

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la recherche Scientifique



Université Mouloud MAMMARI de TIZI-OUZOU  
Faculté du Génie de la construction  
Département de Génie Civil



## **MEMOIRE DE MAGISTER**

Spécialité : Génie civil

Option : Modélisation et Calcul Non Linéaire

Thème

### **Modélisation du comportement, jusqu'à rupture, en cisaillement des voiles en béton armé**

Présenté par :

**SAAD Ammar**

Devant le jury d'examen suivant :

Mr. BOUAFIA Youcef	PROFESSEUR	UMMTO	Président
Mr. KACHI Mohand Said	PROFESSEUR	UMMTO	Rapporteur
Mr. AIT TAHAR Kamal	PROFESSEUR	UMMTO	Examineur
Mr. AIT AIDER Hacene	PROFESSEUR	UMMTO	Examineur

Soutenu le .. / .. / 2013

## ***DEDICACES***

*Je tiens à dédier ce travail à :*

*Mon père.*

*Ma mère*

*Mes frères et sœurs*

*Mes nièces et mes neveux.*

*Tous mes amis(es).*

## *REMERCIEMENTS*

Je tiens à présenter mes respectueux remerciements à monsieur KACHI Mohand Said ,professeur et chargé de cours au département de génie civil à l'Université de TIZI-OUZOU, de m'avoir proposé ce sujet et d'avoir bien voulu diriger et assurer la supervision de ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à l'ensemble du corps enseignant qui a contribué à ma formation.

Je remercie les membres de jury qui ont bien voulu juger ce travail et d'y apporter leurs remarques constructives.

Que tous ceux qui ont contribué aussi bien de près que de loin à ma formation trouvent ma profonde reconnaissance.

## Résumé

Le comportement en flexion des voiles en béton armé est relativement maîtrisé. En effet, Plusieurs méthodes de calcul des voiles en flexion sont proposées dans la littérature, mais toutes les méthodes classiques des éléments en béton armé tiennent compte de l'effet de l'effort tranchant dans le domaine linéaire quand elles ne le négligent pas complètement.

Il s'agit de construire, dans le cadre de cette étude, une méthode de résolution de l'équilibre d'un panneau. Connaissant les contraintes normales agissant sur les bords du panneau, la résolution de l'équilibre du voile en élasticité non linéaire tenant compte de l'effet de l'effort tranchant ainsi que de l'interaction entre les déformations de cisaillement et celles normales dans le panneau permettra à coup sûr de définir au mieux la rigidité de ces éléments en cisaillement et de mieux approcher leur comportement global.

**Mots clés :** voile en béton armé, élasticité non linéaire, rigidité de cisaillement, interaction entre la distorsion et des déformations normales.

## **Abstract**

The behavior for flexure of the reinforced concrete shear walls is relatively mastered. In fact, several methods of calculating of the shear walls for flexion are proposed in the literature, but all the classical methods of the reinforced concrete elements take account of the effect of the shearing action in the linear field when they do not neglect it completely.

It is build, within the frame of this study, a method of resolution of the equilibrium of a panel. Knowing the normal stresses acting on the edges of the panel, the resolution of the equilibrium of the shear walls in nonlinear elasticity taking account of the effect of the shear and the interaction between the normal strains and the shear strains in the panel will allow surely to define the rigidity of these elements in shear and to approach their total behavior.

**Key words:** shear walls, nonlinear elasticity, shear rigidity, interaction between the shear strain and of the normal strains.

## SOMMAIRE

Introduction générale.....	1
<b>CHAPITRE I. Les voiles en béton armé sous charges extrêmes : Comportement et pratiques de dimensionnement</b>	
I.1. Introduction.....	3
I.2. Les principales caractéristiques du comportement des voiles.....	6
I.3. Paramètres contribuant à la résistance à l'effort tranchant .....	10
I.4. Pratiques pour le dimensionnement des éléments en béton armé soumis à des efforts de cisaillement .....	11
I.4.1. L'analogie du treillis («Truss analogy») .....	12
I.4.2. Théorie du champ de compression .....	18
I.4.3. La théorie du treillis adoucissant.....	20
I.5. Conclusions.....	26
<b>CHAPITREII : Comportement vis-à-vis de l'effort tranchant des éléments en béton armé</b>	
II.1. Comportement en cisaillement des éléments .....	28
II.2 Essais de l'université de TORONTO .....	29
<b>CHAPITREIII : Méthodes de calcul vis-à-vis de l'effort tranchant des éléments en béton armé.</b>	
III.1. Méthodes de calcul .....	36
III.1.1. Etude d'un élément isolé.....	36
III.1.1.1 Hypothèses fondamentales de la méthode .....	36
III.1.1.2. Hypothèses de calcul.....	37
III.1.1.3 Base du model .....	37

III.1.1.4 Equations d'équilibre.....	37
III.1.1.5 Equations de compatibilité.....	39
III.1.1.6. Comportement des matériaux .....	40
III.1.1.6.1 Comportement du béton en compression.....	40
III.1.1.6.2. Comportement du béton en traction.....	41
III.1.1.6.3. Comportement de l'acier .....	43
III.2. Modèles de calcul .....	45
III.2.1. Modèle de Vecchio et Collins .....	45
III.2.1.1 Élément sous effort tranchant et contraintes normales constantes.....	45
III.2.1.2. Élément sous effort tranchant constant et contraintes normales variables.....	49
III.2.1.3 Méthode générale de résolution pour un élément isolé .....	52
III.2.2 Modèle de Stanciuliscu .....	57
III.2.3 Modèle de KACHI .....	64
III.3.Conclusion .....	66
 <b>CHAPITRE IV : Etude d'un élément voile en béton armé.</b>	
IV.1.Introduction .....	67
IV.2.Algorithme de calcul .....	67
 <b>CHAPITRE V : Validation du programme élaboré</b>	
V.1.Introduction .....	71
V.2. Résultats des essais fait à l'université de TORONTO .....	71
V.3. Comparaison des résultats calculés à ceux obtenus lors des essais .....	72
<b>CHAPITRE VI Conclusion générale .....</b>	<b>78</b>

## **Introduction générale**



## INTRODUCTION GENERALE

Le problème de cisaillement dans les constructions en béton armé est depuis longtemps l'objet d'études expérimentales et théoriques dans plusieurs laboratoires et centres de recherches dans le monde. La plupart des sections en béton armé sont calculées suivant le formalisme linéaire de la théorie de l'élasticité établie au 19<sup>ème</sup> siècle. Or de nombreux essais effectués sur ces sections et les matériaux constitutifs laissent penser qu'il n'est pas possible d'obtenir, par le calcul linéaire, une représentation exacte de la déformabilité des sections.

Actuellement peu de modèles numériques permettent de caractériser le comportement en cisaillement d'une section d'un voile en béton armé. L'objet de notre travail est l'élaboration d'une méthode de calcul basée sur l'élasticité non linéaire, permettant la modélisation jusqu'à rupture des sections des voiles en béton armé soumis à l'effort tranchant en tenant en compte des lois de comportement non linéaire des matériaux.

Sur la base de cette étude, un programme informatique est élaboré suivant les normes FORTAN 90, puis confronté à des résultats expérimentaux obtenus sur des essais sur des sections soumises à l'effort tranchant.

**Cette étude est structurée comme suit :**

**Le chapitre I** est consacré à l'étude bibliographique sur Les voiles en béton armé sous charges extrêmes : Comportement et pratiques de dimensionnement .

**Le chapitre II** est consacré aux études expérimentales sur les éléments en béton armé soumis au cisaillement effectuées à l'université de Toronto.

**Le chapitre III** est consacré aux méthodes de calcul d'un élément en béton armé à l'effort tranchant en présentant l'ensemble des paramètres qui lui sont liés, l'inclinaison des bielles de béton et la distorsion.

Dans **le chapitre IV** on s'intéresse à l'étude d'une section d'un élément voile en béton armé. En présentant la méthode de calcul concernant l'étude de l'équilibre de l'élément sous forme d'un algorithme et organigramme général de calcul. Ce programme permet la modélisation numérique du comportement non linéaire, jusqu'à rupture, de l'élément voile en béton armé soumis à un effort normal et à l'effort tranchant.

**Le chapitre V** est consacré à la validation du programme élaboré. Plusieurs exemples d'application sont traités. Des comparaisons avec les résultats expérimentaux obtenus sur les voiles à l'Université de Toronto sont effectuées.

**Dans le chapitre VI** on tire les conclusions générales, obtenues à l'issue de cette étude.

## **CHAPITRE I :**

**Les voiles en béton armé sous charges extrêmes :  
Comportement et pratiques de dimensionnement.**

### **I.1. Introduction :**

L'utilisation des voiles en béton armé pour la construction des structures dans les régions sismiques devient de plus en plus fréquente. La raison est que les voiles, outre leur rôle porteur vis-à-vis des charges verticales, sont particulièrement efficaces pour assurer la résistance aux forces horizontales. Reprenant la plus grande partie de l'effort sismique, ils conditionnent le comportement des structures et jouent un rôle primordial pour la sécurité. Par rapport à d'autres éléments de structures, l'utilisation des voiles, entre autres, (Penelis et al. 1997) :

1. Augmente la rigidité de l'ouvrage ;
2. Diminue l'influence des phénomènes du second ordre et éloigne la possibilité d'instabilité;
3. Diminue les dégâts des éléments non-porteurs dont le coût de réparation est souvent plus grand que celui des éléments porteurs ;
4. Apaise les conséquences psychologiques sur les habitants de hauts bâtiments dont les déplacements horizontaux sont importants lors des séismes ;
5. Rend le comportement de la structure plus fiable que celui d'une structure ne comportant que des portiques .En effet, la philosophie de «capacity design» adoptée par tous les codes parasismique de nos jours – impose la création d'articulations plastiques dans les poutres, alors que les voiles doivent rester élastiques. L'utilisation des voiles diminue aussi l'influence des éléments non-porteurs sur le comportement de la structure, influence que nous ne maîtrisons pas aujourd'hui. De plus, un voile fissuré garde une grande partie de sa résistance, ce qui n'est pas en général le cas d'un poteau.

Les constructions contreventées par des voiles de béton armé (en nombre suffisant et bien disposés) sont donc un type de « structure rigide » qui limite les déplacements relatifs des planchers beaucoup plus que ne le font les ossatures. Les éventuels dommages dans les zones critiques créent moins d'effondrements que pour les ossatures.

La Figure 1.1 présente deux immeubles voisins, à l'origine apparemment semblables mais inégaux face aux secousses sismiques, le premier montre un comportement excellent et le second complètement ruiné.



Figure 1.1 : Comportement de deux immeubles voisins face aux secousses sismiques (Zacek, 2008)

En effet, les règles PS-92 précisent que les bases des murs voiles (rez-de-chaussée) subissent les contraintes les plus élevées de la structure, elles sont donc considérées comme « zones critiques ». C'est donc potentiellement là que la dégradation du béton ou sa rupture fragile commenceront, s'ensuit un effondrement partiel ou total de l'ouvrage. Ces régions situées à la base des voiles (Figure 1.2), ainsi que celles situées à chaque niveau de changement notable de la section de coffrage, font l'objet de dispositions spéciales des règles de construction parasismique qui nous demandent de renforcer les chaînages à ces endroits.



**Voile très endommagé  
(Séisme de Kobé, Japon 1995)**



**Rotule plastique dans un voile  
(Séisme de Tangshan, Chine 1976)**

Figure 1.2 : Dégradation du bâtiment au niveau de la zone critique (Zacek, 2008)

Ainsi, il est recommandé d'assurer une parfaite adhérence entre un béton et des armatures de qualité. Tant qu'il ne reçoit que les charges verticales permanentes (poids de la construction, des équipements, des occupants...), le béton armé peut présenter certains défauts qui restent cachés (ou non).

Sous l'effet des secousses, le béton perd (plus ou moins brutalement) son adhérence autour et à l'intérieur des armatures, ce qui affaiblit l'ouvrage.

Au-delà des déformations possibles sans dommage il y a d'abord dégradation puis rupture. Il est donc souhaitable d'obtenir un endommagement progressif sans perte de résistance significative, plutôt que la rupture brutale.

A gauche de la Figure 1.2, est montré un exemple de ruptures « fragiles » (les armatures n'étaient pas appropriées en zone sismique). A droite, exemple de rupture dite « ductile » d'un voile (la disposition des aciers longitudinaux et transversaux très rapprochés et desection modérée permet une bonne « plasticité » ou « ductilité » du béton armé. C'est à dire que, s'il est trop contraint sous l'effet des secousses, l'élément de béton armé se dégrade de façon irréversible, mais ne « se rompt pas »).

## I.2. Les principales caractéristiques du comportement des voiles :

Les principaux paramètres influençant le comportement des voiles en béton armé sont l'élanement (rapport hauteur  $H$  sur la largeur  $L$  du voile), les armatures (pourcentages et dispositions) et la contrainte normale moyenne (Davidovici et al. 1985).

Il y a lieu de distinguer les voiles élancés (élanement  $H/L$  supérieur à 1.5 environ) et les voiles courts (élanement  $H/L$  inférieur à 1.5).

### ➤ Voiles élancés :

Les principaux modes de rupture des voiles élancés sont représentés sur la figure 1.3. :

- Modes de rupture par flexion

-La rupture en flexion par plastification en traction des armatures verticales (a1) est le mode de rupture «normal» lorsque la flexion est prépondérante et que l'effort normal est faible.

- La rupture en flexion par écrasement du béton (a2) apparaît pour des voiles assez fortement sollicités et armés en flexion.

- Le mode de ruine (a3) concerne des voiles faiblement armés en flexion, surtout si les armatures verticales sont essentiellement réparties et non pas concentrées aux bords.

- Modes de rupture par flexion/cisaillement

- Les deux derniers modes de rupture - rupture en flexion/effort tranchant :

(b1) par plastification des armatures verticales de flexion et des armatures transversales,

(b2) rupture par écrasement dans le béton de l'âme - apparaissent quand le cisaillement devient prépondérant.

Le comportement d'un voile élancé est assimilable à celui des poutres et il n'y a pas de difficulté pour évaluer, par les méthodes classiques, la résistance et la déformabilité vis-à-vis de la rupture par flexion ou par effort tranchant.

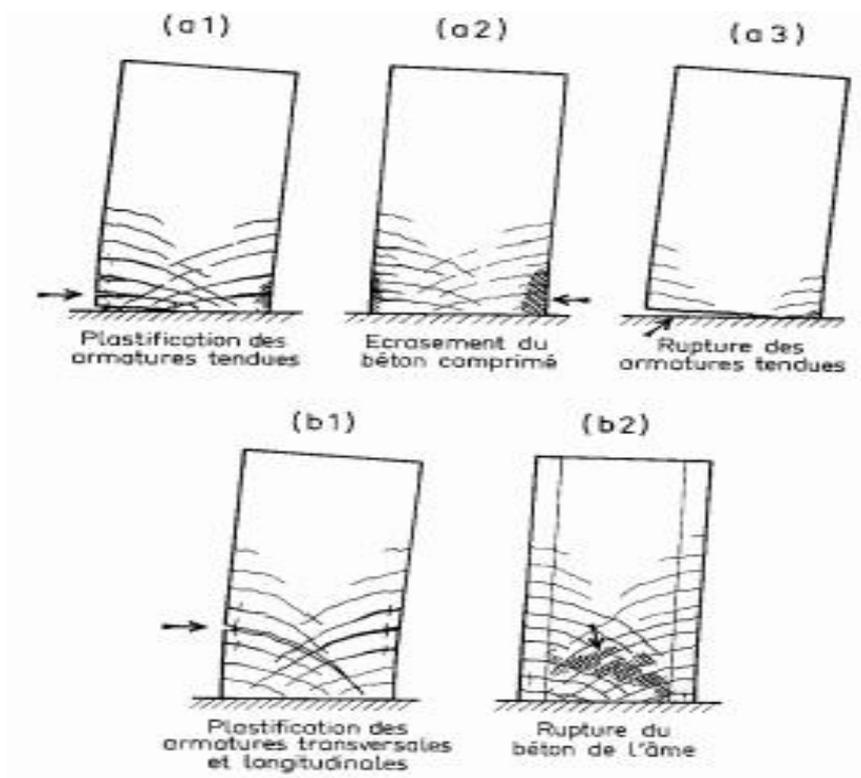


Figure 1.3. Modes de rupture de voiles élancés (Davidovici et al. 1985)

➤ **Voiles courts :**

Dans le cas des voiles courts, l'effort tranchant est généralement prépondérant par rapport à la flexion. Les principaux mécanismes de rupture sont ceux de la figure 1.4. :

-La rupture par glissement à l'encastrement - «slidingshear» - (c1) est obtenue par plastification progressive des armatures verticales sous l'action de la flexion et du cisaillement ou par insuffisance d'armatures verticales réparties. Ce mode de cisaillement est caractérisé par une fissure horizontale située à la base de mur dont les lèvres glissent l'une par rapport à l'autre. Il apparaît souvent pour des chargements cycliques.

-La rupture par effort tranchant avec plastification (éventuellement rupture) des armatures le long de fissures diagonales - «tension failure» - (c2) est un cas aussi fréquemment rencontré.

-La rupture par effort tranchant dans le béton de l'âme (c3) est produite par une destruction du béton à la base des bielles qui transmettent les efforts de compression - «compression failure».

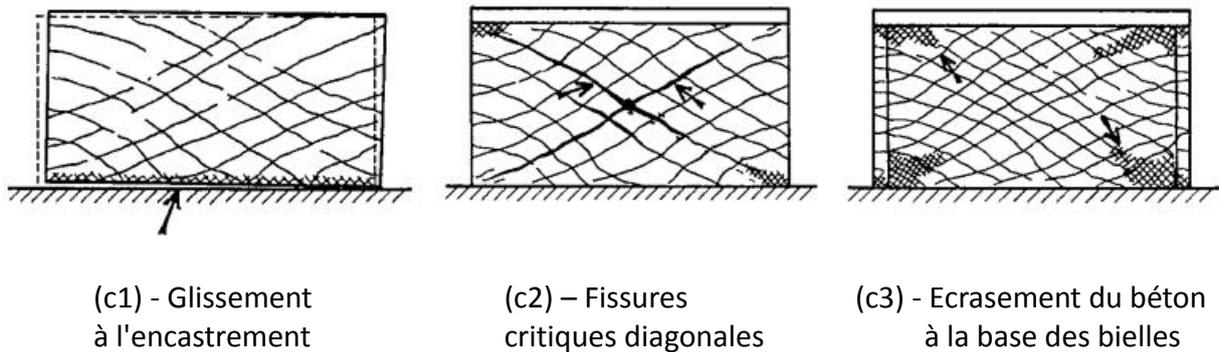


Figure 1.4. Modes de rupture de voiles courts (Davidovici et al. 1985)

Le calcul d'un voile court en flexion ne peut plus être basé sur l'hypothèse de la planéité des sections. Si l'on veut assimiler son comportement à celui d'une poutre, il faut enrichir la cinématique de la poutre en la dotant d'une distribution non-linéaire des déformations. Dans la plupart des cas le calcul est effectué en utilisant des éléments plaques.

**Remarques :**

- Les codes réglementaires parasismiques préconisent des coefficients du comportement  $q$  inférieurs pour des structures à voiles par rapport aux structures à portiques, malgré l'influence bénéfique des voiles sur leur comportement. La raison en est la volonté d'éviter des ruptures fragiles. Alors que les voiles pour lesquels la flexion est prépondérante présentent en général une grande capacité de dissipation d'énergie (Figure 1.5).

Les voiles cisailés ne sont pas suffisamment ductiles et les courbes efforts tranchant/cisaillement sont pincées (Figure 1.6). Pour ces voiles, il n'y a pas de mode fondamentalement ductile, à moins de dispositions d'armatures tout à fait spécifiques.

Aujourd'hui nous savons pourtant comment dimensionner une structure pour éloigner la possibilité d'une rupture par effort tranchant. La tendance actuelle est donc pour une augmentation des coefficients de comportement dans les codes réglementaires.

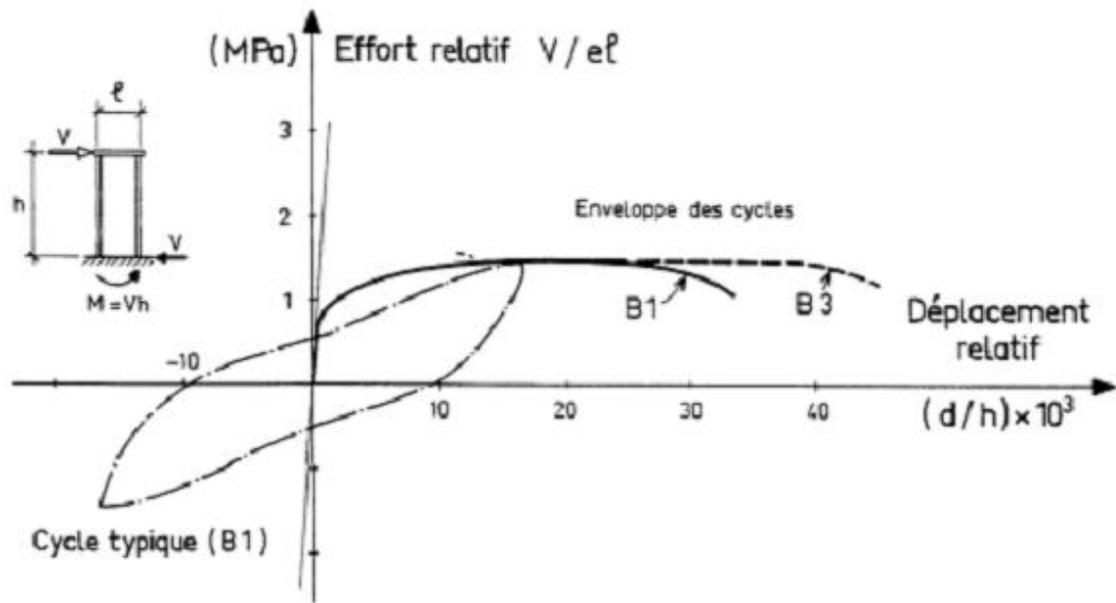


Figure 1.5. Comportement ductile d'un voile élancé. Rupture due à la flexion (Oesterle et al. 1980)

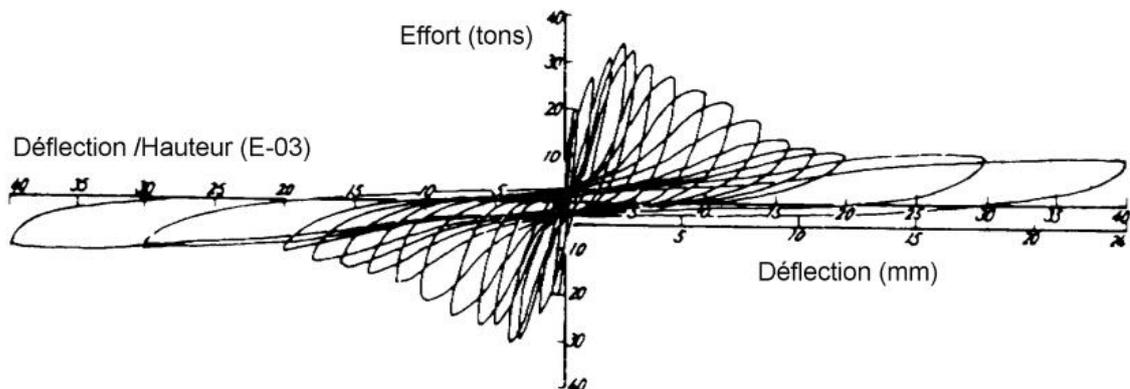


Figure 1.6. Comportement non ductile d'un voile. Rupture due à l'effort tranchant (Pauley et al. 1992)

- Pauley et al. (1992) considèrent que le nom «shear-walls», souvent utilisé dans la littérature anglophone, n'est pas adéquat pour tous les types de voiles, puisqu'il fait allusion à un comportement conditionné par le cisaillement. Cette appellation est adéquate pour les voiles courts, alors que le nom «structural walls» devrait être utilisé en général.

Dans la suite, nous allons nous intéresser plus particulièrement au problème de cisaillement. Après une présentation des principaux paramètres contribuant à la résistance à l'effort tranchant plusieurs méthodes de dimensionnement du comportement dynamique des éléments en béton armé soumis à des efforts tranchants seront détaillées.

(Vu la similitude du comportement des voiles avec des poutres, les méthodes développées pour le dimensionnement de ces dernières sont aussi utilisées - avec quelques modifications - pour les voiles).

### **I.3. Paramètres contribuant à la résistance à l'effort tranchant :**

Les paramètres couramment admis contribuant à la résistance à l'effort tranchant d'un élément en béton armé sont les suivants :

1. La résistance du béton non fissuré ;
2. La capacité du béton fissuré à transmettre des contraintes de traction «tension stiffening»
3. Le frottement et l'effet d'engrènement entre les lèvres des fissures ;
4. La présence d'acier transversal qui empêche l'ouverture des fissures ;
5. La résistance de l'acier longitudinal au cisaillement (effet de goujon).

**L'effet d'engrènement** - «aggregate interlock» - est dû au fait que les deux lèvres d'une fissure dans du béton ne sont pas parfaitement planes (Figure 1.7 - a). Lorsqu'il y a glissement relatif (mode II), des forces de contact entre agrégats apparaissent, résistant au cisaillement de la fissure. Plus particulièrement, le glissement engendre une contrainte de cisaillement parallèle à la fissure et opposée au mouvement ainsi qu'une contrainte normale qui tend à ouvrir la fissure (phénomène de dilatance). Ces contraintes sont inversement proportionnelles à l'ouverture de la fissure. Sous chargement cyclique, à effort normal constant, les courbes effort tranchant/glisement entre les deux lèvres ont une allure pincée: la rugosité diminue au cours des cycles et les lèvres peuvent glisser autour d'une certaine position (Combescure 1996). Le phénomène d'engrènement, même s'il semble primordial pour certains modèles, est négligeable pour d'autres (Davenne 1990).

