}.$$

Pour avoir le coefficient de t^n *il suffit de remplacer* k *par* 1 *et on obtient :* $-\binom{n-1}{1}6^{n-2}$.

$$(6t-t^2)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (6t)^{n-k}(-t^2)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (6)^{n-k}(-1)^k(t)^{n+k}.$$

Pour avoir le coefficient de t^n *il suffit de remplacer* k *par* 0 *et on obtient :* 6^n. *Alors dans ces cas les coefficients de* t^n *dans* $f(t)$ *:*

$$6^n - \binom{n-1}{1}6^{n-2} + \binom{n-2}{2}6^{n-4} - .... + (-1)^{\frac{n}{2}}.$$

Pour n *impair, les termes qui contiennent* t^n *sont :* $(6t-t^2)^{\frac{n+1}{2}}$,$(6t-t^2)^{\frac{n+3}{2}+1}$, ...,$(6t-t^2)^n$. *et dans ces cas les coefficients de* t^n *dans* $f(t)$ *:*

$$6^n - \binom{n-1}{1}6^{n-2} + \binom{n-2}{2}6^{n-4} - .... + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-1}{2}}6.$$

Chapitre 3

Les polynômes balancials

Définition 3.1. *la suite des polynômes balancing est donné par la récurrence suivante [5] :*

$$B_n(x) = 6xB_{n-1}(x) - B_{n-2}(x) \qquad (n \geq 2).$$

Les premiers termes de cette suite sont : $B_0(x) = 0$, $B_1(x) = 1$ *et* $B_2(x) = 6x$

3.1 Fonctions génératrices des polynômes balancials

Fonction génératrice ordinaire des polynômes balancing

La fonction génératrice ordinaire des polynômes balancials est donnée par le théorème suivant

Théorème 3.1. *[6, 8, 10]*
Soit $b(x,t)$ *la fonction génératrice des nombres balancials*

$$b(x,t) = \sum_{n\geq 0} B_n(x)t^n = \frac{t}{t^2 + 6xt - 1}$$

Démonstration 3.1. *la fonction génératrice ordinaire des balancing polynômes*

$$\begin{aligned} b(x,t) &= \sum_{n\geq 0} B_n(x)t^n \\ &= \sum_{n\geq 2}(6xB_{n-1}(x) - B_{n-2}(x))t^n + B_1(x)t + B_0(x)t \\ &= \sum_{n\geq 2}(6xB_{n-1}(x))t^n - \sum_{n\geq 2} B_{n-2}(x)t^n + t \\ &= 6xt\sum_{n\geq 2} B_{n-1}(x)t^{n-1} - t^2\sum_{n\geq 2} B_{n-2}(x)t^{n-2} + t \\ &= 6xt\sum_{n\geq 1} B_n(x)t^n - t^2\sum_{n\geq 0} B_n(x)t^n + t \\ &= 6xt\sum_{n\geq 0} B_n(x)t^n - t^2\sum_{n\geq 0} B_n(x)t^n + t \quad car B_0(x) = 0 \\ &= 6xtb(x,t) - t^2 b(x,t) + t \end{aligned}$$

Alors $b(x,t)(1-6xt+t^2) = t$, *d'où* $b(x,t) = \frac{t}{1-6xt+t^2}$.

Fonction génératrice exponentielle des polynômes balancials

Théorème 3.2. *[8]*
Soit $B_n(x)$ *la suite de polynômes balancials, alors*

$$\sum_{n\geq 0} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{3xt}}{\sqrt{9x^2-1}}\sinh(t\sqrt{9x^2-1}).$$

Démonstration 3.2. *On a* $B_n(x) = \frac{t}{t^2-6xt+1}$, *et on résout l'équaion* $t^2 - 6xt + 1 = 0$, *le descriminant est* $\Delta = \sqrt{4+36x^2}$,$\lambda_1(x) = 3x + \sqrt{9x^2-1}$ *et* $\lambda_2(x) = 3x - \sqrt{9x^2-1}$. *Alors*

$$\begin{aligned} b(x,t) = \sum_{n\geq 0} B_n(x)t^n &= \frac{t}{(t-\lambda_1(x))(t-\lambda_2(x))} \\ &= \frac{A}{t-\lambda_1(x)} + \frac{B}{t-\lambda_2(x)} = \frac{A(t-\lambda_2(x)) + B(t-\lambda_1(x))}{(t-\lambda_1(x))(t-\lambda_2(x))} \\ &= \frac{(A+B)t - A\lambda_2(x) - B\lambda_1(x)}{(t-\lambda_1(x))(t-\lambda_2(x))} \end{aligned}$$

Par identification on aura

$$\begin{cases} A+B &= 1 \\ A\lambda_2(x) + B\lambda_1(x) &= 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} A & = & 1-B \\ (1-B)\lambda_2(x)+B\lambda_1(x) & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} A & = & 1-B \\ \lambda_2(x)-B\lambda_2(x)+B\lambda_1(x) & = & B(\lambda_1(x)-\lambda_2(x))+\lambda_2(x)=0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} B & = & \frac{\lambda_2(x)}{\lambda_2(x)-\lambda_1(x)} \\ A & = & 1-\frac{\lambda_2(x)}{\lambda_2(x)-\lambda_1(x)} \\ A & = & \frac{-\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)-\lambda_1(x)}=\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} b(x,t) &= \frac{\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}}{t-\lambda_1(x)}+\frac{\frac{\lambda_2(x)}{\lambda_2(x)-\lambda_1(x)}}{t-\lambda_2(x)} \\ &= \frac{\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}}{t-\lambda_1(x)}-\frac{\frac{\lambda_2(x)}{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}}{t-\lambda_2(x)} \\ &= \frac{1}{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}\left(\frac{\lambda_2(x)}{\lambda_2(x)-t}-\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_1(x)-t}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}\left(\frac{1}{1-\frac{t}{\lambda_2(x)}}-\frac{1}{1-\frac{t}{\lambda_1(x)}}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{\lambda_2^n(x)}-\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{\lambda_1^n(x)}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{\lambda_1^n(x)-\lambda_2^n(x)}{\lambda_2^n(x)\lambda_1^n(x)}\right)t^n \end{aligned}$$

Donc

$$B_n(x)=\frac{\lambda_1^n(x)-\lambda_2^n(x)}{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0}B_n(x)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n\geq 0}\left(\frac{\lambda_1^n(x)-\lambda_2^n(x)}{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}\right)\frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{1}{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{\lambda_1^n(x)}{n!}t^n-\frac{\lambda_1^n(x)}{n!}t^n\right) \end{aligned}$$

Sachant que $\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}t^n = e^{zt}$ *et en remplçant les* λ *par leurs valeurs on obtient :*

$$\sum_{n\geq 0} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}(e^{\lambda_1(x)t} - e^{\lambda_2(x)t}) = \frac{e^{3xt}}{2\sqrt{9x^2-1}}(e^{\sqrt{9x^2-1}t} - e^{-\sqrt{9x^2-1}t})$$

Comme on a $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, *alors*

$$\sum_{n\geq 0} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{3xt}}{\sqrt{9x^2-1}}\sinh(\sqrt{9x^2-1}t)$$

Le lemme suivant est utile dans le chapitre suivant.

