

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU
FACULTE DU GENIE DE LA CONSTRUCTION
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

THESE

En vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Génie Mécanique

Présenté par :

M. ALMANSBA Madjid

THEME

*Modélisation des structures élastoplastiques
généralisées (Approches locale et non locale
appliquées aux matériaux élastoplastiques
endommageables)*

Devant le jury composé de :

BOUAFIA Youcef	Professeur, UMMTO	Président
HANNACHI Naceur Eddine	Professeur, UMMTO	Rapporteur
ABERKANE Meziane	Professeur, UMMTO	Examineur
BALI A/Rahim	Professeur, ENP	Examineur
ALLICHE Abdenour	Professeur, Université Paris VI, France	Examineur
ABADLIA Mohamed Tahar	Professeur, Université de Boumerdes	Examineur
SAANOUNI Khemais	Professeur, U.T.Troyes, France	Invité

Soutenu le : 28/04/2011

Remerciements

Ce travail a été réalisé au laboratoire LAMOMS de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou, en collaboration avec le laboratoire LASMIS de l'Université de Technologie de Troyes.

Je tiens à présenter mes sincères remerciements à monsieur N. E. HANNACHI pour m'avoir encadré et accueilli dans son laboratoire. Je lui suis particulièrement très reconnaissant de m'avoir assisté et orienté le long de ce travail. Ces conseils m'ont été d'une grande utilité.

Ma gratitude et mes plus vifs remerciements vont à monsieur K. SAANOUNI, responsable du laboratoire LASMIS, qui a bien voulu m'accueillir dans son laboratoire. De m'avoir fait partager son goût à la recherche, son encadrement dynamique, sa disponibilité et sa gentillesse, tout au long de mon séjour, j'ai eu à admirer et à apprendre de sa simplicité.

Je remercie également toute l'équipe du laboratoire LASMIS de l'université de Troyes, pour leurs précieuses aides et leurs disponibilités. Un grand merci à mes collègues de bureau de l'UTT qui ont fait les bons moments de mon séjour à Troyes.

Une pensée sincère à monsieur OULD OUALI Mohand, qui a beaucoup contribué pour la finalisation de cette thèse.

Je présente mes sincères remerciements à messieurs les membres de Jury qui ont accepté de disposer de leurs temps pour pouvoir juger ce travail.

Je remercie mon autre moi-même, Naima, pour son soutien sa confiance sans faille et surtout pour sa patience infinie durant mon séjour à Troyes. Cela n'a pas de prix

Enfin je remercie mes parents, d'avoir pu en arriver là, à qui je dois tant.

Résumé

Le développement des méthodes de calcul des structures et la modélisation du comportement des structures déformables est un domaine des sciences de l'ingénieur qui connaît de nombreuses applications. La fiabilité et la précision de ces méthodes sont conditionnées par la validité des lois de comportement introduites pour décrire le matériau étudié. A cet effet, Jusqu'à présent, les modèles basés sur la mécanique locale fournissent des résultats qualitatifs intéressants sur la forme et la position des zones de localisation. Cependant, les réponses éléments finis des modèles à comportement adoucissant sont fortement dépendantes de la discrétisation spatio-temporelle. De nombreux travaux présentent des formulations à variables régularisées sous forme intégrale ou en gradient de variables internes. Ce travail, à travers une étude non locale, propose d'aider au choix de modèles aptes à assurer l'indépendance vis à vis de la discrétisation. Après une analyse des différentes formes de dépendance au maillage, quelques solutions usuelles existantes sont présentées. En se limitant volontairement aux cas des modèles élastoplastiques endommageables à écrouissage isotrope non linéaire, deux propositions sont spécifiquement étudiées. Les aspects numériques et l'implémentation dans un code de calcul sont particulièrement détaillés. Pour chaque formulation non locale étudiée, la capacité à contrôler la taille de la zone de localisation ainsi que la dépendance de la dissipation globale vis à vis du maillage sont étudiées. Les limites théoriques et pratiques de chacune des formulations sont mises en lumière. Cette étude apporte des éléments scientifiques et pratiques nécessaires au choix d'une formulation élastoplastique endommageable apte à assurer l'indépendance des réponses éléments finis à la discrétisation. Pour terminer, les principales conclusions et les perspectives les plus pertinentes de ce travail sont données.

Abstract

The development of the methods of calculating of the structures and modeling of the behavior of deformable structures are a field of engineering sciences who knows many applications. The reliability and the precision of these methods are conditioned by the validity of the laws of behavior introduced to describe material subject of study. For this purpose, until now, the models based on local mechanics provide interesting qualitative results on the form and the position of the zones of localization. However, the answers finite elements of the models to softening behavior are strongly dependent on the space-time discretization. Many works presents formulations to variables regularized in integral form or in gradient of internal variables. This work, through a non local study, proposes to help with the choices of models ready to ensure independence with respect to the discretization. After an analysis of the various forms of dependence to the grid some existing usual solutions are presented. By limiting voluntarily to the cases of the damage-elastoplastic models, two proposals are specifically studied. The formulations are presented then studied for simple cases of requests of plane strength. The numerical aspects and the implementation in a computer code are particularly detailed. For each studied non local formulation, the capacity to control the size of the zone of localization as well as the dependence of total dissipation with respect to the grid is studied. For each studied non local formulation, the capacity to control the size of the zone of localization as well as the dependence of total dissipation with respect to the grid is studied. The theoretical and practical limits of each formulation are clarified. This study brings scientific and practical elements necessary to the choice of an damage elastoplastic formulation apt to ensure the independence of the results finite elements to the discretization. To finish, the principal conclusions and the most relevant prospects for this work are given.

Table Des Matières

INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : ASPECT LOCAL DU COUPLAGE ELASTOPLASTICITE ENDOMMAGEMENT.....	5
INTRODUCTION	6
1. PRINCIPAUX MODES D'ENDOMMAGEMENT.....	8
1.1. <i>Endommagement instantané</i>	8
1.2 <i>Endommagement différé</i>	9
2. REPRESENTATION MATHEMATIQUE DE L'ENDOMMAGEMENT.....	9
2.1 <i>Variable d'endommagement</i>	9
3. NOTIONS DE VARIABLES EFFECTIVES	11
3.1 <i>Tenseur de contrainte effectif</i>	11
3.2. <i>Hypothèse d'équivalence en énergie élastique</i>	12
3.3. <i>Hypothèse d'équivalence en énergie totale</i>	13
4. FORMULATION THERMODYNAMIQUE	15
4.1. <i>Inégalité de Clausius duhem</i>	15
4.2. <i>Potentiels d'état, Relations d'état</i>	16
4.3. <i>Potentiel des dissipations, Relations complémentaires</i>	20
5. FORMULATION UNIFIEE ; UN SEUL MULTIPLICATEUR.....	24
5.1. <i>Cas particulier de l isotrope de l'écoulement plastique couplée à l'endommagement isotrope</i>	29
6. ASPECT NUMERIQUE	33
6.1 <i>Discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis</i>	34
6.2. <i>Intégration locale des équations de comportement</i>	39
6.3. <i>Calcul de l'Opérateur tangent consistant</i>	51
6.4. <i>Traitement numérique de la fissuration</i>	54
6.5. <i>Elaboration du programme de calcul</i>	54
7. VALIDATION ET APPLICATION A DES STRUCTURES	54
7.1. <i>Validation de l'algorithme d'intégration sur un EVR</i>	55
7.2. <i>Applications</i>	60
8. CONCLUSION.....	67

CHAPITRE II : LIMITE DE L'APPROCHE LOCALE ET APPROCHE THEORIQUE DES FORMULATIONS NON LOCALES..... 69

INTRODUCTION 70

1. LIMITES DES MODELES LOCAUX..... 70

 1.1 Aspects physique 71

 1.2. Aspects mathématiques..... 80

 1.3. Aspects numériques..... 82

2. EXTENSION DES MODELES LOCAUX 88

 2.1. Base des modèles non locaux 88

 2.2 Considérations thermodynamiques..... 98

3. Détermination des variables régularisées..... 105

4. CONCLUSION..... 108

CHAPITRE III :APPROCHE NON LOCALE..... 109

INTRODUCTION 110

1. TRAITEMENT VARIATIONNEL DE L'EQUATION DE NON LOCALITE 110

 1.1. Ecriture variationnelle 111

 1.2. Implémentation numérique..... 114

2. FORMULATION NON LOCALE EN FORCE MOTRICE D'ENDOMMAGEMENT..... 116

 2.1. Ecriture de la relation de non localité 116

 2.2. Application à une éprouvette en traction 119

 2.3. Conclusion 124

3.FORMULATION NON LOCALE DE LA LOI D'ENDOMMAGEMENT 125

 3.1. Application à un modèle élastoplastique à écrouissage isotrope non linéaire régulariser par un gradient endommagement 128

 3.2. Algorithme d'intégration par retour radial..... 130

 3.3. Implémentation 136

 3.4. Application..... 137

 3.4.1. Etude d'une éprouvette en traction..... 137

 3.4.2. Application a une éprouvette DENT..... 157

 3.4.3. Application a une éprouvette à double entaille en C 160

 3.5 Conclusion 167

CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES 168

Liste des notations

Notations :

- x : Champ scalaire
 \underline{x} : Champ tensoriel d'ordre deux
 $\underline{\underline{x}}$: Champ tensoriel d'ordre quatre
 \bar{x} : Variable non locale
 \tilde{x} : Variable effective associée à x
 $\underline{\tilde{x}}$: Variable effective associée à \underline{x}
 $\underline{\underline{\tilde{x}}}$: Variable effective associée à $\underline{\underline{x}}$
 Δx : Incrément de la variable x
 $\{ \}$: Vecteur
 $[]$: Matrice
 $(:)$: produit contracté deux fois

Liste des variables utilisées :

- P_e : Puissance des efforts extérieurs
 P_i : Puissance des efforts intérieurs
 P_a : Puissance des efforts d'accélération
 D : la variable d'endommagement,
 I : Tenseur identité,
 F : Fonction de la surface de charge,
 F_p : Potentiel plastique
 S, s, Y et β : Représentent les paramètres de l'endommagement isotrope
 ε : Déformation totale,
 ε_e : Déformation élastique,
 ε_p : Déformation plastique,
 \vec{n} : La normale à la surface,
 σ : Contrainte,
 $\dot{\lambda}$: multiplicateur plastique,
 $\tilde{\sigma}$: la contrainte effective,

σ_{eq} : Contrainte équivalente

σ_e : La limite d'écoulement

$\underline{\tilde{\sigma}}$: Le tenseur des contraintes effectives

σ_H : Partie hydrostatique de $\underline{\sigma}$

\underline{S} : Partie déviatrice de $\underline{\sigma}$

$\underline{\alpha}$: Ecrouissage cinématique

r : Ecrouissage isotrope

\underline{X} : Le tenseur d'écrouissage cinématique

b : Coefficient d'écrouissage isotrope non linéaire

a : Coefficient d'écrouissage cinématique non linéaire

Q : Module d'écrouissage isotrope

c : Module d'écrouissage cinématique

\tilde{Q} : Modules d'écrouissage isotrope endommagé

$D_{\vec{n}}$ La variable d'endommagement de normale \vec{n}

S_D La surface résultant des défauts

S : La surface total à la normale \vec{n}

$\underline{\underline{\Lambda}}$ et $\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}$: Sont respectivement les tenseurs de rigidité d'ordre quatre, en milieux sain et endommagé

$\underline{\underline{M}}$: L'opérateur d'effet du dommage d'ordre quatre

W_T : L'énergie totale

W_e : L'énergie élastique

W^b : L'énergie bloquée

$\underline{\underline{C}}$: Le module d'écrouissage cinématique

$\underline{\underline{N}}$: Le tenseur d'effet de dommage pour l'écrouissage cinématique

$\|D\|$: La norme appropriée de l'endommagement.

Y : Variable des forces thermodynamique

Ψ : L'énergie libre de Helmholtz

Ψ_e : L'énergie libre élastique

Ψ_p : L'énergie libre plastique

ϕ : Potentiel de dissipation

ϕ_p : Potentiel de dissipation plastique

ϕ_d : Potentiel de dissipation d'endommagement

λ et μ : Coefficients de lame

E : Le module de Young

γ : Coefficient de poisson

ρ : La densité volumique du matériau

U : Le vecteur champ de déplacement

δu : Champ de déplacement virtuel

$\{f_N^{e|int}\}$: Le vecteur des efforts intérieurs de l'élément "e"

$\{f_N^{e|ext}\}$: Le vecteur des efforts extérieurs de l'élément

$[N]$: La matrice des fonctions d'interpolations du nœud «N» de l'élément «e»

$[K_e]$: Matrice tangente

$[B]$: La matrice déformation-déplacement

$\{u_i^e\}$: Le vecteur déplacement du nœud.

$\{\delta u_i^e\}$: Le vecteur déplacement virtuel

V : le volume du domaine

\vec{f} : Force volumique

\vec{t} : Forces surfacique

R (U) : Le résidu global

\bar{Y} : Variable force motrice d'endommagement non locale.

\bar{D} : Variable d'endommagement non locale.

Abréviations

MSG milieux standards Généralisées

EVR : Elément de volume représentatif

MSG : Moving least square method

EDO : équations différentielles ordinaires

EDP : équations différentielles aux dérivées partielles

d.d.l. : degré de liberté

C.A.L. : Conditions aux limites

P.V.I.L. Problème aux valeurs initiales et aux limites

C.A. Cinématiquement admissible

Introduction Générale

Introduction Générale

La recherche d'un gain de productivité accru alliée à l'obligation de fournir des pièces de bonne qualité, impose aux industries mécaniques en particulier d'optimiser les processus intervenant au cours du développement de ces produits. Un gros effort a été entrepris au sein des bureaux d'études afin de s'assurer que les produits conçus, présentent toutes les qualités requises notamment en termes de durée de vie. L'adoption grandissante de l'ingénierie simultanée, comme principal outil de conception et de développement des produits a conduit les chercheurs et industriels à approfondir les méthodes et techniques de calcul existantes. En effet le succès de l'ingénierie simulateur à été possible grâce au développement des outils nécessaires à la virtualisation d'un produit et/ou procédé. Ces outils peuvent être classés dans trois catégories :

- Les outils théoriques : se sont les modèles mathématiques décrivant, le plus fidèlement possible, les différents phénomènes physiques mis en jeu dans le procédé;
- Les outils numériques : il s'agit d'algorithmes adaptés à l'implémentation des équations mathématiques décrivant la réponse du matériau. Ils permettent ainsi de mettre au point la stratégie de résolution du système algébrique résultant de la discrétisation spatio-temporelles du problème ;
- Les outils géométriques : Ce sont des modeleurs géométriques utilisés pour la définition de la configuration initiale du problème (et déformée dans le post traitement). Ils permettent aussi moyennant des algorithmes appropriés d'automatiser la génération de maillage, la définition de condition aux limites et/ou initiales, l'application des différents chargements. Parmi ces techniques on peut citer le maillage adaptatif qui en utilisant des critères et estimateur d'erreur permet d'améliorer la solution du problème étudié, au détriment cependant du temps de calcul.

En pratique c'est l'intégration de ces outils dans une même plateforme logicielle qui permet de répondre à cet objectif. Dans ce travail, nous nous proposons de développer un modèle de comportement "avancé" permettant de s'affranchir de la dépendance de la solution éléments finis du maillage. Pour ce faire on se place dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles et de l'approche non locale pour décrire le comportement des matériaux. La nécessité de prédire la position et l'intensité de l'endommagement susceptible de générer une fissure nous conduit à l'utilisation de modèles de

comportement "avancés". Les modèles basés sur la mécanique locale fournissent dans la majorité des cas des résultats satisfaisant sur la forme et la position des zones de localisation. Cependant, la modélisation éléments finis des comportements adoucissants présente souvent des insuffisances liée à la discrétisation spatio-temporelle. En effet, la mécanique des milieux matériellement simples (ou mécanique locale) conduit inévitablement, pour les matériaux adoucissants, à l'existence d'un point de bifurcation au delà duquel l'existence et l'unicité de la solution ne sont plus assurées. La solution du problème à valeurs initiales et aux limites devient alors fortement dépendante de la discrétisation spatiale et temporelle des équations du problème continu. D'où la nécessité de recourir à des formulations non locales. A travers une étude de plusieurs formulations non locales à gradient d'endommagement, nous nous proposons de restaurer l'ellipticité des équations d'équilibre en introduisant une dépendance au voisinage du comportement local L'énergie dissipée par la rupture devient alors dépendante d'un nouveau paramètre du matériau appelé longueur interne.

Le premier chapitre est consacré à la présentation d'un modèle local élastoplastique endommageable. En premier lieu, nous décrivons le modèle dans le cadre de la thermodynamique des milieux continu ainsi que les aspects numériques à prendre en compte au cours de la résolution du problème. Par la suite, nous donnons les précautions et procédures numériques à entreprendre pour l'implémentation du modèle dans le programme de calcul (le modèle sera implémenté dans le programme de calcul de **Owen [Owe88]** que nous avons étendu à notre modèle). La loi constitutive sera ensuite validée sur des exemples académiques et appliquée pour montrer certains phénomènes qui sont à l'origine de la localisation de l'endommagement dans la structure en raison de la discrétisation spatiale choisie.

Dans le deuxième chapitre, nous énonçons les différentes insuffisances des approches locales. Nous faisons une synthèse des différentes formulations des approches non locales disponibles dans la littérature. Un intérêt particulier sera accordé aux modèles non locaux réalisés en utilisant des formulations en gradient. Ces dernières présentent des simplicités de mise en œuvre sur le plan numérique.

Dans le troisième chapitre, nous rentrons dans le fond de notre travail qui est la modélisation en gradient d'endommagement du comportement des métaux. Deux approches sont retenues, la première est écrite en

utilisant la force motrice d'endommagement, la seconde en utilisant la variable d'endommagement. Les méthodes numériques utilisées pour l'implémentation du modèle sont présentées, ainsi que le schéma d'intégration des équations de comportement d'un matériau élastoplastique endommageable à écrouissages isotropes non linéaire. Les différentes modélisations sont ensuite utilisées pour simuler des tests de sollicitations simples, afin de déterminer l'aptitude de chacune d'elle à assurer des réponses éléments finis exploitables dans la zone post-critique. La capacité à contrôler la largeur de la zone de localisation dans chaque cas est aussi traitée. Au même temps, l'indépendance de la dissipation mécanique à rupture vis à vis des choix de la discrétisation sera vérifiée.

A la fin de cette thèse, nous donnons une conclusion sur les travaux et résultats obtenus durant ce travail. Nous proposons aussi quelques perspectives qui nous semblent intéressantes à entreprendre afin de surmonter les obstacles qui se sont dressés devant nous.

Chapitre I :

Aspect Local du Couplage Elastoplastique
Endommagement

Introduction

La modélisation des différents phénomènes physiques caractéristiques du comportement thermo-mécanique d'un matériau solide, joue un rôle essentiel dans la pertinence des résultats de la simulation numérique. En effet, la simulation de la mécanique, des matériaux en cours de déformation est représentée par le modèle utilisé. De ce fait, le choix d'une modélisation influence d'une façon décisive la qualité des résultats obtenus par la simulation numérique. Il est donc important que ces modèles décrivent le plus finement possible l'ensemble des phénomènes physiques mis en jeu dans les conditions d'environnement et de sollicitation données.

Ces dernières années, les besoins grandissants en simulation numérique ont entraîné des développements considérables dans la modélisation de phénomènes thermo-mécaniques et physico-chimiques caractérisant le comportement des matériaux et des structures. Ces modèles sont développés dans le cadre de la mécanique des Milieux continus [**Ger73, Tru65**]. En particulier, la thermodynamique des processus Irréversibles [**Ger73, Lem85**] a offert un cadre conceptuel intéressant pour construire des modèles tridimensionnels et thermodynamiquement admissible, c.à.d vérifiant l'inégalité fondamentale obtenue par la combinaison entre le premier et le second principe de la thermodynamique. Cette approche phénoménologique associée à chaque élément de volume représentatif (EVR) de la matière, un certain nombre de couples de variables d'état représentant les différents phénomènes physiques [**Cha78, Mar79, Lem85**]. On construit alors dans l'espace des contraintes ou des déformations un potentiel d'état fonction convexe des variables d'état. En utilisant de l'inégalité de Clausius-Duhem, on obtient les relations d'état ainsi qu'une inégalité résiduelle définissant la dissipation dans les différents phénomènes irréversibles. L'évolution des variables internes est déduite de l'hypothèse de la dissipativité normale ou par l'hypothèse des milieux standards Généralisées (MSG) [**Ngu73, Hal75, Ger83**].

C'est ce formalisme qui a permis la mise au point de modèles plus ou moins performants, nécessaires au calcul de structures et à la simulation des procédés de fabrication et de mise en forme. Ces modèles reposent en général sur le principe simple suivant : un phénomène un couple de variables d'état – une équation d'évolution. Cela conduit à des modèles contenant

autant d'équations différentielles ordinaires (EDO) qu'il y a de phénomènes dissipatifs. La richesse de ces modèles repose sur celle des différents potentiels d'état et des potentiels de dissipations utilisées. Le choix de ces derniers est quelque peu heuristique et repose sur la connaissance qu'on a des différents phénomènes de leurs évolutions, de leurs interactions et des différents couplages existants. Cela conduit à des modèles prédictifs valable sur un domaine défini par des bases de données expérimentales ayant servi a leurs identifications [Saa94].

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la Mécanique de l'endommagement continue. On s'intéressera en particulier, à la thermodynamique des milieux continus avec variables internes dans le cadre de la théorie indépendante du temps. Nous décrivons une formulation du comportement elastoplastique endommageable en hypothèse des petites perturbations. Nous spécifions d'abord la nature mathématique des variables d'endommagement scalaires ou tensorielles, on introduit ensuite l'endommagement suivant le concept de la contrainte effective, en utilisant l'hypothèse d'équivalence en énergie totale. Pour tenir compte des couplages intervenant entre comportement mécanique et endommagement, les lois d'état, les lois d'évolution et les dissipations associées sont décrites suivant deux approches :

* La première consiste à ne considérer qu'un seul mécanisme gouvernée par la plasticité, avec un seul potentiel de dissipation et une règle de normalité ne faisant intervenir qu'un seul multiplicateur plastique. La distinction entre mécanismes de plasticité et d'endommagement n'apparaît que par la décomposition du potentiel de dissipation, le dommage ne peut progresser dans ce cas que s'il y a écoulement plastique.

* La seconde approche, consiste à considérer séparément les mécanismes de plasticité et d'endommagement dans ce cas deux potentiels de dissipation indépendants et deux multiplicateurs indépendants sont à considérés. Dans cette approche, de nouvelles variables internes relatives à la taille et à la translation de la surface de non endommagement sont introduites.

Nous traiterons ensuite le cas particulier de l'isotropie totale dans le cas d'une formulation unifiée avec un seul potentiel et un seul critère comme proposé par **Saanouni et Al.** [Saa94]

mais aussi dans le cas du modèle elastoplastique endommageable simplifiée basée sur la loi Praudtl Reuss.

1. Principaux modes d'endommagement

Les mécanismes physique, qui gouvernent l'endommagement des matériaux sont dus a des origines différentes, en effet il a été observé expérimentalement que l'endommagement, dépend de la composition microstucturale du matériau, des sollicitations et des conditions environnementales. Il n'est pas question pour nous ici, de détailler différents mécanismes d'endommagement, mais juste de présenter les principaux types en les classant en deux familles.

1.1. Endommagement instantané

Il s'agit de micro défauts (microcavites ou micro-fissures) provoqués par une sollicitation monotone dans un matériau à comportement indépendant du temps. Deux mécanismes sont souvent observés.

1.1.1. Endommagement ductile

Les microcavites de rupture ductile (endommagement plastique ductile) qui se créent par décohésion aux interfaces entre inclusion et matrice, croissent en nombre et en volume, puis coalescent pour former un défaut macroscopique provoquant la rupture de l'échantillon de traction ou déclencher le processus de déchirure ductile de la structure. Cet endommagement plastique ductile accompagne les grandes déformations. Dans ce cas, l'évolution du dommage est continue. Son effet sur le comportement se fait sentir relativement tôt. Il se traduit en général, par des variations non négligeables, des propriétés mécaniques du matériau en fonction de la croissance de l'endommagement.

1.1.2. Endommagement fragile

Il s'agit de microdéfauts qui s'amorcent et se propagent très rapidement sans déformations plastiques appréciables. C'est le mécanisme de clivage qui se développe dans des plans de

glissements favorablement orientés par rapport aux directions principales de la sollicitation qui est la cause principale.

1.2 Endommagement différé

Il s'agit de microdéfauts provoqués par des sollicitations répétitives (chargement cycliques) dans un matériau à comportement dépendant ou indépendant du temps. Dans ce cas la température, l'environnement et la microstructure jouent un rôle très pondérant.

2. Représentation mathématique de l'endommagement

2.1 Variable d'endommagement

Comme nous l'avons cité plus haut, l'endommagement a pour origine les microdéfauts qui naissent dans le matériau. Il est rare que ces microdéfauts soient homogènes et distribués d'une manière uniforme. En fait, ils ont souvent une orientation préférentielle gouvernée soit par le chargement, soit par la composition microstructurale du matériau (texture, phases, etc...). On voit bien donc, que l'endommagement a souvent un caractère directionnel plus ou moins prononcé. De ce fait, sa représentation mathématique doit se faire avec des variables tensorielles d'ordre '1' ou plus selon les situations. Cependant une représentation par une ou plusieurs variables scalaires est la plus utilisée à cause de sa simplicité sur le plan théorique. En se limitant à la plasticité, nous allons tenter de donner une définition formelle des différents types de variables d'endommagement continu.

Considérons un EVR soumis à une sollicitation dans le domaine plastique. Supposons qu'à cet instant "t" une certaine distribution de microdéfauts soit créée dans une section de l'EVR de normale \vec{n} . Une première manière de définir le caractère directionnel du dommage dans un EVR de volume V est d'utiliser une fonction scalaire à support vectoriel. Cette fonction associe à toute direction \vec{n} de l'espace une densité de microdéfauts $\rho(\vec{n})$. Cette fonction peut être développée en Série de Fourier de fonctions sphériques contenant le produit contracté du vecteur unité avec le symbole de Kronecker. Cette représentation fait apparaître en plus de la variable scalaire (isotrope) des tenseurs symétriques d'ordre 2, quatre ou plus.

2.2.1. Variable scalaire

Cette variable est utilisé dans le cas ou la distribution des défauts est isotrope c'est à dire, la densité des défauts ne dépend pas de l'orientation du vecteur normale \vec{n} :

$$\rho(\vec{n}) = \rho \quad \forall \vec{n} \quad \text{I.1}$$

Là on considère que l'endommagement est caractérisé par une simple variable scalaire " ρ_0 " laquelle ne change pas les symétries initiales de la matière.

2.2.2 Tenseur d'ordre deux

Ce type de variable est souvent utilisé pour représenter l'anisotropie induite par l'endommagement dans un matériau initialement isotrope, pourvu que la forme du trajet de chargement le permette. C'est la plus simple manière de décrire l'anisotropie induite par un tenseur d'endommagement. La densité des défauts à l'intérieur des plans de vecteur normal \vec{n} est alors définie par :

$$\rho(\vec{n}) = \rho_{ij} n_i n_j \quad \text{I.2}$$

Où : ρ_{ij} sont les composantes du tenseur densité de défauts du second ordre. Le tenseur d'endommagement symétrique d'ordre 2 peut alors s'écrire sous la forme :

$$D = \frac{1}{V} \int_V \rho(\vec{n}) \vec{n} \otimes \vec{n} dV \quad \text{I.3}$$

2.2.3 Tenseur d'ordre quatre

C'est l'ordre le plus faible que l'on puisse utiliser pour rendre compte de l'anisotropie induite par l'endommagement, indépendamment de la nature isotrope ou anisotrope du matériau dans son état initial.

Un tenseur d'endommagement d'ordre quatre peut s'écrire sous la forme :

$$D = \frac{1}{V} \int_V \rho(\vec{n}) \vec{n} \otimes \vec{n} \otimes \vec{n} \otimes \vec{n} dV \quad \text{I.4}$$

3. Notions de variables effectives

Comme nous l'avons signalé ci dessus, l'endommagement n'est pas directement mesurable. Sa mesure est toujours indirecte en quantifiant son influence sur le comportement thermo-mécanique de l'EVR. Dans le cadre de la mécanique de l'endommagement continue deux méthodes distinctes permettent l'incorporation des effets de la dégradation du matériau : la notion de contrainte nette [Mur81, Mur83] et la notion de contrainte effective introduite par Lemaître et Chaboche [Cha77, Lem85]. Dans ce travail on présentera juste la notion de la contrainte effective.

3.1 Tenseur de contrainte effectif

Pour tenter de rendre compte des effets de concentration de contrainte au voisinage d'un microdéfaut, une hypothèse d'équivalence en déformation a été introduite par Chaboche [Cha77]. Elle conduit a la définition suivante des tenseurs des contraintes effectives $\underline{\underline{\sigma}}$.

Le tenseur de contrainte effective $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$ est celui qu'il faudra appliquer à l'E.V.R vierge afin d'obtenir la même déformation que dans l'EVR endommagé soumis a la contrainte actuelle $\underline{\underline{\sigma}}$.

En élasticité, la fonctionnelle donnant la déformation en fonction des contraintes est définie par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathfrak{I}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \Rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad \text{I.5}$$

Tandis que celle du milieu endommagé est donnée par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\tilde{\Lambda}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad \text{I.6}$$

Où : $\underline{\underline{\Lambda}}$ et $\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}} = \underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{D}})$ sont respectivement les tenseurs de rigidité d'ordre "4" du milieu sain et du milieu endommagé. En éliminant la déformation élastique " $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ " des deux équations, on obtient la relation :

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \underline{\underline{M}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}} \quad \text{I.7}$$

Avec :

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{\tilde{\Lambda}}} : \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} \quad \text{I.8}$$

où : $\underline{\underline{M}}$ est l'opérateur d'effet du dommage d'ordre quatre qui permet de passer du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ au tenseur des contraintes effectives $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$.

Dans le cas où l'endommagement est nul, on retrouve $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{I}}$

Avec la définition (I.8) du tenseur $\underline{\underline{M}}$, il faut veiller à la symétrie de l'opérateur d'élasticité du milieu endommagé $\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}$. On est souvent conduit, dans le cadre de l'hypothèse de l'équivalence en déformation [**Cor82**] à symétriser.

$$\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\Lambda}} + \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{M}}^T) \quad \text{I.9}$$

3.2. Hypothèse d'équivalence en énergie élastique

Une autre approche est d'utiliser l'hypothèse d'équivalence en énergie élastique proposée par **Cordebois et Sidoroff** [**Cor82**]. Si l'on postule pour l'EVR sain l'existence d'un potentiel élastique (énergie élastique) duquel dérive la déformation élastique :

$$W_e = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad \text{I.10}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \frac{\partial W_e}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}} \quad \text{I.11}$$

Alors la déformation de l'élément endommagé est donnée par le même potentiel, mais écrit en fonction de la contrainte effective :

$$\tilde{W}_e = \frac{1}{2} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} : \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} : \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad \text{I.12}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \frac{\partial \tilde{W}_e}{\partial \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}} = \underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}^{-1} : \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} \quad \text{I.13}$$

Cette inégalité est satisfaite dès que l'on choisi :

$$\begin{cases} \underline{\tilde{\sigma}} = \underline{\underline{M}}^{-1} : \underline{\sigma} \\ \underline{\tilde{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{M}}^T : \underline{\varepsilon}^e \end{cases} \quad \text{I.14}$$

L'exploitation de l'équation (I.12) passe par la donnée de la contrainte effective $\tilde{\sigma}$ en fonction d'un tenseur de dommage et du tenseur des contraintes du milieu sain.

Dans la pratique, il est important d'inclure l'influence de l'endommagement sur l'évolution de toutes les variables internes décrivant le comportement du matériau. C'est l'idée qu'ont exploité **Saanouni et al.[Saa94]** dans le cas d'un modèle élastoplastique pour formuler l'hypothèse d'équivalence en énergie totale, c'est à dire en énergie élastique, mais aussi en énergie bloquée dans l'écroutissage.

3.3. Hypothèse d'équivalence en énergie totale

L'équivalence en énergie élastique conduit à écrire :

$$W_e = \frac{1}{2} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^e = \frac{1}{2} \underline{\tilde{\sigma}} : \underline{\tilde{\varepsilon}}^e \quad \text{I.15}$$

Cette égalité est satisfaite dès que l'on écrit la contrainte effective sous la forme :

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \underline{\underline{M}}^{-1} : \underline{\sigma} \quad \text{I.16}$$

Et nécessairement la déformation effective sous la forme:

$$\underline{\tilde{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{M}}^T : \underline{\varepsilon}^e \quad \text{I.17}$$

Où : $\underline{\underline{M}}$ s'appelle le tenseur d'effet du dommage. La rigidité $\underline{\underline{\Lambda}}$ est la souplesse $\underline{\underline{S}}$ du milieu endommagé s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Lambda}} &= \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{M}}^T \\ \underline{\underline{S}} &= \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} = \underline{\underline{M}}^{-T} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{M}}^{-1} \end{aligned} \quad \text{I.18}$$

Cette approche d'équivalence en énergie surtout utilisé avec un tenseur d'endommagement "D" d'ordre 2. D définit directement le tenseur d'effet du dommage " $\underline{\underline{M}}(D)$ ". Du fait de sa simplicité mathématique, le tenseur "D" est largement utilisé pour l'étude des problèmes

d'endommagement incluant l'élasticité [Cor82, Val71] et l'élastoplasticité [Cor83, Lee85]. La propriété la plus attractive de ce tenseur est qu'il possède toujours trois directions principales orthogonales et ses valeurs principales correspondantes [Ju90b].

On écrira par exemple le principe d'équivalence, en énergie irréversible bloquée dans le milieu vierge sous la forme :

$$W_{cir}^b = \sum \frac{1}{2} \underline{\alpha} : \underline{C} : \underline{\alpha} = \sum \frac{1}{2} \underline{X} : \underline{\alpha} \quad \text{I.19}$$

et dans le milieu endommagé :

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{cin}^b &= \sum \frac{1}{2} \tilde{\underline{\alpha}} : \underline{C} : \tilde{\underline{\alpha}} = \sum \frac{1}{2} \underline{\alpha} : \underline{N} : \underline{C} : \underline{N}^T : \underline{\alpha} \\ &= \sum \frac{1}{2} \tilde{\underline{\alpha}} : \underline{C} : \tilde{\underline{\alpha}} = \sum \frac{1}{2} \tilde{\underline{X}} : \tilde{\underline{\alpha}} \end{aligned} \quad \text{I.20}$$

Ce qui entraîne les relations:

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{X}} &= \underline{N}^{-1} : \underline{X} \\ \tilde{\underline{\alpha}} &= \underline{N}^T : \underline{\alpha} \end{aligned} \quad \text{I.21}$$

Où : les opérateurs $\tilde{\underline{C}}$ et $\tilde{\underline{N}}$ seront défini plus tard lorsque le tenseur (ou scalaire) du dommage aura été défini.

l'anisotropie de l'écroissage cinématique est définis alors par :

$$\tilde{\underline{C}} = \underline{N} : \underline{C} : \underline{N}^T \quad \text{I.22}$$

\underline{N} : étant l'opérateur d'effet du dommage pour l'écroissage cinématique. Par simplification pour la suite on considérera que \underline{M} et \underline{N} sont égaux.

Pour l'écroissage isotrope, l'équivalence en l'énergie bloquée donne :

$$\begin{aligned} W_{iso}^b &= \frac{1}{2} \underline{Rr} = \frac{1}{2} \underline{r.Q.r} \\ &= \frac{1}{2} \tilde{\underline{R}}\tilde{\underline{r}} = \frac{1}{2} \tilde{\underline{r}}.Q.\tilde{\underline{r}} = \frac{1}{2} \underline{r}\tilde{\underline{Q}}\underline{r} = W_{iso}^b \end{aligned} \quad \text{I.23}$$

Entraînant les relations :

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= \frac{R}{\sqrt{1-\|D\|}} \\ \tilde{r} &= \sqrt{1-\|D\|} r \\ \tilde{Q} &= \sqrt{1-\|D\|} Q\end{aligned}\tag{I.24}$$

Où : Q et \tilde{Q} sont respectivement les modules d'écrouissage du milieu endommagé et du milieu sain, $\|D\|$ définissant une norme approprié du tenseur d'endommagement (dans le cas où D est un tenseur d'ordre un ou plus). Dans la suite, on écrira que :

$$L(D) = \sqrt{1-\|D\|}\tag{I.25}$$

4. Formulation thermodynamique

4.1. Inégalité de Clausius duhem

L'inégalité de Clausius Duhem s'écrit sous la forme :

$$\phi = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}} - \rho (\dot{\psi} - ST) - \bar{q} \frac{\overrightarrow{\text{grad}T}}{T} \geq 0\tag{I.26}$$

Où : "s" est l'entropie spécifique et \bar{q} le flux de chaleur par unité de surface.

La dissipation ϕ qui est la somme de deux dissipations : la dissipation intrinsèque (ou mécanique) ϕ_{int} et de la dissipation thermique ϕ_{th} :

$$\phi_{\text{int}} = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}} - \rho (\dot{\psi} - ST) \geq 0\tag{I.27}$$

$$\phi_{\text{th}} = -\frac{\bar{q}}{T} \overrightarrow{\text{grad}T} \geq 0\tag{I.28}$$

Elle sera positive ou nulle quel que soit les processus envisagés. Si ϕ_{int} et ϕ_{th} sont elles mêmes positives ou nulles. Ce qui permet de séparer l'étude des dissipations mécaniques et thermiques sans interdire les influences thermomécaniques (découplage d'état)

4.2. Potentiels d'état, Relations d'état

Les variables d'état étant définies ci-dessus, il nous reste donc à définir les relations d'état pour modéliser les phénomènes discutés précédemment. Pour ce faire, une formulation thermodynamique est nécessaire.

La définition du potentiel d'état fait appel à la thermodynamique des milieux continus [Ger85, Sid77, Ben89]. Le comportement thermomécanique d'un matériau s'effectue en définissant tout d'abord les variables observables : dans notre cas, la déformation totale " $\underline{\varepsilon}$ " et la température "T" sous l'hypothèse des petites perturbations (H.P.P.). En adoptant la décomposition additive de la déformation totale ; somme de la déformation élastique " $\underline{\varepsilon}^e$ ", de la déformation plastique " $\underline{\varepsilon}^p$ " et de la déformation due à la dilatation thermique " $\underline{\varepsilon}^\theta$ ", nous écrivons :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^p + \underline{\varepsilon}^\theta \quad \text{I.29}$$

Dans le cas d'une transformation isotherme, nous avons :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^p \quad \text{I.30}$$

Des variables internes de nature plus cachée, sont introduites dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, pour décrire les phénomènes dissipatifs liés à l'écroutissement et à l'endommagement du matériau. Elles représentent l'état interne de la matière (densités de dislocations, microstructure cristalline, nucléation de microfissures et cavités, etc...) sans qu'il soit possible de les mesurer par des observations directes. Nous définissons comme potentiel thermodynamique l'énergie libre de Helmholtz, qui dépend des variables d'état observables et internes :

$$\psi = \psi(\underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}^p, \underline{\alpha}, r, D, \beta, \Upsilon) \quad \text{I.31}$$

Où r et $\underline{\alpha}$ désignent respectivement l'écroutissement isotrope et l'ensemble des variables d'écroutissement cinématique en plasticité. La variable d'état β introduite par **Cordebois et Sidoroff [Cor82]** est la mesure scalaire du cumul des dommages. Elle joue un rôle analogue à celui joué en plasticité par la variable "r" d'écroutissement isotrope. De la même façon, **Voyiadjis et Deliktas[Voy99a]** ont introduit pour l'endommagement la variable Υ analogue

à " α " pour la plasticité, c'est un tenseur de même ordre que la variable d'endommagement D. Elle permet de traduire un mouvement cinématique du domaine de non endommagement. Dans un premier temps le tenseur d'endommagement est pris comme un tenseur symétrique d'ordre deux. Dans le cadre de l'élastoplasticité (sous : H.P.P.) les déformations n'interviennent que sous la forme de leur partition $\underline{\varepsilon}^e = \underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p$; nous avons donc :

$$\psi = \psi(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p, \underline{\alpha}, r, D, \beta, \Upsilon, T) = \psi(\underline{\varepsilon}^e, \underline{\alpha}, r, D, \beta, \Upsilon, T) \quad \text{I.32}$$

A chacune de ces variables indépendantes, on lui associe une variable duale. Comme indiqué sur le tableau (1) :

Variables d'état		Variables associées (A_k)
Observables	Internes (V_k)	
Elasticité $\underline{\varepsilon}^e$	Transfert thermique q/T Plasticité $\underline{\varepsilon}^p$ Ecrouissage cinématique $\underline{\alpha}$ Ecrouissage isotrope r Endommagement D Endommagement β Endommagement $\underline{\Upsilon}$	$\underline{\sigma}$
Température T		S
		g
		$-\underline{\sigma}$
		\underline{X}
		R
		Y
		B
	$\underline{\Gamma}$	

Tableau I.1 : Variables d'état-variables associées

Où Y est le taux de restitution d'énergie élastique.

Les propriétés élastiques ne sont pas affectées par l'écrouissage, on suppose que le processus d'élasticité et de plasticité sont séparés ce qui se traduit au niveau du potentiel par :

$$\psi = \psi(\underline{\varepsilon}^e, \underline{\alpha}, r, D, T) = \psi_e(\underline{\varepsilon}^e, D, T) + \psi_p(\underline{\alpha}, r, D, \beta, \underline{\Upsilon}, T) \quad \text{I.33}$$

En différentiant l'expression du potentiel (I.32), nous obtenons :

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} : \dot{\underline{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \psi}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\alpha}} : \dot{\underline{\alpha}} + \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \dot{\beta} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\Upsilon}} : \dot{\underline{\Upsilon}} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} \geq 0 \quad \text{I.34}$$

. En introduisant le potentiel énergie libre (I.34) dans l'inégalité de Clausius Duhem nous avons :

$$\left(\underline{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}^e} \right) : \underline{\varepsilon}^e + \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^p - \rho \left(s - \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} \dot{r} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\alpha}} : \dot{\underline{\alpha}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \dot{\beta} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\Upsilon}} : \dot{\underline{\Upsilon}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D} - \frac{\bar{q}}{T} \overrightarrow{\text{grad}T} \geq 0 \quad \text{I.35}$$

Des hypothèses classiques permettent d'annuler indépendamment certains termes de cette inégalité. Nous aboutissons donc aux relations d'état :

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}^e} \quad \text{I.36}$$

$$s = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad \text{I.37}$$

Par analogie avec les relations précédentes, on définit les variables forces thermodynamiques associées ($\underline{A}_k = \underline{X}_i, R, Y, B, \Gamma$) aux variables internes ($\underline{V}_k = \underline{\alpha}, r, D, \beta, \underline{\xi}$) sont défini par :

$$\underline{A}_k = - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{V}_k} \quad \text{I.38}$$

L'inégalité résiduelle s'écrit alors à partir de (I.35) sous la forme :

$$\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^p - \sum_k \underline{A}_k : \dot{\underline{V}}_k \geq 0 \quad \text{I.39}$$

Dans l'espace des déformations, le potentiel thermodynamique, énergie libre Ψ , est une fonction convexe de toute les variables d'états internes, indépendantes les unes des autres. On peut faire l'hypothèse du découplage d'état entre les différents phénomènes d'écroutissage et d'élasticité pour aboutir à une décomposition additive de la forme :

$$\begin{aligned} \rho \psi &= \rho \psi (\underline{\varepsilon}^e, \underline{\alpha}, r, D, T) \\ &= \rho \psi_e (\underline{\varepsilon}^e, D, T) + \rho \psi_p (\underline{\alpha}, r, D, T) + \rho \psi_D (\beta, \underline{\xi}, T) \end{aligned} \quad \text{I.40}$$

L'introduction de l'endommagement "D" dans Ψ_e et Ψ_p se fait par le biais des équations (I.14, I.21, I.24). Tout calcul fait, ces potentiels d'état s'écrivent sous la forme :

$$\rho\psi_e(\underline{\varepsilon}^e, D, T) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^e : \hat{\underline{\Lambda}}(D) : \underline{\varepsilon}^e - (T - T_0) \tilde{\underline{k}}(D) : \underline{\varepsilon}^e - \rho C_v T \left(\lg \frac{T}{T_0} - 1 \right) \quad \text{I.41}$$

$$\rho\psi_p(\underline{\alpha}, r, D, T) = \sum \frac{1}{2} \underline{\alpha} : \tilde{\underline{C}}(D) : \underline{\alpha} + \frac{1}{2} \tilde{\underline{Q}}(D) : r^2 \quad \text{I.42}$$

$$\rho\psi_D(\underline{\beta}, \underline{\Upsilon}, T) = \sum \frac{1}{2} \underline{\Upsilon} : \underline{L} : \underline{\Upsilon} + \frac{1}{2} H \beta^2 \quad \text{I.43}$$

\underline{k} étant le tenseur des conductivités thermiques dans l'E.V.R. non endommagé et $\tilde{\underline{k}}$ celui de l'E.V.R. endommagé :

$$\tilde{\underline{k}} = \underline{k} : \underline{M}^T \quad \text{I.44}$$

T_0 est la température initiale, C_v la chaleur massique, \underline{L} (opérateur d'ordre 4) et G (scalaire) des constantes d'endommagement caractéristiques du matériau, et où : $\hat{\underline{\Lambda}}(D)$, $\tilde{\underline{C}}(D)$ et $\tilde{\underline{Q}}(D)$ sont respectivement données par les équations ((I.18.a), I.22 et I.24).

Les relations d'état sont alors déduites du potentiel d'état :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}^e} = \hat{\underline{\Lambda}}(D) : \underline{\varepsilon}^e - (T - T_0) \tilde{\underline{k}}(D) \\ s &= -\frac{\partial \psi}{\partial T} = \frac{1}{\rho} \tilde{\underline{k}}(D) : \underline{\varepsilon}^e + C_v T \cdot \lg \left(\frac{T}{T_0} \right) \\ \underline{X} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\alpha}_i} = \tilde{\underline{C}}(D) : \underline{\alpha} \\ R &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} = \tilde{\underline{Q}}(D) : r \\ Y &= -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = Y_e + Y_\alpha + Y_r \\ \underline{\Gamma} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\xi}} = \underline{L} : \underline{\xi} \\ B &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = H : \beta \end{aligned} \quad \text{I.45}$$

L'équation (I.45.e) définit la variable force thermodynamique Y associée à la variable d'endommagement. Elle se compose d'une partie élastique Y_e classique et d'une partie

anélastique Y_α et Y_r . Compte tenu de la définition des opérateurs effectifs $\tilde{\underline{\Lambda}}(D)$, $\tilde{\underline{C}}(D)$ et $\tilde{Q}(D)$ l'application de l'équation (I.45) conduit à :

$$\begin{aligned} Y_e &= \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^e : \frac{\partial \tilde{\underline{\Lambda}}}{\partial D} : \underline{\varepsilon}^e + (T - T_0) \frac{\partial \tilde{k}}{\partial D} : \underline{\varepsilon}^e \\ Y_\alpha &= \frac{1}{2} \sum \underline{\alpha} : \frac{\partial \tilde{\underline{C}}}{\partial D} : \underline{\alpha} \\ Y_r &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{Q}(D)}{\partial D} r^2 \end{aligned} \quad \text{I.46}$$

Les relations d'état ne donnent qu'une définition des variables associées. D'où la nécessité d'un formalisme complémentaire pour décrire l'évolution des variables par l'intermédiaire des relations dites complémentaires..

4.3. Potentiel des dissipations, Relations complémentaires

4.3.1. Analyse des différentes dissipations

Le potentiel des dissipations peut être décomposé en un potentiel de dissipation plastique, un potentiel de dissipation d'endommagement et un potentiel de dissipation thermique. Avec les lois d'état, l'inégalité de Clausius-Duhem se réduit à l'expression de la dissipation totale (thermique+plastique+endommagement)

$$\phi = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p - \sum \underline{X} : \underline{\dot{\alpha}} - R\dot{r} + Y\dot{D} - \underline{\Gamma} : \underline{\dot{\xi}} + B\dot{\beta} - \bar{q} \frac{\overrightarrow{\text{grad}}(T)}{T} \geq 0 \quad \text{I.47}$$

En se basant sur l'hypothèse du découplage entre les effets de plasticité et d'endommagement, la dissipation peut être écrite.

$$\phi = \phi^p + \phi^d + \phi^{ther} \quad \text{I.48}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \phi^p &= \underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p - \underline{X} : \underline{\dot{\alpha}} - R\dot{r} \geq 0 \\ \phi^d &= Y : \dot{D} - \underline{\Gamma} : \underline{\dot{\xi}} - B\dot{\beta} \geq 0 \\ \phi^{ther} &= \bar{q} \frac{\overrightarrow{\text{grad}}T}{T} \geq 0 \end{aligned} \quad \text{I.49}$$

Toutefois, on peut regrouper la dissipation plastique ϕ^p avec la dissipation d'endommagement ϕ^d afin de définir la dissipation volumique ou mécanique totale. De même on définit la dissipation thermique volumique ϕ^{ther} .

4.3.2. Relations complémentaires

Pour définir les relations complémentaires relatives aux différents processus dissipatifs, on postule l'existence d'un potentiel de dissipation (ou pseudo-potentiel). Celui ci s'exprime comme une fonction à valeur scalaire continue convexe par rapport aux variables flux, les variables d'état peuvent éventuellement intervenir comme paramètres :

$$\varphi = \varphi \left(\underline{\dot{\varepsilon}}^p, \underline{\dot{\alpha}}, \dot{r}, \dot{D}, \dot{\beta}, \underline{\dot{\xi}}, \frac{\bar{q}}{T} \right) = \varphi \left(\underline{\dot{\varepsilon}}^p, \underline{V}_k, \frac{\bar{q}}{T} \right) \quad \text{I.50}$$

Les relations complémentaires s'expriment alors par la propriété de normalité (ou dissipativité normale). Dans la pratique il est plus commode d'exprimer les relations complémentaires sous la forme de relation d'évolution des variables flux en fonction des variables duales. Pour cela on définit φ^* dual de φ par rapport aux variables flux, par définition on écrit que :

$$\varphi^* = \sup \left(\left(\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p - \underline{A}_k : \underline{V}_k - \frac{\bar{q} \overline{gradT}}{T} \right) - \varphi \right) \quad \text{I.51}$$

Les relations complémentaires d'évolution s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\varepsilon}}^p &= \frac{\partial \varphi^*}{\partial \underline{\sigma}} \\ \underline{V}_k &= - \frac{\partial \varphi^*}{\partial \underline{A}_k} \\ \frac{\bar{q}}{T} &= - \frac{\partial \varphi^*}{\partial \bar{g}} \end{aligned} \quad \text{I.52}$$

La première relation conduit aux relations de la plasticité ou de viscoplasticité, la seconde exprime les relations d'évolution des variables internes (écrouissages et endommagement), la dernière conduit à la loi de fourrier pour la thermostatique.

Dans la suite et par souci de simplicité, on suppose que les mécanismes dissipatifs sont isothermes. En effet, la dissipation thermique est classique et dérive d'un potentiel de Fourier [Cha97]. Pour analyser les puissances dissipées dans les différents phénomènes Mécaniques irréversibles, deux approches sont possibles :

- une première approche [Cha78, Lem85, Saa88, Bil89, Saa94], consiste à considérer un seul mécanisme gouverné par la plasticité avec un seul potentiel de dissipation $F=F_d+F_p$, un seul critère $f=f_p$ correspondant au critère d'écoulement plastique, et un seul multiplicateur de Lagrange ou multiplicateur plastique $\lambda = \dot{\lambda}_p$, puisque le critère d'endommagement n'est pas pris en compte dans cette approche, le potentiel des dissipations s'écrit :

$$F = F(\underline{\sigma}, \underline{X}, R; Y, D) = F_p(\underline{\sigma}, \underline{X}, R; D) + F_d(Y, D) \quad 1.53$$

avec une règle de normalité généralisée ne faisant intervenir qu'un seul multiplicateur de Lagrange $\dot{\lambda}_p$, la dissipation ϕ peut s'écrire :

$$\phi = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p - \underline{X} : \underline{\dot{\alpha}} - R : \dot{r} + Y : \dot{D} - \dot{\lambda}_p (F_p + F_d) \quad 1.54$$

On obtient les relations suivantes en prenant l'extremum de la fonction ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\sigma}} = 0 &\Rightarrow \underline{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial \underline{\sigma}} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \underline{X}} = 0 &\Rightarrow \underline{\dot{\alpha}} = -\dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial \underline{X}} \\ \frac{\partial \phi}{\partial R} = 0 &\Rightarrow \dot{r} = -\dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial R} \\ \frac{\partial \phi}{\partial Y} = 0 &\Rightarrow \dot{D} = \dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial Y} \end{aligned} \quad 1.55$$

- La deuxième approche, consiste à considérer deux mécanismes et deux critères gouvernant "séparément " les évolutions de la plasticité et de l'endommagement associées [Cor82, Lee85, Cho92, Cha99]. On a donc :

- Deux potentiels de dissipations F_d et F_p ,
- Deux critères f_d et f_p indépendants,

- Deux multiplicateurs de Lagrange indépendants.

$$F_p(\underline{\sigma}, \underline{X}, R; D) \quad f_p(\underline{\sigma}, \underline{X}, R; D) \leq 0 \quad \text{I.56}$$

$$F_d(Y, D) \quad f_d(Y, D) \leq 0 \quad \text{I.57}$$

La dissipation ϕ devient :

$$\phi = \phi_d + \phi_p - \lambda_p F_p - \lambda_d F_d \quad \text{I.58}$$

Les relations complémentaires s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\varepsilon}}^p &= \dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial \underline{\sigma}} \\ \dot{\underline{\alpha}} &= -\dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial \underline{X}} \\ \dot{r} &= -\dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial R} \\ \dot{D} &= \dot{\lambda}_d \frac{\partial F_d}{\partial Y} \end{aligned} \quad \text{I.59}$$

$\dot{\lambda}_p$ et $\dot{\lambda}_d$ sont déterminés par les deux conditions de cohérences associées aux deux critères :

$$\dot{\lambda}_p \geq 0 \quad \text{si} \quad f_p = \dot{f}_p = 0 \quad \text{I.60}$$

$$\dot{\lambda}_d \geq 0 \quad \text{si} \quad f_d = \dot{f}_d = 0 \quad \text{I.61}$$

Dans le cas indépendant du temps.

Cette approche présente l'avantage de permettre la construction de relations indépendantes (mais couplées par les variables effectives) entre la plasticité et l'endommagement. Ce qui a pour effet, d'avoir des déformations plastiques importantes qui ne provoquent pas d'endommagement ou très peu, comme il peut y avoir endommagement sans déformations plastiques significatives.

Dans la suite nous retiendrons uniquement la première formulation.

5. Formulation unifiée ; un seul multiplicateur

Le critère d'écoulement plastique définit le domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes à l'intérieur duquel toute variation de contrainte n'engendre que des déformations élastiques, la déformation plastique, l'écroutissement et l'endommagement n'y évoluent pas si bien que la dissipation mécanique est nulle. Dans un premier temps nous décrivons le cas général de l'anisotropie plastique (le choix c'est porté sur le critère de type Hill), puis nous allons développer particulièrement le cas de l'élastoplasticité couplée à l'endommagement isotrope.

Le critère de charge dans le cas de l'anisotropie plastique s'écrit :

$$f = \|\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\tilde{X}}\|_H - \tilde{R} - \sigma_y \leq 0 \quad \text{I.62}$$

Avec :

$$\|\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\tilde{X}}\|_H = \left[(\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\tilde{X}}) : \underline{\underline{H}} : (\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\tilde{X}}) \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{I.63}$$

et :

$$\underline{\tilde{X}} = \sum_i \underline{\tilde{X}}_i \quad \text{I.64}$$

où σ_y est la limite d'élasticité, $\underline{\tilde{X}}$ étant la somme de plusieurs écroutissements cinématiques indépendants et $\underline{\underline{H}}$ l'opérateur de Hill d'ordre quatre. Sans s'intéresser aux développements du tenseur on dira seulement qu'il caractérise l'anisotropie de l'écoulement plastique dont la symétrie est définie comme suite [Ham00] :

$$H_{ijkl} = H_{klij} = H_{jikl} = H_{ijlk} \quad \text{I.65}$$

Il est commode de poser l'hypothèse d'égalité entre le tenseur d'effet du dommage pour l'élasticité $\underline{\underline{M}}$ et le tenseur d'effet du dommage pour l'écroutissement cinématique $\underline{\underline{N}}$ ($\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{N}}$). L'application du principe d'équivalence en énergie totale, permet d'écrire (I.63) sous la forme :

$$\begin{aligned} \|\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\tilde{X}}\|_H &= \left[(\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\tilde{X}}) : \underline{\underline{M}}^{-T} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{M}}^{-1} : (\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\tilde{X}}) \right]^{\frac{1}{2}} \\ \|\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\tilde{X}}\|_H &= \left[(\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\tilde{X}}) : \underline{\underline{\tilde{H}}} : (\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\tilde{X}}) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad \text{I.66}$$

où :

$$\underline{\underline{\tilde{H}}} = \underline{\underline{M}}^{-T} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{M}}^{-1} \quad \text{I.67}$$

$\underline{\underline{\tilde{H}}}$: est l'opérateur de Hill du matériau endommagé.

A partir de la fonction de charge f , d'un terme traduisant les non linéarités de l'écroutissage et un autre terme décrivant l'évolution non linéaire de l'endommagement, le pseudo potentiel de dissipation associé peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} F(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, R, \underline{\underline{Y}}, \underline{\underline{D}}) &= f + F_p + F_d \\ &= f + \sum_i \frac{1}{2} \frac{a_i}{c_i} \underline{\underline{X}} : \underline{\underline{\tilde{C}}}^{-1} : \underline{\underline{X}} + \frac{1}{2} \frac{b}{\tilde{Q}} R^2 + F_d(\underline{\underline{Y}}, \underline{\underline{D}}) \end{aligned} \quad \text{I.68}$$

Où : a_i et b sont des coefficients du matériau caractérisant la non linéarité de l'écroutissage.