**L'effet de goujon** - «doweffect» - est un phénomène assez complexe où intervient, en plus du cisaillement de l'acier, l'interaction avec le béton et les armatures transversales (Figure 1.7.b). Il apparaît lorsqu'une fissure est traversée par le ferrailage : le glissement des lèvres est gêné par le ferrailage qui travaille en flexion et en tension. De plus, il exerce sur le béton avoisinant des efforts très élevés qui l'écrasent. Ainsi, sous chargement cyclique, les courbes force - déplacement ont la même allure que celle caractérisant le phénomène d'engrènement (pincement) : autour de la position neutre, le ferrailage peut se fléchir facilement car le béton qui s'y opposait a été détruit au cours des cycles précédents.

Il peut être réduit à un problème de matériau avec une loi de comportement convenable faisant intervenir la résistance à la traction du béton et la liaison acier béton.

Comme le phénomène d'engrènement, l'effet de goujon est souvent négligé dans les modèles.

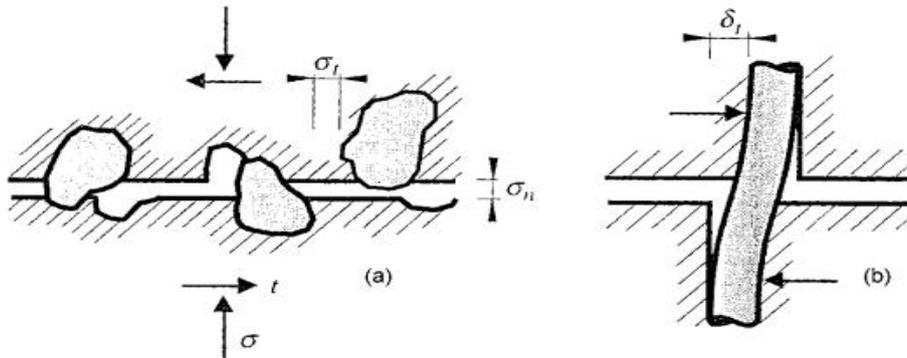


Figure 1.7. Interactions à l'interface de fissuration : (Mestat et al. 1997)  
 (a) engrènement ou interaction béton-béton des surfaces fissurées ;  
 (b) effet de goujon ou interaction acier - béton.

#### I.4. Pratiques pour le dimensionnement des éléments en béton soumis à des efforts de cisaillement :

Dans les codes de dimensionnement, l'effort tranchant  $V$  repris par une section est divisé en un terme apporté par le béton  $V_c$  («concrete contribution») et un terme apporté par l'acier transversal  $V_s$  («steel contribution») :

$$V = V_s + V_c \quad (1.1)$$

Pour des raisons de simplicité la contribution du béton comprend tous autres phénomènes qui contribuent à la résistance autre que la contribution de l'acier. La contribution du béton est souvent considérée comme un paramètre fixe, empirique, qui est insensible aux séquences de chargement et à sa magnitude.

##### Remarque :

- En réalité, l'augmentation de la déformation ou du nombre de cycles de chargement diminue l'influence de l'effet de goujon et d'engrènement, et donc la contribution de béton devient minime. Des recherches sont en cours sur le développement d'équations simples qui prennent en compte cette diminution en fonction de la demande en ductilité. Une telle expression, développée par Pérez et Pantazopoulou (1998), prend la forme suivante :

$$V_c = \frac{\beta \rho_t}{(1 + \mu)} \sqrt{f_c} \left[ 1 - \gamma \frac{n}{\sqrt{f_c}} \right] \text{ (MPa)} \quad (1.2)$$

Avec:

$f_c$ : résistance de béton en compression issue d'un essai de compression sur cylindre ;

$n$  : effort axial ;

$\beta$ : constante (estimée égale à 37) ;

$\gamma$  : constante (estimée égale à 7.6) ;

$\mu$  : demande en ductilité ;

$\rho_t$  : pourcentage volumique d'armatures transversales.

La contribution apportée par l'acier est calculée à partir du modèle de treillis à 45° détaillé dessous :

#### 1.4.1. L'analogie du treillis («Trussanalogy») :

Les premiers modèles qui traitent de la simulation du comportement non linéaire d'une poutre en béton armé soumise à des efforts de cisaillement datent de début de siècle. Ritter (1899) et Morsch (1909) introduisent l'analogie du treillis pour décrire le comportement d'une poutre fissurée (Figure 1.8). Des fissures inclinées par rapport aux barres horizontales d'acier apparaissent et séparent le béton en une série de bielles diagonales («compression concrete struts») parallèles aux fissures. Les bielles de compression sont supposées résister en compression axiale. Avec les barres d'acier (« tension chords» and «tension ties») qui ne reprennent que de la tension axiale, elles forment un treillis capable de résister à l'effort tranchant appliqué.

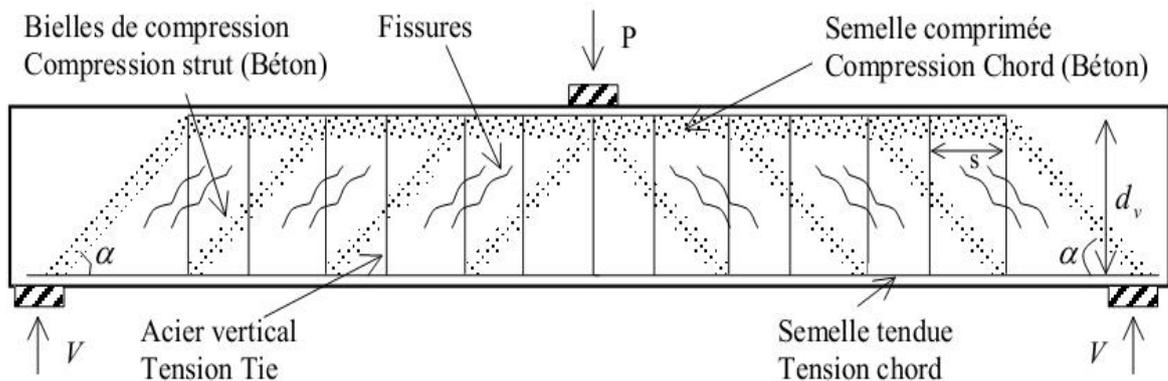
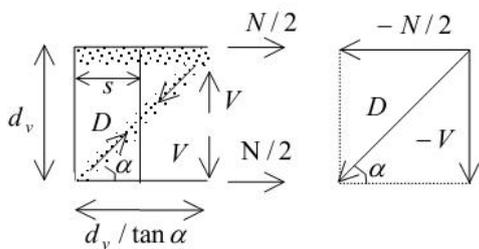


Figure 1.8.L'analogie du treillis

L'examen du corps libre (Figure 1.9) nous montre que l'effort tranchant  $V$  dans la section est équilibré par la composante verticale de l'effort de compression  $D$  dans les bielles de béton. Cette composante se traduit en une traction exercée sur les armatures transversales. La composante horizontale de l'effort  $D$  est contrebalancée par des efforts de traction  $N$  dans les armatures horizontales. Pour des raisons de simplicité, l'angle de l'inclinaison des bielles est supposé égal à  $45^\circ$ , d'où le nom de la méthode « modèle des bielles à  $45^\circ$  ». Le modèle considère que la résistance au cisaillement est atteinte quand le ferrailage transversal est plastifié. Le pourcentage de ferrailage transversal nécessaire pour le dimensionnement de la poutre est ensuite calculé à partir de l'équation (1.5), connue aussi sous le nom de «truss equation for shear».



$$N = \frac{2V}{\tan \alpha} = 2V \quad (1.3)$$

$$f_d = \frac{D}{b_v d_v \cos \alpha} = \frac{V}{b_v d_v \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2V}{b_v d_v} \quad (1.4)$$

$$V = A_{vs} f_{ty} \frac{d_v / \tan \alpha}{s} = A_{vs} f_{ty} \frac{d_v}{s} \quad (1.5)$$

Figure 1.9. Equations modèle des bielles à  $45^\circ$

Avec:

$P$  : effort vertical exercé sur la poutre ;

$S$  : espacement entre les armatures transversales ;

$b_v$  : largeur effective de la poutre ;

$d_v$  : distance entre les aciers longitudinaux ;

$A_{vs}$  : section d'armatures transversales pour une distance  $s$  ;

$V$  : effort de cisaillement dans la section ;

$N/2$  : effort de traction exercé sur les armatures longitudinales ;

$D$  : effort de compression exercé dans les bielles de béton ;

$f_d$  : contrainte de compression dans les bielles de béton ;

$f_{ty}$  : résistance en traction des armatures transversales ;

$\alpha$  : angle entre les bielles de béton et les armatures horizontales.

### Remarques

- Le modèle des bielles à 45° laisse sous-entendre qu'une quantité de ferrailage horizontal en plus du ferrailage vertical est nécessaire pour la résistance au cisaillement.
- Le modèle néglige la contribution du béton en traction.

Le modèle des bielles à 45° a eu beaucoup de succès grâce à sa simplicité et au sens physique qu'on peut facilement y accorder. En effet, la modélisation du mécanisme de dégradation avec l'aide d'un treillis rend le cheminement des efforts visibles et le phénomène plus compréhensible. Néanmoins, dès son apparition le modèle a été sérieusement critiqué.

Des expériences Withey (1908) et Talbot (1909) ont montré que les résultats étaient souvent trop conservateurs, surtout pour les poutres avec de faibles pourcentages de renforcement. (Le modèle ne préconise pas de résistance au cisaillement pour les poutres qui ne contiennent pas d'armatures transversales, alors qu'il y en a une en réalité. C'est d'ailleurs pour cette raison que le terme  $V_c$  (équation 1.1) - est introduit dans les codes de dimensionnement). Pour le cas de murs à faible élancement le modèle semble surestimer la résistance jusqu'à 50% (Hsu 1988). Les chercheurs se sont vite aperçus que le problème du cisaillement est très compliqué et que des paramètres supplémentaires doivent être pris en considération (qualité et résistance du béton, longueur de la poutre par rapport à sa hauteur etc.). Depuis 1960 plusieurs chercheurs ont travaillé sur le problème et aujourd'hui quatre développements majeurs sont proposés afin d'expliquer la différence entre le modèle des bielles à 45° et les résultats des essais :

#### a. Généralisation de l'inclinaison des bielles :

Les expériences ont montré que l'inclinaison des bielles de compression n'est pas en général égale à 45°. Il y a déjà plus de vingt ans, le code CEB (1978) autorisait le concepteur à faire varier l'angle entre 31° et 59°. Ces valeurs étaient issues des valeurs empiriques déterminées par Lampert et Thurlimann (1968) pour des poutres en torsion. Ces auteurs sont les premiers à utiliser des éléments membranes pour le dimensionnement des structures en béton armé. Ils considèrent des angles d'orientation différents de 45° et aboutissent aux équations d'équilibre pour un élément membrane chargé en contraintes normales et en contraintes de cisaillement. Ils apportent des fondements théoriques à ce modèle par la théorie de la plasticité, d'où le nom «Variable angle truss model» ou «Plasticity truss model».

**b. Détermination de l'angle des bielles de compression :**

Avant d'utiliser les équations d'équilibre de l'analogie du treillis, il faut connaître l'angle d'inclinaison des bielles de compression. Le premier à traiter un problème analogue est H.A.Wagner (1929). Wagner travaillait dans l'aéronautique sur le flambage des éléments métalliques minces soumis à des efforts de cisaillement. Il considère qu'après flambage l'élément métallique ne peut plus résister en compression et le cisaillement est transféré par un champ de traction diagonale. Afin de déterminer l'angle de l'inclinaison de la traction diagonale, Wagner considère les déformations du système. Il suppose que l'angle de l'inclinaison de la contrainte de traction diagonale coïncide avec l'angle de l'inclinaison de la déformation principale de traction. Son approche est connue sous le nom de «Tension Field Theory ». En se basant sur les développements de Wagner, Collins (1978) suppose qu'après fissuration le béton n'a plus de résistance en traction et le cisaillement est transmis par un champ de compression diagonale.

Il arrive ainsi à calculer l'angle de la compression diagonale pour tout le domaine de chargement à partir des déformations des armatures et du béton.

$$\tan^2 \alpha = \frac{\varepsilon_l + \varepsilon_d}{\varepsilon_t + \varepsilon_d} \quad (1.6)$$

avec:

$\varepsilon_l$ : déformations des armatures horizontales ;

$\varepsilon_t$ : déformations des armatures transversales ;

$\varepsilon_d$ : déformations des bielles de béton.

**c. L'adoucissement des bielles de béton :**

La prédiction du comportement non linéaire d'un élément en béton armé nécessite non seulement des équations d'équilibre et de compatibilité, mais aussi des lois de comportement pour le béton et l'acier. La relation obtenue lors d'un essai de compression simple sur cylindre en béton a été utilisée par plusieurs scientifiques comme loi pour le béton. Néanmoins, les résultats numériques se trouvaient souvent loin des résultats expérimentaux. La raison a été identifiée pour la première fois par Peter (1964) qui a observé que le comportement d'un panneau en béton armé soumis à un effort de compression est adouci à cause de la traction dans la direction perpendiculaire. L'adoucissement serait donc causé par l'état tri - axial de contraintes dans les bielles et la présence de traction perpendiculaire à leurs axes.

Une fois l'adoucissement identifié, plusieurs chercheurs ont travaillé pour le quantifier. Collins (1978) choisit la résistance en compression des bielles inférieure à la résistance en compression obtenue lors d'un essai de compression simple sur cylindre. Il postule que la résistance en compression diminue avec l'augmentation du diamètre du cercle des déformations principales  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ . Vecchio et Collins (1986) effectuent une série d'essais sur des éléments de béton armé soumis à un champ uniforme de contraintes membranaires. Pour cela un dispositif spécialement conçu a été développé. (Figure 1.10 et 1.11).

Ils concluent que la résistance du béton fissuré en diagonales de compression diminue avec l'augmentation des déformations de traction. Ils quantifient cette diminution à partir de leurs résultats expérimentaux et ils proposent une loi où l'adoucissement dépend de la proportion des deux déformations principales (Vecchio et Collins 1986 - équations 1.7 et 1.8 ou 1.15 et 1.16, Figure 1.12).



Figure 1.10 . Dispositif expérimental pour les essais de cisaillement (Univ. of Toronto)

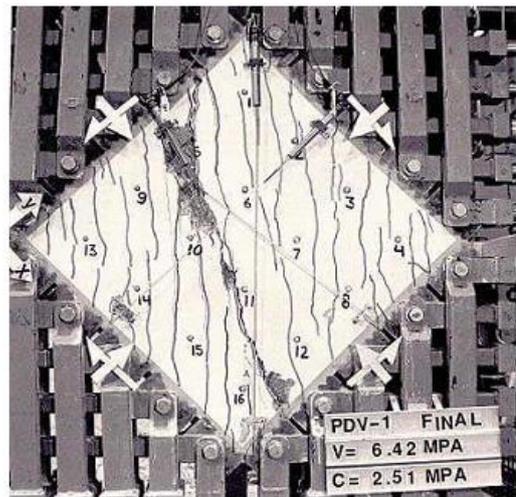


Figure 1.11 . Eprouvette à la fin de l'essai (Univ. of Toronto)

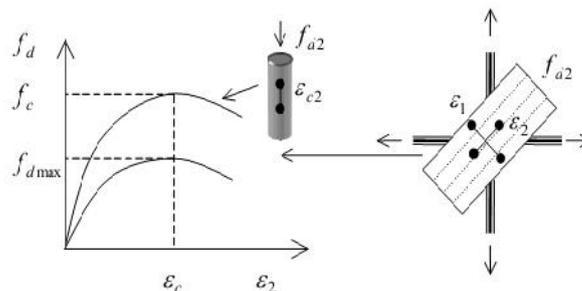


Figure 1.12 Adoucissement des bielles de béton

$$f_d = f_{d \max} \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_c} \right) - \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_c} \right)^2 \right] \quad (1.7)$$

$$f_{d \max} = \frac{f_c}{0.8 + 170\varepsilon_1} \leq f_c \quad (1.8)$$

avec:

$f_d$ : contrainte de compression dans les bielles de béton ;

$f_{d \max}$  : contrainte maximale de compression dans les bielles de béton ;

$f_c$ : résistance de béton en compression issue d'un essai de compression sur cylindre ;

$\varepsilon_c$  : déformation qui correspond à  $f_c$  lors d'un essai de compression sur cylindre ;

$\varepsilon_1$  : déformation principale en traction ;

$\varepsilon_2$  : déformation principale en compression.

Depuis, un grand nombre d'essais similaires effectués par différents chercheurs a confirmé cette diminution de la capacité du béton fissuré des bielles à résister à la compression lorsque la déformation de traction perpendiculaire augmente (pour un résumé des campagnes expérimentales voir Vecchio et Collins 1993). On trouve aujourd'hui dans la littérature plusieurs propositions sur le paramètre qui gère l'adoucissement (Mo et Rotherth 1997) et de nouvelles lois de comportement (Belarbi et Hsu 1995, figure 1.13).

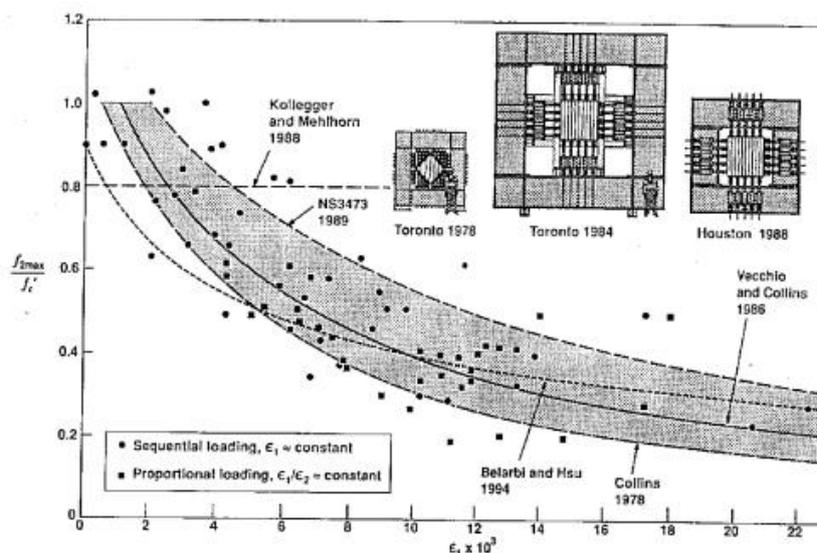


Figure 1.13 . Contrainte maximale de compression du béton en fonction de la déformation principale de traction perpendiculaire (ASCE - ACI 1998)

## Remarques

- L'adoucissement du béton influence beaucoup la résistance au cisaillement des éléments sur-renforcés (Pérez et Pantazopoulou 1998).
- Le phénomène de l'adoucissement en dynamique n'est pas encore bien quantifié (Mo et Rothert 1997).

### 4. Contraintes de traction dans le béton :

Le modèle des bielles à 45° suppose que le béton ne résiste pas en traction. Cependant, plusieurs essais prouvent que le béton, même après avoir subi une fissuration importante, est capable de transmettre des contraintes de traction (Vecchio et Collins 1986). Ces contraintes diminuent les déformations, rigidifient l'élément et le rendent capable de résister à de plus grandes déformations de cisaillement.

Leur influence peut donc être significative et elles doivent être prises en compte (ASCE - ACI 1998). Ce phénomène connu comme «tension stiffening phenomenon» est souvent approché par une modélisation adéquate du comportement post-pic en traction du béton. Une représentation plus fine nécessiterait la modélisation de l'interaction acier - béton («bond slip»).

A l'instar de ces résultats, plusieurs méthodes ont été développées pour le dimensionnement des éléments en béton armé soumis à des efforts de cisaillement. Dans la suite, deux méthodes ainsi qu'une application pour le cas des voiles faiblement élancés vont être présentées.

#### I.4.2. Théorie du champ de compression :

La théorie du champ de compression («Compression Field Theory» CFT - Collins 1978, Collins et Michell 1980) utilise les équations d'équilibre de treillis (eq. 1.3, 1.4, 1.5), l'équation 1.6, et la loi de béton (eq. 1.7, 1.8) pour simuler le comportement non linéaire d'un élément en béton armé soumis à une séquence de chargements en cisaillement. Le comportement des armatures est supposé élastique parfait et la résistance du béton en traction est négligée. Les bielles de compression coïncident avec la direction des déformations et des contraintes principales de compression qui tournent avec l'augmentation du chargement.

Imaginons que l'on voudrait déterminer le comportement d'un élément voile soumis à une séquence de chargements.

Pour un chargement donné, on suppose un angle d'inclinaison des bielles de compression  $\alpha'$ . Une fois l'angle connu, on calcule les contraintes de traction dans les armatures horizontales et verticales et les contraintes de compression dans les bielles de béton (eq. 1.3, 1.4, 1.5). Les lois des armatures et du béton (eq. 1.7, 1.8) nous donnent ensuite les déformations. Ces déformations sont ensuite utilisées pour calculer la valeur de l'angle  $\alpha$  (eq. 1.6). Si l'angle calculé  $\alpha$  est proche de l'angle supposé  $\alpha'$ , la solution est bonne et le chargement suivant est étudié. Sinon on suppose un nouvel angle et on recommence la procédure (Figure 1.14).

**Remarques :**

- La CFT néglige l'existence des contraintes de traction dans le béton fissuré. Si l'élément étudié n'a pas d'armatures verticales, elle ne prévoit aucune résistance au cisaillement. Afin de remédier à ce problème, Vecchio et Collins (1986) ont proposé une modification de la CFT nommée Modified Compression Field Theory (MCFT).

Pour calculer l'angle  $\alpha$ , la théorie MCFT utilise l'équation (1.6), mais les conditions d'équilibre et de compatibilité sont exprimées en fonction des déformations et des contraintes moyennes sur une longueur plus grande que l'espacement des fissures. Puisque la ruine est gouvernée par des contraintes locales plutôt que par des contraintes moyennes, des tests supplémentaires sont introduits au niveau des contraintes locales dans la fissure. La MCFT est capable de prévoir la résistance des éléments avec peu ou pas d'armatures transversales, contrairement à la CFT.

- L'équation de compatibilité pour calculer l'angle des bielles de compression suppose que la direction des contraintes principales coïncide avec la direction des déformations principales. Est-ce que cette hypothèse est justifiée par des expériences ? Pour des éléments qui possèdent des armatures horizontales et verticales, la direction des contraintes principales dans le béton dévie rarement de plus de  $10^\circ$  par rapport à la direction des déformations principales (Vecchio et Collins 1986). Pour le cas extrême d'une poutre en béton armé renforcée seulement dans la direction de traction et soumise à un chargement de traction et de cisaillement, la différence était de  $20^\circ$  (Bhide et Collins 1989). On peut donc supposer que l'hypothèse est en général justifiée.

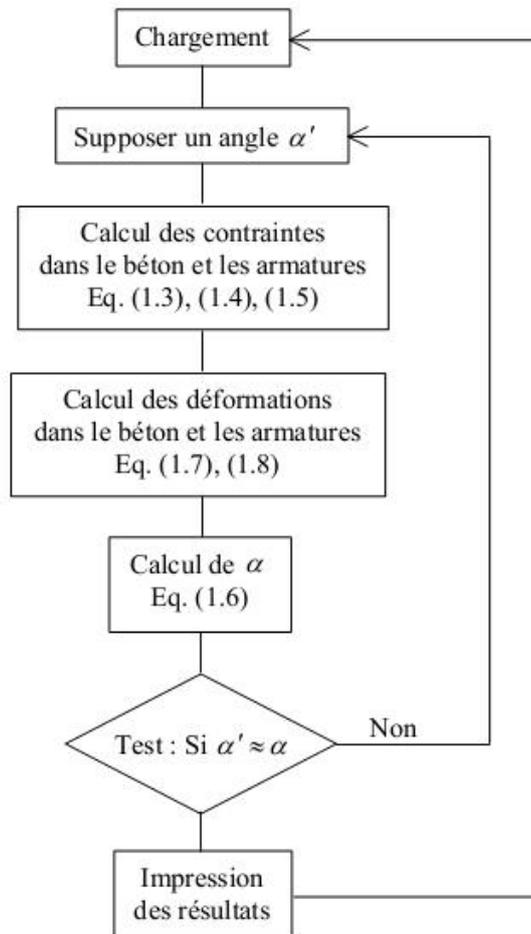


Figure 1.14. Algorithme de la CFT

### I.4.3. La théorie du treillis adoucissant :

La théorie du treillis adoucissant («Softened truss model theory»), développée à l'Université de Houston, est nommée ainsi pour mettre en avant l'importance du phénomène d'adoucissement dans les bielles diagonales. Basés sur cette théorie, le modèle de treillis adoucissant d'angle variable («Rotating angle softened truss model» RA-STM - Hsu 1988) a été développé pour la simulation du comportement des éléments en béton armé soumis à des efforts de cisaillement.

#### Le modèle du treillis adoucissant d'angle variable :

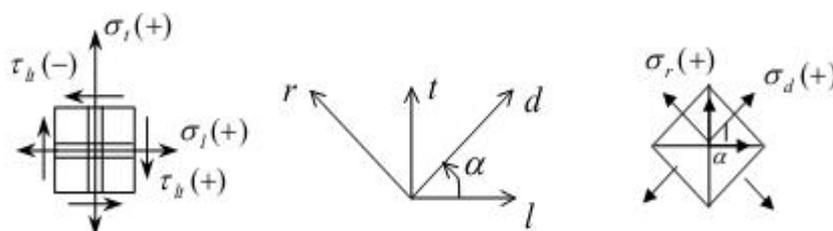


Figure 1.15. Élément membrane et contraintes selon RA-STM

Les structures en béton armé peuvent être visualisées comme des assemblages d'éléments membranes. La prédiction du comportement de la structure est possible si on connaît le comportement de tous ces éléments membranes. La théorie du treillis adoucissant d'angle variable (Hsu 1988) est issue d'une combinaison des équations d'équilibre, de compatibilité et des lois de comportement des matériaux.

Un élément membrane de béton armé est représenté sur la Figure 1.15. L'élément est sollicité en contraintes planes  $\sigma_l$ ,  $\sigma_t$  et  $\tau_{lt}$  (contraintes normales et contraintes de cisaillement), où  $t$  et  $l$  sont les directions des armatures longitudinales et transversales. Après le développement des fissures diagonales, les bielles de béton se mettent en compression et les barres d'acier en traction. Les bielles de compression sont orientées selon l'axe  $d$ , qui est incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe des barres horizontales. Cette direction est supposée coïncider avec la direction des contraintes et des déformations principales de compression (même hypothèse que la CFT).

