République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master
en
Analyse Mathématique et Applications

Thème

Méthode de séparation de Favard pour les équations différentielles stochastiques.

Réalisé par :

BEN SLIMANE Tinhinane.

Dirigé par :

M^r **MELLAH Omar.**

Éxaminé par :

M^{me}.BEDOUHENE Fazia	Professeur	UMMTO	Présidente
M^{lle}.SMAALI Manel	Maître de Conférence A	UMMTO	Examinatrice
M^r.CHALALI Nordine	Maître de Conférence B	UMMTO	Examinateur

Promotion : 2017/2018

Table des matières

Introduction **1**

1 Généralités sur les fonctions presque périodiques et Théorie de Favard dans le cas déterministe. **3**

1.1 Définitions et propriétés . . . 3
1.2 Presque périodicité des fonctions à paramètre . . . 5
1.3 La théorie de Favard dans le cas déterministe . . . 6

2 La théorie de Favard dans le cas stochastique **9**

2.1 Convergence en loi . . . 10
2.2 Presque périodicité en loi . . . 11
2.3 La théorie de Favard dans le cas stochastique . . . 12

3 Extension de Favard **26**

3.1 Cas général . . . 26
3.2 Cas simple . . . 29
3.3 Exemple d'application . . . 37

Perspective **40**

Bibliographie **42**

Intoduction

La notion de presque périodicité a été introduite par des astronomes, en particulier par *E.Elsclangon* en 1902 pour généraliser les fonctions périodiques et *Ptolémée* pour expliquer le comportement de la lune, de la terre et du soleil. Un peu plus tard (1923), le mathématicien *Harald Bohr* [1], s'intéressa à la fonction Zeta de Riemann et aux séries de Dirichlet qui ont un comportement régulier mais qui n'est pas aussi fort que la périodicité. Ceci a permis à *Bohr* de trouver une condition moins restrictive mais suffisamment pour avoir certaines analogies avec les fonctions périodiques. Depuis, la notion de presque-périodicité a été généralisée dans diverses directions notamment par : *Bochner* [2] qui a étendu la notion de presque périodicité au cas des fonctions à valeurs dans un espace de Banach ; *A.Besicovitch* qui a défini la presque périodicité pour des fonctions analytiques ; *Amerio* et *Prouse* [3], *Corduneanu* [4], *Fink* [5], *Levitan* et *Zhikov* [6] et *Zaidman* [7] ont traité ses aspects de bases. *J.Favard* [8] , *Von.Neumann* ont beaucoup contribué au développement de cette théorie. Et pour la presque periodicité des fonctions à valeurs dans l'espace Polonais $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ a été introduite par *Morozan* et *Tudor* [9].

Dans ce travail, on vas s'intéresser aux solutions présque périodiques en loi (unidimensionnelle) des équations différentielles stochastiques (EDS) linéaires à coefficients déterministes presque périodiques en utilisant la méthode de séparation de Favard.
Dans le cas d'une équation linéaire (affine) déterministe

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \tag{1}$$

où A et f sont périodiques de même période, le critère de J.L. Massera [10] nous permet d'affirmer que l'équation (1) admet une solution périodique, si et seulement si, elle est bornée. Dans le cas où A et f sont presque périodiques, le problème devient plus compliqué. Si A est constante, *Bohr* et *Neugebauer* [11] ont montré que la bornitude de la solution suffit pour obtenir la presque périodicité. Par contre dans le cas général (A n'est pas constante), la bornitude ne suffit pas pour affirmer la presque périodicité des solutions (voir les contre-exemples dans [12], [13]). *Favard* [14], en supposant l'existence d'une solution bornée, moyennant une condition supplémentaire, appelée condition de séparation de Favard, affirme que la solution bornée est presque périodique.
La méthode de séparation de Favard est un moyen important pour l'étude des solutions presque périodiques des équations différentielles linéaires. *Amerio* [15] a exploité cette mé-

thode dans le cas d'équations non linéaires, recemment *Zhenxin* et *Wenhe* [16] ont généralisé la méthode de séparation de Favard au cas d'EDS. Mais en dehors de cette théorie, généralement la méthode qui a été employée pour étudier l'existance et l'unicité de solution presque périodique c'est bien la méthode du point fixe (Voir [17], [9], [18] et [19]).

Dans le premier chapitre, on va introduire les définitions fondamentales, au sens de Bohr et au sens de Bochner, et les propriétés élémentaires de la presque périodicité des fonctions détérministes puis on passe à l'existance des solutions presque périodiques des équations différentielles linéaires au moyen de la théorie de Favard dans le cas déterministe.