L'inverse du tenseur $\underline{\underline{\tilde{C}}}$ et donné par :

$$\underline{\underline{\tilde{C}}}^{-1} = \underline{\underline{M}}^{-T} : \underline{\underline{C}}^{-1} : \underline{\underline{M}}^{-1} \quad \text{I.69}$$

Pour retrouver le cas particulier de l'isotropie proposé par **Lemaître [Lem78]**. On considère le potentiel d'endommagement F_d , proposé par **Chow et Lu [Cho87]** ou **Zhu[Zhu95]** :

$$F_d(\underline{\underline{Y}}, \underline{\underline{D}}) = \frac{S}{2} \left[\underline{\underline{M}}^T :: \underline{\underline{M}} \right]^{-\frac{\beta}{2}} \left[\frac{\underline{\underline{Y}} : \underline{\underline{J}} : \underline{\underline{Y}}}{S} \right] \quad \text{I.70}$$

Où : S et β sont des coefficients du matériau dépendant de la température et $\underline{\underline{J}}$ le tenseur caractéristique du dommage d'ordre quatre analogue à $\underline{\underline{H}}$. La règle de normalité généralisée donne les équations suivantes :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\lambda}_p \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\lambda}_p \frac{\underline{\underline{M}}^{-T} : \underline{\underline{H}} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\tilde{X}}})}{\|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\tilde{X}}}\|_H} = \dot{\lambda}_p \underline{\underline{M}}^{-T} : \underline{\underline{\tilde{n}}} \quad \text{I.71}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\dot{\alpha}} &= -\dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial \underline{X}_i} = \dot{\lambda}_p \frac{\underline{M}^{-T} : \underline{H} : (\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\tilde{X}})}{\|\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\tilde{X}}\|_H} - a_i \dot{\lambda}_p \underline{M}^{-T} : \underline{C}_i^{-1} : \underline{\tilde{X}}_i \\
 &= \underline{M}^{-T} : \left(\underline{M}^T : \underline{\dot{\varepsilon}}^p - a_i \dot{\lambda}_p \underline{C}_i^{-1} : \underline{X}_i \right) \\
 &= \underline{\dot{\varepsilon}}^p - a_i \dot{\lambda}_p \underline{M}^{-T} : \underline{C}_i^{-1} : \underline{M}^{-1} : \underline{X}_i \\
 &= \underline{\dot{\varepsilon}}^p - a_i \dot{\lambda}_p \underline{\tilde{C}}_i^{-1} : \underline{X}_i
 \end{aligned} \tag{I.72}$$

Dans le cas isotherme, on peut écrire (I.72) sous la forme :

$$\underline{\dot{\alpha}} = \underline{\dot{\varepsilon}}^p - a_i \dot{\lambda}_p \underline{\alpha}_i \tag{I.73}$$

$$\dot{r} = -\dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial R} = \dot{\lambda}_p \left(\frac{1}{L[D]} - br \right) = \frac{\dot{\lambda}_p}{L[D]} (1 - b\tilde{r}) \tag{I.74}$$

$$\underline{\dot{D}} = -\dot{\lambda}_p \frac{\partial F_d}{\partial \underline{Y}} = \dot{\lambda}_p \left[\underline{M}^T :: \underline{M} \right]^{-\frac{\beta}{2}} \frac{\underline{J} : \underline{Y}}{S} \tag{I.75}$$

Le tenseur $\underline{n} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}$ définit la direction unitaire de l'écoulement plastique et assure le respect de la normalité dans l'espace des contraintes :

$$\underline{n} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\underline{M}^{-T} : \underline{H} : (\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\tilde{X}})}{\|\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\tilde{X}}\|_H} \tag{I.76}$$

Par contre si $\frac{\partial f}{\partial \underline{X}} \neq \frac{\partial F}{\partial \underline{X}}$ montre le non respect de la règle de normalité dans l'espace des contraintes cinématiques \underline{X} . Dans l'espace des contraintes effectives, la normalité est assurée par le tenseur $\underline{\tilde{n}}$:

$$\underline{\tilde{n}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\tilde{\sigma}}} = \frac{\underline{H} : (\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\tilde{X}})}{\|\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\tilde{X}}\|_H} \tag{I.77}$$

Où :

$$\underline{\tilde{n}} = \underline{M}^T : \underline{n} \tag{I.78}$$

Etant donnée que \underline{n} n'est pas une variable d'état, l'utilisation formelle du tenseur normal \tilde{n} n'est pas nécessaire, on note donc pour la suite :

$$\underline{n} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\tilde{\sigma}}} = \frac{\underline{H} : (\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\tilde{X}})}{\|\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\tilde{X}}\|_H} \quad \text{I.79}$$

Ce qui permet d'écrire (I.71) sous la forme :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}_p \underline{M}^{-T} : \underline{n} \quad \text{I.80}$$

La formulation ainsi définie ci-dessus est qualifiée de non associé au sens où $F \neq f$. Elle peut être considérée comme partiellement associée dans le cas où elle assure le respect strict de la règle de normalité dans l'espace des contraintes. Dans le cas où $a_i = b = 0$ et $F_d = 0$ alors la théorie est strictement associée.

Sachant que :

$$\|\underline{n}\|_{H^{-1}} = (\underline{n} : \underline{H}^{-1} : \underline{n})^{\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{I.81}$$

La vitesse de déformation cumulée est définie par :

$$\dot{p} = \|\underline{\dot{\varepsilon}}^p\|_{H^{-1}} = (\underline{\dot{\varepsilon}}^p : \underline{H}^{-1} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p)^{\frac{1}{2}} = (\dot{\lambda}_p \underline{M}^{-T} : \underline{n} : \underline{H}^{-1} : \underline{n} : \underline{M}^{-1} \dot{\lambda}_p)^{\frac{1}{2}} \quad \text{I.82}$$

Dans le cas de non couplage avec l'endommagement et que l'écroutissement isotrope est simplement linéaire, alors $\dot{P} = \dot{r}$ la déformation plastique n'est rien d'autre que la variable (déformation) de l'écroutissement isotrope.

Dans le cadre de la plasticité indépendante du temps, le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}_p$ est déterminé par la condition de cohérence dans l'espace des déformations :

$$f \cdot \frac{(\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\tilde{X}}) : \underline{H} : (\underline{\dot{\tilde{\sigma}}} - \underline{\dot{\tilde{X}}})}{\|\underline{\tilde{\sigma}} - \underline{\tilde{X}}\|_H} - \dot{R} = \underline{n} : (\underline{\dot{\tilde{\sigma}}} - \underline{\dot{\tilde{X}}}) - \dot{R} = 0 \quad \text{I.83}$$

Etant donnés les expressions des contraintes effectives ci-après :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{\Lambda}} : \tilde{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{M}}^T : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \\
 \tilde{\underline{X}} &= \underline{\underline{C}}_i : \tilde{\underline{\alpha}}_i = \underline{\underline{C}}_i : \underline{\underline{M}}^T : \underline{\underline{\alpha}}_i \\
 \tilde{\underline{R}} &= Q\tilde{r} = QL[D]r
 \end{aligned}
 \tag{I.84}$$

Dans le cas isotherme, la condition de cohérence $\dot{f} = 0$ dans l'espace des contraintes devient:

$$\begin{aligned}
 \dot{f} &= \underline{n} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{M}}^T : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p - \sum_i \underline{n} : \underline{\underline{C}}_i : \underline{\underline{M}}^T : \underline{\underline{\dot{\alpha}}}_i \\
 &+ \underline{n} : \underline{\underline{\Lambda}} : \left(\frac{\partial \underline{\underline{M}}^T}{\partial \underline{D}} : \underline{\underline{\dot{D}}} \right) : \underline{\underline{\varepsilon}}^e - \sum_i \underline{n} : \underline{\underline{C}}_i : \left(\frac{\partial \underline{\underline{M}}^T}{\partial \underline{D}} : \underline{\underline{\dot{D}}} \right) : \underline{\underline{\alpha}}_i \\
 &- QL[D]r - Q \left(\frac{\partial L[D]}{\partial \underline{D}} : \underline{\underline{\dot{D}}} \right) r = 0
 \end{aligned}
 \tag{I.85}$$

La dérivée de la déformation totale peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} &= \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^e + \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p \\
 \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p &= \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^e = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \dot{\lambda}_p \underline{\underline{M}}^{-T} : \underline{n}
 \end{aligned}
 \tag{I.86}$$

En remplaçant les expressions des lois complémentaires (I.84 à I.88) la condition de cohérence (I.85) peut se mettre sous la forme :

$$\underline{n} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{M}}^T : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - h\dot{\lambda} = 0
 \tag{I.87}$$

Où : h est le module élastoplastique donné par :

$$\begin{aligned}
 h &= \underline{n} : \left(\underline{\underline{\Lambda}} + \sum_i \underline{\underline{C}}_i \right) : \underline{n} + Q - \sum_i a_i \underline{n} : \tilde{\underline{X}}_i - b\tilde{\underline{R}} \\
 &+ \underline{n} : \underline{\underline{\Lambda}} : \left(\frac{\partial \underline{\underline{M}}^T}{\partial \underline{D}} : \frac{\partial F_d}{\partial \underline{Y}} \right) : \underline{\underline{M}}^{-T} : \underline{\underline{\Lambda}} : \tilde{\underline{\sigma}} \\
 &- \sum_i \underline{n} : \underline{\underline{C}}_i : \left(\frac{\partial \underline{\underline{M}}^T}{\partial \underline{D}} : \frac{\partial F_d}{\partial \underline{Y}} \right) : \underline{\underline{M}}^{-T} : \underline{\underline{C}}_i^{-1} : \tilde{\underline{X}}_i - \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{D}} : \frac{\partial F_d}{\partial \underline{Y}} \right) \frac{\tilde{\underline{R}}}{L[D]}
 \end{aligned}
 \tag{I.88}$$

Le multiplicateur plastique étant défini en fonction de la vitesse de déformation, il est possible d'exprimer l'opérateur tangent continu $\underline{\underline{K}}_T$ relatif au comportement contrainte-déformation totale :

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{K}_T : \underline{\dot{\varepsilon}} \quad \text{I.89}$$

La dérivée de la contrainte (I.5) par rapport au temps s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\sigma}} &= \underline{\tilde{\Lambda}} : \underline{\dot{\varepsilon}}^e = \underline{\tilde{\Lambda}} : (\underline{\dot{\varepsilon}} - \underline{\dot{\varepsilon}}^p) \\ \underline{\dot{\sigma}} &= \underline{\tilde{\Lambda}} : (\underline{\dot{\varepsilon}} - \underline{\dot{\varepsilon}}^p) \\ &= \underline{\tilde{\Lambda}} : \underline{\dot{\varepsilon}} - \dot{\lambda}_p \underline{\tilde{\Lambda}} : \underline{M}^{-T} : \underline{n} + \frac{\partial \underline{\tilde{\Lambda}}}{\partial \underline{D}} : \underline{\dot{D}} : \underline{\dot{\varepsilon}} \end{aligned} \quad \text{I.90}$$

En utilisant d'une part la condition de cohérence (I.87) et la loi d'évolution de l'endommagement (I.75) d'autre part, on a l'expression suivante :

$$\frac{\partial \underline{\tilde{\Lambda}}}{\partial \underline{D}} = \frac{\partial}{\partial \underline{D}} [\underline{M} : \underline{\Lambda} : \underline{M}^T] = 2 \underline{M} : \underline{\Lambda} : \frac{\partial \underline{M}^T}{\partial \underline{D}} = 2 \frac{\partial \underline{M}}{\partial \underline{D}} : \underline{\Lambda} : \underline{M}^T \quad \text{I.91}$$

Alors l'opérateur tangent continu \underline{K}_T peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{K}_T = \underline{\tilde{\Lambda}} - \frac{1}{h} \underline{M} : \underline{\Lambda} : \left[\underline{n} \otimes \underline{n} - 2 \frac{\partial \underline{M}}{\partial \underline{D}} : \frac{\partial \underline{F}_d}{\partial \underline{Y}} : (\underline{\varepsilon}^e \otimes \underline{n}) \right] : \underline{\Lambda} : \underline{M}^T \quad \text{I.92}$$

L'opérateur tangent \underline{K}_T n'est pas symétrique ce qui est du au terme $(\underline{\varepsilon}^e \otimes \underline{n})$.

5.1. Cas particulier de l'isotrope de l'écoulement plastique couplée à l'endommagement isotrope

L'hypothèse d'isotropie des phénomènes de plasticité et d'endommagement, permet d'écrire les opérateurs d'ordre quatre sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{3}{2} \underline{I}^{dev} \quad \underline{C}_i = \frac{2}{3} C_i \underline{I}^{dev} \quad \text{I.93}$$

et :

$$\underline{I}^{dev} = \underline{I} - \frac{1}{3} \underline{1} \otimes \underline{1} \quad \text{I.94}$$

L'opérateur d'élasticité $\underline{\Lambda}$ dans le cas de l'élasticité isotrope s'exprime :

$$\underline{\Lambda} = 2 \cdot \mu \cdot \underline{I} + \lambda \underline{1} \otimes \underline{1} = 2 \cdot G \cdot \underline{I}^{dev} + K \underline{1} \otimes \underline{1} \quad \text{I.95}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé,

G : Le module de cisaillement,

K : Module de compression hydrostatique.

Les relations liant ces coefficients au module d'Young E et le coefficient de Poisson ν sont:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1+2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2[1+\nu]} \quad \text{I.96}$$

$$G = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1+2\nu)} = \mu \quad K = \frac{E}{3(1+2\nu)} = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \quad \text{I.97}$$

L'endommagement est supposé isotrope, C'est à dire qu'il est constitué de fissures et cavités dont l'orientation est distribuée uniformément et aléatoirement dans toutes les directions (indépendamment du vecteur $\underline{\vec{n}}$).

Pour les tenseurs d'effet du dommage dans le cas isotrope, nous nous limitons aux choix classiques d'une fonction positive décroissantes de D , variable d'endommagement isotrope, en tenant compte du principe d'équivalence :

$$M = N = \sqrt{1-D} \mathbf{I} \quad \text{et} \quad L(D) = \sqrt{1-D} \quad \text{I.98}$$

Les couples de variables effectives deviennent :

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \frac{\underline{\sigma}}{\sqrt{1-D}} \quad \underline{\tilde{\varepsilon}}^e = \sqrt{1-D} \underline{\varepsilon}^e \quad \text{I.99}$$

$$\underline{\tilde{R}} = \frac{\underline{R}}{\sqrt{1-D}} \quad \underline{\tilde{r}} = \sqrt{1-D} \underline{r} \quad \text{I.100}$$

Le choix du terme $\sqrt{1-D}$ est justifié par le fait qu'il conduit à un module d'élasticité du matériau endommagé affecté par le facteur $(1-D)$ comme stipulé par **Chaboche et Lemaître [Cha85]**. L'expression du potentiel thermodynamique devient :

$$\rho\psi = \frac{1}{2}(1-D) \left[\lambda (tr \underline{\tilde{\varepsilon}}^e)^2 + 2\mu ((tr \underline{\tilde{\varepsilon}}^e)^2)^2 + \frac{2}{3} \underline{\alpha} : \underline{\underline{C}} : \underline{\alpha} + Qr^2 \right] \quad \text{I.101}$$

Les équations d'état deviennent :

$$\underline{\sigma} = (1-D) \underline{\Lambda} : \underline{\varepsilon}^e; \quad R = (1-D) Qr; \quad Y = Y_e + Y_r = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^e : \underline{\Lambda} : \underline{\varepsilon}^e + \sum_i \frac{1}{2} Qr^2 \quad \text{I.102}$$

Les modules endommagés exprimant la dégradation des propriétés mécaniques due à l'endommagement s'écrivent :

$$\underline{\tilde{\Lambda}} = (1-D) \underline{\Lambda} \quad \tilde{Q} = (1-D) Q \quad \text{I.103}$$

Lorsque le milieu est totalement endommagé (c-à-d : $D \rightarrow 1$), les contraintes σ et R s'annulent, ce qui traduit l'incapacité du milieu endommagé à supporter le moindre effort. Dans le cas isotrope, les taux de restitution d'énergie élastique Y_e et Y_r peuvent s'exprimer dans l'espace des contraintes :

$$Y_e = \frac{\tilde{\sigma}_{eq}^2}{2E} \sigma^* \quad Y_r = \frac{1}{2} \frac{\tilde{R}^2}{\tilde{Q}} \quad \text{I.104}$$

Où : σ_{eq} est le second invariant des contraintes (c'est à dire égal à $J_2(\sigma)$) et σ^* est défini par l'expression [Lem92] :

$$\sigma^* = \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\sigma_h}{\sigma_{eq}} \right)^2 \quad \text{I.105}$$

$\frac{\sigma_h}{\sigma_{eq}}$ exprime le rapport de triaxialité des contraintes.

Le domaine de plasticité dans ce cas par le critère de von-Mises qui est un cas particulier de celui de Hill.

$$f = \|\underline{\tilde{\sigma}}\| - \tilde{R} - \sigma_y = J_2(\underline{\tilde{\sigma}}) - \tilde{R} - \sigma_y \quad \text{I.106}$$

et d'après l'hypothèse d'équivalence en énergie totale, le critère de von Mises modifier s'écrit :

$$f = \frac{J_2(\underline{\sigma})}{\sqrt{1-D}} - \frac{R}{\sqrt{1-D}} - \sigma_y \leq 0 \quad \text{I.107}$$

Où : J_2 représente le second invariant du déviateur des contraintes :

$$J_2(\underline{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\mathbf{S}} : \underline{\mathbf{S}}} \quad \text{I.108}$$

et $\underline{\mathbf{S}}$ étant le déviateur du tenseur des contraintes donné par :

$$\underline{\mathbf{S}} = \underline{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\sigma}) \underline{\mathbf{1}} \quad \text{I.109}$$

Le pseudo-potentiel de dissipation est :

$$F(\underline{\sigma}, \underline{\mathbf{X}}, R, D) = f + \frac{1}{2} \frac{b}{Q} \tilde{R}^2 + \frac{1}{(1-D)^\beta} \frac{S}{s+1} \left\langle \frac{Y - Y_0}{S} \right\rangle^{(s+1)} \quad \text{I.110}$$

Et les lois complémentaires dans le cadre d'une théorie isotrope unifiée deviennent :

$$\underline{\dot{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{1-D}} \frac{\underline{\mathbf{S}} - \underline{\mathbf{X}}}{J_2(\underline{\sigma} - \underline{\mathbf{X}})} = \frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{1-D}} \underline{\mathbf{n}} \quad \text{I.111}$$

$$\dot{r} = \frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{1-D}} (1 - b\tilde{r}) \quad \text{I.112}$$

$$\dot{D} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial Y} = \dot{\lambda} \frac{1}{(1-D)^\beta} \left[\frac{Y}{S} \right]^s \quad \text{I.113}$$

Où : $\underline{\mathbf{n}}$ est le vecteur normal unitaire défini par :

$$\underline{\mathbf{n}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\mathbf{S}}}{J_2(\underline{\sigma})} \quad \text{I.114}$$

$$\text{avec: } \|\underline{\mathbf{n}}\| = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\mathbf{n}} : \underline{\mathbf{n}}} = 1$$

la vitesse de la déformation plastique cumulée est définie dans l'espace des déformations par la norme suivante :

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\dot{\epsilon}}^p : \underline{\dot{\epsilon}}^p} = \frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{1-D}} = \dot{\lambda} \quad \text{I.115}$$

La condition de cohérence $\dot{f} = 0$ dans l'espace des déformations, permettant de déterminer le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$, il s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} : (1-D) \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \dot{\lambda} H = 0 \quad \text{I.116}$$

Où H est le module élastoplastique donné, dans le cas de l'isotropie, par [Lem92] :

$$H = h + \frac{3}{2} \frac{E}{1+\nu} + \frac{3}{2} \frac{Y^*}{(1-D)^{\frac{3}{2}}} \frac{(\underline{\underline{S}}) : \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}}{J_2(\underline{\underline{\sigma}})} \quad \text{I.117}$$

Où : "h" étant le module tangent élastoplastique dans l'espace des contraintes :

$$h = h_{iso} + h_{cin} \quad \text{I.118}$$

$$h_{iso} = Q - b\tilde{R} - \frac{Y^*}{1-D} \left(\tilde{R} + \frac{\sigma_y}{2} \right) \quad \text{I.119}$$

$$h_{cin} = C - \frac{3}{2} \left(a - \frac{Y^*}{1-D} \frac{(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}}) : \underline{\underline{\tilde{X}}}}{J_2(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})} \right)$$

h_{iso} : Représente la contribution de l'érouissage isotrope avec endommagement, et h_{cin} celle de l'érouissage cinématique avec endommagement. Y^* est défini par :

$$Y^* = \frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{1}{(1-D)^\beta} \left\langle \frac{Y - Y_0}{S} \right\rangle^s \quad \text{I.120}$$

Où : β , S et s sont des caractéristiques du matériau dépendant de la température.

Dans le cas unidimensionnel de l'élastoplasticité couplée à l'endommagement, Saanouni et al. [Saa94] démontrent que la contrainte de Cauchy atteint sa valeur maximale σ_{max} pour $h=0$.

Dans le cas où il n'y a pas d'endommagement, la contrainte R atteint sa valeur asymptotique (saturation de l'érouissage) $R_s = Q/b$ lorsque h tend vers zéro. b est le coefficient d'érouissage isotrope.

6. Aspect Numérique

Ce modèle de comportement élastoplastique couplé à l'endommagement peut être implémenté dans un code de calcul général ou spécialisé. Nous nous proposons d'étudier ici les aspects

numériques relatifs à la discrétisation spatio-temporelle de ce modèle. La stratégie de résolution par éléments finis comporte deux étapes :

Etape 1 : La discrétisation spatiale par méthode des éléments finis basée sur une formulation variationnelle en déplacement, cela conduit à un système D'E.D.P. (équations différentielles aux dérivées partielles) fortement non linéaire associé à des conditions initiales et aux limites.

Etape 2 : La discrétisation temporelle du problème d'évolution discrétisé par procédure de chargement incrémental ou schéma aux différences finies. Cela servira en particulier à l'intégration des équations différentielles ordinaire (E.D.O.) du premier ordre qui sont les équations constitutives du comportement élastoplastique endommageable.

6.1 Discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis

6.1.1. Position du problème d'évolution

Soit un solide ayant un comportement élastoplastique endommageable comme décrit dans (§-5). Ce solide occupe le domaine Ω_0 et de frontière Γ_0 dans sa configuration initiale non déformée, libre de toute contrainte initiale et non endommagé. Le solide déformé et endommagé, après sollicitations, occupe une nouvelle configuration définie par le domaine Ω de volume V et de frontière Γ dans des conditions isothermes.

Le solide dans la configuration actuelle Ω , est soumis à :

Une densité volumique de force f_v dans Ω ,

Une densité surfacique d'effort f_s sur une partie Γ_F de $\partial\Omega$,

Des déplacements imposés \underline{u} sur une partie Γ_u de Γ .

Où Γ_F et Γ_u forment une partition de Γ , avec $\Gamma_F \cap \Gamma_u = \emptyset$.

En pratique, en mécanique des solides principalement en analyse par éléments finis, les descriptions du mouvement les plus utilisées sont la formulation Lagrangienne totale et Lagrangienne actualisée. Dans notre étude la formulation Lagrangienne actualisée est adoptée, la configuration de référence est la dernière configuration en équilibre. On se propose alors de déterminer à chaque pas de chargement (incrément de chargement) les quantités mécaniques définies ci dessus; soit pour chaque point du solide Ω :

Le vecteur déplacement (\bar{u}),

Le champ des contraintes défini par le tenseur de Cauchy ($\underline{\sigma}$),

Le champ des déformations ($\underline{\varepsilon}$),

Les variables internes : la déformation plastique cumulée $p(\bar{u})$ et l'endommagement $D(\bar{u})$,

Les inconnues sont reliées par les équations suivantes :

* Equations d'équilibre quasi-statique :

$$\text{div} \underline{\sigma} + \bar{f}_v = \rho \bar{\gamma} \quad \text{dans } \Omega \quad \text{I.121}$$

Dans le cas des petites déformations les équations cinématiques dans le domaine de la structure s'écrivent :

$$\underline{\varepsilon}^e = \frac{1}{2} (\text{grad } \bar{u} + \text{grad } \bar{u}^t) \quad \text{I.122}$$

6.1.2. Discrétisation spatiale du principe des puissances virtuelles

Le domaine Ω définissant la structure est discrétisé spatialement de manière approchée par un maillage en sous domaine Ω_e de volume V_e (où l'indice "e" indique l'élément).

Les champs de déplacements réel et virtuel sont donnés par :

$$\begin{cases} \{u^e\} = [N] \{u^e\} \\ \{\delta u^e\} = [N] \{\delta u^e\} \end{cases} \quad \text{I.123}$$

Où $[N]$ est la matrice des fonctions d'interpolation de l'élément "e", $\{u^e\}$ est le vecteur déplacement du même nœud.

En appliquant le principe des travaux virtuels à l'équation du mouvement (I.121), nous obtenons :

$$- \int_{\Omega^e} \delta u \left(\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial x} + f_v \right) d\Omega^e = 0 \quad \text{I.124}$$

Après une intégration par partie, on a :

$$\int_{\Omega^e} \delta u \left(\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial x} \right) d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \delta u (f_{vi}) d\Omega^e = 0 \quad \text{I.125}$$

$$+ \int_{\Omega^e} \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial x} \underline{\sigma} d\Omega^e - \int_{\Gamma_u} \delta \bar{u} \cdot T d\Gamma_u - \int_{\Omega^e} \delta u F d\Omega^e = 0 \quad \text{I.126}$$

La forme matricielle, est donnée par :

$$\int_{\Omega^e} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega^e - \int_{\Gamma_f^{(e)}} \{\delta u\}^T \{f_s\} d\Gamma_F - \int_{\Omega^e} \{\delta u\}^T \{f_v\} d\Omega^e = 0 \quad \text{I.127}$$

La forme variationnelle est obtenue en remplaçant les approximations des champs de déplacement virtuel et réel ci après dans l'équation (117) :

$$\{\delta u(x, y)\} = [N] \{\delta u_n\} \quad \{u(x, y)\} = [N] \{u_n\} \quad \text{I.128}$$

$$\{\delta \varepsilon(x, y)\} = [B] \{\delta u_n\} \quad \{\varepsilon(x, y)\} = [B] \{u_n\} \quad \text{I.129}$$

[B] est la matrice déformation – déplacement.

Ce qui nous permet d'écrire la fonctionnelle élémentaire ci après :

$$\{I^e\} = \left([M^e] \{\dot{u}_n^e\} + \{f_n^{e|int}\} - \{f_n^{e|ext}\} \right) \delta u \quad \text{I.130}$$

Où : [M^e] est la matrice masse cohérente de l'élément "e" définie par :

$$[M^e] = \int_{V_0^e} \rho_0 [N][N]^T d\Omega_0^e \quad \text{I.131}$$

$\{f_N^{e|int}\}$: le vecteur des efforts intérieurs de l'élément "e"

$$\{f_N^{e|int}\} = \int_{V_e} [B^e] : \{\underline{\sigma}\} d\Omega \quad \text{I.132}$$

$\{f_N^{e|ext}\}$: le vecteur des efforts extérieurs de l'élément

$$\{f_N^{e|ext}\} = \int_{V^e} [N]^T \cdot \{f_v\} dV + \int_S [N]^T \cdot \{f_s\} dS \quad \text{I.133}$$

L'équilibre global de la structure est donnée par la sommation des $\{f^e\}$ sur l'ensemble des éléments, cet équilibre est traduit par le système algébrique suivant :

$$I = \sum_e I_e = \left[\sum_e M^e \ddot{u}^e + f^{e|int} - f^{e|ext} \right] \delta u = 0 \quad \text{I.134}$$

Où : δu est le vecteur global des déplacements virtuels cinématiquement admissible de toute la structure. Après assemblage, cette équation s'écrit comme suit :

Cas statique :

$$f_N^{e|int} - f_N^{e|ext} = 0 \quad \text{I.135}$$

Qui peut s'écrire formellement :

$$R^N(u_n) = f_N^{e|int} - f_N^{e|ext} = 0 \quad \text{I.136}$$

Cas dynamique :

$$M_{NM} \ddot{u}_M^e + R_N(u_M) = 0 \quad \text{I.137}$$

Le problème mécanique est défini sur un domaine Ω et un intervalle de temps $[0,t]$. Cet intervalle de temps est discrétisé par la méthode des différences finies en plusieurs incréments tels que $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ où Δt est l'incrément de temps généralement variable au cours de l'étude. Dans le programme de [Owen88], la résolution fait appel à un schéma itératif de Newton-Raphson (N-R) purement implicite. Après assemblage de l'ensemble des résidus de la structure, l'équation est linéarisée à l'aide d'un développement limité au premier ordre. Le lecteur peut trouver plus de détaille dans la thèse [Ham00]. On peut faire un développement de Taylor de l'équation (I.125) et (I.126); donc écrire l'équation à l'instant " t_{n+1} " et à l'itération "i" :

$$R(u_n^{i+1}) = R(u_n^i) + \left(\frac{\partial R}{\partial u} \right)_n^i (u_n^{i+1} - u_n^i) = 0 \quad \text{I.138}$$

Avec :

$\delta u = u_n^{i+1} - u_n^i$ Ce qui permet d'écrire (I.127) sous la forme suivante :

$$R^e(u) = \int_{\Omega^e} [B]^T [\tilde{\underline{\Lambda}}_{coup}] [B] d\Omega^e - \int_{\Omega^e} [N]^T \{f_v\} d\Omega^e - \int_{\Gamma_1^{(e)}} [N]^T \{f_s\} d\Gamma_1^{(e)} \quad \text{I.139}$$

dit vecteur résidu.

$$K_e(u) = \frac{\partial R(u)}{\partial u} \quad \text{I.140}$$

$$= \frac{\partial}{\partial u} \left(\int_{V^e} [B^e]^T : [\underline{\sigma}] J_v dV^e \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\int_{V^e} [N]^T \cdot f_v \cdot J_v dV^e \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\int_{\Gamma^e} [N]^T \cdot f_s \cdot J_s d\Gamma^e \right)$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$K^e(u) = \left(\int_{V^e} [B]^T : \left[\frac{\partial \Delta \underline{\sigma}}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}} \right] : [B] J_v dV^e \right) - \left(\int_{V^e} [N]^T \cdot \frac{\partial f_v}{\partial u^N} \cdot J_v dV^e \right) - \left(\int_{S^e} [N]^T \cdot \frac{\partial f_s}{\partial u^N} \cdot J_s dS^e \right) \quad \text{I.141}$$

Où nous pouvons constater la contribution du comportement élastoplastique via le module tangent incrémental $\frac{\partial \Delta \underline{\sigma}}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}}$. Les deux autres termes représentent la contribution des variations des forces de volume et des forces surfaciques extérieures appliquées. La détermination de la matrice incrémentale $\frac{\partial \Delta \underline{\sigma}}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}}$ que nous noterons $\underline{\tilde{\Lambda}}_{coup}$ et dont l'expression est donnée plus loin, nécessite l'intégration des équations de comportement. Cela pour déterminer toutes les variables d'état nécessaire au calcul de l'incrément $\Delta \underline{\sigma}$ à chaque itération. Cette matrice tangente matérielle dite aussi "matrice Jacobienne" définit la différentiation de chaque composante du tenseur des contraintes de Cauchy par rapport à chaque composante du tenseur des déformations totales.

Finalement à partir du système d'équation (I.141) nous pouvons déduire :

$$[K^e] = \int_{\Omega^e} [B]^T [\underline{\tilde{\Lambda}}_{coup}] [B] d\Omega^e : \text{est la matrice de rigidité élémentaire tangente.}$$

$$\{f^{(e)}\} = \int_{V^e} [N]^T \{f_v\} dV^e + \int_{\Gamma_1} [N]^T \{f_s\} d\Gamma_1 : \text{est le vecteur force élémentaire.}$$

Le calcul de ces deux équations peut se faire en utilisant la méthode Gauss bien adapter aux problèmes des éléments finis. Les itérations du schéma sont répétées jusqu'à obtenir un résidu inférieur à une tolérance établie au préalable. La quantité élémentaire R^e et sa

dérivée $\left[\frac{\partial R(\mathbf{u})_{n+1}}{\partial \mathbf{u}} \right]^i$ doivent être déterminées pour chaque élément de la structure.

6.2. Intégration locale des équations de comportement (Couplage Avancé) :

IL existe une multitude de méthodes d'intégration des équations aux dérivées ordinaires : méthode du retour radial tangent [Mar65], méthode du prédicateur élastique retour radial [Wil64] furent les pionniers dans ce domaine. Dans le présent travail, nous adoptons la méthode itérative implicite proposée Wilkins [Wil64] de prédiction élastique, correction plastique par retour radial. Cette méthode consiste en une prédiction élastique du déviateur des contraintes " $\underline{\sigma}$ ", sous l'hypothèse que les variables internes du modèle restent constantes durant tout le pas d'intégration. Ceci est suivi d'une correction plastique, par la projection du tenseur des contraintes déviatorique, issu de la prédiction élastique, sur la surface de charge. Cela suivant une direction parallèle à la normale de la surface de charge par un processus itératif de Newton Raphson.

Dans un premier temps, le comportement est supposé purement élastique. Nous calculons par la suite la valeur de la fonction seuil à la fin du pas, si cette fonction est négative, l'hypothèse de comportement élastique est vérifiée sinon, on réalise une correction plastique.

La correction plastique est réalisée suivant la méthode de retour radial [Sim84]. Celle-ci consiste à corriger, par un processus itératif, les valeurs des variables internes ainsi que les différentes variables observables après convergence du schéma de Newton-Raphson, afin de satisfaire le critère.

Les différentes grandeurs $\underline{\sigma}_n, \underline{R}_n, \underline{\varepsilon}_n^p, D_n$ à l'incrément n étant connues, reste à déterminer les grandeurs $\underline{\sigma}_{n+1}, \underline{R}_{n+1}, \underline{\varepsilon}_{n+1}^p, D_{n+1}$ à l'incrément $n+1$.

Initialement, nous avons à résoudre le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_\varepsilon = \dot{\underline{\varepsilon}}^p - \dot{\lambda}_p \frac{\underline{n}}{\sqrt{1-D}} = 0 \\ g_r = \dot{r} - \frac{\dot{\lambda}_p}{\sqrt{1-D}} (1 - b\tilde{r}) = 0 \\ g_D = \dot{D} - \dot{\lambda} \hat{Y}^* = 0 \\ h = \underline{\sigma} - (1-D)\underline{\Lambda} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p) = 0 \end{array} \right. \quad \text{I.142}$$

Afin de vérifier la fonction de charge suivante $f = J_2(\underline{\sigma}) - R - \sqrt{1-D}\sigma_y = 0$

Avec :

$$\hat{Y} = \frac{1}{(1-D)^\beta} \left(\frac{Y - Y_0}{S} \right)^s \quad \text{I.143}$$

et :

$$\underline{n} = \frac{\underline{S}}{\sqrt{\frac{2}{3} \underline{S} : \underline{S}}} \quad \text{I.144}$$

Le schéma de la θ Méthode revient à écrire, et ce quelque soit la variable $\underline{\sigma}, r, \underline{\varepsilon}^p, D$, sous la forme :

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_{n+1} - x_n \\ x_{n+g} &= (1-\theta)x_n - \theta x_{n+1} \end{aligned} \quad \text{I.145}$$

Pour $\theta = 1$ le système d'équation différentielle (I.142) à l'incrément "n+1" peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} g_\varepsilon &= \Delta \underline{\varepsilon}^p - \Delta \lambda_p \frac{\underline{n}_{n+1}}{\sqrt{1-D_{n+1}}} = 0 \\ g_r &= \Delta r - \frac{\Delta \lambda_p}{\sqrt{1-D_{n+1}}} (1 + b\tilde{r}) = 0 \\ g_D &= \Delta D - \Delta \lambda \hat{Y}_{n+1}^* = 0 \\ h &= \underline{\sigma}_{n+1} - (1-D_{n+1}) \underline{\Lambda} : (\underline{\varepsilon}_{n+1} - \underline{\varepsilon}_{n+1}^p) = 0 \end{aligned} \right. \quad \text{I.146}$$

Afin de vérifier la même fonction de charge $f = \sqrt{3J_2(\underline{\sigma}_{n+1})} - R_{n+1} - \sqrt{1-D_{n+1}} \sigma_y = 0$

Nous pouvons écrire le tenseur des contraintes, sous la forme incrémentale, décomposé en partie sphérique et déviatorique comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta \underline{S} &= 2\tilde{\mu} \Delta \underline{e} \\ \Delta P_H &= \frac{3\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}{3} \text{tr} \Delta \underline{\varepsilon} \end{aligned} \quad \text{I.147}$$

Le problème (I.146) est obtenu en remplaçant l'écriture différentielle sous forme incrémentale dans les équations (I.142). La partie sphérique de la contrainte n'ayant pas d'effet sur la plasticité, la prédiction élastique est vérifiée uniquement sur le déviateur de contrainte.

Prédiction élastique

Soit un incrément de déformation $\Delta \underline{\varepsilon}$, que nous supposons entièrement élastique ce qui revient à écrire :

$$\begin{cases} \Delta \underline{\varepsilon}^p = 0 \\ \Delta r = 0 \\ \Delta D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\varepsilon}_{n+1}^p = \underline{\varepsilon}_n^p \\ r_{n+1} = r_n \\ D_{n+1} = D_n \end{cases} \quad \text{I.148}$$

La contrainte d'essai correspondante s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{n+1}^* &= (1 - D_n) \underline{\underline{\Lambda}} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_n^p) \\ \underline{\sigma}_{n+1}^* &= (1 - D_n) K \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}_1 + 2G(1 - D_n) (\underline{e} - \underline{e}_n^p) \\ \text{Où } K &= \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \quad G = \mu \end{aligned} \quad \text{I.149}$$

Vérifiant le critère d'écoulement:

$$f_{n+1}(\underline{\sigma}_{n+1}^*, R_n, \underline{\varepsilon}_n^p, D_n) = J_2(\underline{\sigma}_{n+1}^*) - R_n - \sqrt{1 - D_n} \sigma_y = 0 \quad \text{I.150}$$

Cette valeur a pour but de déterminer la charge ou la décharge en calculant la valeur de la fonction seuil. Dans le cas où le critère est strictement négatif, le comportement est purement élastique couplé à l'endommagement. L'intégration est finie pour ce pas et la valeur de la contrainte est égale à :

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^* = (1 - D_n) \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\varepsilon}_{n+1} \quad \text{I.151}$$

Les variables internes et leurs variables associées restent constants :

$$\begin{cases} R_{n+1} = R_n \\ D_{n+1} = D_n \end{cases} \quad \text{I.152}$$

Par contre, dans le cas où le critère est positif, alors la solution est élastoplastique et une correction plastique devient nécessaire sur les variables $\underline{\sigma}, Y, R, D$ afin de vérifier le critère d'écoulement :

$$f_{n+1}(\underline{\sigma}_{n+1}, R_{n+1}, Y_{n+1}, D_{n+1}) = 0 \quad \text{I.153}$$

Correction plastique

Dans un premier temps, on ne considère que la partie déviatorique de la relation d'élasticité. La finalité est de résoudre le problème suivant :

$$\underline{S}_{n+1} = (1 - D_{n+1})\underline{S}_{n+1}^* - 2G\sqrt{1 - D_{n+1}}\Delta\lambda\underline{n}_{n+1} \quad (\text{a})$$

Où : $\underline{S}_{n+1}^* = 2Ge_{n+1}^*$

$$R_{n+1} = (1 - D_{n+1})\frac{Q}{1 + b\Delta\lambda}\left(r_n + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1 - D_{n+1}}}\right) \quad (\text{b}) \quad \text{I.154}$$

$$D_{n+1} = D_n + \Delta\lambda\left[\frac{Y - Y_0}{S}\right]^s \frac{1}{(1 - D_n)}$$

Ce qui constitue 8 équations non linéaires à 9 inconnues c'est-à-dire : Six contraintes, une variable écrouissage isotrope, l'endommagement et le multiplicateur plastique.

Une dernière équation résulte de la condition de charge qui doit être satisfaite à la fin de chaque pas :

$$f_{n+1}(\underline{\sigma}_{n+1}, R_{n+1}, Y_{n+1}, D_{n+1}) = J_2(\underline{\sigma}_{n+1}) - R_{n+1} - \sqrt{1 - D_{n+1}}\sigma_y = 0 \quad \text{I.155}$$

Avec :

$$\underline{R}_{n+1} = (1 - D_{n+1})Qr_{n+1} = (1 - D_{n+1})\frac{Q}{1 + b\Delta\lambda}\left(r_n + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1 - D_{n+1}}}\right) \quad \text{I.156}$$

$$J_2(\underline{\sigma}_{n+1}) = \sqrt{\frac{3}{2}}\underline{S}_{n+1} : \underline{S}_{n+1} \quad \text{I.157}$$

Pour résoudre ce système, deux méthodes sont présentées par [Ham00, Mar03, Phi03]. La première méthode, réduit le système d'équation à deux équations et deux inconnus, ceci par l'exploitation de quelques propriétés. La seconde méthode, par l'utilisation d'une hypothèse simplificatrice, qui permet de résumer le système d'équation à la résolution d'une équation à une inconnue.

Dans ce chapitre, nous allons détailler la formulation à deux équations.

$$\underline{\varepsilon}_{n+1}^p = \underline{\varepsilon}_n^p + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \underline{n}_{n+1} \quad \text{I.158}$$

Suivant les travaux de Simo et Taylor [Sim85], on a l'égalité suivante :

$$\underline{s}_{n+1} = (1-D_{n+1})\underline{s}_{n+1}^* - 2G\sqrt{1-D_{n+1}}\Delta\lambda\underline{n}_{n+1} \quad \text{I.159}$$

La multiplication de (I.155) par le vecteur normal à la surface de charge, nous obtenons :

$$\sqrt{\frac{3}{2}\underline{s}_{n+1}:\underline{s}_{n+1}} \left[\frac{\underline{s}_{n+1}}{\sqrt{\frac{2}{3}\underline{s}_{n+1}:\underline{s}_{n+1}}} \right] = \left[R_{n+1} + \sqrt{1-D_{n+1}}\sigma_y \right] \underline{n}_{n+1} \quad \text{I.160}$$

D'où :

$$\underline{s}_{n+1} = \frac{2}{3} \left[R_{n+1} + \sqrt{1-D_{n+1}}\sigma_y \right] \underline{n}_{n+1} \quad \text{I.161}$$

En remplaçant l'équation (I.161) dans (I.159), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \underline{s}_{n+1}^* &= \frac{2}{3} \frac{1}{(1-D_{n+1})} \left[R_{n+1} + \sqrt{1-D_{n+1}}\sigma_y + 3G\sqrt{1-D_{n+1}}\Delta\lambda \right] \underline{n}_{n+1} \\ \|\underline{s}_{n+1}^*\| &= \frac{2}{3} \frac{1}{(1-D_{n+1})} \left[R_{n+1} + \sqrt{1-D_{n+1}}\sigma_y + 3G\sqrt{1-D_{n+1}}\Delta\lambda \right] \end{aligned} \quad \text{I.162}$$

Avec ce résultat, il est possible de remplacer le tenseur inconnu \underline{n}_{n+1} par \underline{s}_{n+1}^* qui ne dépend que d'une variable scalaire ; inconnue $\Delta\lambda$.

En outre, la non-linéarité de tout le problème se restreint seulement aux deux équations scalaires :

$$\begin{cases} f(\Delta\lambda, D) = \|\underline{S}_{n+1}^*\|_z - \frac{2}{3} \frac{1}{(1-D_{n+1})} \left[R_{n+1} + \sqrt{1-D_{n+1}} \sigma_y + 3G\sqrt{1-D_{n+1}} \Delta\lambda \right] = 0 \\ g(\Delta\lambda, D) = D_{n+1} - D_n - \Delta\lambda \hat{Y}_{n+1} = 0 \end{cases} \quad \text{I.163}$$

Cela revient à écrire en remplaçant toutes les expressions :

$$\begin{cases} f(\Delta\lambda, D) = \|\underline{S}_{n+1}^*\|_z - \frac{2}{3} \left[\frac{Q}{1+b\Delta\lambda} \left(r_n + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \right) + \frac{1}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \sigma_y \right. \\ \left. + 3G \frac{1}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \Delta\lambda \right] \\ g(\Delta\lambda, D) = D_{n+1} - D_n - \Delta\lambda \hat{Y}_{n+1} \end{cases} \quad \text{I.164}$$

Ce qui nous ramène à un système à deux équations, non linéaires à deux inconnues $(\Delta\lambda, D_{n+1})$ avec :

$$\|\underline{S}_{n+1}^*\|_z = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{S}_{n+1}^* : \underline{S}_{n+1}^*} \quad \text{I.165}$$

$$\hat{Y}_{n+1} = \frac{1}{(1-D_{n+1})^\beta} \left(\frac{\langle Y_{n+1} - Y_0 \rangle}{S} \right)^s \quad \text{I.166}$$

Où $\langle Y_{n+1} - Y_0 \rangle$ est nulle si la différence est négative, ce qui entraîne un calcul non couplé par la résolution du système à une équation une inconnue, étant donnée que l'évolution de l'endommagement est nulle.

$$\begin{aligned} Y_{n+1} = \frac{1}{2} K \left(\text{tr} \underline{\varepsilon}_{n+1}^* \right)^2 + \frac{1}{2} 2G \left(e_{n+1}^* - \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1-D_{n+1}}} n_{n+1} \right) \left(e_{n+1}^* - \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1-D_{n+1}}} n_{n+1} \right) + \\ \frac{1}{2} \frac{Q}{(1+b\Delta\lambda)^2} \left(r_n + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \right)^2 \end{aligned} \quad \text{I.167}$$

Le développement limité en série de Taylor à l'ordre "un" des fonctions g et f constituant le système de deux équations à résoudre dans le programme, est donnée par:

$$\begin{cases} f^i + \left[\frac{\partial f}{\partial \Delta \lambda} \right]^i \delta \lambda + \left[\frac{\partial f}{\partial D_{n+1}} \right]^i \delta D = 0 \\ g^i + \left[\frac{\partial g}{\partial \Delta \lambda} \right]^i \delta \lambda + \left[\frac{\partial g}{\partial D_{n+1}} \right]^i \delta D = 0 \end{cases} \quad \text{I.168}$$

Pour y résoudre ce système, il est nécessaire de déterminer les expressions des dérivées partielles des deux fonctions f et g .

A partir de (I.164) les expressions $\left[\frac{\partial f}{\partial \Delta \lambda} \right]^i$ et $\left[\frac{\partial f}{\partial D_{n+1}} \right]^i$ sont données par :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial f}{\partial \Delta \lambda} \right]^i &= \frac{2}{3} \left[\frac{bQ}{(1+b\Delta\lambda)^2} \left[r_n + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \right] - \frac{1}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \left[\frac{Q}{1+b\Delta\lambda} + 3G \right] \right] \\ \left[\frac{\partial f}{\partial D_{n+1}} \right]^i &= -\frac{1}{3} \frac{1}{(1-D_{n+1})} \left[\frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \left(\frac{Q}{1+b\Delta\lambda} + 3G \right) + \frac{\sigma_y}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \right] \end{aligned} \quad \text{I.169}$$

Nous faisons de même pour la seconde équation :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial g}{\partial D_{n+1}} \right]^i &= 1 - \Delta\lambda \frac{\partial \hat{Y}_{n+1}}{\partial D_{n+1}} = 1 - \Delta\lambda \left(s \frac{\hat{Y}_{n+1}}{(Y_{n+1} - Y_0)} \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial D_{n+1}} + \beta \frac{\hat{Y}_{n+1}}{(1 - D_{n+1})} \right) \\ \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial D_{n+1}} &= -2G\Delta\lambda \left(\frac{\partial}{\partial D_{n+1}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-D_{n+1}}} n_{n+1} \right) \right) \left(e_{n+1}^* - \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1-D_{n+1}}} n_{n+1} \right) + \\ &\frac{Q}{4(1+b\Delta\lambda)^2} \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{(1-D_{n+1})^3}} \left(r_n + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \right) \end{aligned} \quad \text{I.170}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial D_{n+1}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-D_{n+1}}} n_{n+1} \right] &= \frac{1}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \frac{\partial}{\partial D_{n+1}} [n_{n+1}] + \frac{\partial}{\partial D_{n+1}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \right] \\ \frac{\partial}{\partial D_{n+1}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \right] &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(1-D_{n+1})^3}} \end{aligned} \quad \text{I.171}$$

$$\frac{\partial}{\partial D_{n+1}} [n_{n+1}] = \frac{1}{\| \underline{s}_{n+1}^* \|} \frac{\partial \underline{s}_{n+1}^*}{\partial D_{n+1}} - \frac{\underline{s}_{n+1}^*}{\| \underline{s}_{n+1}^* \|^2} \frac{\partial \| \underline{s}_{n+1}^* \|}{\partial D_{n+1}} \quad \text{I.172}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \|\underline{S}_{n+1}^*\|}{\partial D_{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial D_{n+1}} \left[\frac{2}{3} \left[\frac{Q}{1+b\Delta\lambda} \left(r_n + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \right) + \frac{1}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \sigma_y \right] \right. \\ &\quad \left. + 3G \frac{1}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \Delta\lambda \right] \\ &= - \left[\frac{\partial f}{\partial D_{n+1}} \right]^i \end{aligned} \quad \text{I.173}$$

$$\frac{\partial \underline{S}_{n+1}^*}{\partial D_{n+1}} = 0 \quad \text{I.174}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial D_{n+1}} [n_{n+1}] = \frac{\underline{S}_{n+1}^*}{\|\underline{S}_{n+1}^*\|^2} \left[\frac{\partial f_{n+1}}{\partial D_{n+1}} \right]^i \quad \text{I.175}$$

Faisant de même avec la fonction "g" par rapport au multiplicateur plastique.

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial g}{\partial \Delta\lambda} \right]^i &= -\hat{Y}_{n+1} - \Delta\lambda \left(\frac{1}{S} \right)^s \frac{s}{(1-D_{n+1})^\beta} (Y_{n+1} - Y_0)^{s-1} \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \Delta\lambda} \\ &= -\hat{Y}_{n+1} \left(1 + \frac{s \cdot \Delta\lambda}{(Y_{n+1} - Y_0)} \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \Delta\lambda} \right) \end{aligned} \quad \text{I.176}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \Delta\lambda} &= -2G \left(\frac{1}{\sqrt{1-D_{n+1}}} n_{n+1} + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \frac{\partial n_{n+1}}{\partial \Delta\lambda} \right) \left(e_{n+1}^* - \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1-D_{n+1}}} n_{n+1} \right) + \\ &\quad \frac{Q}{\sqrt{1-D_{n+1}} (1+b\Delta\lambda)^2} \left(r_n + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \right) - \frac{Qb}{\sqrt{1-D_{n+1}} (1+b\Delta\lambda)^3} \left(r_n + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \right)^2 \end{aligned} \quad \text{I.177}$$

$$\frac{\partial n_{n+1}}{\partial \Delta\lambda} = \frac{\partial}{\partial \Delta\lambda} \left[\frac{\underline{S}_{n+1}^*}{\|\underline{S}_{n+1}^*\|} \right] = \frac{1}{\|\underline{S}_{n+1}^*\|} \frac{\partial \underline{S}_{n+1}^*}{\partial \Delta\lambda} - \frac{\underline{S}_{n+1}^*}{\|\underline{S}_{n+1}^*\|^2} \frac{\partial \|\underline{S}_{n+1}^*\|}{\partial \Delta\lambda} \quad \text{I.178}$$

$$\frac{\partial \underline{S}_{n+1}^*}{\partial \Delta\lambda} = 0$$

D'où :

$$\frac{\partial n_{n+1}}{\partial \Delta \lambda} = -\frac{\underline{S}_{n+1}^*}{\|\underline{S}_{n+1}^*\|^2} \frac{\partial \|\underline{S}_{n+1}^*\|}{\partial \Delta \lambda} = -\frac{\underline{S}_{n+1}^*}{\|\underline{S}_{n+1}^*\|^2} \left[\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{1-D_{n+1}}} (H+3G) \right] = \frac{\underline{S}_{n+1}^*}{\|\underline{S}_{n+1}^*\|^2} \left[\frac{\partial f}{\partial \Delta \lambda} \right]^i \quad \text{I.179}$$

En remplaçant ces expressions ; nous obtenons :

$$\begin{aligned} \delta D &= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \Delta \lambda} \right)^i g^i - \left(\frac{\partial g}{\partial \Delta \lambda} \right)^i f^i \right] \left[\left(\frac{\partial f}{\partial D_{n+1}} \right)^i \left(\frac{\partial g}{\partial \Delta \lambda} \right)^i - \left(\frac{\partial g}{\partial D_{n+1}} \right)^i \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta \lambda} \right)^i \right]^{-1} \\ \delta \lambda &= - \left[f^i + \left(\frac{\partial f}{\partial D_{n+1}} \right)^i \delta D \right] \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \Delta \lambda} \right)^i \right]^{-1} \end{aligned} \quad \text{I.180}$$

Dans le cas des problèmes en contrainte plane, la déformation ε_{33} n'est pas déterminée par la cinématique, mais par la condition $\sigma_{33} = 0$. Ce qui revient à ajouter une troisième équation au système (I.164) de deux équations :

La loi de Hook généralisée suivant la direction indépendante est donnée par :

$$\sigma_{33} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\nu (\varepsilon_{11}^e + \varepsilon_{22}^e + \varepsilon_{33}^e) + (1-2\nu) \varepsilon_{33}^e \right] = 0 \quad \text{I.181}$$

Sachant que $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$

L'équation (I.181) peut s'écrire sous la forme :

$$\nu \left[(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) - (\varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{33}^p) \right] + (1-2\nu) (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^p) = 0 \quad \text{I.182}$$

Avec l'hypothèse de déformation plastique sans variation de volume c'est à dire $\varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{33}^p = 0$ nous pouvons écrire :

$$\nu (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + (1-2\nu) (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^p) = \nu (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + (1-\nu) \varepsilon_{33} - (1-2\nu) \varepsilon_{33}^p = 0 \quad \text{I.183}$$

d'où :

$$\varepsilon_{33} + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) \varepsilon_{33}^p = 0 \quad \text{I.184}$$

Ainsi nous obtenons la troisième équation sous la forme suivante :

$$h(\Delta\lambda, D, \varepsilon_{33}) = \varepsilon_{33} + \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - \left(1 - \frac{\nu}{1-\nu}\right) \left(\varepsilon_{n33}^p + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1-D_{n+1}}} N_{33} \right) = 0 \quad \text{I.185}$$

Pour des raisons de simplicité nous ajoutons cette dernière équation au système d'équation (I.168) par l'ajout des expressions manquantes soit : $\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{33}}$ $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{33}}$ et nous déterminons les expressions : $\frac{\partial h}{\partial D}$, $\frac{\partial h}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{33}}$. Pour plus de clarté nous réécrivons le nouveau système d'équation :

$$\begin{cases} f^i + \left[\frac{\partial f}{\partial \Delta\lambda} \right]^i \delta\lambda + \left[\frac{\partial f}{\partial D_{n+1}} \right]^i \delta D + \left[\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{33}} \right]^i \delta \varepsilon_{33} = 0 \\ g^i + \left[\frac{\partial g}{\partial \Delta\lambda} \right]^i \delta\lambda + \left[\frac{\partial g}{\partial D_{n+1}} \right]^i \delta D + \left[\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{33}} \right]^i \delta \varepsilon_{33} = 0 \\ h^i + \left[\frac{\partial h}{\partial \Delta\lambda} \right]^i \delta\lambda + \left[\frac{\partial h}{\partial D_{n+1}} \right]^i \delta D + \left[\frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{33}} \right]^i \delta \varepsilon_{33} = 0 \end{cases} \quad \text{I.186}$$

La résolution de ce système d'équation, nous conduit aux expressions suivantes dans les deux cas de comportements :

Comportement couplé ($Y - Y_0 > 0$):

$$\delta D = \left(f^i + \left[\frac{\partial f}{\partial \Delta\lambda} \right]^i \left[\frac{\partial h}{\partial \Delta\lambda} \right]^{-1} K + \left[\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{33}} \right]^i A C \left(\left[\frac{\partial f}{\partial \Delta\lambda} \right]^i \left[\frac{\partial h}{\partial \Delta\lambda} \right]^{-1} L + \left[\frac{\partial f}{\partial D_{n+1}} \right]^i + \left[\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{33}} \right]^i B C \right)^{-1} \quad \text{I.187}$$

$$\delta \varepsilon_{33} = (A + B \delta D) * C \quad \text{I.188}$$

$$\delta \lambda = (K + L \delta D) \left[\frac{\partial h}{\partial \Delta\lambda} \right]^{i-1} \quad \text{I.189}$$

où

$$\begin{aligned}
 A &= - \left(\left[\frac{\partial g}{\partial \Delta \lambda} \right]^i f^i - \left[\frac{\partial f}{\partial \Delta \lambda} \right]^i \right) g^i \\
 B &= - \left(\left[\frac{\partial g}{\partial \Delta \lambda} \right]^i \left[\frac{\partial f}{\partial D_{n+1}} \right]^i - \left[\frac{\partial f}{\partial \Delta \lambda} \right]^i \left[\frac{\partial g}{\partial D_{n+1}} \right]^i \right) \\
 C &= \left(\left[\frac{\partial g}{\partial \Delta \lambda} \right]^i \left[\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{33}} \right]^i - \left[\frac{\partial f}{\partial \Delta \lambda} \right]^i \left[\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{33}} \right]^i \right)^{-1} \\
 K &= - \left(h^i + \left[\frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{33}} \right]^i A \right) \\
 L &= - \left(\left[\frac{\partial h}{\partial D_{n+1}} \right]^i + \left[\frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{33}} \right]^i CB \right)
 \end{aligned}
 \tag{I.190}$$

Dans le cas ($Y - Y_0 \leq 0$) il sera question d'un calcul non couplé, la résolution se restreindra aux deux équations f et h .