### Equations d'équilibre :

La superposition du béton et de l'acier est décrite sur la figure 1.16.

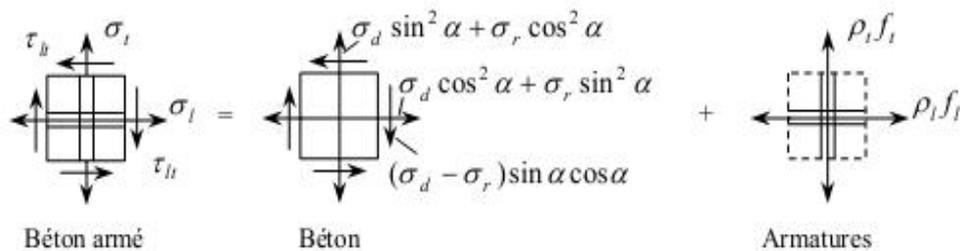


Figure 1.16. . *Superposition des contraintes du béton et des armatures*

A partir du cercle de Mohr en contraintes, nous pouvons déduire les équations :

$$\sigma_l = \sigma_d \cos^2 \alpha + \sigma_r \sin^2 \alpha + f_l \rho_l \quad (1.9)$$

$$\sigma_t = \sigma_d \sin^2 \alpha + \sigma_r \cos^2 \alpha + f_t \rho_t \quad (1.10)$$

$$\tau_{lt} = (\sigma_d - \sigma_r) \sin \alpha \cos \alpha \quad (1.11)$$

avec:

- $\sigma_b, \sigma_l$ : contraintes normales selon  $t$  et  $l$  (positives en traction) ;
- $\tau_{tl}$ : contrainte de cisaillement selon  $t$  et  $l$  (positive selon la figure 1.14) ;
- $\sigma_r, \sigma_d$ : contraintes principales selon  $r$  et  $d$  (positives en traction) ;
- $\rho_b, \rho_t$ : pourcentage volumique des armatures selon  $t$  et  $l$  ;
- $f_l, f_b$ : contraintes des armatures selon  $t$  et  $l$  ;
- $r, d$ : axes des contraintes principales ;
- $t, l$ : axes des armatures.

### Equations de compatibilité

A partir du cercle de Mohr en déformations, nous pouvons déduire les équations :

$$\varepsilon_l = \varepsilon_d \cos^2 \alpha + \varepsilon_r \sin^2 \alpha + f_l \rho_l \quad (1.12)$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_d \sin^2 \alpha + \varepsilon_r \cos^2 \alpha + f_t \rho_t \quad (1.13)$$

$$\gamma_{lt} = (\varepsilon_d - \varepsilon_r) \sin \alpha \cos \alpha \quad (1.14)$$

Pour résoudre le système d'équations (1.9 - 1.14) on a besoin des lois de comportement des matériaux.

### Lois de comportement :

#### ➤ Béton :

La loi de comportement du béton doit contenir en compte du comportement adoucissant des bielles de compression. L'auteur choisit d'utiliser la loi proposée par Vecchio et Collins (1986) qui cette fois-ci prend la forme :

$$\sigma_d = \zeta f_c \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_d}{\zeta \varepsilon_c} \right) - \left( \frac{\varepsilon_d}{\zeta \varepsilon_c} \right)^2 \right] \quad \text{si } |\varepsilon_d| \leq |\zeta \varepsilon_c| \quad (1.15a)$$

$$\sigma_d = \zeta f_c \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon_d / \varepsilon_c - \zeta}{2 - \zeta} \right)^2 \right] \quad \text{si } |\varepsilon_d| > |\zeta \varepsilon_c| \quad (1.15b)$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{\varepsilon_d}{(1 - \nu) \varepsilon_d - \varepsilon_r}} \quad (1.16)$$

avec:

- $f_c$ : contrainte maximale en compression issue d'un essai de compression sur cylindre ;
- $\varepsilon_c$ : déformation qui correspond à  $f_c$  et qui peut être choisie égale à -0.002 ;
- $\zeta$ : coefficient d'adoucissement (inférieur à 1) ;
- $\nu$ : coefficient de Poisson. Pour l'application de la méthode, Hsu (1988) considère le coefficient de Poisson égal à 0.3.

Le comportement du béton en traction est simulé par les équations suivantes :

$$\sigma_r = E_c \varepsilon_r \quad \text{si } \varepsilon_r \leq \varepsilon_{cr} \quad (1.17a)$$

$$\sigma_r = \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_{cr}}{0.005}}} \quad \text{si } \varepsilon_r > \varepsilon_{cr} \quad (1.17b)$$

avec:

$E_c$ : module de Young initial pour le béton, choisi égal à  $-2f_c / \varepsilon_c$  avec  $\varepsilon_c = -0.002$ ;

$\varepsilon_{cr}$ : déformation au moment de la fissuration du béton, supposée égale à  $f_{cr} / E_c$ ;

$f_{cr}$ : contrainte qui correspond au moment de la fissuration du béton, supposée égale à  $4\sqrt{f_c}$  (avec  $f_c$  en psi, 1psi = 6.895MPa).

Les contraintes et les déformations  $f_c$ ,  $\sigma_d$ ,  $\varepsilon_d$  et  $\varepsilon_c$  sont négatives (compression) et la déformation  $\varepsilon_r$  positive (traction).

➤ **Armatures :**

Les armatures horizontales et verticales suivent une loi élastique - plastique parfaite dont les équations sont :

$$f_l = f_{ly} \quad \text{si } \varepsilon_l \geq \varepsilon_{ly} \quad (1.18a)$$

$$f_l = E_s \varepsilon_l \quad \text{si } \varepsilon_l < \varepsilon_{ly} \quad (1.18b)$$

$$f_t = f_{ty} \quad \text{si } \varepsilon_t \geq \varepsilon_{ty} \quad (1.19a)$$

$$f_t = E_s \varepsilon_t \quad \text{si } \varepsilon_t < \varepsilon_{ty} \quad (1.19b)$$

avec:  $E_s$ : module de Young des armatures ;

$f_{ly}$ ,  $f_{ty}$ : contraintes maximales des armatures horizontales et verticales ;

$\varepsilon_{ly}$ ,  $\varepsilon_{ty}$ : déformations correspondantes aux contraintes maximales des armatures horizontales et verticales.

On a 11 équations (1.9-1.19) qui contiennent 14 inconnues dont 7 contraintes ( $\sigma_r$ ,  $\sigma_b$ ,  $\tau_{lb}$ ,  $\sigma_d$ ,  $\sigma_r$ ,  $f_b$ ,  $f_t$ ), 5 déformations ( $\varepsilon_s$ ,  $\varepsilon_b$ ,  $\gamma_{lb}$ ,  $\varepsilon_d$ ,  $\varepsilon_r$ ), l'angle  $\alpha$  et un paramètre  $\zeta$ . Si deux des inconnues sont données (par exemple, en cas de cisaillement pur,  $\sigma_l = \sigma_t = 0$ ), on choisit une séquence de  $\varepsilon_d$  et on peut tracer la relation  $\gamma_{lt} - \tau_{lt}$ . Des algorithmes adéquats pour la résolution de système sont discutés dans (Hsu 1988).

### Remarques

- A partir de nouveaux tests de cisaillement sur des éléments en béton armé, d'autres lois adoucissantes ont été proposées (Belarbi et Hsu 1995 - voir aussi figure 1.11). Ces lois peuvent aussi être utilisées avec la RA-STM.
- Hsu (1996) considère que la RA-STM est pratiquement la même que la CFT, puisque les deux méthodes sont basées sur le calcul de l'angle  $\alpha$ .
- CFT et RA-STM supposent que l'angle des fissures (l'angle que les bielles forment avec l'axe des armatures horizontales) coïncide avec l'angle des contraintes et des déformations principales de compression. En réalité la direction de la première fissure est déterminée par la direction des axes principaux juste avant la fissuration (angle  $\alpha_0$ ). Après la fissuration initiale, l'angle des fissures change, en raison du changement de l'orientation des contraintes principales dans le béton (angle variable  $\alpha$ ). L'angle d'orientation des nouvelles fissures est en réalité entre  $\alpha_0$  et  $\alpha$ .
- L'inclinaison des contraintes principales varie avec l'augmentation du cisaillement d'où le nom treillis d'angle variant de la méthode. RA-STM peut être appliqué dans le cas où l'angle  $\alpha$  ne varie pas de plus de  $12^\circ$  par rapport à l'angle au moment de la première fissuration du béton. Dans le cas contraire le modèle du treillis adoucissant d'angle constant doit être utilisé (FA-STM - Pang et Hsu 1995). Cette nouvelle méthode prend en compte l'influence des contraintes de cisaillement le long des fissures et elle donne de bons résultats même pour des éléments faiblement armés.
- D'autres méthodes existent pour la simulation du comportement d'éléments en béton armé soumis à des efforts de cisaillement («strut and tiemodels», «tooth» model etc.). Un résumé très détaillé de ces pratiques modernes et des applications dans différents codes de dimensionnement peuvent être consultés dans le rapport ASCE-ACI 445 sur le cisaillement et la torsion (ASCE-ACI 1998).

### Application de RA-STM dans le cas de voiles faiblement élancés :

L'application de la RA-STM dans le cas des voiles faiblement élancés est décrite dans Mau et Hsu (1986) et Hsu (1988). Nous considérons un voile faiblement élancé (hauteur sur longueur inférieur à 1) soumis à un effort horizontal  $T$  (Figure 1.17). Après fissuration un treillis se forme dans l'âme de voile. Un élément A de l'âme est isolé. L'axe vertical est défini comme l'axe longitudinal  $l$  et l'axe horizontal comme l'axe transversal  $t$ . Les fissures sont cette fois-ci inclinées d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe vertical  $l$ .

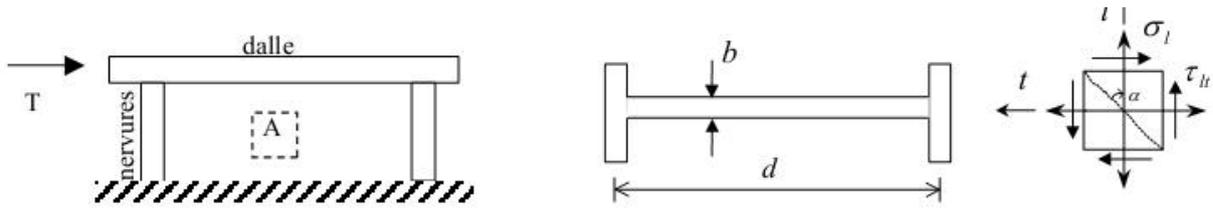


Figure 1.17. RA-STM dans le cas d'un voile faiblement élancé

La fondation d'un voile court est en général large et rigide. Hsu (1988) considère qu'elle empêche l'allongement du voile dans la direction horizontale et donc les déformations dans les aciers horizontaux peuvent être négligées :

$$\varepsilon_l = 0 \quad (1.20)$$

En ajoutant les équations 1.12 et 1.13 nous trouvons :

$$\varepsilon_r = \varepsilon_l + \varepsilon_l - \varepsilon_d \quad (1.21)$$

et donc, à partir des équations 1.19, 1.20, 1.21 et 1.12 nous obtenons :

$$f_l = 0 \quad (1.22)$$

$$\varepsilon_l = \varepsilon_d (1 - \tan^2 \alpha) \quad (1.23)$$

En négligeant l'influence du coefficient de Poisson ( $\nu = 0$ ) les équations 1.20, 1.21, 1.23 et 1.16 nous donnent une expression très simple du coefficient d'adoucissement :

$$\zeta = \cos \alpha \quad (1.24)$$

Enfin, en négligeant la résistance de béton en traction ( $\sigma_r = 0$ ) et en remplaçant les équations 1.24 et 1.18 dans 1.9, nous aboutissons à :

$$\zeta^2 = \frac{\sigma_l - \rho_l f_{ly}}{\sigma_d} \quad \text{si } \varepsilon_l < \varepsilon_{ly} \quad (1.25a)$$

$$\zeta^2 = \frac{\sigma_l - \rho_l E_l \varepsilon_l}{\sigma_d} \quad \text{si } \varepsilon_l \geq \varepsilon_{ly} \quad (1.25b)$$

Alors que la contrainte de cisaillement dans le voile est donnée par :

$$\tau_{lt} = \frac{T}{bd} \quad (1.26)$$

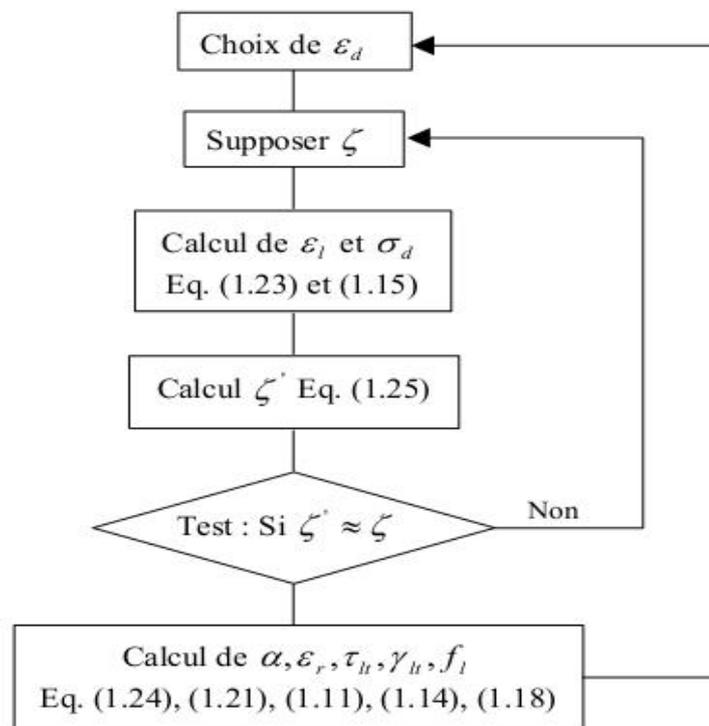
avec :

T : effort horizontal imposé sur le voile ;

b : épaisseur de l'âme de voile ;

d : distance entre les centres géométriques des aciers des deux nervures.

Les équations (1.15, 1.23, 1.25) contiennent quatre inconnues  $\varepsilon_d, \varepsilon_l, \sigma_d, \zeta$ . En supposant une valeur  $\varepsilon_d$ , les autres variables peuvent être calculées selon l'algorithme suivant :



6. Algorithme de la RA-STM pour le cas des voiles faiblement élancés

### 1.5. Conclusions :

Le comportement des voiles faiblement élancés soumis à des efforts de cisaillement est un problème compliqué qui nécessite de prendre en compte plusieurs paramètres. Le modèle de Ritter - Morsch qui considère le voile fissuré comme un treillis formé par des bielles de compression en béton (parallèles aux fissures) et des armatures doit être enrichi afin de donner des résultats satisfaisants pour le cas de cisaillement statique.

Les développements récents ont démontré l'importance de la généralisation de l'angle des bielles de compression, du phénomène d'adoucissement des contraintes dans les bielles et de la capacité du béton à transmettre des contraintes de traction même en étant fissuré. Tous ces développements et surtout la quantification de l'adoucissement statique n'auraient pas eu lieu sans la conception et la construction de nouveaux appareils (Figure 1.8), ainsi que la réalisation d'un vaste programme de campagnes expérimentales qui a duré plus de 10 ans. De nouvelles méthodes de dimensionnement issues de ces travaux sont aujourd'hui aptes à simuler le comportement non linéaire des structures en béton armé soumises à des charges statiques et à calculer la variation de l'inclinaison des fissures au cours du chargement.

## **CHAPITRE II :**

### **Comportement vis-à-vis de l'effort tranchant des éléments en béton armé**

### II.1. Comportement en cisaillement des éléments :

Afin d'estimer au mieux le comportement en cisaillement des structures en béton armé plusieurs études expérimentales et théoriques ont été menées de par le monde.

En effet, le béton armé peut être considéré comme un assemblage d'éléments simples acier et béton. La connaissance du comportement de ces éléments permet de prédire le comportement global des structures.

Pour un élément soumis au cisaillement pur, le comportement avant fissuration peut être décrit par la méthode usuelle considérant que les bielles de béton comprimées sont inclinées de  $45^\circ$  par rapport à la direction des armatures. L'étude de FALKNER [12] a permis de constater que cette inclinaison est variable. Mais il n'a pu apporter une solution au problème vu sa complexité. Kupfer [12] quant à lui a adopté la méthode énergétique. Il a admis que le comportement du béton et de l'acier est élastique linéaire. La méthode consiste alors à minimiser l'énergie de déformation du système. L'angle d'inclinaison des contraintes de compression dans le béton est ainsi déterminé, néanmoins, ce modèle basé sur les lois de comportement des matériaux simplifiés ne peut traiter le problème à la rupture.

Plusieurs études ont été également menées pour déterminer les conditions de fissuration du béton en appliquant la théorie de la plasticité pour étudier le comportement en cisaillement du béton armé. Cette approche admet que la fissuration d'un panneau peut survenir dans l'un des trois cas suivants : plastification des armatures transversales et longitudinales, plastification des armatures transversales ou des armatures longitudinales et fissuration du béton avant plastification des armatures dans les deux sens. Ce modèle a été utilisé principalement pour l'estimation de la charge de rupture. Mais il ne peut pas prédire la réponse charge-déformation du panneau avant la rupture [48].

Nous présenterons dans ce chapitre les études expérimentales menées essentiellement sur des structures en béton armé à l'Université de TORONTO par différents auteurs.

### II.2 Essais de l'université de TORONTO :

Cette étude a été menée avec pour objectif de déterminer le comportement des éléments voile en béton armé soumis à différents systèmes de chargement : Cisaillement pur, cisaillement-flexion, cisaillement compression. Il s'agit d'une étude expérimentale sur des éléments voile de 890mm x 890 mm et de 70 mm d'épaisseur, armés de deux lits d'armature dans les deux sens. Les armatures sont placées parallèlement au côté de l'élément dans les deux sens. Des clés d'effort tranchant ont été prévues et ancrées dans le béton des éléments voiles sur tout le périmètre du voile. La figure (2.1) montre la disposition d'une clé d'effort tranchant.

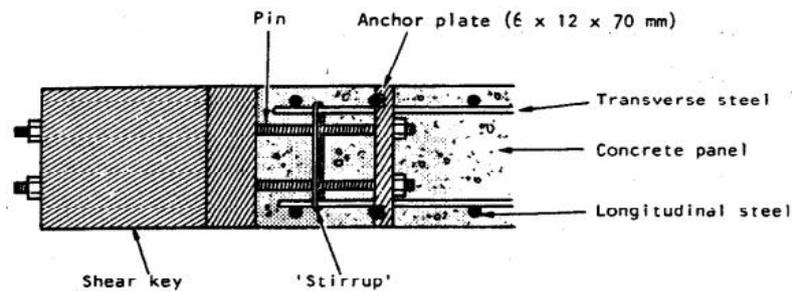


Figure 2.1 : Dispositif formant une clé d'effort tranchant.

L'élément voile est alors chargé par le biais de forces appliquées sur les clés de cisaillement, le long de son périmètre. La figure (2.2) montre la disposition des clés autour de l'élément voile.

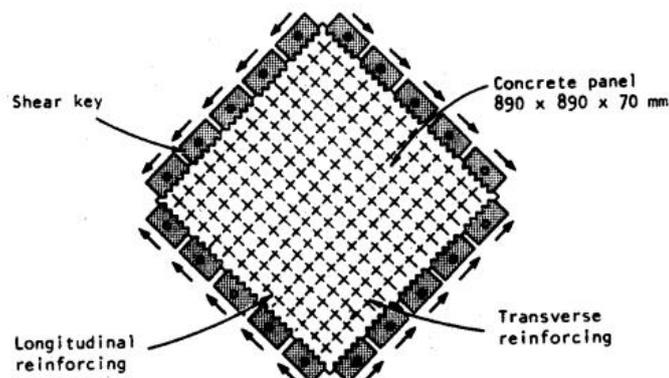


Figure 2.2 : Disposition des clés autour de l'élément.

Trente éléments en béton armé sont alors testés. La majorité des éléments ont été testés au cisaillement pur, d'autres en cisaillement-traction.

En plus des conditions de chargement, cette étude a pris en compte la variation du pourcentage des armatures transversales, celle des armatures longitudinales ainsi que la variation des caractéristiques mécaniques du béton [ 48 ]

Les résultats expérimentaux obtenus ont permis l'analyse du comportement des éléments en cisaillement : la figure (2.3) montre la construction du cercle de Mohr des déformations à chaque stade de chargement.

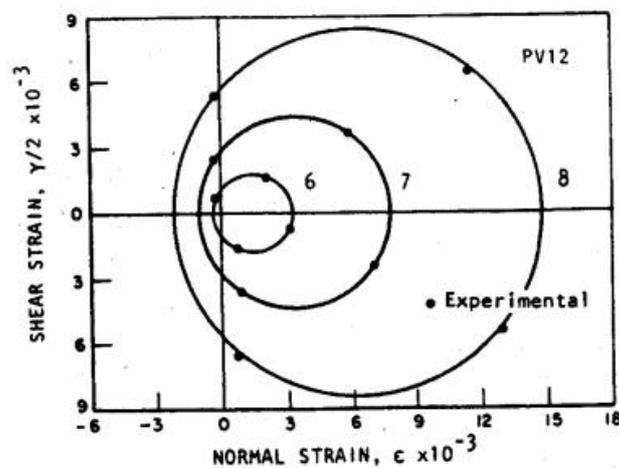


Figure 2.3 : Cercle de Mohr des déformations.

Les déformations dans les directions longitudinale et transversale et dans les deux directions diagonales ont été mesurées au moyen de jauges collées à la surface du béton. La géométrie du cercle de Mohr ainsi construit permet de déterminer :

- la déformation principale de compression,
- la déformation principale de traction,
- la distorsion dans le plan XY,
- la distorsion maximale,
- l'angle d'inclinaison des déformations principales de compression.

Les contraintes dans l'acier sont déterminées à partir des déformations longitudinale et transversale. En l'additionnant à la contrainte externe appliquée à l'élément, la contrainte moyenne longitudinale et transversale dans le béton est alors calculée [48].

La figure (2.4) montre le cercle de Mohr des contraintes construit pour l'élément voile PV 1.

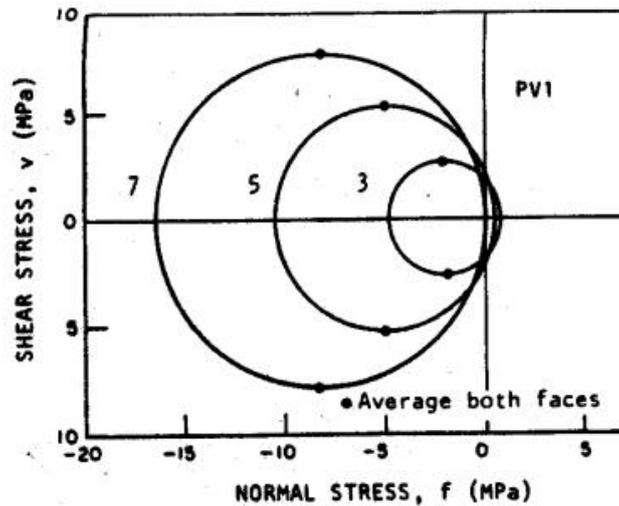


Figure 2.4 : Cercle de Mohr des contraintes pour le voile PV1.

La figure (2.5) montre le comportement en cisaillement jusqu'à rupture de l'élément voile PV 12 [48].

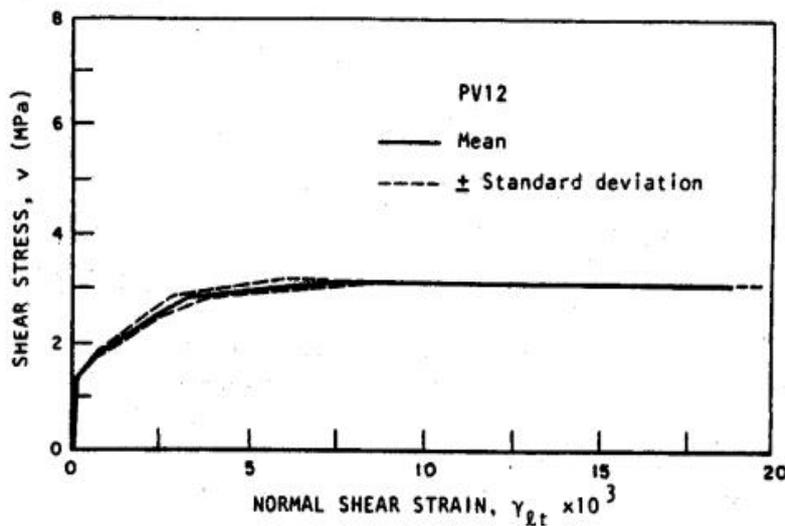


Figure 2.5 : Comportement de l'élément PV12.

Le comportement est linéaire jusqu'à la fissuration du béton. Au-delà, la rigidité de cisaillement de l'élément diminue. Ce qui conduit à une augmentation significative de la distorsion, et ce jusqu'à la plastification des armatures. Au-delà, la distorsion augmente rapidement jusqu'à la rupture totale de l'élément.

La figure (2.6) montre le comportement global des éléments PV5, PV13, PV18, PV20, appartenant à différents groupes.