Lemme 3.1. *(voir R.Frontczak [8])*
La récurrence suivante

$$y_n(x) = py_{n-1}(x) + qy_{n-2}(x),\ n \geq 2,\ p^2+4q \neq 0,$$

avec $y_0(x),\ y_1(x)$ *les premiers termes de* y_n *; permet de trouver la fonction génératrice exponentielle de la suite* y_n *:*

$$\sum_{n\geq 0} y_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{\frac{p}{2}t}}{\Delta}\left([y_1(x) - \lambda_1 y_0(x)]e^{\frac{\Delta}{2}t} - [y_1(x) - \lambda_2 y_0(x)]e^{-\frac{\Delta}{2}t}\right)$$

où

$$\Delta = \sqrt{p^2+4q}\ \ \lambda_1 = \frac{p+\Delta}{2}\ \ et\ \lambda_2 = \frac{p-\Delta}{2}.$$

3.1.1 Lien entre les nombres et polynômes balancials

La valeur de la fonction génératrice ordinaire des polynômes balancials au point $x = 1$, *conduit à*

$$b(1,t) = \frac{t}{t^2-6t+1} = b(t)$$

qui est la fonction génératrice ordinaire des nombres balancials.
La fonction génératrice exponentielle des polynômes balancials au point $x = 1$, donne

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} B_n(1)\frac{t^n}{n!} &= \frac{e^{3(1)t}}{\sqrt{9(1)^2-1}}\sinh(t\sqrt{9(1)^2-1}) = \frac{e^{3t}}{2\sqrt{2}}\sinh(t2\sqrt{2}) \\ &= \frac{e^{3t}}{2\sqrt{2}}\frac{e^{t2\sqrt{2}}-e^{-t2\sqrt{2}}}{2} = \frac{e^{(3+2\sqrt{2})t}-e^{-(3+2\sqrt{2})t}}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[e^{(3+2\sqrt{2})t}-e^{-(3+2\sqrt{2})t}\right] \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{n\geq 0}\left[(3+2\sqrt{2})^n-(3+2\sqrt{2})^n\frac{t^n}{n!}\right]\end{aligned}$$

qui est la formule de Binet des nombres balancials. Ainsi les nombres balancials conicide avec la valeurs des polynômes balancials en $x = 1$.

3.2 Formule de Binet

Etant donnée une suite récurrente linéaire d'ordre 02 :

$$aP_{n-2} = bP_{n-1} + cP_n$$

avec son équation caractéristique : $ay^2 = by + c$. λ_1 et λ_2 sont ses racines respectives avec $\Delta = (b^2 - 4ac) \geq 0$
Alors

$$P_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

est la forme de Binet pour cette suite. De même, pour les suites de polynômes on aura :

$$P_n(x) = \frac{\lambda_1^n(x) - \lambda_2^n(x)}{\lambda_1(x) - \lambda_2(x)}$$

3.2.1 Exemple d'application

Formule de Binet des nombres de Fibonacci.

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ $F_0 = 0, F_1 = 1$
Son équation caractéristique est : $y^2 - y - 1 = 0$ $\Delta = \sqrt{5}$,$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n)$$

Formule de Binet des nombres de Lucas.

On a

$$L_n = \frac{F_{2n}}{F_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^{2n} - \lambda_2^{2n})}{\frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n)} = \frac{(\lambda_1^n - \lambda_2^n)(\lambda_1^n + \lambda_2^n)}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}$$

Donc

$$L_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n$$

Voir (D.Castellanos [3])

3.3 Quelques propriétés des polynômes balancials

Soit $B_n(x)$ un polynôme balancial au point x, alors on a les propriétés suivantes :

Proposition 3.1.

$$B_n(x) = \frac{1}{2}\frac{(3x + \sqrt{9x^2-1})^n - (3x - \sqrt{9x^2-1})^n}{\sqrt{9x^2-1}}$$

Démonstration 3.3. *On a :* $B_n(x) = 6xB_{n-1}(x) - B_{n-2}(x)$
Son équation caractéréstique est : $y^2 - 6xy + 1 = 0$ *où* $\Delta = 36x^2 - 4 \geq 0$, $\lambda_1 = 3x + \sqrt{9x^2-1}$ *et* $\lambda_2 = 3x - \sqrt{9x^2-1}$
En appliquant la formule de Binet on obtient :

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \frac{(3x + \sqrt{9x^2-1})^n - (3x - \sqrt{9x^2-1})^n}{(3x + \sqrt{9x^2-1}) - (3x - \sqrt{9x^2-1})} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(3x + \sqrt{9x^2-1})^n - (3x - \sqrt{9x^2-1})^n}{\sqrt{9x^2-1}} \end{aligned}$$

Proposition 3.2.

$$B_{n-m}(x)B_{n+m}(x) = B_n^2(x) - B_m^2(x)$$

Démonstration 3.4.

$$\begin{aligned} B_{n-m}(x)B_{n+m}(x) &= \left(\frac{\lambda_1^{n-m}(x) - \lambda_2^{n-m}(x)}{\lambda_1(x) - \lambda_2(x)}\right)\left(\frac{\lambda_1^{n+m}(x) - \lambda_2^{n+m}(x)}{\lambda_1(x) - \lambda_2(x)}\right) \\ &= \frac{\lambda_1^{n-m}(x)\lambda_1^{n+m}(x) - \lambda_1^{n-m}(x)\lambda_2^{n+m}(x) - \lambda_2^{n-m}(x)\lambda_1^{n+m}(x) + \lambda_2^{n-m}(x)\lambda_2^{n+m}(x)}{(\lambda_1(x) - \lambda_2(x))^2} \\ &= \frac{\lambda_1^{2n} - \lambda_1^{n-m}(x)\lambda_2^{n-m+2m}(x) - \lambda_2^{n-m}(x)\lambda_1^{n-m+2m}(x) + \lambda_2^{2n}}{(\lambda_1(x) - \lambda_2(x))^2} \\ &= \frac{\lambda_1^{2n} - \lambda_1^{n-m}(x)\lambda_2^{n-m}(x)\lambda_2^{2m}(x) - \lambda_2^{n-m}(x)\lambda_1^{n-m}(x)\lambda_1^{2m}(x) + \lambda_2^{2n}(x))}{(\lambda_1(x) - \lambda_2(x))^2} \end{aligned}$$

Sachant que $\lambda_1^{n-m}(x)\lambda_2^{n-m}(x) = (3x+\sqrt{9x^2-1})(3x-\sqrt{9x^2-1}) = 1$ *Alors on aura :*

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda_1^{2n}(x) - \lambda_2^{2m}(x) - \lambda_1^{2m}(x) + \lambda_2^{2n}(x)}{(\lambda_1(x)-\lambda_2(x))^2} \\
&= \frac{(\lambda_1^{2n}(x) + \lambda_2^{2n}(x) - 2\lambda_1^n(x)\lambda_2^n(x)) - (\lambda_1^{2m}(x) + \lambda_2^{2m}(x) - 2\lambda_1^m(x)\lambda_2^m(x))}{(\lambda_1(x)-\lambda_2(x))^2} \\
&= \left(\frac{\lambda_1^n(x)-\lambda_2^n(x)}{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}\right)^2 - \left(\frac{\lambda_1^m(x)-\lambda_2^m(x)}{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}\right)^2 \\
&= B_n^2(x) - B_m^2(x)
\end{aligned}$$

Proposition 3.3.

$$B_{2n-1}(x) = B_n^2(x) - B_{n-1}^2(x)$$

Démonstration 3.5. *On a* $B_n^2(x) - B_m^2(x) = B_{n-m}(x)B_{n+m}(x)$
En remplaçant m *par* $n-1$ *on aura :*

$$\begin{aligned}
B_n^2(x) - B_{n-1}^2(x) &= B_{n-(n-1)}(x)B_{n+(n-1)}(x) \\
&= B_1(x)B_{2n-1}(x)
\end{aligned}$$

comme $B_1(x) = 1$ *alors* $B_n^2(x) - B_{n-1}^2(x) = B_{2n-1}(x)$

Proposition 3.4.

$$B_{2n}(x) = \frac{B_{n+1}^2(x) - B_{n-1}^2(x)}{6x}$$

Démonstration 3.6. *On a* $B_n^2(x) - B_m^2(x) = B_{n-m}(x)B_{n+m}(x)$
En remplaçant n *par* $n+1$ *et* m *par* $n-1$ *on aura :*

$$\begin{aligned}
B_{n+1}^2(x) - B_{n-1}^2(x) &= B_{(n+1)-(n-1)}(x)B_{(n+1)+(n-1)}(x) \\
&= B_2(x)B_{2n}(x)
\end{aligned}$$

comme $B_2(x) = 6x$ *alors* $B_{2n}(x) = \frac{B_{n+1}^2(x) - B_{n-1}^2(x)}{6x}$

Proposition 3.5. *Ecriture binomiale d'un balancing polynôme (Voir [14])*

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^{[\frac{(n-1)}{2}]} (-1)^j \binom{n-1-j}{j} (6x)^{n-1-2j}$$

où$[]$ *est la partie entière.*

Lemme 3.2. *Formule de Waring (Voir [17])*
On a

$$\begin{cases} x^0+y^0 &= 2 \\ x^1+y^1 &= x+y \\ x^2+y^2 &= (x+y)^2-2xy \\ x^3+y^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y) \\ x^4+y^4 &= (x+y)^4-4xy(x+y)^2+2(xy)^2 \end{cases}$$

Alors

$$x^n+y^n=\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^j C_{n,j}(xy)^j(x+y)^{n-2j}$$

Avec

$$\begin{cases} C_{0,0} &= 2 \\ C_{n,j} &= \frac{n}{n-j}\binom{n-j}{j} \end{cases}$$

Démonstration 3.7. *En utilisant la formule de Waring on obtient*

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \frac{\lambda_1^n(x)-\lambda_2^n(x)}{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)} \\ &= \sum_{j=0}^{[\frac{(n-1)}{2}]}(-1)^j\binom{n-1-j}{j}\left(\lambda_1(x)\lambda_2(x)\right)^j\left(\lambda_1(x)+\lambda_2(x)\right)^{n-1-2j} \end{aligned}$$

où $\lambda_1(x)\lambda_2(x)=1$ *et* $\lambda_1(x)+\lambda_2(x)=6x$

Proposition 3.6. *(Voir [9])*

$$B_n(-x)=(-1)^{n+1}B_n(x)$$

Démonstration 3.8.