Ceci peut être résumé comme suit :

Début du pas :

Données $\Delta u, P_n^H, \underline{S}_n, p_n, D_n$ inconnues $P_{n+1}^H, \underline{S}_{n+1}, p_{n+1}, D_{n+1}$

1- Prédiction élastique :

$$\sigma = (1 - D) \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$p = p_n$$

$$D = D_n$$

Test $f(\underline{\sigma}, P, D) \leq 0$

Aller fin de pas

Test $f(\underline{\sigma}, P, D) > 0$ aller à 2

2-Initialisation des variables

$$R = R_n$$

$$p = p_n$$

$$D = D_n$$

3-Correction plastique (Méthode de retour Radial) :

Résolution du système par le schéma de Newton Raphson :

(Les expressions entre parenthèses concernent l'état de contraintes planes)

3-2-1 Boucle sur l'itération $k=k+1$

3-2-2 initialiser les variables $\Delta\dot{\lambda} = 0, \Delta D = 0, \dot{\lambda} = 0, (\Delta\varepsilon_{33} = 0)$

$$\text{Sinon } f'_{\lambda}{}^{(k)} = \frac{\partial f}{\partial \lambda}, g'_{\lambda}{}^{(k)} = \frac{\partial g}{\partial \lambda}, (H'_{\lambda}{}^{(k)} = \frac{\partial H}{\partial \lambda})$$

$$f'_{D}{}^{(k)} = \frac{\partial f}{\partial D}, g'_{D}{}^{(k)} = \frac{\partial g}{\partial D}, (H'_{D}{}^{(k)} = \frac{\partial H}{\partial D})$$

$$(f'_{\varepsilon_{33}}{}^{(k)} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{33}}, g'_{\varepsilon_{33}}{}^{(k)} = \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{33}}, H'_{\varepsilon_{33}}{}^{(k)} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{33}})$$

Calculer de $\Delta\dot{\lambda}$ et $\Delta D, (\Delta\varepsilon_{33})$

$$\dot{\lambda} = \dot{\lambda} + \Delta\dot{\lambda} \text{ et } D = D + \Delta D, (\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33} + \Delta\varepsilon_{33})$$

3-2-3 évaluer f^k et $g^k, (H^k)$ et les erreurs relatives

$$\eta_f = f^k / \|S_{n+1}^{*(k)}\| \text{ et } \eta_g = g^k / D_n^{(k)}$$

3-2-4 Si $(\eta_f \leq \eta_f^0 \text{ et } \eta_g \leq \eta_g^0 \text{ et } (\eta_H \leq \eta_H^0))$ ou

$$(f^k \leq 10^{-9} \text{ et } g^k \leq 10^{-9}, (H^k \leq 10^{-9}))$$

Fin du pas, convergence des Equations Différentielles Ordinaires

Correction plastique (sortie de la boucle)

Sinon recommencer 3.2.2

Algorithme de calcul de $\Delta\lambda$ et D par la méthode de Newton-Raphson

6.3. Calcul de l'Opérateur tangent consistant

La matrice de rigidité tangente constitue une étape importante dans la résolution des équations non linéaire d'équilibre par la méthode de Newton Raphson [Sim85]. L'utilisation de la matrice tangente continue engendre la perte de la convergence quadratique. La vitesse de convergence de la méthode d'itération de Newton Raphson est directement reliée à la manière dont est calculée cette matrice, donnée par l'expression ci après :

$$K_T = \int [B]^T \left(\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \varepsilon} \right) [B] J dV_0 \quad \text{I.191}$$

Il est clair que dans ce qui va suivre, le but est la détermination de l'expression de $\frac{d\Delta \sigma_{n+1}}{d\Delta \varepsilon_{n+1}}$ qui n'est autre que la matrice tangente jacobienne reliant l'incrément de déformation à l'incrément de contrainte. Il est à noter que plusieurs méthodes pour atteindre ce but existent, dans le présent travail nous nous intéresserons à la méthode quasi analytique [Dog93, Har93, Aur94, Cha96, Har97]. Cette méthode demande plus de travail, mais elle est aussi la plus performante du point de vue numérique [Bel05].

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta \sigma_{n+1}}{d\Delta \varepsilon_{n+1}} &= K_T = \frac{d}{d\varepsilon_{n+1}} \left[(1 - D_{n+1}) (K_{tr} \underline{\varepsilon}_{n+1}^*) \right] + (1 - D_{n+1}) 2G \underline{e}_{n+1}^* - 2G \sqrt{1 - D_{n+1}} \Delta \lambda \underline{n}_{n+1} \Big] \\ &= (1 - D_{n+1}) \underline{\underline{\Lambda}} + \left[\frac{G \Delta \lambda}{\sqrt{1 - D_{n+1}}} \underline{n}_{n+1} - \underline{S}_{n+1}^* - K \underline{1} \otimes \underline{1} : \underline{\varepsilon}_{n+1}^* \right] \otimes \frac{dD_{n+1}}{d\varepsilon_{n+1}} \\ &\quad - 2G \sqrt{1 - D_{n+1}} \Delta \lambda \frac{d\underline{n}_{n+1}}{d\varepsilon_{n+1}} - 2G \sqrt{1 - D_{n+1}} \underline{n}_{n+1} \otimes \frac{d\Delta \lambda}{d\varepsilon_{n+1}} \end{aligned} \quad \text{I.192}$$

Nous pouvons décomposer ce calcul en plusieurs termes.

$$\frac{d\Delta \sigma_{n+1}}{d\Delta \varepsilon_{n+1}} = K_T = (1 - D_{n+1}) \underline{\underline{\Lambda}} + \underline{\underline{TERME1}} - \underline{\underline{TERME2}} - \underline{\underline{TERME3}}$$

où

$$\underline{\underline{TERME1}} = \left[\frac{G \Delta \lambda}{\sqrt{1 - D_{n+1}}} \underline{n}_{n+1} - \underline{S}_{n+1}^* - K \underline{1} \otimes \underline{1} : \underline{\varepsilon}_{n+1}^* \right] \otimes \frac{dD_{n+1}}{d\varepsilon_{n+1}}$$

$$\underline{\underline{TERME2}} = 2G\sqrt{1-D_{n+1}} \Delta\lambda \frac{dn_{n+1}}{d\varepsilon_{n+1}} \quad \text{I.193}$$

$$\underline{\underline{TERME3}} = 2G\sqrt{1-D_{n+1}} n_{n+1} \otimes \frac{d\Delta\lambda}{d\varepsilon_{n+1}}$$

En premier lieu définissons l'expression $\frac{\partial n_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}}$:

$$\frac{\partial n_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{n+1}} \left[\frac{\underline{S}_{n+1}}{\sqrt{\frac{2}{3} \underline{S}_{n+1} : \underline{S}_{n+1}}} \right] = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} \underline{S}_{n+1} : \underline{S}_{n+1}}} \frac{\partial \underline{S}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} - \frac{\left(\frac{2}{3} \underline{S}_{n+1} : \frac{\partial \underline{S}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \right)}{\left(\frac{2}{3} \underline{S}_{n+1} : \underline{S}_{n+1} \right)^{3/2}} \underline{S}_{n+1}$$

$$\frac{\partial \underline{S}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{n+1}} \left[2G \underline{I}^{dev} \underline{\varepsilon}_{n+1}^e \right] = 2G \underline{I}^{dev} \quad \text{I.194}$$

Soit :

$$\frac{\partial n_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} \underline{S}_{n+1} : \underline{S}_{n+1}}} \left[\frac{\partial \underline{S}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} - \frac{2}{3} \frac{\left(\frac{\partial \underline{S}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} : \underline{S}_{n+1} \right)}{\left(\frac{2}{3} \underline{S}_{n+1} : \underline{S}_{n+1} \right)} \otimes \underline{S}_{n+1} \right]$$

$$\frac{\partial n_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{n+1}} \left[\frac{\underline{S}_{n+1}}{\sqrt{\frac{2}{3} \underline{S}_{n+1} : \underline{S}_{n+1}}} \right] = \frac{2G}{\sqrt{\frac{2}{3} \underline{S}_{n+1} : \underline{S}_{n+1}}} \left[\underline{I}^{dev} - \frac{2}{3} n_{n+1} \otimes n_{n+1} \right] \quad \text{I.195}$$

Pour déterminer l'expression de $\frac{\partial D_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}}$ et $\frac{\partial n_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}}$, pour nous permettre de formuler

l'expression de l'opérateur tangent consistant, nous dérivons par rapport à la déformation total le système de deux équations (I.168) comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{\partial f^i}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} + \left[\frac{\partial f}{\partial \Delta \lambda} \right]^i \frac{d\Delta \lambda}{d\underline{\varepsilon}_{n+1}} + \left[\frac{\partial f}{\partial D_{n+1}} \right]^i \frac{dD_{n+1}}{d\underline{\varepsilon}_{n+1}} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{\partial g^i}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} + \left[\frac{\partial g}{\partial \Delta \lambda} \right]^i \frac{d\Delta \lambda}{d\underline{\varepsilon}_{n+1}} + \left[\frac{\partial g}{\partial D_{n+1}} \right]^i \frac{dD_{n+1}}{d\underline{\varepsilon}_{n+1}} = 0 \end{cases} \quad \text{I.196}$$

D'où :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{2}{3} 2GI_{\equiv}^{dev} : \underline{n}_{n+1} + \left[\frac{\partial f}{\partial \Delta \lambda} \right]^i \frac{d\Delta \lambda}{d\underline{\varepsilon}_{n+1}} + \left[\frac{\partial f}{\partial D_{n+1}} \right]^i \frac{dD_{n+1}}{d\underline{\varepsilon}_{n+1}} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} = -\frac{s\Delta \lambda}{S} \left(\frac{Y}{S} \right)^{s-1} \frac{1}{(1-D_{n+1})^\beta} \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} + \left[\frac{\partial g}{\partial \Delta \lambda} \right]^i \frac{d\Delta \lambda}{d\underline{\varepsilon}_{n+1}} + \left[\frac{\partial g}{\partial D_{n+1}} \right]^i \frac{dD_{n+1}}{d\underline{\varepsilon}_{n+1}} = 0 \end{cases} \quad \text{I.197}$$

Avec :

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= \frac{1}{2} K \left(r \underline{\varepsilon}_{n+1}^* \right) + \frac{1}{2} 2G \left(\underline{e}_{n+1}^* - \frac{\Delta \lambda}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \underline{n}_{n+1} \right) \left(\underline{e}_{n+1}^* - \frac{\Delta \lambda}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \underline{n}_{n+1} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{Q}{(1+b\Delta \lambda)} \left(r_n + \frac{\Delta \lambda}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \right)^2 \end{aligned} \quad \text{I.198}$$

et :

$$\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} = Ktr \underline{\varepsilon}_{n+1}^* + 2G \left(\underline{I}_{\equiv}^{dev} - \frac{\Delta \lambda}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \frac{\partial \underline{n}_{n+1}}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} \right) : \left(\underline{e}_{n+1}^* - \frac{\Delta \lambda}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \underline{n}_{n+1} \right) \quad \text{I.199}$$

où

$$\frac{\partial \underline{n}_{n+1}}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{1}{\|S_{n+1}^*\|} \frac{\partial S_{n+1}^*}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{1}{\|S_{n+1}^*\|} 2GI_{\equiv}^{dev} \quad \text{I.200}$$

Ainsi nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \frac{dD_{n+1}}{d\underline{\varepsilon}_{n+1}} &= - \left(\frac{\partial f^i}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} \left[\frac{\partial g}{\partial \Delta \lambda} \right]^i - \frac{\partial g^i}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} \left[\frac{\partial f}{\partial \Delta \lambda} \right]^i \right) \left(\left[\frac{\partial g}{\partial \Delta \lambda} \right]^i \left[\frac{\partial f}{\partial D_{n+1}} \right]^i - \left[\frac{\partial g}{\partial D_{n+1}} \right]^i \left[\frac{\partial f}{\partial \Delta \lambda} \right]^i \right)^{-1} \\ \frac{d\Delta \lambda}{d\underline{\varepsilon}_{n+1}} &= - \left(\frac{\partial f^i}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} + \left[\frac{\partial f}{\partial D_{n+1}} \right]^i \frac{dD_{n+1}}{d\underline{\varepsilon}_{n+1}} \right) \left[\frac{\partial f}{\partial \Delta \lambda} \right]^i \end{aligned} \quad \text{I.201}$$

Ce qui nous permet de définir complètement l'opérateur tangent.

6.4. Traitement numérique de la fissuration

Que deviennent ces calculs lorsqu'au cours de la résolution s'amorce puis se propage une fissure ? Quand le dommage atteint une valeur critique ($D=0.99$) en un point de Gauss, la contrainte de Cauchy vaut est porté à zéro et la déformation élastique résiduelle est restituée, donc le point n'intervient plus ni dans le calcul du résidu, ni dans le calcul de la matrice tangente.

Si tous les points d'un même élément sont endommagés, cela signifie que l'élément en question ne peut plus supporter la moindre effort ; c'est l'apparition du premier "trou" numérique. La solution consiste en la suppression des éléments et des nœuds concernés. Un problème survient lorsque tous les éléments entourant le même nœud sont totalement endommagés : le terme de la diagonale de la matrice tangente (pivot) correspondant à ce nœud est nul et on obtient alors une matrice tangente singulière (perte de consistance). Pour pallier cette singularité, nous utilisons la technique de la pénalisation.

6.5. Elaboration du programme de calcul

Nous avons utilisé initialement le programme de calcul des structures élastoplastique développé par Owen [Owe80] que nous avons modifié ensuite pour l'implémentation de notre modèle élastoplastique endommageable à écrouissage isotrope non linéaire. Ce programme sera interfaçable avec le logiciel post traiteur GID Ceci a été fait par l'ajout de "blocs" indépendants en se conformant aux notices de programmation et en respectant l'architecture du programme.

7. Validation et application à des structures

Dans ce qui suit dans un premiers temps, nous allons nous consacré à la validation de l'ensemble de la modélisation présenté sur des exemples simples. Ces exemples essentiellement académiques visent principalement à valider les différents couplages étudiés.

On abordera :

- La validation des algorithmes d'intégration des modèles vis-à-vis de la description des non linéarités matérielle et géométrique,
- Comparaison des calculs couplés et non couplés.

Dans une seconde partie, par le biais d'un essai de traction d'une plaque nous allons tenter de mettre en évidence l'influence du maillage sur la réponse globale et sur la répartition des variables observables et interne de la structure. Puis toujours pour montrer l'influence du maillage sur la répartition de l'endommagement nous introduisant sur la plaque un défaut initiale pour orienté la bande de localisation de l'endommagement, trois maillages seront étudié.

7.1. Validation de l'algorithme d'intégration sur un EVR

L'application de ce modèle sur un matériau réel se fait en étalonnant la courbe expérimentale (du matériau qu'on veut étudier) à la courbe numérique en faisant varier les paramètres β , S , s , Y_0 . Comme ceci ne fait pas parti des objectifs de ce travail, nous choisissons un jeu de paramètre quelconque pour pouvoir faire une comparaison entre la solution analytique que nous obtenons, dans des conditions particulières de chargement et la solution numérique obtenu à partir du programme. Ceci va se faire en considérant la Traction Uniaxiale de E.V.R en test homogène comme montré à la Fig.(I-1). Le Tableau I.2 présente le jeu de paramètres matériau choisi pour l'étude.

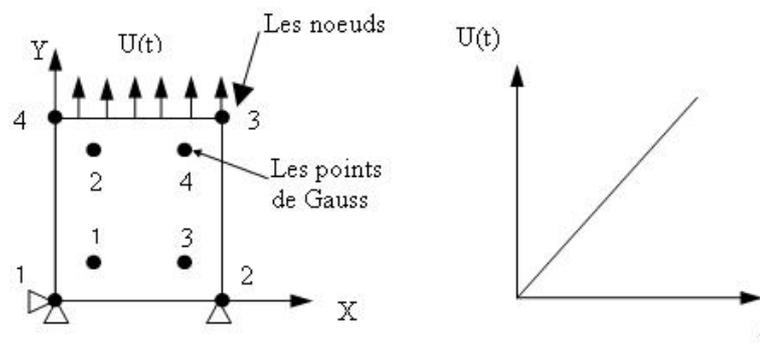


Figure I-1 : Schématisation de l'élément de volume représentatif et le schéma de chargement en traction monotone

Elasticité (3 paramètres)			Plasticité (2 paramètres)		Dommage(4 paramètres)			
E (MPa)	ν	σ_y (MPa)	Q (MPa)	b	β	S	s	Y_0 (MPa)
190 000	0.3	260	2 100	1	1.2	0.5	0.5	6

Tableau I-2 : Caractéristiques mécaniques

Pour valider l'algorithme d'intégration, nous recherchons des conditions particulières de sollicitation dont les solutions analytiques sont faciles est bien connue, que nous comparons aux résultats fournis par la simulation.

Pour justifier une traction uniaxiale en contrainte plane, nous restons toujours dans le cadre d'un test homogène, cela revient à définir les mêmes conditions aux limites que ceux illustrés par la Fig. I-1. Ceci nous permet d'écrire ce qui suit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_H = \frac{1}{3}\sigma, \quad \underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{bmatrix} \quad \text{I.202}$$

La contrainte de von Mises, la fonction de triaxialité ainsi que l'énergie élastique restituée peuvent s'écrire comme suite :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{eq} &= \sqrt{\frac{3}{2}} S : S = \sigma \\ \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} &= \frac{1}{3} \\ R_v &= \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 = 1 \end{aligned} \right\} Y_e = \frac{\sigma^2}{2E(1-D)} \quad \text{I.203}$$

La contrainte d'endommagement (I.105) est alors identique à la contrainte de von Mises:

$$\sigma^* = R_v * \sigma_{eq} = \sigma_{eq}$$

Les résultats de la simulation, dans le cas de la contrainte plane, que ce soit en comportement couplé ou non couplé illustre ce cas de figure. La courbe contrainte d'endommagement équivalente est confondue avec la courbe contrainte de von Mises, comme le montre la Fig.(I-2).

La Fig.(I-3) illustré l'écart entre la contrainte d'endommagement et la contrainte de plasticité selon von Mises, dans le cas de la déformation plane, cette écart est en augmentation en premier lieu jusqu'à atteindre une valeur maximale à la saturation de la contrainte de von mises pour chuter d'une manière adoucissante et s'annuler avant la rupture de EVR. Cet écart est induit par la triaxialité des contraintes qui augmente en déformation plane [Bar80]. Dans ce cas de figure, nous pouvons conclure que la rupture à eu lieu toujours en contrainte plane quelque soit l'hypothèse de l'état de sollicitation initiale.

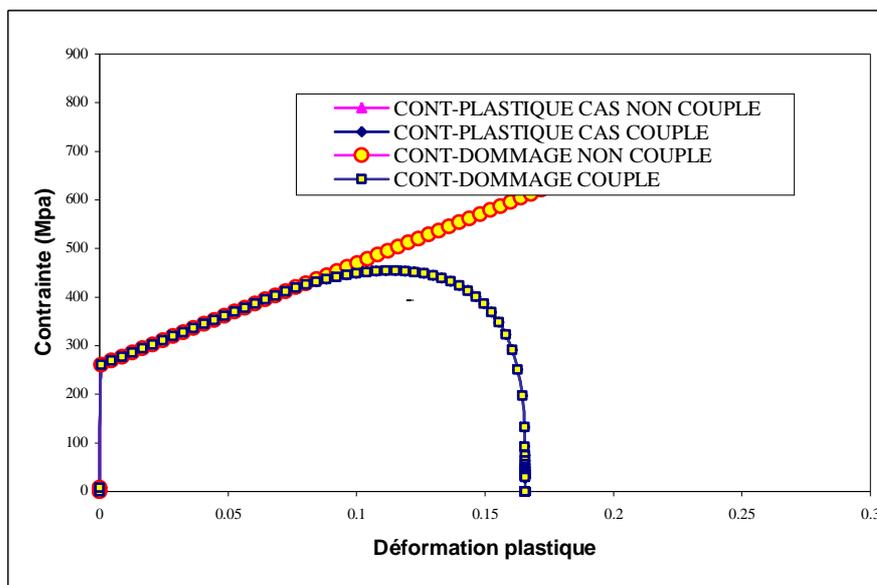


Figure I-2 : Contraintes Equivalentes-Déformation Plastiques Equivalentes en état de contrainte plane

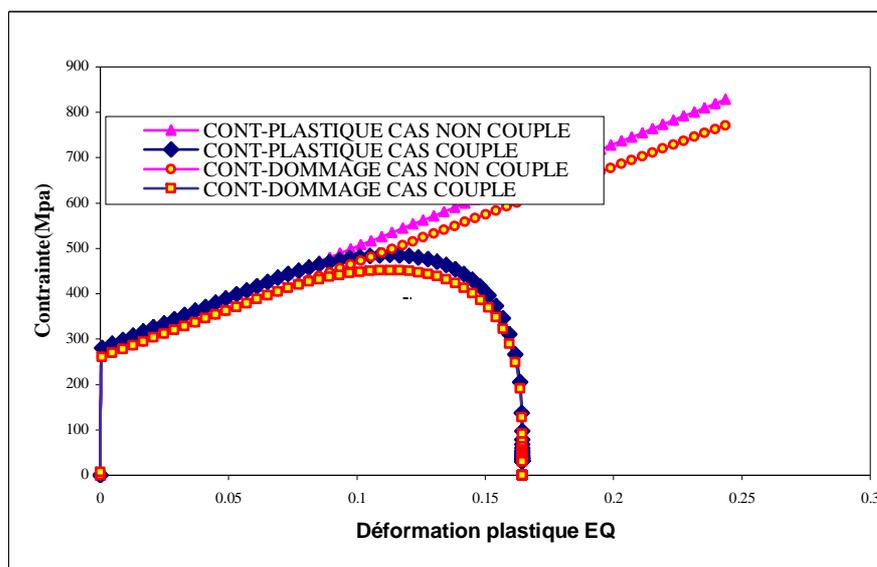


Figure I-3 : Contraintes équivalentes - Déformation Plastiques équivalentes en déformation plane.

Influence du couplage sur le modèle

Dans ce paragraphe, en utilisant le test de la Fig.(I-1) et les caractéristiques du Tableau(I-2), nous présentons l'évolution des variables internes dans le cas couplé et non couplé :

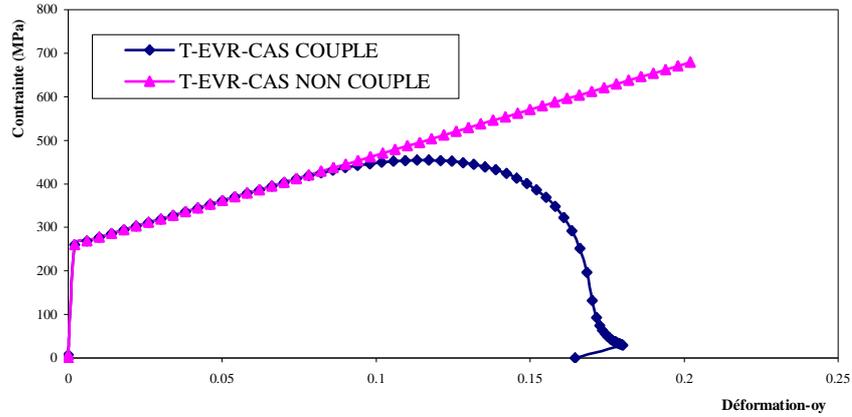


Figure I-4 : Courbe Contrainte Déformation suivant l'axe de sollicitation

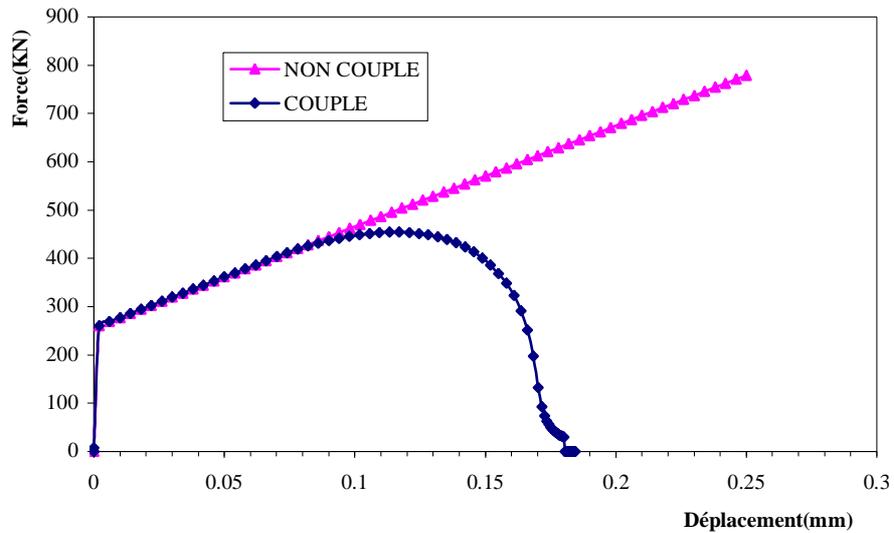


Figure I-5 : Courbe Force Déplacement suivant l'axe de sollicitation

La courbe Contrainte-Déformation illustrée par la Fig.(I-4). la courbe Force-Déplacement Fig.(I-5), fournissent le résultat uniforme attendu dans le cas d'un test homogène, pour chaque cas de figure de comportement couplé et non couplé. L'évolution de toutes les variables observables et internes sont uniformes sur tous les points de Gauss de L'E.V.R. durant toute

la phase de chargement, jusqu'à rupture simultanée ($D=0.99$), ceci conformément aux restrictions de réalisation d'un test homogène.

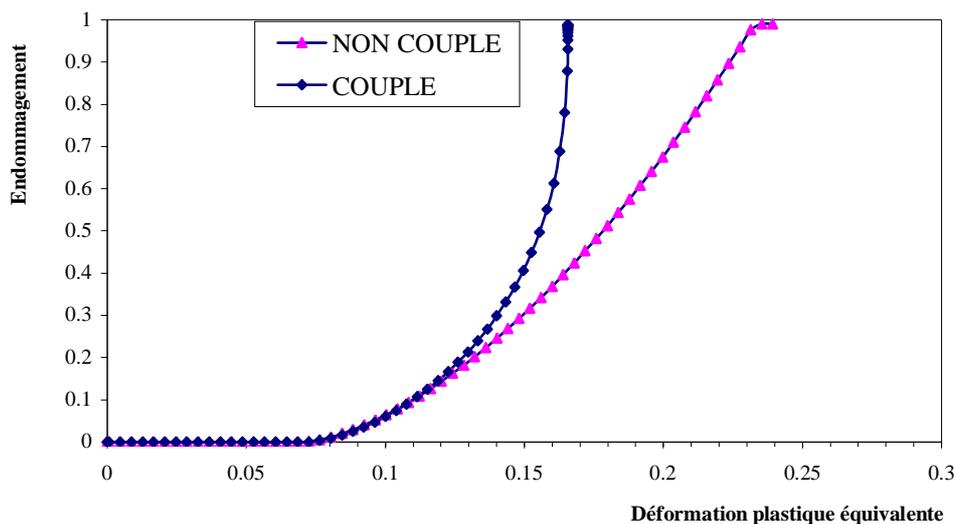


Figure I-6 : Courbe Endommagement Déformation plastique équivalente

L'endommagement se manifeste sur les courbes des Fig.(I-4, I.5) par un effet adoucissant sur les contraintes dans le cas couplé, induisant la diminution progressive et faible du niveau de contraintes évoluant à une diminution brutale, quand l'endommagement approche la valeur critique de rupture. Dans le cas non couplé, la contrainte augmente indéfiniment. Par ailleurs, nous vérifions aisément que le couplage comportement endommagement croît la vitesse d'endommagement, ce qui est illustré sur la Fig.(I-6) L'endommagement évolue plus rapidement dans le cas couplé que dans le cas non couplé

7.2. Applications

7.2.1 Eprouvette en traction

Dans ce paragraphe, on applique le modèle aux calculs d'une structure simple; celle d'une plaque non homogène en traction plane. On ne modélise que la partie utile de l'éprouvette, c'est-à-dire qu'on néglige l'influence des zones de raccord de cette partie aux points d'ancrage

de l'éprouvette. Malgré la simplicité de l'essai sur le plan numérique la plaque en traction reste l'exemple le plus instable du point de vu calcul. Les dimensions de l'éprouvette sont de 3x1 (mm). L'étude va se faire avec trois maillages 128, 204 et 650 éléments.

La Fig.(I-8) montre l'évolution de la force en fonction du déplacement pour chaque simulation. Nous notons, que la solution est homogène et les courbes se superposent quelque soit le maillage et ce jusqu'à apparition de la striction "saturation de la courbe force-déplacement". A partir de ce point nous observons un point bifurcation à partir duquel la solution n'est plus unique, la solution devient dépendante du maillage considéré. Cette dépendance vis-à-vis du maillage peut être expliquée par le fait que : plus le maillage est fin, plus l'élément de surface à endommager est petit, alors l'éprouvette aura tendance à se rompre plus rapidement [Big91]. En plus a partir de ce point la conduite des calculs devient difficile et la solution devient instable.

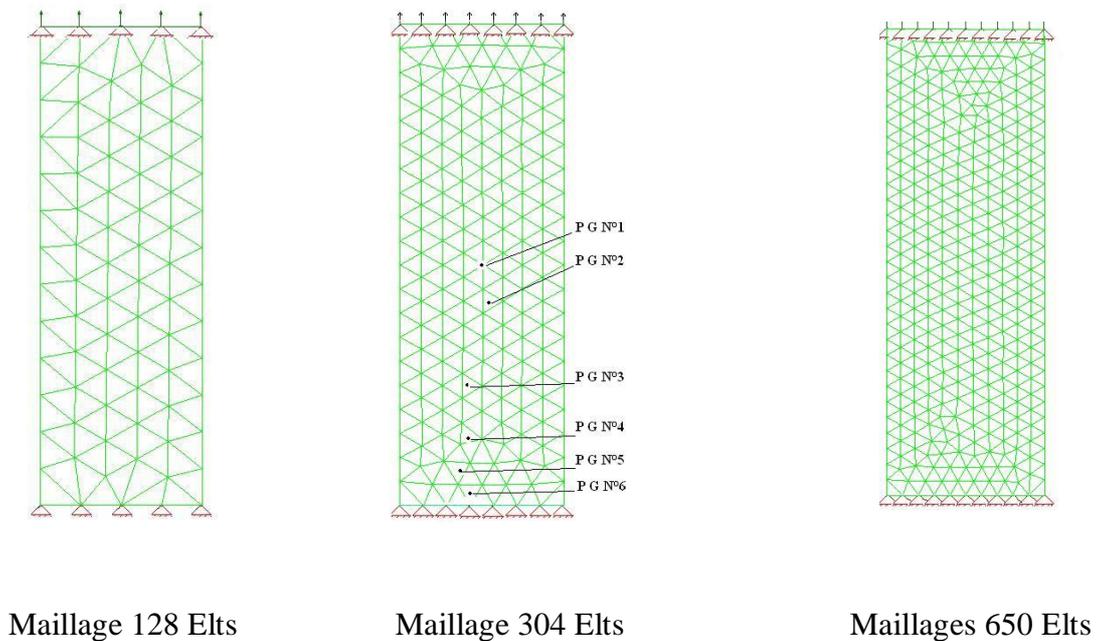


Figure I-7 : Discrétisations spatiales, chargement et conditions aux limites

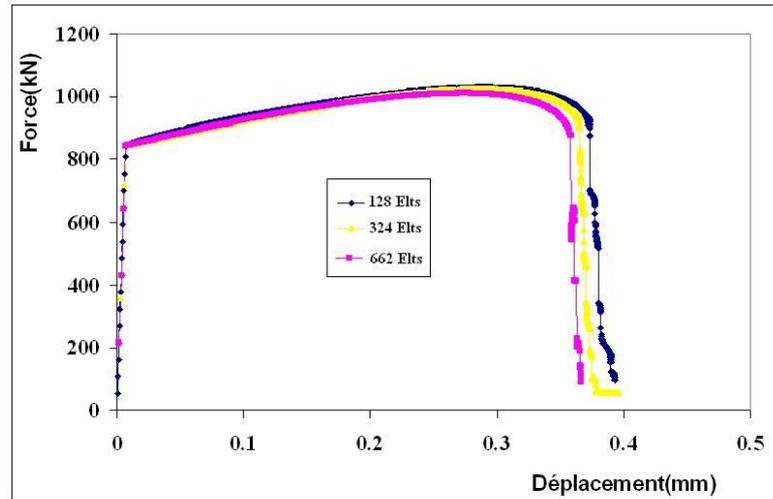
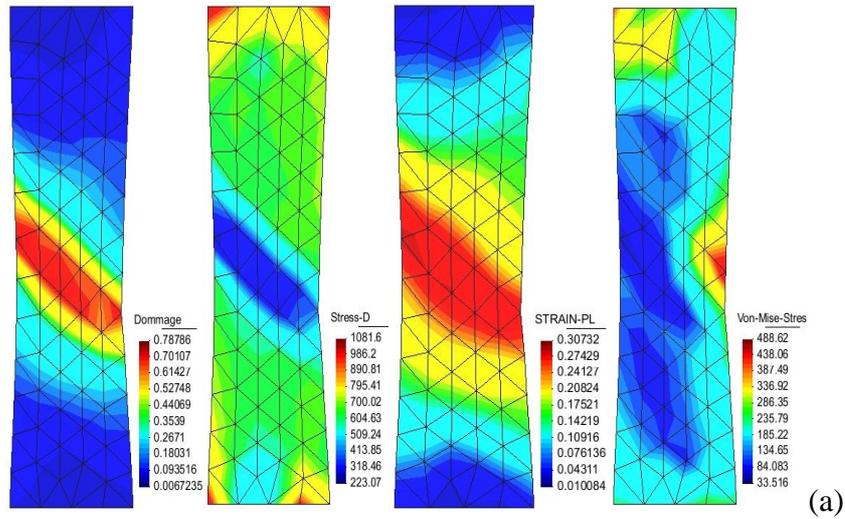
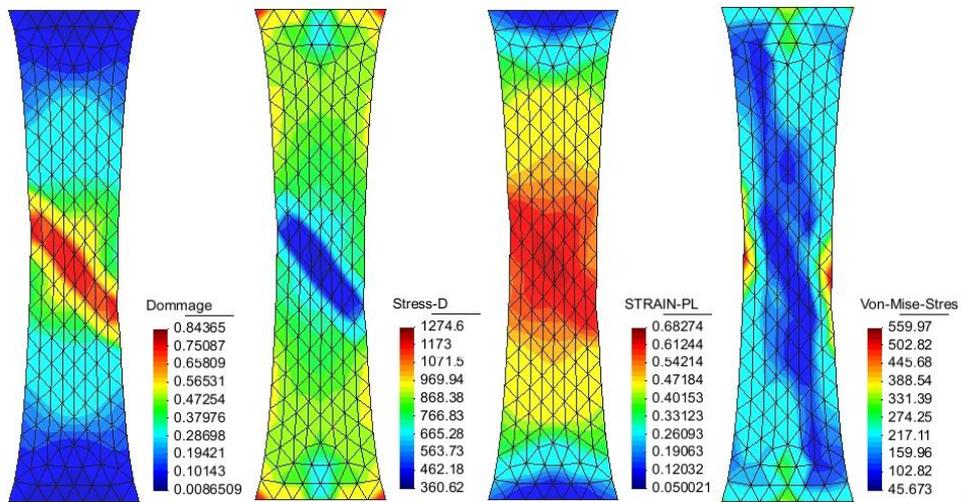


Figure I-8 : Réponse (Force-Déplacement) numérique pour les trois maillage

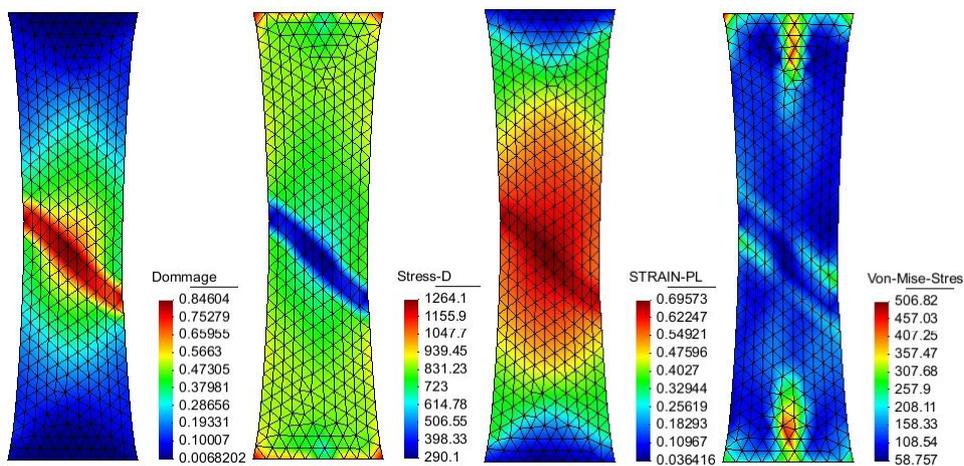
Les Fig.(I.9) présentent répartition de l'endommagement, de la contrainte de dommage, de la déformation plastique équivalente et de la contrainte de von Mises respectivement pour les trois maillages étudiés. Les résultats de la simulation présentent des résultats analogues, l'évolution de toutes les variables sont croissantes monotones sans présence de saturation, exception faite pour la variable d'endommagement que nous limitons à 0.99, pour éviter des divisions par zéro. L'endommagement ainsi introduit, s'initie dans la zone centrale de l'éprouvette en respectant la symétrie. En approchant la rupture une bande de localisation du dommage (éventuellement pour la contrainte de dommage et la déformation cumulée) se fait selon une bande inclinée d'épaisseur égale à la largeur de l'élément. Ce qui fait que la largeur de localisation ne dépasse jamais la taille du maillage. Plus la taille du maillage est petite (plus le maillage est fin), plus la largeur de la bande de localisation tend vers zéro. Au moment de la rupture nous constatons que la contrainte est quasiment nulle sur toute l'éprouvette, cela est dû au fait que à la rupture de la plaque, point de formation de la bande de localisation et de charge nulle, l'éprouvette se décharge d'une manière élastique.



(a)



(b)



(c)

Figure I-9 : Résultats des iso-valeurs dans le cas des maillages

a) 128 Eléments b) 304 Eléments c) 650 Eléments

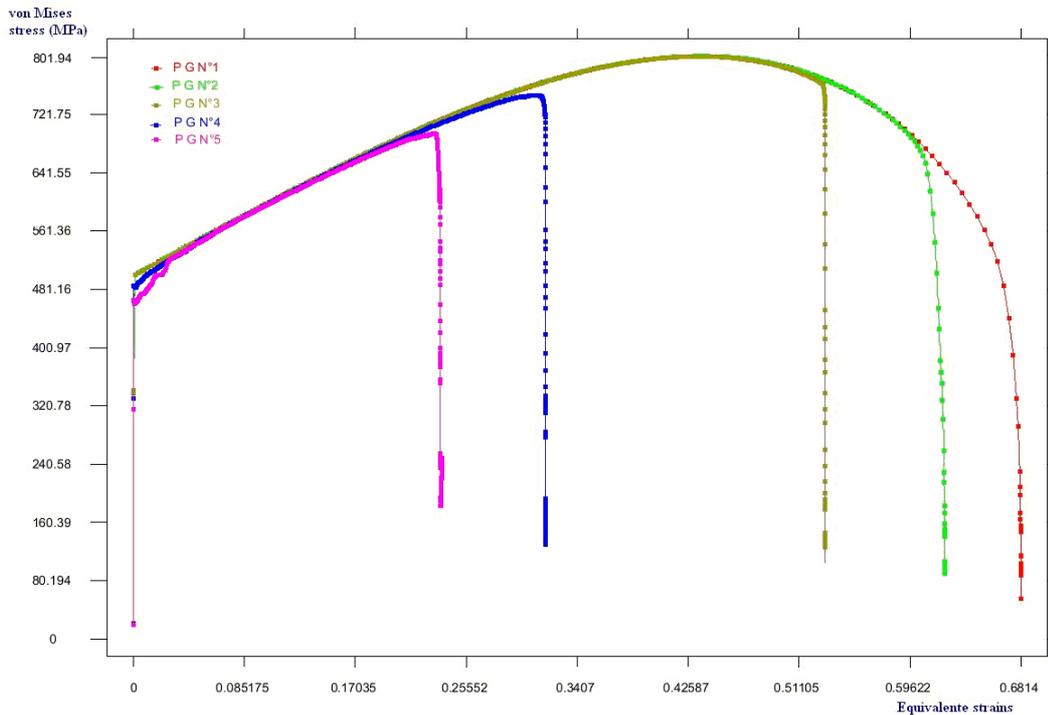


Figure I-10 : Réponse dans et hors des bandes de localisation

La Fig.(I-10) présente l'évolution de la contrainte équivalente en fonction de la déformation équivalente, dans le cas du maillage à 304 Eléments pour 6 points de Gauss. Le Point de Gauss N°1 (P G N°1) se situe dans la zone de la localisation, le P G N° 2 se situe juste après la bande, par contre les points 3, 4, 5 et 6 s'éloignent de cette bande jusqu'a atteindre l'extrémité du bas de la plaque comme le montre la Fig.(I-7-b).

7.2.2. Traction d'une plaque avec entaille

En vu de mettre en valeur la bande de localisation nous pratiquons sur la même plaque une entaille en V sur l'un des cotés de la plaque. La plaque, le chargement, les conditions aux limites et les maillages pratiqués sont montrés a la Fig.(I-11). Les caractéristiques du matériau sont les mêmes que celle utilisé au paragraphe 7.2.1.

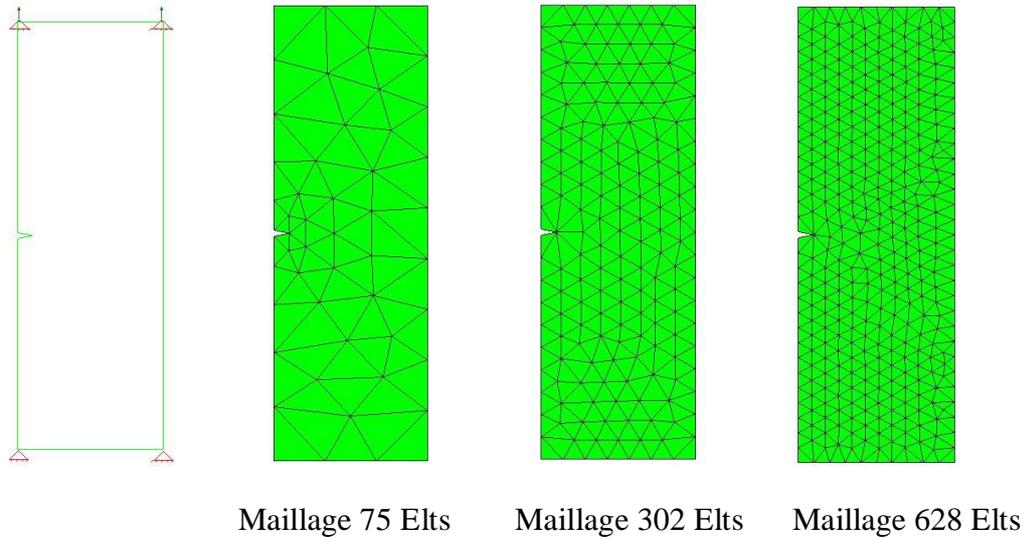


Figure I-11 : Plaque avec entaille en traction, conditions aux limites et maillages utilisés

En Fig.(I-12), nous montrons la répartition de l'endommagement, la déformation plastique et de la contrainte de von Mises pour les trois maillages. Nous avons constaté que la localisation a tendance à développé deux bandes de cisaillements d'une manière symétrique au départ puis au fur à mesure du chargement la fissure se propage selon un sens pour créer a la rupture une fissure qui se localise selon une rangée d'éléments (ceci est valable pour la variable d'endommagement et la déformation plastique) et nous constatons que la contrainte de von Mises est nulle a la rupture. Ce qui a pour effet sur la réponse globale Fig.(I-13) d'une perte d'unicité de la solution et apparition d'un point de bifrucation. Tel que montré à la Fig.(I-14), nous constatons donc que comme dans le cas de la plaque homogène la réponse est directement lié a la taille du maillage, plus le maillage est fin (la taille du maillage est petite) plus l'épaisseur de la bande de localisation devient faible.

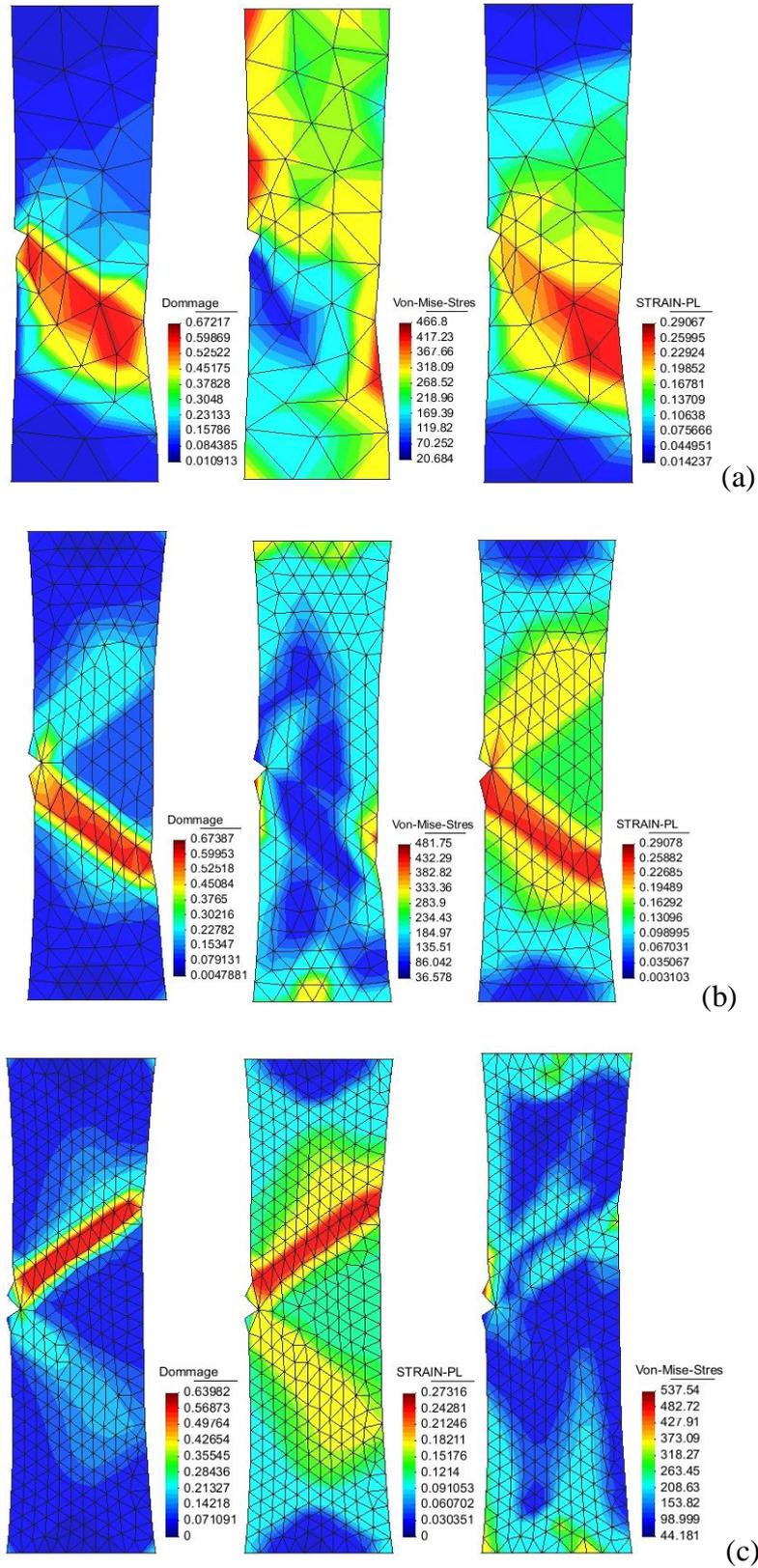


Figure I-12 : Isovaleurs plaque entaillée hypothèse des déformations planes

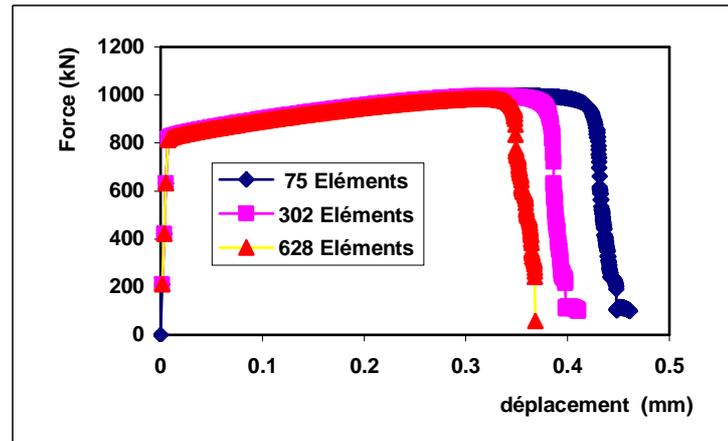


Figure I-13 : Réponse (Force-Déplacement) numérique pour les trois maillages

En effet dès que la localisation est prononcée, les équations d'équilibre perdent leur ellipticité (en quasi statique). Ceci marque la fin de validité de la mécanique locale et impose d'utiliser une théorie non locale comme :

Mécanique non locale au sens de d'Eringen [Eri81,Eri83, Eri87],

Théorie des gradients supérieurs [Des94, Jou97]

Simple régularisation du problème en utilisant des limiteurs de localisation.

8. Conclusion

Le chapitre ci-dessus nous montre un modèle élastoplastique à écrouissage isotrope non linéaire couplé à un endommagement local, les résultats obtenus démontrent la dépendance des solutions éléments finis post-critiques aux aspects de la discrétisation spatiale. Cette particularité des modèles de comportement locaux adoucissants, empêche toute évaluation quantitative fiable du comportement après le post pic ; apparition de point bifurcation et perte d'unicité de la solution. En effet, une taille de maille infiniment petite, conduirait par localisation de l'écoulement plastique dans un domaine infiniment fin à une dissipation de fissuration nulle (effet contradictoire avec la pratique). La nature du modèle de comportement, la texture et les directions privilégiés du maillage, les gradients de taille de

maille et surtout le degré d'interpolation et la qualité de l'intégration numérique sont autant d'éléments participants à la qualité de la réponse éléments finis. Dans cette étude nous allons présenter dans le deuxième chapitre quelques formulations qui visent exclusivement le contrôle de la dépendance vis à vis de la taille de maille dans la zone de rupture et nous allons nous intéresser particulièrement à la formulation non locale tel que présenté dans les travaux de **Peerlings** [Pee99].

Chapitre II :

Limite de l'approche locale et approche
théorique des formulations non locales

Introduction

Un certain nombre d'observations expérimentales (effets d'échelle, localisation,...) mettent en évidence l'existence de longueurs internes intrinsèques aux matériaux, représentatives de microstructures sous-jacentes aux points matériels macroscopiques et dont l'influence s'avère significative aux petites échelles spatiales. Malheureusement, les théories mécaniques locales ne rendent pas compte des phénomènes observés. Numériquement, cela peut se traduire par des prédictions quantitativement en désaccord avec l'expérience ou même, dans le cas des phénomènes de localisation, par des résultats non représentatifs dans la mesure où ils dépendent pathologiquement de la discrétisation spatiale, cette défiance s'explique mathématiquement par le caractère mal posé du problème ; perte d'ellipticité des équations d'équilibre. Comme les limites de théories locales apparaissent aussi bien sur le plan physique, numérique ou mathématique, de nombreux auteurs ont cherché à les enrichir en abordant le problème sous un angle microstructural [Saa88, Pej88, Pee99, Gee03, Eng03, Boe05], phénoménologique, numérique ou bien purement mathématique et formuler ainsi des approches dites non locales de comportement des matériaux. Devant la diversité des approches utilisées pour construire des modèles non locaux, il nous a semblé utile d'en rappeler les grandes familles sans pour autant escompter une quelconque exhaustivité. On pourra d'ailleurs en trouver un examen plus approfondi dans [Lor96]. L'analyse croisée de ces approches permet alors d'y porter un regard critique en dégagant un certain nombre de points qui nous paraissent essentiels.

1. Limites des modèles locaux

Les descriptions locales des matériaux entrent dans la classe des milieux matériellement simples, c'est-à-dire en reprenant la définition de **Truesdell** [Tru74], des matériaux pour lesquels les valeurs en un point "x" et à un instant "t" des champs de contraintes, d'entropie spécifique, d'énergie libre spécifique et de courant de chaleur sont déterminées par la connaissance en "x" seulement de l'histoire jusqu'à l'instant "t" de la température et du gradient du mouvement, ainsi que la valeur à l'instant "t" du gradient thermique. De telles

modélisations (élasticité, plasticité, viscoplasticité, etc,..) sont maintenant couramment employées dans le domaine industriel et donnent des résultats très satisfaisants.

1.1 Aspects physique

1.1.1. Effets d'échelle

A petite échelle spatiale, les résultats prédits par les théories locales peuvent s'écarter des mesures expérimentales, écarts qui s'estompent à plus grandes échelle. Ainsi, **Lakes [Lak95]** recense quelques observations :

- ✓ La charge limite de plaques trouées en graphite époxy dépend de la taille des trous,
- ✓ La distribution des déformations autour de cavités dans un matériau composite à fibres correspond bien aux prédictions pour de grandes cavités mais s'en écarte pour de petites cavités.
- ✓ Des expériences de torsion sur de petites poutres à section carrée constituées de matériaux osseux exhibent des contraintes au coin de la section, en contradiction avec les prédictions.

Dans chacun de ces cas, une microstructure sous jacente au point matériel semble interagir avec les sollicitations qui s'exercent à la même échelle spatiale. Par ailleurs, pour des matériaux métalliques **Fleck et al. [Fle94]** ont également mis en évidence des effets d'échelle par des essais de torsion sur des fibres de cuivre dont le diamètre varie entre 12 et 170 μm , effet d'échelle que ne laissait pas présager une analyse dimensionnelle du problème. La description du comportement du matériau par une loi de plasticité usuelle ignore l'existence d'une longueur caractéristique reliée ici aux propriétés géométriques des dislocations. Ainsi en présence de variations significatives des champs mécaniques à petite échelle (forts gradients), les théories locales ne suffisent plus à décrire quantitativement la réponse du matériau.

1.1.2 Dégradations mécaniques et localisation des déformations

Sous fortes sollicitations, les propriétés mécaniques d'un matériau peuvent se dégrader. Ces dégradations se manifestent à l'échelle du point matériel sous des formes diverses comme en

témoigne l'essai de traction d'un béton représenté sur la Fig.(II-1). En particulier, on peut relever quatre types de phénomènes au cours du chargement :

- Perte de rigidité du matériau,
- Apparition de déformation irréversible,
- Présence de boucles hystérétiques lors des cycles traction compression,
- Diminution de la limite d'élasticité.

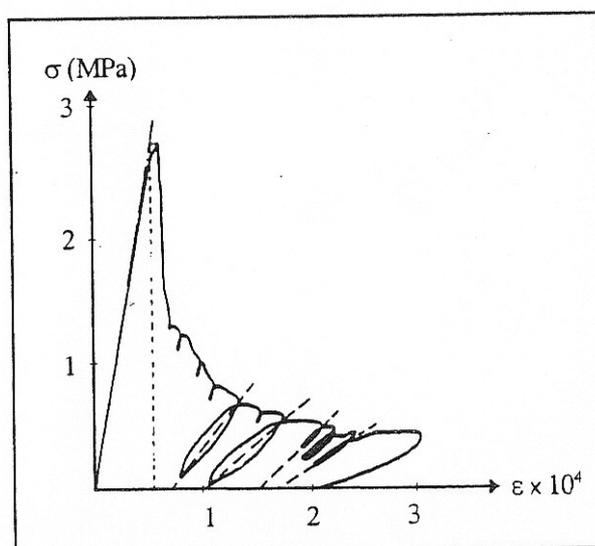


Figure II- 1 : Essai de traction d'un Béton [Ter80]

La modélisation de ces phénomènes a fait l'objet d'un grand nombre de travaux, le lecteur peut consulter par exemple [Lem88, Ned01, Com00] qui proposent des synthèses sur les modèles utilisés. De manière générale, la perte de rigidité est modélisée par une diminution des propriétés élastiques, les déformations irréversibles relèvent des théories de plasticité, les boucles hystérésis résultent de l'ouverture et la refermeture de microfissures alors que la diminution de la limite d'élasticité exprime une réduction du domaine de réversibilité dans l'espace des contraintes provoqué par un adoucissement du matériau. Or lorsqu'on sollicite une éprouvette constituée d'un matériau adoucissant, on observe fréquemment une bifurcation d'un état homogène vers un état hétérogène, au-delà d'une certaine valeur du chargement. Ce nouvel état présente des bandes d'épaisseur faible, appelées bandes de cisaillement ou de

localisation, dans lesquelles se concentre la déformation (Fig.(II-2)). De manière générale, elles se forment dans les zones de fortes densités de micro-hétérogénéités du matériau .

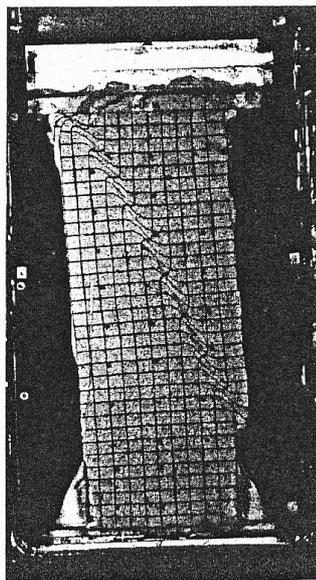


Figure II- 2: Compression biaxiale sur sable, **Desrues et Chambon [Des85]**

Les dimensions des bandes de localisation et les mécanismes physiques qui en sont à l'origine diffèrent d'un matériau à l'autre [Dar95]. Pour illustrer cette diversité, nous pouvons citer:

Les matériaux granulaires (sables, poudres,...)

du à un réarrangement des grains ils se forment dans ces matériaux des bandes de localisation. De nombreux paramètres intervenant dans la formation de ces bandes: la porosité, la pression de confinement, les tailles des grains et de l'échantillon.

Les matériaux quasi-fragiles (roches, bétons,...)