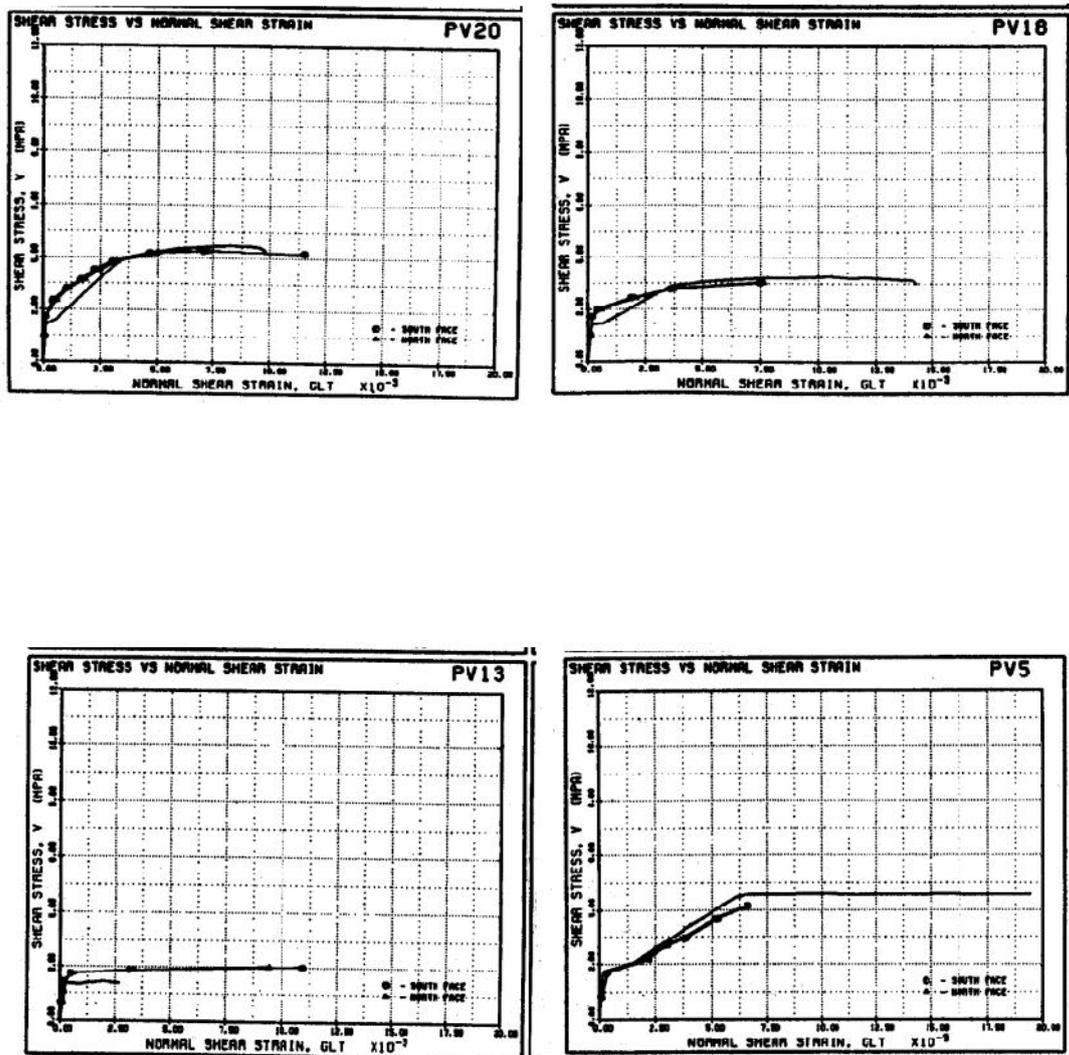


Figure 2.6 : Comportement des voiles PV5, PV13, PV18, et PV20.

Les observations sur le voile PV12 sont confirmées pour les voiles PV5, PV13, PV18 et PV20.

Une étude expérimentale a été également réalisée sur un portique [14]. Il s'agit d'un portique constitué de poutres et poteaux. Les dimensions des éléments constituant le portique ainsi que les détails du renforcement sont montrés à la figure (2.7).

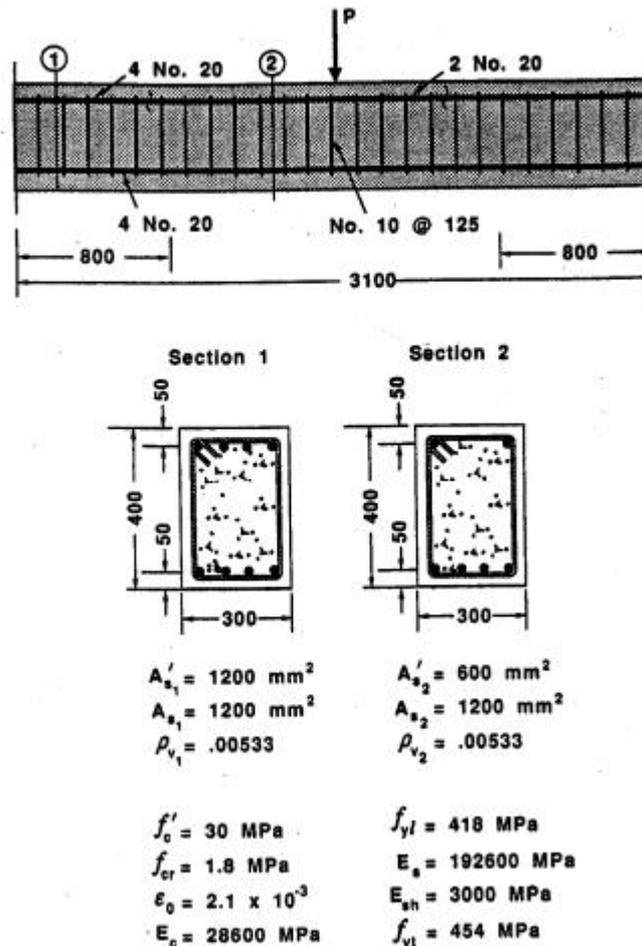


Figure 2.7: Caractéristiques des éléments du portique et détails de ferrailage.

Le béton présente une résistance de 30 MPa, l'armature n°20 présente une limite élastique de 418 MPa et une contrainte à la rupture de 596 MPa, son module élastique est de 1920 MPa. L'armature N°10 utilisée comme renforcement transversal présente une limite élastique de 454 MPa et une contrainte à la rupture de 640 MPa [14].

La procédure de chargement du portique est constituée par une force verticale constante de 780 kN appliquée sur les poteaux à leur tête, conjuguée à un effort latéral appliqué au niveau de la poutre supérieure et incrémenté jusqu'à 1000kN. Le schéma de chargement est montré à la figure (2.8)

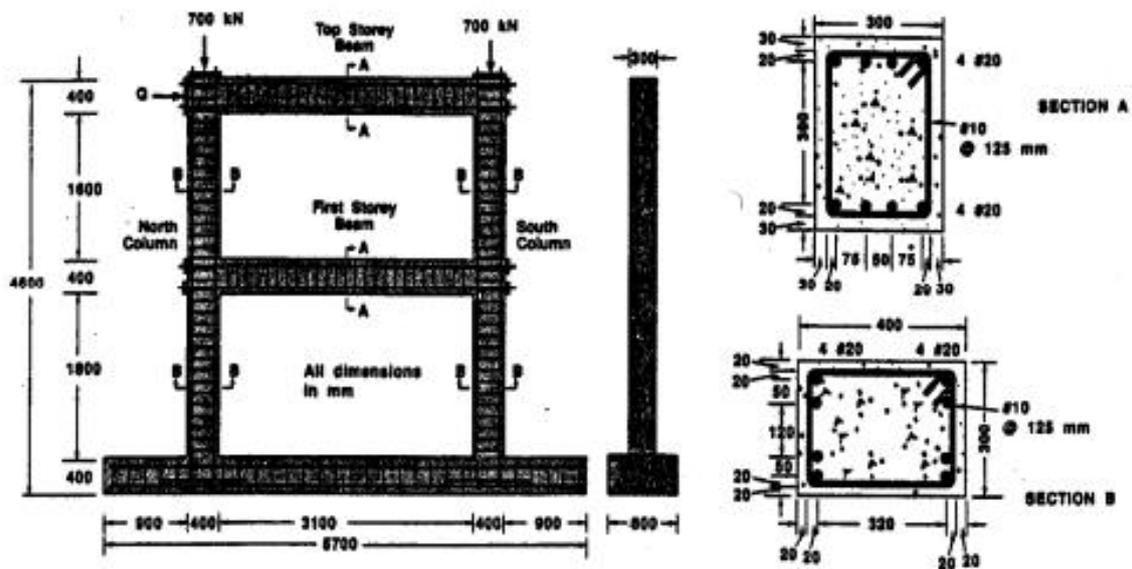


Figure 2.8 : Schéma de chargement du portique.

Les auteurs se sont principalement intéressés à l'influence des déformations d'effort tranchant sur le comportement du portique. La figure (2.9) montre la réponse de la structure. La figure (2.10) montre l'évolution de la déformation de cisaillement dans les éléments de la structure en fonction du chargement.

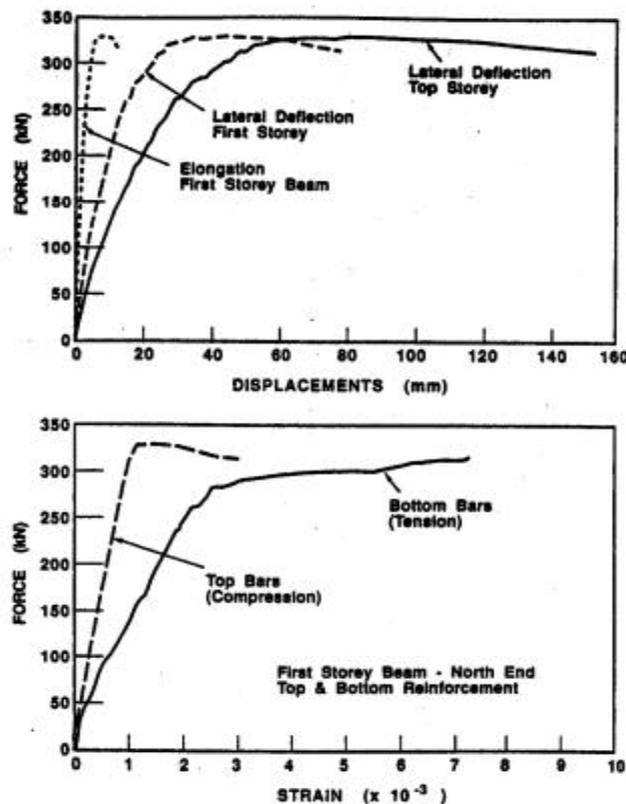


Figure 2.9 : Comportement de la structure.

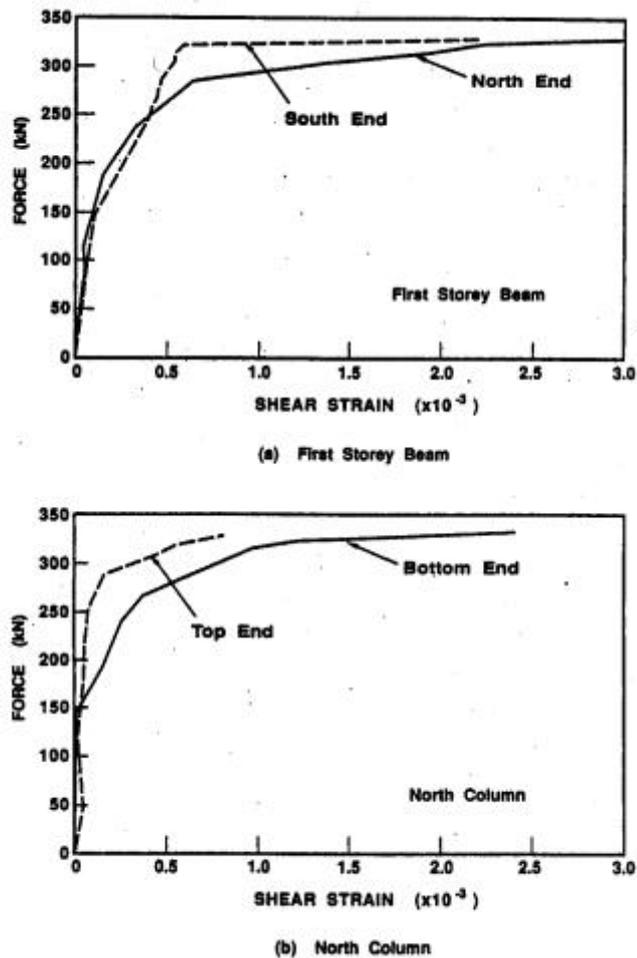


Figure 2.10 : Evolution de la distorsion au niveau des éléments du portique en fonction du chargement.

La distorsion observée dans les éléments de la structure présente une magnitude importante, particulièrement à l'approche de la charge maximale.

A partir de la déformation de cisaillement mesurée, la contribution de la déformation de cisaillement au déplacement latéral du portique a été estimée. La flèche de l'effort tranchant le long de la colonne a été estimée à 6 mm, soit 10% de la flèche totale mesurée [14].

Les auteurs ont conclu que les déformations de cisaillement dans la poutre et la détérioration de la rigidité de flexion due au cisaillement dans chaque élément réduit également la rigidité totale de la structure.

## **CHAPITRE III :**

**Méthodes de calcul vis-à-vis de l'effort tranchant  
des éléments en béton armé.**

### III.1 Méthodes de calcul :

Plusieurs études théoriques, sur des éléments en béton armé, ont porté sur le comportement des éléments en béton armé vis à vis des sollicitations tangentes [2] [9] [10][12] [16] [20] [27] [25] [26] [30] [40] [43] [42] [51] [45] [46] [47] [48] [49] [50]. Concernant l'application au cas des voiles on peut noter que l'ensemble des méthodes développées consiste en des approches simplifiées, considérant une répartition uniforme de l'acier dans les deux directions.

Nous présenterons alors, dans une première partie, les développements théorique pour un élément isolé de surface  $ds$ , supposé représentatif en moyenne pour toute la section de calcul, il s'agit d'un élément de béton fissuré en béton armé sollicité par des efforts extérieurs totaux connus  $N_x$ ,  $N_y$  et  $V$  figure (3.1).

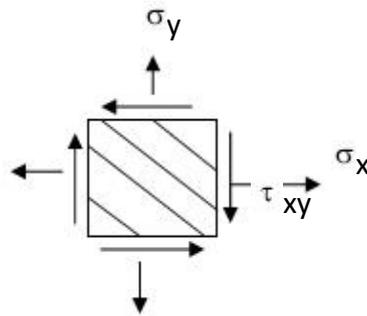


Figure 3.1 : Élément fissuré en béton armé.

#### III.1.1 Etude d'un élément isolé :

##### III.1.1.1 Hypothèses fondamentales de la méthode :

- Le domaine de calcul est l'élasticité non linéaire ; à chaque état de déformation correspond un seul état de contrainte, l'historique de la sollicitation n'est pas considéré.
- On considère une taille d'élément suffisamment grande par rapport à l'espacement des fissures. Les contraintes et les déformations pourront être analysées par leurs valeurs moyennes. Il s'agit alors d'un milieu continu équivalent pour lequel on écrit l'ensemble des équations, ce qui permet l'utilisation du cercle de Mohr.
- L'étude prend en considération un élément en béton armé d'épaisseur constante, sollicité par des efforts de membranes. Les axes longitudinaux et transversaux sont choisis de façon à ce qu'ils correspondent aux directions des armatures.

### III.1.1.2 Hypothèses de calcul :

- On considère que l'adhérence entre l'acier intérieur et le béton est parfaite.
- Les armatures sont uniformément réparties sur la longueur de l'élément dans chaque direction.
- Il y a coïncidence des directions principales des contraintes et des déformations dans le béton.

**Convention de signe** : les contraintes et les déformations de traction seront considérées comme positives et celles de compression comme négatives.

### III.1.1.3 Bases du modèle :

L'étude d'un élément fissuré sollicité à l'effort tranchant consiste à analyser séparément le béton et l'acier.

Conformément à la deuxième hypothèse, toutes les équations seront exprimées en contraintes et déformations moyennes. Les équations disponibles sont les équations d'équilibre, les équations de compatibilité et les lois de comportement des matériaux.

### III.1.1.4 Equations d'équilibre :

Les efforts totaux qui sollicitent l'élément sont équilibrés par le béton et l'acier. On considère que les armatures résistent uniquement aux efforts axiaux. Soit alors un élément de volume figure (3.2). L'état de contrainte dans l'acier et le béton est montré à la figure (3.3).

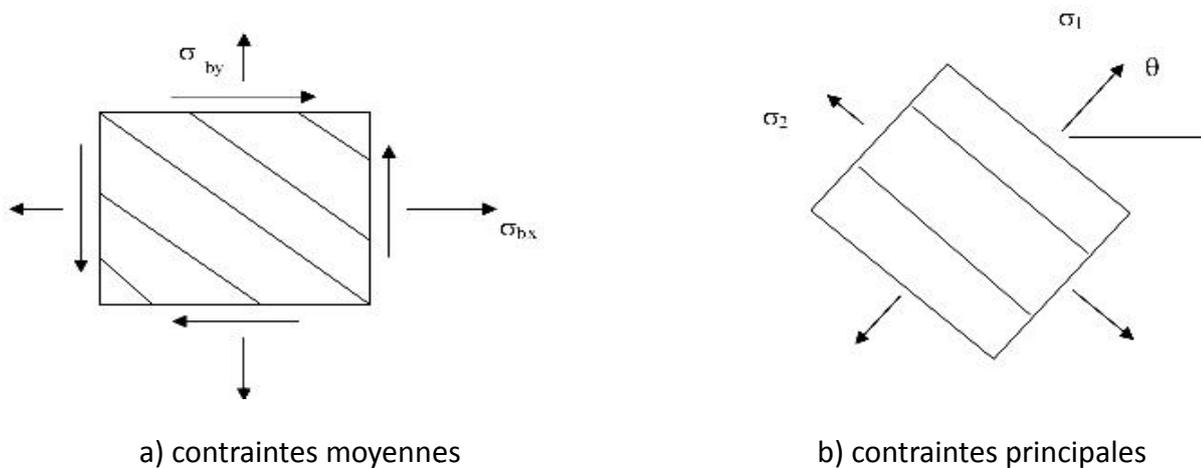


Figure (3.2) Contraintes moyennes dans le béton.

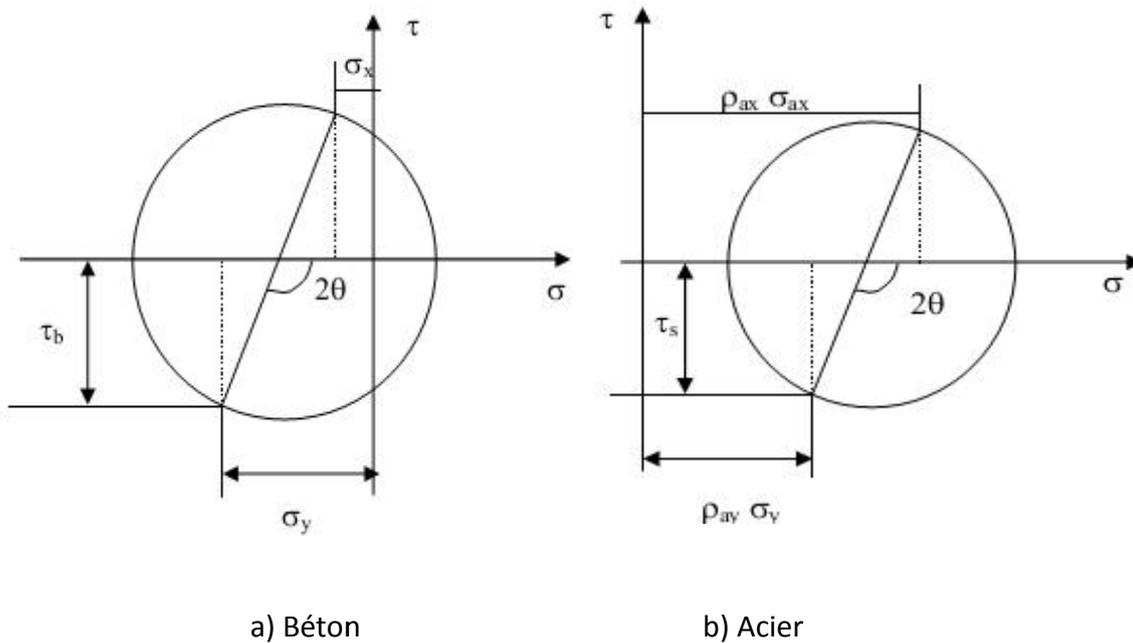


Figure (3.3) : Cercle de Mohr pour les contraintes moyennes.

L'armature étant considérée comme résistante uniquement à l'effort axial, on a :

$$N_x = N_{bx} + N_{ax} = \int_A \sigma_{bx} dA + \int_A \sigma_{ax} dA$$

Si on néglige la réduction de la section de béton à cause de la présence des armatures  $A = A_b$  on obtient :

$$\sigma_x = \sigma_{bx} + \rho_{ax} \sigma_{ax}$$

De manière analogue on obtient :

$$\sigma_y = \sigma_{by} + \rho_{ay} \sigma_{ay}$$

On a aussi :

$$\tau_{bx} = \tau_{by} = \tau_{bxy}$$

$$\tau_{ax} = \tau_{ay} = 0$$

où :  $\rho_{ax} = A_{ax} / A_{bx}$  : pourcentage d'acier disposé selon la direction OX

(A)

Alors, les conditions de sollicitation dans le béton sont définies si  $\tau_{bxy}$ ,  $\sigma_{by}$  et  $\sigma_{bx}$  sont connues.

Si on écrit les contraintes dans le béton dans le repère XOY en fonction des contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  en utilisant la géométrie du cercle de Mohr pour les contraintes et en tenant compte de l'hypothèse sur la direction principale des contraintes et déformations, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{bx} &= \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta \\ \sigma_{by} &= \sigma_2 \cos^2 \theta + \sigma_1 \sin^2 \theta \\ \tau_{bxy} &= (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

En utilisant les relations A et B on obtient :

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta + \rho_{ax} \sigma_{ax} \quad (3.1)$$

$$\sigma_y = \sigma_2 \cos^2 \theta + \sigma_1 \sin^2 \theta + \rho_{ay} \sigma_{ay} \quad (3.2)$$

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \theta \sin \theta \quad (3.3)$$

### III.1.1.5 Equations de compatibilité :

L'hypothèse d'adhérence parfaite entre le béton et l'acier conduit à :

$$\varepsilon_{ax} = \varepsilon_{bx} = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_{ay} = \varepsilon_{by} = \varepsilon_y$$

Si l'on connaît les déformations  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  et  $\gamma_{xy}$  on peut en déduire les déformations dans n'importe quelle direction en utilisant la géométrie du cercle de Mohr pour les déformations (figure (3.4)).

L'expression des déformations principales en fonction des déformations  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  et  $\gamma_{xy}$  est déduite de la géométrie du cercle de Mohr pour les déformations :

$$\gamma_{xy} = 2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \operatorname{tg}(\theta)$$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_y - \varepsilon_2}$$

où :  $\varepsilon_{1,2}$  = les déformations principales en traction (respectivement en compression)

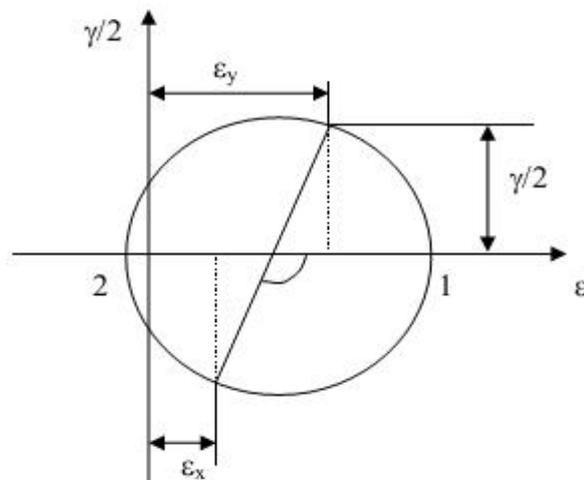


Figure (3.4) : Cercle de Mohr pour les déformations moyennes

si on exprime les déformations dans le repère XOY en fonction des déformations principales, on a :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_2 \cos^2 \theta + \varepsilon_1 \sin^2 \theta \quad (3.5)$$

$$\gamma_{xy} = 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos \theta \sin \theta \quad (3.6)$$

### III.1.1.6. Comportement des matériaux :

#### III.1.1.6.1 Comportement du béton en compression :

La relation contrainte-déformation du béton non confiné qu'on obtient sur un cylindre standard peut être décrite par la loi de SARGIN (figure (3.5)).

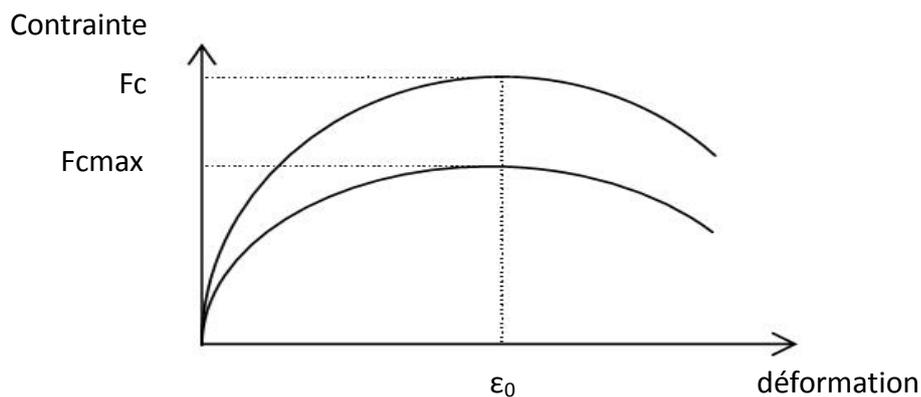


Figure (3.5) : Comportement du béton en compression.

La contrainte est alors liée à la déformation par la relation :

$$\sigma = f_c' \frac{k_b \bar{\varepsilon} - (k_b - 1) \bar{\varepsilon}^2}{1 + (k_b - 2) \bar{\varepsilon} - k_b \bar{\varepsilon}^2} \quad (3.7)$$

Où :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}$$

Le paramètre  $K_b$  ajuste la branche ascendante de la loi et est donné par :

$$k_b = \frac{E_{b0} \cdot \varepsilon_0}{f_c}$$

Avec :

$f_{cj}$  : résistance à la compression du béton à l'âge  $j$ ,

$\epsilon_{rt}$  : déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu,

$E_{bo}$  : module d'élasticité longitudinal du béton.