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= 3x+\sqrt{9x^2-1} \\ \lambda_1(-x) &= -3x+\sqrt{9(-x)^2-1}=-\lambda_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2(x) &= 3x-\sqrt{9x^2-1} \\ \lambda_2(-x) &= -3x-\sqrt{9(-x)^2-1}=-\lambda_1(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n(-x) &= \frac{\lambda_1^n(-x)-\lambda_2^n(-x)}{\lambda_1(-x)-\lambda_2(-x)}=\frac{(-1)^n\lambda_2^n(x)-(-1)^n\lambda_1^n(x)}{-\lambda_2(x)+\lambda_1(x)} \\ &= (-1)^{n+1}\left(\frac{\lambda_1^n(x)-\lambda_2^n(x)}{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}\right) \end{aligned}$$

**Les polynômes balancials sont liés aux nombres de Fibonacci et de Lucas via la relation*

suivante : (Voir [5])

Proposition 3.7.

$$B_n(\frac{L_{2m}}{6}) = \frac{F_{2mn}}{F_{2m}}$$

Démonstration 3.9. *Ona :*

$$\frac{L_{2m}}{6} = \frac{\lambda_1^{2m} + \lambda_2^{2m}}{6} \quad et \quad \frac{F_{2mn}}{F_{2m}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^{2mn} - \lambda_2^{2mn})}{\frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^{2m} - \lambda_2^{2m})}$$

où $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *et* $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{aligned} B_n(\frac{\lambda_1^{2m} + \lambda_2^{2m}}{6}) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\left(3(\frac{\lambda_1^{2m}+\lambda_2^{2m}}{6}) + \sqrt{9(\frac{\lambda_1^{2m}+\lambda_2^{2m}}{6})^2 - 1}\right)^n - \left(3(\frac{\lambda_1^{2m}+\lambda_2^{2m}}{6}) - \sqrt{9(\frac{\lambda_1^{2m}+\lambda_2^{2m}}{6})^2 - 1}\right)^n}{\sqrt{9(\frac{\lambda_1^{2m}+\lambda_2^{2m}}{6})^2 - 1}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\left((\frac{\lambda_1^{2m}+\lambda_2^{2m}}{2}) + \sqrt{(\frac{\lambda_1^{2m}+\lambda_2^{2m}}{4})^2 - 1}\right)^n - \left((\frac{\lambda_1^{2m}+\lambda_2^{2m}}{6}) - \sqrt{9(\frac{\lambda_1^{2m}+\lambda_2^{2m}}{4})^2 - 1}\right)^n}{\sqrt{(\frac{\lambda_1^{2m}+\lambda_2^{2m}}{2})^2 - 1}}\right] \end{aligned}$$

Sachant que $\lambda_1\lambda_2 = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = -1$ *alors*

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{2^n}\left(\lambda_1^{2m} + \lambda_2^{2m} + \sqrt{\lambda_1^{4m} + \lambda_2^{4m} - 2\lambda_1^{2m}\lambda_2^{2m}}\right)^n - \frac{1}{2^n}\left(\lambda_1^{2m} + \lambda_2^{2m} - \sqrt{\lambda_1^{4m} + \lambda_2^{4m} - 2\lambda_1^{2m}\lambda_2^{2m}}\right)^n}{\sqrt{\lambda_1^{4m} + \lambda_2^{4m} - 2\lambda_1^{2m}\lambda_2^{2m}}} \\ &= \frac{1}{2^n}\frac{(\lambda_1^{2m} + \lambda_2^{2m} + \lambda_1^{2m} - \lambda_2^{2m})^n - (\lambda_1^{2m} + \lambda_2^{2m} - \lambda_1^{2m} + \lambda_2^{2m})^n}{\lambda_1^{2m} - \lambda_2^{2m}} \\ &= \frac{1}{2^n}\frac{(2\lambda_1^{2m})^n - (2\lambda_2^{2m})^n}{\lambda_1^{2m} - \lambda_2^{2m}} = \frac{(\lambda_1^{2mn} - \lambda_2^{2mn})}{(\lambda_1^{2m} - \lambda_2^{2m})} \end{aligned}$$

Proposition 3.8.

$$B_n(\frac{i}{6}L_{2m+1}) = i^{n-1}\frac{F_{(2m+1)n}}{F_{2m+1}}$$

Démonstration 3.10. *on a*

$$\frac{i}{6}L_{2m+1} = \frac{i}{6}(\lambda_1^{2m+1} + \lambda_2^{2m+1}) \quad et \quad i^{n-1}\frac{F_{(2m+1)n}}{F_{2m+1}} = i^{n-1}\frac{\lambda_1^{(2m+1)n} - \lambda_2^{(2m+1)n}}{\lambda_1^{2m+1} - \lambda_2^{2m+1}}$$

$$
\begin{aligned}
B_n(\frac{i}{6}L_{2m+1}) &= \frac{1}{2}\frac{\left(3\frac{i}{6}(\lambda_1^{2m+1}+\lambda_2^{2m+1})+\sqrt{9(\frac{i}{6}(\lambda_1^{2m+1}+\lambda_2^{2m+1}))^2-1}\right)^n}{\sqrt{9(\frac{i}{6}(\lambda_1^{2m+1}+\lambda_2^{2m+1}))^2-1}} \\
&- \frac{1}{2}\frac{\left(3\frac{i}{6}(\lambda_1^{2m+1}+\lambda_2^{2m+1})-\sqrt{9(\frac{i}{6}(\lambda_1^{2m+1}+\lambda_2^{2m+1}))^2-1}\right)^n}{\sqrt{9(\frac{i}{6}(\lambda_1^{2m+1}+\lambda_2^{2m+1}))^2-1}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{i}{2}(\lambda_1^{2m+1}+\lambda_2^{2m+1})+\sqrt{\frac{i^2}{4}(\lambda_1^{2(2m+1)}+\lambda_2^{2(2m+1)}-2)-\frac{4}{4}}\right)^n}{\left(\sqrt{\frac{i^2}{4}(\lambda_1^{2(2m+1)}+\lambda_2^{2(2m+1)}-2)-\frac{4}{4}}\right)} \\
&- \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{i}{2}(\lambda_1^{2m+1}+\lambda_2^{2m+1})-\sqrt{\frac{i^2}{4}(\lambda_1^{2(2m+1)}+\lambda_2^{2(2m+1)}-2)-\frac{4}{4}}\right)^n}{\sqrt{\frac{i^2}{4}(\lambda_1^{2(2m+1)}+\lambda_2^{2(2m+1)}-2)-\frac{4}{4}}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{i}{2}(\lambda_1^{2m+1}+\lambda_2^{2m+1})+\frac{1}{2}\sqrt{i^2\lambda_1^{2(2m+1)}+i^2\lambda_2^{2(2m+1)}-2i^2-4}\right)^n}{\frac{1}{2}\sqrt{i^2\lambda_1^{2(2m+1)}+i^2\lambda_2^{2(2m+1)}-2i^2-4}} \\
&- \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{i}{2}(\lambda_1^{2m+1}+\lambda_2^{2m+1})-\frac{1}{2}\sqrt{i^2\lambda_1^{2(2m+1)}+i^2\lambda_2^{2(2m+1)}-2i^2-4}\right)^n}{\frac{1}{2}\sqrt{i^2\lambda_1^{2(2m+1)}+i^2\lambda_2^{2(2m+1)}-2i^2-4}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{i}{2}(\lambda_1^{2m+1}+\lambda_2^{2m+1})+\frac{i}{2}\sqrt{\lambda_1^{2(2m+1)}+\lambda_2^{2(2m+1)}-2\lambda_1^{2m+1}\lambda_2^{2m+1}}\right)^n}{\frac{i}{2}\sqrt{\lambda_1^{2(2m+1)}+\lambda_2^{2(2m+1)}-2\lambda_1^{2m+1}\lambda_2^{2m+1}}} \\
&- \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{i}{2}(\lambda_1^{2m+1}+\lambda_2^{2m+1})-\frac{i}{2}\sqrt{\lambda_1^{2(2m+1)}+\lambda_2^{2(2m+1)}-2\lambda_1^{2m+1}\lambda_2^{2m+1}}\right)^n}{\frac{i}{2}\sqrt{\lambda_1^{2(2m+1)}+\lambda_2^{2(2m+1)}-2\lambda_1^{2m+1}\lambda_2^{2m+1}}} \\
&= \frac{i^{n-1}}{2^n}\frac{(2\lambda_1^{2m+1})^n-(2\lambda_2^{2m+1})^n}{\lambda_1^{2m+1}-\lambda_2^{2m+1}}
\end{aligned}
$$