Et pour étudier le cas aléatoire de cette théorie dans le deuxième chapitre, on doit passer par la presque périodicité en loi des processus stochastiques qu'on va annoncer dans le même chapitre.

Le troisième chapitre on le consacre pour étudier l'extension de Favard complétée par un exemple d'application élémentaire.

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions presque périodiques et Théorie de Favard dans le cas déterministe.

Dans ce chapitre, Nous allons presenter les définitions fondamentales et les propriétés élémentaires de la théorie de presque périodicité des fonctions réelles et des fonctions à paramètre à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, puis on va introduire la théorie de Favard.

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1. ***(Presque périodicité au sens de Bohr)*** *(Voir [5]) Une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ est dite presque périodique au sens de Bohr si pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble*

$$\mathrm{T}(\epsilon, f) := \{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+\tau) - f(t)| < \epsilon\}$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, il existe un nombre réel $\ell = \ell(\epsilon) > 0$ tel que $(a, a+\ell) \cap \mathrm{T}(\epsilon, f) \neq \emptyset$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. l'ensemble $\mathrm{T}(\epsilon, f)$ est appelé l'ensemble de ϵ-presque périodes de f.

Cette définition admet des critéres équivalents, parmi ces critéres on trouve la presque périodicité au sens de *Bochner*.

Définition 1.2. ***(Presque périodicité au sens de Bochner)*** *(Voir [5]) Une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ est presque périodique si de toute suite réelle $\{\alpha'_n\}$ on peut extraire une sous suite $\{\alpha_n\}$ telle que la suite $\{f(t+\alpha_n)\}$ est uniformément convergente autrement dit f est une fonction normale.*

Pour but de simplification, on introduit les notations suivantes :

Notations

La suite $\{\alpha'_n\}$ est notée α'.

$\alpha \subset \alpha'$ veut dire que α est une sous suite de α'.

Pour f une fonction réelle, il existe une suite $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ telle que :

$\forall t \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty} f(t+\alpha_n) = g(t)$. Pour simplifier l'écriture de la limite, *Bochner* l'a notée $\mathrm{T}_{\alpha_n} f = g$, avec T l'opérateur de translation(Voir [5]). Si de plus la limite existe uniformément pour $t \in \mathbb{R}$, on écrit $U\mathrm{T}_{\alpha_n} f = g$ (Voir [20]).

Notons $H(f)$ (Voir [5]) l'ensemble : $H(f)$=$\{g$ continue/il existe une suite $\{\alpha_n\}$ telle que $UT_{\alpha_n} f = g\}$.

En général, pour a,b,f et g des fonctions réelles continues, on dit que le couple $(b, g) \in H(a, f)$ s'il existe une suite $\{\alpha_n\}$ telle que : $UT_{\alpha_n} a = b$ et $UT_{\alpha_n} f = g$ (Voir [16]).

Théorème 1.1. *(Voir [5] Théorème 1.8) Si f est presque périodique, alors pour $g \in H(f)$, $H(g) = H(f)$.*

La définition de la presque périodicité au sens de Bochner est un moyen efficace pour vérifier les propriétés algébriques et topologiques des fonctions presque périodiques. De la proposition suivante on définit les propriétés élémentaires des fonctions presque périodiques.

Proposition 1.1. *(Voir [5], [21], [8]) Soient f et g deux fonctions réelles presque périodiques, alors :*

1. *Pour tout a dans $\mathbb{R}$, les applications $af(.)$,$f(a.)$ et $f(a + .)$ sont presque périodiques.*
2. *La somme $f + g$ et le produit fg sont presque périodiques.*
3. *Toute fonction f réelle presque périodique au sens de Bohr est bornée et uniformément continue.*
4. *Une limite uniforme d'une suite de fonctions presque périodiques au sens de Bohr est presque périodique au sens de Bohr.*
5. *Soit f une fonction réelle dérivable et presque périodique. Si la dérivée f' est uniformément continue, alors f' est presque périodique.*
6. *Soit f une fonction réelle presque périodique et F une primitive de f. Alors la fonction F est presque périodique si et seulement si F est bornée*
7. *l'esnsemble des fonctions réelles presque périodiques c'est une Algébre, noté : $AP(\mathbb{R})$.*
8. *L'ensemble des images de f est noté $R(f)$ avec $R(f) = \{f(t), t \in \mathbb{R}\}$. La fermeture de $R(f)$ est un compact.*

Mais on trouve que la définition de la presque périodicité au sens de *Bochner* est moins efficace pour trouver des solutions presque périodiques des équations d'évolution. Pour cela *Bochner* a donné **le Critère de suite double**.