Les bandes de localisation y sont le fait d'une forte concentration de microfissures. Là encore d'après **Berthaud et al. [Ber94]**, la largeur des bandes dépend de la taille des agrégats (de l'ordre de 2 à 10 diamètres d'agrégats). Des auteurs ont aussi étudié l'orientation des microfissures et concluent qu'en dehors des bandes de localisation, les microfissures s'orientent dans des directions privilégiées selon la direction du chargement, en revanche, dans

les bandes, elles observent une anisotropie des fissures avec tout de même une tendance à se développer dans la direction de la bande.

Les métaux

Dans les polycristaux, les bandes de cisaillement sont le siège d'une déformation plastique importante, concomitante avec une nucléation et une coalescence de cavités très marquées. Même dans un monocristal [Rey94] on assiste à la formation de bandes de localisation à l'échelle macroscopique (épaisseur de l'ordre du millimètre) dans lesquelles le réseau cristallin est nettement déformé ce phénomène résulte en fait de l'accumulation de bandes microscopiques (épaisseur de l'ordre du micron), appelées bandes de Luders. Là encore, la description fine de ces mécanismes nécessite d'introduire dans le modèle une nouvelle échelle dont découle la largeur des bandes de localisation. Comme pour les effets d'échelle, les modèles locaux n'introduisent pas de telles longueurs caractéristiques et ne peuvent donc pas décrire la discrétisation des champs mécaniques au sein d'une bande de localisation. C'est d'autant plus problématique qu'ils prédisent une énergie dissipée nulle au sein de ces bandes de localisation [Baz84]. Ce résultat est physiquement inacceptable : une pièce pourrait se rompre sans consommer d'énergie.

1.1.3 Sensibilité des résultats au maillage

Comme nous l'avons montré dans le premier chapitre, l'implémentation numérique des modèles locaux montre une grande sensibilité au maillage. Ce point a fait l'objet de plusieurs études [Bil90, Bill89, Ort87, Sao88, Pij91].

Saouridis [Sao88] a simulé l'essai de traction d'une éprouvette entaillée avec trois maillages différents. Avant le pic, les courbes force-déplacement se superposent parfaitement. A partir du pic, les résultats sont très différents, Fig. (II-1-a). Il en est de même des zones complètement endommagées. Quand le maillage est raffiné (voir Fig.(I-1-b)) l'épaisseur de la fissure diminue également, ce qui va à l'encontre des résultats expérimentaux[Sao88].

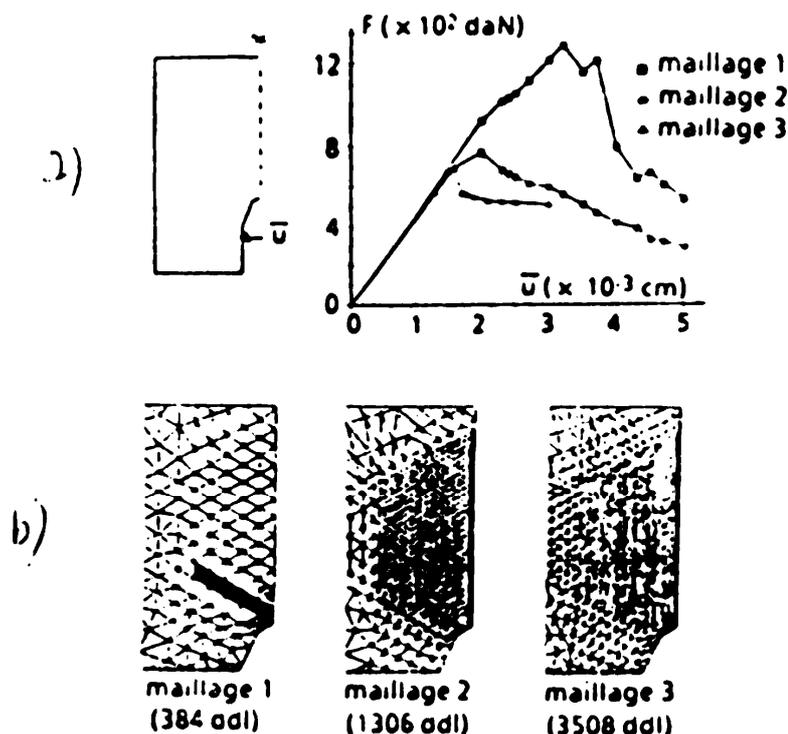


Figure II- 3 : a) Courbes force déplacement d'une éprouvette entaillée ; b) évolution de la zone endommagée pour trois maillages différents d'après Saouridis [Sao88]

Pijaudier-Cabot et Mazars [Pij91] ont simulé l'essai d'arrachement d'une armature d'un cylindre en béton, comme le montre la Fig.(II-4). Dans un essai d'arrachement, un effort de traction est appliqué à l'armature, et le bloc de béton est maintenu immobile à sa périphérie. L'interface acier-béton est considérée comme parfaite. Ils ont constaté que les courbes force déplacement sont très différentes selon les maillages utilisés. Dans cet essai, l'endommagement du béton est concentré exclusivement au voisinage de l'armature. La Fig.(II-5) montre la variation de l'épaisseur minimale de cette zone en fonction du nombre d'éléments du maillage [Pij91]. Cette zone tend vers zéro quand le nombre d'éléments du maillage augmente. C'est donc le nombre d'éléments qui contrôle la taille de la zone de localisation du dommage. Récemment **Denis [Den07]** a fait une synthèse sur la sensibilité des modèles locaux aux différents paramètres.

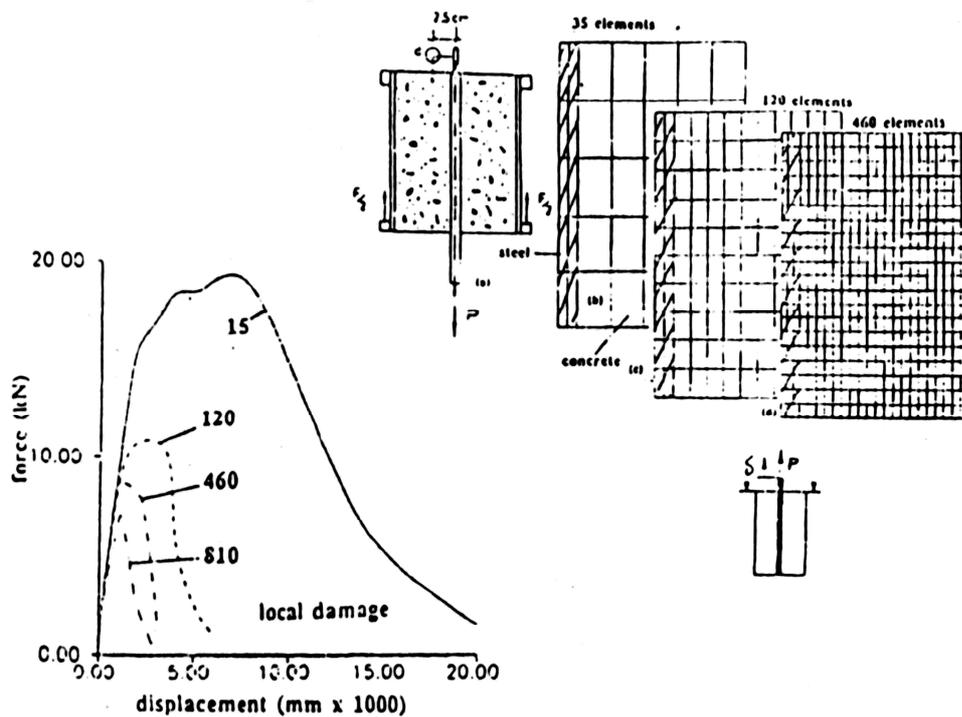


Figure II- 4 : Effet du raffinement du maillage au cours de la simulation d'un essai d'arrachement sur une éprouvette en Béton. (D'après [Pij91])

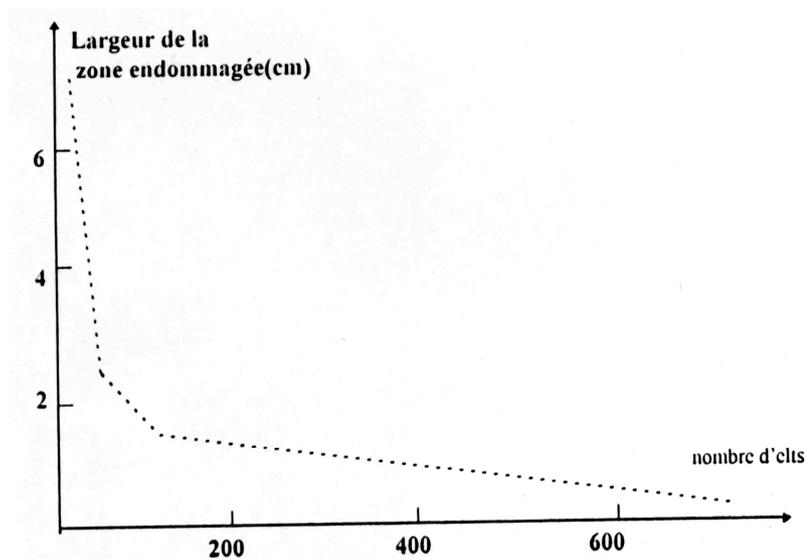
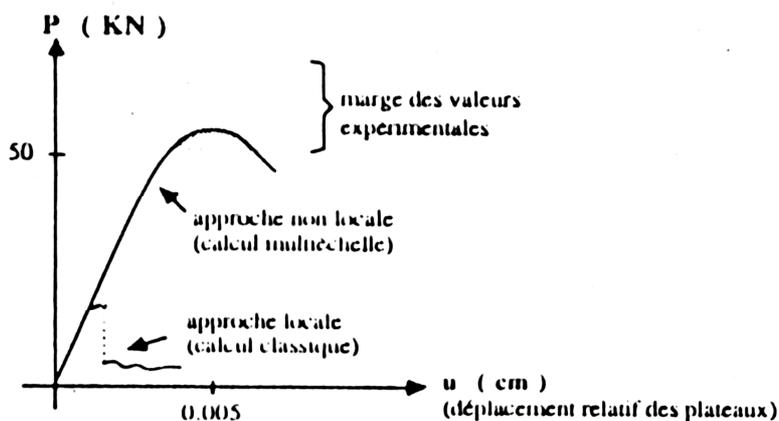
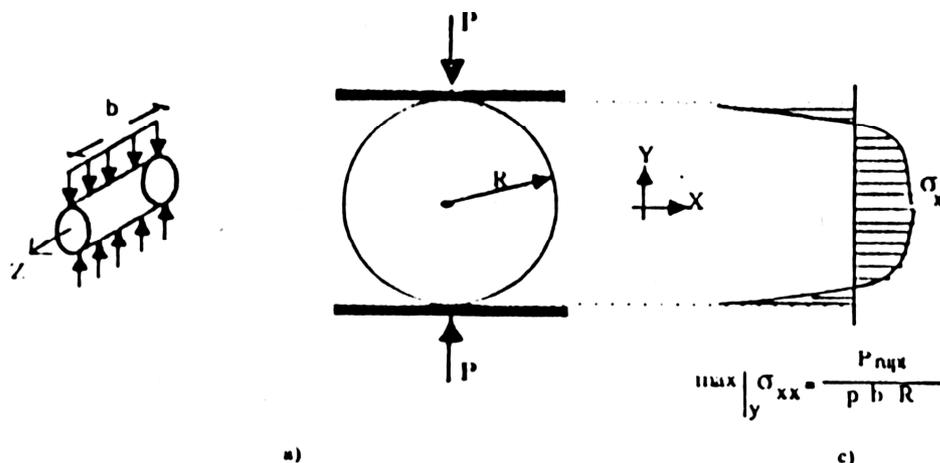


Figure II- 5 : Influence du nombre d'élément sur l'épaisseur de la zone endommagée autour de l'armature [Pij91])

Un autre exemple significatif est celui de l'essai "Brésilien" (ou l'essai de fendage), schématisé sur la Fig.(II-6), cet essai consiste en un chargement en compression d'une éprouvette en béton. Les résultats de la simulation montrent une initiation de la fissuration directement sous la charge et une rupture par écrasement de cette zone fortement comprimée. Ce mode de rupture est incompatible avec les données expérimentales (rupture par traction en demi coquilles) notons aussi que le calcul sous estime nettement la résistance ultime de l'éprouvette comme s'est présenté sur la Fig.(II-6) [Dav89].



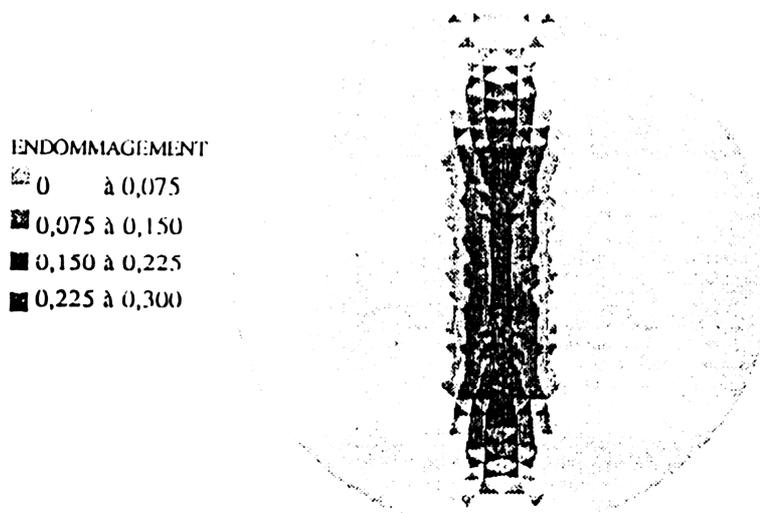


Figure II-6 : Essai Brésilien. a) Schéma de l'essai, b) Comparaison des différentes approches de calcul

c) Répartition des contraintes en élasticité d) Etat de l'endommagement peut avant la rupture

1.1.4. Effet d'alignement

En plus de la discrétisation, il existe une autre limitation de ces modèles en approche locale qui est l'effet d'alignement. Celui-ci tend à privilégier certains modes de rupture. L'essai de la Fig.(II-7) en est un exemple typique [Pij93]. Il s'agit d'un bloc en béton sollicité en compression excentrée. Les deux maillages utilisés contiennent des directions privilégiées qui influencent les modes d'endommagement. La distribution du dommage montrée sur la Fig.(II-7) correspond à la solution attendue du problème. Par contre, la distribution du dommage obtenue avec le second maillage est différente. Celle-ci a été biaisée par le maillage conduisant à la formation des bandes de cisaillement dans l'une des directions privilégiées du maillage.

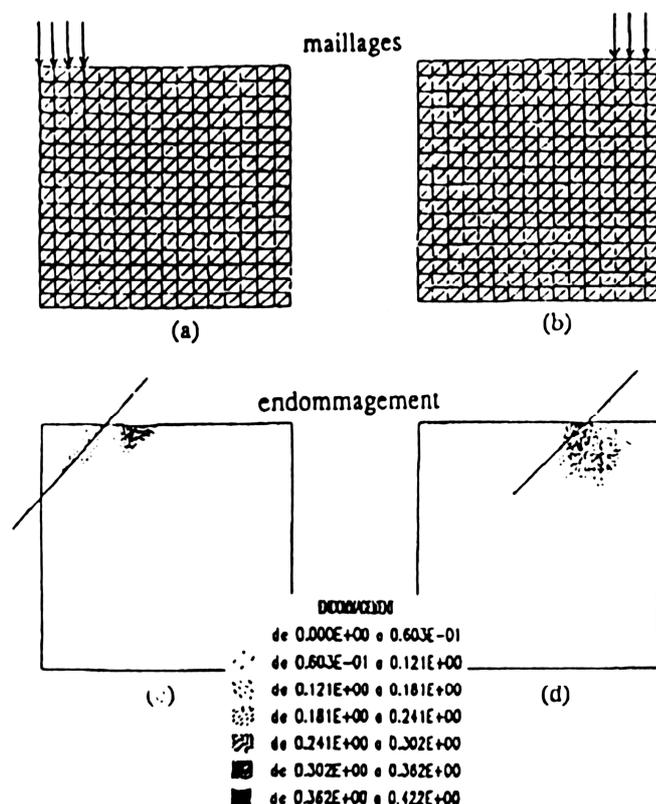


Figure II-7 : Essai de compression excentrée-effet de l'alignement du maillage sur l'orientation des bandes d'endommagement d'après **Pijaudier-cabot et all [Pij93]**

Comme synthèse à ces travaux nous pouvons dire que :

- Dans le cas découplé, la recherche des solutions du problème de structure ne pose aucun problème.
- L'introduction de l'endommagement se traduit numériquement par des difficultés de convergence de l'algorithme de résolution des équations d'équilibre.
- La solution obtenue dépend fortement de la discrétisation considéré.
- Dans le cas où on s'attend à une solution anélastique uniforme, nous obtenons une évolution du dommage qui dépend du maillage considéré.

Ces observations ne sont pas nouvelles, elles s'inscrivent dans une démarche plus globale essayant d'expliquer, de modéliser et de simuler ces phénomènes. Pour les expliquer, on parle

d'instabilité, de perte d'unicité de la solution ou de localisation de la déformation. Ces termes ont fait l'objet de plusieurs travaux [Bil90, Bill89, Ort87], que l'on n'exposera pas ici.

1.2. Aspects mathématiques

L'emploi de modèles locaux pour décrire la formation de bandes de localisation se heurte à des difficultés dans la mise en œuvre numérique qui trouvent leur origine, non dans une quelconque défiance de l'approximation par éléments finis mais dans les propriétés mathématiques du système d'équations qui régit le problème continu lui-même : Ce dernier est mal posé et une analyse s'impose. Rappelons qu'un problème est dit bien posé lorsqu'il admet un nombre fini de solutions, linéairement indépendantes et qui dépendent continûment des données. En fait obtenir des conditions pour assurer le caractère "bien posé" du problème dans toute sa généralité est difficile. C'est pourquoi on se limite à l'examen du problème en vitesse. Cependant une difficulté subsiste : l'incrément de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ est une fonction non linéaire de l'incrément de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}})$. La théorie de Hill justifie dans le cadre des modèles associés la modélisation du comportement réel du matériau par une loi tangente à la branche dissipative pour lequel $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$; on parle alors de solide linéaire de comparaison. Si le problème (II.204) qui en résulte est bien posé, alors il en est de même du problème réel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{f}}_v = 0 \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \\ \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \nabla \underline{\underline{u}} \end{array} \right. \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{T}} \quad \text{sur } \partial\Omega_T \\ \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}^d \quad \text{sur } \partial\Omega_u \end{array} \right. \quad \text{II.204}$$

$\underline{\underline{H}}$ est l'opérateur tangent pour le comportement dissipatif. $\underline{\underline{f}}_v$ et $\underline{\underline{T}}$ représentent respectivement les forces de volume et de surface données connues. $\underline{\underline{u}}^d$ déplacement imposés.

Le système (II.204) représente la formulation mathématique du problème variationnel elliptique. Ce dernier est abondamment étudié dans la littérature le lecteur peut dès à présent, consulter les travaux de **Benallal et al.** [Ben93] pour une synthèse détaillée du problème. Il est bien posé si et seulement s'il satisfait trois conditions :

- (i) une condition d'ellipticité de l'opérateur H,
- (ii) une condition complémentaire de bord,

(iii) une condition complémentaire d'interface.

On laissera les deux dernières conditions dans l'ombre, précisant simplement qu'elles concernent respectivement l'apparition éventuelle d'ondes de surface stationnaires (onde de Rayleigh) sur les bords (ii) ou les interfaces (iii), c'est-à-dire les surfaces de discontinuités de l'opérateur H . quant à la condition d'ellipticité (i), elle s'exprime par :

Ellipticité :

$$\forall x \in \Omega \quad \forall \underline{\underline{n}} \in R^3 \quad \det(\underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{H}}(x) \cdot \underline{\underline{n}}) \neq 0 \quad \text{II.205}$$

Où $\underline{\underline{n}}$ correspond à l'idée géométrique d'une bande de localisation de normale "n".

Bien que d'origine mathématique, la condition d'ellipticité admet deux interprétations mécaniques, l'une en statique l'autre en dynamique [Rec76]. En statique, la condition d'ellipticité garantit qu'il n'existe pas de solution pour lesquelles le taux de déformation $\underline{\underline{\epsilon}}$ admettrait une discontinuité spatiale le long du plan de normal "n". En dynamique, elle assure que le tenseur acoustique $\underline{\underline{Q}}(n) = \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{n}}$ est défini positif, donc que la célérité des ondes est non nulle. Par conséquent, la propagation des ondes n'est pas stoppée dans une zone donnée. Ces interprétations mécaniques confirment bien la condition d'ellipticité comme une condition de non localisation au sein de la matière. En revanche, elle ne concerne bien sur ni les bords ni les interfaces. Par ailleurs, cette condition d'ellipticité permet également de constater que l'adoucissement n'est pas un phénomène nécessaire à la localisation. En effet, des lois de comportement non associées, ne présentant pas d'adoucissement dans leurs formulation peuvent également y conduire [Ben94].

Finalement, si l'on omet les conditions complémentaires de bord et d'interface, la condition d'ellipticité nous garantit que le problème est bien posé. Donc, les résultats numériques obtenus par éléments finis sont représentatifs de la réponse réelle de la structure, à condition de prendre garde à d'éventuelles bifurcations. En revanche, lorsque la condition d'ellipticité n'est plus assurée, des bandes de localisation mal décrites par le modèle local peuvent apparaître, remettant en cause la confiance que l'on peut accorder aux résultats numériques.

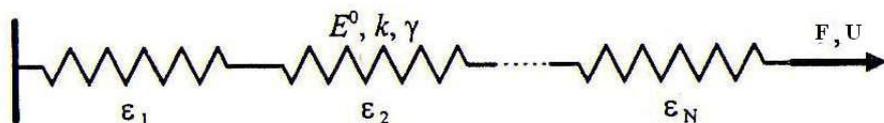
Notons d'ailleurs que dans cet esprit certains auteurs comme **Billardon [Bil89]** proposent d'employer cette condition mathématique comme critère d'amorçage ; la direction de localisation étant alors censée fournir la direction de fissuration. Une telle approche paraît cependant hasardeuse pour deux raisons : D'une part, des observations expérimentales dans les métaux indiquent que l'orientation des microfissures (qui correspondrait à la direction des bandes de localisation) ne coïncide pas nécessairement avec celle de la fissure macroscopique. D'autre part, l'initiation d'une bande de localisation microscopique n'est pas nécessairement concomitante à l'amorçage d'une zone endommagée macroscopique **[Li94]**. En fait, le développement de ces zones semble relever davantage d'effets de structures (singularités, redistribution des champs mécaniques, instabilités structurales) que de considérations purement locales.

1.3. Aspects numériques

Comme nous venons de le voir, les modèles en description locales ne suffisent pas pour décrire un certain nombre de phénomènes physiques. Sur le plan de la mise en œuvre numérique, cela peut avoir des conséquences fâcheuses. Examinons- les dans le cas de la localisation.

1.3.1. Origine intuitive de la localisation

Pour comprendre l'origine du phénomène de localisation, considérons un assemblage de N ressorts montés en série et soumis à une traction (effort F ou un déplacement U).



Chaque ressort, de longueur l/N , est supposé obéir à une loi de comportement de type élastique fragile. Disons simplement que l'état du matériau est décrit par deux variables, les déformations " ϵ " et l'endommagement caractérisé par une variable scalaire " D " qui évolue de

manière croissante de 0 (matériau sain) à 1 (matériau totalement endommagé à la rigidité résiduelle nulle). Les équations de ce modèle peuvent s'écrire :

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{\Lambda}}(D) : \underline{\varepsilon} \quad \text{où} \quad \underline{\underline{\Lambda}}(D) = \frac{1-D}{1-\gamma D} \underline{\underline{\Lambda}}^0 \quad \text{II.206}$$

$$Y = -\frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \underline{\underline{\Lambda}}(D) : \underline{\varepsilon} = \frac{1+\gamma}{(1+\gamma D)^2} \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \underline{\underline{\Lambda}}^0 : \underline{\varepsilon} \quad \text{II.207}$$

$$f(Y) = Y - k \quad \text{et} \quad f \leq 0 \quad \dot{d} \geq 0 \quad f \dot{\lambda} = 0 \quad \text{II.208}$$

$\underline{\sigma}$: Tenseur des contraintes

Y : Taux de restitution de densité d'énergie

$\underline{\underline{\Lambda}}^0$: Tenseur d'élasticité isotrope initial (caractéristique du matériau)

γ : Paramètre matériau caractérisant l'écrouissage ($\gamma > 0$) (caractéristique du matériau)

k : seuil du domaine de réversibilité égale à la densité d'énergie dissipée par un point matériel totalement endommagé.

Ce modèle permet de décrire simplement un écrouissage négatif linéaire, comme illustré sur la courbe de traction uniaxial Fig.(II-8).

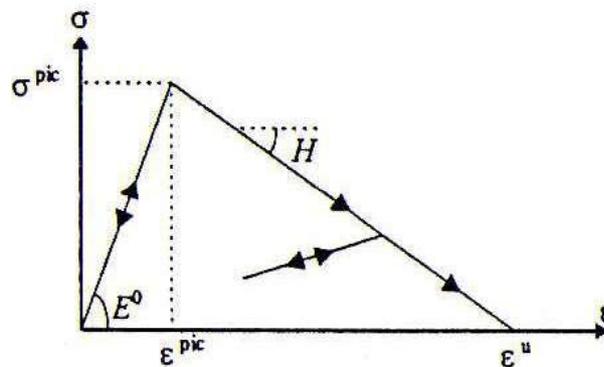


Figure II-8 : Modélisation d'un comportement adoucissant : traction-uniaxiale

$$\varepsilon^{pic} = \sqrt{\frac{2k}{E^0(1+\gamma)}} \quad \text{Régime post-pic sous chargement uniaxial}$$

$$\sigma^{pic} = \sqrt{\frac{2k E^0}{(1+\gamma)}} \text{ Monotone en déformation}$$

$$\varepsilon^u (1+\gamma) \varepsilon^{pic} \quad d(\varepsilon) = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^{pic}} - 1 \right)$$

$$H = -\frac{E^0}{\gamma} \quad \frac{\sigma}{\sigma^{pic}} = 1 - D$$

A l'échelle d'un ressort, le comportement est bien défini dans la mesure où la connaissance de l'état actuel (déformation et endommagement) et la donnée du taux de déformation fixent sans ambiguïté les taux de contrainte et d'endommagement. A l'échelle de la structure, l'équation d'équilibre vient s'ajouter aux équations de comportement du ressort ; dans le cas présent, elle exprime simplement l'égalité de la contrainte dans chaque ressort (montage en série) :

$$\sigma_i = \sigma \quad \text{II.209}$$

Examinons maintenant la réponse de cet assemblage. Dans un premier temps, le comportement de tous les ressorts est élastique, si bien que la réponse de la structure existe et est unique : l'endommagement est nul partout et la déformation est la même dans tous les ressorts. La solution est homogène :

$$D_i = 0 \quad \varepsilon_i = \frac{\sigma}{E^0} \quad \sigma_i = \sigma \quad U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \varepsilon_i = \frac{l\sigma}{E^0} \quad \text{II.210}$$

Cette phase perdure tant que le pic n'est pas atteint, c'est-à-dire $\sigma_i = \Sigma < \sigma^{pic}$. En fait, pour des raisons de micro-hétérogénéités du matériau, la frontière du domaine d'élasticité est atteint dans l'un des ressorts avant les autres, disons le premier. A partir de ce moment, ce ressort adopte un comportement dissipatif. Il s'endommage-si bien que la charge σ_i qu'il supporte diminue. A cause de l'équation d'équilibre, la contrainte diminue aussi dans les autres ressorts qui n'avaient pas encore atteint le pic. Leur comportement est donc nécessairement une décharge élastique. La solution devient hétérogène :

$$\begin{cases} D_i = 1 - \frac{\Sigma \varepsilon_i}{\sigma^{pic} \varepsilon_{pic}} = 1 + \gamma D_i \\ D_{i \neq 1} = 0 & \varepsilon_{i \neq 1} = \frac{\Sigma}{E^0} \end{cases} \Rightarrow \frac{U}{l} = \varepsilon^{pic} \left[\frac{N-1}{N} (1 - D_1) + \frac{1}{N} (1 + \gamma D_1) \right] \quad \text{II.211}$$

Alors que la déformation des ressorts élastiques diminue, elle augmente dans le ressort qui s'endommage. A terme, toute la déformation de la structure s'est localisée dans le ressort endommagé. On comprend le rôle fondamental joué par l'équation d'équilibre, illustré graphiquement sur la Fig.(II-9).

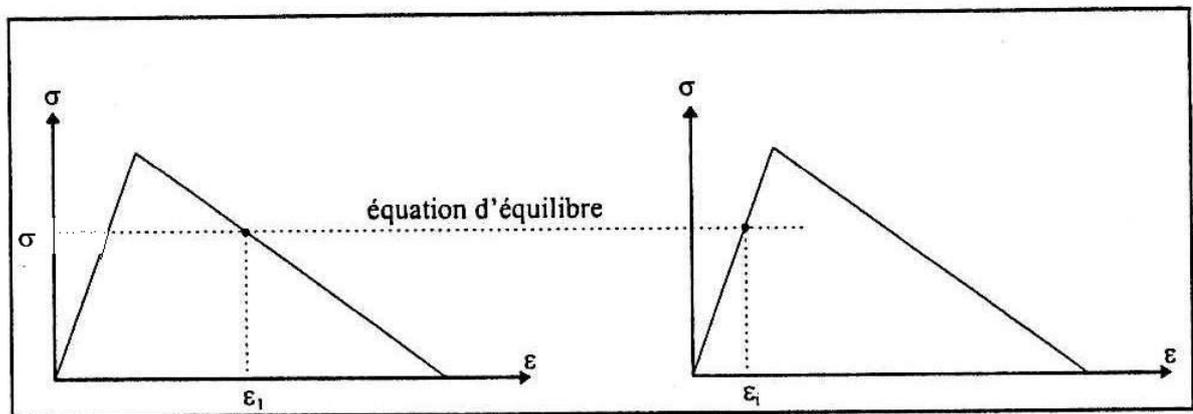


Figure II- 9 : Rôle de l'équation d'équilibre dans le phénomène de localisation

Quant à la réponse globale de la structure, on choisit de la paramétrer non par la contrainte ou le déplacement, mais par l'endommagement du premier ressort, à cause d'un éventuel Snap-back (qui apparaît si $\gamma \leq N - 1$). Son évolution est représentée en fig.(II-10)

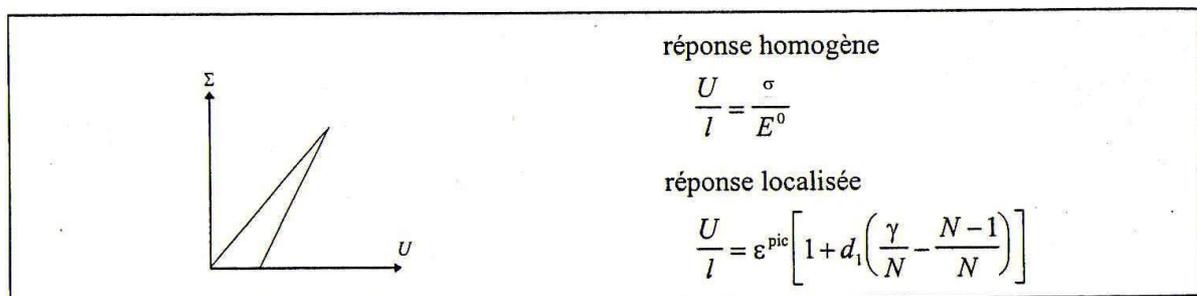


Figure II-10 : Réponse globale de la structure en présence de localisation

1.3.2. Conséquence numérique de la localisation : dépendance au maillage

La conséquence du phénomène de localisation sur le plan numérique est immédiate. En effet, les mêmes symptômes que pour le système de ressorts apparaissent lorsqu'on maille une barre par éléments finis, les instabilités numériques et les erreurs d'arrondis jouant un rôle comparable à celui des micro-hétérogénéités du matériau. Ainsi, toute la déformation se localise dans un seul élément. En raffinant le maillage, on modifie la réponse globale de la structure (qui dépend explicitement du nombre d'éléments). En outre l'énergie dissipée pour rompre la barre s'élève à :

$$E_{rupt} = k \frac{1}{N} \quad \text{II.212}$$

Qui tend vers zéro quand on raffine le maillage : à la limite, la barre se rompt sans consommer d'énergie, comme précédemment. Autant dire que les résultats obtenus numériquement ne sont pas représentatifs de la réponse réelle d'une structure. En effet la solution de calcul dépend pathologiquement de la taille des éléments, mais aussi plus généralement de leur forme, de leur orientation, du degré d'interpolation. Comme le montrent les résultats de la figure (II-11) présentés dans **Darve et al [Dar95]**. On montre que les solutions dépendent pathologiquement du maillage, c'est-à-dire de la nature des éléments finis, de leur taille, leur orientation et leur distorsion. La largeur de la bande de localisation tend vers zéro quand on raffine le maillage, ce qui conduit à une énergie dissipée à rupture nulle, donc physiquement inacceptable.

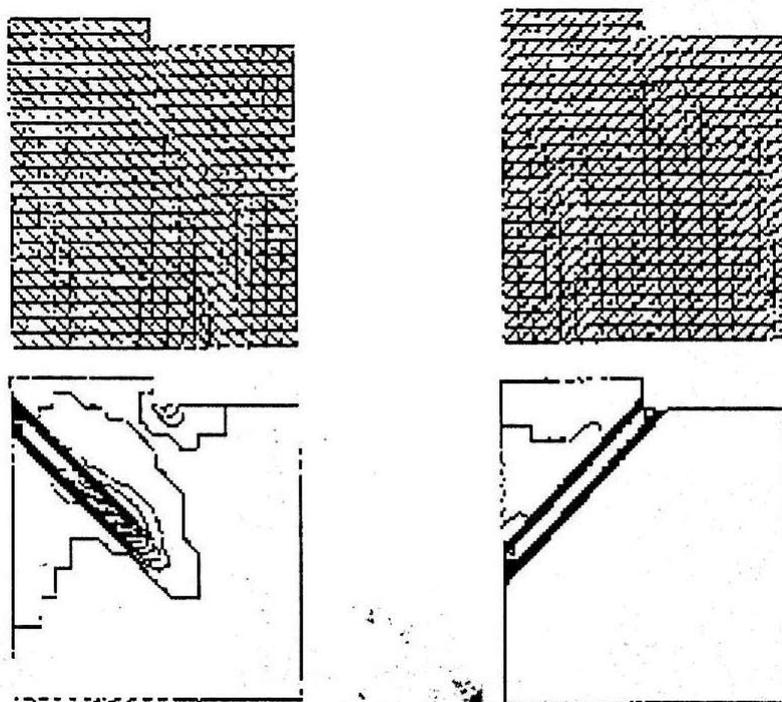


Figure II- 11 : Enfoncement d'une plaque dans un massif, **Darve et al. [Dar95]**. Champ de déformation équivalente

1.3.3. Sensibilité à la discrétisation temporelle pour des matériaux adoucissants et/ou visqueux

La présence d'effets visqueux dans une loi de comportement adoucissante a été examinée entre autres par **Needleman [Ned88]**. Dans le cas de la loi de type élastique fragile, on peut rendre compte de la viscosité en remplaçant par exemple la condition de cohérence (Eq.II.208) par l'équation d'évolution suivante :

$$\dot{D} = \frac{1}{\eta} \langle Y - k \rangle \quad \text{II.213}$$

η : viscosité (caractéristique du matériau)

$\langle x \rangle$: Partie positive de "x" (crochets de Macaulay).

Notons que cette forme d'équation d'évolution est similaire à la régularisation mathématique des équations de la plasticité proposée par **Duvaut et Lions [Duv72]**. Lorsque " η " tend vers zéro, on retrouve le modèle de comportement non visqueux. Grace à l'introduction de la viscosité, les résultats sont stables par rapport au maillage, à condition qu'il soit suffisamment raffiné pour décrire convenablement de fines bandes de localisation. Cette situation soulève un autre problème crucial qui est la discrétisation temporelle qui devienne coûteuse.

Schéma explicite

Dans ce cas une discrétisation très fine en temps est nécessaire [**Pit95**]. Plus inquiétant, les travaux de **Cherukuri et Shawki [Che95]** indiquent que la condition nécessaire de stabilité de von Neumann, qui découle d'une analyse linéaire du problème est loin d'être suffisante. Pour obtenir des résultats convenables, ces auteurs ont dû employer des pas de temps 500 fois plus petits que ceux prescrits par cette condition de stabilité.

Schéma implicite

Contrairement aux résultats habituels, la stabilité de ce schéma n'est pas inconditionnelle mais dépend de la taille des pas de temps. **Simo [Sim88]** montre que cette taille doit être inférieure à une valeur critique, indépendante de la discrétisation en espace, mais qui tend vers zéro avec la viscosité.

2. Extension des modèles locaux

2.1. Base des modèles non locaux

La motivation première de ce travail de thèse concerne l'étude de la propagation d'une zone endommagée dans un matériau. Comme nous l'avons vu précédemment, les modèles locaux ne décrivent pas en général la formation de ces zones. Il est donc nécessaire de se placer dans le cadre d'une formulation non locale. Ces dernières tirent leurs fondements de diverses origines :

- Physique : ces approches se fondent sur une analyse microstructurale pour introduire, via des techniques d'homogénéisation, des longueurs internes et ainsi étendre les modèles locaux,

- Phénoménologique celui ci introduisent directement à l'échelle macroscopique des termes censés rendre compte d'interactions microscopique,
- Mathématique où l'extension du modèle est guidée par la recherche de propriétés mathématiques favorables.

Cela dit, des justifications différentes peuvent conduire à une même classe de modèles, ce qui nous a conduits à privilégier une classification transverse que nous expliciterons dans ce qui suit. Cette présentation loin d'être exhaustive vise à synthétisé les justifications, les points forts et les lacunes de chacune d'entre elles dans le but d'esquisser une problématique générale qui guidera les développements ultérieurs proposés dans ce travail.

2.1.1. Relaxation de l'énergie potentielle

Une première classe de modèles, proposée par **Francfort et Marigo [Fra93]** se fonde sur un examen des propriétés mathématiques de la formulation énergétique du problème. Succinctement une solution d'un problème de structure est un point stationnaire de l'énergie potentielle ; elle est stable s'il s'agit d'un minimum. En présence d'un comportement adoucissant, l'énergie peut ne plus être semi-continue inférieure, ce qui remet en cause l'existence de solutions : on peut construire des champs d'énergie toujours plus basse mais qui ne convergent pas vers une solution du problème. Une technique couramment employée par les mathématiciens, (voir **Dal Maso [Dal93]**), consiste alors à relaxer le problème, c'est-à-dire à remplacer l'énergie réel par son enveloppe semi-continue inférieur : ainsi les solutions du problème réel subsistent et les suites minimisantes du problème réel convergent vers des solutions du problème relaxé.

En dépit de l'origine essentiellement mathématique de cette approche, elle repose également sur des bases physiques. Ainsi, elle définit un critère de sélection des solutions fondée sur des notions de stabilité : ne seront retenus comme solution que des minimas du potentiel (relaxé) et non plus tous les points stationnaires. Par ailleurs ces auteurs ont interprété les solutions du problème relaxé come l'homogénéisation de mélanges fins de couches saines et endommagées, énergétiquement optimaux. Finalement cette démarche assure un problème bien posé; l'indépendance des solutions par rapport au maillage a été vérifiée par **Lorentz**

[Lor99]. En outre lorsque le problème est initialement bien posé, aucune modification ne lui est apportée. En revanche, outre la difficulté du formalisme mathématique qui peut nuire à l'appropriation de cette méthode par la communauté des mécaniciens, on peut noter plusieurs restrictions :

- La loi de comportement locale doit être de type fragile et brutal-partiel, c'est-à-dire que le matériau, à l'échelle microscopique, est soit sain, soit détérioré, et dans ce dernier cas, il doit encore subsister une rigidité résiduelle ;
- La mise en œuvre numérique de cette description qui repose sur une quasi-convexification de la densité d'énergie locale est réalisable pour des problèmes plans et isotropes. Cependant, son extension à des problèmes tridimensionnels paraît illusoire.

2.1.2. Introduction d'une cinématique enrichie

Le point commun de ces méthodes réside dans l'introduction de degrés de liberté supplémentaires, qui peuvent ou non s'appuyer sur des justifications microstructurales. Le principe des puissances virtuelles permet alors de définir les efforts intérieurs associés et construire les équations d'équilibre correspondantes. Nous pouvons dès à présent attirer l'attention du lecteur sur le fait que :

- Comme l'a noté Lakes[Lak95], ces méthodes conduisent à des effets d'échelle, y compris dans les régimes réversible (élastique) ou à écrouissage positif,
- des degrés de liberté supplémentaires nécessitent l'introduction de nouvelles conditions aux limites dont le choix (Dirichlet, Neumann, mixte,...), toujours délicat et parfois arbitraire, conduit à des résultats différents,
- l'introduction de nouvelles grandeurs cinématiques, et donc aussi de nouveaux efforts qui en sont les grandeurs duales, impose aussi de nouvelles relations de comportement, pour lesquelles la part d'arbitraire peut, là encore être importante.

2.1.2.1. Modèles de degrés de liberté de porosité

Plusieurs auteurs [Mar95, Pij96, Fre93], ont essayé de prendre en compte l'endommagement, comme un degré de liberté supplémentaire du milieu continu. En dépit d'une inspiration microstructurale, ces modèles laissent ouverts certains choix. Par exemple, en ce qui concerne le traitement de l'irréversibilité de l'endommagement, il y a autant de formulations que d'auteurs. Laissé réversible chez Markov[Mar95], l'endommagement est décomposé en une part réversible et une autre irréversible chez Pijaudier-Cabot et Burlion[Pij96], ou bien forcé à être irréversible à travers le potentiel de dissipation chez Frémond et Nedjar [Fre93]. Frémond et Nedjar proposent sans doute le cadre le plus constructif. L'endommagement y représenté comme un déplacement microscopique, isotrope car scalaire, qui s'interprète comme la porosité du matériau ce qui renvoie aux travaux antérieurs de Cowin et Nunziato [Cow83] sur la modélisation des matériaux élastiques poreux. En ce qui concerne les CAL à imposer pour cette nouvelle variable cinématique, seul Pijaudier Cabot et Burlion [Pij96] les précisent en optant pour des conditions de type de Neumann. Enfin, Il est important de remarquer que l'introduction d'une nouvelle inconnue cinématique découplée des déplacements est équivalente à l'introduction d'une nouvelle variable interne, comme le montre [Lor99], pour peu qu'on puisse négliger la puissance virtuelle d'accélération associée à cette inconnue.

2.1.2.2 Modèles de Cosserat ou micropolaires

La théorie des milieux micropolaires, due aux frères Cosserat, prend en compte, outre les degrés de liberté (d.d.l.) de déplacements, des degrés de liberté de rotations indépendants des déplacements, ces nouveaux d.d.l. décrivent la rotation de la microstructure sous jacente au point matériel. La cinématique d'un tel milieu continu est décrite par un tenseur de déformation et un tenseur de courbure :

$$\underline{\varepsilon} = \nabla u - A(\omega) \quad \text{et} \quad k = \nabla \omega \quad \text{II.214}$$

Où u est le vecteur déplacement ; ω le vecteur rotation ($A(\omega)$ est le tenseur antisymétrique associé à ω), ε le tenseur de déformation (non symétrique) et k le tenseur de courbure

Bien qu'indépendantes des déplacements, les rotations ne sont pas découplées car un mouvement de corps rigide est défini par :

$$u(x) = u^0 + \Omega \wedge x \quad \text{et} \quad \omega = \Omega \quad \text{II.215}$$

L'introduire des rotations dans la formulation des lois n'est donc pas équivalente à l'incorporation de nouvelles variables internes, contrairement aux modèles à cinématique de type porosité.

Les efforts intérieurs sont alors modélisés par un tenseur de contrainte non symétrique " σ " dual des déformations, et un tenseur moment de contraintes " m ", dual de la courbure.

Plusieurs auteurs, comme **De Borst [Deb91]** ont adopté cette démarche pour traiter des comportements adoucissants, essentiellement dans le contexte de la plasticité à écrouissage négatif. Dans ce cadre, **Steinmann [Ste95]** a réalisé des calculs qui montrent une bonne indépendance par rapport au maillage. Cependant, une analyse menée par **Iordache et al [Ior95]** indique que certains modes de bifurcation localisée peuvent subsister : ce sont des modes d'ouverture (mode I), pour lesquelles les rotations ne paraissent pas activées.

Sur les matériaux métalliques, **Fleck et Hutchinson [Fle93]** justifient l'introduction de ces termes en rotation dans la mesure où ils jouent un rôle sur l'écrouissage plastique. Quant à **Forest [For96]**, il justifie l'introduction de ces nouvelles grandeurs cinématiques en se fondant sur une analyse microstructuraux. Pour ces matériaux, on observe en effet des fortes courbures du réseau cristallin au voisinage de la bande de localisation, qui engendrent des dislocations d'accommodation géométrique, ignorée par les modèles de plasticité classiques. Ce n'est qu'après avoir précisé la nature physique des rotations qu'il peut raisonnablement exprimer les lois de comportement complémentaires, indispensables à la fermeture des équations du modèle.

2.1.2.3 Modélisation par des surfaces de discontinuité

A la différence des autres méthodes présentées dans cette étude bibliographique, cette approche ne cherche pas à décrire finement le comportement interne des bandes de

localisation, mais les modélises comme des surfaces de discontinuités des déplacements. la Fig.(II-12) représente la réponse globale d'une structure.

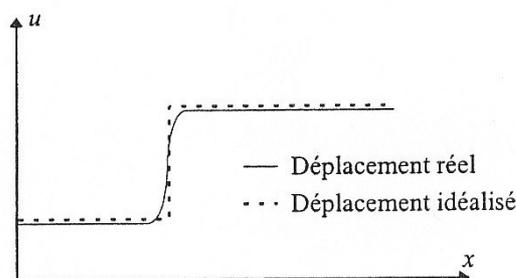


Figure II- 12 : Localisation des déformations en 1D

En fait, il s'agit d'une démarche qui enrichit la cinématique traditionnelle des milieux continus. Le champ de déplacements s'exprime dans le cadre de cette formulation comme la somme d'un champ de déplacements régulier (continu) et de termes de saut le long des surfaces de discontinuités (à priori inconnues). Fréquemment employée d'une façon purement technologique, en lien direct avec le développement d'éléments finis fait par **Foreau et Millard [For94]**. Cette modélisation a fait l'objet d'une théorie précise de la part de **Simo et Olivier [Sim97a, Sim97b]**, qui couvre à la fois l'écriture du comportement, la formulation variationnelle et le développement éléments finis mixtes appropriés, pour plus de détails le lecteur peut voir les travaux de **Simo et Rifaï [Sim90]**.

Le point essentiel de l'analyse consiste à remédier au fait que la présence de discontinuité des déplacements au cours d'une modélisation avec une loi adoucissante engendre des contraintes infinies. Par exemple, pour y parvenir, il est nécessaire de modifier la loi de comportement en introduisant un modèle d'écrouissage dont l'inverse s'écrit comme une distribution de Dirac, localisée sur les surfaces de discontinuités. Dans ce cas, toute la dissipation est confinée sur ces surfaces de discontinuité ; (sans pour autant que la dissipation globale soit nulle car la dissipation n'est plus volumique mais surfacique) ; le comportement est élastique dans tout le reste de la pièce. En prescrivant la continuité de la contrainte normale, **Simo et Olivier [Sim93]** montrent alors que l'intensité du saut de déplacements est fixée par la partie régulière des déplacements et le module d'écrouissage.

Cette méthode paraît attrayante car elle s'intègre aisément dans un code de calcul préexistant et ne nécessite pas de maillages particulièrement fins puisqu'on ne cherche pas à décrire les champs à l'intérieur des bandes de localisation. Ceci a fait l'objet d'étude approfondie dans les travaux de **Amoussou and al. [Amo97]** et **Lorentz [Lor97a]** : le constat est moins optimiste. Toute la difficulté aussi bien théorique qu'algorithmique, réside dans la détermination des lieux géométriques des surfaces de discontinuité. De plus, des réseaux de fissures parallèles les un aux autres peuvent apparaître dans la structure, où le nombre de fissures est directement lié à la finesse du maillage. Cela dit, même si on considère que la solution la plus stable sera celle où ce nombre de fissures est minimal ; l'obtenir par éléments finis est délicat. La difficulté consistant à construire des surfaces de discontinuité géométriquement continues d'une maille à l'autre.

Sans entrer plus dans le détail, il est certain que l'emploi de cette méthode requiert un savoir faire technologique plus important que ne le laissent entendre les différents articles déjà cités. En outre son extension à des situations tridimensionnelles paraît sinon insurmontable du moins particulièrement ardue.

2.1.3. Théories du gradient supérieur

Ces théories incluent dans l'écriture des puissances virtuelles volumiques des efforts intérieurs, les dérivées d'ordre supérieur du champ de vitesse virtuelle [**Min65**, **Min68**, **Ger71**, **Ger73**]. Ceci conduit à écrire l'énergie libre en fonction du tenseur des déformations et de ses gradients supérieurs comme fait dans les travaux de [**Shen01**]. Les difficultés liées à la formulation de ces théories sont croissantes avec l'ordre du gradient de la déformation retenu. Ainsi, la théorie du premier gradient des déformations paraît comme une généralisation naturelle de la théorie classique. Alors que la théorie du second gradient des déformations pose plus de difficultés, aussi bien pour l'interprétation physique des différentes grandeurs nécessaires à l'établissement des théorèmes généraux d'existence et d'unicité des solutions des problèmes aux limites.

Pour montrer la complexité d'une théorie du second gradient, écrivons comme dans [**Min65**], l'énergie libre en fonction de son premier et second gradient.

$$\psi = \psi \left(\underline{\varepsilon}, \underline{\check{\varepsilon}}, \underline{\hat{\varepsilon}} \right) \quad \text{II.216}$$

Dans laquelle les tenseurs des déformations s'écrivent :

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\left[\nabla \bar{u} \right] + \left[\nabla \bar{u} \right]^t \right], \quad \underline{\check{\varepsilon}} = \nabla \underline{\varepsilon}, \quad \underline{\hat{\varepsilon}} = \nabla \nabla \underline{\varepsilon} \quad \text{II.217}$$

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\left[\nabla \bar{u} \right] + \left[\nabla \bar{u} \right]^t \right], \quad \underline{\check{\varepsilon}} = \nabla \underline{\varepsilon}, \quad \underline{\hat{\varepsilon}} = \nabla \nabla \underline{\varepsilon} \quad \text{II.218}$$

La règle de normalité donne les tenseurs de contraintes :

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\delta \psi}{\delta \underline{\varepsilon}}, \quad \underline{\check{\sigma}} = \rho \frac{\delta \psi}{\delta \underline{\check{\varepsilon}}}, \quad \underline{\hat{\sigma}} = \rho \frac{\delta \psi}{\delta \underline{\hat{\varepsilon}}} \quad \text{II.219}$$

et le principe des puissances virtuelles donne les équations d'équilibre suivantes :

$$\text{div} \underline{\sigma} - \text{div}(\underline{\check{\sigma}}) + \text{div}(\text{div}(\underline{\hat{\sigma}})) + \rho \vec{f} = 0 \quad \text{II.220}$$

Plus trois équations vectorielles donnant les conditions aux limites en fonction de $\underline{\sigma}$, $\underline{\check{\sigma}}$, $\underline{\hat{\sigma}}$.

La simple observation de l'équation d'équilibre montre bien la complexité de la théorie.

Animé par le souci de clarifier et de systématiser toutes ces théories, **Germain[Ger73]** a utilisé la méthode des puissances virtuelles pour construire, d'une façon systématique, les théories du premier et du second gradient ainsi que la théorie micromorphique. Il a ainsi montré la capacité de la méthode des puissances virtuelles à construire une théorie "universelle" des milieux continus généralisés dans laquelle celle des milieux continus classiques est le cas particulier le plus simple.

2.1.4. Théories non locales

Les théories non locales contrairement aux théories locales considèrent que l'état de contrainte en un point matériel dépend de l'histoire de la déformation de tous les autres points matériels du milieu considéré. L'idée donc des modèles non locaux consiste à prendre en compte un effet de voisinage spatial pour décrire le comportement d'un point matériel : il y a interaction à

distance entre les points de la structure. Ces interactions ont lieu au minimum dans un voisinage de taille fixée, du point matériel considéré. L'influence d'un point sur un autre est d'autant plus faible que le point considéré est éloigné. Les premières théories non locales, proposées pour des matériaux élastiques granuleux, sont basées sur des considérations purement heuristiques [Kun68]. En utilisant le cadre thermodynamique des milieux continus, **Eringen** ([Eri72, Eri70]) a proposé une théorie non locale pour les milieux élastiques dans laquelle la théorie classique est un cas particulier. Du point de vue formulation théorique, la différence fondamentale entre les théories locale et non locale réside dans le passage de la forme intégrale (globale) à la forme locale des lois de conservation. En effet, pour les théories non locales, le passage de la forme intégrale à la forme locale des lois de conservation donne lieu à des termes appelés "termes résiduels de localisation" [Eri72]. En un point matériel donné, ces termes représentent l'effet du voisinage de ce point. Par conséquent, ils figureront comme variable nouvelle dans l'expression du potentiel thermodynamique, ce qui traduira la non localité de la loi de comportement. Pour éclairer la théorie d'**Eringen** [Eri72], écrivons les lois de conservation pour un milieu non local.

Conservation de la masse :

$$\begin{aligned} \frac{\delta\rho}{\delta t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = \hat{\rho} \quad \text{avec} \quad \int_{\Omega} \hat{\rho} dv = 0 \\ \rho\vec{W} = \vec{R} \quad \text{avec} \quad \int_{\Omega_s} \vec{R} ds = 0 \end{aligned} \quad \text{II.221}$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \text{div}(\underline{\sigma}) + \rho\vec{f} - \rho\vec{\gamma} = \hat{\rho}\vec{V} - \rho\vec{f} \quad \text{avec} \quad \int_{\Omega} \rho\vec{f} dv = 0 \\ \rho\vec{W}.\vec{V} - t = \rho\vec{F} \quad \text{avec} \quad \int_{\Omega_s} \vec{F} ds = 0 \end{aligned} \quad \text{II.222}$$

Conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} \rho \frac{de}{dt} + (e-c) + \rho\vec{V}\vec{f} = \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} - \text{div}(\vec{q}) + \rho(r + \hat{r}) \quad \text{avec} \quad \int_{\Omega} \rho\hat{r} dv = 0 \\ \rho\vec{V}(e-c) - t\vec{W} + \vec{q}\vec{n} = \vec{Q} \quad \text{avec} \quad \int_{\Omega_s} \vec{Q} ds = 0 \end{aligned} \quad \text{II.223}$$

Inégalités fondamentales :

$$\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}} - \rho \left[\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right] - \bar{q} \frac{\nabla T}{T} - \rho(\psi - C) - \hat{r} \bar{W} \bar{f} - \rho(T\hat{s} - \hat{r}) \geq 0 \quad \text{et} \quad \rho \hat{s} \bar{W} + \frac{\bar{q}}{T} \geq \hat{B} \quad \text{II.224}$$

$$\int_{\Omega} \rho \hat{s} dv = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_s} \bar{B} ds = 0$$

Remarquons que si toutes ces variables non-locales sont nulles, on retrouve bien les équations de conservation et de discontinuité de la théorie classique des milieux continus.

Des méthodes plus récentes de non-localité en déplacement ou en déformation totale ont été introduites via l'écriture d'un déplacement ou d'une rotation non-locale. Une loi d'interdépendance des déplacements à l'intérieur d'un voisinage peut être définie comme :

$$\bar{v}_i(x) = \frac{1}{V_r(x)} \int_V \alpha(s-x) v_i(s) dV(s) \quad \text{avec} \quad V_r(x) = \int_V \alpha(s-x) dV(s) \quad \text{II.225}$$

Jirasek [Jir05] propose une formulation où seule la déformation totale est calculée via une forme pondérée intégrale. Cette approche, moins riche que celle de la formulation d'Eringen est cependant plus simple à mettre en œuvre. La dépendance du voisinage est introduite dans l'équation d'équilibre en enrichissant le premier gradient du déplacement.

En résumé, bien que les théories mécaniques des milieux à microstructure semblent plus réalistes et en tout cas plus adaptées à l'étude des phénomènes de rupture, elles restent très peu utilisées à cause des difficultés théoriques, numériques et expérimentales qu'elles engendrent. De plus les travaux de **Iordache & al [Ior95]** semblent montrer une persistance de la bifurcation pour les milieux micropolaires. En tout état de cause, la complexité des développements induits par ces approches les rend incompatibles avec les codes industriels. Nous n'aborderons pas dans ce travail de telles formulations et nous leur préférons des formulations non locales en gradient de variables internes. Ces approches font l'objet de la suite de ce chapitre. La méthode des résidus de localisation limitée au cas de la déformation a inspiré les travaux de **Pijaudier-Cabot [Pij04]** ou encore de **Saanouni [Saa88]** et **Bazant [Baz88]** pour les formulations endommageables. Plus récents, les travaux menés par **Peerlings [Pee99]**, **Nedjar [Ned01]** puis **Engelen [Eng05]** sur les formulations en second

gradient de déformation ou de variables internes, d'une manière suffisamment simplifiées pour permettre une intégration aisée dans les codes éléments finis. Cependant, les difficultés d'utilisation et de convergence de ces modèles en limitent l'utilisation industrielle. De plus l'interprétation physique de ces formulations est complexe. La mesure des effets microscopiques à l'origine des phénomènes non locaux restent à ce jour délicate. Par ailleurs les approches sans maillage par essence non-locales semble être naturellement insensibles à la discrétisation spatiale selon **Duflot [Duf04]** et **Chen & al [Che00]**. Cependant la lourdeur des calculs limite encore l'utilisation de telle formulation pour les simulations complexes de mise en forme.