D'où le résultat.

Chapitre 4

Les nombres et polynômes balancials de Lucas

4.1 Nombres balancials de Lucas

On a vu dans le deuxième chapitre que l'équation $8n^2+1=m^2$ *nous génère les nombres balancials où* n *est le nombre balancial noté* B_n*. Et* $m=\sqrt{8x^2+1}$ *est appelé nombre balancial de Lucas ; noté par* C_n*.(Voir [13])*

Définition 4.1. *La suite des nombres balancials de Lucas est donnée par la même récurrence que les nombres balancials : [15, 16]*

$$C_n = 6C_{n-1} - C_{n-2} \qquad (n \geq 2)$$

avec $C_0 = 1$ *et* $C_1 = 3$.

4.1.1 Fonction génératrice des nombres balancials de Lucas

Théorème 4.1. *[15, 16]*
Soit $c(t)$ *la fonction génératrice des nombres balancials de Lucas*

$$c(t) = \sum_{n\geq 0} C_n t^n = \frac{1-3t}{t^2-6t+1} \tag{4.1}$$

Démonstration 4.1.

$$\begin{aligned} c(t) = \sum_{n\geq 0} C_n t^n &= \sum_{n\geq 2}(6C_{n-1} - C_{n-2})t^n + C_0 t^0 + C_1 t^1 \\ &= 6\sum_{n\geq 2} C_{n-1}t^n - \sum_{n\geq 2} C_{n-2}t^n + 1 + 3t \\ &= 6t\sum_{n\geq 2} C_{n-1}t^{n-1} - t^2\sum_{n\geq 2} C_{n-2}t^{n-2} + 1 + 3t \\ &= 6t\sum_{n\geq 1} C_n t^n - t^2\sum_{n\geq 0} C_n t^n + 1 + 3t \\ &= 6t(c(t) - 1) - t^2 c(t) + 1 + 3t. \end{aligned}$$

Ainsi $c(t)(1 - 6t + t^2) = 1 - 3t$ *et alors*

$$c(t) = \frac{1 - 3t}{1 - 6t + t^2}.$$

4.1.2 La formule de Binet des nombres balancials de Lucas

On peut obtenir le nième nombre balancial de Lucas grâce à la formule de Binet

Proposition 4.1. *[13]*
Soit $n \geq 0$

$$C_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n}{2}. \tag{4.2}$$

Démonstration 4.2.

$$\begin{aligned} C_n &= \sqrt{8B_n^2 + 1} \\ C_n^2 &= 8B_n^2 + 1 \\ &= 8\left(\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)^2 + 1 = 8\left(\frac{\lambda_1^{2n} + \lambda_2^{2n} - 2\lambda_1^n\lambda_2^n}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}\right) + 1 \\ &= 8\left(\frac{\lambda_1^{2n} + \lambda_2^{2n} - 2}{(4\sqrt{2})^2}\right) + 1 = \frac{\lambda_1^{2n} + \lambda_2^{2n} + 2}{4} \\ &= \left(\frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Donc

$$C_n = \frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{2}$$

4.1.3 Quelques propriétés hybrides nombres balancials de Lucas

Proposition 4.2. *Ecriture binomiale d'un nombre balancial de Lucas (Voir [14])*

$$2C_n = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^j \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j} 6^{n-2j} \tag{4.3}$$

Démonstration 4.3. *En utilisant la formule de Waring énoncée dans le lemme 3.2 avec* $\lambda_1\lambda_2 = 1$ *et* $\lambda_1 + \lambda_2 = 6$ *alors* $C_n = \frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{2}$ *implique que*

$$2C_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^j \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j} (\lambda_1\lambda_2)^j (\lambda_1 + \lambda_2)^{n-2j}.$$

Proposition 4.3.

$$(C_n + \sqrt{8}B_n)^r = C_{nr} + \sqrt{8}B_{nr}. \tag{4.4}$$

Démonstration 4.4. *On a*

$$B_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2},\ C_n = \frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{2}$$

et $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\sqrt{8}$. *Alors*

$$C_n + \sqrt{8}B_n = \frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{2} + \sqrt{8}\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{2\sqrt{8}} = \lambda_1^n.$$

Donc

$$(C_n + \sqrt{8}B_n)^r = \lambda_1^{nr} = C_{nr} + \sqrt{8}B_{nr}$$

Corollaire 4.1.

$$(C_n - \sqrt{8}B_n)^r = C_{nr} - \sqrt{8}B_{nr} \tag{4.5}$$

Démonstration 4.5. *On a*

$$C_n - \sqrt{8}B_n = \frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{2} - \sqrt{8}\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{2\sqrt{8}} = \lambda_2^n$$

De la même manière que pour le théorème on obtient le corollaire.

Remarque 4.1. *Cette propriété ressemble à la formule de Moivre*

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

Proposition 4.4. *[13]*

$$B_{m+n} = B_m C_n + C_m B_n \tag{4.6}$$

Démonstration 4.6. *D'une part on a :*

$$(C_m + \sqrt{8}B_m)(C_n + \sqrt{8}B_n) = \lambda_1^m \lambda_1^n = \lambda_1^{m+n} = (C_{m+n} + \sqrt{8}B_{m+n})$$

d'autre part

$$(C_m + \sqrt{8}B_m)(C_n + \sqrt{8}B_n) = (C_m C_n + 8B_m B_n) + \sqrt{8}(B_m C_n + B_n C_m)$$

Donc

$$C_{m+n} + \sqrt{8}B_{m+n} = (C_m C_n + 8B_m B_n) + \sqrt{8}(B_m C_n + B_n C_m)$$

Par identification on obtient :

$$\begin{aligned} C_{m+n} &= (C_m C_n + 8B_m B_n) \\ B_{m+n} &= (B_m C_n + B_n C_m) \end{aligned}$$

Corollaire 4.2.

$$B_{m-n} = B_m C_n - C_m B_n$$

Corollaire 4.3.

$$B_{2n} = 2B_n C_n$$

Démonstration 4.7. *Il suffit de remplacer m par n dans le théorème*

4.2 Polynômes balancials de Lucas

Définition 4.2. *Les polynômes balancials de Lucas sont définis par la récurrence suivante(Voir l'article de R.Frontczak [5]) :*

$$C_n(x) = 6C_{n-1}(x) - C_{n-2}(x) \qquad (n \geq 2) \tag{4.7}$$

avec $C_0(x) = 1$ et $C_1(x) = 3x$.