Le paramètre  $K'_b$  permet d'ajuster la forme de la branche décroissante de la courbe.

Pour un béton normal, on prend généralement  $k'_b = k_b - 1$ .

En modifiant cette loi de comportement par l'introduction d'un coefficient de réduction, on peut formuler la loi de comportement bi-axiale contrainte-déformation pour une bielle de béton comprimée. La contrainte maximale de compression d'une bielle de béton est alors reliée à celle obtenue sur un cylindre standard par la relation proposée par Vecchio et Collins[48] :

La contrainte principale de compression du béton est alors reliée à la déformation principale de compression par la relation :

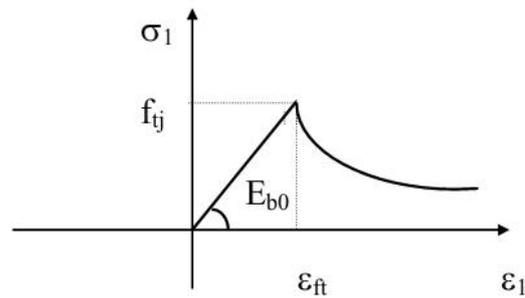
$$\frac{f_{c2}}{f_c'} = \frac{1}{0.8 - 0.34 \epsilon_1 / \epsilon_0} \quad (3.8)$$

La contrainte principale de compression du béton est alors reliée à la déformation principale de compression par la relation :

$$\sigma = f_{c2} \frac{k_b \epsilon - (k_b - 1) \epsilon^2}{1 + (k_b - 2) \epsilon - k_b \epsilon^2} \quad (3.9)$$

### III.1.1.6.2. Comportement du béton en traction

La relation entre la contrainte moyenne principale de traction et la déformation moyenne principale de traction est linéaire avant la fissuration du béton. Au-delà, la contrainte principale de traction diminue avec l'augmentation de la déformation moyenne de traction (figure 3.6).



Figure(3.6) : Comportement du béton en traction.

-Avant la fissuration du béton :

$$\sigma_1 = E_{b0} \cdot \epsilon_1 \quad \text{si } |\epsilon_1| < \epsilon_{ft}$$

-Après fissuration, la contrainte diminue. Pour décrire cette branche descendante, nous avons adopté la relation proposée par BELARBI et HSU [2] reliant la contrainte à la déformation dans le béton entre deux fissures.

$$\sigma_1 = - f_{ft} (\epsilon_{ft} / \epsilon_1)^{0.4} \quad (3.10)$$

où :

$f_{tj}$  : résistance du béton à la traction,

$\epsilon_{ft}$  : déformation de traction correspondant à  $f_{tj}$ ,

$\epsilon_{rt}$  : déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu,

$E_{b0}$ : module d'élasticité longitudinal du béton.

B FOURÉ [13] a montré que la contribution du béton tendu entre deux fissures successives s'annule pas à la plastification des armatures, hypothèse longtemps admise dans les calculs de structure. Par conséquent, la relation(3.10) couvre l'ensemble du champ des déformations de la section jusqu'à rupture totale des armatures.

### III.1.1.6.3. Comportement de l'acier :

Les comportements des aciers sont caractérisés par les types relations admises par les règles BPEL 1999 :

On distingue les aciers naturels et les aciers écrouis.

**A) Aciers naturels :** Ils sont caractérisés par une loi élasto-plastique parfaite (figure 3.7)

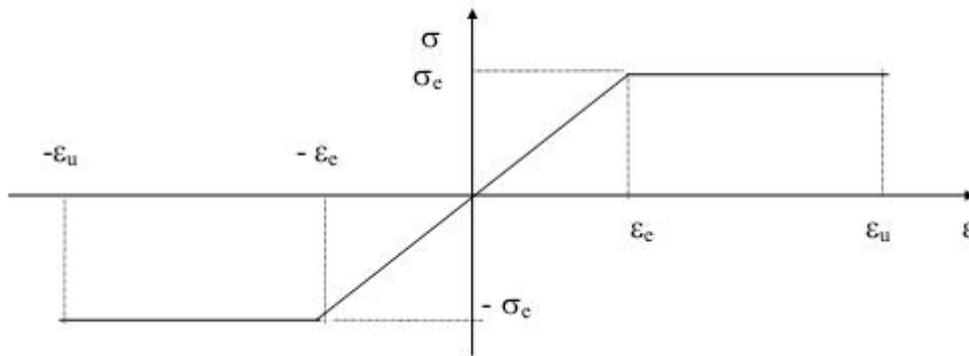


Figure (3.7) : Comportement des aciers naturels.

$$\left. \begin{array}{ll} \sigma = E_a \varepsilon & \text{pour } \varepsilon \leq \varepsilon_e \\ \sigma = \sigma_e & \text{pour } \varepsilon_e < \varepsilon < \varepsilon_u \\ \sigma = 0 & \text{pour } \varepsilon > \varepsilon_u \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

Les déformations extrêmes sont fixées par le règlement BAEL à  $10^0/_{00}$

Où :

$E_a$ : Module longitudinal de l'acier,

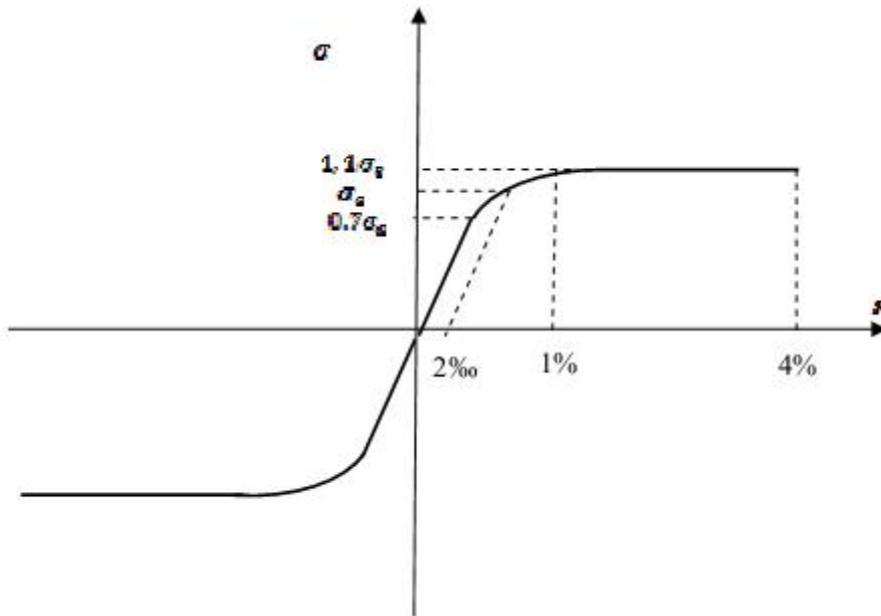
$\varepsilon_e$  : Déformation limite élastique de l'acier,

$\sigma_e$  : Contrainte limite élastique de l'acier,

$\varepsilon_u$  : Déformation ultime de l'acier.

### B) Aciers écrouis

On adopte la loi préconisée par les règles BAEL 83 qui supposent un comportement linéaire élastique jusqu'à 70 % de la limite élastique ( $\sigma_e$ ). Au - delà, une courbe  $\varepsilon = f(\sigma)$  du cinquième degré (figure3.8).



Figure( 3.8): Comportement des aciers écrouis.

Elle se traduit par les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma &= E_s \cdot \varepsilon && \text{pour } \sigma < 0.7 \sigma_e \\
 \varepsilon &= \frac{\sigma}{E_s} + 0.823 \left( \frac{\sigma}{\sigma_e} - 0.7 \right)^5 && \text{pour } 0.7 \sigma_e < \sigma < 1.1 \sigma_e \\
 \sigma &= 1.1 \sigma_e && \text{pour } 1 \% < \varepsilon < \varepsilon_u
 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Le système d'équations ainsi formé est un système de dix équations à dix inconnues qui n'est pas linéaire. La méthode de résolution choisie est alors une méthode itérative.

### III.2. Modèles de calcul :

Plusieurs modèles de calcul ont été proposés pour le calcul des éléments en béton armé. Nous pouvons citer Vecchio et Collins [48], DRIZI [10], HSU [45] et STANCIULISCU[42]. Nous nous limiterons dans cette étude à la présentation du modèle de Vecchio et Collins ainsi qu'à celui de Stanciuliscu.

#### III.2.1. Modèle de Vecchio et Collins :

Ce modèle a pour objectif de déterminer une relation  $\tau_{xy} = f(\nu_{xy})$  pour un élément en béton armé. Les auteurs ont d'abord étudié un élément isolé sous deux systèmes de sollicitation simples, effort tranchant variable et effort normal constant, et effort normal variable et effort tranchant constant. Ensuite, ils ont proposé un modèle général de résolution pour un élément isolé.

##### III.2.2.1.1 Élément sous effort tranchant et contraintes normales constantes :

Il s'agit d'un élément en béton armé soumis à des contraintes normales constantes et au cisaillement. La figure (3.7) montre les conditions générales de chargement dans ce cas.

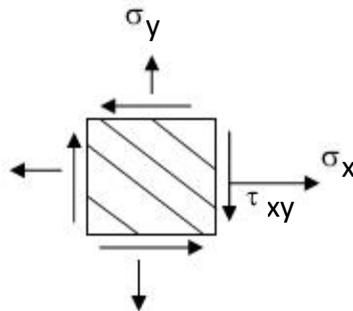


Figure (3.9) Élément en béton armé soumis à un cisaillement et à des contraintes normales constantes.

L'organisation de la méthode est présentée sous la forme d'un algorithme à 11 étapes de calcul. Il s'agit d'une méthode de résolution itérative où l'itération est faite sur trois variables (la déformation principale de compression, la contrainte longitudinale et l'angle d'inclinaison de la direction principale de compression). Les différentes étapes de calcul sont données par:

**Première étape :** donner les valeurs des contraintes normales appliquées à l'élément  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ .

**Deuxième étape :** calculer les déformations initiales dans les deux directions par les relations suivantes :

$$\varepsilon_{x0} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_x}{\rho_{sx} E_s} \quad \text{pour } \sigma_x > 0 \\ -\varepsilon_0 \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{\sigma_x}{f_c \left( 1 + \frac{E_s \rho_{sx}}{E_c} \right)}} \right) \quad \text{pour } \sigma_x < 0 \end{array} \right\}$$

$$\varepsilon_{y0} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_y}{\rho_{sy} E_s} \quad \text{pour } \sigma_y > 0 \\ -\varepsilon_0 \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{\sigma_y}{f_c \left( 1 + \frac{E_s \rho_{sy}}{E_c} \right)}} \right) \quad \text{pour } \sigma_y < 0 \end{array} \right\}$$

**Troisième étape** : choisir une valeur de départ pour la déformation principale de compression  $\varepsilon_2$  telle que :

$$\varepsilon_{20} \leq \varepsilon_2 \leq 2 \varepsilon_0 \quad \text{avec } \varepsilon_{20} = \max(-\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, 0)$$

**Quatrième étape** : estimer la valeur de la déformation longitudinale.

**Cinquième étape** : estimer la valeur de l'angle d'inclinaison  $\theta$  de la direction principale de compression.

**Sixième étape** : calculer l'état de déformation dans l'élément à partir de la géométrie du cercle de Mohr des déformations :

$$\gamma_{xy} = 2 (\varepsilon_x - \varepsilon_2) \operatorname{tg} \theta$$

$$\varepsilon_y = \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{tg}(\theta) - \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_2$$

**Septième étape** : déterminer l'état de contrainte dans le ferrailage et le béton :

- Contrainte dans le ferrailage longitudinal :

$$\sigma_{sx} = E_s \varepsilon_x$$

- Contrainte dans le ferrailage transversal :

$$\sigma_{sy} = E_s \varepsilon_y$$

- Contrainte dans le béton dans la direction x :

$$\sigma_{bx} = \sigma_x - \rho_{sx} \sigma_{sx}$$

- Contrainte dans le béton dans la direction y :

$$\sigma_{by} = \sigma_y - \rho_{sy} \sigma_{sy}$$

- Déterminer les contraintes principales de compression et de traction dans le béton avec les lois de comportement,
- Dédire la contrainte dans le béton dans la direction x du cercle de Mohr pour les contraintes:

$$\sigma'_{bx} = \sigma'_e + \sigma_1 - \sigma_{by}$$

- Dédire l'angle entre la direction principale de traction et la direction x du cercle de Mohr pour les déformations:

$$\theta = \text{tg}^{-1} \sqrt{\frac{\sigma_2 - \sigma_y}{\sigma_1 - \sigma'_x}}$$

**Huitième étape** : vérifier la condition de compatibilité

$$\theta = \theta'$$

- si oui, passer à l'étape 9
- si non, revenir à l'étape 5 et prendre une autre valeur de  $\theta$ .

**Neuvième étape** : vérifier la condition d'équilibre avec la contrainte dans la direction x :

$$\sigma'_x = \sigma_x$$

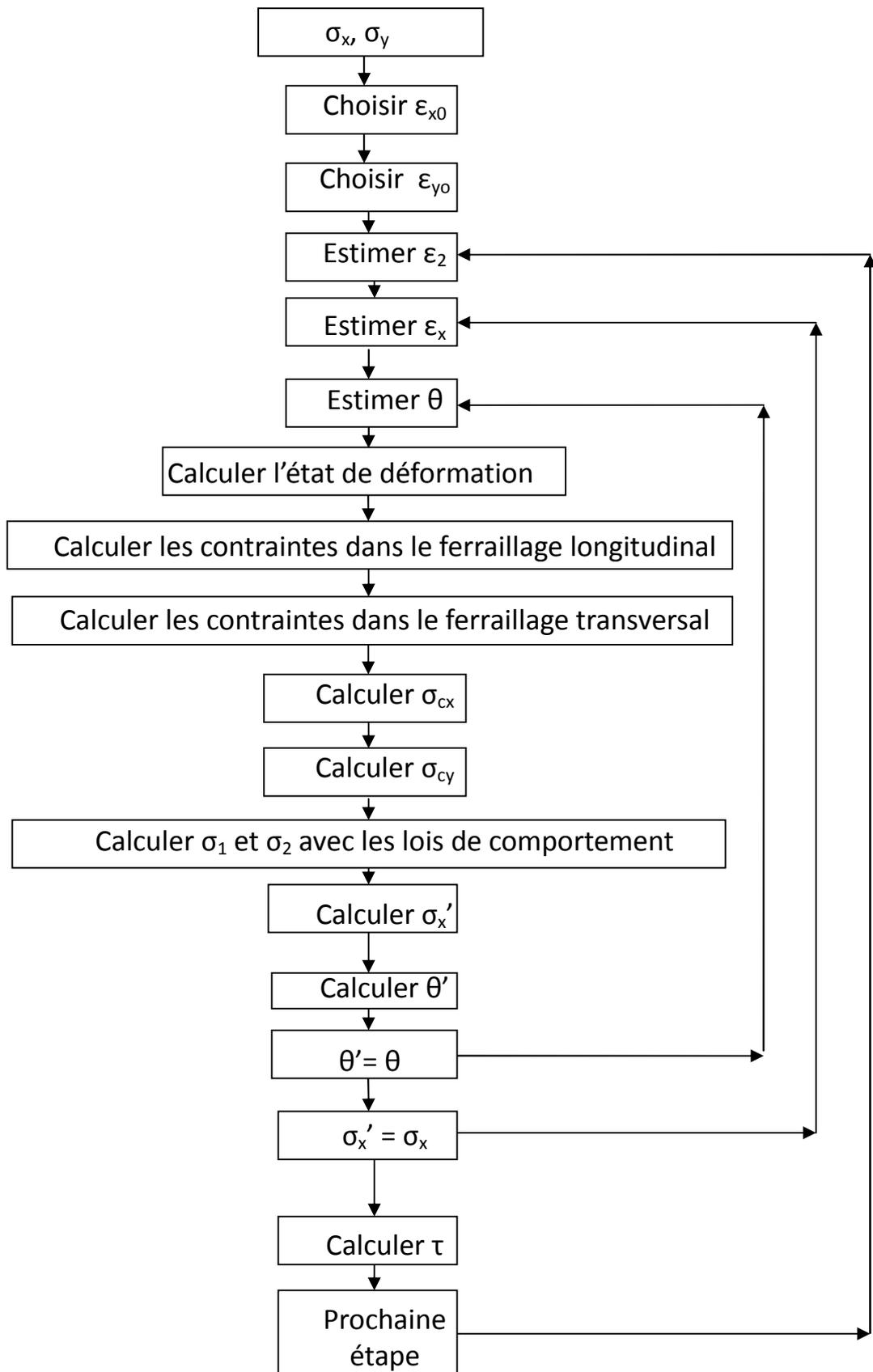
- si oui, passer à l'étape 10
- si non, revenir à la quatrième étape et prendre une nouvelle valeur de  $\epsilon_x$ .

**Dixième étape** : calculer la contrainte tangentielle déduite de la géométrie du cercle de Mohr pour les contraintes :

$$\tau = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \sin 2\theta$$

**Onzième étape** : répéter pour une nouvelle valeur de la déformation principale de compression  $\epsilon_2$ .

L'organigramme obtenu à partir de l'organisation des étapes de cette méthode est :



### III.2.1.2 Élément sous effort tranchant constant et contraintes normales variables :

Il s'agit d'un élément en béton armé soumis à des contraintes normales variables et à un effort tranchant constant. Dans ce cas de charge, les auteurs ont défini une condition d'équilibre basée sur la proportion entre les contraintes normales et la contrainte tangentielle. Les variables d'itération retenues dans ce cas sont la déformation principale de compression  $\varepsilon_2$ , la déformation dans la direction  $x$  et l'angle d'inclinaison  $\theta$  de la direction principale de traction par rapport à la direction  $x$ . L'algorithme de la méthode est organisé comme suit :

**Première étape** : calculer les paramètres définissant la proportion des contraintes normale par rapport aux contraintes tangentielles :

$$K_x = \frac{\sigma_x}{\tau} \quad \text{et} \quad K_y = \frac{\sigma_y}{\tau}$$

**Deuxième étape** : choisir une valeur de départ pour la déformation principale de compression  $\varepsilon_2$  telle que :

$$0 \leq \varepsilon_2 \leq 2 \varepsilon_0$$

**Troisième étape** : estimer la valeur de la déformation longitudinale.

**Quatrième étape** : estimer la valeur de l'angle d'inclinaison  $\theta$  de la direction principale de compression.

**Cinquième étape** : calculer l'état de déformation dans l'élément à partir de la géométrie du cercle de Mohr des déformations :

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 2 (\varepsilon_x - \varepsilon_2) \operatorname{tg} \theta \\ \varepsilon_y &= \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{tg} (\theta) - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_2 \end{aligned}$$

**Sixième étape** : déterminer l'état de contrainte dans le ferrailage et le béton :

- Contrainte dans le ferrailage longitudinal :

$$\sigma_{sx} = E_s \varepsilon_x$$

- Contrainte dans le ferrailage transversal:

$$\sigma_{sy} = E_s \varepsilon_y$$

- Contrainte dans le béton dans la direction x :

$$\sigma_{bx} = \sigma_2 \sin 2\theta - \sigma_1 \cos 2\theta$$

- Contrainte dans le béton dans la direction y :

$$\sigma_{by} = \sigma_2 \cos 2\theta - \sigma_1 \sin 2\theta$$

- Calculer les contraintes principales de compression et de traction dans le béton par les lois de comportement.

- Contrainte dans le béton dans la direction x :

$$\sigma_{bx} = \sigma_2 \sin 2\theta - \sigma_1 \cos 2\theta$$

- Contrainte dans le béton dans la direction y :

$$\sigma_{by} = \sigma_2 \cos 2\theta - \sigma_1 \sin 2\theta$$

- Contrainte tangentielle déduite de la géométrie du cercle de Mohr pour les contraintes :

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta$$

- Contrainte extérieure dans le béton dans la direction x :

$$\sigma'_x = \sigma_{bx} + \rho_{sx} \sigma_{sx}$$

- Contrainte extérieure dans le béton dans la direction y :

$$\sigma'_y = \sigma_{by} + \rho_{sy} \sigma_{sy}$$

- Calculer les nouvelles valeurs des paramètres  $k_x$  et  $k_y$  :

$$K'_x = \frac{\sigma'_x}{\tau} \quad \text{et} \quad K'_y = \frac{\sigma'_y}{\tau}$$

**Septième étape :** vérifier la condition de compatibilité

$$K'_x K_y = K'_y K_x$$

- si oui, passer à l'étape 8
- si non, revenir à l'étape 4 et prendre une autre valeur de  $\theta$ .

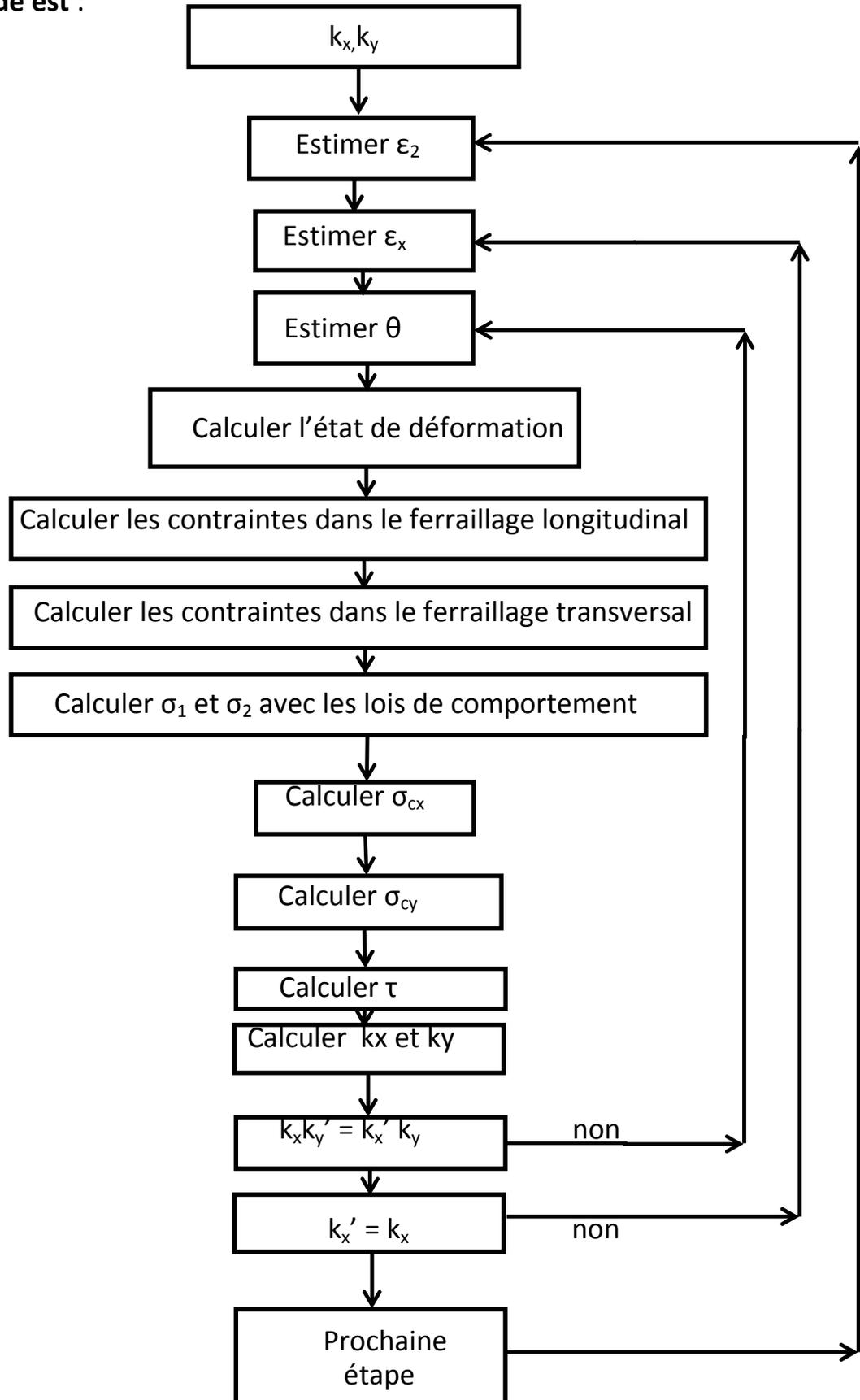
**Huitième étape :** Vérifier la condition d'équilibre :

$$K'_x = K_x$$

- si oui, passer à l'étape 9
- si non, revenir à la troisième étape et prendre une nouvelle valeur de  $\epsilon_x$ .

**Neuvième étape :** répéter le calcul pour une nouvelle valeur de la déformation principale de compression  $\epsilon_2$ .

L'organigramme obtenu à partir de l'organisation des étapes de calcul de cette méthode est :



### III.2.1.3 Méthode générale de résolution pour un élément isolé :

Dans le cadre de cette méthode, les auteurs ont choisi de tenir compte des contraintes locales de compression et des contraintes de cisaillement au niveau des fissures. Des relations et des inconnues supplémentaires ont été alors introduites à côté du système d'équations fondamental de la méthode. Le système d'équation ainsi obtenu est non linéaire. La méthode de résolution choisie est une méthode itérative avec des itérations sur la déformation principale de traction  $\varepsilon_1$ , l'angle d'inclinaison de la direction principale de traction  $\theta$  et la contrainte dans l'acier transversal  $\sigma_{sy}$ . De plus un choix de la distance entre les fissures dans les directions x et y a été introduit. L'algorithme de la méthode est organisé comme suit :

**Première étape** : donner les valeurs de la distance entre les fissures dans les deux directions  $S_{mx}$  et  $S_{my}$ .