Dans ce qui suit, nous présentons une synthèse des formulations susceptibles d'assurer une indépendance au maillage et une régularisation de la solution éléments finis. Les formulations les plus robustes et les plus économiques du point de vue calcul et de l'implémentation qui serviront de base aux travaux présentés dans la suite de l'étude. Nous nous proposons de classer les différentes formulations selon les différents types de modèles non-locaux. L'analyse de la bibliographie montrent une grande disparité de résultats selon le type de loi de comportement utilisée, il faudra pour chaque type d'étude évaluer le potentiel de la formulation au vu du comportement matériel que nous avons choisi. Ainsi les modèles de matériaux élastiques endommageables (type bétons) semblent plus aisés à régulariser dans la zone post-critique. Par contre, peu de formulations sont appliquées à la plasticité à grand taux de déformation. Le caractère naturellement localisant des lois basées sur un couplage comportement/endommagement impose le choix d'un modèle non-local particulièrement robuste et efficace.

2.2 Considérations thermodynamiques

Les lois de comportement et les équations d'équilibre devant vérifier les principes de la thermodynamique, en particulier le second principe, la structure est considérée dans son ensemble comme un système thermodynamique en équilibre. Pour les formulations locales, la thermodynamique des processus irréversibles offre un cadre général pour l'écriture des modèles thermodynamiquement admissibles [**Lem92 et Lem01**]. Il n'en est pas de même pour les formulations non-locales. Bien que nombre d'entre elles s'avèrent capables d'assurer

l'indépendance des réponses éléments finis au maillage, elles ne sont pas équivalentes du point de vue thermodynamique. En effet, certaines ne respectent pas le principe de dissipation plastique maximum. D'autre part, l'origine ou la justification des termes non-locaux n'est pas toujours compatible avec le second principe de la thermodynamique. Certains auteurs comme **Santaoja[San04]** proposent un cadre thermodynamique pour l'analyse des modèles à gradient. Mais face au nombre très important de formulations disponibles, il est difficile de définir un contexte thermodynamique général pour les modèles non-locaux (Par ailleurs **Lorentz et Benallal [Lor05]** présentent un modèle en gradient découlant rigoureusement de la thermodynamique). Nous proposons donc d'étudier et de classer les différentes approches issues de la bibliographie au regard de leurs fondements thermodynamiques.

2.2.1. Formulation à potentiel d'état non local

Les formulations à non localité d'état introduisent des gradients dans le potentiel d'état. Il découle de ce potentiel un ensemble de variables non locales exploitées dans les lois de comportement. Dans le cas général, les modèles à non localité d'état proposent l'introduction de nouvelles variables d'état qui sont en fait des gradients de toutes les variables d'état dans l'expression du potentiel d'état. Dans le cas isotherme, nous pouvons écrire :

$$\psi = \psi \left(\underline{\underline{\varepsilon}}^e, \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\varepsilon}}^e, r, \overline{\nabla} r, \underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\alpha}}, D, \overline{\nabla} D \right) \quad \text{II.226}$$

Du potentiel ψ découle les relations d'état suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \frac{\delta \psi}{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^e} & \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\sigma}} &= \frac{\delta \psi}{\delta \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\varepsilon}}^e} \\ R &= \frac{\delta \psi}{\delta r} & \overline{\nabla} R &= \frac{\delta \psi}{\delta \overline{\nabla} r} \\ \underline{\underline{X}} &= \frac{\delta \psi}{\delta \underline{\underline{\alpha}}} & \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{X}} &= \frac{\delta \psi}{\delta \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\alpha}}} \\ Y &= \frac{\delta \psi}{\delta D} & \overline{\nabla} Y &= \frac{\delta \psi}{\delta \overline{\nabla} D} \end{aligned} \quad \text{II.227}$$

Ces relations sont exploitées dans l'écriture des lois de comportement comme proposée par **Voyadjis & al[Voy04]**. Cependant, la complexité de ces formulations les limites aujourd'hui à des approches théoriques. Cette approche peut être mise en œuvre partiellement en choisissant une ou plusieurs variables internes, par exemple **Shen & al[She02]** limitent la non localité d'état à la seule variable d'endommagement. Pour ce faire une forme quadratique du gradient d'endommagement est introduite dans le potentiel d'état. Pour le cas particulier de l'endommagement, citons aussi les travaux de **Liebe & al[Lie01]** qui conduisent à l'écriture d'une nouvelle variable d'état basée sur le gradient d'endommagement.

$$Y = \frac{\delta\psi}{\delta D} \quad \bar{\nabla}Y = \frac{\delta\psi}{\delta \bar{\nabla}D} \quad \text{II.228}$$

Le reste des relations d'état restant inchangé par rapport au cas local.

Dans le cas des formulations à potentiel d'état non local, l'endommagement est généralement choisi comme variable non-locale (comme proposé dans **Liebe & al.[Lie01]** ou **Svendsen & al[Sve03]**). Si cette méthodologie est efficace pour des matériaux élastiques endommageables, elle est difficilement généralisable à la plasticité. En effet, cette approche justifie une formulation à deux surfaces. L'évolution indépendante de la plasticité et de la variable non-locale reste difficile à justifier du point de vue physique. Enfin le critère de plasticité restant purement local, la décharge élastique reste elle aussi purement locale. Ainsi les éléments en décharge élastique sont insensibles à leurs voisinages. L'efficacité d'une telle démarche pour une structure élastoplastique est donc discutable. Enfin, le traitement des conditions de Kuhn-Tucker associées à ce critère pose de grandes difficultés. Le domaine actif sur lequel l'endommagement peut évoluer est différent du domaine d'écoulement plastique. La détermination de ce domaine actif, correspondant au respect des conditions de Kuhn-Tucker est une inconnue du problème.

En conclusion l'introduction d'un gradient d'endommagement dans l'énergie libre permet donc de déduire un critère d'endommagement non local, tout en respectant la thermodynamique des processus irréversibles. Cependant la complexité des développements dans l'environnement éléments finis et les limites théoriques pour un comportement élastoplastique endommageable limitent l'usage de la non localité d'état.

2.2.2 Formulations à potentiel de dissipation non locale

Elle consiste à introduire la non-localité, en délocalisant une ou plusieurs variables intervenant dans le potentiel de dissipation ou la fonction de charge. **Bazant & Jirasek**[Baz02] définissent deux catégories de formulations : les formulations intégrales fortement non-locales impliquant des variables régularisées sur un domaine donné, et les formulations faiblement non locales basées sur l'introduction de gradients supérieurs dans les lois de comportement.

Cette dernière catégorie, est celle qui est retenue dans ce travail. En plus de sa facilité d'implémentation, ces formulations sont compatibles avec le cadre thermodynamique classique des matériaux standards. La robustesse des modèles ainsi développés a conduit à leur utilisation dans le domaine des matériaux à plasticité-endommageable indépendante du temps en transformations finies [Gee05, She05, Den07]. Un autre avantage de ce type d'approche ce qu'elle permet de conserver la formulation locale du critère de plasticité et le schéma d'intégration matériel. Une variante consiste en l'écriture d'un critère de non-localité dont découle la variable régularisée comme proposé par **Svedberg & al**[Sve00] pour la plasticité et **Svensen & al**[Sve03] pour l'endommagement.

Critères non locaux de plasticité

Pour la plasticité à grande déformation la non localité provient de l'introduction d'un gradient de déformation plastique équivalente dans l'expression du critère de plasticité comme proposé par **Mühlhaus et Aifantis** [Müh91]. On regroupe en général sous le vocable de plasticité à gradient tous les modèles proposant d'enrichir le critère de plasticité d'un ou plusieurs termes en premier ou second gradient. Très répandu, ce type de formulation s'applique à une grande variété de lois de comportement comme proposé par **Fleck & al** [Fle01] ou **Svedberg & al** [Sve97]. La forme la plus simple proposée par **Aifantis**[Aif92] implique un terme additif en second gradient de la déformation plastique cumulée de la forme :

$$f^p = \|\underline{\sigma}\| - \sigma_y(p) + \omega \nabla^2 P \leq 0 \quad \text{II.229}$$

Où $\|\underline{\sigma}\|$ est la contrainte équivalente, p la déformation plastique cumulée, $\sigma_y(p)$ la contrainte d'écoulement éventuellement dépendante de la plasticité pour les matériaux écrouissables. Le paramètre ω correspond au coefficient de longueur interne caractéristique du matériau.

Dans d'autre cas c'est le second gradient d'écrouissage isotrope qui est introduit dans le critère de plasticité comme proposé par **Pamin & al[Pam03]** :

$$F(\underline{\sigma}, r, \nabla^2 k) = \|\underline{\sigma}\| - \sigma_y(k) + \omega \nabla^2 k \leq 0 \quad \text{II.230}$$

Un adoucissement est induit dans l'équation (II.230) par l'écrouissage isotrope négatif. De nouveau, la variable d'écrouissage isotrope "k" joue le rôle de multiplicateur plastique. Ce multiplicateur plastique issu de la relation de cohérence du critère de plasticité non local gouverne l'évolution de toutes les variables internes. En conséquence ces formulations en plasticité à gradient semblent particulièrement efficaces quelque soit le modèle d'évolution de l'endommagement ou de l'écrouissage.

Toutefois, leur capacité semble limitée quand l'ensemble des variables internes est couplé à l'endommagement et non plus à la seule contrainte de Cauchy. Dans ce cas, le multiplicateur plastique ne peut être réduit à la seule variable d'écrouissage isotrope. Le terme additif en second gradient traduit alors de manière approximative le second gradient du multiplicateur plastique.

Non localité induite par la viscosité

Voyiadjis[Voy05] propose une formulation originale où la non-localité est induite par une formulation dépendante du temps. C'est-à-dire, un critère d'endommagement non local visqueux est élaboré. La constante de temps vient alors jouer le rôle de limiteur de localisation. Cette approche permet d'introduire l'influence de la vitesse de chargement sur l'intensité de la localisation. Une vitesse de chargement infiniment lente conduit à une réponse purement locale de la structure. Paradoxalement, il existe des valeurs de viscosité pour lesquelles la localisation n'a pas lieu, alors que la striction est apparante. Si cette approche permet d'obtenir des résultats indépendants du maillage, la dépendance au pas de temps et l'identification des paramètres de viscosité restent des problèmes épineux.

Dans ce cadre on peut citer aussi les travaux de **Court [Cou06]**, basés sur la proposition de **Allix & Deu[All97]**. Ils associent la régularisation visqueuse et un algorithme de limitation du taux d'endommagement et de plasticité. La régularisation provient alors autant du comportement visqueux dynamique que de l'algorithme de limitation des taux d'évolution pour l'ensemble des éléments endommagés. Ceci revient à figer le phénomène de localisation avant qu'il ne conduise à une localisation excessive. Cette approche, très économique sur le plan de l'implémentation, reste cependant délicate à justifier sur le plan physique et nécessite d'identifier plusieurs constantes intimement dépendantes des autres paramètres du modèle et notamment de la constante de temps.

$$\dot{Z} = \frac{1}{t_c} \left[1 - \exp(-a \dot{f}_{stat}(Z, \underline{\varepsilon})) \right] \quad \text{II.231}$$

Où \dot{Z} est l'expression du taux limité d'une variable interne Z et \dot{f}_{stat} est la fonction d'évolution de Z sous chargement statique. Les constantes a et t_c sont des constantes du nouveau modèle pilotant les dimensions de la zone de localisation.

2.2.3 Variables non locales régularisées

Une alternative élégante à la plasticité à gradient est d'induire la non localité via une variable interne. Contrairement aux autres approches, on tente ici de limiter la dépendance au maillage en utilisant une variable non locale "régularisée". Le problème ainsi défini est supposé restaurer la régularité des équations d'équilibre. De nombreux travaux présentent des formulations à variables régularisées sous forme intégrale ou en gradient de variables internes. Parmi ces travaux, on peut citer les modèles en gradient de déformation plastique cumulée [**Gee03, Pee99, Boe05**] ou en gradient d'endommagement [**Lor99, Sim03, Ger05**]). Dans ce dernier cas, la non localité de la variable régularisée affecte la contrainte via un couplage comportement/endommagement.

A noter que l'approche en équation de régularisation proposée par **Germain & al[Ger05]** ne peut pas être comparée sur le plan thermodynamique à une non localité d'état et ce, bien que malgré que la variable force motrice d'endommagement est la variable non locale. En effet

dans le cas présent, la variable locale Y est simplement remplacée par son équivalent non local \bar{Y} ; l'endommagement découlant d'une relation explicite fonction de \bar{Y} .

Evidement le choix d'une variable scalaire simplifiera considérablement les développements éléments finis. Deux grandes catégories de formulations peuvent être dégagées :

- Les formulations introduisant des variables régularisées, sous forme intégrale (forme forte) au sens de **Pijaudier-Cabot[Pij88]** ou forme "forte" :

$$\bar{v}_i(x) = \frac{1}{V_r(x)} \int_V \alpha(s-x) v_i(s) dV(s) \quad \text{avec} \quad V_r(x) = \int_V \alpha(s-x) dV(s) \quad \text{II.232}$$

- Les formulations impliquant des variables solutions d'une équation de régularisation en second gradient (forme faible) implicite ou explicite comme détaillé dans **Engelen[Eng05]** :

$$\bar{v}_i - l^2 \frac{\delta^2 \bar{v}_i}{\delta x^2} = v_i \quad \text{II.233}$$

L'équation (II.233) s'obtient en faisant un développement de Taylor de l'équation (II.232). Les deux approches sont alors équivalentes si l'on néglige les termes d'ordre supérieur ou égal à quatre dans le développement limité de l'équation (II-232).

Nombre des variables non locales

Le choix d'une ou plusieurs variables non locales reste délicat à justifier. On peut cependant remarquer que les modèles les plus efficaces choisissent de rendre non locales la ou les variables associées aux phénomènes adoucissants. Ainsi le choix de la variable scalaire d'érouissage isotrope pour un modèle à érouissage négatif ou le choix de l'endommagement semblent les plus pertinents. Les travaux de **Peerlings [Pee99, Pee05]** puis **Engelen [Eng05]** par exemple, proposent de régulariser la déformation plastique cumulée. Par contre **Voyiadjis & al [Voy04]** propose de régulariser l'ensemble des variables internes. Il semble donc que l'on puisse obtenir de bons résultats en définissant une unique variable non-locale. Ce choix reste cependant fortement dépendant des lois de comportement et de la nature des couplages entre la variable non locale et les autres variables du modèle.

Nature des variables non locales

La non-localité peut en pratique être indifféremment appliquée à une variable de dissipation ou d'état. Ainsi **Germain&al[Ger05]** et **Liebe&al[Lie01]** proposent le choix de la variable force motrice de l'endommagement "Y" pour des comportements élastiques endommageables, Ces formulations semblent particulièrement efficaces. De surcroît cette variable n'est pas bornée ni strictement croissante contrairement à l'endommagement lui même. Enfin, la formulation est beaucoup plus simple à justifier sur le plan thermodynamique. Pour le cas élastoplastique endommageable, **Areias & al[Are03]** et **César-de-Sa & al[Cés04]** proposent de rendre l'endommagement scalaire non-local. Ces approches permettent d'introduire une multitude de lois de comportement sans modifier la structure de la relation de non-localité. Il semble donc que le choix de la variable flux ou de la variable force soit intimement lié à la nature des équations du modèle de comportement. Des modèles à endommagement régularisé impliquant la variable d'état ou la variable de dissipation sont proposés et leurs résultats sont discutés dans la suite de ce travail.

3. Détermination des variables régularisées

3.1. Formulations non locales intégrales

La non-localité introduite par les modèles intégraux est issue de l'écriture intégrale des quantités (variables d'état ou duales) sur un domaine donné :

$$\begin{aligned} \bar{v}i(x) &= \frac{1}{V_r(x)} \int_V \alpha(s-x)vi(s)dV(s) \\ \text{avec } V_r(x) &= \int_V \alpha(s-x)vi(s)dV(s) \end{aligned} \tag{II.234}$$

Où $\alpha(s-x)$ représente une fonction de pondération telle que la variable initialement locale (issue d'un unique point d'intégration) se trouve régularisée sur un domaine V (domaine actif). L'écriture de la non-localité sur les seules variables internes permet d'écrire l'équation d'équilibre en conservant l'expression classique de la déformation et de la contrainte. Ce type de modèle initialement développé par **Pijaudier-Cabot[Pij88]** permet l'écriture d'une formulation non locale efficace pour des modèles de comportement élastique endommageable

ou élastoplastique endommageable. La dissipation traditionnellement locale est maintenant répartie sur l'ensemble du domaine actif.

Cependant, l'écriture discrétisée du problème ainsi que l'intégration sur le domaine V_r ne sont pas aisées. De plus les conditions de Khun-Tucker associées à la plasticité posent le problème de la définition du domaine actif pour des cas de chargements non monotones (décharge élastique). **Jirasek & al [Jir01]** recense et détaille précisément les qualités et les difficultés d'implémentation numérique inhérentes à ces méthodes.

Les méthodes non-locales intégrales rigoureuses d'un point de vue mathématique semblent difficiles à se généraliser aux calculs de structures complexes. La lourdeur des calculs des formes intégrales non locales rend difficile l'implémentation dans les codes éléments finis commerciaux.

3.2. Relation de non-localité en second gradient

Certains auteurs formulent des hypothèses sur la fonction de pondération de l'équation 234. Ainsi par développement en série de Taylor au point "x" de la forme intégrale et en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 2, on aboutit aux formulations en second gradient de **Peerlings & al [Pee99]**. Cette équivalence ainsi que la notion de relation explicite et implicite est largement discutée dans **Engelen [Eng05]**.

Par exemple avec :

$$\alpha(x) = \exp \left[- \left(\frac{2\|x\|}{l} \right)^2 \right] \quad \text{II.235}$$

on définit ici le rayon d'action de la fonction de pondération. Le développement de Taylor au point "x" conduit à :

$$\bar{v}_i = v_i + \frac{l^2 \partial^2 v_i}{16 \partial x \partial x} + \varepsilon \quad \text{II.236}$$

Par soustraction de cette relation au développement de Taylor de $\nabla^2 v_i(x)$ et en négligeant les termes d'ordre excédant 2 on aboutit à l'expression implicite suivante :

$$\bar{v}_i - \frac{l^2 \partial^2 \bar{v}_i}{16 \partial x \partial x} = v_i + \varepsilon \quad \text{II.237}$$

Cette expression de non localité est dite "implicite" car le second gradient s'applique à la variable non locale \bar{v}_i et non à la variable elle même " v_i ". **Askes**[Ask02] montre que les modèles non-locaux intégraux et les modèles à second gradient implicites ou explicites sont issus de la même approche, visant à imposer la dissipation sur un volume fixé par la formulation et non par la discrétisation. L'étude mathématique de la relation de régularisation implicite proposée par **Geers**[Gee03] montre l'équivalence entre modèles en gradient et modèles intégraux par une fonction de pondération selon **Green** (voir[Zar98]). L'ensemble des travaux récents montre que l'approximation au second ordre de la relation non-locale peut être considérée comme raisonnable. Une étude comparative effectuée par **César-de-Sa**[Ces06] tend à confirmer la supériorité des formulations à gradient implicite pour assurer l'indépendance vis à vis de la discrétisation spatiale.

3.3 Approximation local du gradient

La démarche la plus évidente pour calculer les gradients spatiaux d'une variable interne sur un voisinage est la méthode locale. Par exemple, on peut utiliser une méthode des moindres carrés pour évaluer une fonction interpolant les valeurs discrètes des points d'intégration comme proposé par **Michel & Picart**[Mic02, Mic03]. **Villon**[Nay94]. Ces derniers proposent la méthode Moving Least Squar(MLS) pour interpoler les valeurs discrètes. Le gradient étant ensuite calculé par dérivation analytique.

Abu-al-Rub [Abu05] propose de formuler un super-élément dont les points d'intégration disposés sur une grille régulière permettent de déterminer un champ continu grâce aux fonctions de forme élémentaires. Le choix d'une disposition aléatoire ou irrégulière des points d'intégration nuit fortement à la précision de la méthode. De plus, au bord de la structure des singularités apparaissent dues à la dissymétrie de répartition des points d'intégration. Enfin ce calcul analytique ne peut être effectué qu'à posteriori sur une cartographie de la variable souhaitée issue de l'incrément précédent. Ceci implique que le gradient et sa variable ne peuvent être connus au même temps. Dans le cas des équations de "régularisation" la

détermination de la variable non-locale peut aussi être traitée analytiquement quand l'équation est réduite à un problème linéaire (voir **Boers[Boe05]**).

4. Conclusion

Une grande variété de formulations non-locales est disponible à ce jour. Il convient pour régulariser un modèle élastoplastique de choisir la ou les meilleures formulations possibles. Nous nous sommes donc concentrés sur les approches susceptibles de régulariser le modèle élastoplastique décrit dans le premier chapitre. Souhaitant par ailleurs intégrer nos modèles à des codes éléments finis industriels standards, s'est limitée aux formulations en gradients supérieurs ne nécessitant pas de calculs analytiques ou numériques des formes intégrales. L'énorme avantage des formulations en gradient de variables internes est la conservation de l'équation d'équilibre sous sa forme standard et donc une plus grande facilité d'implémentation.

Le phénomène adoucissant à l'origine de la bifurcation est, pour notre approche, l'endommagement. Les chapitres suivants traiteront uniquement le cas d'une variable non-locale d'endommagement. Reste donc à explorer les diverses possibilités offertes par les formulations non locales en gradient d'endommagement. Formulées dans des contextes thermodynamiques différents, deux approches sont étudiées dans le chapitre suivant.

Chapitre III :

Approche non locale

Introduction

Pour palier aux défauts des méthodes analytiques une manière élégante est de traiter variationnellement la relation ou le critère en gradient. Le gradient est naturellement exprimé par dérivation des fonctions de forme de l'élément. La variable non-locale devient alors une variable nodale. L'acuité du calcul du gradient est limitée par le nombre de nœuds de l'élément. La méthode des éléments finis garantissant naturellement la continuité du champ de la variable non locale. Les gradients étant obtenus par dérivation des fonctions de forme élémentaires. La variable non locale devient alors une variable nodale et doit être interpolée aux points d'intégration pour être exploitée dans la loi de comportement. La simplicité de mise en œuvre de cette formulation la rend aisément applicable à un grand nombre de modèles de comportement.

Ces formulations semblent être particulièrement efficaces sur des modèles d'élastoplasticité simples impliquant un écrouissage négatif ou une loi d'endommagement explicitement dépendante [Deb99, Eng06, Bru05]. Dans ces types de formulations, la variable régularisée découle variationnellement d'une relation entre la variable non locale et son gradient. Dans ce contexte, Brunet [Bru05] propose un schéma numérique spécifique pour résoudre cette nouvelle fonctionnelle. Généralement cette dernière est traitée couplée à la fonctionnelle des déplacements. Dans ce chapitre, en premier lieu, nous allons traiter d'une manière générale la résolution de l'équation (II.233) Avant de particulariser les développements sur n'importe quelle variable interne qui seront ici : la force motrice d'endommagement, puis la variable d'endommagement elle même.

1. Traitement variationnel de l'équation de non localité

Au lieu de traiter l'équation de non localité (II.237) d'une façon explicite en calculant en chaque point d'intégration le Laplacien de la variable d'état, nous traitons cette équation dans le cadre d'une formulation variationnelle. Comme cette méthodologie est à priori généralisable à toutes les variables internes scalaires, elle est ici écrite pour le cas d'une variable d'état quelconque noté "Z". D'autre part l'équation de non localité (III.237) est

remplacée par une équation de régularisation implicite au sens de **Geers & Peerlings [Gee04, Pee05]** de la forme :

$$\bar{Z} - \omega \cdot \overline{\text{div}(\nabla \bar{Z})} = Z \quad \text{III.238}$$

avec ω un paramètre de longueur interne homogène au carré d'une longueur interne l^2 et \bar{Z} la variable régularisée issue de la variable purement locale Z . Cette relation est postulée et ne découle en rien d'un raisonnement thermodynamique. On postule de même une condition limite de type Neumann sur le bord :

$$-\int \left[\overline{\omega \nabla \bar{Z}} \right] \bar{n} d\Gamma_s \geq 0 \quad \text{III.239}$$

où \bar{n} est la normale à la frontière du volume où la variable \bar{Z} est définie. Nous postulerons que le bord du domaine de définition est celui de la structure $\Gamma_z = \Gamma_s$.

1.1. Ecriture variationnelle

Les deux équations différentielles aux dérivées partielles qui gouvernent le problème aux valeurs initiales et aux limites (P.V.I.L) sont donc l'équation d'équilibre classique et la relation de régularisation (III.240).

$$\begin{cases} \overline{\text{div}(\sigma)} + \vec{f} = 0 \\ \underline{\sigma} \cdot \bar{n} = \vec{F} \quad \text{Sur } \Gamma_F \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{Z} - \omega \cdot \overline{\text{div}(\nabla \bar{Z})} = Z \\ \overline{\omega \text{grad} \bar{Z}} \cdot \bar{n} + \vec{0} \quad \text{Sur } \Gamma \end{cases} \quad \text{III.240}$$

Il découle de ce système une forme variationnelle forte qui peut s'écrire en introduisant les fonctions tests $\delta \bar{u}$ et $\delta \bar{Z}$ comme suit :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_e} \left(\overline{\text{div}(\sigma)} + \vec{f} \right) \delta \bar{u} d\Omega_e = 0 \quad \forall \delta \bar{u} \in \Omega & \text{(a)} \\ \int_{\Omega_e} \left(\overline{\omega \cdot \text{div}(\nabla \bar{Z})} - \bar{Z} + Z \right) \delta \bar{Z} d\Omega_e = 0 \quad \forall \delta \bar{Z} \in \Omega & \text{(b)} \end{cases} \quad \text{III.241}$$

L'intégration par partie de l'équation (III.241-a) donne :

$$\int_{\Omega} \left(\overline{\text{div}(\sigma)} + \vec{f} \right) \delta \bar{u} d\Omega_e = - \int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla (\delta \bar{u}) d\Omega + \int_{\Gamma_s} \overline{\delta u \sigma} \cdot \bar{n} ds + \int_{\Omega} \overline{f \delta u} d\Omega = 0 \quad \text{III.242}$$

Alors que l'intégration de (III.241-b) s'exprime :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \left(\overline{\omega \cdot \text{div}(\nabla \bar{Z})} - \bar{Z} + Z \right) \delta \bar{Z} d\Omega_e &= - \int_{\Omega} \left(\overline{\omega \nabla \bar{Z} \cdot \nabla \delta Z} + \bar{Z} \cdot \delta \bar{Z} \right) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \overline{\omega \nabla \bar{Z} \cdot \bar{n}} \cdot \delta Z ds + \int_{\Omega} Z \cdot \delta \bar{Z} d\Omega \end{aligned} \quad \text{III.243}$$

où les conditions de Neumann sont :

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_s} (\sigma \cdot \bar{n}) \delta \bar{u} ds = \int_{\Gamma_s} (\bar{T}) \delta \bar{u} ds & \text{(a)} \\ \int_{\Gamma_z} (\overline{\nabla \bar{Z} \cdot \bar{n}}) \delta \bar{Z} ds = 0 & \text{(b)} \end{cases} \quad \text{III.244}$$

En discrétisant le domaine " Ω " de la structure en plusieurs éléments simples, les résidus globaux s'écrivent :

$$\begin{cases} R(u, \bar{Z}) = \sum (F^e \text{ext} - F^e \text{int}) = 0 \quad \forall \quad \delta \bar{u} \text{ cinématiquement admissible (CA)} \\ H(u, \bar{Z}) = \sum (H^e \text{ext} - H^e \text{int}) = 0 \quad \forall \quad \delta \bar{Z} \text{ cinématiquement admissible (CA)} \end{cases} \quad \text{III.245}$$

Ecrivons maintenant pour un élément quelconque de la structure, la différence des efforts extérieurs et intérieurs

$$\begin{cases} R^e = - \int_{\Omega_e} \sigma \cdot \nabla (\delta u) d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} \overline{\delta u} \bar{T} \cdot ds + \int_{\Omega_e} f \overline{\delta u} d\Omega \\ H^e = - \int_{\Omega_e} \left(\overline{\omega \nabla \bar{Z} \cdot \nabla \delta Z} + \bar{Z} \cdot \delta \bar{Z} \right) d\Omega + \int_{\Omega_e} Z \cdot \delta \bar{Z} d\Omega \end{cases} \quad \text{III.246}$$

Le système peut maintenant être discrétisé par la méthode des éléments finis. Dans le cas où Z est fonction des déplacements, le choix de fonctions de forme en déplacement d'un degré supérieur à celle de la variable non-locale est justifié par **Lorentz & Andrieux [Lor99]** et **Simone & Askes [Sim85]**. Ces approximations sont les suivantes :

$$\begin{cases} \{u^e\} = [N_u^e] \{u_i^e\} & \{\delta u^e\} = [N_u^e] \{\delta u_i^e\} \\ \{\bar{Z}^e\} = [N_{\bar{z}}^e] \{\bar{Z}_i^e\} & \{\delta \bar{Z}^e\} = [N_{\bar{z}}^e] \{\delta \bar{Z}_i^e\} \end{cases} \quad \text{III.247}$$

Par dérivation, nous avons :

$$\begin{cases} \{\nabla \delta u^e\} = \left[\frac{\partial N_u^e}{\partial x_i} \right] \{\delta u_i^e\} \\ \nabla \{\delta \bar{Z}^e\} = \left[\frac{\partial N_{\bar{z}}^e}{\partial x_i} \right] \{\delta \bar{Z}_i^e\} \end{cases} \quad \text{III.248}$$

Où :

$$\left[\frac{\partial N_u^e}{\partial x_i} \right] = [B_u] \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial N_{\bar{z}}^e}{\partial x_i} \right] = [B_{\bar{z}}] \quad \text{III.249}$$

En approchant les champs de déplacement et de variable non locale, le système (III.246) devient :

$$\begin{cases} \{R^e\} = - \int_{\Omega^e} \langle \delta u_i^e \rangle [B_u^e]^T \{\sigma\} d\Omega + \int_{\Omega^e} \langle \delta u_i^e \rangle [N_u^e]^T \{f\} d\Omega \\ \quad + s \int_{\Gamma^e} \langle \delta u_i^e \rangle [N_u^e]^T \{T\} ds \\ \{H^e\} = - \int_{\Omega^e} \left(\omega \langle \delta \bar{Z}_j^e \rangle [B_{\bar{z}}^e]^T [B_{\bar{z}}^e] \{\bar{Z}_k^e\} + \langle \delta \bar{Z}_j^e \rangle [N_{\bar{z}}^e]^T [N_{\bar{z}}^e] \{\bar{Z}_k^e\} \right) d\Omega \\ \quad + \int_{\Omega^e} \langle \delta \bar{Z}_j^e \rangle [N_{\bar{z}}^e]^T [N_{\bar{z}}^e] \{\bar{Z}_k^e\} d\Omega \end{cases} \quad \text{III.250}$$

Les intégrations sur le domaine de référence "Ω" sont calculées en utilisant la méthode de Gauss. Ce qui conduit à l'expression du système élémentaire suivant :

$$\begin{cases} \{R^e\} = \langle \delta u_i^e \rangle \left[\sum_{npg} \pi_j \left(- [B_u^e]^T \{\sigma\} J + [N_u^e]^T \{f\} J + [N_{\bar{z}}^e]^T \{T\} J_s \right) \right] \\ \{H^e\} = \langle \delta \bar{Z}_j^e \rangle \left[\begin{aligned} & - \sum_{npg} \pi_j \left(\omega [B_{\bar{z}}^e]^T [B_{\bar{z}}^e] + [N_{\bar{z}}^e]^T [N_{\bar{z}}^e] \right) \{\bar{Z}_k^e\} \\ & + \sum_{npg} \pi_j [N_{\bar{z}}^e]^T \{Z\} J \int d\Omega \end{aligned} \right] \end{cases} \quad \text{III.251}$$

1.2. Implémentation numérique

Après assemblage sur tous les éléments du domaine de la structure le système (III.251) peut être résolu par la méthode de Newton Raphson. Le système discrétisé ci-dessus est linéarisé par un développement de Taylor au premier ordre. On peut donc écrire le système à l'instant t_{n+1} et à l'itération "s" comme suit :

$$\begin{cases} \left[R(u, \bar{Z})_{n+1} \right]^s + \left[\frac{\partial R(u, \bar{Z})_{n+1}}{\partial u} \right]^s \delta \bar{u}_k + \left[\frac{\partial R(u, \bar{Z})_{n+1}}{\partial \bar{Z}} \right]^s \delta \bar{Z}_k = 0 \\ \left[H(u, \bar{Z}) \right]^s + \left[\frac{\partial H(u, \bar{Z})_{n+1}}{\partial u} \right]^s \delta \bar{u}_k + \left[\frac{\partial H(u, \bar{Z})_{n+1}}{\partial \bar{Z}} \right]^s \delta \bar{Z}_k = 0 \end{cases} \quad \text{III.252}$$

En négligeant la variation du Jacobien au cours de l'évolution ce qui est raisonnable pour le cas des petits incréments de chargement, le module tangent élémentaire s'exprime comme suite :

$$\begin{aligned} K_{uu} &= -\sum \pi_j [B_u^e]^T \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial u_k} \right\} J = -\sum \pi_j [B_u^e]^T [\tilde{\Lambda}] [B_u^e] J \\ K_{u\bar{Z}} &= \frac{\partial R(u, \bar{Z})_{n+1}}{\partial \bar{Z}} - \sum \pi_j [B_u^e]^T \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{Z}} \right\} [N_u^e] J \\ K_{\bar{Z}u} &= \frac{\partial H(u, \bar{Z})_{n+1}}{\partial u} - \sum \pi_j [N_{\bar{z}}^e]^T \left\{ \frac{\partial Z_i}{\partial \varepsilon_j} \right\} [B_{\bar{z}}^e] J \\ K_{\bar{Z}\bar{Z}} &= \frac{\partial H(u, \bar{Z})_{n+1}}{\partial \bar{Z}} = -\sum \pi_j [B_{\bar{z}}^e]^T [w] [B_{\bar{z}}^e] J + [N_{\bar{z}}^e]^T \frac{d(\bar{Z} - Z)}{d\bar{Z}} [N_{\bar{z}}^e] J_s \end{aligned} \quad \text{III.253}$$

où la matrice ω s'écrit :

$$[\omega] = \begin{bmatrix} l^2 & 0 & .. & 0 \\ : & l^2 & .. & 0 \\ : & .. & : & : \\ 0 & 0 & .. & l^2 \end{bmatrix} \quad \text{III.254}$$

1.2.1. Choix des variables non locales

Le choix d'une ou plusieurs variables non locales reste délicat à justifier. Cependant, on peut remarquer que les modèles les plus efficaces choisissent de rendre non locales la ou les variables associées aux phénomènes adoucissants. Ainsi le choix de la variable scalaire d'érouissage isotrope pour un modèle à érouissage négatif ou le choix de l'endommagement semblent les plus pertinents. Les travaux de **Peerlings [Pee99, Pee05]** puis **Engelen [Eng05]** par exemple proposent de régulariser la déformation plastique cumulée. Par contre **Voyiadjis & al [Voy04]** propose de régulariser l'ensemble des variables internes. Il semble donc que l'on puisse obtenir de bons résultats en définissant une unique variable non-locale. Ce choix reste cependant fortement dépendant des lois de comportement et de la nature des couplages entre la variable non locale et les autres variables du modèle. La non-localité peut en pratique être indifféremment appliquée à une variable de dissipation ou d'état. Par exemple, **Germain & al [Ger05]** et **Liebe & al [lei01]** proposent le choix de la variable force motrice de l'endommagement Y . Pour des comportements élastiques endommageables, ces formulations semblent particulièrement efficaces. Pour le cas élastoplastique endommageable, **Areias & al [Are03]** et **César-de-Sa & al [Ces06]** proposent de rendre l'endommagement scalaire non-local. Ces approches permettent d'introduire une multitude de lois de comportement sans modifier la structure de la relation de non-localité. Dans ce travail, nous décidons d'adopter cette dernière approche, Par conséquent, un modèle élastoplastique simplifié introduisant dans une première tentative la force motrice d'endommagement \bar{Y} puis dans une seconde, l'endommagement régularisé \bar{D} dans les relations d'évolution et de couplage à la contrainte est proposé. La variable régularisé est solution d'une forme variationnelle faible (équation de régularisation implicite) fonction de la variable classique (locale). Ce dernier restant gouverné par le modèle d'endommagement ductile, leurs résultats sont discutés dans la suite de ce travail.

2. Formulation non locale en force motrice d'endommagement

Dans cette section, nous avons fait le choix de traiter variationnellement l'équation de l'évolution de l'endommagement. La formulation exploite une variable non locale \bar{Y} correspondant à la force motrice d'endommagement. Cette variable introduite dans le modèle local de comportement permettra un couplage à l'ensemble des variables internes. Après implémentation, le programme sera utilisé pour simuler la réponse d'une éprouvette en traction. Les avantages et limites de cette approche seront discutés vis-à-vis des différentes dépendances résultats aux paramètres de discrétisation seront discutés à la fin de cette section.

2.1. Ecriture de la relation de non localité

Le calcul de \bar{Y} est modifié par rapport à la formulation précédente. En effet le potentiel d'état reste purement local dans cette approche :

$$\rho\psi = \frac{1}{2} \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}^e : \underline{\underline{\Lambda}} : \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}^e + \frac{1}{2} Q(\tilde{r})^2 \quad \text{III.255}$$

La relation de non localité n'est alors plus motivée par une démarche thermodynamique mais par l'écriture d'une variable non locale sur un voisinage tel que donné par l'équation (240-b). Nous choisissons donc la variable nodale non locale \bar{Y} comme étant la solution de l'équation suivante :

$$\bar{Y} - \omega \Delta \bar{Y} = Y \quad \text{III.256}$$

Où la relation (III.256) définit une relation de régularisation en force motrice d'endommagement Y . cette nouvelle équation se traite par la méthode des éléments finis au même titre que l'équation d'équilibre.

$$\begin{cases} \overline{\text{div}(\underline{\underline{\sigma}})} + \vec{f}_v = 0 \\ \bar{Y} - \omega \text{div}(\nabla \bar{Y}) = Y \end{cases} \quad \text{III.257}$$

L'ensemble des développements théoriques sont expliqués au paragraphe précédent pour une variable scalaire quelconque \bar{Z} la matrice jacobienne élémentaire est constitué de quatre termes calculé en chaque point d'intégration : K_{uu} est le terme classique de la matrice jacobienne. $K_{u\bar{Y}}$ et $K_{\bar{Y}u}$ sont les termes de couplage déplacement/force motrice d'endommagement, enfin $K_{\bar{Y}\bar{Y}}$ correspond à la seule fonctionnelle de régularisation. En tenant compte des travaux De **Boers, and all [Boe05]**, on ne retiendra que les termes suivant la diagonale c'est à dire que $K_{u\bar{Y}} = K_{\bar{Y}u} = 0$:

$$K_{uu} = -\sum \pi_j [B_u^e]^{-T} \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial u_k} \right\} J = -\sum \pi_j [B_u^e]^{-T} [\tilde{\Lambda}] [B_u^e] J \quad \text{III.258}$$

$$K_{\bar{Y}\bar{Y}} = \frac{\partial H(u, \bar{Y})_{n+1}}{\partial \bar{Y}} = -\sum \pi_j [B_{\bar{Y}}^e]^{-T} [\omega] [B_{\bar{Y}}^e] J + [N_{\bar{Y}}^e]^{-T} \frac{d(\bar{Y} - Y)}{d\bar{Y}} [N_{\bar{Y}}^e] j_s$$

$$\begin{cases} \left[R(u, \bar{Y})_{n+1} \right]^s + \left[\frac{\partial R(u, \bar{Y})_{n+1}}{\partial u} \right]^s \delta \bar{u}_k = 0 \\ \left[H(u, \bar{Y}) \right]^s + \left[\frac{\partial H(u, \bar{Y})_{n+1}}{\partial \bar{Y}} \right]^s \delta \bar{Y}_k = 0 \end{cases} \quad \text{III.259}$$

Les équations du système (III.259) sont indépendantes ce qui fait qu'on peut procéder a leurs résolutions séparément. Selon l'algorithme suivant :

Algorithme d'intégration

Le comportement local est similaire en tout point à celui décrit au chapitre précédent. Un nouveau bloc permettent de calculer \bar{Y} est mis en disposition

DEBUT

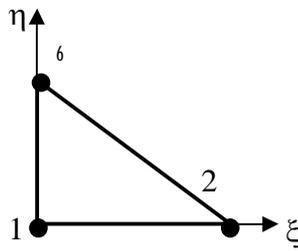
- Lecture des variables internes à l'incrément "n+1" de l'incrément de déformation $\Delta \underline{\varepsilon}$ et de la variable non locale \bar{Y}_n .
- Calcul de $\underline{\sigma}_{n+1}^*$

- Calcul de la fonction de charge prédictive : $f_{n+1}^*(D_n, \underline{\sigma}^*, R_n, \Delta\lambda)$
- Test du critère (si $f_{n+1}^* < 0 \quad V_i = V_i^*$)
- Sinon correction plastique telle que $f_{n+1}(D_n, \underline{\sigma}^*, R_n, \Delta\lambda)$ par l'algorithme de Newton Raphson. Sachant que l'endommagement $D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\lambda}{(1-D_n)^\beta} \left\langle \frac{\bar{Y}_n - Y}{S} \right\rangle^s$
- Calcul des autres variables internes couplées à l'endommagement:
- $V_{n+1}(V_n, D_{n+1}, \Delta\lambda) = V_n + \Delta\lambda \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right)$
- Calcul de la force d'endommagement locale : $Y_{n+1} = Y_{n+1}(\varepsilon_e, \underline{\Delta}, V_{n+1})$
- Calcul des matrices tangentes selon les équations (258).
- Fin de la boucle locale.
- Résolution de l'équation (III.259) pour le calcul de \bar{Y}_{n+1} .

2.1.2. Choix de l'élément de régularisation

Dans la majorité des travaux qui ont été réalisés, les variables nodales à calculer sont dépendantes. Alors les auteurs optent pour des éléments à degré de liberté supplémentaire. Ce qui fait que la cinématique des déplacements est conservée et reste parfaitement standard, par contre un degré de liberté additionnel supplémentaire associé à la variable non locale est ajouté, pour satisfaire les conditions de stabilité de **Brezzi-Babuska [Bab97]**. En effet, l'existence en un même nœud du champ de déplacement et d'un de ses gradients génère des instabilités numériques de la contrainte. Il convient alors pour éviter ces phénomènes de choisir des fonctions d'interpolation du gradient ∇u d'un degré plus faible que celle du déplacement. Nous citerons à titre indicatif les travaux de **Areias et al [Are03]** qui utilisent lors des éléments Q8/Q9 pour leurs analyses. Dans les travaux de **Besson et Lorentz[Bes06]**, des éléments quadratique linéaire, sont utilisés pour obtenir une meilleure convergence. **Denis**

[Den07] a opté pour un élément de triangulaire à trois nœuds pour décrire le champ de déplacement et un élément triangulaire avec un degré de liberté supplémentaire pour décrire le Lapalcien du dommage. Dans le cas où D est fonction des déplacements, le choix des fonctions de forme en déplacement d'un degré supérieur à celle de la variable non-locale est justifié par **Lorentz & Andrieux [Lor99]**. Dans notre cas, le calcul des déplacements et de la force motrice d'endommagement se fait d'une manière indépendante, par conséquent, nous considérons un élément triangulaire à degré de liberté additionnelle supplémentaire. Les variables nodales sont les déplacements (u_x et u_y) et la variable d'endommagement non locale \bar{Y} . Les variables nodales \bar{Y} sont systématiquement transférées aux points de Gauss pour réaliser le couplage avec les équations de comportement. Comme dans le cas d'un calcul local, dès qu'un point de Gauss est totalement endommagé ($D=1$), l'élément correspondant est éliminé de la boucle de calcul. Les fonctions de forme sont :



$$\text{Nœud 1} \quad \xi = 0, \quad \eta = 0, \quad N_1 = 1 - \xi - \eta$$

$$\text{Nœud 2} \quad \xi = 1, \quad \eta = 0, \quad N_2 = \xi$$

$$\text{Nœud 3} \quad \xi = 1, \quad \eta = 1, \quad N_3 = \eta$$

L'intégration numérique des deux fonctionnelles sur l'élément de référence se fera en utilisant un point de Gauss, soit donc une intégration exacte.

2.2. Application à une éprouvette en traction

Le cas d'une éprouvette 2D de dimension 1×3 soumise en traction est étudié.

Une condition limite d'encastrement est appliquée du bas et un déplacement est imposé du côté haut. Un maillage régulier est utilisé avec une taille d'élément $h=0.16$ (Fig.(III-1)).

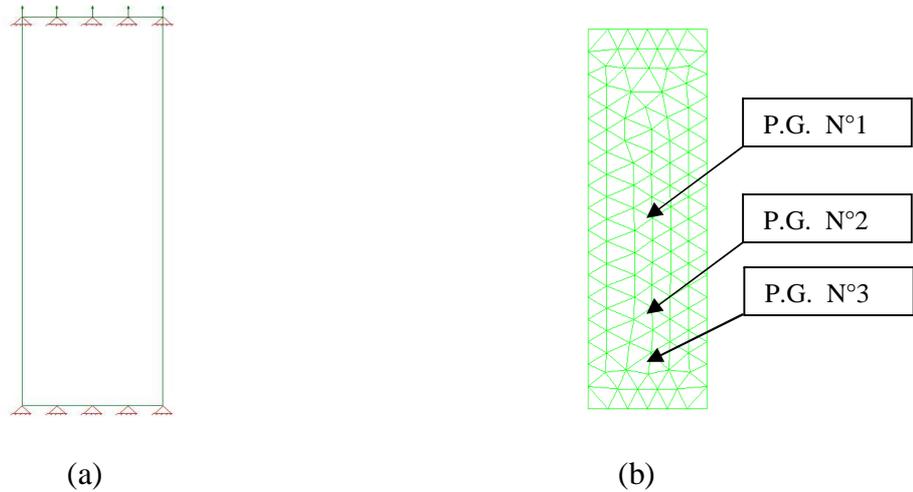


Figure III-1 : Eprouvette en traction de dimension 1*3 avec les conditions aux limites (a) et maillage pratiqué (b).

Les paramètres du matériau choisi pour cette étude sont :

E (MPa)	ν	σ_y (MPa)	Q(MPa)	b	β	S	s	Y_0
210 000	0.3	500	1000	40	1.	10	0.8	0.

Tableau III- 1 : Caractéristiques Mécaniques du matériau

Dans un premier temps, nous étudions l'influence de la longueur interne sur l'évolution des résultats. Pour ce faire, nous présentons sur la Fig.(III-2) l'évolution de la force en fonction de l'allongement de l'éprouvette pour différentes valeurs de " ω " : $\omega=0.$, $\omega=0.1$, $\omega=0.3$, $\omega=0.7$ et $\omega=3.$ " ω " à tendance à influencer sur la dissipation à rupture de la structure. Nous constatons alors que la réponse globale de la structure dépend considérablement du paramètre de la longueur interne. Les courbes se superposent jusqu'à un déplacement d'environ 0.21 pour des allongements supérieurs, nous constatons que les courbes sont directement lié au choix de la valeur de ω ce qui permet de dire que nous pouvons contrôler la zone de dissipation du matériau en faisant varier la valeur de ω .

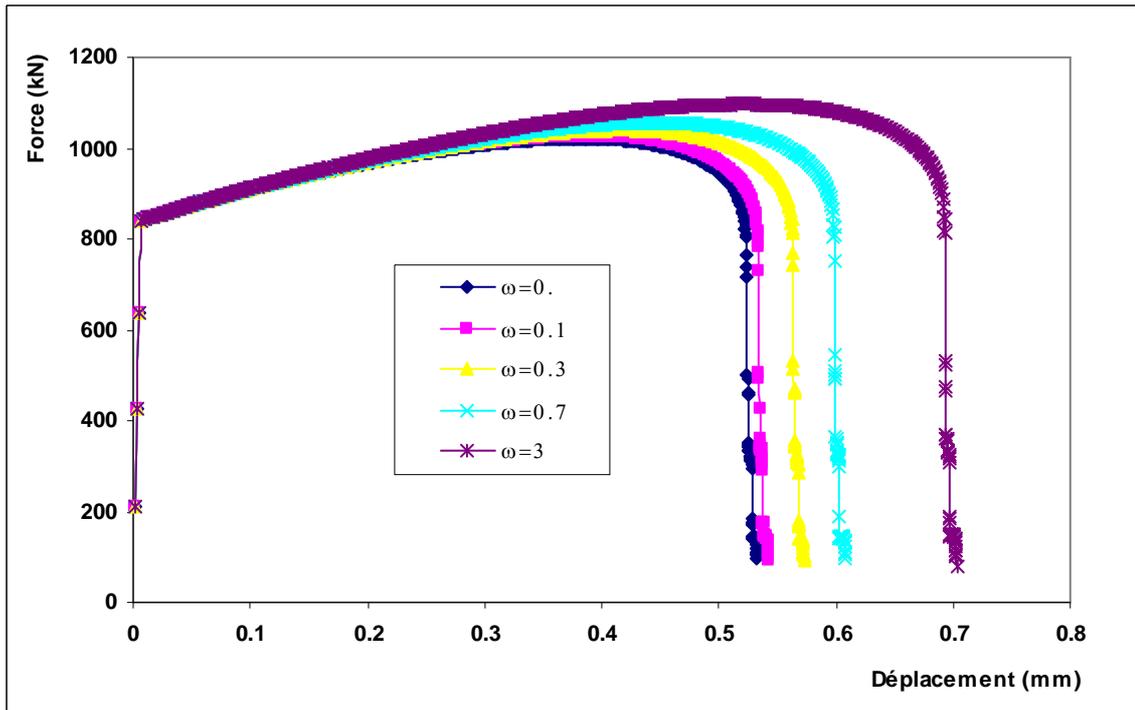


Figure III- 2 : Courbes forces déplacement pour 5 valeur de ω

La Fig.(III-3) présente la distribution de l'endommagement, de la déformation plastique, l'énergie dissipé et de la contrainte de von Mises au moment de la rupture, pour trois valeur de ω : $\omega=0$.(cas local) et $\omega=0.3$ et $\omega=3$.(Cas non local). Nous constatons que dans le cas non local la bande de localisation de l'endommagement à changer de direction mais elle reste toujours localisée selon une rangée d'éléments. Donc la localisation pour la variable d'endommagement, la déformation cumulée et la contrainte de von-Mises, se fait d'une manière identique, (mais dans une autre direction) que celle observé dans le cas local. Cependant, les isovaleurs de \bar{Y} semble être régulières sur la partie centrale de l'éprouvette pour les trois maillages et la localisation semble s'étendre le long de la partie centrale de la plaque. Mais ceci sans s'étendre aux autres variables où nous constatons que les isovaleurs du dommage et de déformation plastique reste toujours localisé sur une rangé d'élément, comme dans le cas local. La concentration de l'écoulement plastique cumulée sont localisées dans une bande de largeur unitaire pour les fortes valeurs d'endommagement. La concentration de l'écoulement plastique dans une rangée d'éléments apparaît quasi simultanément dans le cas local et non local mais pour des valeurs maximales d'endommagement atteintes différentes ; le matériau est d'autant plus ductile que la valeur de ω est grande.

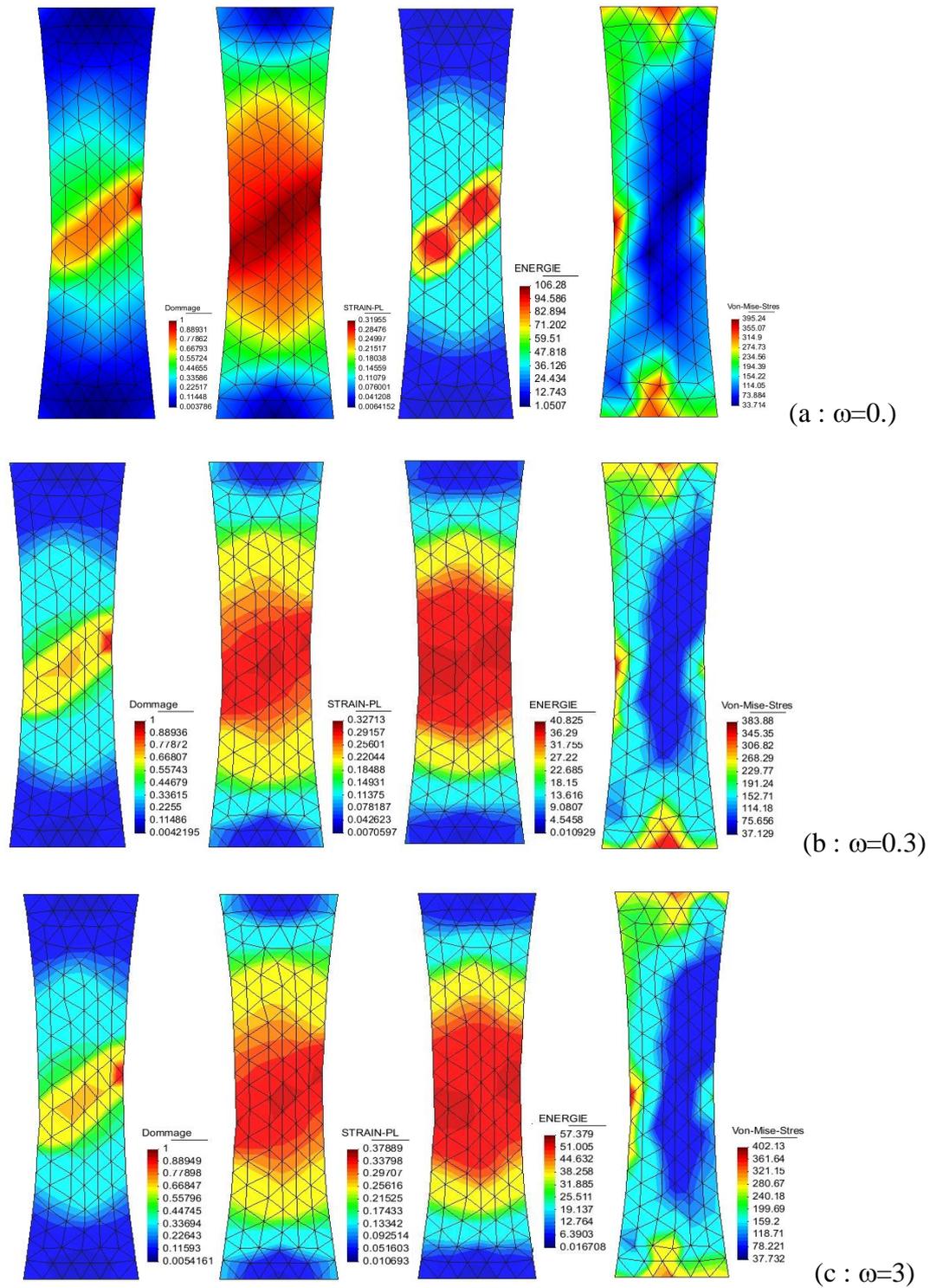


Figure III- 3 : Isovaleurs pour un maillage $h=0.16$ et trois longueurs internes $\omega =0$ $\omega=0.3$ et $\omega=3$.

La Fig.(III-4) présente les profils d'endommagement selon une coupe orthogonale à la fissure dans le cas local ($\omega=0$) et non local ($\omega=0.3$ et $\omega=3.$), nous constatons que l'endommagement évolue de la même manière sauf que dans le cas non local la localisation de l'endommagement se concentre dans une zone différente que celle obtenu dans le cas local.

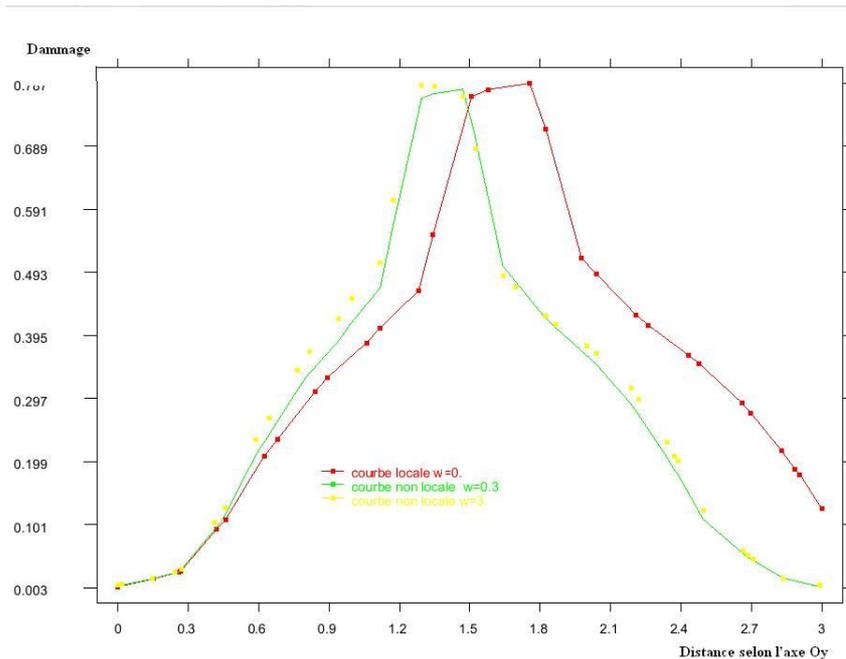


Figure III- 4 : Evolution du dommage selon l'axe Oy pour $x=0.5$

Les Fig.(III-5) montrent l'évolution de la contrainte de von-Mises (a) en fonction de la déformation plastique pour le cas local et non local pour trois points de Gauss : le PG N°1 situé dans la partie centrale de l'éprouvette, le PG N°2 faiblement endommagé, le PG N°3 loin de la zone de localisation (FigIII.1-b).

. La Fig.(III-5a) dans le cas local ($\omega=0$); nous constatons qu'au moment de la rupture le P G N°1 suit une évolution normale jusqu'à la rupture, tandis que les Points 2 et 3 ils se déchargent d'une manière élastique comme cité dans les travaux de **Hammi [Ham00]**. La figure III-5b représente le cas non local pour $\omega=3$. (un comportement similaire est observé pour les différentes valeurs de ω). Nous constatons que le comportement est similaire au cas local. Ce qui nous semble du au fait que malgré la délocalisation de Y le critère de plasticité reste toujours lié à des variables locales, ce qui fait que lors de la rupture de la plaque les Points de Gauss vont suivre toujours le même trajet de déchargement que dans le cas local.