4.2.1 Fonctions génératrices des polynômes balancials de Lucas

Fonction génératrice ordinaire des polynômes balancials de Lucas

On procède de la même manière que pour les balancing polynômes définis par la même récurrence avec $C_0(x) = 1$, $C_1(x) = 3x$ donc :

$$c(x,t) = \sum_{n\geq 0} C_n(x)t^n = \frac{C_0(x) + (C_1(x) - 6xC_0(x))t}{1 - 6xt + t^2}$$

et

$$c(x,t) = \sum_{n\geq 0} C_n(x)t^n = \frac{1 + (3x - 6x))t}{1 - 6xt + t^2} = \frac{1 - 3xt}{1 - 6xt + t^2}$$

Fonction génératrice exponentielle des polynômes balancials de Lucas

En appliquant le lemme (2.1) *sur la réccurence définissant les les nombres balancials de Lucas où* $C_0(x) = 1$,$C_1(x) = 3x$, $\Delta = 2\sqrt{9x^{2-1}}$, $\lambda_1(x) = 3x + \sqrt{9x^2-1}$ *et* $\lambda_2(x) = 3x - \sqrt{9x^2-1}$ *on obtient :*

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} C_n(x)\frac{t^n}{n!} &= \frac{e^{\frac{6xt}{2}}}{2\sqrt{9x^2-1}}\left[(3x-(3x+\sqrt{9x^2-1}))e^{2\frac{\sqrt{9x^2-1}t}{2}} - (3x-(3x-\sqrt{9x^2-1}))e^{-2\frac{\sqrt{9x^2-1}t}{2}}\right] \\ &= \frac{e^{3xt}}{2\sqrt{9x^2-1}}\left[\sqrt{9x^2-1}e^{\sqrt{9x^2-1}t} + \sqrt{9x^2-1}e^{-\sqrt{9x^2-1}t}\right] \\ &= e^{3xt}\frac{(e^{\sqrt{9x^2-1}t} + e^{\sqrt{9x^2-1}t}}{2}\end{aligned}$$

Sachant que : $\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ *alors :*

$$\sum_{n\geq 0} C_n(x)\frac{t^n}{n!} = e^{3xt}\cosh\sqrt{9x^2-1}t$$

4.2.2 Formule de Binet

En ayant la fonction génératrice exponentielle des polynômes balancials de Lucas, on tentra de trouver la formule de Binet correspondante :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} C_n(x)\frac{t^n}{n!} &= e^{3xt}\cosh t\sqrt{9x^2-1} \\ &= e^{3xt}\left(\frac{e^{t\sqrt{9x^2-1}} + e^{-t\sqrt{9x^2-1}}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{(3x+\sqrt{9x^2-1})t} + e^{(3x-\sqrt{9x^2-1})t}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{\lambda_1(x)t} + e^{\lambda_2(x)t}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{\lambda_1^n(x)}{n!}t^n + \sum_{n\geq 0}\frac{\lambda_2^n(x)}{n!}t^n\right) \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\frac{\lambda_1^n(x)+\lambda_2^n(x)}{2}\right)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

Par identification on obtient :

$$C_n(x) = \frac{\lambda_1^n(x)+\lambda_2^n(x)}{2}.$$

4.2.3 lien entre les nombres et les polynômes balancials de Lucas

1. *On calcule la fonction génératrice ordinaire des polynômes balanceables de Lucas au point $x = 1$ et on aura*

$$C_n(1) = \frac{1 - 3(1)t}{t^2 - 6(1)t + 1} = C_n$$

qui est la fonction génératrice ordinaire des nombres balancials de Lucas
2. *On calcule la fonction génératrice exponentielle des polynômes balancials de Lucas au même point :*

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} C_n(1)\frac{t^n}{n!} &= e^{3(1)t}\cosh(t\sqrt{9(1)^2 - 1}) = e^{3t}\cosh(t2\sqrt{2}) \\
&= e^{3t}\left(\frac{e^{2\sqrt{2}+e^{-2\sqrt{2}}}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{(3+2\sqrt{2})t}e^{(3-2\sqrt{2})t}\right) \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{2}
\end{aligned}$$

*qui est la formule de Binet des nombres balancials. De **(1)** et **(2)**on déduit que les nombres balancials sont donnés par les polynômes balancials au point $x = 1$.*

4.2.4 Quelques propriétés des polynômes balancials de Lucas

Proposition 4.5. *[6, 9]*

$$C_n(-x) = (-1)^n C_n(x) \tag{4.8}$$

Démonstration 4.8.

$$C_n(-x) = \lambda_1^n(-x) + \lambda_2^n(-x) = (-1)^n\lambda_2^n(x) + (-1)^n\lambda_1^n(x).$$

Proposition 4.6.

$$C_{n-m}(x)C_{n+m}(x) = C_n^2(x) + C_m^2(x) - 1 \tag{4.9}$$

Démonstration 4.9.

$$\begin{aligned}
C_{n-m}(x)C_{n+m}(x) &= \left(\frac{\lambda_1^{n-m}(x) + \lambda_2^{n-m}(x)}{2}\right)\left(\frac{\lambda_1^{n+m}(x) + \lambda_2^{n+m}(x)}{2}\right) \\
&= \frac{\lambda_1^{2n}(x) + \lambda_1^{n-m}(x)\lambda_2^{n-m}(x) + \lambda_2^{n-m}(x)\lambda_1^{n+m}(x) + \lambda_2^{2n}(x)}{4} \\
&= \frac{\lambda_1^{2n}(x) + \lambda_2^{2n}(x) + \lambda_1^{2m}(x) + \lambda_2^{2m}(x)}{4} \\
&= \left(\frac{\lambda_1^n(x) + \lambda_2^n(x)}{2}\right)^2 - \frac{2\lambda_1^n\lambda_2^n}{4} + \left(\frac{\lambda_1^m(x) + \lambda_2^m(x)}{2}\right)^2 - \frac{2\lambda_1^m\lambda_2^m}{4} \\
&= C_n^2(x) + C_m^2(x) - 1.
\end{aligned}$$

Proposition 4.7.

$$C_n^2(x) - (9x^2-1)B_n^2(x) = 1 \tag{4.10}$$

Démonstration 4.10.

$$\begin{aligned} C_n^2(x) - (9x^2-1)B_n^2(x) &= \left(\frac{\lambda_1^n(x)+\lambda_2^n(x)}{2}\right)^2 - (9x^2-1)\left(\frac{\lambda_1^n(x)-\lambda_2^n(x)}{2\sqrt{9x^2-1}}\right)^2. \\ &= \frac{\lambda_1^{2n}(x)+\lambda_2^{2n}(x)+2\lambda_1^n(x)\lambda_2^n(x)-\lambda_1^{2n}(x)-\lambda_2^{2n}(x)+2\lambda_1^n(x)\lambda_2^n(x)}{4}. \\ &= \frac{4\lambda_1^n(x)\lambda_2^n(x)}{4}. \end{aligned}$$

Proposition 4.8.

$$C_n(x) = B_{n+1}(x) - 3xB_n(x) \tag{4.11}$$

Démonstration 4.11.

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x) - 3xB_n(x) &= \left(\frac{\lambda_1^{n+1}(x)-\lambda_2^{n+1}(x)}{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}\right) - 3x\left(\frac{\lambda_1^n(x)-\lambda_2^n(x)}{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}\right). \\ &= \frac{(3x+\sqrt{9x^2-1})\lambda_1^n(x)-(3x-\sqrt{9x^2-1})\lambda_2^n(x)-3x\lambda_1^n(x)+3x\lambda_2^n(x)}{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}. \\ &= \frac{3x\lambda_1^n(x)+\sqrt{9x^2-1}\lambda_1^n(x)-3x\lambda_2^n(x)+\sqrt{9x^2-1}\lambda_2^n(x)-3x\lambda_1^n(x)+3x\lambda_2^n(x)}{2\sqrt{9x^2-1}}. \\ &= \frac{\sqrt{9x^2-1}(\lambda_1^n(x)+\lambda_2^n(x))}{2\sqrt{9x^2-1}} = \frac{\lambda_1^n(x)+\lambda_2^n(x)}{2} \end{aligned}$$

Proposition 4.9.

$$C_n(x) = 3xC_{n-1}(x) + (9x^2-1)B_{n-1}(x) \tag{4.12}$$

Démonstration 4.12.