**Deuxième étape** : choisir une valeur de départ pour la déformation principale de compression :  $\varepsilon_1$ .

**Troisième étape** : estimer la valeur de l'angle d'inclinaison  $\theta$  de la direction principale de compression.

**Quatrième étape** : calculer  $w$  (fissure moyenne) :

$$w = \varepsilon_1 s_0 \quad \text{avec} \quad s_0 = \frac{1}{\frac{\sin\theta}{S_{mx}} + \frac{\cos\theta}{S_{my}}}$$

**Cinquième étape** : estimer la contrainte moyenne dans la plus faible armature (d'habitude  $\sigma_{sy}$ )

**Sixième étape** : calculer la contrainte moyenne de traction dans le béton avec la loi de comportement.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E_c \varepsilon_1 && \text{pour } \varepsilon_1 \leq \varepsilon_f \\ \sigma_1 &= \frac{f_t}{1 + \sqrt{200} \varepsilon_1} && \text{pour } \varepsilon_1 \geq \varepsilon_f \end{aligned}$$

La valeur de  $\sigma_1$  obtenue doit respecter la condition suivante :

$$\sigma_1 \leq \tau_{c\max} (0.18 + 0.3k^2) \operatorname{tg}\theta$$

$$\text{ou} \quad k = 1.64 - \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} \geq 0 \quad \text{et} \quad \tau_{c\max} = \frac{\sqrt{-f_c}}{0.31 + 24 \frac{w}{a + 16}}$$

**Septième étape** : calculer la contrainte tangentielle dans le béton à partir de la géométrie du cercle de Mohr des contraintes :

- la contrainte dans le béton dans la direction y est donnée par :

$$\sigma_{by} = \sigma_y - \rho_{sy}\sigma_{sy}$$

- la contrainte tangentielle dans le béton est alors donnée par:

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_l - \sigma_{by}}{\operatorname{tg}\theta}$$

**Huitième étape** : calculer la contrainte principale de compression déduite du cercle de Mohr:

$$\sigma_2 = \sigma_l - \tau_{xy} \left( \operatorname{tg}\theta + \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} \right)$$

**Neuvième étape** : calculer la contrainte principale maximale du béton par :

$$\sigma_{2\max} = \frac{f_c}{0.8 - 0.34 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}} \leq f_c$$

**Dixième étape** : vérifier la condition d'écrasement du béton des bielles comprimées :

$$\sigma_2 \leq \sigma_{2\max}$$

- si oui, passer à l'étape 11

- si non, revenir à la deuxième ou troisième étape et prendre une valeur de  $\varepsilon_1$

plus petite ou bien une autre valeur de  $\theta$  ( $\theta \approx 45^\circ$ ).

**Neuvième étape** : vérifier la condition d'équilibre avec la contrainte principale de compression:

$$\sigma'_2 = \sigma_2$$

- si oui, passer à l'étape 10

- si non, revenir à la quatrième étape et prendre une nouvelle valeur de  $\varepsilon_x$ .

**Onzième étape**: Calculer la déformation principale de compression  $\varepsilon_2$  :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_{2\max}}} \right)$$

**Douzième étape** : calculer la déformation dans la direction y :

$$\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \operatorname{tg}^2\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta}$$

**Treizième étape** : calculer la contrainte dans l'armature transversale :

$$\sigma_{sy} = E_s \varepsilon_y$$

**Quatorzième étape** : vérifier la condition d'équilibre par la contrainte dans l'armature transversale :

$$\sigma_{sy} = \sigma_{sy}$$

- si oui, passer à la quinzième étape
- si non, revenir à la cinquième étape prendre une autre valeur de  $\sigma_{sy}$ .

**Quinzième étape** : calculer la déformation dans la direction x par la géométrie du cercle de Mohr des déformations :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_y$$

**Seizième étape** : calculer la contrainte  $\sigma_{sx}$  dans l'acier longitudinal avec la loi de comportement de l'acier.

**Dix-septième étape** : calculer la contrainte, dans le béton, dans la direction x :

$$\sigma_{cx} = \sigma_l - \frac{\tau_{xy}}{\operatorname{tg}\theta}$$

**Dix-huitième étape** : calculer la contrainte totale dans la direction x :

$$\sigma_x = \sigma_{cx} + \rho_{sx} \sigma_{sx}$$

**Dix-neuvième étape** : vérifier la condition d'équilibre en contrainte dans la direction x :

$$\sigma_x = \sigma_x$$

- si oui, passer à l'étape suivante
- si non, revenir à la troisième étape et prendre une autre valeur de  $\theta$  (l'augmentation de  $\theta$  conduit à l'augmentation de  $\sigma_x$ ).

**Vingtième étape** : calculer les contraintes normale  $\sigma_{ci}$  et tangentielle  $\tau_{ci}$  au niveau de la fissure :

$$\Delta\sigma_{ci} = \sigma_{ci} - \rho_{sx}(f_{ey} - f_{ex})$$

- si  $\Delta\sigma_{ci} \leq 0$  on prend :  $\tau_{ci} = 0$  et  $\sigma_{ci} = 0$  et on passe à l'étape suivante.
- si non on prend :  $C = \Delta\sigma_{ci} \operatorname{tg}\theta - 0.18\tau_{ci\max}$

$$\text{-si } C \leq 0 \text{ on prend : } \sigma_{ci} = 0 \text{ et } \tau_{ci} = \Delta\sigma_{ci} \operatorname{tg}\theta$$

-si non, on prend :

$$A = \frac{0.82}{\tau_{ci\max}} \quad \text{et } B = \text{tg}\theta - 1.64$$

$$\sigma_{ci} = \frac{(-B - \sqrt{B^2 - 4AC})}{2A}$$

$$\tau_{ci} = (\sigma_{ci} + \Delta\sigma_{ci}) \text{tg}\theta$$

**Vingt et unième étape** : calculer les contraintes dans l'acier au niveau de la fissure  $\sigma_{syf}$  et  $\sigma_{sxf}$

$$\sigma_{syf} = \sigma_{sy} + (\sigma_1 + \sigma_{ci} - \frac{\tau_{ci}}{\text{tg}\theta}) \rho_{sy}$$

$$\sigma_{sxf} = \sigma_{sx} + (\sigma_1 + \sigma_{ci} - \tau_{ci} \text{tg}\theta) \rho_{sx}$$

**Vingt deuxième étape** : vérifier si le ferrailage peut transmettre les efforts au niveau de la fissure.

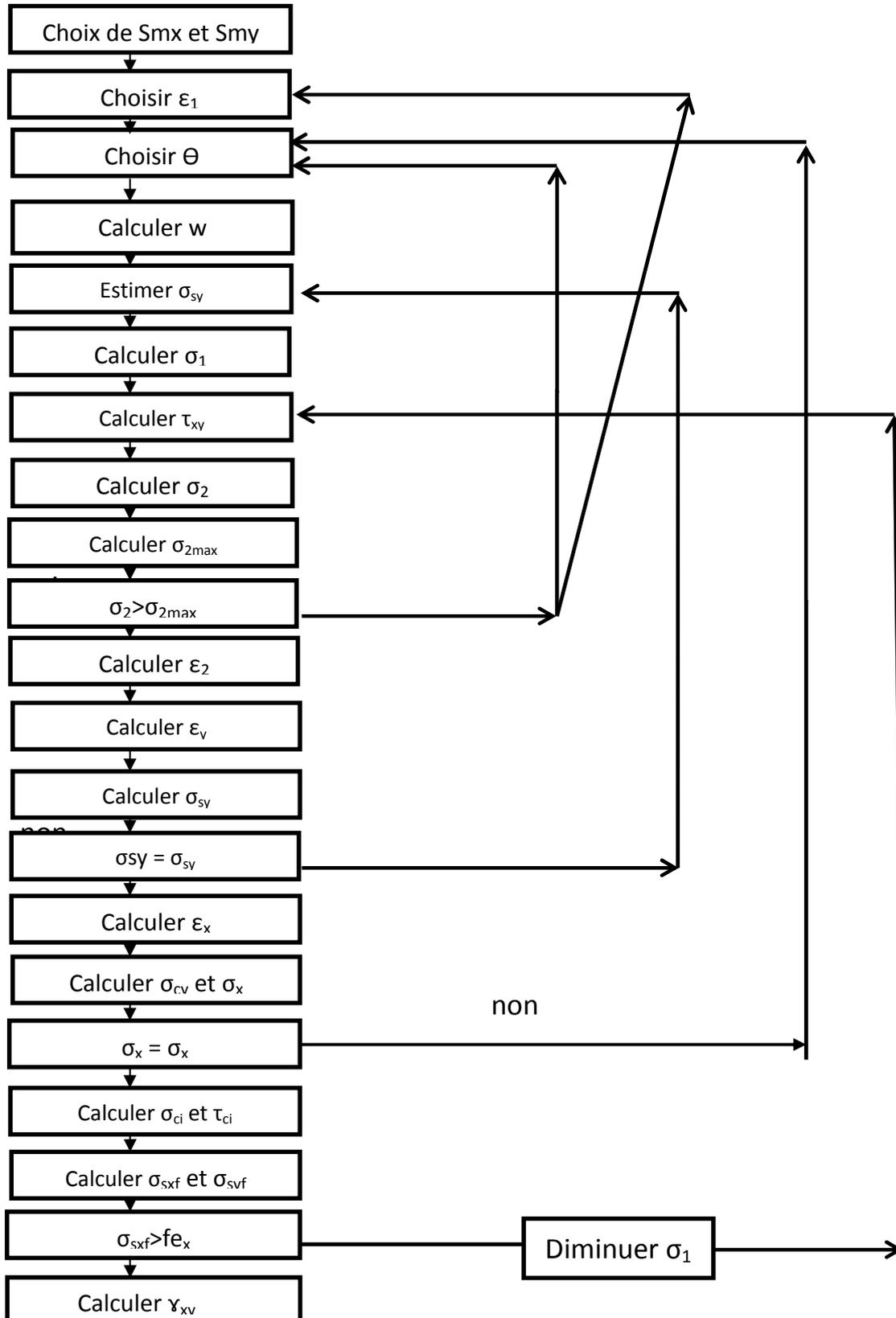
Si  $\sigma_{sxf} > f_{ex}$ , revenir à la septième étape et prendre une valeur plus petite de la contrainte principale de traction.

**Vingt troisième étape** : calculer la déformation de cisaillement déduite de la géométrie du cercle de Mohr des déformations:

$$\gamma_{xy} = 2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \text{tg}\theta$$

### Organigramme de la méthode

L'organigramme de la méthode générale obtenue à partir de l'organisation proposée par les auteurs est :



La méthode de résolution générale proposée par Vecchio et Collins ne peut pas être programmée dans cette forme. Il est aisé de constater qu'il y a des problèmes concernant les inconnues choisies comme variable d'itération. Le premier problème est la vérification qui intervient au niveau de  $\sigma_2$  pour laquelle les auteurs proposent deux possibilités de correction sur deux variables d'itération ( $\varepsilon_1$  et  $\theta$ ). Même si on élimine ce problème en faisant un choix, il demeure que cette vérification du niveau de sollicitation doit intervenir à la fin du processus. Elle est imposée à ce niveau du calcul par les auteurs parce qu'elle doit être satisfaite à l'étape suivante pour pouvoir continuer le calcul. Le deuxième problème consiste dans le croisement des boucles d'itération, ce qui peut conduire à des problèmes de convergence insoupçonnés. Enfin le dernier problème est la correction qui doit intervenir à la dernière étape sur  $\sigma_1$ . En effet, avec la correction faite directement sur  $\sigma_1$ , on peut déterminer l'état de contrainte mais pas l'état de déformation. Les fonctions définissant les lois de comportement des matériaux ne sont pas des bijections. Il est alors judicieux d'effectuer les itérations sur les valeurs des déformations.

### III.2.2. Modèle de Stanciuliscu :

Stanciuliscu a développé une méthode de calcul des poutres basée sur la MCFT. Dans ce modèle, la section transversale de la poutre est modélisée comme une succession de couches de béton et d'éléments d'acier. Chaque couche ou élément d'acier longitudinal est analysé séparément mais les conditions d'équilibre sont satisfaites globalement en utilisant les équations de compatibilité, les équations d'équilibre et les lois de comportement des matériaux, dans l'hypothèse de la planéité des sections et de l'uniformité des contraintes normales sur chaque couche. Enfin, ce modèle a été développé dans le cas d'une flexion composée avec effort tranchant. La distribution des contraintes tangentielles sur la hauteur de la section est déterminée dans chaque section en étudiant une section voisine distante de  $h/6$  de la section de calcul et soumise à des efforts déterminés à partir de ceux appliqués à la section de calcul. La méthode de résolution est une méthode itérative, l'itération est effectuée sur la déformation longitudinale  $\varepsilon_x$ , la déformation principale de compression  $\varepsilon_2$  et l'angle d'inclinaison de la direction principale de traction par rapport à l'axe longitudinal  $x$ .

**L'algorithme de la méthode est organisé comme suit :**

**Première étape :** déterminer les efforts appliqués à la section voisine en fonction de ceux appliqués à la section de calcul :

Soit  $N$  ,  $M$  et  $V$  respectivement l'effort normal, le moment fléchissant et l'effort tranchant au niveau de la section de calcul. Les efforts qui s'en déduisent dans la section voisine distante de  $s$  sont donnés par :

$$N_v = N$$

$$M_v = M - s V$$

$$V_v = V$$

**Deuxième étape :** choisir une distribution des contraintes tangentielles sur la hauteur de la section telle que:

$$\sum_1^m \tau_i b_i h_i = V$$

où :  $b_i$  est la largeur de la couche d'ordre  $i$ ,  $h_i$  sa hauteur et  $\tau_i$  la contrainte tangentielle au niveau de cette couche.

**Troisième étape :** estimer la distribution de la déformation longitudinale  $\epsilon_x$  à partir des déformations sur la fibre le plus comprimée  $\epsilon_b$  et sur la fibre la plus tendue  $\epsilon_t$ .

- au centre de gravité de chaque couche de béton cette déformation est donnée par :

$$\epsilon_{xi} = \epsilon_t + (\epsilon_b - \epsilon_t) \frac{y_{gi}}{h}$$

- au niveau du centre de gravité de chaque élément d'acier longitudinale, elle vaut :

$$\epsilon_{xj} = \epsilon_t + (\epsilon_b - \epsilon_t) \frac{y_{sj}}{h}$$

**Quatrième étape :** calculer les contraintes dans le ferrailage longitudinal :

$$\sigma_{sxj} = \epsilon_{sxj} E_s$$

$$|\sigma_{sxj}| \leq f_{ex}$$

**Cinquième étape :** choisir une valeur pour la déformation principale de compression  $\epsilon_2$

$$\text{telque : } 0 < \epsilon_2 < \epsilon_0$$

**Sixième étape :** choisir une valeur de l'angle d'inclinaison  $\theta$  de la direction principale de compression et l'axe longitudinal.

**Septième étape** : déterminer toutes les valeurs caractéristiques de la déformation à partir de la géométrie du cercle de Mohr des déformations.

$$\gamma_{xy} = 2 (\varepsilon_x - \varepsilon_2) \operatorname{tg} \theta$$

$$\varepsilon_y = \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{tg} (\theta) - \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_2$$

$$\gamma_{xy} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + 2 \varepsilon_2$$

**Huitième étape** : déterminer l'état de contraintes résultant dans le béton :

- la contrainte dans l'acier transversal est donnée par :

$$\sigma_{ay} = E_a \varepsilon_y$$

$$|\sigma_{ay}| \leq f_{ey}$$

- la contrainte transversale dans le béton vaut alors :

$$\sigma_{by} = \rho_{ay} \sigma_{ay}$$

- déterminer les contraintes principales de traction et de compression dans le béton avec les lois de comportement.

- calculer la nouvelle contrainte normale dans le béton suivant l'axe x :

$$\sigma_{bx}' = \sigma_2 + \sigma_1 - \sigma_{by}$$

**Neuvième étape** : calculer la nouvelle valeur de l'angle  $\theta$  déduite de la géométrie du cercle de Mohr pour les contraintes :

$$\theta' = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_{by}}{\sigma_2 - \sigma_{bx}'} \right)^{1/2}$$

**Dixième étape** : calculer la valeur de la contrainte principale de compression en fonction de  $\tau$

$$\sigma_2' = \sigma_{by} - \tau_{xy} \operatorname{tg}(\theta)$$

**Onzième étape** : vérifier la compatibilité

$$\theta = \theta'$$

- si non ; revenir à la sixième étape prendre une autre valeur de l'angle  $\theta$

- si oui ; passer à la douzième étape

**Douzième étape** : vérifier l'équilibre

$$\sigma_2' = \sigma_2$$

- si non, revenir à la cinquième étape et prendre une autre valeur de la déformation principale de compression.

- si oui, passer à la treizième étape.

**Treizième étape** : vérifier l'équilibre de l'effort normal de la section globalement

$$N_{int} = N_{ext}$$

$$M_{int} = M_{ext}$$

- si non, revenir à la deuxième étape prendre une autre distribution de  $\epsilon_x$ .
- si oui, passer à la Quatorzième étape.

**Quinzième étape** : répéter l'ensemble des étapes pour la section voisine.

**Seizième étape** : calculer la nouvelle distribution des contraintes tangentielles qui vérifient l'équilibre de chaque couche de béton :

$$\tau_i = \frac{F_i + F_{i+1}}{2 s b}$$

où : les efforts  $F_i$  et  $F_{i+1}$  sont les efforts sur les faces inférieure et supérieure de la couche d'ordre  $i$ . Ils sont déterminés en écrivant l'équilibre de la couche entre les deux sections.

**Dix-septième étape** : vérifier si cette distribution correspond à celle présumée au début du calcul :

$$\tau'_i = \tau_i$$

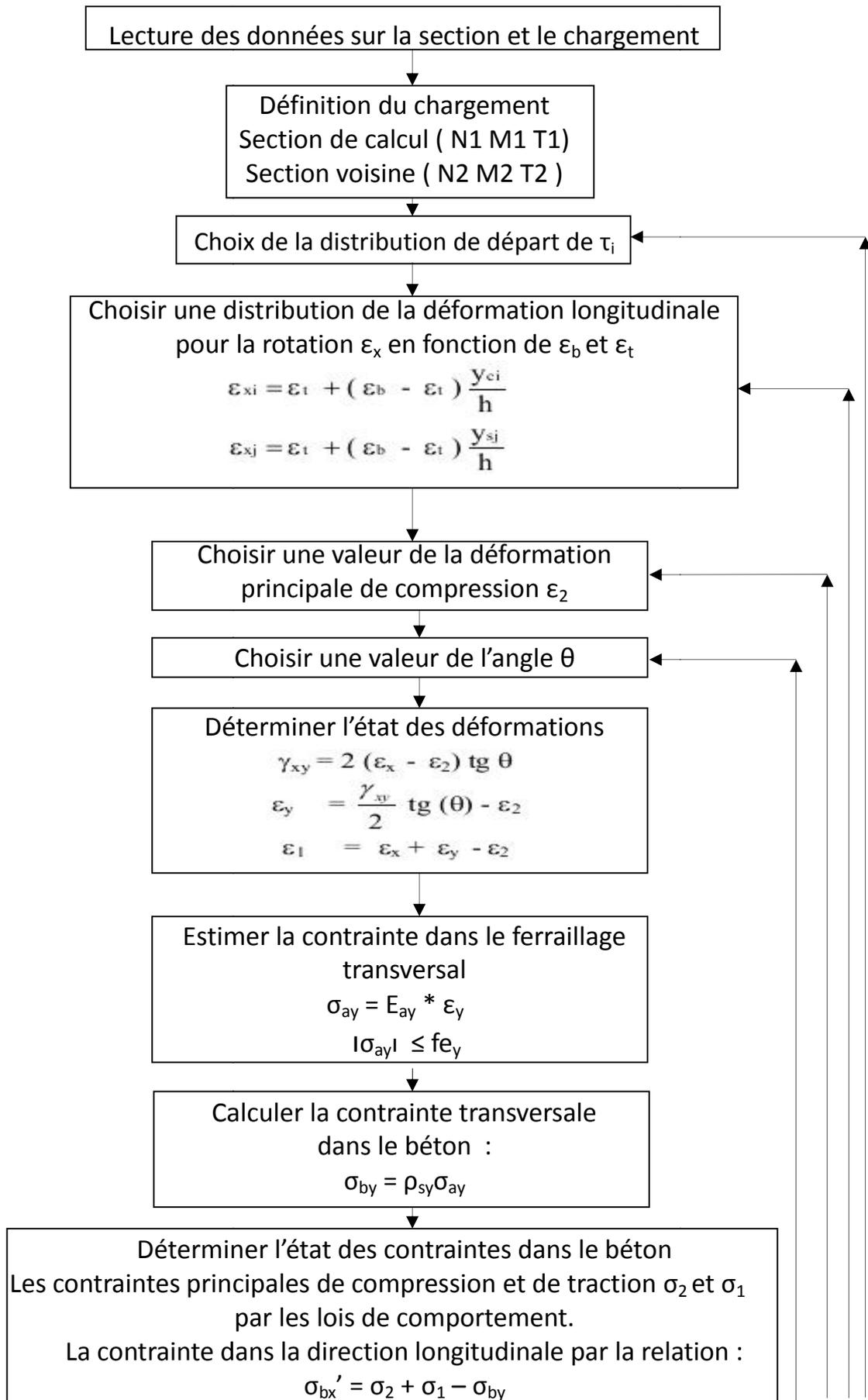
- si oui, passer à l'étape suivante
- si non, revenir à la deuxième étape considérer la nouvelle distribution de  $\tau$ .

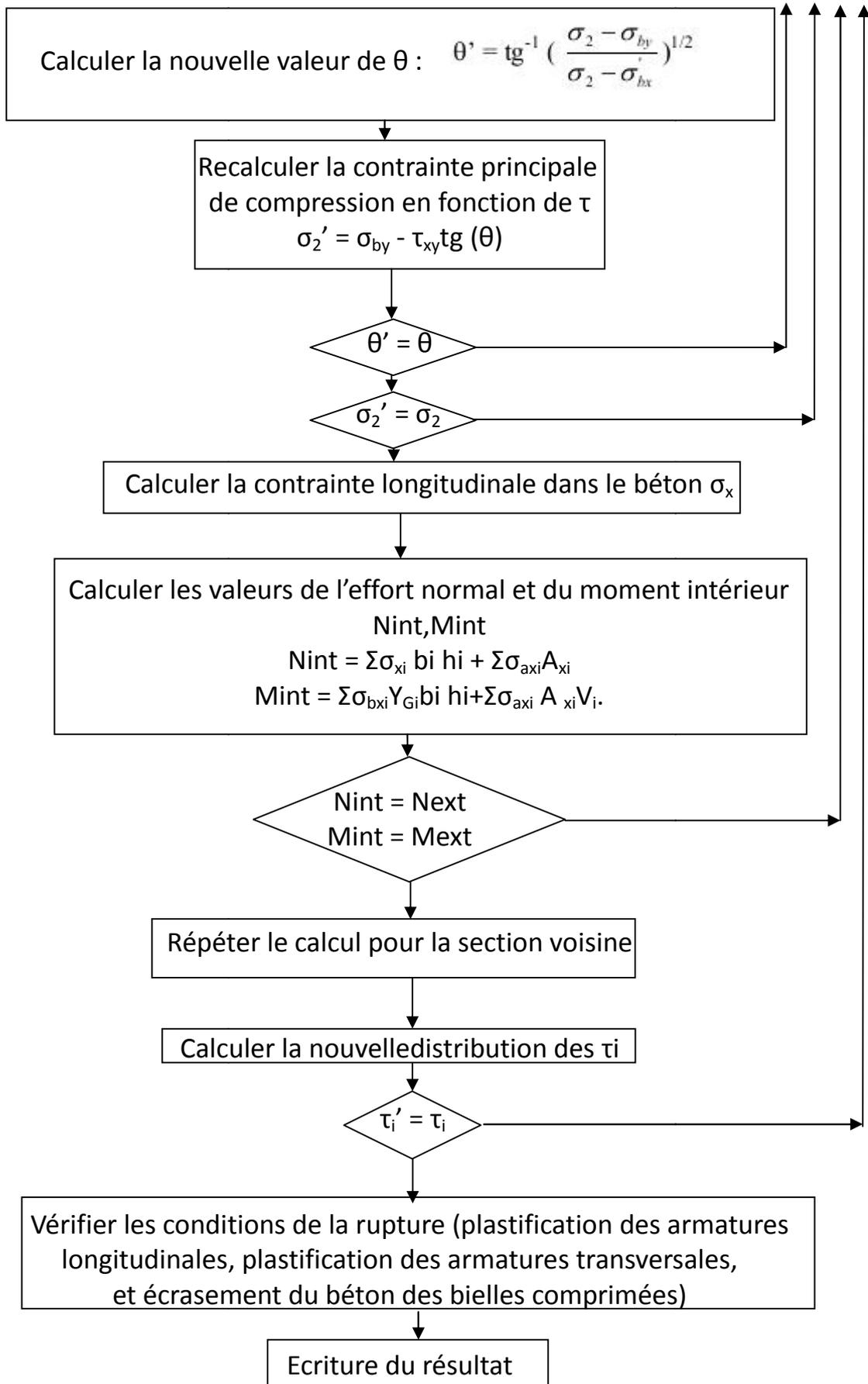
**Dix-huitième étape** : vérifier les conditions à la rupture.

**Dix-neuvième étape** : écrire le résultat.

**Organigramme de la méthode** :

L'organigramme de la méthode construit à partir des étapes proposées par l'auteur est :





Bien que les problèmes de croisement des boucles ainsi que celui de la vérification du niveau de sollicitation observés dans la méthode générale de Vecchio et Collins soient levés, cette méthode reste à améliorer. En effet, il est aisé de constater qu'elle n'est pas adaptée aux calculs classiques de structure basés sur la matrice de rigidité d'une section droite.

L'existence simultanée d'un effort normal et d'un moment fléchissant introduit une variable supplémentaire dans la définition de la distribution des déformations longitudinales, qui est la position de l'axe neutre (qui varie en fonction de l'évolution du chargement).

La contrainte dans le sens transversal calculée dans cette méthode ne vérifie pas la condition d'équilibre des contraintes : en effet, la contrainte totale appliquée à la section dans le sens transversal est, selon la théorie des poutres, nulle. L'équilibre des contraintes dans ce sens peut s'écrire :

$$\sigma_y = \sigma_{by} + \sigma_{ay} = 0$$

Or la formulation de la contrainte dans le béton à la huitième étape ne conduit pas à la satisfaction de cette condition d'équilibre.

La matrice de rigidité de la section droite ne peut être estimée dans ces conditions, en l'absence de relations explicites en déformation entre les sollicitations normales et l'effort tranchant.