Définition 1.3. *On dit qu'une fonction f vérifie le critère de suite double de Bochner si, de deux suites réelles quelconques $\{\alpha'_n\}$ et $\{\beta'_n\}$, on peut toujours extraire deux sous-suites* *de mêmes indices $\{\alpha_n\}$ et $\{\beta_n\}$ telles que pour chaque $t \in I \subset \mathbb{R}$, les limites $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty} f(\alpha_n + \beta_m + t)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n + \beta_n + t)$ existent et soient égales.*

Remarque 1.1. *Ce qui est plus important dans ce critère c'est que, ces limites existent ponctuellement et uniformément ce qui veut dire que si on a une convergence simple ça implique la convergence uniforme. Et d'aprés les notations etablies par Bochner, on note les limites de la définitions précédentes : $\mathrm{T}_\alpha \mathrm{T}_\beta f$ et $\mathrm{T}_{\alpha+\beta} f$ respectivement.*

Proposition 1.2. *(Voir [22]) Soit f une fonction réelle continue.*
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *La presque périodicité au sens de Bohr.*
2. *La presque périodicité au sens de Bochner.*
3. *Le critère de suite double de Bochner.*

1.2 Presque périodicité des fonctions à paramètre

Si on est face à la recherche des solutions presque périodiques des équations différentielles de type $\dot{x} = f(t,x)$ où f est une fonction presque périodique en t avec x un paramètre.
Si on pose $\varphi(t)$ une solution presque périodique, alors on a besoin de considérer la composition $f(t, \varphi(t))$. Cette fonction est-elle presque périodique ?

En général, la réponse à cette question est négative. En effet, considérons la fonction $f(t,x) = \sin(tx)$, $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est périodique en t alors f est presque périodique (car toute fonction continue périodique est presque périodique) , par contre la fonction composée $f(t, \sin(t)) = \sin(t \sin(t))$ n'est pas uniformément continue donc, elle n'est pas presque périodique(Pour plus de détails [5] Introduction du chapitre 2).
Alors, pour avoir la presque périodicité de ce type de fontion, on doit imposer des conditions.

Définition 1.4. *(Voir [23]) Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue.*
On dit que $f(.,.)$ est presque périodique en t par rapport au compact $S \subset \mathbb{R}^d$ si pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble

$$\mathrm{T}(\epsilon, f) := \{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}\times S} \|f(t+\tau, x) - f(t,x)\| < \epsilon\}$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, il existe un nombre réel $\ell = \ell(S, \epsilon) > 0$ tel que $(a, a+\ell) \cap \mathrm{T}(\epsilon, f) \neq \emptyset$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. l'ensemble $\mathrm{T}(\epsilon, f)$ est appelé l'ensemble de ϵ-presque périodes de f.

Définition 1.5. *(Voir [23]) Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue presque périodique en t par rapport à un compact $S \subset \mathbb{R}^d$. Alors, pour deux suites réelles $\{\alpha'_n\}$ et $\{\beta'_n\}$, il existe deux sous suites $\{\alpha_n\}$ et $\{\beta_n\}$ repectivement telles que :*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} f(t + \alpha_n + \beta_m, x) = \lim_{n\to\infty} f(t + \alpha_n + \beta_n, x)$$

uniformément sur S.

Remarque 1.2. *(Voir [23])La fonction presque périodique à paramètre admet les mêmes propriétés que la fonction presque périodique sans paramètre.*

1.3 La théorie de Favard dans le cas déterministe

Au début de la théorie de presque périodicité, beaucoup d'attention a été accordée à la théorie des séries de Fourier. Plus tard, on a observé que de nombreuses équations différentielles issues de la physique admettent des solutions presque périodiques. A partir de là, la presque périodicité a été largement étudié au moyen des équations différentielles, suite aux travaux de Favard qui a élargi cette notion en considérant des équations différentielles linéaires avec des coefficients presque périodiques.