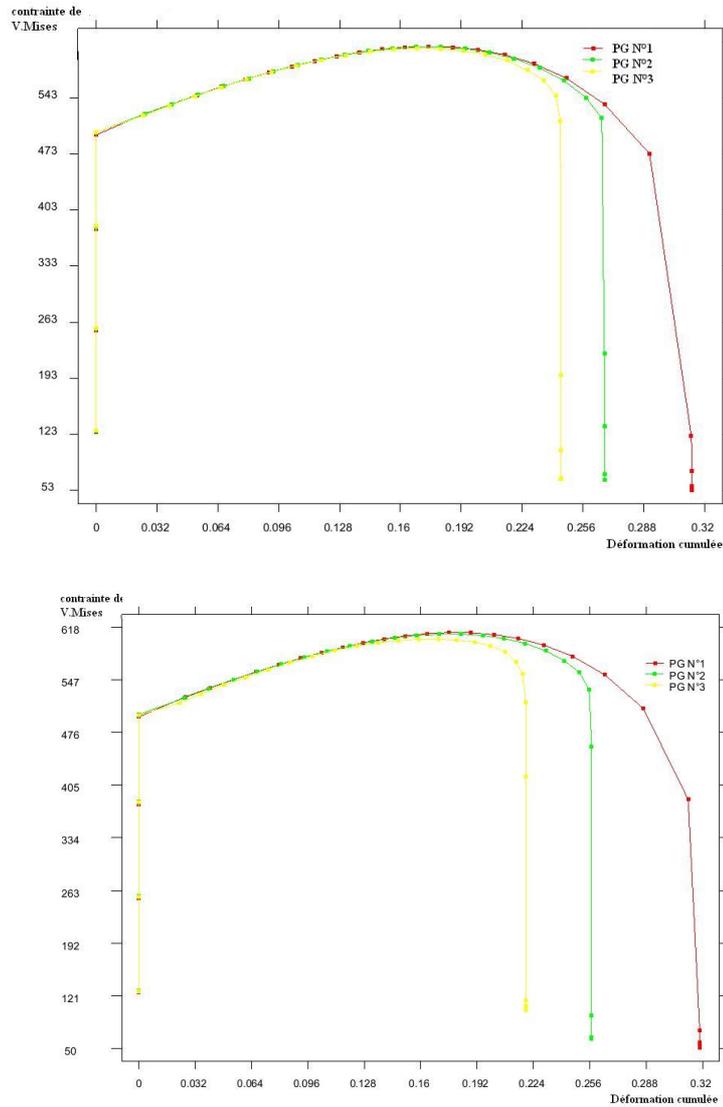


Figure III- 5 : Evolution de la contrainte de von Mises pour trois points de Gauss

a : dans le cas local b : le cas non local $\omega=0.3$

2.3. Conclusion

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés à une structure simple pour laquelle nous avons analysé l'évolution des différentes caractéristiques mécaniques du matériau. La variable non locale est obtenue de manière fiable et semble indépendante de la discrétisation. La méthode variationnelle peut donc être retenue pour le calcul de la variable non locale. Nous avons constaté que la taille de la zone endommagée dépend fortement du maillage dans le cas

local. Le modèle non local montre que les courbe forces déplacements deviennent plus ductile ce qui veut dire que l'on peut retarder le phénomène de striction, au fur et a mesure que ω augmente, ce qui constitue l'un des inconvénients des modèles locaux. Quant a la distribution du dommage elle reste toujours localisée selon une bande qui se limite à une rangé d'éléments. Cependant le modèle proposé reste incapable à fournir des résultats éléments finis indépendants du maillage pour de fortes valeurs d'endommagement. Pour palier cette difficulté, il nous semble nécessaire de choisir directement la variable d'endommagement comme variable interne a délocalisé. Ce choix est motivé par le fait que le critère de plasticité et les variables d'états sont directement liés à l'endommagement.

Formulation non locale de la loi d'endommagement

Dans cette partie, nous allons présenter un modèle élastoplastique simplifié introduisant l'endommagement régularisé \bar{D} dans les relations d'évolution et de couplage à la contrainte.

Comme précédemment l'équation de non localité (III.240-b) est ici remplacée par une équation de régularisation implicite au sens de **Geers** [Gee04] et Peerlings et **Geers** [Pee05] et **Engelen et all** [Eng06] ; elle est de la forme :

$$\bar{D} - \omega \cdot \text{div}(\overline{\nabla \bar{D}}) = D \quad \text{III.260}$$

Nous postulons aussi une condition limite de type Neumann sur le bord :

$$-\int_{\Gamma} \left[\omega \overline{\nabla \bar{D}} \right] \bar{n} d\Gamma_s \geq 0 \quad \text{III.261}$$

Où \bar{n} est la normale à la frontière du volume où \bar{D} est définie. Nous postulerons que le bord du domaine de définition est celui de la structure $\Gamma_z = \Gamma_s$

Les deux équations différentielles aux dérivées partielles qui gouvernent le P.V.I.L. sont donc l'équation d'équilibre classique et la relation de régularisation

$$\begin{cases} \overline{div(\sigma)} + \vec{f} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \overline{\sigma \cdot \vec{n}} = \vec{F} & \text{Sur } \Gamma_F \end{cases} \quad \text{III.262}$$

$$\begin{cases} \overline{D} - \omega \cdot \overline{div(\nabla D)} - D = 0 & \text{dans } \Omega \\ \overline{\omega \text{grad} D \cdot \vec{n}} + \vec{0} & \text{Sur } \Gamma \end{cases} \quad \text{III.263}$$

En tenant compte des développements du premier paragraphe, nous obtenons après l'assemblage sur tous les éléments les systèmes :

$$\begin{cases} I_u = \sum_{e=1}^{nele} I_u^e & \forall \delta \bar{u} \text{ C.A.} \\ I_{\bar{D}} = \sum_{e=1}^{nele} I_{\bar{D}}^e & \forall \delta \bar{D} \text{ C.A.} \end{cases} \quad \text{III.264}$$

Tel que :

$$\begin{cases} \{I_u^e\} = \langle \delta u_i^e \rangle \left[\sum_{npg} \pi_j \left(-[B_u^e]^T \{\sigma\} J + [N_u^e]^T \{f\} J + [N_u^e]^T \{T\} J_s \right) \right] \\ \{I_{\bar{D}}^e\} = \langle \delta \bar{D}_j^e \rangle \left[-\sum_{npg} \pi_j J \left([B_{\bar{D}}^e]^T [\omega] [B_{\bar{D}}^e] + [N_{\bar{D}}^e]^T [N_{\bar{D}}^e] \right) \{\bar{D}_k^e\} + \sum_{npg} \pi_j [N_{\bar{D}}^e]^T \{D\} J \right] \end{cases} \quad \text{III.265}$$

Où les résidus élémentaires s'expriment :

$$\begin{cases} R(u, \bar{D}) = \sum (I_u^e \text{ ext} - I_u^e \text{ int}) = 0 & \forall \delta \bar{u} \text{ (C.A.)} \\ H(u, \bar{Z}) = \sum (I_{\bar{D}}^e \text{ ext} - H_{\bar{D}}^e \text{ int}) = 0 & \forall \delta \bar{D} \text{ (C.A.)} \end{cases} \quad \text{III.266}$$

Où :

$$\begin{cases} I_u^e \text{ int} = \sum_{npg} \pi \left([B_u^e]^T \{\sigma\} J \right) \\ I_u^e \text{ ext} = \sum_{npg} \pi \left([N_u^e]^T \{f\} J + [N_u^e]^T \{T\} J_s \right) \end{cases} \quad \text{III.267}$$

Par analogie on écrira pour la deuxième fonctionnelle :

$$\begin{cases} I_{\bar{D}}^e \text{ int} = \left[-\sum_{npg} \pi_j J \begin{pmatrix} [B_{\bar{D}}^e]^T [w] [B_{\bar{D}}^e] \\ + [N_{\bar{D}}^e]^T [N_{\bar{D}}^e] \end{pmatrix} \{\bar{D}_k^e\} + \sum_{npg} \pi_j [N_{\bar{D}}^e]^T \{D\} J \right] \\ I_{\bar{D}}^e \text{ ext} = 0. \end{cases} \quad \text{III.268}$$

Comme précédemment ce système peut être résolu par la méthode de Newton Raphson. Le système discrétisé ci-dessus est linéarisé par un développement de Taylor au premier ordre. On peut donc écrire le système de Newton Raphson à l'instant t_{n+1} et a l'itération "s" :

$$\begin{cases} \left[\begin{matrix} [R(u, \bar{D})_{n+1}]^s \\ [H(u, \bar{D})_{n+1}]^s \end{matrix} \right] + \begin{bmatrix} [K_{uu}]^s & [K_{u\bar{D}}]^s \\ [K_{\bar{D}u}]^s & [K_{\bar{D}\bar{D}}]^s \end{bmatrix} \begin{cases} \delta \bar{u}_k \\ \delta \bar{D}_k \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(a)} \\ \text{(b)} \end{matrix} \quad \text{III.269}$$

Si on néglige la variation du Jacobien au cours de l'évolution, ce qui est raisonnable pour le cas des petits incréments de chargement, le module tangent élémentaire est donné par :

$$\begin{aligned} K_{uu} &= \frac{\partial R(u, \bar{D})_{n+1}}{\partial u} = -\sum \pi_j [B_u^e]^T \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial u_k} \right\} J = -\sum \pi_j [B_u^e]^T [\tilde{\Lambda}] [B_u^e] J \\ K_{u\bar{D}} &= \frac{\partial R(u, \bar{D})_{n+1}}{\partial \bar{D}} = -\sum \pi_j [B_u^e]^T \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{D}} \right\} [N_u^e] J \\ K_{\bar{D}u} &= \frac{\partial H(u, \bar{D})_{n+1}}{\partial u} = -\sum \pi_j [N_{\bar{D}}^e]^T \left\{ \frac{\partial D_i}{\partial \varepsilon_j} \right\} [B_{\bar{D}}^e] J \\ K_{\bar{D}\bar{D}} &= \frac{\partial H(u, \bar{D})_{n+1}}{\partial \bar{D}} = -\sum \left[\begin{matrix} \pi_j [B_{\bar{D}}^e]^T [w] [B_{\bar{D}}^e] J + \\ [N_{\bar{D}}^e]^T \frac{d(\bar{D} - D)}{d\bar{D}} [N_{\bar{D}}^e] j \end{matrix} \right] \end{aligned} \quad \text{III.270}$$

En tenant compte des travaux de **Boers & all [Boe05]**, on ne retiendra que les termes suivant la diagonale :

$$K_{u\bar{D}} = K_{\bar{D}u} = 0.$$

$$\begin{aligned}
 K_{uu} &= -\sum \pi_j [B_u^e]^T \left\{ \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial u_k} \right\} J = -\sum \pi_j [B_u^e]^T [\tilde{\Lambda}] [B_u^e] J \\
 K_{\bar{D}\bar{D}} &= \frac{\partial H(u, \bar{D})_{n+1}}{\partial \bar{D}} = -\sum \pi_j [B_{\bar{D}}^e]^T [\omega] [B_{\bar{D}}^e] J + [N_{\bar{D}}^e]^T [N_{\bar{D}}^e] j_s
 \end{aligned}
 \tag{III.271}$$

Nous constatons que la deuxième équation est indépendante de la variable \bar{D} , donc la résolution de la deuxième équation va se résumer en la résolution d'un système linéaire qui s'écrit sous la forme :

$$\{H\}_{n+1} = \left[-[K_{\bar{D}\bar{D}}] \{\bar{D}\} + \{F_{\bar{D}}\} \right]_{n+1} = 0
 \tag{III.272}$$

Tirons profit de la linéarité de cette équation, nous adoptons le schéma de résolution suivant sur chaque incrément de charge : D'abord l'équation (22-a) est résolue itérativement par un schéma de Newton-Raphson en utilisant \bar{D}_n au début de l'incrément. A convergence $\bar{u}_{n+1}, \underline{\sigma}_{n+1}, R_{n+1}, Y_{n+1}, \underline{\varepsilon}_{n+1}^p$ et D_{n+1} sont obtenues. Ensuite, l'équation linéaire (22-b) est directement résolue pour calculer \bar{D}_{n+1} . Pour le calcul local de $\underline{\sigma}_{n+1}, R_{n+1}, Y_{n+1}, \underline{\varepsilon}_{n+1}^p$ et D_{n+1} un schéma implicite de prédiction élastique correction plastique est utilisé [Ham00, Sim03]. Ce modèle a été implémenté dans un programme de calcul par éléments finis issu de [Ham00].

3.1. Application à un modèle élastoplastique à écrouissage isotrope non linéaire régulariser par un gradient endommagement

Nous allons maintenant réaliser un couplage entre le comportement élastoplastique à écrouissage isotrope non linéaire caractérisant la réponse des métaux ductiles à endommagement délocalisé présenté précédemment. Ce couplage est formulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \underline{\sigma} &= (1 - \bar{D}) \underline{\Lambda} : \underline{\varepsilon}^e \\
 R &= (1 - \bar{D}) Qr \\
 Y &= \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^e : \Lambda : \underline{\varepsilon}^e + \frac{1}{2} Qr^2
 \end{aligned}
 \tag{III.273}$$

Contrairement au cas des formulations locales classiques, l'endommagement D n'est plus utilisé pour calculer les variables effectives. Il est utilisé uniquement lors de la résolution de la

fonctionnelle (II.263) quand on calcul la variable \bar{D} . Le critère de plasticité est donc largement dépendant de la variable régularisée. Cette formulation suppose de plus que l'endommagement \bar{D} évolue indépendamment de la plasticité locale. La variable \bar{D} étant issue d'une relation de régularisation traitée variationnellement, la relation (III.272) fournit la variable \bar{D} en chaque nœud de l'élément. Ces valeurs nodales seront ensuite extrapolées via les fonctions de formes vers les points de Gauss. Les variables internes étant couplé à la variable d'endommagement régularisée \bar{D} , cette dernière doit être strictement croissante et majorée à une valeur proche de 1 ($\bar{D}_c \approx 0.999$)

L'évolution des variables internes est exprimée en fonction du multiplicateur plastique $d\lambda$.

$$\begin{aligned} d\varepsilon^p &= \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\bar{D}}} \tilde{n} \\ dr &= \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\bar{D}}} (Q - b\tilde{r}) \quad \text{tel que} \quad \tilde{r} = r\sqrt{1-\bar{D}} \\ dD &= \frac{d\lambda}{(1-\bar{D})^\beta} \left\langle \frac{Y - Y_0}{S} \right\rangle^s \end{aligned} \quad \text{III.274}$$

La relation locale (274-c) décrit l'évolution de la variable d'endommagement purement locale D . L'expression de la normale \tilde{n} s'écrit :

$$\tilde{n} = \sqrt{1-\bar{D}} \underline{n} = \frac{3}{2} \frac{S}{\|\underline{\sigma}\|} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad \text{III.275}$$

La fonction de charge s'écrit :

$$f = \frac{\|\underline{\sigma}\| - R}{\sqrt{1-\bar{D}}} - \sigma_y \quad \text{III.276}$$

La condition de consistance permet d'avoir l'expression analytique $d\lambda$. Sachant qu'ici la variable d'endommagement régularisée \bar{D} , n'est pas une variable interne. Il sera donc considéré dans la suite de l'étude que la différentielle est nulle au regard de l'évolution locale c'est-à-dire que toute dérivée par rapport à \bar{D} est nulle.

L'expression analytique de $\dot{\lambda}$ va s'écrire sous la forme :

$$\lambda = \begin{cases} \frac{1}{H_{pD}} \left\langle \frac{3\mu_e \sqrt{1-\bar{D}} \underline{S} : \dot{\underline{\varepsilon}}}{\|\underline{S}\|} \right\rangle & \text{if } \dot{f} = 0 \text{ and } f = 0 \\ 0 & \text{else where} \end{cases} \quad \text{III.277}$$

Où $H_{pD} = 3\mu_e + (1-\bar{D})Q - bR\sqrt{1-\bar{D}} + \hat{Y} \left(\frac{R}{\sqrt{1-\bar{D}}} + \frac{\sigma_y}{2} \right)$ est le module élastoplastique tangent

$$\text{et } \hat{Y} = \frac{1}{(1-\bar{D})^\beta} \left\langle \frac{Y-Y_0}{S} \right\rangle^s.$$

3.2. Algorithme d'intégration par retour radial

Prédiction élastique

La contrainte de prédiction élastique $\underline{\sigma}_{n+1}^*$ est exprimée à l'instant $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ correspondant à $\Delta \underline{\varepsilon}$ s'exprime comme suit :

$$\underline{\sigma}_{n+1}^* = (1-\bar{D}_n) \left[2\mu \underline{\varepsilon}_{n+1}^* + \lambda \text{tr} \underline{\varepsilon}_{n+1}^* \mathbf{1} \right] \quad \text{III.278}$$

III.279

La partie déviateur \underline{S}_{n+1}^* de cette contrainte est donné par :

$$\underline{S}_{n+1}^* = \underline{S}_n^* + 2\mu(1-\bar{D}_n) \Delta \underline{e} \quad \text{III.280}$$

Une fois cette contrainte calculée, nous évaluons la fonction de charge à l'instant t_{n+1} :

$$f_{n+1}^* = \frac{\|\underline{\sigma}_{n+1}^*\| - R_n}{\sqrt{1-\bar{D}_n}} - \sigma_y \quad \text{avec } \|\underline{\sigma}_{n+1}^*\| = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{S}_{n+1}^* : \underline{S}_{n+1}^*} \quad \text{III.281}$$

Dans le cas où $f_{n+1}^* < 0$ alors

$$\begin{cases} \underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^* \\ R_{n+1} = R_n \\ \underline{\varepsilon}_{n+1}^p = \underline{\varepsilon}_n^p \\ D_{n+1} = D_n \end{cases} \quad \text{III.282}$$

Sinon on procède à une correction plastique.

Correction plastique

La correction plastique consiste à calculer $\underline{\sigma}_{n+1}^*, R_{n+1}, \underline{\varepsilon}_{n+1}, D_{n+1}$ de sorte que :

$$\begin{cases} f_{n+1}^* = \frac{\|\underline{\sigma}_{n+1}^*\| - R_{n+1}}{\sqrt{1 - \bar{D}_n}} - \sigma_y = 0 & \text{(a)} \\ g(\Delta\lambda, D_{n+1}) = D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\lambda}{(1 - \bar{D}_n)^\beta} \left\langle \frac{Y_{n+1} - Y_0}{S} \right\rangle^s = 0 & \text{(b)} \end{cases} \quad \text{III.283}$$

De l'équation (283-b) on écrit que :

$$D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\lambda}{(1 - \bar{D}_n)^\beta} \left\langle \frac{Y_{n+1} - Y_0}{S} \right\rangle^s \quad \text{III.284}$$

Où D_{n+1} est une variable non bornée. Il reste donc à résoudre l'équation (283-a) par la méthode de Newton Raphson pour calculer $\Delta\lambda$

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{n+1} &= \underline{\sigma}_{n+1}^* - 2\mu(1 - \bar{D}_n)\Delta\varepsilon^p \\ \underline{\sigma}_{n+1} &= \underline{\sigma}_{n+1}^* - 2\mu \frac{(1 - \bar{D}_n)}{\sqrt{(1 - \bar{D}_n)}} \Delta\lambda \cdot \tilde{\underline{n}}_{n+1} \\ \underline{\sigma}_{n+1} &= \underline{\sigma}_{n+1}^* - 2\mu\sqrt{(1 - \bar{D}_n)}\Delta\lambda \cdot \tilde{\underline{n}}_{n+1} \\ \underline{S}_{n+1} &= \underline{S}_{n+1}^* - 2\mu\sqrt{1 - \bar{D}_n}\Delta\lambda \cdot \tilde{\underline{n}}_{n+1} \end{aligned} \quad \text{III.285}$$

$$R_{n+1} = \frac{R_n + Q\sqrt{1-\bar{D}_n}\Delta\lambda}{1+b\Delta\lambda} \quad \text{avec} \quad R_n = Q(1-\bar{D}_{n-1})r_n$$

On écrit l'expression de la normale fictive :

$$\underline{\tilde{n}}_{n+1} = \frac{3}{2} \frac{S_{n+1}}{\|\underline{\sigma}_{n+1}\|} \quad \text{et} \quad \underline{\tilde{n}}_{n+1}^* = \frac{3}{2} \frac{S_{n+1}^*}{\|\underline{\sigma}_{n+1}^*\|} \quad \text{III.286}$$

$$\Rightarrow S_{n+1} = \frac{2}{3} \|\underline{\sigma}_{n+1}\| \|\underline{\tilde{n}}_{n+1}\| \quad \text{et} \quad S_{n+1}^* = \frac{2}{3} \|\underline{\sigma}_{n+1}^*\| \|\underline{\tilde{n}}_{n+1}^*\| \quad \text{III.287}$$

Nous introduisons les équations (III.285) dans l'équation (III.283.a) et en tenant compte de l'hypothèse du retour radial ($\underline{\tilde{n}}_{n+1}^* = \underline{\tilde{n}}_{n+1}$) nous obtenons :

$$\bar{f}_{n+1} = -\|\underline{\sigma}_{n+1}\| + \|\underline{\sigma}_{n+1}^*\| - 3\mu\sqrt{1-\bar{D}_n}\Delta\lambda = 0 \quad \text{III.288}$$

Comme $f_{n+1} = 0$ (écoulement plastique) nous avons :

$$\|\underline{\sigma}_{n+1}\| = R_{n+1} + \sqrt{(1-\bar{D}_n)}\sigma_y \quad \text{III.289}$$

Alors il s'ensuit :

$$\bar{f}_{n+1} = \|\underline{\sigma}_{n+1}^*\| - R_{n+1} - 3\mu\sqrt{1-\bar{D}_n}\Delta\lambda - \sqrt{1-\bar{D}_n}\sigma_y = 0 \quad \text{III.290}$$

Où l'expression de R_{n+1} est donnée par l'équation (III.285.e)

Ce qui permet d'écrire :

$$\bar{f}_{n+1} = \|\underline{\sigma}_{n+1}^*\| - \frac{R_n}{1+b\Delta\lambda} - \sqrt{1-\bar{D}_n} \left[\sigma_y + \Delta\lambda \left(3\mu + \frac{Q}{1+b\Delta\lambda} \right) \right] = 0 \quad \text{III.291}$$

Donc la nouvelle fonction à résoudre est l'équation ci-dessus. Le développement de Taylor au premier ordre s'écrit :

$$\bar{f}_{n+1} = \bar{f}_{n+1}^s + \left(\frac{\partial \bar{f}_{n+1}}{\partial \Delta \lambda} \right)^s (\Delta \lambda^{s+1} - \Delta \lambda^s) + \varepsilon_0 = 0 \quad \text{III.292}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{f}_{n+1}}{\partial \Delta \lambda} \right)^s = \left(\frac{bR_n}{(1+b\Delta\lambda)^2} - \sqrt{1-\bar{D}_n} \left[3\mu + \frac{Q}{1b\Delta\lambda} + \Delta\lambda \left(\frac{-bQ}{(1+b\Delta\lambda)^2} \right) \right] \right)^s \quad \text{III.293}$$

En négligeant ε_0 dans l'équation (III.292) , nous avons :

$$\Delta \lambda^{s+1} = \Delta \lambda^s + \left(\frac{\bar{f}_{n+1}^s}{\frac{\partial \bar{f}_{n+1}}{\partial \Delta \lambda}} \right) \quad \text{III.294}$$

En notant que la condition de convergence s'écrit $|\bar{f}_{n+1}(\Delta \lambda^{s+1})| \leq \varepsilon_{pre}$

Où : ε_{pre} est une précision imposé par le calculateur

Après convergence les variables suivantes sont actualisées :

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \frac{R_n + Q\sqrt{1-\bar{D}_n}\Delta\lambda}{1+b\Delta\lambda} & (a) \\ \underline{\sigma}_{n+1} &= \underline{\sigma}_{n+1}^* - 2\mu\sqrt{1-\bar{D}_n}\Delta\lambda.\tilde{n}_{n+1} & (b) \\ \underline{\varepsilon}_{n+1}^p &= \underline{\varepsilon}_n^p + \frac{\Delta\lambda\tilde{n}_{n+1}}{\sqrt{1-\bar{D}_n}} & (c) \\ D_{n+1} &= D_n + \frac{\Delta\lambda}{(1-\bar{D}_{n+1})^\beta} \left\langle \frac{Y_{n+1} - Y_0}{S} \right\rangle^s & (d) \end{aligned} \quad \text{III.295}$$

Où : Y_{n+1} est donné par l'équation :

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= \frac{1}{2}K(\text{tr}\underline{\varepsilon}_{n+1}^*)^2 + \frac{1}{2}2G \left(\underline{e}_{n+1}^* - \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1-\bar{D}_n}}\underline{n}_{n+1} \right) \left(\underline{e}_{n+1}^* - \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1-\bar{D}_n}}\underline{n}_{n+1} \right) + \\ & \frac{1}{2} \frac{Q}{(1+b\Delta\lambda)^2} \left(\underline{r}_n + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1-\bar{D}_n}} \right)^2 \end{aligned} \quad \text{III.296}$$

Calcul de l'opérateur tangent

La résolution de l'équation linéarisation (III.269.a) se fait en utilisant la méthode itérative de Newton Raphson. La résolution implicite nécessite la connaissance de la matrice tangente de raideur élémentaire. Dans le cas d'un opérateur tangent continu, ce terme correspond à la dérivée par rapport à la déformation de l'équation (III.295.b). Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\sigma_{n+1}}{d\Delta\varepsilon_{n+1}} = K_T &= \frac{d}{d\Delta\varepsilon_{n+1}} \left[(1 - \bar{D}_n) \left(Ktr \underline{\varepsilon}_{n+1}^* \right) \underline{1} + (1 - \bar{D}_n) 2G \underline{e}_{n+1}^* - 2G \sqrt{1 - \bar{D}_n} \Delta\lambda \underline{n}_{n+1} \right] \\ &= (1 - \bar{D}_n) \underline{\Lambda} + \left[\frac{G\Delta\lambda}{\sqrt{1 - \bar{D}_n}} \underline{n}_{n+1} - \underline{S}_{n+1} - K \underline{1} \otimes \underline{1} : \underline{\varepsilon}_{n+1}^* \right] \otimes \frac{d\bar{D}_n}{d\Delta\varepsilon_{n+1}} \\ &\quad - 2G \sqrt{1 - \bar{D}_n} \Delta\lambda \frac{d\underline{n}_{n+1}}{d\varepsilon_{n+1}} - 2G \sqrt{1 - \bar{D}_n} \underline{n}_{n+1} \otimes \frac{d\Delta\lambda}{d\Delta\varepsilon_{n+1}} \end{aligned}$$

III.297

\bar{D}_n est une variable nodale indépendante de ε_{n+1} donc toutes dérivée de \bar{D}_n ou par rapport \bar{D}_n est nulle. Nous pouvons alors décomposer le calcul comme suit :

$$\frac{d\Delta\sigma_{n+1}}{d\Delta\varepsilon_{n+1}} = K_T = (1 - \bar{D}_n) \underline{\Lambda} - 2G \sqrt{1 - \bar{D}_n} \Delta\lambda \frac{d\underline{n}_{n+1}}{d\varepsilon_{n+1}} - 2G \sqrt{1 - \bar{D}_n} \underline{n}_{n+1} \otimes \frac{d\Delta\lambda}{d\varepsilon_{n+1}} \quad \text{III.298}$$

En premier lieu, on définit l'expression de $\frac{\partial \underline{n}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{n}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{n+1}} \left[\frac{\underline{S}_{n+1}}{\sqrt{\frac{2}{3} \underline{S}_{n+1} : \underline{S}_{n+1}}} \right] = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} \underline{S}_{n+1} : \underline{S}_{n+1}}} \frac{\partial \underline{S}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} - \frac{\left(\frac{2}{3} \underline{S}_{n+1} : \frac{\partial \underline{S}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \right)}{\left(\frac{2}{3} \underline{S}_{n+1} : \underline{S}_{n+1} \right)^{3/2}} \underline{S}_{n+1} \\ \frac{\partial \underline{S}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{n+1}} \left[2G \underline{I}^{dev} \underline{\varepsilon}_{n+1}^e \right] = 2G \underline{I}^{dev} \end{aligned}$$

III.299

Soit :

$$\frac{\partial \underline{n}_{n+1}}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} \left[\frac{\underline{S}_{n+1}}{\sqrt{\frac{2}{3} \underline{S}_{n+1} : \underline{S}_{n+1}}} \right] = \frac{2G}{\sqrt{\frac{2}{3} \underline{S}_{n+1} : \underline{S}_{n+1}}} \left[\underline{I}^{dev} - \frac{2}{3} \underline{n}_{n+1} \otimes \underline{n}_{n+1} \right] \quad \text{III.300}$$

Pour le calcul du terme $\frac{d\Delta\lambda}{d\underline{\varepsilon}_{n+1}}$ dérivons par rapport à la déformation totale la fonction "g"

défini par la relation (283-b) :

$$\frac{\partial g}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{\partial g^i}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} + \left[\frac{\partial g}{\partial \Delta\lambda} \right]^i \frac{d\Delta\lambda}{d\underline{\varepsilon}_{n+1}} = 0 \quad \text{III.301}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{d\Delta\lambda}{d\underline{\varepsilon}_{n+1}} = - \left(\frac{\partial g^i}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} \right) \left[\left(\frac{\partial g}{\partial \Delta\lambda} \right)^i \right]^{-1} \quad \text{III.302}$$

On a :

$$\left[\frac{\partial g}{\partial \Delta\lambda} \right]^i = -\hat{Y}_{n+1} - \Delta\lambda \left(\frac{1}{S} \right)^s \frac{s}{(1-\bar{D}_n)^\beta} (Y_{n+1} - Y_0)^{s-1} \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \Delta\lambda} = -\hat{Y}_{n+1} \left(1 + \frac{s\Delta\lambda}{(Y_{n+1} - Y_0)} \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \Delta\lambda} \right)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \Delta\lambda} = & -2G \left(\frac{1}{\sqrt{1-\bar{D}_n}} \underline{n}_{n+1} + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1-\bar{D}_n}} \frac{\partial \underline{n}_{n+1}}{\partial \Delta\lambda} \right) \left(e_{n+1}^* - \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1-\bar{D}_n}} \underline{n}_{n+1} \right) + \\ & Q \left(\frac{1}{\sqrt{1-\bar{D}_n}} \right) \left(r_n + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1-\bar{D}_n}} \right) \end{aligned} \quad \text{III.303}$$

D'autre part :

$$\frac{\partial g^i}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} = -\frac{s\Delta\lambda}{S} \left(\frac{Y_{n+1} - Y_0}{S} \right)^{s-1} \frac{1}{(1-\bar{D}_n)^\beta} \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} \quad \text{III.304}$$

et :

$$\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} = Ktr \underline{\varepsilon}_{n+1}^* + 2G \left(\underline{I}^{dev} - \frac{\Delta \lambda}{\sqrt{1 - \bar{D}_n}} \frac{\partial \underline{n}_{n+1}}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} \right) : \left(\underline{e}_{n+1}^* - \frac{\Delta \lambda}{\sqrt{1 - \bar{D}_n}} \underline{n}_{n+1} \right) \quad \text{III.305}$$

Où :

$$\frac{\partial \underline{n}_{n+1}}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{1}{\|\underline{S}_{n+1}^*\|} \frac{\partial \underline{S}_{n+1}^*}{\partial \underline{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{1}{\|\underline{S}_{n+1}^*\|} 2G \underline{I}^{dev} \quad \text{III.306}$$

Il s'ensuit que tous les termes de l'opérateur tangent sont connus. Par conséquent, nous pouvons calculer à chaque itération la matrice tangente.

3.3. Implémentation

Le modèle ainsi décrit pour la simulation des principaux phénomènes macroscopiques, mis en jeu dans le cas d'un comportement élastoplastique à gradient d'endommagement à écrouissage isotrope non linéaire est implémenté dans un programme de calcul élément fini [Owe88]. Ce programme initialement élaboré pour la simulation numérique du comportement élastoplastique à écrouissage isotrope linéaire, est modifié pour la prise en compte de l'écrouissage non linéaire et du comportement couplé. L'intégration locale des équations du modèle couplé est réalisée par un schéma itératif implicite, comme proposé par **Simone et al[Sim03]**, associé à une réduction des équations comme proposé dans **Hammi[Ham00]** et **Saanouni et al[Saa03]**. Dans ce même programme, des blocs ont été rajoutés pour coupler le programme à l'interface GID qui permet le post Traitement des résultats. Ce programme ainsi modifié est utilisé pour l'étude de la distribution du dommage sur une plaque en traction en état de déformation plane.

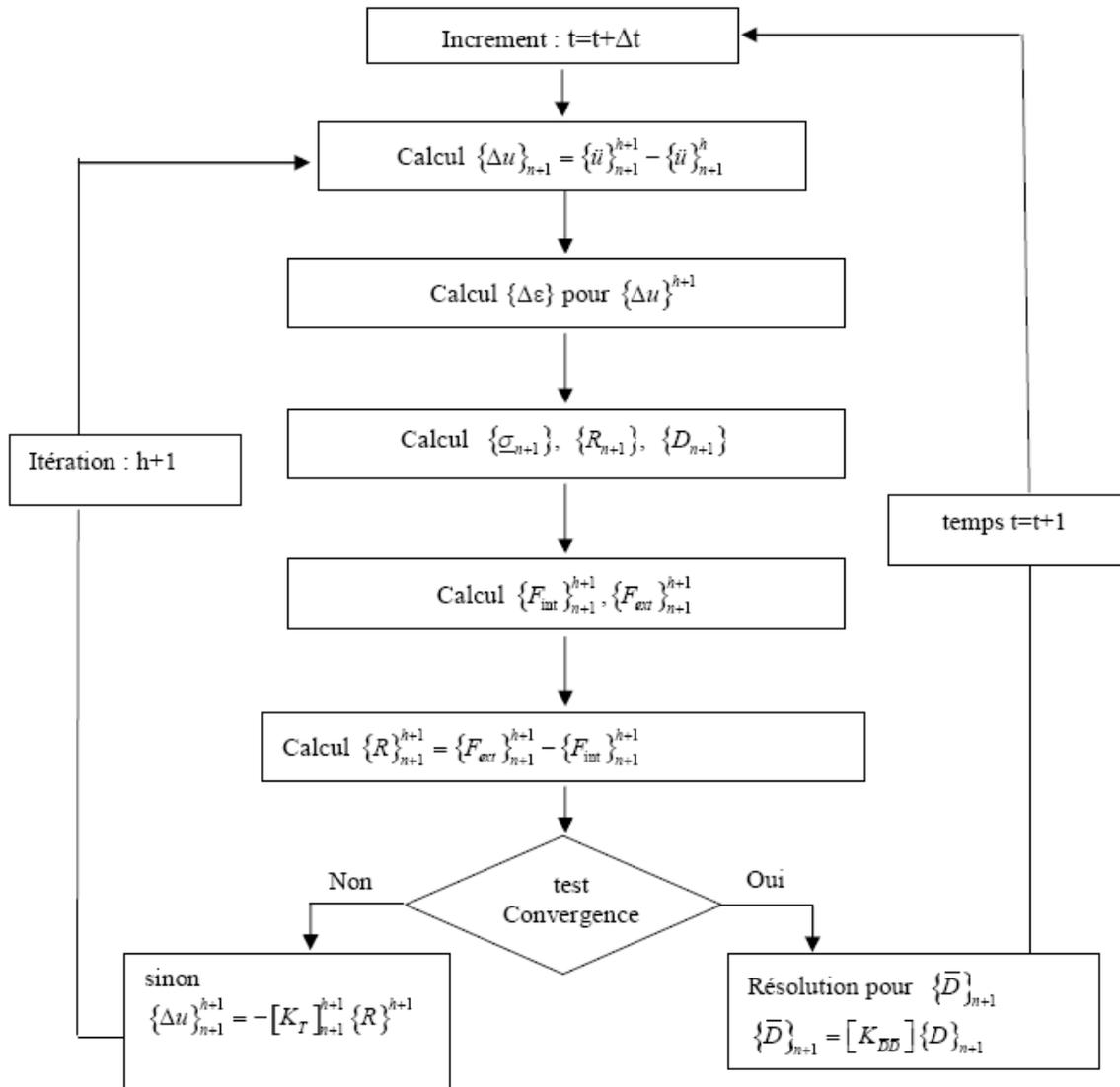


Figure III- 6 : Schéma de l'organigramme de résolution globale.

3.4. Application

3.4.1. Etude d'une éprouvette en traction

3.4.1.1 Influence du paramètre de la longueur interne ω

Nous reprenons l'essai de traction étudié dans le paragraphe (2.2). Celle-ci est discrétisée avec un maillage de taille d'élément $h=0.16$ (Fig.(III-7)).

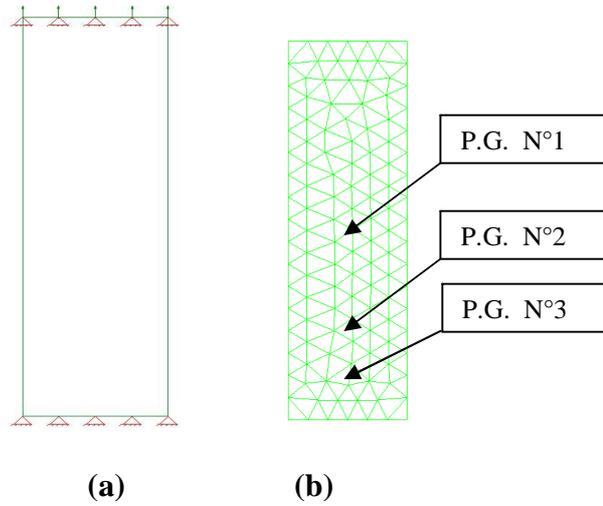


Figure III-7 : Schématisation de l'éprouvette 2D, C.A.L. et le maillage considéré $h=0.16$.

Les paramètres du matériau sont résumés dans le tableau ci dessous :

E (MPa)	ν	σ_y (MPa)	Q(MPa)	b	β	S	s	Y_0
210 000	0.3	500	1000	40	1	10	0.8	0.

Tableau III- 2 : Caractéristiques Mécaniques du matériau.

La Fig.(III-8) donne la courbe force-déplacement pour les différentes valeurs de " ω ". Nous constatons que la valeur de " ω " a tendance à influencer sur la dissipation à rupture de la structure. Effectivement, nous remarquons qu'au moment où l'éprouvette va rompre pour un déplacement $u_{\max}=0.39$ avec $\omega=0$, le modèle non local supporte encore des charges plus importante d'autant que la valeur ω est grande. Plus la longueur interne est grande plus la dissipation est importante. En effet l'étendue du domaine plastique en phase d'adoucissement est directement dépendante de la longueur interne. Donc un paramètre de la longueur interne fort, repousse considérablement la localisation et influe directement sur la capacité de charge de la structure.

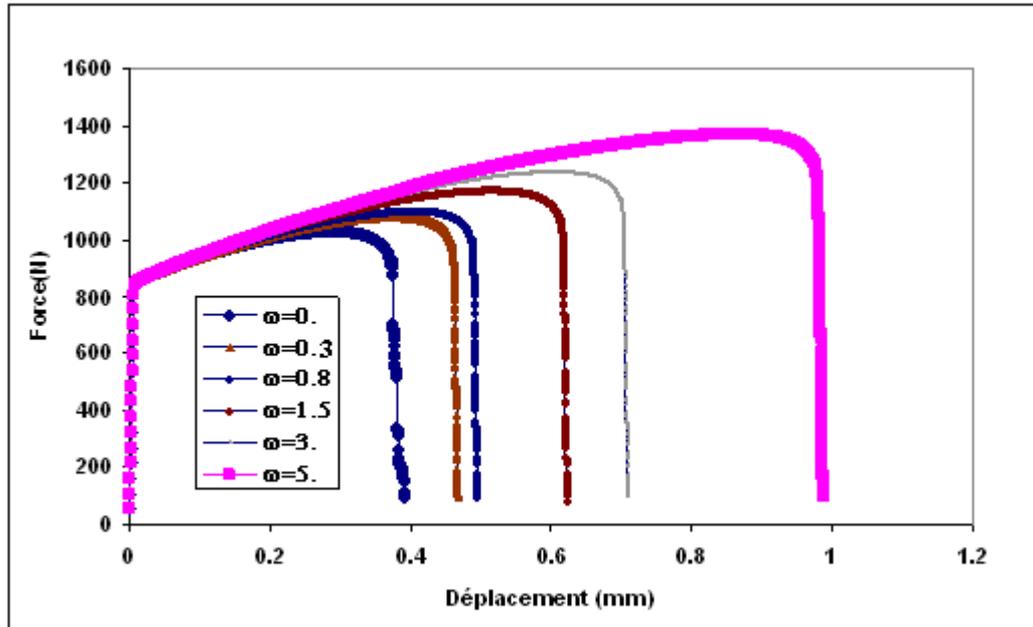
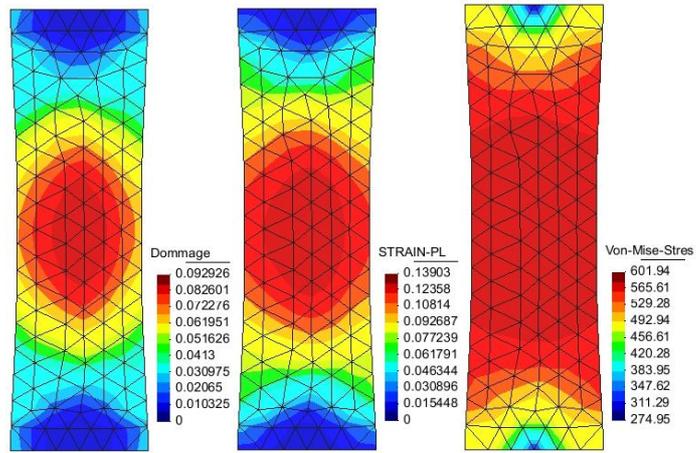
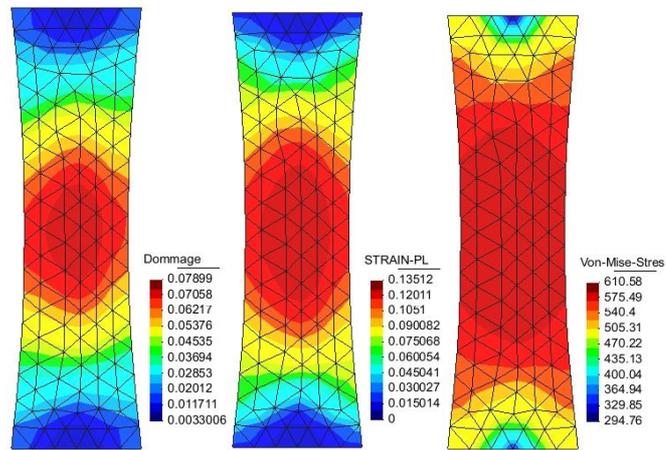


Figure III- 8 : Courbe Force déplacement pour différentes valeurs de ω

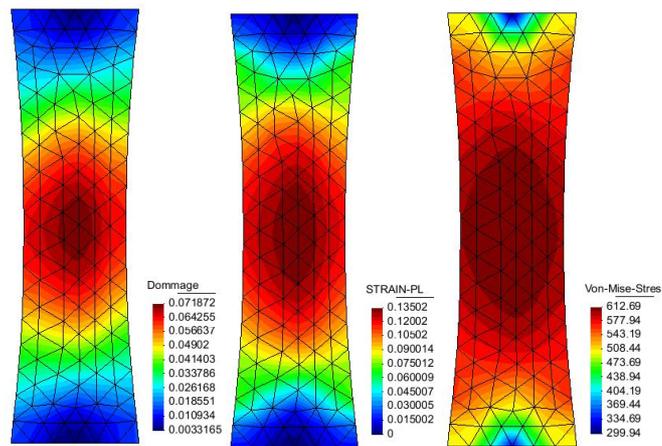
La Fig.(III-9) compare respectivement les distributions de l'endommagement \bar{D} , déformation plastique et la contrainte de von-Mises pour le modèle local ($\omega=0$) et le modèle non-local avec cinq valeurs de ω ; 0.3, 0.8, 1.5, 3., 5. Les deux modèles sont comparés pour 3 niveaux de déplacements ; $u=0.2$, $u=0.33$, $u=0.44$. Pour des déplacements inférieures à 0,2 Fig(III-9a, 9b, 9c, 9d, 9e, 9f) le modèle non-local et le modèle local présentent un comportement similaire. Mais, en se rapprochant de la rupture, du modèle local, une localisation du dommage et de la déformation plastique apparaît selon une ranger d'élément à la rupture dans le cas du modèle local Fig.(III-9m). Au moment où la contrainte de von-Mises s'annule sur une grande surface de la plaque (voir Fig.(III-9m). A ce moment l'éprouvette est totalement rompue. Par contre, dans le cas d'une simulation avec le modèle non local ; pour des valeurs de $\omega \neq 0$ Fig.(III-9n, 9o, 9p 9q et 9r), nous constatons à ce même instant, que le dommage s'étire sur plusieurs éléments et forme un nuage autour de la partie centrale de l'éprouvette, sans atteindre la rupture. La rupture est alors atteinte à des déplacements qui dépendent de la valeur de ω . Ces résultats concordent avec ceux obtenus par **Geers[Gee04]**.



(a) $\omega=0$.



(b) $\omega=0.3$



(c) $\omega=0.8$

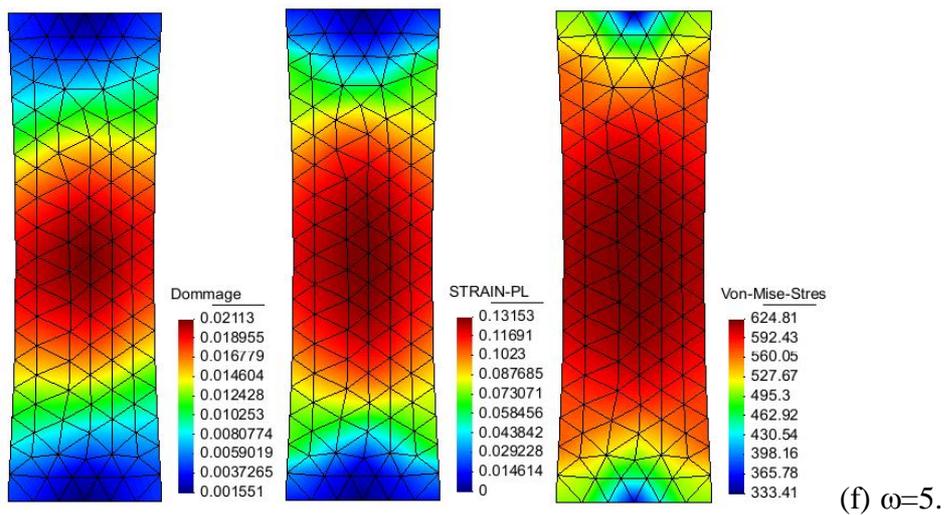
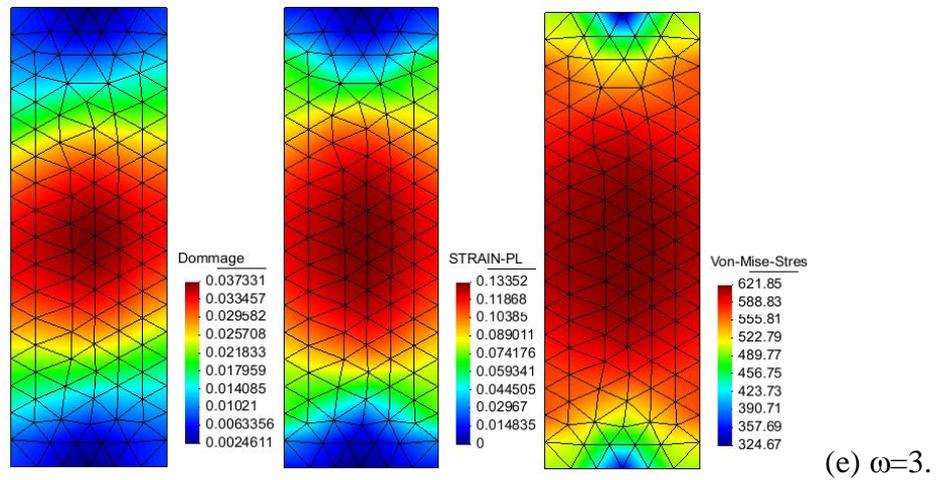
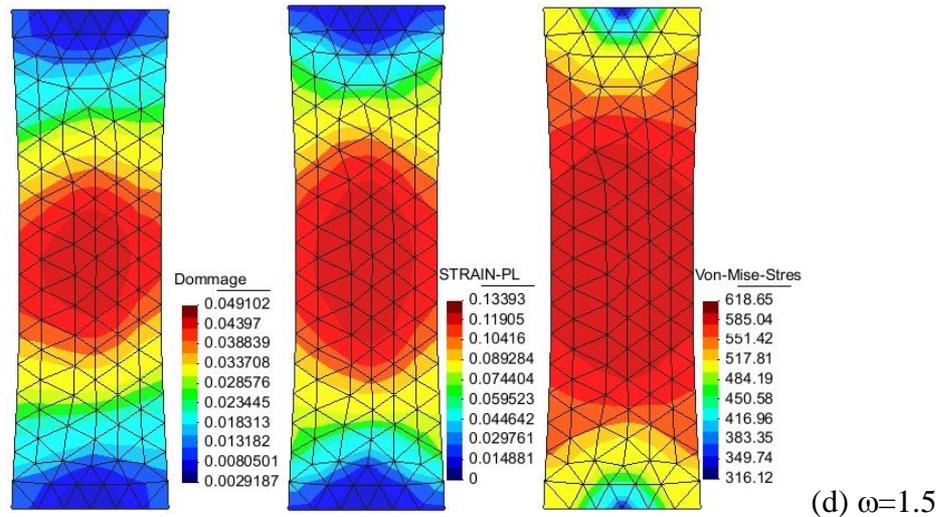
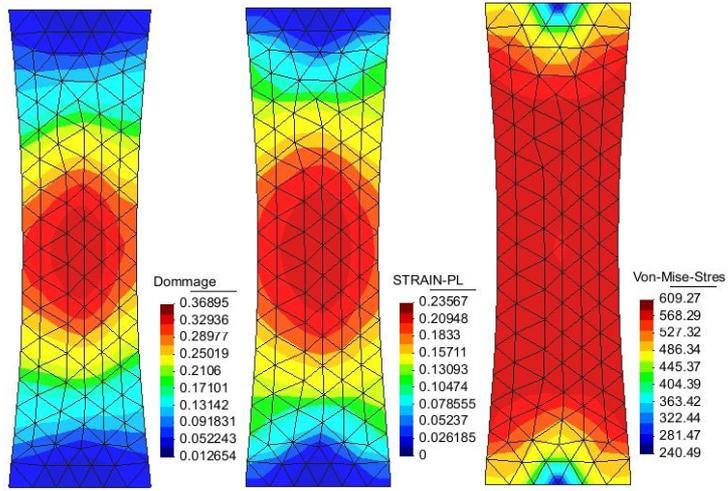
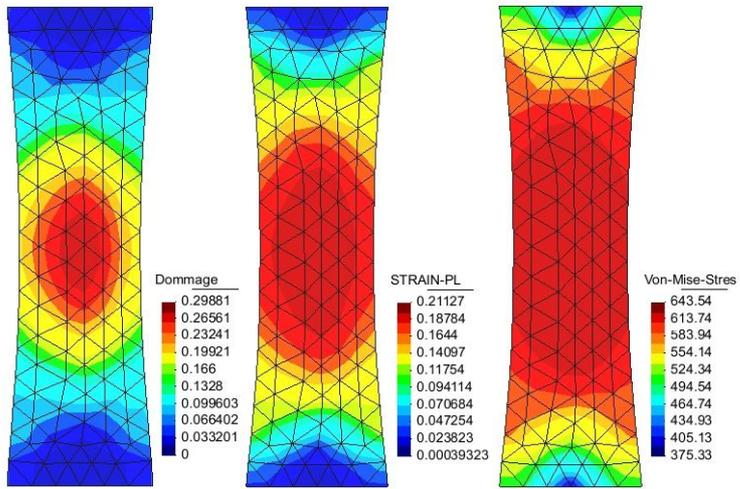


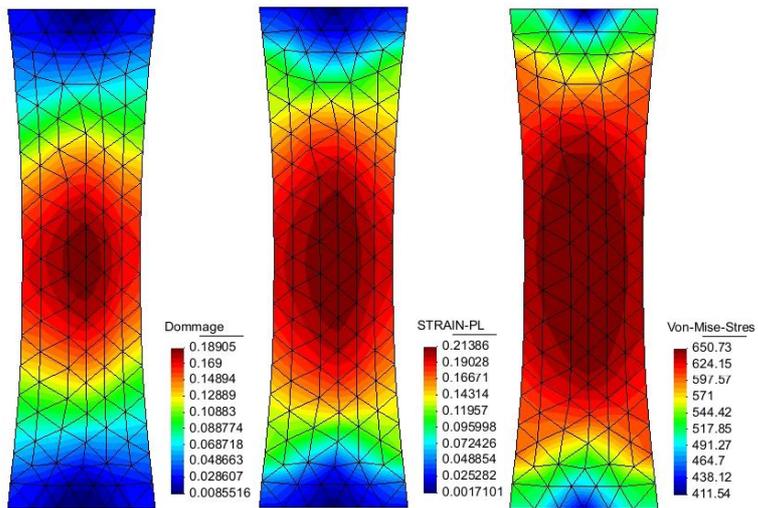
Figure III- 9a : Distribution pour les cinq valeurs de ω : du dommage, la déformation plastique et la contrainte de von-Mises au déplacement $u=0.2$



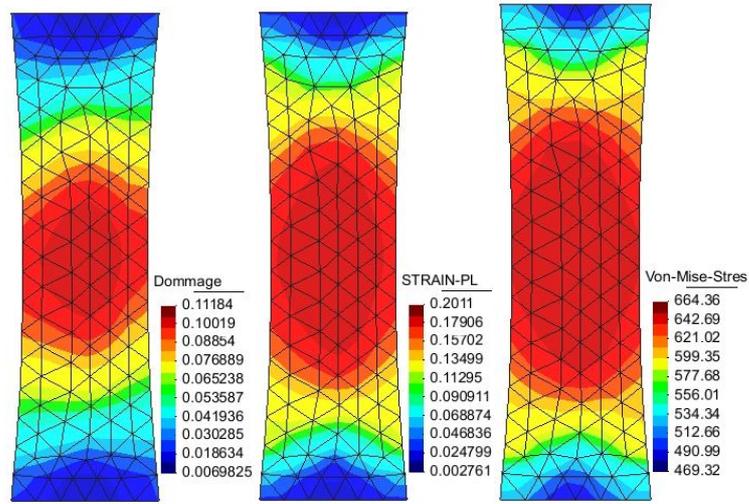
(g) $\omega=0$.



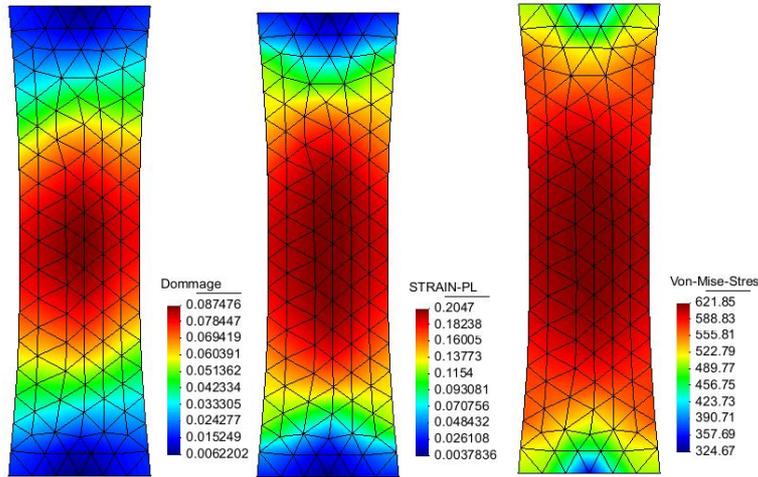
(h) $\omega=0.3$



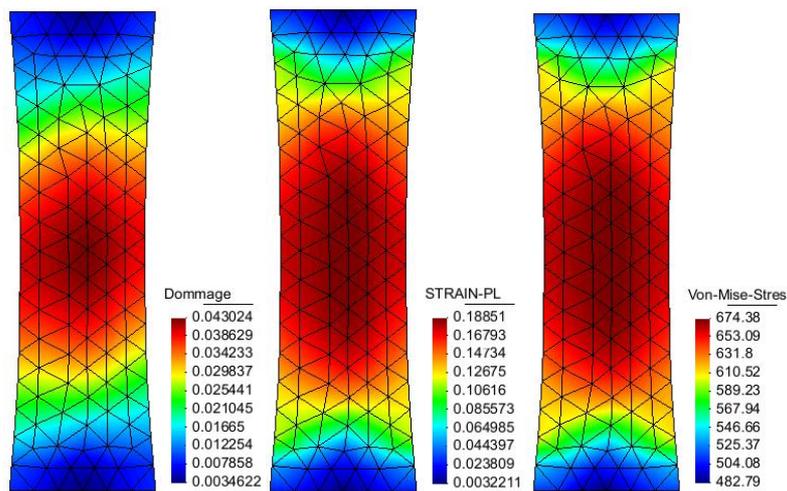
(i) $\omega=0.8$



(j) $\omega=1.5$

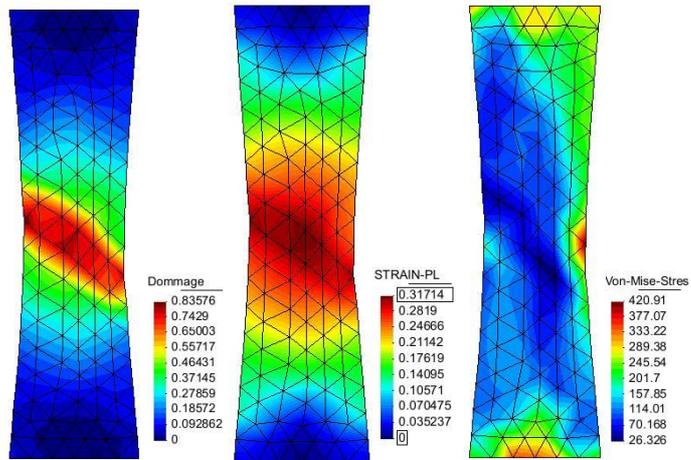


(k) $\omega=3$.