L'analyse du comportement d'une structure suppose le calcul d'un nombre élevé de sections droites. Dans ce cas, l'analyse complète de la section voisine rend la durée de calcul trop longue.

Enfin, faire une hypothèse sur la distribution des contraintes tangentielles, afin de faire une bonne estimation de la distribution de celles-ci, permettra d'adapter cette méthode aux calculs classiques de structure, et ainsi son intégration dans un processus de calcul qui appelle le résultat de l'équilibre de la section sous les sollicitations normales en prenant en compte d'éventuelles réductions de l'effort tranchant dues à l'existence d'armatures inclinées dans le calcul de la distribution des contraintes tangentielles d'une part.

D'autre part, il permettra également de limiter une trop longue durée de calcul en éliminant du calcul l'analyse complète de la section voisine. Enfin, il permettra de définir aisément les termes de la matrice de rigidité d'une section droite dans le cas de l'existence simultanée de M, N et V.

### III.3 Modèle de Kachi [20] :

Dans son étude kachi [20] a montré que la contrainte dans le béton dans la direction transversale est une contrainte de compression. Dans le calcul classique du béton armé à l'effort tranchant, le modèle du treillis constitué des bielles inclinées de l'angle  $\theta$  et des armatures transversales (figure 3.10) soumis à l'effort de glissement longitudinal par unité de longueur  $G = V / z$ , permet le calcul des efforts :

-de traction dans les armatures transversales (armatures «droites» de direction y)

$$F_{at} = G \operatorname{tg} \theta$$

-et de compression dans les bielles de béton :

$$F_{bc} = G / \cos \theta$$

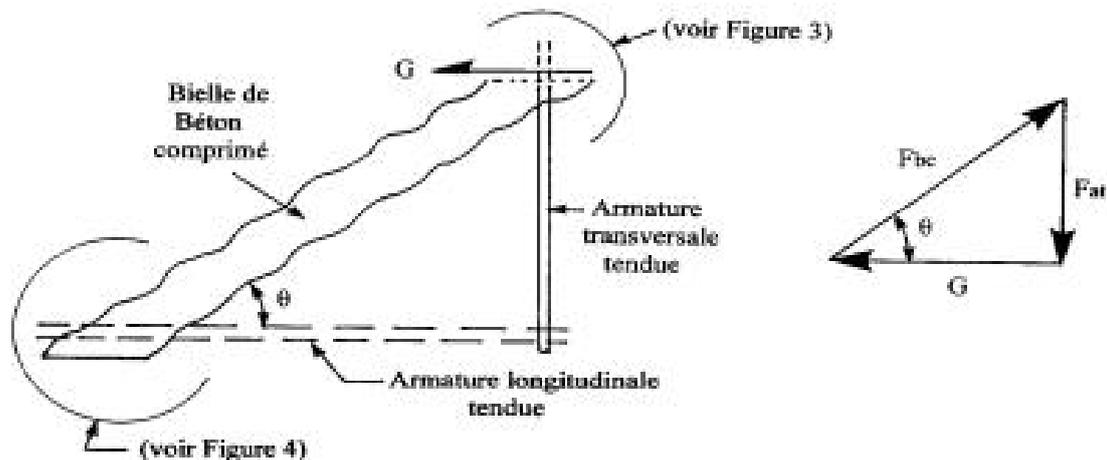


Figure 3.10. Modèle simple du treillis.

Plus finement (figure 3.11), la traction dans l'armature varie entre le maximum  $F_{at}$  au niveau des fissures et  $F'_{at}$  à mi-distance des fissures. La bielle de béton est soumise à la compression  $F_{bc}$  parallèle aux fissures et à une traction  $F_{bt}$  dans la direction y de l'armature due à l'adhérence acier/béton (donc proportionnelle à  $F_{at} - F'_{at}$ ) qui est nulle au niveau des fissures et maximale à mi-distance des fissures.

On peut estimer grosso modo les valeurs absolues moyennes de ces efforts à :

$$F_{at,moy} = ( F_{at} + F'_{at} ) / 2$$

$$F_{bt,moy} = ( F_{at} - F'_{at} ) / 2$$

La résultante dans la direction y est nulle, aussi bien dans le treillis classique qu'en valeurs moyennes :

$$F_{at} - F_{bc} \sin \theta = 0$$

$$F_{at,moy} - (F_{bc} \sin \theta - F_{bt,moy}) = 0 \quad (3.13)$$

Ceci correspond à l'hypothèse des poutres : la contrainte transversale  $\sigma_y$  est nulle (dumoins dans les sections qui respectent le principe de Saint-Venant ; il serait possible de tenir compte de  $\sigma_y$  non nulle dans certaines sections).

L'allongement moyen de l'armature sera lié à l'effort  $F_{at,moy}$ . L'effort local dans le béton est une compression :  $F_{bc} \sin \theta - F_{bt,moy}$ .

La modélisation doit tenir compte de ce paradoxe apparent d'une contrainte de compression du béton dans la direction où la contrainte des armatures est une traction, donc la déformation moyenne un allongement. On ne peut pas relier la contrainte de compression  $\sigma_{by}$  du béton à la déformation moyenne  $\varepsilon_y$ . En fait, celle-ci comprend deux termes :

$$\varepsilon_y = \varepsilon'_{by} + w_y / s_y$$

Le premier est la déformation propre du béton entre les fissures (un raccourcissement d'après ce qui précède). Le second est un allongement dû aux fissures d'ouverture  $w_y$  et d'espacement  $s_y$  dans la direction  $y$  ; ce terme est prépondérant.

La transposition de la condition d'équilibre (3.13) en contraintes compte tenu des conventions de signe (traction positive) et des aires respectives d'acier et de béton donne :

$$\sigma_{by} = - \rho_y \sigma_{ay}$$

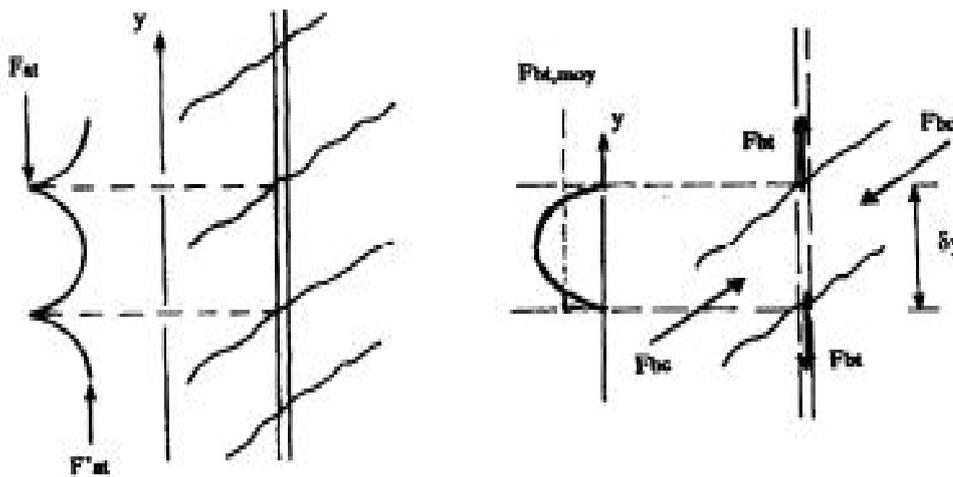


Figure 3.11. Comportement local du béton armé dans le sens  $y$ , dans l'âme.

### III.3 Conclusion :

L'ensemble de ces méthodes nous donne une idée claire sur la résolution du problème .En effet, la difficulté observée, dans un premier temps, sur la nature de la contrainte dans le béton dans le sens transversal a été levée par Kachi [20]. La résolution du système d'équations régissant un élément en béton armé reste compliquée, elle fait appel à des méthodes itératives lourdes. L'objet de ce travail est de réaliser un logiciel de calcul en fortran 90 à partir des travaux effectués par Kachi et col [20], [21], [22] [23],[24], capable de résoudre ce système d'équation, de simuler ainsi l'évolution de la distorsion d'élément voile en fonction de celle de l'effort tranchant.

Néanmoins, l'ensemble des méthodes, calculent la contrainte  $\sigma_2$  avec les relations du cercle de Mohr.

Or dans le cas de fissuration par flexion, pour les poutres, le treillis équivalent se trouve coupé au niveau de la bielle de béton, il n'y a plus de continuité du béton. Ce point nécessite une résolution particulière.

## **CHAPITRE IV :**

### **Etude d'un élément voile en béton armé**

#### IV.1.Introduction :

Nous nous intéressons à l'étude d'un panneau voile en béton armé. La section du voile est étudiée dans l'hypothèse des petites déformations et du comportement élastique non linéaire.

En admettant que les sections restent planes après déformation, que les aciers sont parfaitement solidaires au béton et qu'ils ne reprennent que les efforts axiaux.

Nous considérerons le voile comme étant un monobloc de dimension connue auquel on appliquera un chargement  $q$  et on déterminera la distorsion due à la contrainte de cisaillement sous l'effet du chargement avec une méthode de calcul non linéaire en se basant sur les lois de comportements des matériaux composant le voile décrite dans le chapitre III.

#### IV.2 Algorithme de calcul :

**L'algorithme de la méthode est organisé comme suit :**

**Première étape :** donner la valeur de la charge extérieure  $q$  appliquée à la section transversale du voile et les caractéristiques géométrique du voile.

**Deuxième étape:** calculer la valeur de l'effort normal extérieur résultant  $N_{ext}$

$$N_{ext}=q b h.$$

**Troisième étape :** choisir des valeurs initiales de la courbure  $\delta w$  et de la déformation  $\delta u$  au niveau du CDG de la section.

**Quatrième étape :** calculer la déformation longitudinale  $\epsilon_x(y) = \delta u + \delta w .y$ , conformément à l'hypothèse de planéité des sections (NAVIER-BERNOUILLI).

**Cinquième étape :** calculer les contraintes du béton et de l'acier ( $\sigma_{bx}$  et  $\sigma_{ax}$  selon les lois de Comportement des matériaux décrites au chapitre III)

**Sixième étape :** Calculer les efforts internes  $N_{int}$ .

$$N_{int}= \sigma_{bx}bh+ \sigma_{ax}\rho_xbh$$

**Septième étape :** Vérifier l'équilibre des efforts de la section :

$$N_{int}=N_{ext}$$

-Si oui, passer à la huitième étape.

-Si non, revenir à la deuxième étape et choisir d'autre valeurs de  $\delta u$  et  $\delta w$

**Huitième étape :** Calculer les contraintes (longitudinale et transversale) dans le voile

$$\sigma_x=\sigma_{bx} + \sigma_{ax}\rho_{ax}$$

$$\sigma_x=\sigma_y$$

**Neuvième étape :** choisir une valeur de la déformation principale  $\epsilon_2$

**Dixième étape** : choisir une valeur de l'angle d'inclinaison  $\theta$  de la direction principale de compression.

**Onzième étape** : déterminer les valeurs des déformations à partir du principe du milieu continu en déformations : (en utilisant la géométrie du cercle de Mohr des déformations)

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x}{\sin^2 \theta} - \frac{\varepsilon_2}{\tan^2 \theta}$$

**Douzième étape** : Déterminer les contraintes principales de compression et de traction dans le béton avec les lois de comportement des matériaux.

**Treizième étape** : Déterminer les contraintes dans l'acier et le béton :

Contrainte dans l'acier longitudinal :

$$\sigma_{ax} = E_s \varepsilon_x$$

Contrainte dans l'acier transversal :

$$\sigma_{ay} = E_s \varepsilon_y$$

Contrainte dans le béton dans le sens longitudinal :

$$\sigma_{bx} = \sigma_x - \sigma_{ax} \rho_{ax}$$

Contrainte dans le béton dans le sens transversal :

$$\sigma_{by} = \sigma_y - \sigma_{ay} \rho_{ay}$$

**Quatorzième étape** : déduire la nouvelle valeur Contrainte dans le béton dans le sens longitudinal du cercle de MOHR pour les contraintes :

$$\sigma_{bx'} = \sigma_2 + \sigma_1 - \sigma_{by}$$

**Quinzième étape** : calculer la nouvelle valeur de l'angle  $\theta$  déduite de la géométrie du cercle de MOHR pour les contraintes :

$$\theta' = \tan^{-1} \sqrt{\frac{\sigma_2 - \sigma_{by}}{\sigma_1 - \sigma_{bx'}}$$

**Seizième étape** : vérifier la condition de compatibilité :

$$\theta' = \theta$$

-Si oui, passer à la dix-septième étape.

-Si Non revenir à la dixième étape et prendre une autre valeur de  $\theta$

**Dix-septième étape** : vérifier la condition de compatibilité :

$$\sigma_{bx'} = \sigma_{bx}$$

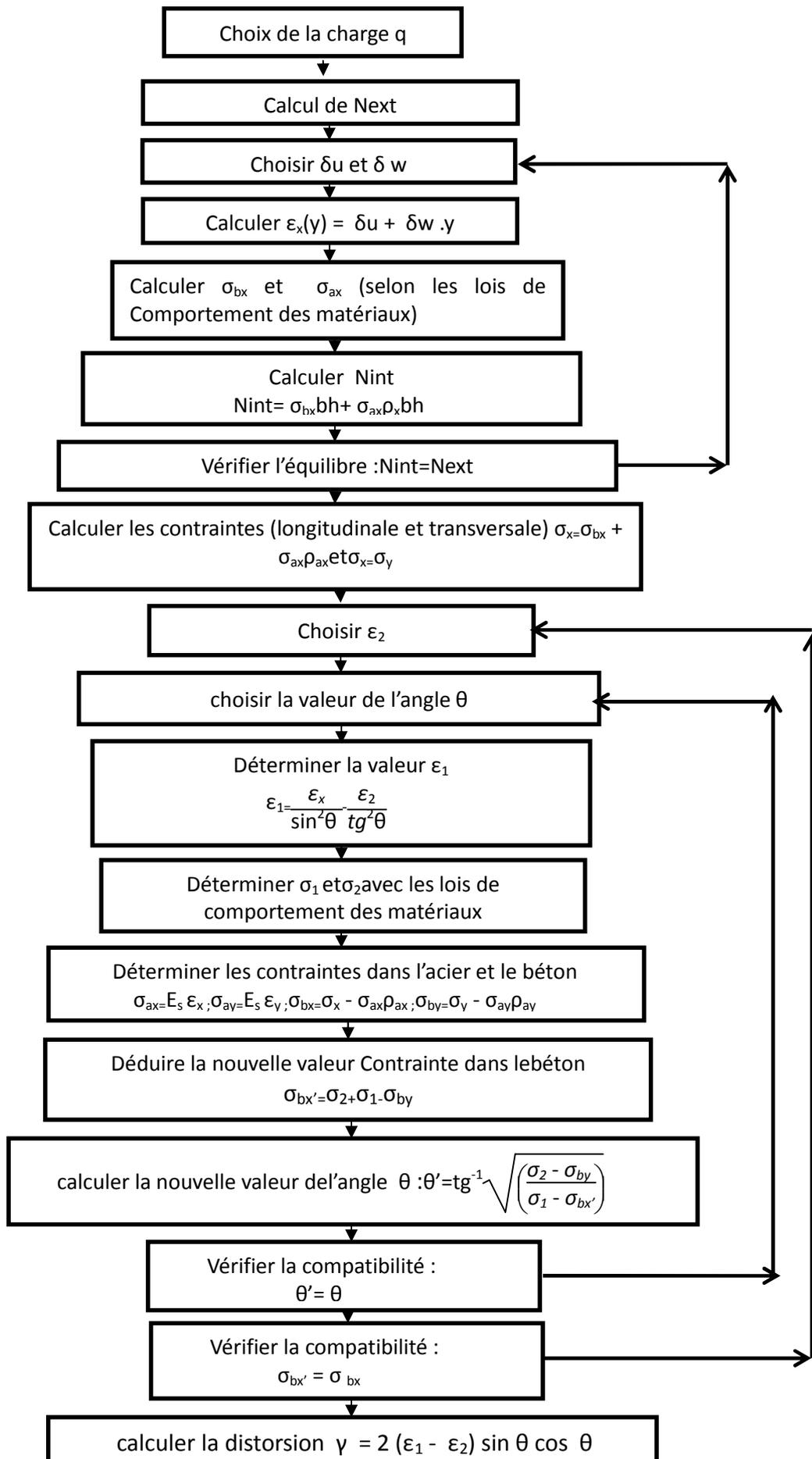
-Si oui, passer à la dix-huitième étape.

-Si Non revenir à la neuvième étape et prendre une autre valeur de  $\varepsilon_2$

**Dix-huitième**: calculer la distorsion  $\gamma = 2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin \theta \cos \theta$

### **Organigramme de la méthode**

L'organigramme de la méthode à partir des étapes proposées est le suivant :



## **CHAPITRE V :**

### **Validation du programme élaboré**

## V.1. Introduction :

Afin de valider le modèle proposé dans le cadre de cette étude qui est basée sur le modèle de Vecchio et Collins, on a effectué le calcul de plusieurs panneaux en béton armé qui ont fait l'objet d'essais à l'université de TORONTO.

## V.2 Résultats des essais fait à l'université de TORONTO :

Il s'agit d'une étude expérimentale sur des éléments voile de 890mm x 890 mm et de 70 mm d'épaisseur, armés de deux lits d'armature dans les deux sens. Les armatures sont placées parallèlement au côté de l'élément dans les deux sens. Des clés d'effort tranchant ont été prévues et ancrées dans le béton des éléments voiles sur tout le périmètre du voile.

L'élément voile est alors chargé par le biais de forces appliquées sur les clés de cisaillement, le long de son périmètre. Trente éléments en béton armé sont alors testés. La majorité des éléments ont été testés au cisaillement pur, d'autres en cisaillement-traction.

En plus des conditions de chargement, cette étude a pris en compte la variation du pourcentage des armatures transversales, celle des armatures longitudinales ainsi que la variation des caractéristiques mécaniques du béton.

Les caractéristiques mécaniques des matériaux utilisés et le type de chargement sont montrés dans le tableau suivant:

où :

$v$  : contrainte de cisaillement.

$\sigma_x$  : contrainte normale selon l'axe OX.

$\sigma_y$  : contrainte normale selon l'axe OY.

$\rho_x$  : pourcentage d'armatures disposées selon la direction OX.

$\rho_y$  : pourcentage d'armatures disposées selon la direction OY.

$f_{ex}$  : limite d'élasticité des armatures selon OX.

$f_{ey}$  : limite d'élasticité des armatures selon OY.

$f_c$  : résistance caractéristique du béton.

$\epsilon_{b0}$  : déformation correspondant à  $f_c$ .

Panneau	Rapports de Chargement  $V:\sigma_x:\sigma_y$	Armatures Longitudinales		Armatures transversales		Béton	
		$\rho_x$	$f_{e_x}$ (MPa)	$\rho_y$	$f_{e_y}$ (MPa)	$\epsilon_{bo}$	$f_c$ (MPa)
PV4	1 : 0 : 0	0.0106	242	0.0106	242	- 0.0025	- 26.6
PV6	1:0 : 0	0.0179	266	0.0179	266	- 0.0025	- 29.8
PV9	1:0 : 0	0.0179	455	0.0179	455	-0.0028	- 11.6
PV12	1:0 : 0	0.0179	469	0.0045	269	- 0.0025	- 16.0
PV16	1:0 : 0	0.0074	255	0.0074	255	- 0.0020	- 21.7
PV22	1:0 : 0	0.0179	458	0.0152	420	- 0.0020	- 19.6

Tableau 1 :Les caractéristiques mécaniques des matériaux utilisés et le type de chargement.

### V.3 . Comparaison des résultats calculés à ceux obtenus lors des essais :

Nous nous limiterons dans cette comparaison aux voiles PV5 ; PV9 ;PV12 ; PV4 ;PV16 ;PV22.

Les résultats obtenus sont présentés sous forme de courbes comparatives des résultats expérimentaux d'une part et les résultats obtenus par le calcul on considérant  $\epsilon_{bo}$  inchangé dans la direction des bielles comprimée. Il faut bien noter qu'il s'agit de la relation contrainte tangentielle – distorsion  $\gamma_{moy}$  d'un panneau soumis au cisaillement (éventuellement combiné à un effort normal).

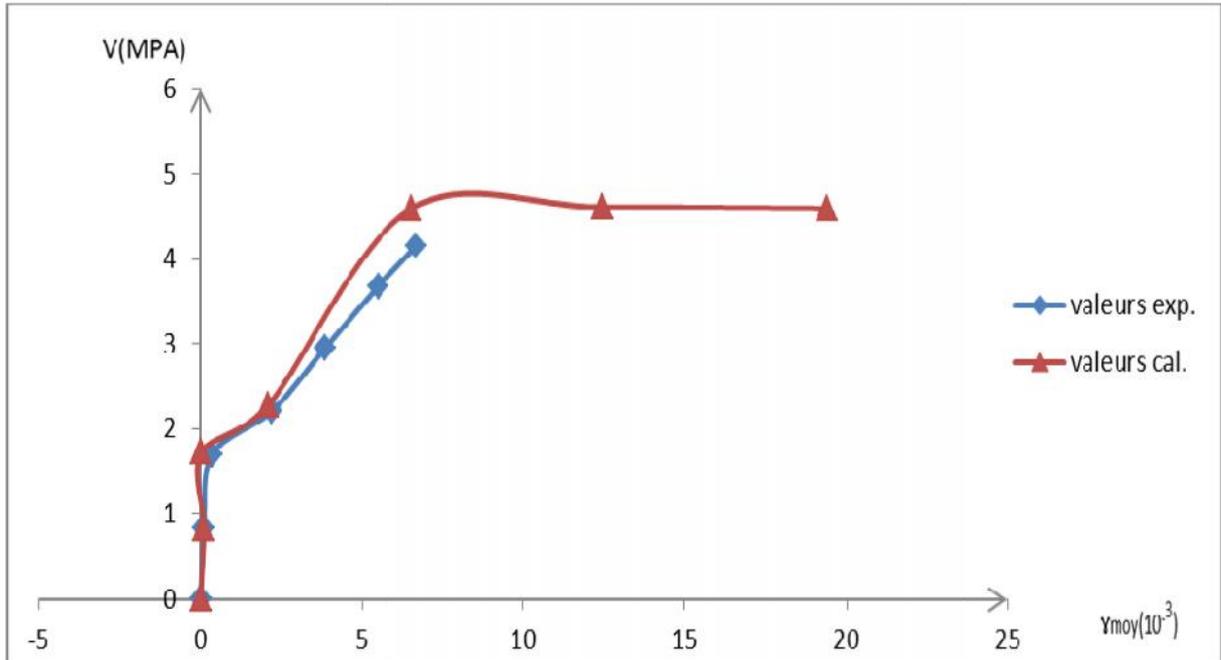


Figure 5.1 : Evolution de la distorsion en fonction de contrainte tangentielle pour le voile PV5.

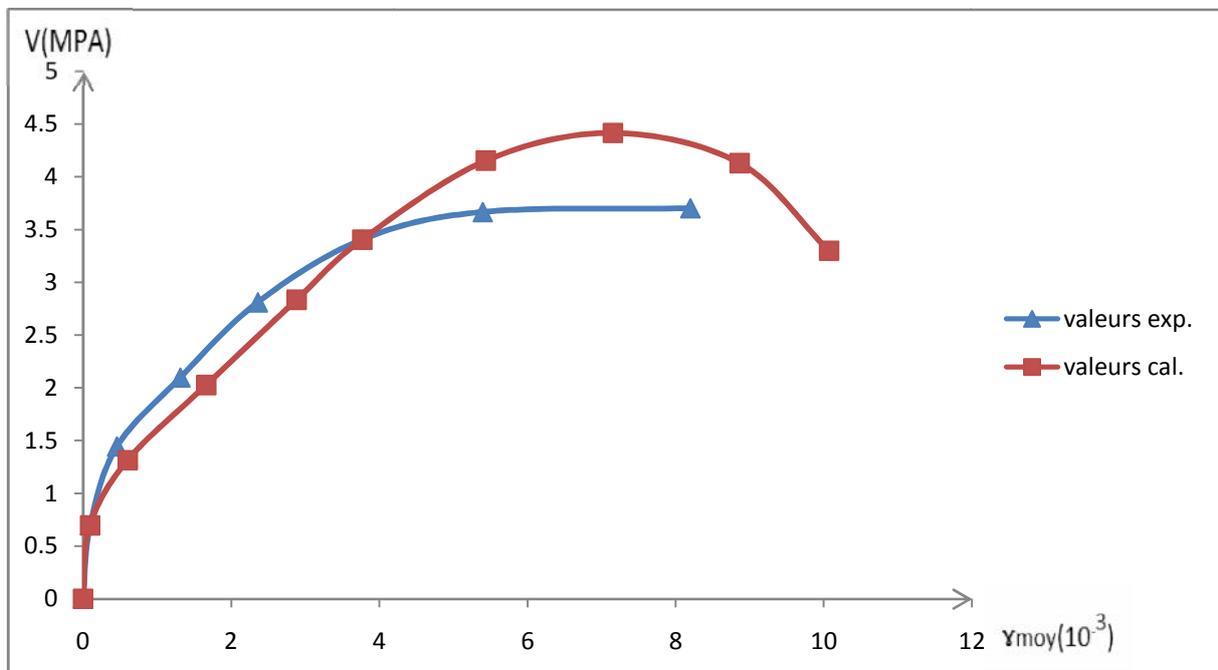


Figure 5.2 : Evolution de la distorsion en fonction de contrainte tangentielle pour le voile PV9.