$$\begin{aligned} 3xC_{n-1}(x) + (9x^2-1)B_{n-1}(x) &= 3x\left(\frac{\lambda_1^{n-1}(x)+\lambda_2^{n-1}(x)}{2}\right) + (9x^2-1)\left(\frac{\lambda_1^{n-1}(x)-\lambda_2^{n-1}(x)}{2\sqrt{9x^2-1}}\right) \\ &= \frac{3x\lambda_1^{n-1}(x)+3x\lambda_2^{n-1}(x)+\sqrt{9x^2-1}\lambda_1^{n-1}(x)-\sqrt{9x^2-1}\lambda_2^{n-1}(x)}{2} \\ &= \frac{\lambda_1^{n-1}(x)(3x+\sqrt{9x^2-1})+\lambda_2^{n-1}(x)(3x-\sqrt{9x^2-1})}{2} \\ &= \frac{\lambda_1^{n-1}(x)\lambda_1(x)+\lambda_2^{n-1}(x)\lambda_2(x)}{2} = \frac{\lambda_1^n(x)+\lambda_2^n(x)}{2} \end{aligned}$$

Proposition 4.10. *[7]*

$$C_n(\frac{L_{2m}}{6}) = \frac{L_{2m}}{2} \quad et \quad C_n(\frac{i}{6}L_{2m+1}) = i^n\frac{L_{(2m+1)n}}{2}. \tag{4.13}$$

Démonstration 4.13. $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *et* $\lambda_1\lambda_2 = -1$

$$\begin{aligned}
C_n(\frac{L_{2m}}{6}) &= \frac{1}{2}\left[\left(3\frac{L_{2m}}{6} + \sqrt{9(\frac{L_{2m}}{6})^2 - 1}\right)^n + \left(3\frac{L_{2m}}{6} - \sqrt{9(\frac{L_{2m}}{6})^2 - 1}\right)^n\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(3\frac{\lambda_1^{2m} + \lambda_2^{2m}}{6} + \sqrt{9(\frac{\lambda_1^{2m} + \lambda_2^{2m}}{6})^2 - 1}\right)^n \\
&+ \frac{1}{2}\left(3\frac{\lambda_1^{2m} + \lambda_2^{2m}}{6} - \sqrt{9(\frac{\lambda_1^{2m} + \lambda_2^{2m}}{6})^2 - 1}\right)^n \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\lambda_1^{2m} + \lambda_2^{2m} + \sqrt{\lambda_1^{4m} + \lambda_2^{4m} + 2\lambda_1^{2m}\lambda_2^{2m} - 4}\right)^n \\
&+ \frac{1}{2^{n+1}}\left(\lambda_1^{2m} + \lambda_2^{2m} - \sqrt{\lambda_1^{4m} + \lambda_2^{4m} + 2\lambda_1^{2m}\lambda_2^{2m} - 4}\right)^n \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left[\left(\lambda_1^{2m} + \lambda_2^{2m} + \lambda_1^{2m} - \lambda_2^{2m}\right)^n + \left(\lambda_1^{2m} + \lambda_2^{2m} - \lambda_1^{2m} + \lambda_2^{2m}\right)^n\right] \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left[(2\lambda_1^{2m})^n + (2\lambda_2^{2m})^n\right] = \frac{1}{2}(\lambda_1^{2m} + \lambda_2^{2m}) = \frac{L_{2m}}{2}
\end{aligned}$$

En suivant les mêmes étapes on obtient $C_n(\frac{i}{6}L_{2m+1}) = i^n\frac{L_{(2m+1)n}}{2}$

Chapitre 5

Polyômes balancials et balancials de Lucas

5.1 Introduction

On a vu dans le chapitre précédant des propriétés hyprides reliant les polynômes balancials aux Polynômes balancials de Lucas. Dans ce chapitre on va établir un lien entre les deux grâce aux nombres de Bernoulli

Remarque 5.1. *Pour ne pas confondre entre les nombres balancials et ceux de Bernoulli, on notera les nombres balancials par* B_n^*

Théorème 5.1. *[?] Soit* $n \geq 1$*, alors*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2\sqrt{9x^{2-1}})^{n-k} B_{n-k} B_k^*(x) = nC_{n-1}(x) \tag{5.1}$$

Démonstration 5.1. *[7] On considère*

$$F(x,t) = \sum_{n\geq 0} B_n^*(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{3xt}}{\sqrt{9x^2-1}} \sinh(t\sqrt{9x^2-1})$$

et

$$G(x,t) = \sum_{n\geq 0} C_n(x)\frac{t^n}{n!} = e^{3xt} \cosh(t\sqrt{9x^2-1})$$

Rappelons que :

$$\coth(t) = \frac{\cosh(t)}{\sinh(t)} = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{F(x,t)}{G(x,t)} &= \frac{\sinh(t\sqrt{9x^2-1})}{\sqrt{9x^2-1}\cosh(t\sqrt{9x^2-1})} \\
G(x,t) &= \frac{F(x,t)\sqrt{9x^2-1}\cosh(t\sqrt{9x^2-1})}{\sinh(t\sqrt{9x^2-1})} \\
tG(x,t) &= t\sqrt{9x^2-1}\coth(t\sqrt{9x^2-1})F(x,t) \qquad (5.2)\\
&= te^{3xt}\cosh(t\sqrt{9x^2-1}) = t\sum_{n\geq 0} C_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} C_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 1} C_{n-1}(x)n\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

Lemme 5.1. *[7]*

$$\coth(t) = \frac{1}{t} + \sum_{n\geq 1}\frac{2^{2n}}{(2n)!}B_{2n}t^{2n-1}. \qquad (5.3)$$

Démonstration 5.2. *voir Castellanos [4]*

$$\begin{aligned}
\frac{t}{2}\coth(\frac{t}{2}) &= \frac{t}{2}\frac{e^t+1}{e^t-1} \qquad (5.4)\\
&= \frac{A}{2} + \frac{B}{e^t-1} = \frac{A(e^t-1)+2B}{2(e^t-1)} = \frac{Ae^t - A + 2B}{2(e^t-1)}
\end{aligned}$$

Par identification avec (5.3) *on obtient*

$$\begin{cases} A = t \\ -A + 2B = t \Rightarrow B = t \end{cases}$$

En sachant que $\sum_{n\geq 0} B_n\frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t-1}$, $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$ *et* $B_{2n+1} = 0 \quad$ *pour* $n \geq 1$ *donc*

$$\begin{aligned}
\frac{t}{2}\coth(\frac{t}{2}) &= \frac{t}{2} + \frac{t}{e^t-1} = \frac{t}{2} + \sum_{n\geq 0} B_n\frac{t^n}{n!} \\
&= \frac{t}{2} + \frac{1t^0}{0!} - \frac{t^1}{2*1!} + \sum_{n\geq 2} B_n\frac{t^n}{n!} = 1 + \sum_{n\geq 2} B_n\frac{t^n}{n!} \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1} B_{2n}\frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad (car\ B_{2n+1} = 0\ pour\ n \geq 1)
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{2t}{2}\coth(\frac{2t}{2}) = t\coth(t) = 1 + \sum_{n\geq 1} B_{2n}\frac{(2t)^{2n}}{(2n)!}$$

d'où le lemme.

Alors

$$\begin{aligned} t\sqrt{9x^2-1}\coth(t\sqrt{9x^2-1}) &= \frac{t\sqrt{9x^2-1}}{t\sqrt{9x^2-1}} + t\sqrt{9x^2-1}\sum_{n\geq 1}\frac{2^{2n}}{(2n)!}B_{2n}(t\sqrt{9x^2-1})^{2n-1} \\ &= 1+\sum_{n\geq 1}(2\sqrt{9x^2-1})^{2n}B_{2n}\frac{t^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n\geq 0}(2\sqrt{9x^2-1})^{2n}B_{2n}\frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad (car\ B_0=1) \qquad (5.5) \end{aligned}$$

en injectant (5.4) *dans* (5.2) *on obtient*

$$\sum_{n\geq 0}(2\sqrt{9x^2-1})^{2n}B_{2n}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\sum_{n\geq 0}B_n^*(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 1}C_{n-1}(x)n\frac{t^n}{n!}$$

en utilisant le produit de cauchy, on aura :

$$\sum_{n\geq 0}(2\sqrt{9x^2-1})^{2n}B_{2n}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\sum_{n\geq 0}B_n^*(x)\frac{t^n}{(n)!} = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2\sqrt{9x^2-1})^{2(n-k)}B_{2(n-k)}B_{2k}^*(x)\right)\frac{t^n}{n!}$$

Théorème 5.2. *Soit $n\geq 1$, alors*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2\sqrt{9x^{2-1}})^{n-k}(2^{n-k}-1)B_{n-k}C_k(x) = n(9x^2-1)B_{n-1}^*(x) \qquad (5.6)$$