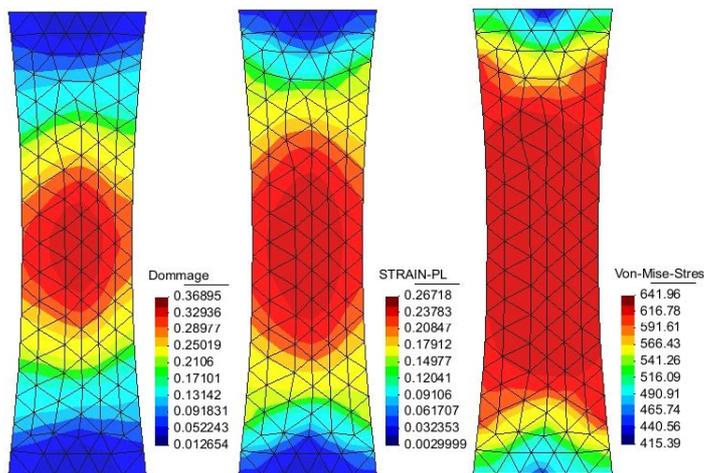


(l) $\omega=5$.

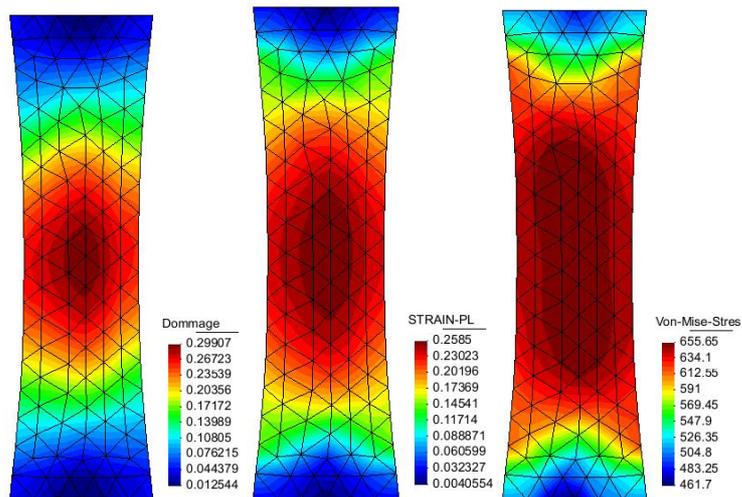
Figure III- 9b : Distribution pour les cinq valeurs de ω : du dommage, la déformation plastique et la contrainte de von-Mises au déplacement $u=0.33$



(m) $\omega=0.0$.



(n) $\omega=0.3$



(o) $\omega=0.8$

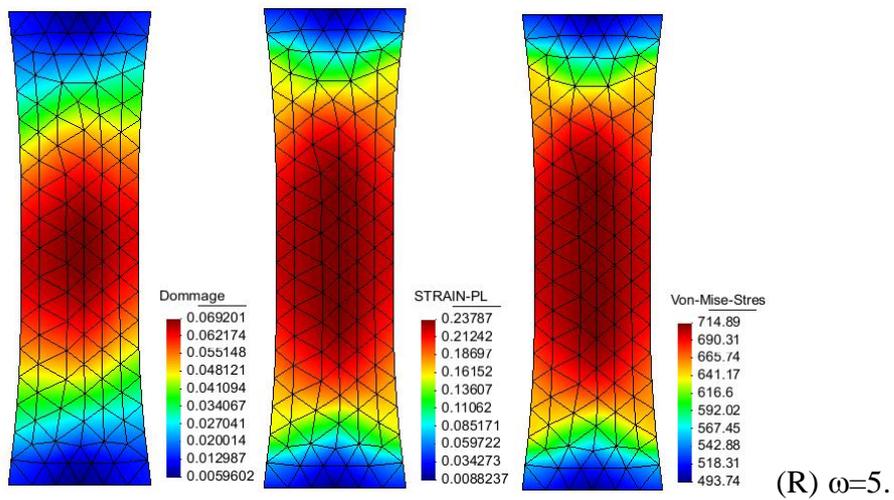
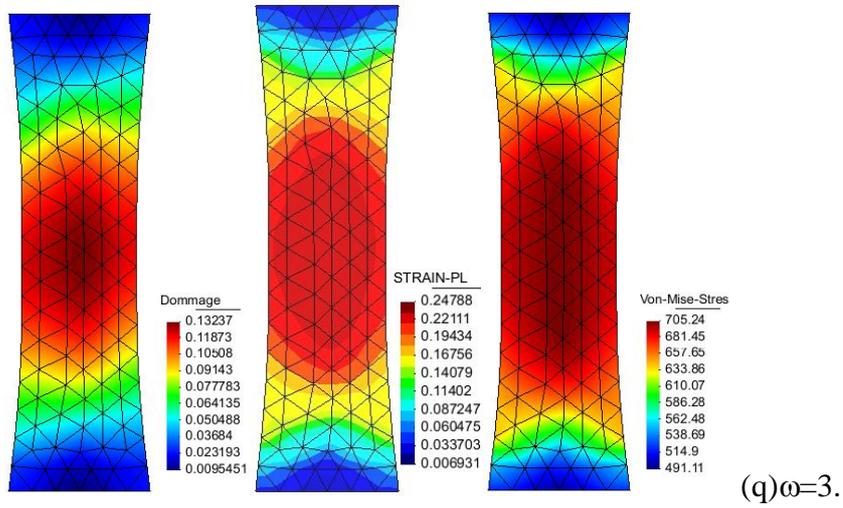
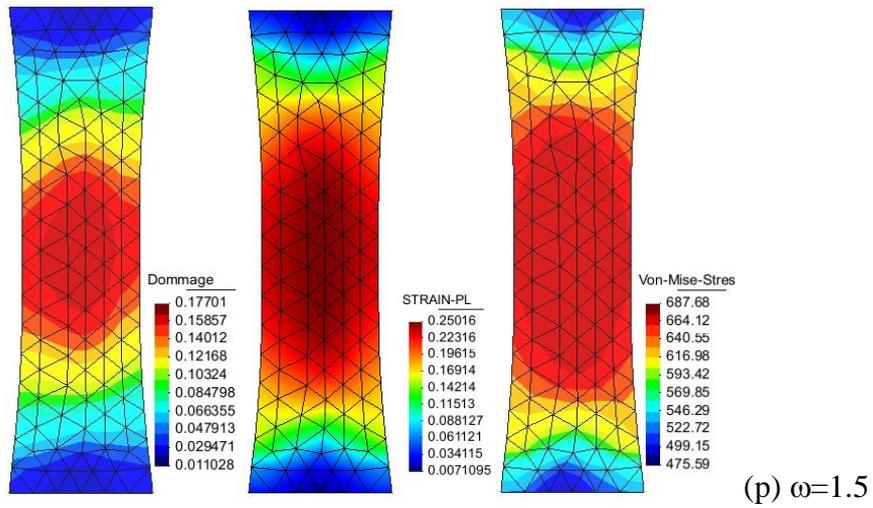
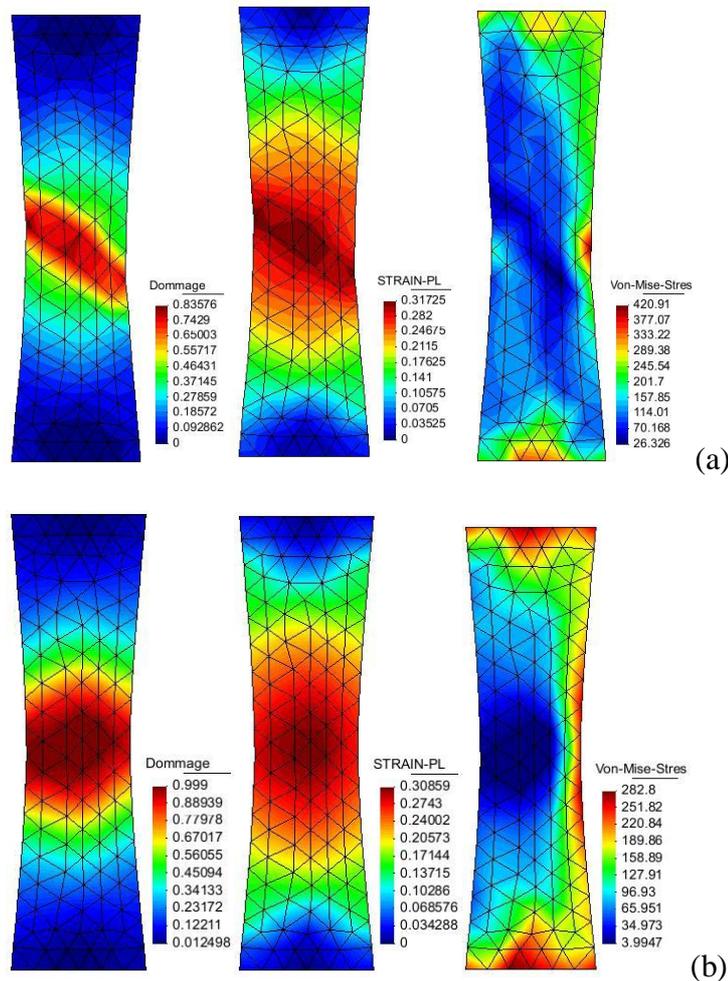
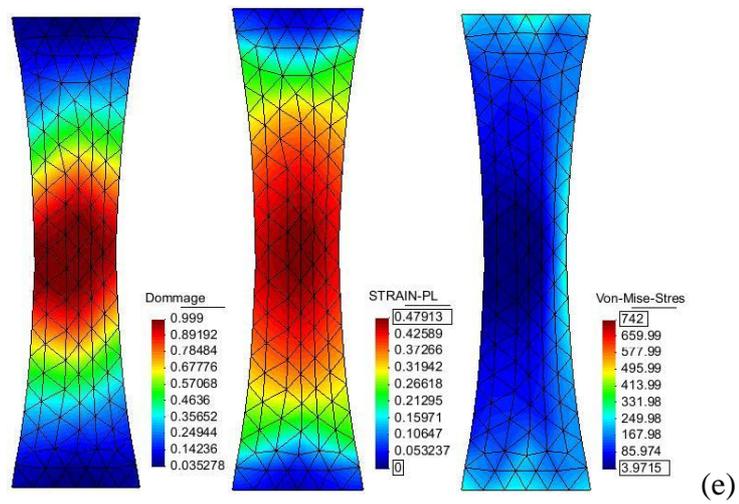
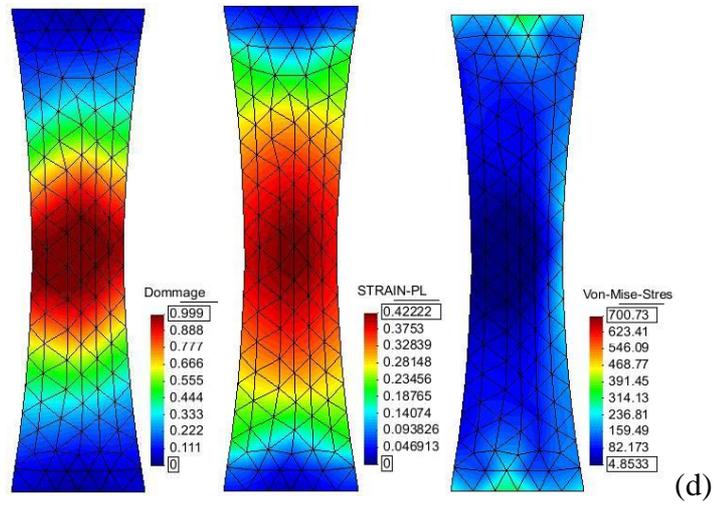
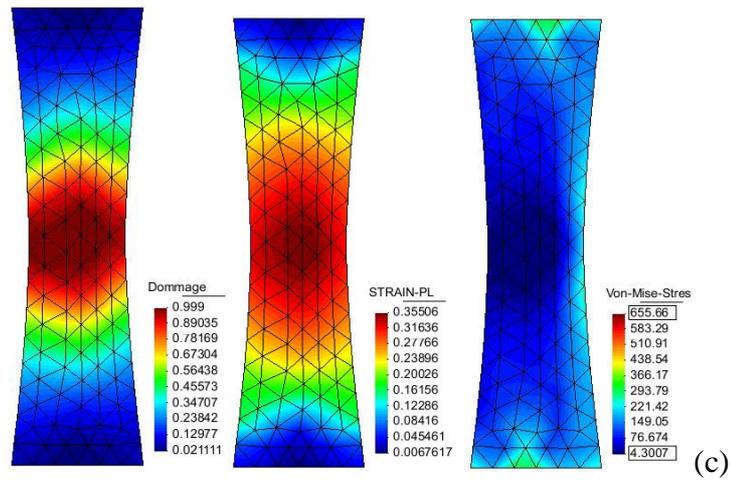


Figure III- 9c : Distribution pour les cinq valeurs de ω : du dommage, la déformation plastique et la contrainte de von-Mises au déplacement $u=0.4$

La Fig(III-10) montre la distribution du dommage, de la déformation plastique et de la contrainte de von-Mises respectivement au moment de la rupture de chaque éprouvette. Nous constatons que contrairement au cas local où la bande de localisation se concentre sur un rangé d'élément, dans le cas non local elle s'étire sur plusieurs éléments. Ceci semble confirmer que la régularisation de la solution est effective. Les Fig.(III-10(b, c, d, e, f)) prouvent que le phénomène de localisation peut être contrôlé par le paramètre de la longueur interne. Au moment de la rupture, l'endommagement se concentre dans la partie centrale de l'éprouvette tous en remarquons une légère inclinaison dû à l'orientation initiale de la bande de localisation du dommage dans le cas local. Le couplage de l'endommagement non local aux variables internes semble donc satisfaisant pour des valeurs de ω pas très grandes.





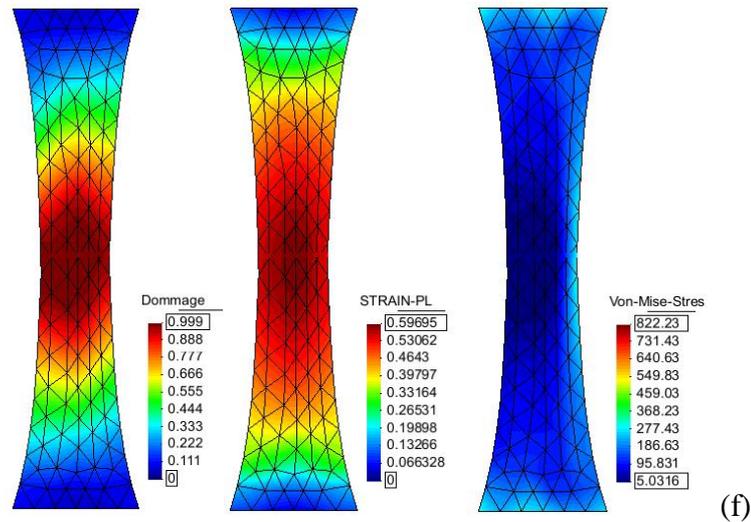


Figure III- 10 : Distribution respective du dommage, la déformation plastique et la contrainte de von-Mises à la rupture.

Les Fig. (III-11 et III-12) montrent l'évolution de la contrainte de von-Mises (a) et du dommage (b) en fonction de la déformation plastique pour $\omega=0$ et $\omega=1,5$. Dans le cas local ($\omega=0$); nous constatons sur le Fig.(III-11) qu'au moment de la rupture le P.G N°1 suit une évolution normale jusqu'à la rupture, tandis que les Points 2 et 3 se déchargent d'une manière élastique comme cité dans les travaux de **Hammi [Ham00]**. Sur la Fig.(III-12) qui représente le cas non local pour $\omega=0,7$, nous constatons que le comportement du P G N°1 est similaire a celui du cas local, cependant, pour les points 2 et 3, ils se déchargent d'une manière non brutale. En ce qui concerne l'évolution de l'endommagement dans le cas local les trois points, suivent la même loi, alors que dans le cas non local l'évolution des points 2 et 3 est différente : au moment où le dommage atteint sa valeur limite ($D_c=0.99$) les points 2 et 3 évolues en suivant le schéma de la fig.(III-12b). Ceci correspond aux résultats des travaux de **[Den07]**. Ce résultat s'explique par le fait que dans le cas non local, la variable d'endommagement calculée n'influe pas seulement sur le point considéré mais également sur son entourage.

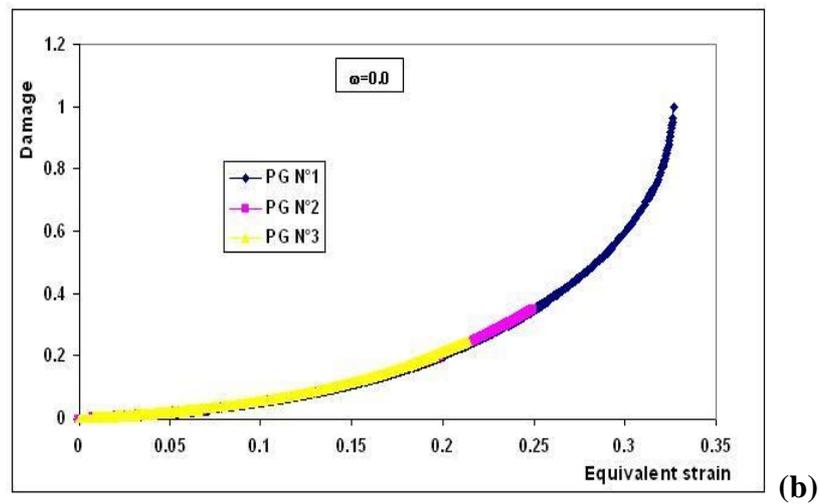
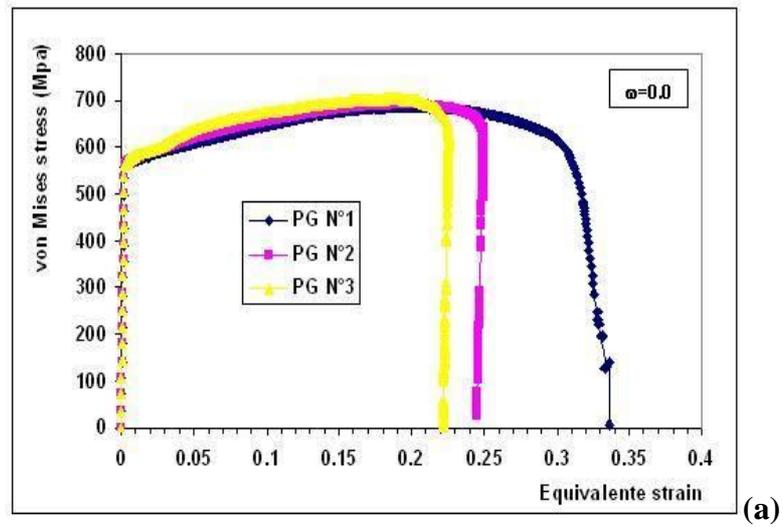


Figure III-11 : Courbe contrainte de von-Mises(a) et du dommage(b) en fonction de la déformation plastique pour $\omega=0$.

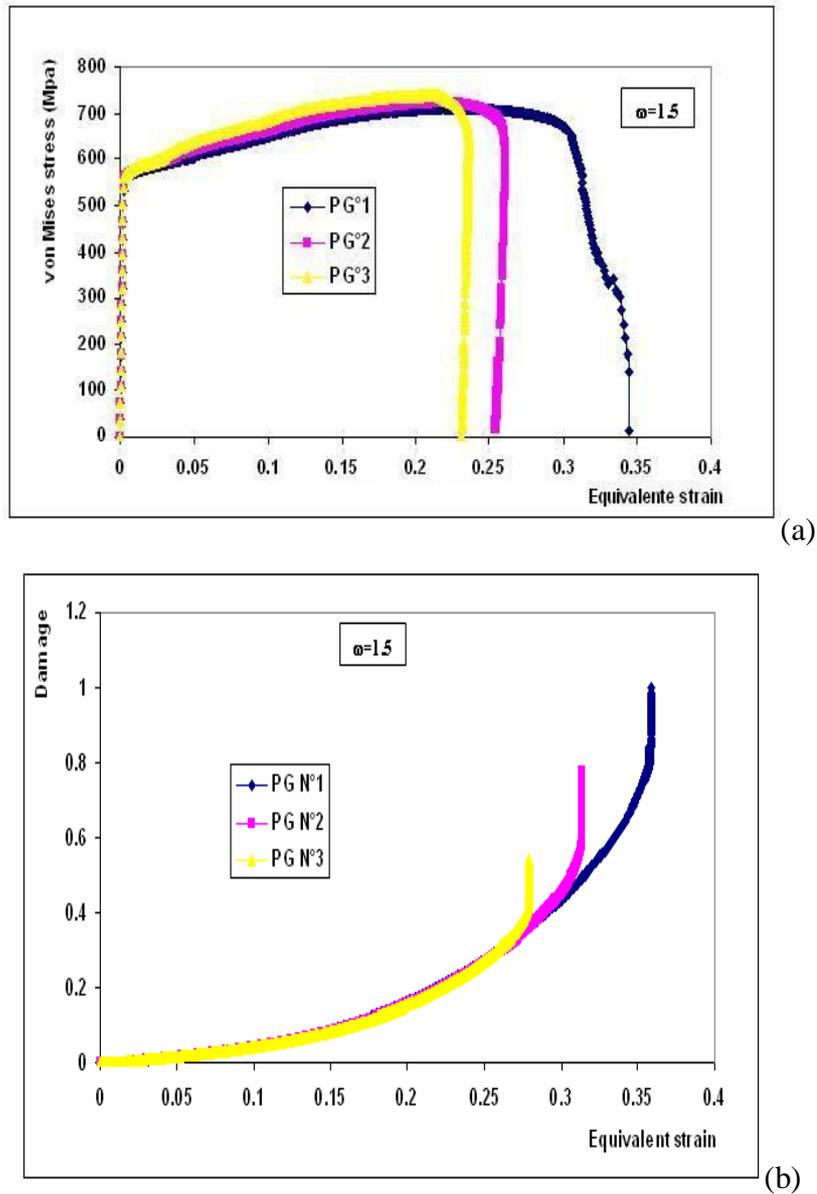


Figure III- 12 : Courbe contrainte de von-Mises (a) et du dommage(b) en fonction de la déformation plastique pour $\omega=1.5$

3.4.1.2.- Eude de l'influence de la taille de l'élément "h"

L'objectif essentiel de notre modèle est d'assuré une solution indépendante de la discrétisation spatiale et temporelle. Dans ce paragraphe, nous étudions l'influence de la taille de l'élément "h" sur la réponse de la structure. Pour ce faire nous choisissons quatre valeurs de "h"(h=0.16, h=0.13 et h=0.1) dans chacun des cas suivant $\omega=0$, $\omega=0.3$ $\omega=0.7$ et $\omega=1.2$.

La Fig.(III-7) présente la courbe force déplacement pour les quatre valeurs de ω . Nous constatons que le point de bifurcation est d'autant plus éloigné que la valeur de ω est grande. Nous remarquons aussi que durant la phase d'adoucissement, les courbes forces-déplacements se confondent presque dans le cas non local. Ces observations concordent avec les résultats de **Peerlings [Per99]** qui a constaté une superposition parfaite des courbes forces déplacements dans le cas non local. Ce résultat montre l'indifférence de la solution à la taille de l'élément, donc au maillage dans le cas non local, alors qu'une certaine sensibilité apparaît dans le cas local.

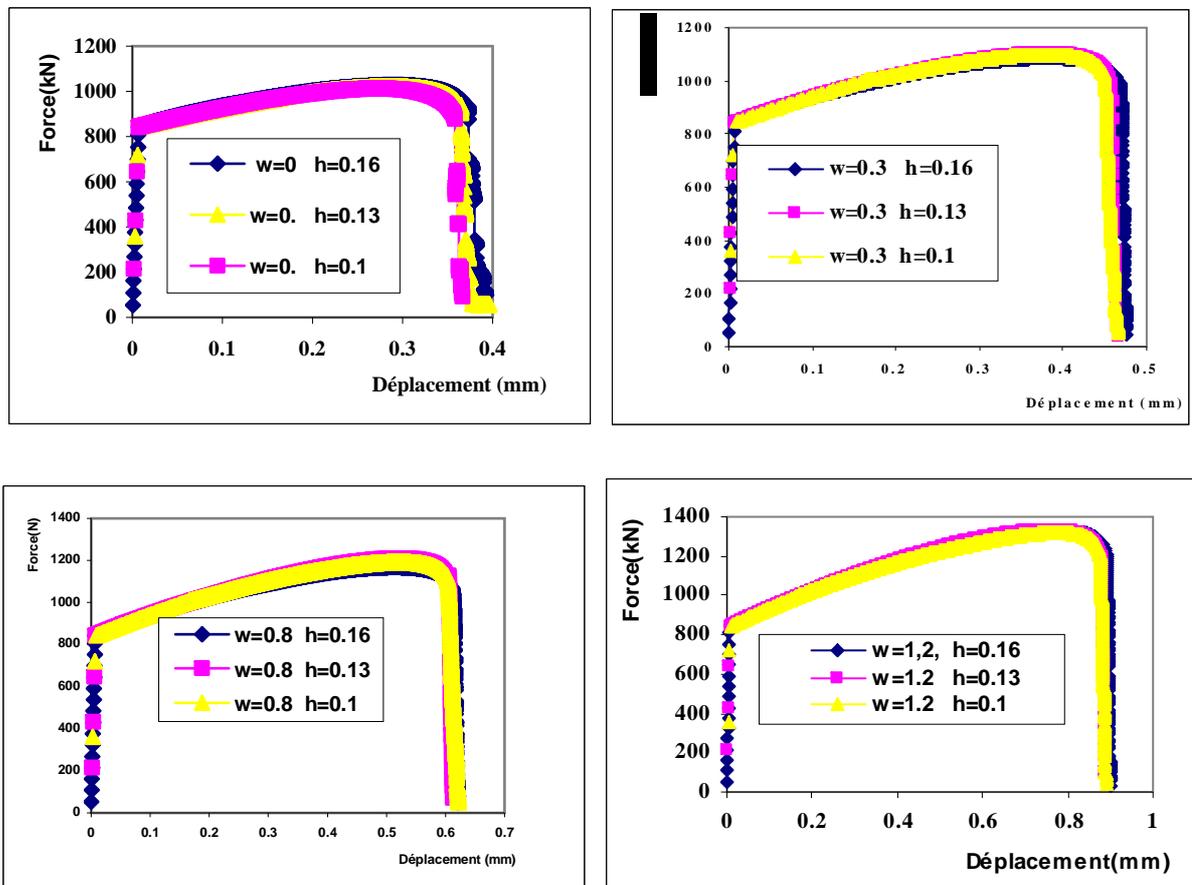


Figure III- 13 : Courbe Force Déplacement pour différentes valeurs de "h" et " ω "

On montre sur les Fig.(III-14, à III-16), la distribution du dommage, la déformation plastique et de la contrainte de von-Mises respectivement pour les valeurs de ω ; $\omega=0.$, $\omega=0.3$, $\omega=0.8$ et $\omega=1.2$ respectivement. L'analyse de ces figures nous conduit aux constatations suivantes :

- L'analyse des isovaleurs montre que l'étendu et la forme de la zone de localisation dans le cas local se localise toujours sur une largeur qui dépend directement de la taille de l'élément quelque soit le maillage considéré (Fig.III-13). Par contre dans le cas non local $\omega \neq 0$, nous constatons que l'étendue et la forme de la zone de localisation est quasiment indépendante du maillage. Le volume de la zone de localisation est clairement dépendant de la longueur interne. en augmentant la valeur de " ω ", l'étendu de la zone de localisation devient plus importante.
- Sur les différents maillages, nous constatons que les champs d'endommagement sont homogènes et ne présentent pas de gradients élevés. La localisation franche dans une rangée d'élément comme dans le cas local n'est plus observée, à sa place apparaît un mode de localisation orthogonal à la direction de chargement comme prédit dans les travaux de **Denis[Den07]**. La localisation se fait quasiment sur une largeur constante sur les trois maillages (Fig.(III-14 III-15 et III-16)). Le point de bifurcation, n'est plus observé comme le cas local, cette constatation concorde avec les travaux de **Nedjar[Ned01], Geers[Gee04]**.
- Les résultats des Fig.(III-14, III-15 et III-16) montrent une indépendance du champ d'endommagement non local vis-à-vis de la taille de maille qui apparaît plus pour les maillages $h=0.13$ et $h=0.1$. Cette indépendance n'est garantie que si une longueur interne minimale est appliquée. Si la longueur interne est assez petite nous retrouvons les résultats de l'état local.

A partir des résultats cités précédemment, nous pouvons donc affirmer que la formulation retenue dans cette étude est à même d'assurer l'indépendance des réponses éléments finis vis-à-vis de la taille de maille pour le phénomène de localisation et que nous décrivons correctement la réponse de la structure dans la zone de striction, donc nous contrôlons mieux la rupture de la structure. Pour des valeurs de ω assez grandes, nous constatons que la zone de localisation se dissipe sur une rangée importante d'éléments ce qui ne concorde pas avec les observations expérimentales. A noter que le choix d'une longueur interne élevée augmente significativement la dissipation à rupture de la structure. Ceci correspond à une ductilité accrue du matériau pour les points matériels appartenant à la zone de localisation. Ces

observations nous permettent de dire que pour avoir une solution satisfaisante il faudrait prendre une valeur de ω moyenne par rapport a la taille des éléments.

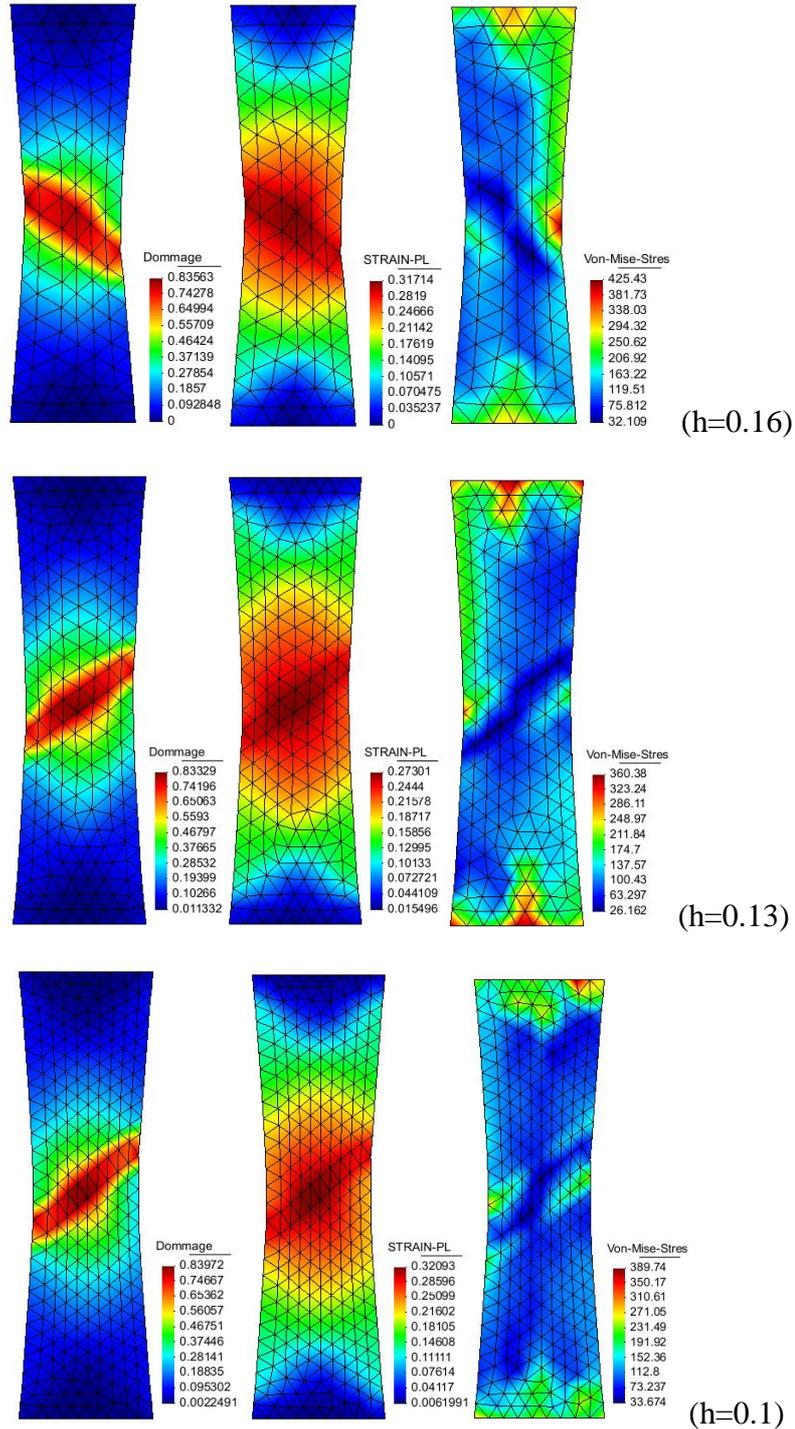


Figure III- 14 : Distribution du dommage, de la déformation plastique et de la contrainte de von-Mises a la rupture à différents pas h avec $\omega=0$.

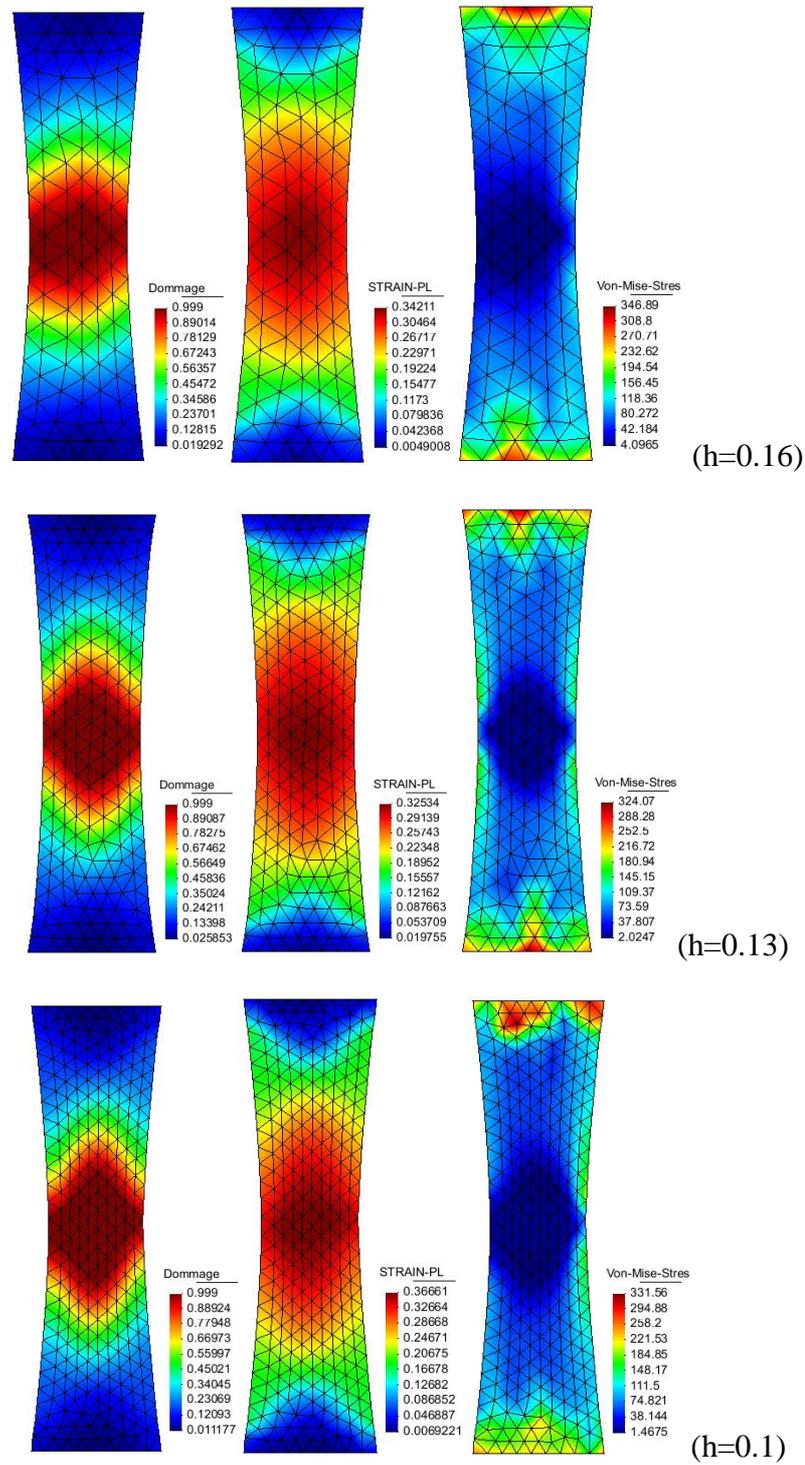


Figure III- 15 : Distribution du dommage, de la déformation plastique et de la contrainte de von-Mises a la rupture à différents pas h avec $\omega=0.3$

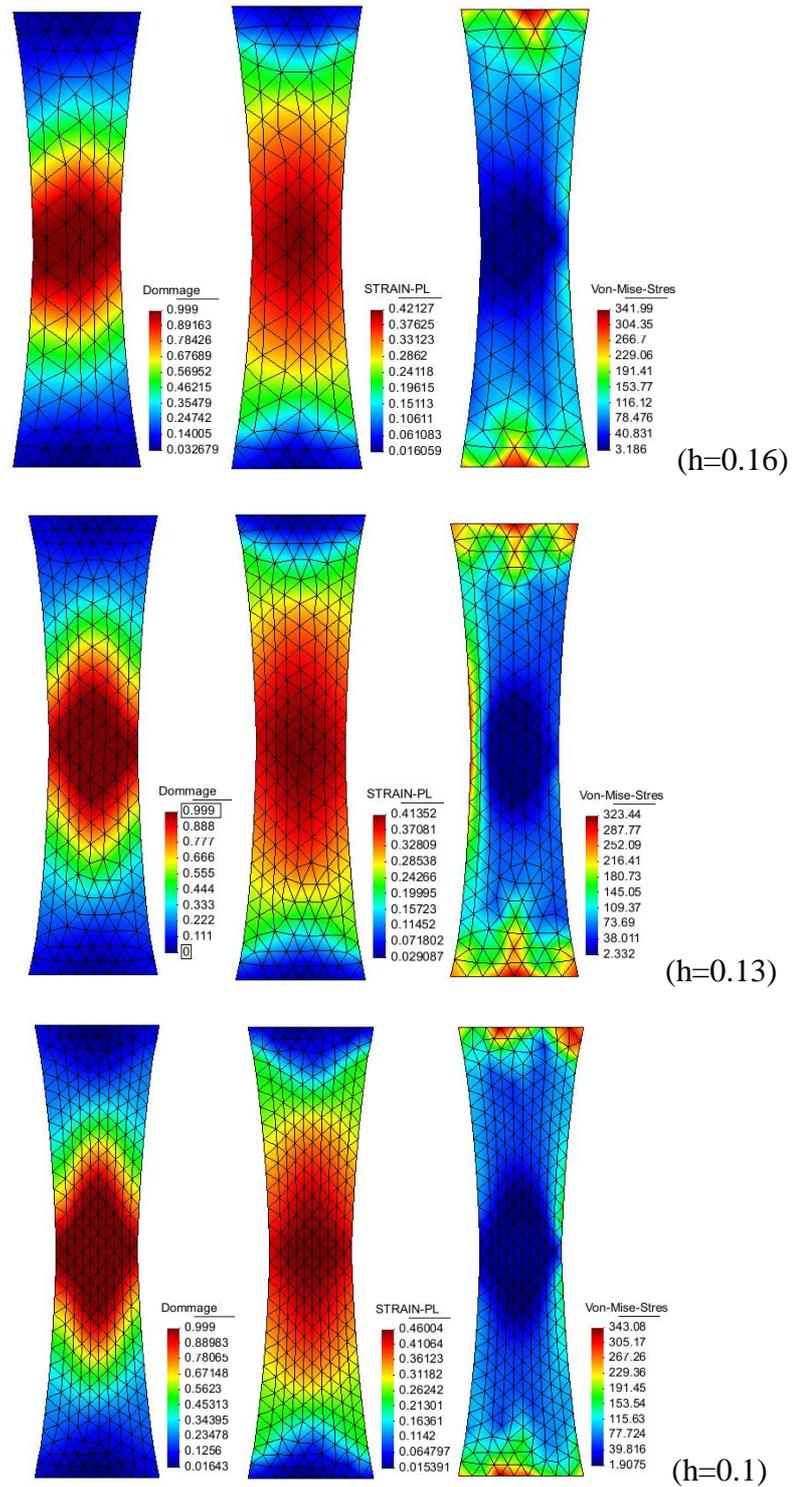


Figure III-16 : Distribution du dommage, de la déformation plastique et de la contrainte de von-Mises a la rupture à différents pas h avec $\omega=0.8$

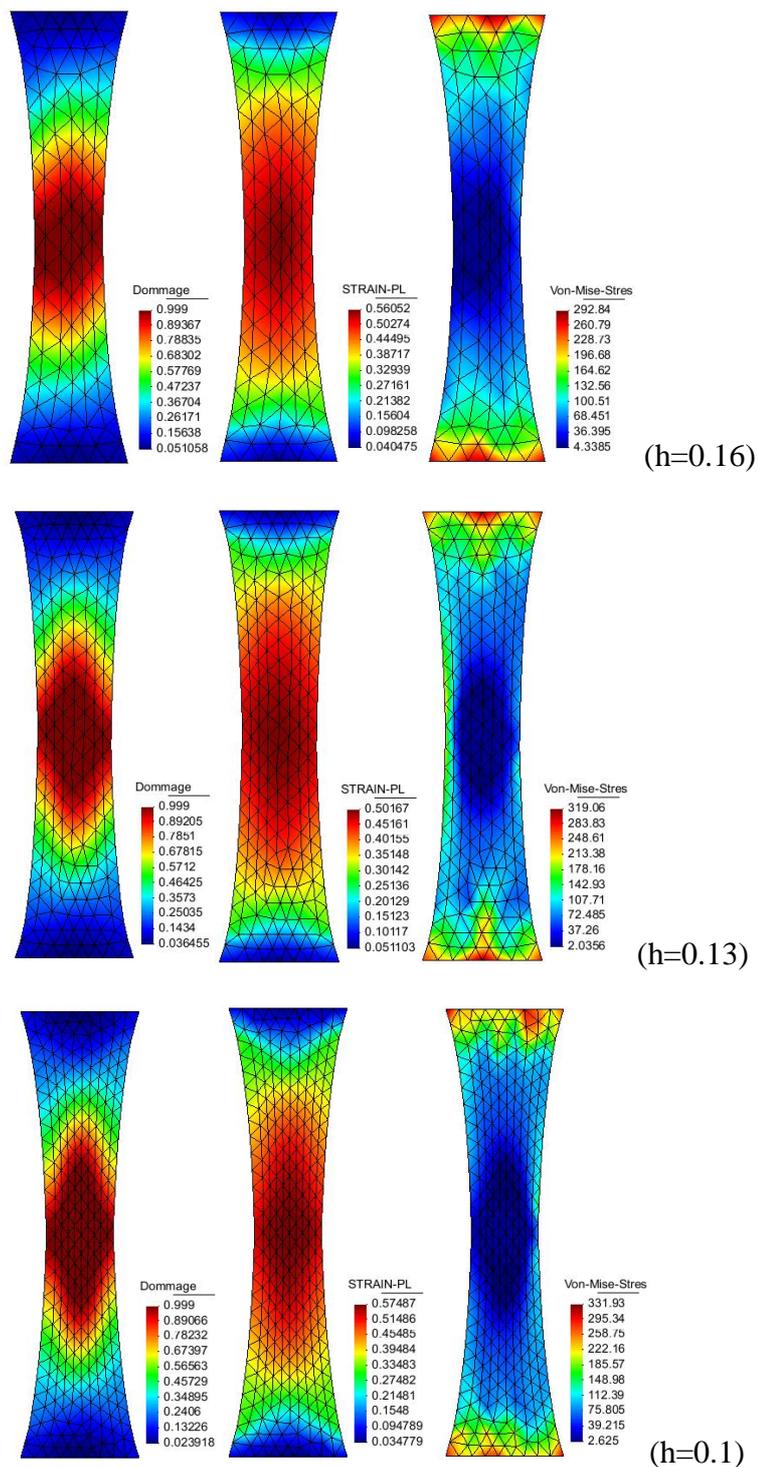


Figure III- 17 : Distribution du dommage, de la déformation plastique et de la contrainte de von-Mises a la rupture à différents pas h avec $\omega=1.2$

3.4.2. Application a une éprouvette DENT

Dans ce paragraphe, afin de mieux cerner le phénomène de localisation nous allons étudier une éprouvette dans laquelle nous avons introduit deux entailles similaire des deux cotés. Ce type d'éprouvette a été étudié initialement par **Peerlings [Pee99]** puis repris par **Nedjar [Ned01]** dans le cas d'un calcul élastoplastique incluant un gradient de dommage. Les dimensions, le chargement et le maillage de l'éprouvette sont montrés sur la Fig.(III-18).

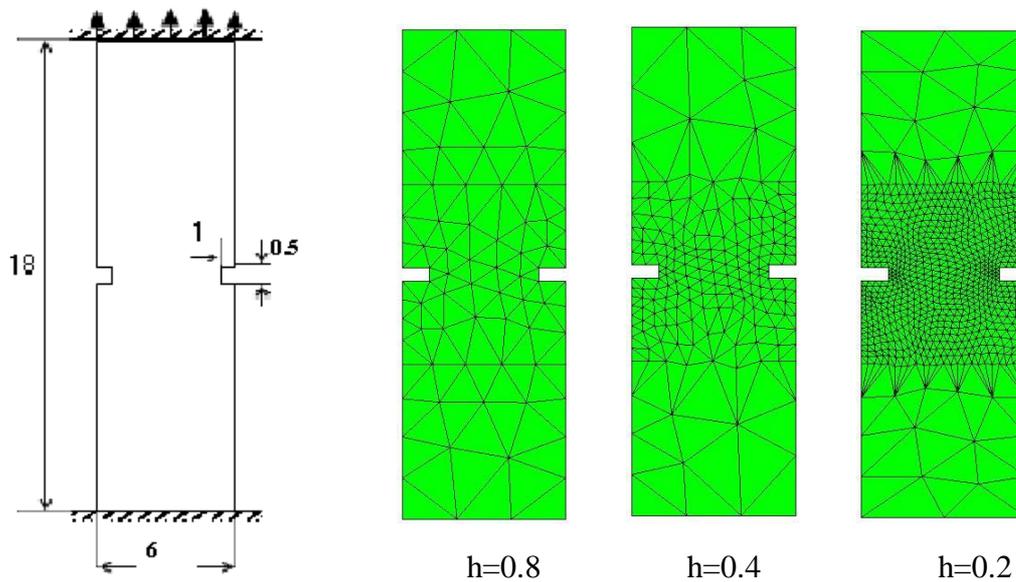


Figure III- 18 : Eprouvette DENT (CAL, chargement et les maillages utilisés)

Nous présentons sur la Fig.(III-19) les réponses globales dans le cas local ($\omega=0.$) et non local ($\omega=3.$). Nous constatons que :

- dans le cas local à partir du pic les calculs ne sont plus stables, ils présentent plusieurs fluctuations et instabilités. A partir d'une certaine valeur du dommage d'environ de 0.5, des instabilités apparaissent dans le calcul et des fluctuations sur les courbes forces déplacement sont observées (voir Fig.(III-19.a). Par contre, dans le cas non local, nous remarquons que l'allure des courbes est plus continue et le phénomène de striction est plus stable, ce qui permet de mieux contrôler la rupture du matériau.

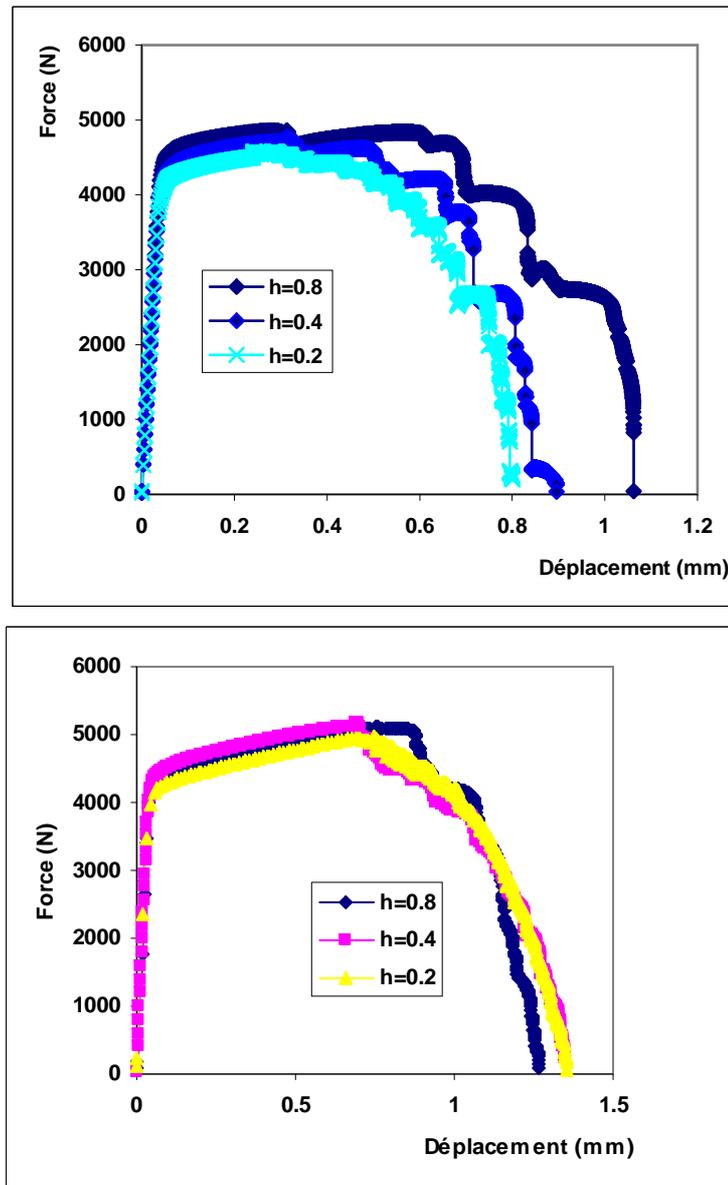


Figure III- 19 : Réponse globale respectivement pour $\omega=0$. et $\omega=3$.

Les Fig.(III-20) nous présentent la répartition de l'endommagement, de la déformation équivalente et de la contrainte de von-Mises dans le cas local ($\omega=0$.) Les Fig.(III-21) représentent les mêmes répartitions dans le cas non local pour $\omega=1$. Nous constatons que dans le cas local, la taille de la zone de localisation est directement lié à la taille du maillage, la localisation se fait comme observé précédemment, toujours sur une rangé d'élément. La largeur de cette bande est liée directement à la discrétisation spatiale. Ce qui nous ramène à

dire que si on prend des pas de "h" très faible, on aura une largeur de bande presque nulle. Par contre, dans le cas non local, pour une valeur de ω donnée on remarque que la zone de localisation est quasiment identique sur les quatre maillages. Nous constatons que la forme de la zone endommagée est similaire pour tous les maillages. Ces résultats sont en bonne concordance avec les résultats de Peerlings qui a montré dans ces travaux que la distribution du dommage est quasiment identique tous le long du ligament.

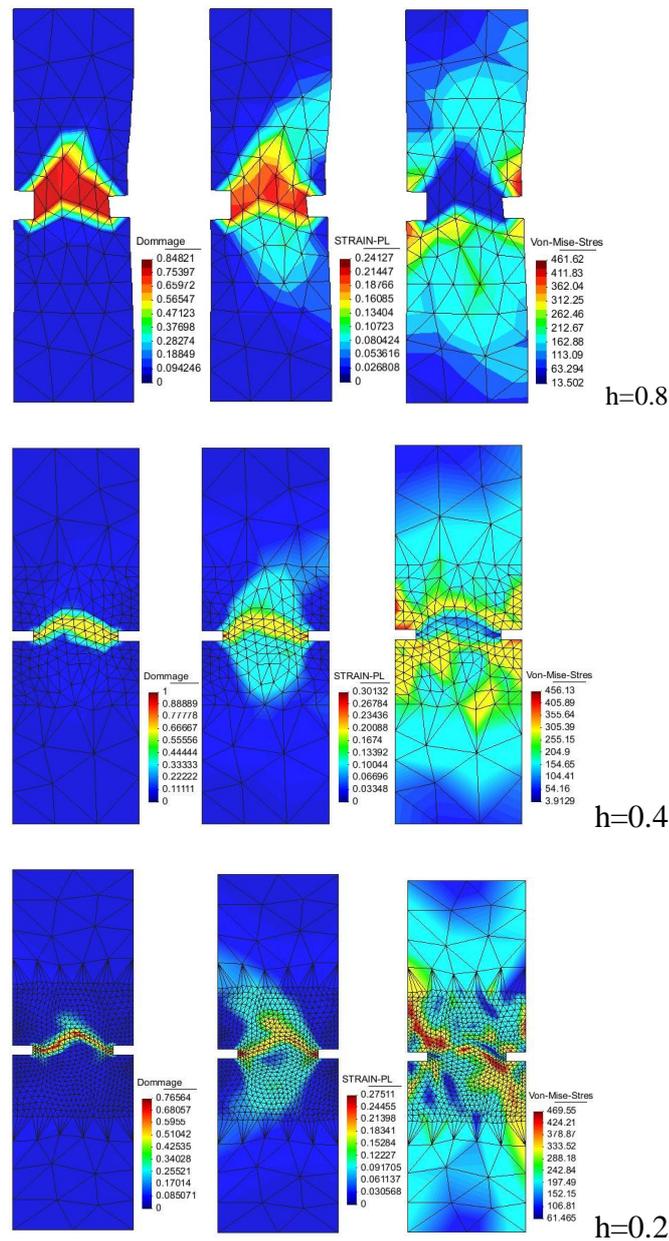


Figure III- 20 : Iso valeur pour $\omega=0$.

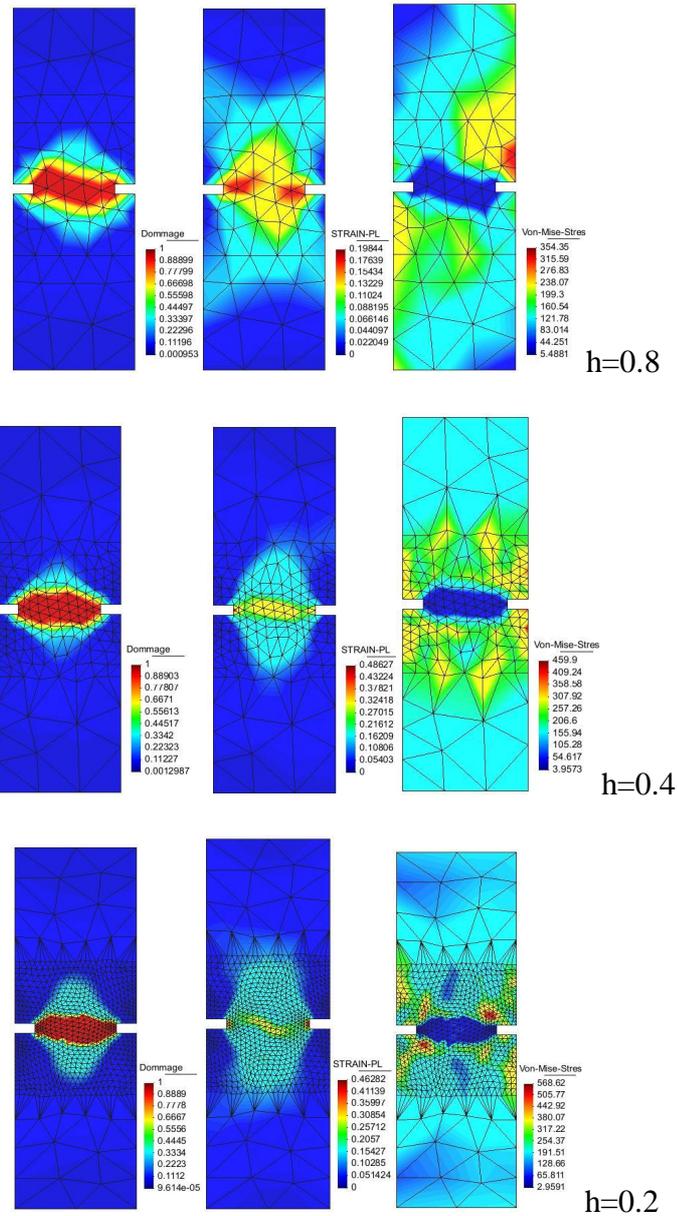


Figure III- 21 : Iso valeur pour $\omega=1$.

3.4.3. Application a une éprouvette à double entaille en C

L'étude de ce type d'éprouvette a été faite par Shen [She05] et Denis [Den07]. Dans ces derniers travaux de Denis, il a montré des résultats similaire à ceux présentés par

Shen[She05]. Dans ce paragraphe nous allons reprendre ce type d'éprouvette pour faire une comparaison qualitative des résultats.

Dans notre cas nous allons considérée l'éprouvette de dimension(1*2) avec une entaille de rayon $R=0.2$ mm. la Fig.(III-22) présente les maillages pratiqués. Le modèle sera comparé pour trois valeur ; $\omega=0.$, $\omega=0.2$ et $\omega=0.7$.