Commençant par la plus simple équation , l'équation linéaire homogène $\dot{x} = Ax$, notée E_A, avec A est une matrice constante,

Théorème 1.2. *(Voir [5] Théorème 5.3) Les solutions bornées de $\dot{x} = Ax$ où A est une matrice constante sont presque périodiques.*

De même pour l'équation $\dot{x} = Ax + f$, notée $E_{A,f}$, avec A une matrice constante et f une fonction presque périodique,

Théorème 1.3. *(Voir [5] théorème 5.8) Une solution x de $\dot{x} = Ax+f$ est presque périodique si et seulement si elle est bornée.*

Remarque 1.3. *Le resultat précédent a été démontré par Bohr et Neugebauer, en utilisant la presque périodicité au sens de Bohr (Voir [11]).*

Et la pemière question qui se pose, est ce que ce résultat reste valable si A est une matrice dépendante de t ? En général, l'existence des solutions bornées ne suffit pas pour avoir l'existence des solutions presque périodiques.(Voir le contre exemple donné dans [13]). Considérons l'équation linéaire sur $\mathbb{R}^d$

$$\dot{x} = A(t)x + f(t). \tag{$E_{A,f}$}$$

et l'équation homogène associée

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{E_A}$$

où A est une matrice $(d \times d)$ presque périodique et f une fonction presque périodique.
Si $B \in H(A)$, alors l'équation $\dot{x} = B(t)x$ est dite équation limite de (E_A).

Supposons que $(E_{A,f})$ admet une solution bornée, pour garantir l'existence d'une solution presque périodique de $(E_{A,f})$, *J.Favard* a établi une condition dite : **la condition de separation de Favard** qui est donnée par

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\| > 0, \tag{$*$}$$

où x est une solution de l'équation

$$\dot{x} = B(t)x$$

avec $B \in H(A)$ et $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$.

Pour mieux voir l'utilité de cette théorie, on va donner un contre exemple où on a l'existence d'une solution bornée qui n'est pas presque périodique, dont la condition de Favard n'est pas vérifiée.

Commençons par une proposition qui donne une propriété importante des solutions presque périodiques.

Proposition 1.3. *(Voir [24]) Soit $A(t)$ une matrice presque périodique et $x(t)$ une solution presque périodique de l'équation E_A. Alors,*

$$\textit{Soit} \quad \inf_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\| > 0 \quad \textit{ou bien} \quad x(t) \equiv 0.$$

Preuve. *Il suffit de démontrer que*

$$\textit{Si} \inf_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\| = 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0.$$

Supposons que $\inf_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\| = 0$, alors il existe une suite $\{\alpha'_n\}$ telle que $\|x(\alpha'_n)\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
Comme $A(t)$ et x sont presque périodiques, alors d'aprés le critère de Bochner, il existe une sous suite $\alpha \subset \alpha'$ telle que

$$\underset{\alpha}{T} A = B, \quad \underset{-\alpha}{T} B = A, \quad \underset{\alpha}{T} x = y, \quad \underset{-\alpha}{T} y = x \quad \textit{(existent uniformément)}.$$

On a $y(0) = \underset{\alpha}{T} x(0) = \lim_{n\to\infty} x(\alpha_n) = 0$. Or on a l'équation $\dot{y} = By$ admet 0 comme solution, par unicité de la solution, on a $y(t) \equiv 0$.
Comme $\underset{-\alpha}{T} y = x$, on aura $x(t) \equiv 0$.

Contre exemple. *Soit le système sur $\mathbb{R}^2$*

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \tag{1.1}$$

avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix}$$

qu'on peut écrire sous forme

$$\ddot{x}(t) + a(t)x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

où $a(t)$ est une fonction presque périodique.
On construit $a(t)$ de sorte à avoir les résultats voulus :

On définit la suite des fonctions $\{f_n(t)\}$ par

$$f_n(t) = -\tfrac{1}{n^2} \sin(\tfrac{t}{n^3}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Alors, f_n est impaire, périodique de période $2\pi n^3$ et

$$\int_0^t f_n(s)\ \mathrm{d}s = -n(1-\cos(\frac{t}{n^3})) \leq 0,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, en plus

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{2}\|f_n^{(p)}\|_\infty < \infty,$$

où $f_n^{(p)}$ est la p-ème dérivée de f_n. Alors la fonction

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t),$$

est presque périodique(car c'est la limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions f_n qui est periodique continue donc presque périodique). De plus, comme f_n est uniformément convergente, on a

$$\int_0^t g(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)\ \mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t f_n(s)\ \mathrm{d}s \leq 0,$$

pour $t \in \mathbb{R}$, alors pour $a(t) = -(g^2(t) + g'(t))$, la fonction $x(t)$ définie par

$$x(t) = \exp\left(\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)$$

est une solution non triviale bornée de l'équation différentielle

$$\ddot{x} - (g^2(t) + g'(t))x = 0,$$

avec un coefficient presque périodique elle vérifie la propriété

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} |x^2(t) + \dot{x}^2(t)| = 0.$$