Démonstration 5.3. *On considère les mêmes fonctions $F(x,t)$ et $G(x,t)$ que pour le*

théorème (5.1) *et on a* $\tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}$

$$\begin{aligned}
\frac{(9x^2-1)tF(x,t)}{G(x,t)} &= t(9x^2-1)\left[\frac{e^{3xt}\sinh(t\sqrt{9x^2-1})}{\sqrt{9x^2-1}e^{3xt}\cosh(t\sqrt{9x^2-1})}\right] \\
&= t\sqrt{9x^2-1}\tanh(t\sqrt{9x^2-1}) \\
(9x^2-1)tF(x,t) &= t\sqrt{9x^2-1}\tanh(t\sqrt{9x^2-1})e^{3xt}\cosh(t\sqrt{9x^2-1}) \qquad (5.7)\\
&= t\frac{9x^2-1}{\sqrt{9x^2-1}}e^{3xt}\sinh(t\sqrt{9x^2-1}) \\
&= t(9x^2-1)\sum_{n\geq 0} B_n^*(x)\frac{t^n}{n!} \\
&= (9x^2-1)\sum_{n\geq 0} B_n^*(x)\frac{t^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 1} B_{n-1}^*(x)n\frac{t^n}{n!}(9x^2-1)
\end{aligned}$$

Lemme 5.2. *[7]*

$$\tanh(t) = \sum_{n\geq 0}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}B_{2n}t^{2n-1} \qquad (5.8)$$

Démonstration 5.4. *du lemme*

$$\begin{cases} \sinh(2a) = 2\sinh(a)\cosh(a) \\ \cosh(2a) = \cosh^2(a) + \sinh^2(a) \end{cases}$$

On considère :

$$\begin{aligned}
2\coth(2t) - \coth(t) &= 2\frac{\cosh(2t)}{\sinh(2t)} - \frac{\cosh(t)}{\sinh(t)} \\
&= \frac{\cosh^2(t)+\sinh^2(t)}{\sinh(t)\cosh(t)} - \frac{\cosh^2(t)}{\sinh(t)\cosh(t)} \\
&= \frac{\sinh^2(t)}{\sinh(t)\cosh(t)} = \tanh(t)
\end{aligned}$$

Donc : $\tanh(t) = 2\coth(2t) - \coth(t)$

$$\begin{aligned} t\tanh(t) &= 2t\coth(2t) - t\coth(t) \\ &= \sum_{n\geq 0} 2^{2n} B_{2n} \frac{(2t)^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n\geq 0} B_{2n} \frac{(2t)^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n\geq 0} B_{2n} \frac{(2t)^{2n}}{(2n)!} (2^{2n} - 1) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_{2n} t^{2n} \end{aligned}$$

D'où le lemme. (Voir C.Lin[11])

Alors

$$t\sqrt{9x^2-1}\tanh(t\sqrt{9x^2-1}) = \sum_{n\geq 0} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_{2n} (t\sqrt{9x^2-1})^{2n} \tag{5.9}$$

En injectant (5.7) *dans* (5.6) *on obtient :*

$$\sum_{n\geq 0} (2\sqrt{9x^2-1})^{2n} (2^{2n}-1) B_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \sum_{n\geq 0} C_n(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} n(9x^2-1) B^*_{n-1}(x) \frac{t^n}{n!}$$

En appliquant le produit de cauchy on aura :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2\sqrt{9x^2-1})^{n-k} (2^{n-k}-1) B_{n-k} C_k(x) = n(9x^2-1) B^*_{n-1}(x)$$

Théorème 5.3.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2\sqrt{9x^2-1})^{n-k} B_{n-k} B^*_k(x) = n(C_{n-1}(x) - \sqrt{9x^2-1} B^*_{n-1}(x)) \tag{5.10}$$

Démonstration 5.5. *On considère*

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^*_{n-k}(x) (2\sqrt{9x^2-1})^k B_k$$

On remarque que $A_n(x)$ *est le produit de Cauchy de*

$$\sum_{n\geq 0} B^*_n \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{3xt}}{\sqrt{9x^2-1}} \sinh(t\sqrt{9x^2-1}) \quad et \quad \sum_{n\geq 0} B_n (2\sqrt{9x^2-1})^n \frac{t^n}{n!} = \frac{2t\sqrt{9x^2-1}}{e^{2t\sqrt{9x^2-1}} - 1}$$

Donc

$$A(x,t) = \frac{2te^{3xt}}{e^{2t\sqrt{9x^2-1}}-1}\sinh(t\sqrt{9x^2-1})$$

Lemme 5.3. *[10]*

$$\coth(t) = 1 + \frac{2}{e^{2t}-1} = 1 + \frac{1}{t}\sum_{n\geq 0} 2^n B_n \frac{t^n}{n!}$$

Démonstration 5.6. *du lemme.*

$$\begin{aligned}\coth(t) &= \frac{e^{2t}+1}{e^{2t}-1} = \frac{e^{2t}-1+2}{e^{2t}-1}\\ &= \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}-1} + \frac{2}{e^{2t}-1} = 1 + \frac{2}{e^{2t}-1}\\ &= 1 + \frac{1}{t}\frac{2t}{e^{2t}-1}\end{aligned}$$

D'où le lemme

Alors

$$\begin{aligned}A(x,t) &= te^{3xt}\left(\coth(t\sqrt{9x^2-1})-1\right)\sinh(t\sqrt{9x^2-1})\\ &= te^{3xt}\coth(t\sqrt{9x^2-1})\sinh(t\sqrt{9x^2-1}) - te^{3xt}\sinh(t\sqrt{9x^2-1})\\ &= te^{3xt}\cosh(t\sqrt{9x^2-1}) - te^{3xt}\sinh(t\sqrt{9x^2-1})\\ &= tG(t,x) - t\sqrt{9x^2-1}F(t,x)\end{aligned}$$

D'après (5.2) $tG(t,x) = \sum_{n\geq 1} C_{n-1}(x)n\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} C_{n-1}(x)n\frac{t^n}{n!}$
D'après (5.6) $t\sqrt{9x^2-1}F(t,x) = \sum_{n\geq 0} B^*_{n-1}(x)n\frac{t^n}{n!}\sqrt{9x^2-1}$
Donc

$$\frac{2te^{3xt}}{e^{2t\sqrt{9x^2-1}-1}}\sinh t\sqrt{9x^2-1} = \sum_{n\geq 0} n\left(C_{n-1}(x) - \sqrt{9x^2-1}B^*_{n-1}(x)\right)\frac{t^n}{n!}$$

Et

$$\sum_{n\geq 0}\left[\sum_{k=0} n\binom{n}{k}B^*_{n-k}(x)(2t\sqrt{9x^2-1})^k B_k\right]\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} n\left(C_{n-1}(x) - \sqrt{9x^2-1}B^*_{n-k}(x)\right)\frac{t^n}{n!}$$

D'où le théorème.

Théorème 5.4.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2\sqrt{9x^2-1})^{n-k}(2^{n-k}-1)B_{n-k}C_k(x) = n(9x^2-1)B^*_{n-1}(x) - n\sqrt{9x^2-1}C_{n-1}(x)$$

Démonstration 5.7. *Considérons*

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C_k(x)(2\sqrt{9x^2-1})^{n-k}(2^{n-k}-1)B_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[C_k(x)(4\sqrt{9x^2-1})^{n-k}B_{n-k} - C_k(x)(2\sqrt{9x^2-1})^{n-k}B_{n-k}\right] \end{aligned}$$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C_k(x)(4\sqrt{9x^2-1})^{n-k}B_{n-k} \quad et \quad K_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C_k(x)(2\sqrt{9x^2-1})^{n-k}B_{n-k}$$

générées respectivement par :

$$J(x,t) = \frac{4t\sqrt{9x^2-1}}{e^{4t\sqrt{9x^2-1}}-1} e^{3xt}\cosh(t\sqrt{9x^2-1}) \quad et \quad K(x,t) = \frac{2t\sqrt{9x^2-1}}{e^{2t\sqrt{9x^2-1}}-1} e^{3xt}\cosh(t\sqrt{9x^2-1})$$