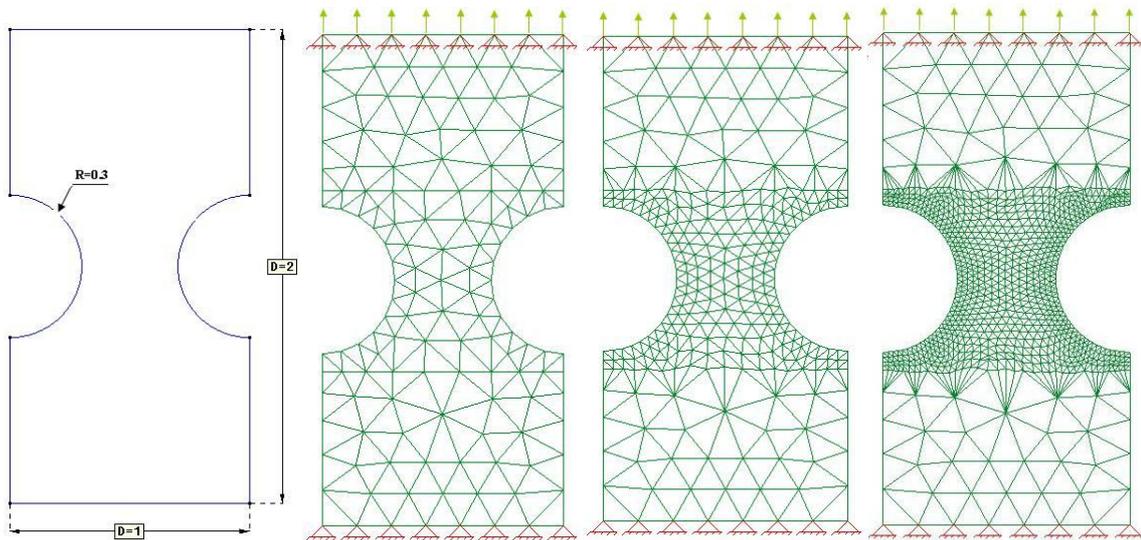


Figure III- 22 : Dimensions et maillages pratiqués respectivement $h=0.1$, $h=0.05$ et $h=0.025$ avec les CAL

Les figures (III-23)(a,b,c) montrent les courbes forces déplacements pour les différentes valeur de ω , respective. Comme attendu le modèle non local conduit à une rupture plus tardive que le modèle local comme le montre les Fig. (III-23b) et (III-23-c). Donc on postuler que cette formulation non locale permet d'assurer l'unicité de la courbe force déplacement et ceci et d'autant vrai que la valeur de ω est grande.

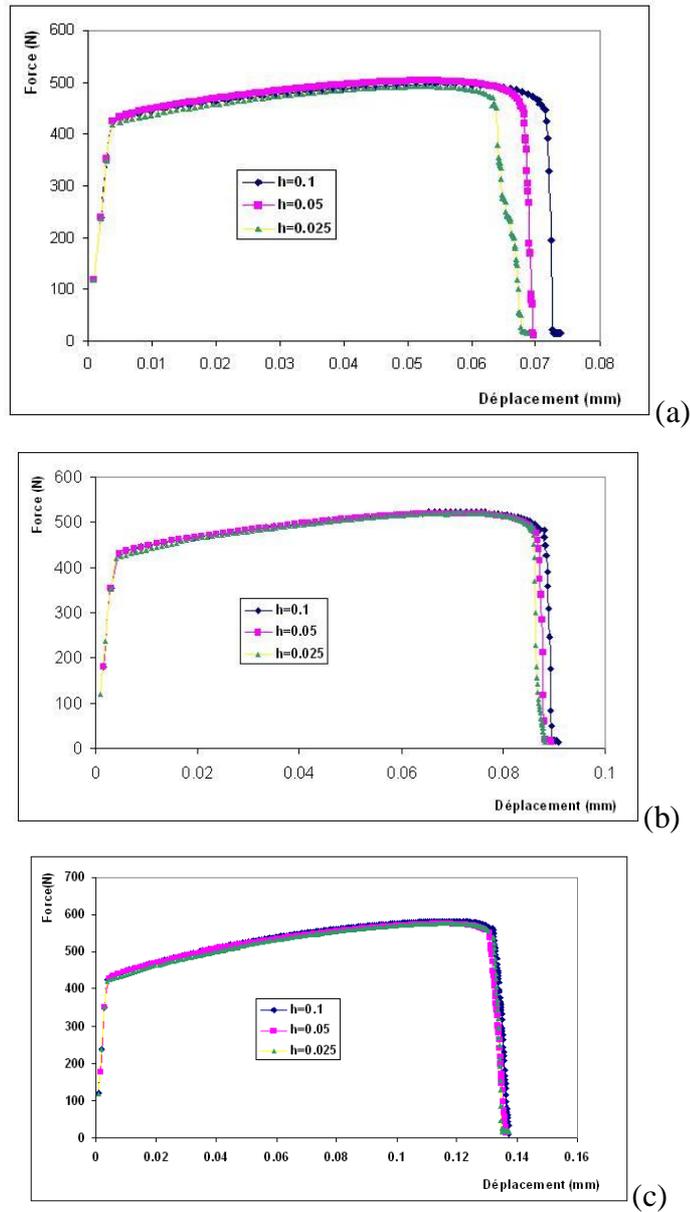


Figure III- 23 : Courbe force déplacement pour les différentes valeurs de ω ;

a) $\omega=0$, b) $\omega=0.2$ et c) $\omega=0.7$

La Fig.(III-24) présente les profils d'endommagement selon une coupe orthogonale à la fissure, effectuée sur l'éprouvette au moment de la rupture de chaque éprouvette. Nous constatons que pour le maillage grossier $h=0.1$ la concentration du dommage se limite en un point de gauss au centre de l'éprouvette. Par contre pour les maillages plus raffiner $h=0.05$ et $h=0.025$ la largeur de bande de localisation au centre de l'éprouvette est identique et elle est à

une largeur égale. Ce qui nous ramène à dire que les isovaleurs d'endommagement sont mieux distribuées au centre de l'éprouvette.

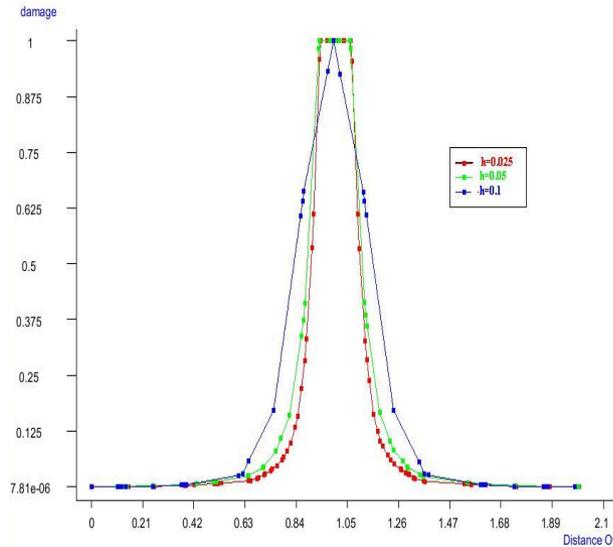


Figure III- 24 : Comparaison des profils d'endommagement selon une coupe parallèle à la direction de traction au plan de symétrie de l'éprouvette pour $\omega=0.7$

Les Fig.(III-25) III-26 et III-27) montrent la répartition de l'endommagement et de la déformation plastique cumulée pour les trois valeurs de ω . Nous constatons que dans le cas local la localisation se fait toujours selon une largeur qui dépend de la taille des éléments. Par contre dans le cas non local, la répartition du dommage et de la déformation sont d'autant mieux répartie au centre de l'éprouvette que la valeur de ω est grande. Ceci est valable pour les maillages fins par contre pour le maillage dont la taille moyenne des éléments est $h=0.1$ nous constatons que l'endommagement se délocalise bien sur les bords de l'entaille par contre au centre de l'éprouvette où la taille des éléments est plus grande la répartition de l'endommagement n'atteint pas la deuxième rangée d'éléments même pour $\omega=0.7$. Ce qui nous ramène à dire que pour pouvoir bien délocaliser il faut choisir des valeurs de ω encore plus grande par rapport à la taille du maillage.

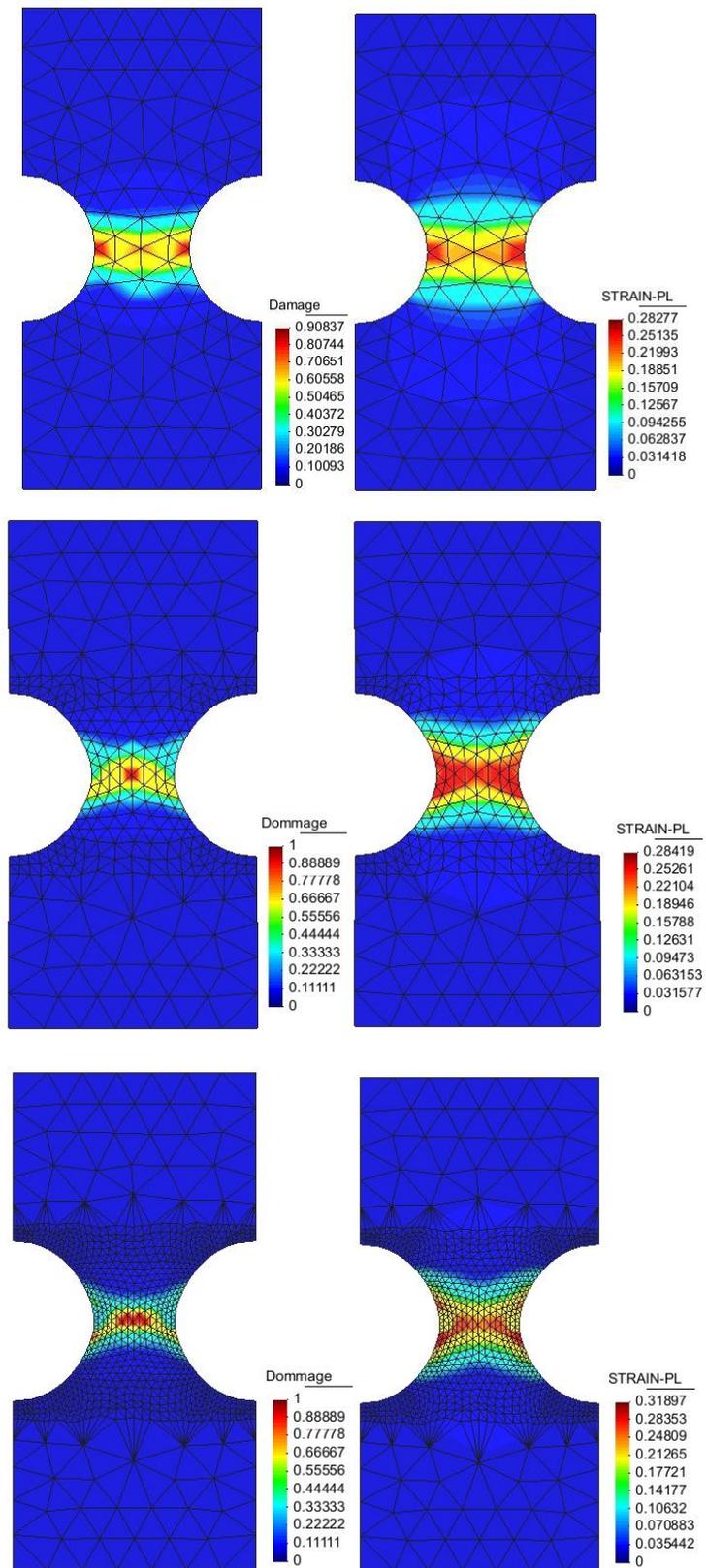


Figure III- 25 : Courbe locale avec $\omega=0$.

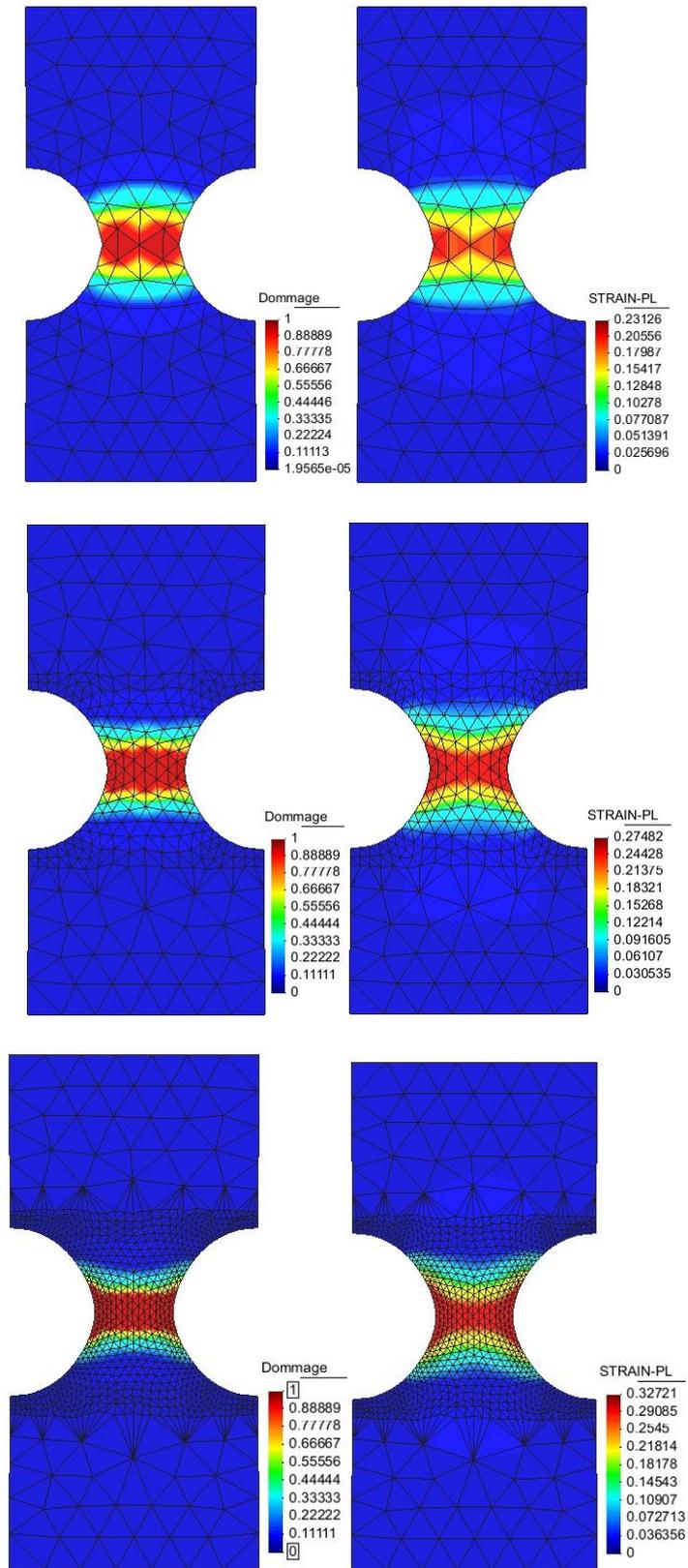


Figure III- 26 : Courbe non locale avec $\omega=0.2$

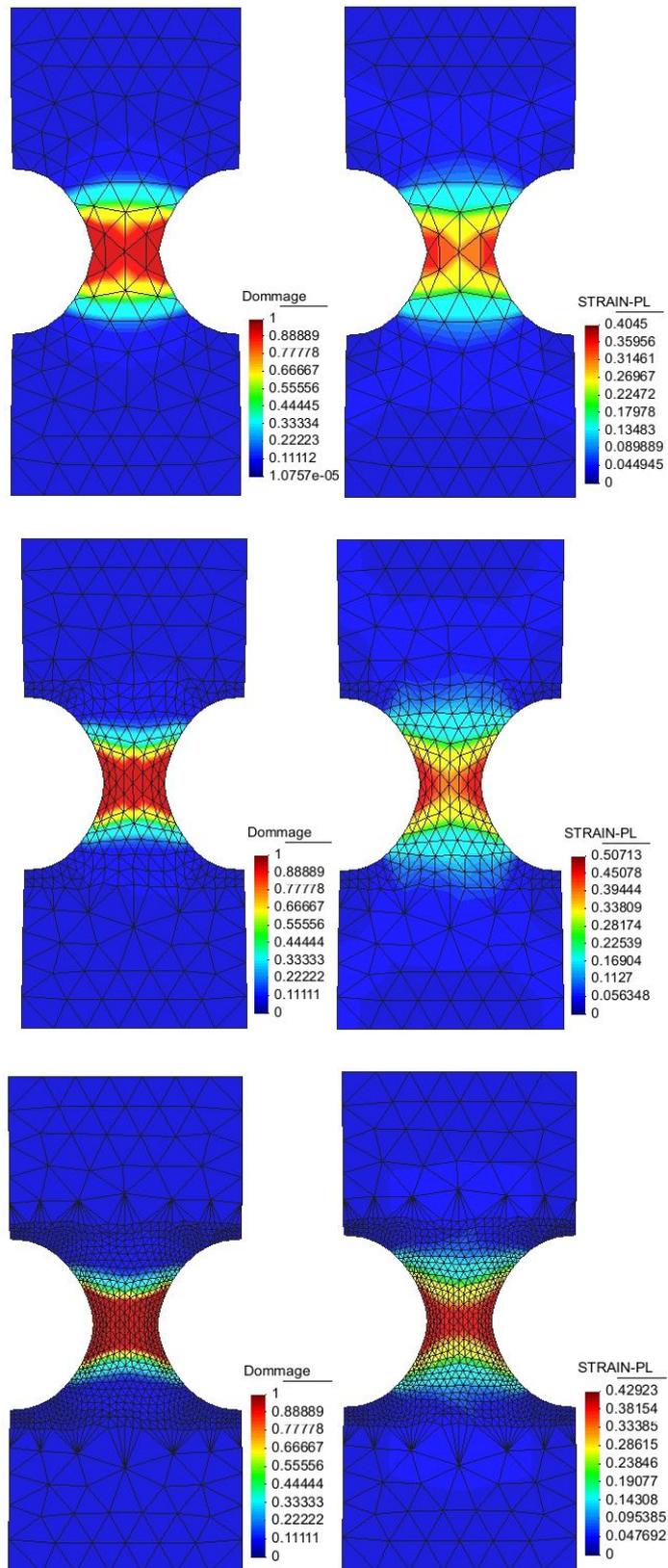


Figure III- 27 : Courbe non locale avec $\omega=0.7$

3.5 Conclusion

Dans cette dernière partie de ce chapitre, nous nous sommes focalisés sur une approche non locale en gradient de l'endommagement. Ceci afin déterminer l'aptitude du modèle a assuré des réponses éléments finis exploitables quantitativement et qualitativement dans la zone post critique. Nous avons, grâce à cette méthode de régularisation :

- Éliminé quelques problèmes de convergence et de stabilité dans les calculs,
- les courbes de traction se superposent pour des maillages de différentes tailles,
- nous avons augmenté la ductilité du matériau et la force maximale atteinte lors du chargement, que ce soit pour le comportement en un point de Gauss, que pour le comportement global.

Conclusions Générales et perspectives

Conclusions Générales et perspectives

Il est bien connu que les formulations classiques présentant un caractère adoucissants sont fortement dépendants des paramètres de discrétisation dans la phase post critique. L'hypothèse de la mécanique locale est alors remise en cause. L'objectif essentiel de ce travail est de disposer de justification physiques permettant de modéliser où et quand un endommagement significatif apparaît au sein du matériau. Dans ce but, nous avons utilisé le cadre standard de la thermodynamique des processus irréversibles avec variables internes pour formuler une loi de comportement couplé à un endommagement non local.

La mise en œuvre informatique de cette formulation non locale nous a amené à utiliser une loi de comportement élastoplastique à écrouissage isotrope non linéaire couplé à l'endommagement. Ce modèle décrit la dégradation continue d'un milieu, supposé initialement vierge de toute fissure et/ou cavité. Nous avons retenu la notion de dommage introduite par Kachanov avec une variable d'endommagement homogène et isotrope. le couplage comportement endommagement a été réalisé en utilisant le principe d'équivalence en énergie. Le potentiel thermodynamique, défini à partir de la thermodynamique des phénomènes irréversibles, a permis de définir la force thermodynamique nécessaire pour produire le dommage. Quant à l'hypothèse du potentiel de dissipation et à la fonction seuil d'endommagement, elles nous ont conduit à la loi d'évolution du dommage. Malheureusement, cette formulation n'a pu être implémentée dans un code de calcul industriel (Abaqus) en raison de l'inaccessibilité de certaines données, même avec une subroutine utilisateur VUEL, pour remédier à cette initiation nous avons utilisé un programme de calcul en élastoplasticité à écrouissage isotrope linéaire qui a été étendu au cas d'un comportement élastoplastique à écrouissage isotrope non linéaire couplé a un endommagement local. Nous avons montré tout d'abord que la solution est toujours lié a la discrétisation spatiaux, ce qui constitue un inconvénient majeur de ce genre de formulation. Ce modèle laisse donc apparaître un certain nombre de difficultés rendant les techniques de résolution par éléments finis mal adaptées. Ceci est dû au fait qu'au cours de l'évolution du chargement, la description locale tient compte de l'évolution de la déformation, et éventuellement du dommage uniquement au point choisi sans prendre en considération les points voisins. Ceci entraîne une sous-estimation de la résistance ultime du matériau. Ces constatations ne sont pas nouvelles.

Pour palier cette situation, nous avons décidé de chercher une technique qui nous permet de nous affranchir de cette dépendance au maillage, pour ce faire nous avons effectué une analyse des théories et techniques pilotage les plus courantes, permettant de restaurer l'indépendance vis-à-vis du maillage. Puis nous nous sommes focalisés sur les approches non locales en gradient d'endommagement. Les différentes formulations sont ensuite étudiées dans le cas de sollicitation simples pour déterminer l'aptitude de chacune d'elle à assurer des réponses éléments finis exploitables quantitativement et qualitativement dans la zone post critique. En utilisant une régularisation du modèle en utilisant une formulation en gradient de dommage tenant compte des hétérogénéités au sein du matériau nous avons proposé un modèle non local. Une fois les équations établies, elles ont été implémentées dans le programme de calcul déjà réalisé.

Nous avons, grâce à cette méthode de régularisation :

- Éliminé quelques problèmes de convergence et de stabilité dans les calculs,
- montré que quand la différence du maillage n'est pas importante, les courbes de traction se superposent,
- pu augmenter considérablement la force maximale atteinte lors du chargement, ce qui est encore de nos jours l'une des limitations des modèles établis en approche locale.

Cependant, des perspectives de ce travail existent et sont même nombreuses. Nous ne citerons que celles que nous envisageons à moyen terme. Tout d'abord, une comparaison avec les résultats de l'expérience même dans les cas simples de sollicitations, afin de valider notre méthode. Puis l'application de cette technique de régularisation en mise en forme des matériaux, après son implémentation dans un code de calcul industriel.

Finalement, l'utilisation d'autres formes de non localité du dommage peuvent être envisagées dans le contexte du dommage. Parmi ces formes, il y a lieu de mentionner :

Alternative à l'élément non-local

Il existe de nombreux modèles impliquant différents couplages des quantités locales à la variable non locale. Cependant, ces modèles font appel à la résolution d'une équation de diffusion ou de régularisation pour calculer la variable non locale. Pour les modèles présentés dans cette thèse la variable non locale est issue d'une résolution variationnelle de l'équation non locale. Compte tenu de la nature de l'équation non locale, celle-ci peut être rapprochée de l'équation de diffusion de la chaleur. Il est donc envisageable d'utiliser la fonctionnelle thermique d'un élément thermomécanique standard pour introduire le degré de liberté non local. L'utilisation de la méthode des X-FEM ou des éléments diffus reste aussi une bonne perspective pour la résolution des problèmes de structure. En effet celle-ci s'affranchissent de la notion d'élément ce qui permettra de repérer la zone de localisation.

L'identification de la longueur interne

L'identification du paramètre de longueur interne est cruciale pour l'utilisation des modèles non locaux dans des cas concrets. L'exploitation simultanée des réponses globales et des déformées pourrait permettre l'identification du paramètre de longueur interne. Il est par ailleurs évident que l'identification du modèle non local touche l'ensemble des paramètres du modèle élastoplastique endommageable. L'utilisation des milieux micro morphiques ou de Cosserat reste un domaine ouvert qui commence à faire son apparition dans la régularisation des modèles locaux.

La méthode d'élément totalement endommagés et adaptation du maillage

Le couplage comportement/endommagement permet de décrire la fissuration macroscopique des structures en éliminant les éléments fortement endommagés. Pour les modèles non locaux le choix d'un critère de suppression et d'une procédure adaptée n'est pas évident. L'annulation de la longueur interne au moment de la rupture permet d'appliquer un algorithme classique de suppression d'éléments. La proposition d'une zone fissurée d'épaisseur non nulle impliquant plusieurs éléments reste délicate à justifier physiquement. Si la non localité doit permettre d'agir sur l'étendue du domaine d'écoulement plastique au cours de l'élaboration de la zone de localisation, il serait préférable de conserver le caractère

purement local de la fissuration. L'usage d'un maillage adaptatif pour lequel une taille caractéristique de " l'épaisseur " de la fissure définit la taille de maille minimale pourrait être satisfaisant. Sinon, une méthode de partition de l'unité comme proposée par **Simone [Sim03]**, associée au modèle non local pourrait fournir une réponse acceptable au problème de la fissuration.

BIBLIOGRAPHIE

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

A

- [Abu04] R.Abu-Al-Rub and G.Voyiadjis. Analytical and experimental determination of the material intrinsic length scale of strain gradient plasticity theory from micro- and nano-indentation experiments. *International Journal of Plasticity*, Vol 20 No 6, PP 1139–1182, 2004.
- [Abu05] R.Abu-Al-Rub and G.Voyiadjis. A direct finite element implementation of gradient-dependent theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63 :603,629, 2005.
- [Abu06] R.Abu-Al-Rub and G.Voyiadjis. A physically based gradient plasticity theory. *Int. J. Plasticity*, Vol 22 No 4, PP 654–684, 2006.
- [Add092] D.Addressi, S.Marfia, and E.Sacco. A plastic nonlocal damage model. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol 191, PP 1291–1310, 2002.
- [All97] O.Allix and J.F.Deü. Delayed-damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *Engineering Transactions*, Vol.45, PP 29–46, 1997.
- [Aif92] E.Aifantis. On the role of gradients in the localization of deformation and fracture. *Int. J. Engng. Sci*, Vol 30, PP 1279–1299, 1992.
- [Amo97] Amoussou Ch. Et Rousseau T., "Modélisation numérique de l'endommagement fragile: 1.- Intégration numérique d'une loi de comportement avec discontinuités, 2.- Développement d'un élément fini avec discontinuités", rapport EDF/ DER , Dpt IMA/MMN. 1997.
- [Are03] P.Areias. A gradient model for finite strain elastoplasticity coupled with damage. *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol 39, PP1191–1235, 2003.
- [Ask02] H.Askes and L.J.Sluys. Explicit and implicit gradient series in damage mechanics. *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol 21, PP 379–390, 2002.
- [Aur94] Auricchio F. and Taylor R. L., "A Generalized Elastoplastic Plate Theory and its Algorithm Implementation", *Int. J. Num. Meth. Engng.* Vol. 37, PP 2583-2608.

B

- [Bab97] I.Babuska and R.Narasimhan. The babuska-brezzi condition and the patch test: An example. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol 140, PP 183–199, 1997.
- [Bad06] H.Badreddine. Elastoplasticité anisotrope endommageable en transformations finies : Aspect théoriques, numériques et applications. PhD thesis, Université de Technologie de Troyes, 2006.
- [Bar 80] B. Barthélémy , *Notion pratiques de mécanique de la rupture*. Eyrolles (1980)
- [Bat82] Bathe K. J., "Finite element procedures in engineering analysis", Prentice Hall, 1982
- [Bat90] Batoz J. L. et Dhatt . G, " Modélisation des structures par éléments finis", Ed. Hermes, Vol.1, PP 2-3, 1990.
- [Ba?88] Z.Ba?ant and G.Pijaudier-Cabot. Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Int Journal of Applied Mechanics*, Vol 55, PP 287–293, 1988.(a verifier l'année)
- [BegG98] M.Begley and J.Hutchinson. The mechanics of size-dependent indentation. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol 46 No 10 :, PP 2049–2068, 1998.
- [Bel00] T.Belytschko,W.Liu, and B.Moran. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. ISBN.0-471-98773-3, 2000
- [Bas02] Z.Bazant and M.Jir?sek. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress. *J. Engrg. Mechanics*, Vol 128 N°11, PP 1119–1149, 2002.

- [Bel05] Belamari N. "Simulation numérique des procédés de découpe des Aciers". DCU, 146-2005
- [Bel04] N.Belamri. Modélisation numérique de découpage de tôles laminées. Application au cisailage et au refendage en 3D. PhD thesis, Université de Technologie de Troyes, 2004.
- [Ben93] Benallal .A., Billardon R. and Geymonat G., "Bifurcation and localization in rate independent materials. Some general considerations. In Nguyen Q.S., Bifurcation and stability of dissipative systems. CISM N°327, Springer Verlag PP. : 1-44, 1993.
- [Ben94]. Benallal A. and Comi C., "closed form solutions to localization conditions for rate-independent materials", .R.A.S., T.318, Serie II PP. : 7-14, 1994.
- [Ben06] Benallal.A. Some issues on ill-posedness in solid mechanics. Workshop "Challenges in Computational Mechanics", 2006.
- [Ben06] Benallal A. Some issues on ill-posedness in solid mechanics. Workshop "Challenges in Computational Mechanics". 2006
- [Bes06] J.Besson and E.Lorentz. Elements enrichis dans zset. Technical report, ENSMP, Juin 2006.
- [Ber94] Berthaud Y. Torrenti J.M Benaija E.H., "Experimental investigations of the localization zones in quasi-brittle materials", In bazant, Fracture and damage in quasibrittle structures , E and FN SPON, PP419-426
- [Bill90] Billardon R., "Mesh sensitivity of fully coupled strain and damage finite element analysis", "High temperature fracture-mechanisms and mechanics", Ed. Bensussan and mascarell, Mech. Eng. Pub. Lim., 1990
- [Bil90] Billardon R., "Mesh sensitivity of fully coupled strain and damage finite element analysis", "High temperature fracture-mechanisms and mechanics", Ed. Bensussan and mascarell, Mech. Eng. Pub. Lim., 1990
- [Bil89] Billardon R., et doghri J., "localization bifurcation analysis for damage softening elasto-plastic materials", Cracking damage, Ed. Mazars and Bazant, Elsevier applied science, 1989
- [Bil89] Billardon R., "etude de la rupture par la mécanique de l'endommagement", Thèse d'Etat, Université Paris VI, 1989.
- [Boe05] S.Boers, P.Schreurs, and M.Geers. Operator-split damage-plasticity applied to groove forming in food can lids. INT journal of Solids and Structures, Vol 42, PP 4154–4178, 2005.
- [Bor97] Borouchaki, H., "maillage adaptatif. Applications aux éléments finis, habilitation à diriger des recherches. Université Paris VI. 1997.
- [Bor02] H.Borouchaki, P.Laug, A.Cherouat, and K.Saanouni. Adaptive remeshing for ductil fracture prediction in metal forming. C.R.Academ. Sciences, Vol 330 No 10, PP 709–716, 2002.
- [Bru05] M.Brunet, F.Morestin, and H.Walter-Leberre. Failure analysis of anisotropic sheet-metals using a nonlocal plastic damage model. Journal of Materials Processing Technology, Vol 170, PP 457–470, 2005.
- [Bru95] Brunet M., Sabourin F. & Magnil Toushal S., "The Prediction of Necking and Failure in 3D Sheet Forming Analysis Using Damage Variable", Journal de Physique III, Vol 6, PP. 473-482.
- [Bur05] M.Brunet, F.Morestin, and H.Walter-Leberre. Failure analysis of anisotropic sheet-metals using a nonlocal plastic damage model. Journal of Materials Processing Technology, Vol 170, 457–470, 2005.

C

- [Cés06] J.César-De-S?, P.Areias, and C.Zheng. Damage modelling in metal forming problems using implicit non-local gradient model. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., Vol 195, PP 6646–6660, 2006.
- [Cés04] J.César-De-S?, P.Areias, and al. Gradient damage models in metal forming problems. In Modeling, Simulation and Applications, AIP, Vol 712, PP 1932-1937. NUMIFORM 2004, S.Ghosh and J.C.Castro and J.K.lee, 2004.

- [**ChaB77**] Chaboche J. L., "Description thermodynamique et phénoménologique de la viscoplasticité cyclique avec endommagement", thèse de Doctorat Es-Science, Paris VI, 1978
- [**ChaB78**] Chaboche J. L., "Sur l'utilisation des variables d'état interne pour la description du comportement viscoplastiques et de la rupture par endommagement", Symp. Franco-Polonais de Rhéologie et Mécanique, Cracovie.
- [**Cha86**] Lemaitre.J, Chaboche.J.L" Mécanique des matériaux solides " Dunod, 1985.
- [**Cha88**] Chaboche J. L. & Lemaitre J., "Mécanique des matériaux solides", édition Dunod, 1988.
- [**Cha96**] Chaboche J. L., "EVPCYCL : A Finite Element Program in cyclic Viscoplasticity", La recherche Aérospatiale N°2. 1996
- [**Cha97**] Besson J. Cailletaud G., Chaboche J. L. and Forest S., "mécanique non linéaire des matériaux : comportement, endommagement et méthodes numériques", cours de l'IPSI, Cha.5et 6, 1997
- [**Cha97a**] Chaboche J. L., "mécanique non linéaire des matériaux : Comportement , endommagement et méthodes Numériques, Cours de L'IPSI, Besson J. Cailletaud G., Chaboche J. L. et Forest S., (Chapitre 5 et 6). 1997.
- [**ChaB99**] Chaboche J. L., "thermodynamically founded CDM Models for creep and others ences", PP : 209-283, "Creep and damage in Materials and structures", Ed. Bay H. Altenbach and J. J. SKrzypczk, Springer Wien, New York. 1999.
- [**Cha79**] J-L.Chaboche. Sur l'utilisation des variables d'état internes pour la description de la viscoplasticité cyclique avec endommagement. Problèmes non linéaires de mécanique, pp.137-159, 1979.
- [**Che95**] cherukuri H.P. and ShawkiT. G., "An energy-based localization theory : I Basic Framwork, 1995.
- [**Chen00**] J-S.Chen, C-T.Wu, and T.Belytschko. Regularisation of material instabilities by meshfree approximations with intrinsic lenth scales. Int. J. Num. Meth. Engrg, Vol 47, PP 1303–1322, 2000
- [**Cho87**] Chow C. and Wang J., "An Anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile Fracture", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 27 N°5, PP 547-558, 1987
- [**Chow92**] Chow C. L. & Lu T. U., "A Comparative Study of Continuum Damage Models for Crack Propagation under Gross Yielding", Int. J. Fra. Vol 35, PP 43-75, 1992.
- [**Cow83**] Cowin S.C., and Nunziato J.W., "Linear elastic materials with voids", J. Elasticity Vol.13, PP.: 125-147, 1983.
- [**Com99**] C.Comi. Computational modelling of gradient-enhanced damage in quasi-brittle materials. Mechanics of Cohesive-frictional Materials, Vol 4, PP 17–36, 1999.
- [**Cor82**] Cordebois J. P. and Sidoroff F., "Damage Induced Elastic Anisotropy", Eudomech 115, Villard de Lens. 1982.
- [**Cor79**] J-P.Cordebois and F.Sidoroff. Anisotropie élastique induite par endommagement. Col. EuroMech 115, 1979.
- [**Cos09**] E. and F.Cosserat. Théorie des corps déformables. 1909.
- [**Cou06**] G.Court. Prévion objective de la rupture ductile en grandes déformations sous sollicitation dynamique : Modèle d'épuisement plastique à taux limités. PhD thesis, ENS Cachan, 2006.

D

- [**Dar95**] Darve F., Hicher P.-Y, Reynouard J. M., "Mécanique des géomatériaux", Ed. Hermes PP103-121, 1995.
- [**Dal93**] Dal Maso, "An introduction to convergence . progress in non linear differential equations and their applications, Birkhäuser. 1993.

- [**Deb99**] R.De-Borst, J.Pamin, and M.Geers. On coupled gradient-dependent plasticity and damage theories with a view to localization analysis. *Eur. J. Mech. Appl. Solids*, Vol 18, PP 939–962, 1999.
- [**Des85**] Desrues J. et Chambon R., "Bifurcation par localisation de la déformation : étude expérimentale et théorique à l'essai biaxial sur sable.", Colloque international de CNRS, Déformations finies des agrégats : bases physiques et modélisations. 1985
- [**Des95**] Desoyer, T., "Contribution à la modélisation de l'endommagement diffus et localisé", Mémoire pour l'obtention de l'habilitation à diriger les recherches, Université de Poitiers, "UFR Sciences Fondamentales et appliquées, 1995
- [**Dha79**] Dhatt G. Touzot G., "une présentation de la méthode des éléments finis", Maloine Editeurs, 1984.
- [**Dog93**] Doghri.I., "Fully Implicit Integration and consistent Tangent Modulus in Elastoplasticity", *Int. J. Meth. Engng*, Vol 36, PP 3915-3932.
- [**Dug04**] M.Duflot. Applications de la méthode sans maillage à la mécanique de la rupture. PhD thesis, Université de Liège, 2004.
- [**Duv72**] Duvaut G. and Lions J. L., "les inéquations en mécanique et en physique", Ed. Dunod Paris 1972.
- [**Dav89**] Davennel L., Saouridis G., Piau J.M.; "Un code de calcul pour la prévision du comportement de structures endommageables en béton, en béton armé ou en béton de fibre", *Annale de l'I.T.B.T.P. N° 478 série; Technologie générale de la construction* 199. PP. : 38-54. 1989

E

- [**Eng05**] R.A.B.Engelen. Plasticity-induced Damage in Metals. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2005.
- [**Eng06**] R.Engelen, N.Fleck, R.Peerlings, and M.Geers. An evaluation of higher-order plasticity theories for predicting size effects and localisation. *Int. J. Solids and structures*, Vol 43, PP 1857–1877, 2006.
- [**Eri72**] A.Eringen and D.Edelen. On non-local elasticity. *Int. J. of Eng. Sci*, Vol 10 N 3, 1972.
- [**Eri70**] A.Eringen. Balance laws of micromorphic mechanics. *Int. J. of Eng. Sci*, Vol 8 N 10, 1970.

F

- [**Fle01**] N.Fleck and J.Hutchison. A reformulation of strain gradient plasticity. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol 49, PP 2245–2271, 2001.
- [**Fra93**] D.François, A.Pineau, and A.Zaoui. Comportement mécanique des matériaux Tome 2 : viscoplasticité, endommagement, rupture. (2° Ed.). 03-1993.
- [**Fra93**] Francfort G. and Marigo J. J., "stable damage evolution in brittle continuous medium", *Eur. J. Mech., A/Solids*, 12 N°2 , PP. 149-189, 1993.
- [**Fle94**] Fleck N.A. Muller G.M. Ashby M.F. and Hutchinson J.W., "Strain gradient plasticity", advanced in applied Mechanics, Vol. 33, Eds Hutchinson and Wu Academic Press, New York. 1994.
- [**Fle93**] Fleck N.A. and Hutchinson J.W., "A phenomenological theory of strain gradient plasticity", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 41, PP./ 1825-1857, 1993.
- [**Fre93**] Frémond M. and Nedjar B., "endommagement et principe des puissances virtuelles C.R.A.S. T.317 Série II PP. : 857-867. 1993
- [**For94**] Foreau S. et Millard A., "Mise en œuvre d'un élément fini enrichi pour modéliser les bandes de localisation", Rapport interne CEA/DMT 94-021, 1994.

- [For96] Forest S., "Description de la déformation hétérogène des monocristaux dans le cadre de la mécanique des milieux continus généralisés", In Mécanismes et mécanique de grandes déformations, colloque national Mécamat, Aussois, 1996.

G

- [Gee03] M.Geers, R.Ubachs, and R.Engelen. Strongly non-local gradient-enhanced finite strain elastoplasticity. *Int Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 56, PP 2039–2068, 2003.
- [Gee04] M.Geers. Finite strain logarithmic hyperelasto-plasticity with softening : A strongly non-local implicit gradient framework. *Compt. Meth. appl. mech. Engrg*, Vol 193, PP 3377–3401, 2004.
- [Gel98] J.C.Gelin. Modelling of damage in metal forming processes. *J. Materials Processing Technology*, 80-81: 24–32, 1998.
- [Ger80] Germain P. & Muller P. " Introduction à la Mécanique des Milieux Continus ", 1980.
- [Ger73] P.Germain. Cours de mécanique des milieux continus. Masson Paris, 1973.
- [Ger05] N.Germain, J.Besson, and F.Feyel. Méthodes de calcul non local. application aux structures composites. Giens, France, 17-20 mai 2005, 7^{iem} colloque national en calcul de structures GIENS.
- [Ger83] Germain P. Nguyen Q. S. and Suquet S. " Continuum Thermodynamics", *J. Applied Mechanics*, ASME, Vol 50, PP1010-1020. 1983.
- [Ger73] P.Germain. The method of virtual power in continuum mechanics. *J. Appl. Math*, Vol 25 N°3, 1973.
- [Gel85a] Gelin J. C., "Modèles numériques et expérimentaux en grandes déformations plastiques et endommagement de rupture ductile, these de doctorat d'état, Paris. 1985.
- [Gre64] Green. A and Rivlin. R. Multipolar continuum mechanics. *Arch. Rational Mech. Anal*, Vol 17: N°2, 1964.
- [Gue06] B.Guelorget and al. Strain rate measurement by electronic speckle pattern interferometry : A new look at the strain localization onset. *Materials Science and Engineering*, Vol 415 issues 1-2, PP 234–241, 2006.
- [Gur77] Gurson, A. L., "continuum theory of Ductile rupture by void nucleation and Growth: Part I- Yield Criteria and and Flow Rules for Porous Ductile Media". *J. Eng . mat. Tech*, Vol 99. 1977.

H

- [Ham00] Hammi Y., "simulation numérique de l'endommagement dans les procédés de mise en forme.", université de technologie de compiègne, 2000.
- [Har93] Hartmann S. and Haupt P, "Stress Computation and Consistent Tangent Operator using Non linear Kinematic Hardening Models". *Int J Num Meth. Engng*, Vol 40, PP 991-1013, 1993.
- [Har97] Hartmann S., Luhrs G. and Haupt P., "An Efficient Stress Algorithm with applications in viscoplasticity and plasticity". *Int. J. Num. Meth. Engn*, Vol 40, PP 3801-3814, 1997.
- [Hib] Hibbit, Karlsson, Sorensen, and INC. Abaqus Theory Manual.
- [Hug87] Hughes T J R, "The finite elements methods, Prentice hall, 1987.
- [Hug80] T.Hughes and J.Winget. Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis. *IJNME*, Vol 15, PP 1862–1867, 1980.

I

- [Ior95] M.Iordache, K.Willam, and I.Carol. Failure modes of plastic degradation processes in cosserat continua. Computational Plasticity IV, 1995.

J

- [Jir01] M.Jiršek and Z.Bažant. Inelastic Analysis of Structures. ISBN: 0-471-98716-6, 2001.
[Jir05] M.Jiršek and S.Marfia. Non-local damage model based on displacement averaging. Int. J. Numerical Meth. Engineering, Vol 63, PP 77–102, 2005.

K

- [Kac58] Kachanov, L.M 1958, "Time of rupture process under creep condition" TVZ Akad Nauk.SSR Otd tech, Vol 8, PP 26-31.
[Kar87] Kardestuncer. H and Norrie D. H., "Finite Element Handbook", McGraw-Hill. Process by Simultaneous Us of Membrane Shell and Solid Elements", NUMIFORM92, Edts Chenot et al), Sophia antipolis, A.A. Balkema, France. 1987.
[Khe04] M. Khelifa. Simulation numérique de l'endommagement en formage des structures minces. PhD thesis, Université de Technologie de Troyes, 2004.
[Kno99] R.Knockaert and I.Doghri. Nonlocal constitutive models with gradients of internal variables derived from a micro/macro homogenization procedure. Compt. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol 174, PP 121–136, 1999.
[Kun68] I.Kunin. Mechanics of generalised continuum. Springer Verlag, 1968.

L

- [Lab92] Labadi Y. "Introduction à la théorie mathématique de la plasticité", Cours de Post-Graduation Spécialisée, H. C. R., 1992
[Lak95] Lakes R., "Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua in Mühlhaus, continuum models for materials with microstructure", Wiley, PP.1-25, 1995.
[Lak95] Lakes R., "experimental methods for study of cosserat elastic solids and other generalized elastic continua". In Mühlhaus, Continuum models for materials with microstructure, wiley, PP. / 1-25. 1995.
[Lea01] T.Liebe, P.Steinmann, and A.Benallal. Theoretical and computational aspects of thermodynamically consistent framework for geometrically linear gradient damage. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, Vol 190, PP :6555–6576, 2001.
[Lem78] Lemaître J., Chaboche J. L. 1978, "Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement". Mécanique appliquée, Vol 2, pp 317-365.
[Lem85] : Lemaître J., Chaboche J. L., "Mécanique des matériaux Solides", Dunod. 1985.
[Lem92] Lemaître J., " A Course on Damage Mechanics ", printed in Germany, 1992.
[Lem88] Lemaître J., Chaboche J. L., "Mécanique des matériaux solides", Ed. : Dunod Paris, 1988
[Lem92] J.Lemaitre. A course of damage Mechanics. Springer Verlag, 1992.
[Les03] P. Lestriez. Modélisation numérique du couplage thermomecanique-endommagement en transformations finies. PhD thesis, Université de Technologie de Troyes, 2003.

- [Li94] Li and Drucker D. C., "Instability and bifurcation of a non associated extended Mises model in the hardening regime. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.42 N°12 PP. : 1883-1904. 1994.
- [Lor96] Lorentz E., "modélisation opérationnelles de l'endommagement", Note interne EDF/DER, HI74/96/012. 1996.
- [Lor97] Lorentz E., "Evaluation d'une modélisation de l'endommagement des structures par lignes de discontinuités des déplacements", Note Interne EDF/DER, HI-74/96/012
- [Lor99] E.Lorentz and S.Andrieux. A variational formulation for nonlocal damage. *INT. J. Plasticity*, Vol: 15, PP 119–138, 1999.
- [Lor05] E.Lorentz and A.Benallal. Gradient constitutive relations: numerical aspects and application to gradient damage. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg*, Vol 194, PP 5191–5220, 2005.

M

- [Mar65] Marcal, P.V, "A stiffness methode for elastic-plastic problems" *Inr. J.Mec. Sci.*, Vol 7,PP 229-238, 1965.
- [Mar95] markov K., "On a microstructureral model of damage in solids", *Int. J. Eng. Sci.*, Vol.33, N°1, PP. : 139-150. 1995
- [Mar03] J-F.Mariage. Simulation numérique de l'endommagement ductile en formage de pièces massives. PhD thesis, Université de Technologie de Troyes, 2003.
- [McC68] McClintock, F. A., "A Criterion for ductile fracture by the growth of Holes", *journal of Applied Mecchanics*. 1968.
- [Mic02] J.F.Michel and P.Picart. Modelling the constitutive behaviour of thin metal sheet using strain gradient theory. *J. Materials Processing Technology*, Vol 125-126, PP 164–169, 2002.
- [Mic03] J.F.Michel and P.Picart. Size effects on the constitutive behaviour for brass in sheet metal forming. *J. Materials Processing Technology*, 141, Vol .3, PP 439–446, 2003.
- [Mid65] R.Mindlin. Second gradient of stran and surface tension in linéar elasticity. *Int. J. Solids and Structures*, Vol 1, PP 417, 1965.
- [Mid68] R.Mindlin and N.Eshel. On first strain gradient theories in linear elasticity. *Int. J. Solids and Structures*, Vol 4, PP 109, 1968.
- [Muh91] H.Mühlhaus and E.Aifantis. A variational principle for gradient plasticity. *INT. J. of Struct.*, Vol 28, PP 845–857, 1991.

N

- [Nay94] B.Nayroles, G.Touzot, and P.Villon. Using the diffuse approximation for optimizing the location of anti-sound sources. *Journal of Sound and Vibration*, Vol 171 No. 1, PP 1–21, 1994.
- [Ned88].Needleman A., "material rate dependence and mesh sensitivity in loclization problems", *Comp. Meth. Appl. Mech Eng.* 67, PP 69-85, 1988.
- [Ned01] B.Nedjar. Elastoplastic-damage modelling including the gradient of damage: formulation and computational aspects. *Int Journal of solids and structures*, Vol 38, PP 5421–5451, 2001.
- [Nes96] Nesnas K. Benhatira F. , Bezzina S. and Saanouni K., "On some Integration Schemes for rate equations damaged elastoplastic solids, *revue Européenne des Eléments finis*", Vol 5 N°4, 1996.

O

- [ODE72] Oden, J.T,"Finite elements of nonlinear continua McGraw-Hill, New York 1972.

- [OWE80] Owen D. R. J. and Hinton E., " Finite elements in plasticity, theory and practice", ed. Pineridge Press Limited.1980.
- [Ort87] Ortiz M., Leroy Y. And Needleman A.; "A finite element method for localised failure analysis". *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* Vol. 61 PP. : 189-214, 1987

P

- [Pam03] J.Pamin, H.Askes, and R.De-Borst. Two gradient plasticity theories discretized with the element-free galerkin method. *Comput. Meth. Appl. Engng.* Vol 192, PP 2377–2403, 2003.
- [Pee99] R.H.J.Peerlings. Enhanced damage modelling for fracture and fatigue. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 1999.
- [Pee04] R.Peerlings, T.Massart, and M.Geers. A thermodynamical motivated implicit gradient damage framework and its application to brick masonry cracking. *Compt Methods Appl. Mech. Engen.*, Vol 193, PP 3403–3417, 2004.
- [Pee05] R.Peerlings and M.Geers. Thermodynamical aspects of implicit gradient damage. 11th International Conference on Fracture, A. Carpinteri, 2005.
- [Pij91] Pijaudier-cabot G., Mazars J. Et Pulikowski J., "Steel concrete bond analysis with non local continuous damage" *J. Of D. tr. Engng. Comp.*, Vol. 5, PP. : 141-150, 1991
- [Pij93] Pijaudier-Cabot G., Huerta A. Et Bode L. "Modélisation des matériaux et calculs à la rupture", *J. Mec. Ind. et Matériaux.* Vol. 46, N° 2 PP. : 76-79, 1993
- [Pij96] Pijaudier-Cabot G. Burlion N., "Damage and localization in elastic materials with voids", *Mech Coh. Frict. Mat.*, Vol. : 1, PP. : 905-919, 1995.
- [Per00] E.Perchat. Mini élément et factorisation incomplètes pour la parallélisation d'un solveur de Stokes 2D. Application au forgeage. PhD thesis, ENSMP, 2000.
- [Phi03] P.Lestriez . " Modélisation numérique du couplage thermo-mécanique-endommagement en transformation finies. Application à la mise en forme ", Thèse Pour l'obtention du grade de Docteur de l'Université de Technologie de Troyes. Décembre 2003.
- [Pic98] P.Picart, O.Ghouati, and J.C.Gelin. Optimization of metal forming process parameters with damage minimization. *J. Materials Processing Technology*, 80-81: 597–601, 1998.
- [PIJ93] G.Pijaudier-Cabot and A.Benallal. Strain localization and bifurcation in a nonlocal continuum. *Int. J. Solids and Structures*, Vol 30 No 13, PP 1761–1775, 1993.
- [Pit95].pitman E.B., "visco-plastic relaxation : convergence and localisation", *eur. J. Mech., A. solids*, Vol14 N°6, PP.: 961-979.
- [PIJ04] G.Pijaudier-Cabot, K.Haidarr, and J.F.Dubé. Non-local damage model with evolving internal length. *I J Numerical and Analytical Meth in Geomechanics*, Vol 28, PP 633–652, 2004.

R

- [Ras96] M.Rashid and B.Thorne. Incremental objectivity in cyclic shearing deformations. *Communication in Num. Methods in Engeneering*, Vol 12, PP 863–871, 1996
- [Rey94] Rey C. et Viaris de Lesegno P., "analyse expérimentale d'un problème de localisation de la déformation plastique". *Int. J. mecamet*, N°14, PP. : 11-18
- [Rec76], the localization of plastic deformation. In *theoretical and applied Mechanics*, Koiter, Ed. North Holland publishing company, 1976.
- [Rou81] Rousselier G., "Three Dimensional Constitutive Relations and ductile fracture", *IU-TAM Symp. On Three-dimensional constituve relations and fraction*, (pp. : 197-226), Dourdan, France. 1981.

S

- [Saa88] K. Saanouni. "Sur l'analyse de la fissuration des milieux élasto-viscoplastique par la théorie de l'endommagement continue", Université de Technologie de Compiègne, 1988.
- [Saa94] Saanouni K, Forster C, and Hatira F.B., "On the Anelastic Flow With Damage", *J. Damage Mechanics*, Vol3, PP 140-169.
- [Saa03] Saanouni K. and Chaboche J. L., "Computational damage mechanics. Application to metal forming", Chap. 7 Vol. 3, "Numerical and computational Methods", Ed. I. Miline, R.O. Ritchie and B. Karithaloo, ISBN0-08-043749-4, Elsevier Oxford. PP 321-376. 2003.
- [Saa03] K.Saanouni and J-L.Chaboche. *Comprehensive Structural Integrity*. ISBN : 0-08-043749-4, 2003.
- [San04] K.Santaoja. Gradient theory from the thermomechanics point of view. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 71, PP 557–566, 2004
- [Sao88] Saouridis Ch., "Identification et numérisation objectives des comportements adoucissants : une approche multiéchelle de l'endommagement du béton", Thèse de doctorat de l'univ., Paris VI, 1988
- [Shen02] Shen, S, Saanouni K. "Gradient-dependent non local constitutive formulation for thermo-elastoplasticity coupled with isotropic" rapport post Doctoral LASMIS Pd 2002-1,2002
- [Sim88] simo J.C., " strain softening and dissipation: a unification of approaches", In bazant and mazars cracking and damage, Elsevier applied science PP 440-461.1988.
- [Sim84] Simo J. C and Ortiz M., "A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use hypoelastic constitutive equations", *Appl. Mech. Eng.*, Vol 49, PP 221-245, 1984.
- [Sim85] Simo J. C. Taylor R. L., "Consistent tangent Operators For Rate Independent Elastoplasticity", *Comput. Meth Appl. Mech Engng*. Vol 48, PP 101-118.
- [Sim85] J.Simo and M.Ortiz. A unified approach to finite element deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, Vol 49, PP 221–245, 1985.
- [Sim85] J.Simo and R.Taylor. Consistent tangent operators for rate independent elastoplasticity. *Compt. Meth. Appl. Mech. Engrg*, Vol 48, PP 101–118, 1985.
- [Sim90]. Simo J.C. et Rifai S., "A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes", In. *J. Num. Meth. Eng.*, Vol.: 48, PP.: 1595-1638, 1990.
- [Sim98] Simo J. C. and Hughes T. J. R., " Computational Inelasticity", Springer-Verlag. 1998.
- [Sim93] Simo J.C. and Olivier J., "An Analysis of strong discontinuities induced by strains softening in rate independent inelastic solids. *Comp. Mech.*, Vol.: 12, PP. : 277-296, 1993.
- [Sim03] A.Simone, G.Wells, and L.Sluys. From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol 192, PP 4581–4607, 2003.
- [Sim04] A.Simone, H.Askes, and L.Sluys. Incorrect initiation and propagation of failure in non-local and gradient-enhanced media. *INT. J. Solids and structures*, Vol 41, PP 351–363, 2004.
- [Sor05] D.Sornin and K.Saanouni. Formulation elastoplastique non locale en gradient d'endommagement. 17iem Congrès Français de Mécanique, 2005.
- [Ste95] steinmann P., "theory and numerics of ductile micropolar elastoplastic damage", *Int. J. Num. Meth. Eng*. Vol.38, PP. : 583-606, 1995.
- [Sve03] B.Svendsen, F.Reush, and D.Klingbeil., "Local and non-local ductile damage and failure modelling at large deformation with applications to engineering. *PAMM Proc. Appl. Math. Mech*, 3 Is.1, PP 232–235, 2003.
- [Sve00] T.Svedberg and K.Runesson. An adaptive finite element algorithm for gradient theory of plasticity with coupling to damage. *Int. J. Solids. Structures*, Vol 37, PP 7481–7499, 2000.

- [Sve97] T.Svedberg and K.Runesson. A thermodynamically consistent theory of gradient-regularized plasticity coupled to damage. *INT. J. Plasticity*, 13 n.6-7, PP 669–696, 1997.

T

- [Tru74] Truesdell C; Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus, Ed. Masson, 1974.
- [Ter80] Terrien M. "Emission acoustique et comportement mécanique post-critique d'un béton sollicité en traction". *ENPC Bull de liaison des ponts et chaussées*, 105, Ref.2398.

V

- [Vaz01] M.Vaz and D.Owen. Aspects of ductile fracture and adaptive mesh refinement in damaged elasto-plastic materials. *Int. J. Numer. Methods Engrg*, Vol 50, PP 29–54, 2001.
- [Voy99a] Voyiadjis G. Z. and Deliktas B., "A Coupled Anisotropic damage Model for the inelastic Response of composites, Elsevier Editions. 1999.
- [Voy04] G.Voyiadjis and al. Thermodynamic framework for coupling of non-local viscoplasticity and non-local anisotropic viscodamage for dynamic localization problems using gradient theory. *INT. J. Plasticity*, Vol 20, PP 981–1038, 2004.
- [Voy0X] G.Voyiadjis, R.Abu-Al-Rub, and A.Palazotto. On the small and finite deformation thermo-elastoviscoplasticity theory for strain localization problems : Algorithmic and computational aspects. *European Journal of Finite Elements*, in press : xxxx–xxxx, 200x.

W

- [Wat01] B.Wattrisse, A.Chrysochoos, J-M.Muracciole, and M.Némoz-Gaillard. Kinematic manifestation of localisation phenomena in steels by digital image correlation. *Eur. J. Mech. A/Solids*, Vol 20, PP 189–211, 2001.
- [WIL64] Wilkins M. L, "Calculation of elastic-plastic flow" *Methods of computational physics*, 3, Academic Press, N. Y., 1964.

Z

- [Zhu95] Zhu Y., Contribution to the local Approach of Fracture in solid Dynamics", Thèse de Doctorat, université de liege. 1995.
- [Zie94] Zienkiewicz O. C. Taylor R., "The finite elements method", Mcgraw-Hill, 4th Edition, Vol I et II. 1994.