En effet, on a

$$x^2(t) + \dot{x}^2(t) = \exp(2\int_0^t g(s)\mathrm{d}s)[1 + g^2(s)].$$

Comme le terme$(1 + g^2(s))$est positif fini, alors on s'interesse à $\inf(\exp(2\int_0^t g(s)\mathrm{d}s))$.
Posons $t_n = \frac{3\pi}{2}n^3$, $n \geq 1$ et

$$h(t) = \int_0^t g(s)\mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t f_n(s)\ \mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\infty} -n(1-\cos(\frac{t}{n^3})),$$

donc,

$$h(t_n) = \sum_{n=1}^{\infty} -n = -\infty$$

alors, $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}}(h(t)) = -\infty$.
D'où $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}}(\exp(h(t))) = 0$.
Alors, pour $X(t) = (x(t), \dot{x}(t))$ solution de (1.1),

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \|X(t)\| = 0.$$

De la Proposition 1.3, $X(t)$ ne peut pas être presque périodique.

Chapitre 2

La théorie de Favard dans le cas stochastique

Dans ce chapitre on va étudier l'existence des solutions presque périodiques des équations differentielles stochastiques en utilisant la méthode de séparation de Favard.
Mais on doit d'abord passer par la presque périodicité des processus aléatoires dont on trouve plusieurs notions : presque périodicité en loi, presque periodicité presque sûre, presque périodicité en probabilité et presque périodicité en moyenne (Pour plus de détails [25]). Mais dans notre travail, on va s'interesser à la presque périodicité en loi. Pour cela on doit introduire la presque périodicité des fonctions à valeurs dans un espace métrique.

Soit (M, d) un espace métrique complet muni de la métrique d.

Définition 2.1. *(Voir [6]) Soit $f : \mathbb{R} \to (M, d)$ une fonction continue.*
f est dite presque périodique (au sens de Bohr) si pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble $T(\epsilon, f) := \{\tau \in \mathbb{R} : \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} d(f(t+\tau), f(t)) < \epsilon\}$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, il existe un réel $\ell = \ell(\epsilon) > 0$ tel que $(a, a+\ell) \cap T(\epsilon, f) \neq \varnothing$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. L'ensemble $T(\epsilon, f)$ est nommé l'ensemble des ϵ-presque périodes de f.

Soit $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ un espace probabilisé, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{C}_k = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, qui est séparable et $\mathcal{C}_u$ c'est l'espace des fonctions continues muni de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ sur lequel on étudie la presque périodicité.
Notons $X(.)$ le processus stochastique à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.
L'espace $L^2(P, \mathbb{R}^d)$ de toutes les variables aléatoires X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de carré integrable muni de la norme $\|X\|_2 := (\int_\Omega \|X\|^2 \, \mathrm{d}P)^{\frac{1}{2}}$ est un espace de Hilbert.
Pour un processus stochastique $X(.)$ dans $\mathbb{R}^d$; $X(.) = \{X(t); t \in \mathbb{R}\}$, si $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|X(t)\|_2 < \infty$, on dit que $X(.)$ est L^2-borné et on le note $\|X(.)\|_\infty := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|X(t)\|_2$. Alors l'espace des processus stochastiques L^2-bornés muni de la norme $\|.\|_\infty$ est de Banach.

Soit $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ l'espace de toutes les mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$.
Pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ donnée, on note par $\mathcal{L}(X)$ sa loi sur $\mathbb{R}^d$, mais pour la loi d'un processus $X(.)$ donné, on distingue trois types :

1. **Loi unidimensionnelle** : c'est la loi de chaque variable aléatoire, qui est donnée par l'application

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \\ t &\mapsto \mu(t) = \mathcal{L}(X(t)). \end{aligned}$$

2. **Loi fini-dimensionnelle** : c'est la loi des vecteurs aléatoires $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$, pour tout t_1,..., $t_n \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $t_1 < t_2 < ... < t_n$.
3. **Loi infini-dimensionnelle** : c'est la loi de tout le processus X comme variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{C}_k$ (c'est une loi de probabilité sur $\mathcal{P}(\mathcal{C}_k)$).