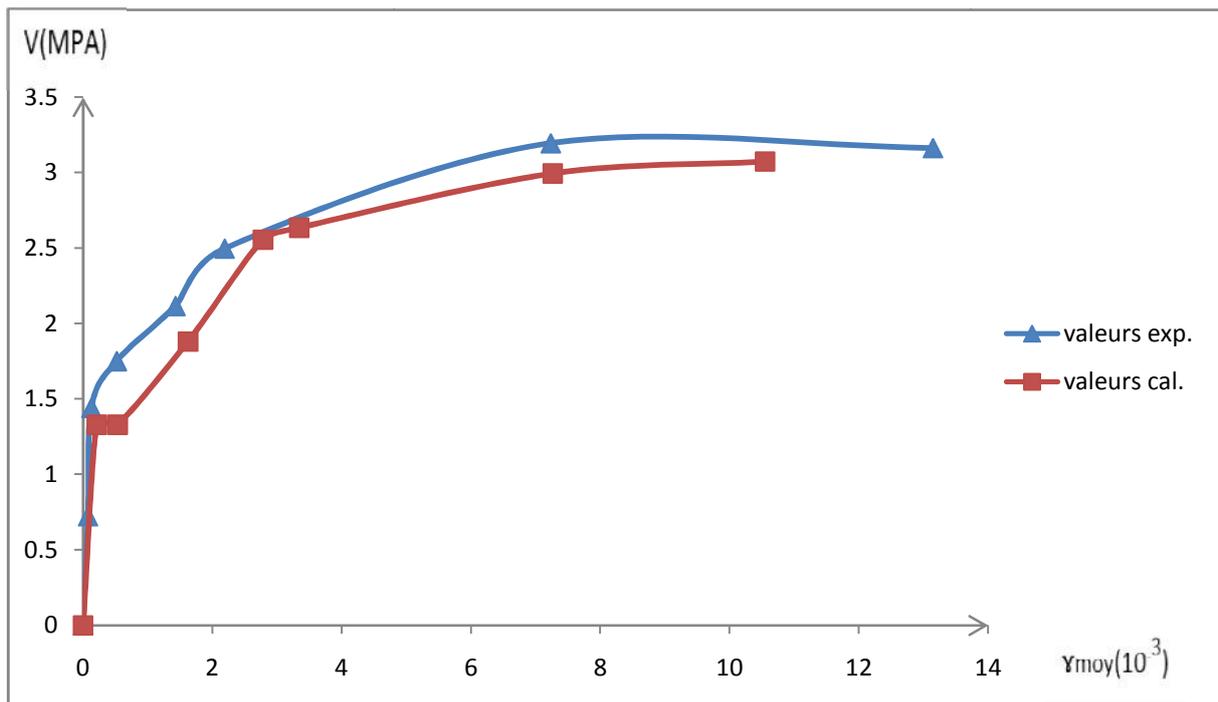


Figure 5.3: Evolution de la distorsion en fonction de contrainte tangentielle pour le voile PV12

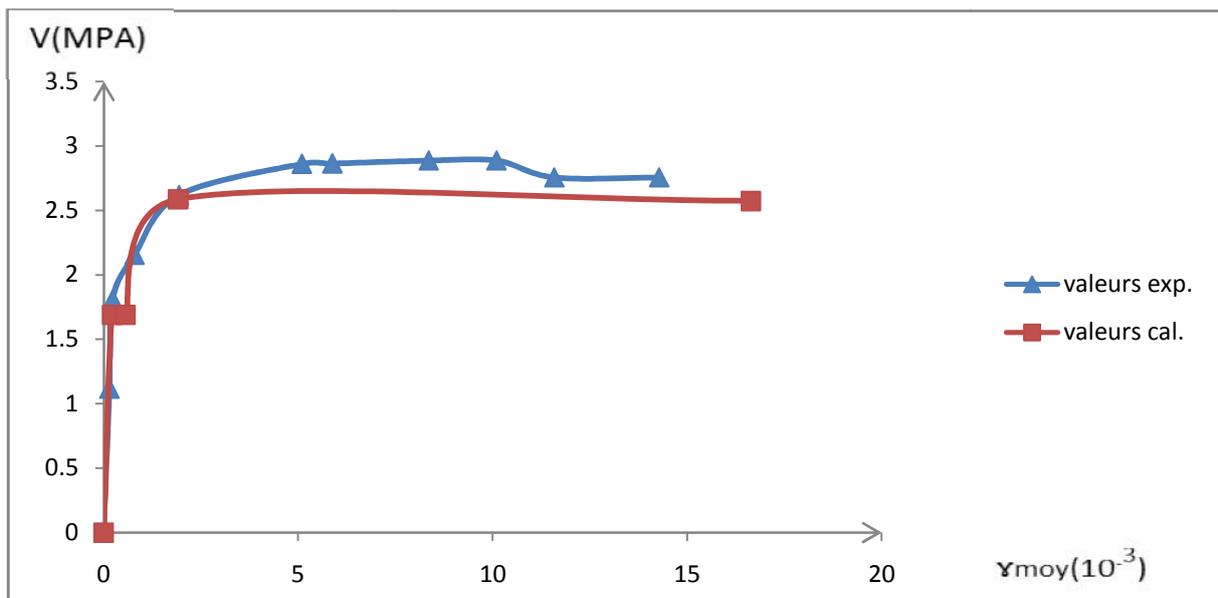


Figure 5.4 : Evolution de la distorsion en fonction de contrainte tangentielle pour le voile PV4.

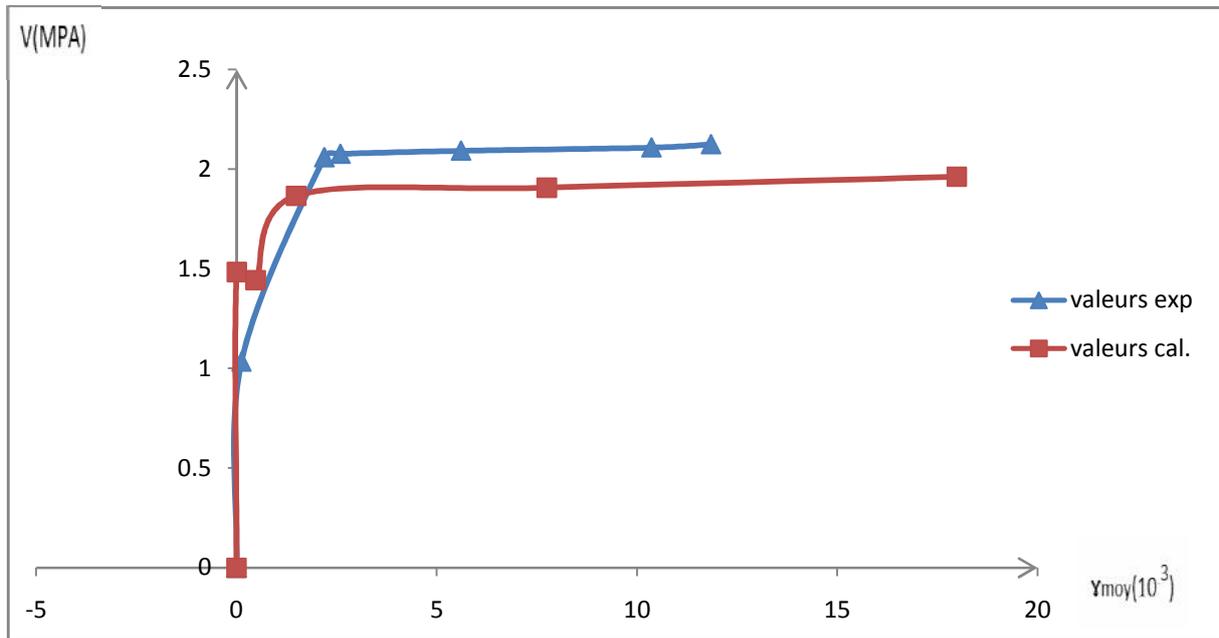


Figure 5.5 : Evolution de la distorsion en fonction de contrainte tangentielle pour le voile PV16

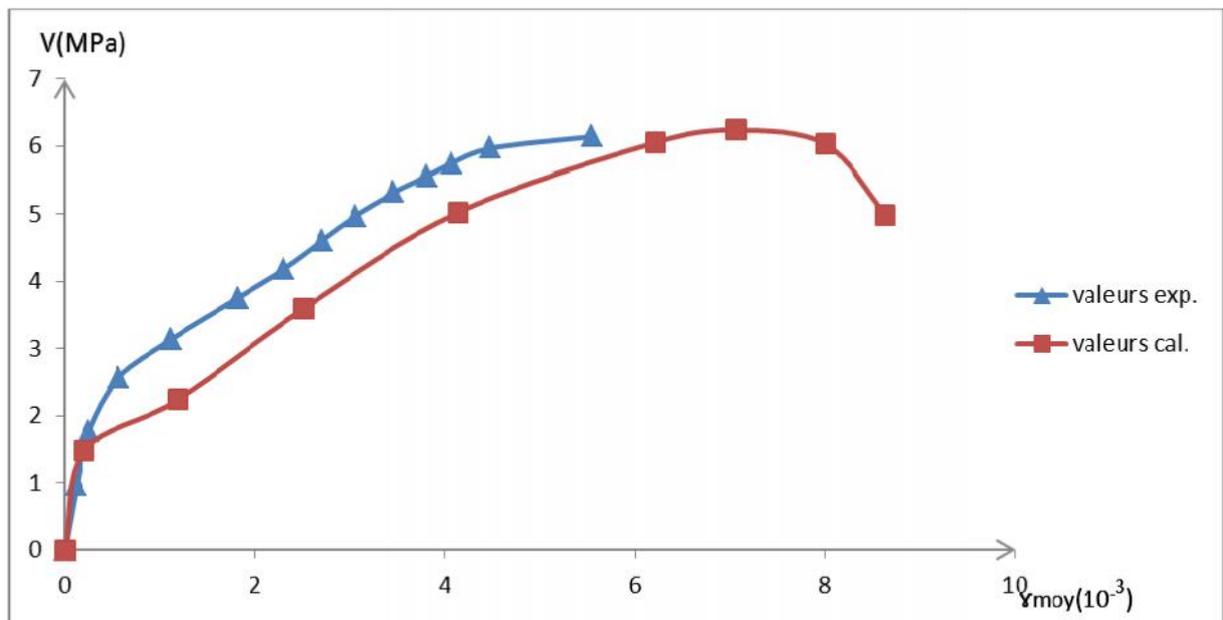


Figure 5.6: Evolution de la distorsion en fonction de contrainte tangentielle pour le voile PV22

### Comparaison des résultats du calcul aux résultats expérimentaux :

Valeur ultime de la contrainte tangentielle $V_u$ (MPa)			
Panneau	Valeur Expérimentale	Valeur calculée	v.Exp/v.Cal
PV5	4.157	4.5916	0.9053
PV9	3.2991	3.7033	0.8908
PV12	3.0713	3.1612	0.9715
PV4	2.573	2.756	0.9335
PV16	1.962	2.124	0.9237
PV22	4.9851	5.9679	0.8353
MOYENNE			0.91

Tableau 2 : Comparaison des résultats du calcul aux résultats expérimentaux de la contrainte tangentielle de rupture.

On peut noter que les résultats du calcul comparés aux résultats expérimentaux montrent que le modèle de calcul approche bien le comportement réel de l'ensemble des panneaux bien avant qu'après la fissuration du béton. L'erreur commise sur les valeurs ultimes de la charge est en moyenne de 9 %. Le calcul prévoit assez correctement l'évolution de  $\gamma_{moy}$  en fonction de  $V$ , donc la rigidité à l'effort tranchant. On ne dispose pas de résultats de mesures autres que  $\gamma_{moy}$  pour analyser la cause des écarts observés dans certains cas entre le calcul et l'essai.

## **CHAPITRE VI**

### **Conclusion générale**

## CONCLUSION GENERALE

Le modèle analytique présenté est basé sur l'analyse du voile comme étant un monobloc avec une procédure de résolution itérative, pour un état de déformation longitudinale et de contrainte normale donné. L'équilibre global des sections du voile est analysé avec l'hypothèse de la planéité des déformations longitudinales et une interdépendance des contraintes normales longitudinales et des contraintes tangentielles. Le modèle utilise des lois de comportement qui traduisent l'affaiblissement du béton des bielles comprimées dû à la traction des armatures transversales et la diminution de l'allongement moyen des armatures due à la contribution du béton tendu entre les fissures. Il permet un calcul non linéaire de la contrainte tangentielle dans le voile après fissuration du béton, et de prédire le comportement charge – distorsion jusqu'à rupture sous le chargement extérieur (effort normal et effort tranchant), pour différents voiles (selon : leurs caractéristiques géométriques, les caractéristiques mécaniques des matériaux utilisés et le pourcentage d'armatures dans les deux directions).

L'allure des courbes de comportement contrainte tangentielle - distorsion moyenne calculées pour un ensemble de voile testé à l'Université de Toronto montre que le modèle estime correctement la rigidité au cisaillement.

La valeur de déformation correspondant au pic des contraintes de compression des bielles de béton comprimées semble avoir une influence non négligeable sur la rigidité de cisaillement des sections des voiles en béton armé, particulièrement quand elles sont soumises à de fortes compressions. La valeur de cette déformation donnée par le comportement uni-axial du béton semble être la mieux indiquée pour décrire correctement le comportement en cisaillement des sections en béton armé.

La section réduite proposées par certains règlements pour le calcul du terme de rigidité de cisaillement des sections fissurées ne peut estimer la chute de cette rigidité après fissuration du béton.

Enfin, le logiciel ainsi mis en œuvre peut être aisément introduit dans un logiciel de calcul global des voiles en béton armé pour définir au mieux la rigidité de ces derniers en cisaillement et de mieux approcher leur comportement global.

# LISTE DES FIGURES

## Chapitre I :

Figure (1.1): Comportement de deux immeubles voisins face aux secousses sismiques .  
(Zacek, 2008).

Figure (1.2) : Dégradation du bâtiment au niveau de la zone critique (Zacek, 2008).

Figure (1.3). Modes de rupture de voiles élancés (Davidovici et al. 1985).

Figure (1.4). Modes de rupture de voiles courts (Davidovici et al. 1985).

Figure (1.5). Comportement ductile d'un voile élancé. Rupture due à la flexion.  
(Oesterle et al. 1980)

Figure (1.6). Comportement non ductile d'un voile. Rupture due à l'effort tranchant  
(Pauley et al. 1992)

Figure (1.7). Interactions à l'interface de fissuration : (Mestat et al. 1997)  
(a) engrenement ou interaction béton-béton des surfaces fissurées ;  
(b) effet de goujon ou interaction acier – béton.

Figure (1.8).L'analogie du treillis.

Figure (1.9).Equations modèle des bielles à 45°.

Figure (1.10).Dispositif expérimental pour les essais de cisaillement (Univ.de Toronto).

Figure (1.11).Eprouvette à la fin de l'essai (Univ.de Toronto).

Figure (1.12).Adoucissement des bielles de béton.

Figure (1.13).Contrainte maximale de compression du béton en fonction de la déformation principale de traction perpendiculaire (ASCE-ACI 1998).

Figure (1.14).Algorithme de la CFT.

Figure (1.15).Elément membrane et contraintes selon RA-STM.

Figure (1.16).superposition des contraintes du béton et des armatures.

Figure (1.17). Application de RA-STM dans le cas d'un voile faiblement élancé.

## Chapitre II :

Figure (2.1) : Dispositif formant une clé d'effort tranchant.

Figure (2.2): Disposition des clés autour de l'élément.

Figure (2.3): Cercle de Mohr des déformations.

Figure (2.4) : Cercle de Mohr des contraintes pour le voile PV1.

Figure (2.5) : Comportement de l'élément PV12.

Figure (2.6) : Comportement des voiles PV5, PV13, PV18, et PV20.

Figure (2.7) : Caractéristiques des éléments du portique et détails de ferrailage.

Figure (2.8) : Schéma de chargement du portique.

Figure (2.9) : Comportement de la structure.

Figure (2.10) : Evolution de la distorsion au niveau des éléments du portique du chargement

### Chapitre III :

Figure (3.1) : Elément fissuré en béton armé.

Figure (3.2) : Contraintes moyennes dans le béton.

Figure (3.3): Cercle de Mohr pour les contraintes moyennes

Figure (3.4) : Cercle de Mohr pour les déformations moyennes.

Figure (3.5) : Comportement du béton en compression.

Figure (3.6) : Comportement du béton en traction.

Figure (3.7) : Comportement des aciers naturels.

Figure (3.8): Comportement des aciers écrouis.

Figure (3.9) : Elément en béton armé soumis à un cisaillement et à des contraintes normales constantes.

Figure (3.10). Modèle simple du treillis.

Figure (3.11). Comportement local du béton armé dans le sens y, dans l'âme.

### Chapitre V

Figure (5.1) : Evolution de la distorsion en fonction de contrainte tangentielle pour le voile PV5.

Figure (5.2) : Evolution de la distorsion en fonction de contrainte tangentielle pour le voile PV9.

Figure (5.3): Evolution de la distorsion en fonction de contrainte tangentielle pour le voile PV12

Figure (5.4): Evolution de la distorsion en fonction de contrainte tangentielle pour le voile PV4.

. Figure (5.5) : Evolution de la distorsion en fonction de contrainte tangentielle pour le voile PV16.

Figure (5.6) : Evolution de la distorsion en fonction de contrainte tangentielle pour le voile PV22.

### LISTE DES TABLEAUX

#### Chapitre IV

Tableau 1 : Les caractéristiques mécaniques des matériaux utilisés et le type de chargement.

Tableau 2. Comparaison des résultats du calcul aux résultats expérimentale de la contrainte tangentielle de rupture.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ASCE-ACI Committee 445 on Shear and Torsion. 1998. "Recent Approaches to Shear Design of Structural Concrete". Journal of Structural Engineering , Vol. 124, No. 12, 1375 - 1417, December.
- [2] BELARBI A; THOMAS T.C.HSU; Constitutive law of softened concrete in biaxial tension-compression. ACI Structural Journal September-October 1995
- [3] Bhinde S.B. & Collins M.P. 1989. "Influence of axial tension on the shear capacity of reinforced concrete members" ACI Struct. J., 86(5), 570-581.
- [4] Collins M.P. 1978. "Toward a rational theory for RC members in shear". J. Struct. Eng., ASCE, 104(4), 649-666.
- [5] Collins M.P & Mitchell D. 1980. "Shear and torsion of prestressed and non prestressed concrete beams". ACI journal , September- October, pp. 32-100.
- [6] Combescurie D. 1996. "Modélisation du comportement sous chargement sismique des structures de bâtiments comportant des murs de remplissage en maçonnerie". Thèse Ecole Centrale Paris, ELSA JRC.
- [7] Davenne L. 1990. "Modélisation de l'influence des armatures transversales sur le comportement non linéaire d'éléments de béton armé ". Thèse Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.
- [8] Davidovici V. et al. 1985. "Génie Parasismique". Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- [9] DI PRISCO M; GOMBROVA G; Comprehensive model for study of shear in thin webbed RC and PC beams. Journal of structural engineering. Décembre 1995.
- [10] DRIZI S; Contribution à l'étude du comportement des voiles porteurs en béton vis-à-vis des sollicitations sismiques. These de doctorat, Paris VI Avril 1993.
- [11] EUROCOD 2, ENV 1992-1-1, NF P18711, Calcul des structures en béton, Partie 1-1: Règles générales et règles pour les bâtiments, Décembre 1992.
- [12] FALKNER H ; TEUTSCH M ; HUANG Z Prestressed segmental box girders with unbonded tendons under combined torsion bending and shear. Workshop Behavior of external prestressing in structures. Saint Remy-les-Chevreuse, juin 1993.

- [13] FOURE Béton à haute résistance .Rapport interne OG, C.E.B.T.P; Novembre 1985
- [14] GREGOR T; COLLINS M.P ; Test of large partially prestressed concrete girders.ACI structural journal January-February 1995.
- [15] GRELAT A; Analyse non linéaire des ossatures hyperstatiques en béton arme Thèse de doctorat Ingénieur-Université Paris VI-1978.
- [16] HEGER F J ;MCGRATH T.J ; Shear strength of pipe box section and other one-way flexural members.ACI Journal November-December 1982.
- [17] Hsu T.T.C. 1988. "Softened truss model theory for shear and torsion". ACI Structural Journal, November-December, pp 624-635.
- [18] Hsu T.T.C. 1996. "Toward a unified nomenclature for reinforce concrete theory ". J. Structural Eng., Vol. 122, no. 3, March, pp. 275-283.
- [19] Lampert P. & Thurlimann B. 1971. "Ultimate strength and design of reinforced concrete beams in torsion and bending". IABSE , No. 31-I, 107,131.
- [20] Kachi M S ; Muller P, Bouafia Y, FOURE B. L'effort tranchant dans la modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres armées. Revue européenne de génie civil N° 10/10 Décembre 2006.
- [21] Kachi M S, Bouafia Y, Muller P, Fouré B . Modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres en béton armé et précontraint en élasticité non linéaire. Colloque international Caractérisation et Modélisation des matériaux et structures « CMMS08 » Tizi-Ouzou – Algérie. Le 16, 17 et 18 Nov 2008.
- [22] Kachi MS , Bouafia y , Muller P, . Modélisation du comportement jusqu'à rupture en cisaillement d'une section de poutre en béton armé et précontraint. Conférence Internationale : Maitrise et Management des Risques Industriels ( M2RI'08) Oujda 24-25 avril 2008
- [23] Kachi M S., Bouafia Y., Muller P : Modelization of Prestressed or Reinforced Concrete beams until fracture in Non Linear Elasticity . 12th International Conference on Fracture (ICF12). Ottawa, Canada, July 12-17, 2009.

- [24] Bouafia Y., Kachi M S., Muller P: Model ling of Externally Prestressed Beams Until Fracture on Non Linear Elasticity. International Conference on Structural analysis of Advanced Materials. (IC SAAM-2009) Ecole Nationale D'Ingénieurs de Tarbes, France September 7-10, 2009
- [25] KEUN HYEOK YANG; HEON-SOO CHUNG; EUN-TAIK LEE; HEE-SHANG EUN; shear characteristics of high-strength concrete deep beams without shear reinforcement Engineering Structures. 25. (2003). PP1343-1352.
- [26] KISHI N; MIKAMI H; MA TSUOKA K.G; ANDO T; Impact behavior of shear-failure- type RC beams without shear re bar. International Journal of impact Engineering. 27 (2002). PP955-968. 92
- [27] MACLEOD LA; HOUMSI A; Shear strength of haunched beams without shear reinforcement ACI structural journal January-February 1994.
- [28] MANSOUR M .Y; DICLELI M; LEE J.Y ; Z HANG J ; Predicting the shear strength of reinforced concrete beams using artificial neural networks. Engineering Structures. 26 . (2004). PP 781-799.
- [29] Martin-Pérez B. & Pantazopoulou S. J . 1998. "Mechanics of concrete participation in cyclic shear resistance of RC". Journal of Structural Engineering, Vol. 124, No 6, June, pp. 633-641
- [30] MAU S.T; THOMAS T.C.HSU; Shear design and analysis of low-rise structural walls. ACI Structural Journal March-April 1986.
- [31] Mestat Ph., Prat M. et al. 1997. "Calcul des ouvrages généraux de construction". Hermès publications, Paris.
- [32] Mo Y.L. & Rothert. H. 1997. "Effect of softening models on behavior of reinforced concrete framed shearwalls". ACI Structural journal, V.94, No.6, November- December.
- [33] NAIT- RABAH O; Simulation numérique du comportement des ossatures spatiales Thèse de doctorat ECP-1990.
- [34] Oesterle R.G., Fiorato A.E., & Corley W.G . 1980. "Reinforcement details for earthquake resistant structural walls", Concrete International
- [35] Panagiotis KOTRONIS ; CISAILLEMENT DYNAMIQUE DE MURS EN BETON ARME. MODELES SIMPLIFIES 2D ET 3D- thèse de doctorat-Ecole Normale Supérieure de Cachan ; décembre 2000

- [36] Pang X.B.D. & Hsu TTC . 1996. "Fixed - angle softened truss model for reinforced concrete". Struct. J. Am. Concrete Inst 1996, 93(2) , pp. 197 – 207
- [37] Pauley T. & Priestley M.J.N. 1992. "Seismic design of reinforced concrete and masonry buildings". J. Wiley & Son, New York.
- [38] Penelis G.G. & Kappos A.J . 1997. "Earthquake-resistant concrete structures", London :Spon(Chapman & Hall) .
- [39] RAMIREZ G ;MACGREGOR R ; KREGER M.E ;ROBBERTS-WOLLMANN R ;BREEN J ;Shear strength of segmental structures. Workshop Behavior of external prestressing in structures. Saint Remy=les-Cheuvreuse, juin 1993.
- [40] SALANDRA M.A;SHUAIB H.A; Shear capacity of reinforced lightweight high strength concrete beams.ACI structural Journal November-December 1989.
- [41] SARGIN M; Stress-Strain Relationship for Concrete and the Analysis of Structural Concrete Sections. PHD Thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada, Mars 1968, 334p.
- [42] STANCIULESCU-PANEA I; Modélisation de l'influence de l'effort tranchant dans le comportement non linéaire des poutres en béton arme, mémoire de DEA de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Juillet 1996.
- [43] STROBAND J; Shear capacity of high strength concrete beams with shear reinforcement. Progress in concrete research vol num 5 1997.
- [44] Talbot A.N. 1909. "Tests of reinforced concrete beam s: resistance to web stresses of 1907 and 1908". Bull. 29, University of Illinois, Engineering Experiment Station, Urbana, Ill.
- [45] THOMAS T.C.HSU; softened truss model theory for shear and torsion .Rechearch rapport UHCE-86-9 University of Houston August 1986.
- [46] THOMAS T.C.HSU;Non-linear analysis of concrete membranes elements.ACI Structural Journal September-October 1991.
- [47] THOMAS T.C.HSU;MO Y.L; Softening concrete in low-rise shear walls.ACI Structural Journal November-December 1985.
- [48] VECCHIO F.J;COLLINS MP; The response of reinforced concrete to in-plane shear and normal stresses, University of Toronto, Department of Civil Engineering, Publication No.82-03, March 1982.
- [49] VECCHIO F.J;COLLINS MP; The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. ACI Structural Journal March-April 1986.

[50] VECCHIO F.J; COLLINS MP; Compression response of cracked reinforced concrete  
Journal of structural engineering vol 119 Num 12.1993

[51] VECCHIO F.J;EMARA B.M; Shear deformation in reinforced concrete frames ACI  
Structural Journal January-February 1992.

[52] Wagner H. 1929. "Ebene Blechwandträger mit sehr dünnen Stegblech". (Metal beams  
with very thin webs). Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt , 20(8-12), Berlin.

[53] Withey M.O. 1908. "Tests of plain and reinforced concrete series of 1097". Bull. Univ. of  
Wis., Engineering Series , 4(2),1-66.