On déduit que $D_n(x)$ est généré par :

$$D(x,t) = \frac{4t\sqrt{9x^2-1}}{e^{4t\sqrt{9x^2-1}}-1} e^{3xt}\cosh(t\sqrt{9x^2-1}) - \frac{2t\sqrt{9x^2-1}}{e^{2t\sqrt{9x^2-1}}-1} e^{3xt}\cosh(t\sqrt{9x^2-1})$$

$e^{2x}-1 = (e^x-1)(e^x+1)$

$$\begin{aligned} D(x,t) &= \frac{2t\sqrt{9x^2-1}}{e^{2t\sqrt{9x^2-1}}-1}\left(\frac{2}{e^{2t\sqrt{9x^2-1}}}-1\right) e^{3xt}\cosh(t\sqrt{9x^2-1}) \\ &= \frac{2t\sqrt{9x^2-1}}{e^{2t\sqrt{9x^2-1}}-1}\left(\frac{2-(e^{2t\sqrt{9x^2-1}}+1)}{e^{2t\sqrt{9x^2-1}}+1}\right) e^{3xt}\cosh(t\sqrt{9x^2-1}) \\ &= \frac{2t\sqrt{9x^2-1}}{e^{2t\sqrt{9x^2-1}}-1}\left(\frac{1-e^{2t\sqrt{9x^2-1}}}{e^{2t\sqrt{9x^2-1}}+1}\right) e^{3xt}\cosh(t\sqrt{9x^2-1}) \\ &= \frac{1-e^{2t\sqrt{9x^2-1}}}{e^{2t\sqrt{9x^2-1}}-1}\left(\frac{2t\sqrt{9x^2-1}}{e^{2t\sqrt{9x^2-1}}+1}\right) e^{3xt}\cosh(t\sqrt{9x^2-1} \\ &= -\frac{2t\sqrt{9x^2-1}}{e^{2t\sqrt{9x^2-1}}+1} e^{3xt}\frac{e^{t\sqrt{9x^2-1}}+e^{-t\sqrt{9x^2-1}}}{2} \\ &= -\frac{t\sqrt{9x^2-1}}{e^{2t\sqrt{9x^2-1}}+1} e^{3xt}\frac{e^{2t\sqrt{9x^2-1}}+1}{e^{2t\sqrt{9x^2-1}}} \\ &= -\frac{t\sqrt{9x^2-1}}{e^{t\sqrt{9x^2-1}}} e^{3xt} \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^{t\sqrt{9x^2-1}}} = e^{-t\sqrt{9x^2-1}} &= e^{-t\sqrt{9x^2-1}} - e^{t\sqrt{9x^2-1}} + e^{t\sqrt{9x^2-1}} \\ &= e^{t\sqrt{9x^2-1}} - 2\frac{e^{t\sqrt{9x^2-1}} - e^{-t\sqrt{9x^2-1}}}{2} \\ &= e^{t\sqrt{9x^2-1}} - 2\sinh(t\sqrt{9x^2-1})\end{aligned}$$

Et $2\sinh(a) - e^a = \sinh(a) - \cosh(a)$ *car*

$$\begin{aligned}2\sinh(a) - e^a &= 2\left(\frac{e^a - e^{-a}}{2}\right) - e^a = -e^{-a} \\ &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} - \frac{e^a + e^{-a}}{2} = \sinh(a) - \cosh(a).\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}D(x,t) &= (-e^{t\sqrt{9x^2-1}} + 2\sinh(t\sqrt{9x^2-1}))t\sqrt{9x^2-1}e^{3xt} \\ &= t\sqrt{9x^2-1}(\sinh(t\sqrt{9x^2-1}) - \cosh(t\sqrt{9x^2-1}))e^{3xt} \\ &= t\sqrt{9x^2-1}e^{3xt}\sinh(t\sqrt{9x^2-1}) - t\sqrt{9x^2-1}e^{3xt}\cosh(t\sqrt{9x^2-1}) \\ &= 9x^2 - 1\sum_{n\geq 0} nB^*_{n-1}(x)\frac{t^n}{n!} - \sqrt{9x^2-1}\sum_{n\geq 0} nC_{n-1}(x)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

On déduit que $D_n(x) = n(9x^{2-1})B^*_{n-1}(x) - n\sqrt{9x^2-1}C_{n-1}(x)$
D'où le théorème.

Corollaire 5.1.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}32^{\frac{n-k}{2}}B^*_k B_{n-k} = nC_{n-k}. \tag{5.11}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}32^{\frac{n-k}{2}}(2^{n-k}-1)C_k B_{n-k} = 8nB^*_{n-k}. \tag{5.12}$$

Démonstration 5.8. *pour démonter ce corollaire il suffit d'évaluer le théorème 5.1 et le théorème 5.2 respectivement au point* $x = 1$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2\sqrt{9x^{2-1}})^{n-k}B_{n-k}B^*_k(1) = nC_{n-1}(1)$$

Des chapitres précédants on sait que $B^*_n(1) = B_n$ *et* $C_n(1) = C_n$ *alors :*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(4\sqrt{2})^{n-k}B_{n-k}B^*_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(32)^{\frac{n-k}{2}}B_{n-k}B^*_k = nC_{n-1}$$

D'où (5.8)

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2\sqrt{9(1)^{2-1}})^{n-k}(2^{n-k}-1)B_{n-k}C_k(1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(32)^{\frac{n-k}{2}}(2^{n-k}-1)B_{n-k}C_k=n8B^*_{n-1}$$

D'où (5.9)

5.2 Conclusion

A la fin de ce dernier chapitre nous constatons que c'est grâce aux fonctions cosinus hyperboliques et sinus hyperboliques qu'on a pu établir le lien entre les polynômes balancials et les polynômes balancials de Lucas.

Bibliographie

[1] A. Behera, and G.K. Panda, On the square roots of triangular numbers, *mathstat* (1998), 98–105

[2] M.S. Boudrioua, Sur les fonction génératrices des polynômes, *Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou*,(2018).

[3] D. Castellanos, A generalization of Binet's formula and some of it's consequences,*Universidad de Crabobo, Valancia, Venezuala*, (1987), 425–438.

[4] D. Castellanos,The Ubiquitous Pi.Part1, *Math. mag.* **61** (1988), 67-98.

[5] R. Frontczak, On balancing polynomials, *Appl. Math. Sci.* **13** (2019), 57–66.

[6] R. Frontczak, Powers of balancing polynomials and some consequences for Fibonacci Sums, *International Journal of Mathematical Analysis* **13** (2019), 109–115.

[7] R. Frontczak, Relating Fibonacci Numbers to Bernoulli Numbers via Balancing Polynomials, *Journal of Integer Sequences* êxtbf22 (2019),1–15.

[8] R. Fontczak, and Toras Goy, Additional close links between balancing and Lucas balancing polynomials , *Math.NT*, **1** (2007) 1–14.

[9] R. Fontczak, and Toras Goy, Combinatorial sums associated with balancing and Lucas balancing polynomials , *Annales mathematicae et informaticae*, (2020) .

[10] M. Goubi,Relating balancing polynomials to Lucas-balancing polynomials via Bernoulli numbers,*Journal of integer sequences* **23** (2020).

[11] C. Lin,On Bernoulli numbers and its properties,*Math. HO.* (10/2004).

[12] P. Oljas, Properties of balancing, cobalancing and generalized balancing numbers, *Annales mathematicae et informaticae*, **37** (2010) 125–138.

[13] G.K. Panda, Some facinating properties of balancing numbers, *Fibonacci numbers and their applications* **10** (2006).

[14] B.K. Patel, N. Irmak, and P. K. Ray, Incomplete balancing and Lucas-balancing numbers, *Math. Rep.* **20** (2018), 59–72.

[15] P.K. Ray, and Juli Sahu, Generating functions for certain balancing and Lucas balancing numbers, *Palestine journal of mathematics*, **5(2)** (2016) 122–129 .

[16] P.K. Ray, and K.Parida, Generalization of Cassini formulas for balancing ana Lucas balancing numbers, *Mat.Stud*, **42** (2014) 9–14.

[17] P.Filipponi, and Adina Di Porto, More on the Fibonacci pseudoprimes,*Fondazione Ugo Bordoni, Roma, Italy* , (1987) 232–242.

[18] K. Wu Chen, and Minkking Eie, A note on generalized Bernoulli numbers, *Pacific journal of Mathematics*, **42** (05/2001).