On associe à $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, la métrique ρ :

$$\rho(\mu, v) := \sup\{|\int f \, \mathrm{d}\mu - \int f \, \mathrm{d}v| : \|f\|_{BL} \leq 1\}, \; \forall \mu, v \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d),$$

où f est une fonction lipschitzienne bornée à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la norme

$$\|f\|_{BL} = \|f\|_L + \|f\|_\infty \; ; \|f\|_L = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \; et \; \|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|.$$

Remarque 2.1. *L'espace ($\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, ρ) est Polonais (un espace métrique complet séparable).*

2.1 Convergence en loi

On dit que la suite $\{\mu_n\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ *converge faiblement* vers μ si et seulement si $\rho(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, autrement dit $\int f \, \mathrm{d}\mu_n \rightarrow \int f \, \mathrm{d}\mu \quad \forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$,
avec $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour la convergence en loi d'une suite $\{X_n\}$ des processus stochastiques dans $\mathbb{R}^d$, on a trois types :

1. **La convergence unidimensionnelle** : la suite de processus $\{X_n(.)\}$ converge en loi unidimensionnelle vers $X(.)$ si $\mathcal{L}(X_n(t))$ converge faiblement vers $\mathcal{L}(X(t))$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. **La convergence fini-dimensionnelle** : la suite de processus $\{X_n(.)\}$ converge en loi fini-dimensionnelle vers $X(.)$ si pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ et $t_1 < t_2 < ... < t_k$, $\mathcal{L}(X_n(t_1), X_n(t_2), ..., X_n(t_k))$ converge faiblement vers $\mathcal{L}(X(t_1), X(t_2), ..., X(t_k))$.
3. **La convergence infini-dimensionnelle** : la suite de processus $\{X_n(.)\}$ converge en loi infini-dimensionnelle vers $X(.)$ si la suite de variables aléatoires $\{X_n(.)\}$ à valeurs dans $\mathcal{C}_k$ converge faiblement vers $X(.)$(en tant que variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{C}_k$).

Famille de mesures de probabilité tendue

Définition 2.2. *(Voir proposition 2.1 [26]) Soit μ une mesure de probabilité sur ($\mathbb{R}^d$,$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$). on dit que μ est tendue si $\forall\epsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K_\epsilon \subset \mathbb{R}^d$ tel que*

$$\mu(\mathbb{R}^d \setminus K_\epsilon) < \epsilon.$$

Pour une famille de mesures de probabilité :

Définition 2.3. *Soit $\{\mu_t\}$ une famille de mesures de probabilité sur ($\mathbb{R}^d$,$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$). on dit que $\{\mu_t\}$ est tendue si $\forall\epsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K_\epsilon \subset \mathbb{R}^d$ tel que*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \mu_t(\mathbb{R}^d \setminus K_\epsilon) < \epsilon.$$

Remarque 2.2. *(Voir proposition 2.1 [26]) Toute variable aléatoire est tendue.*

Lien entre une famille de mesures de probabilité tendue et la compacité

Théorème 2.1. *(Voir théorème 2.3 de Prokhorov [26]) La famille $\{\mu_t\}$ de mesures de probabilité sur ($\mathbb{R}^d$,$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$) est relativement compacte si et seulement si elle est tendue.*

Le théorème suivant de Skorohod donne le lien entre la convergence faible des mesures de probabilité et la convergence p.s des variables aléatoires associées.

Théorème 2.2. *(Voir théorème 2.4 [26]) Pour une suite $\{\mu_n\}$ de mesures de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ qui converge faiblement vers μ, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et une variable aléatoire X,et une suite de variables aléatoires X_n à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tels que $\mathcal{L}(X) = \mu$ et $\mathcal{L}(X_n) = \mu_n$ et $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ p.s.*

2.2 Presque périodicité en loi

Elle a été introduite par Morozan et Tudor(Voir [25]). On trouve trois types :

1. **Presque périodicité en loi unidimensionnelle** (notée APOD := Almost Periodic One dimentional Distribution) : Un processus stochastique X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est APOD, si l'application

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R} &\to \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \\ t &\to \mu(t) = \mathcal{L}(X(t)). \end{aligned}$$

   est presque périodique.

2. **Presque périodicité en loi fini-dimensionnelle** (notée APFD := Almost Periodic Finite dimentional Distribution) : Un processus stochastique X est APFD, si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t_1 < t_2 < .... < t_n$, l'application

$$\begin{aligned} \overset{t_1,..,t_n}{\mu} : \mathbb{R} &\to \mathcal{P}((\mathbb{R}^d)^n) \\ t &\to \overset{t_1,..,t_n}{\mu}(t) = \mathcal{L}(X(t+t_1), .., X(t+t_n)). \end{aligned}$$

est presque périodique.

Pour les processus X à trajectoires continues, Tudor a défini :

3. **Presque périodicité en loi infini-dimensionnelle** (notée APD := Almost Periodic Distribution) : Un processus stochastique X est APD, si l'application

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\mu}:\mathbb{R} & \to & \mathcal{P}(\mathcal{C}_k) \\ t & \to & \tilde{\mu}(t)=\mathcal{L}(\tilde{X}(t)). \end{array}$$

est presque périodique. avec $\tilde{X}=X(t+.)$.

Remarque 2.3. – *i) Comme $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^d),\rho)$ est un espace metrique complet, toutes les affirmations sur la presque périodicité sur l'espace (M,d) restent pour les processus stochastiques à valeurs dans $(\mathbb{R}^d)$ qui sont presque périodiques en loi.*

– *ii) Les notations utilisées ci-dessus, pour chaque type de presque périodicité en loi, ont été donné par Tudor(Voir [25]).*

2.3 La théorie de Favard dans le cas stochastique

On se place sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
Soient $T>0$ et $b:[0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$, $\delta:[0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d\times m}$, deux fonctions mesurables et X_0 une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$ mesurable et $(W_t)_{t\geq 0}$ un m-$\mathcal{F}_t$-mouvement brownien.

Rappelons qu'on appelle une EDS, l'équation notée formellement :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{d}X=b(t,X_t)\mathrm{d}t+\delta(t,X_t)\mathrm{d}W_t \\ X_0 \end{array}\right. \tag{2.1}$$

ou sous forme d'intégrale :

$$X_t=X_0+\int_0^t b(s,X_s)\,\mathrm{d}s+\int_0^t \delta(s,X_s)\,\mathrm{d}W_s.$$

La solution de cette équation est un processus d'Itô noté X défini par une base stochastique $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P)$ et un m-$\mathcal{F}_t$-mouvement brownien W_t.
On distingue deux types de solutions(Voir [27]page 74) : une solution forte et une solution faible telles que

1. On dit que X est une solution forte de (2.1), si X est adapté à la filtration du mouvement brownien porteur de (2.1).
2. X est une solution faible de (2.1), si X est défini sur une autre base stochastique $(\Omega',\mathcal{F}',\mathcal{F}'_t,P')$ et vérifie l'équation $(2.1)'$ avec $(2.1)'$ c'est l'équation (2.1) en remplaçant W_t par W'_t m-$\mathcal{F}'_t$-mouvement brownien où W_t et W'_t de même loi. On peut la noté (X,W').

Et si on parle d'unicité de solution, on distingue aussi deux types :

1. **Unicité forte** : si deux solutions fortes de (2.1) sont indistinguables(X et Y deux solutions indistinguables si $P(X(t) = Y(t), \forall t \in \mathbb{R})$=1).
2. **Unicité faible** : si deux solutions faibles de (2.1) sont de même loi.

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes sur b et δ pour avoir l'existence et l'unicité de solution de (2.1).

Théorème 2.3. *(Voir [27] Théorème 5.2.1) Soit $T > 0$ et soient b et δ deux fonctions mesurables, telles qu'il existe deux constantes L et K indépendantes de t, avec :*

1. ***Condition de Lipschitz*** *:*
$$\|b(t,x) - b(t,y)\| + \|\delta(t,x) - \delta(t,y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d \ et \ \ t \in [0,T],$$
2. ***Condition de croissance*** *:*
$$\|b(t,x)\| + \|\delta(t,x)\| \leq K(1 + \|x\|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \ et \ \ t \in [0,T] \qquad où \ \|\delta\|^2 = \sum |\delta_{ij}|^2.$$

Soit Z une variable aléatoire indépendante de $\mathcal{F}_\infty$(c'est l'intersection des $\mathcal{F}_t$) générée par $W_s(.)$, $s \geq 0$ telle que $E(|Z|^2) < \infty$. Alors, l'équation (2.1) pour $t \in [0,T]$ et $X_0 = Z$ admet une unique solution $X_t(\omega)$ adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$ générée par Z et W_s, $s \leq t$ telle que $E(\int_0^T \|X_t\| \,\mathrm{d}t) < \infty$.

Mais dans notre cas, on prend $t \in \mathbb{R}$. Supposons que W_1 et W_2 deux mouvements brownien indépendants définis sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Soit

$$W(t) = \begin{cases} W_1(t), & t \geq 0, \\ -W_2(-t), & t \leq 0. \end{cases}$$

Alors W est un mouvement brownien à deux côtés défini sur une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ avec $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(u) : u \leq t\}$, $t \in \mathbb{R}$.
Revenons à notre but, on a vu dans le Chapitre 1 la presque périodicité des solutions des équations différentielles dans le cas déterministe et pour passer au cas aléatoire, on perturbe l'equation $(E_{A,f})$ par un mouvement brownien.
La question qui se pose : L'équation obtenue admet-elle une solution presque périodique (dans un certain sens) si l'equation $(E_{A,f})$ admet une solution bornée et satisfait la condition de Favard ?. La réponse c'est oui.

Considérons les deux équations différentielles stochastiques d'Itô sur $\mathbb{R}^d$

$$\mathrm{d}X = (A(t)X + f(t))\mathrm{d}t + (\sum_{i=1}^{m} B_i(t)X + g_i(t))\mathrm{d}W_i \tag{2.2}$$

où A, B_i sont des matrices $d\times$ d pour tout $i = 1, ..., m$ et f, g_i sont des fonctions presque périodiques sur $\mathbb{R}^d$ pour tout $i = 1, ..., m$ avec $W = (W_1, ..., W_m)$ est un m-mouvement brownien standard,

$$\mathrm{d}X = f(t,X)\mathrm{d}t + g(t,X)\mathrm{d}W, \tag{2.3}$$

avec $f(t,x)$ une fonction presque périodique à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $g(t,x)$ est une matrice $(d\times m)$ presque périodique uniformément et W est un m-mouvement brownien standard.

Notations

- Pour mieux expliciter les coefficients de l'équation (2.3), on la note aussi l'équation (f,g).
- Soit $(\tilde{f},\tilde{g}) \in H(f,g)$, on dit équation limite de (2.3) l'équation

$$\mathrm{d}X = \tilde{f}(t,X)\mathrm{d}t + \tilde{g}(t,X)\mathrm{d}W.$$

- Soit $r > 0$, on introduit les notations suivantes :

$$\beta_r := \{X \in L^2(P,\mathbb{R}^d) : \|X\|_2 \leq r\}, \quad \mathcal{D}_r := \{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 \,\mathrm{d}\mu(x) \leq r^2\},$$

$\beta_r^{(2.3)} = \beta_r^{(f,g)} := \{X(.) : (X,W') \text{ solution faible de l'équation } (f,g) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } \|X\|_\infty \leq r\}$,
$\mathcal{D}_r^{(2.3)} := \{\ \mu : \mu(.) = \mathcal{L}(X(.)) \text{ pour tout } X \in \beta_r^{(2.3)}\}$.

Introduisons une notion importante pour les resultats qui suivent :

La solution minimale

Définition 2.4. *Si $\beta_r^{(2.3)}$ est non vide pour un certain $r > 0$, alors $\lambda := \inf_{X\in\beta_r^{(2.3)}} \|X\|_\infty$ est la valeur minimale de* (2.3)*.*
Si $X_0 \in \beta_r^{(2.3)}$ et $\|X_0\|_\infty = \lambda$, alors X_0 c'est la solution minimale faible de (2.3)*.*

Condition de Favard dans le cas aléatoire

Définition 2.5. *On dit que la condition de Favard est vérifiée pour l'équation* (2.2)*, si toute solution faible non tiviale L^2-bornée X de l'équation*

$$\mathrm{d}X = \tilde{A}(t)X\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{m} \tilde{B}_i(t)X\mathrm{d}W_i \tag{2.4}$$

sur $\mathbb{R}$ satisfait

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \|X(t)\|_2 > 0,$$

avec $\tilde{A} \in H(A)$ et $\tilde{B}_i \in H(B_i)$.

Proposition 2.1. *Si pour toute solution déterministe non triviale $x(t)$ de l'équation*

$$\dot{x} = A(t)x$$

satisfait

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\| > 0,$$

alors on a

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \|X(t)\|_2 > 0$$

pour tout processus stochastique non trivial L^2-borné X qui satisfait la même équation.

Preuve. *On veut démontrer que*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\| > 0 \Rightarrow \inf_{t\in\mathbb{R}} \|X(t)\|_2 > 0.$$

En procédant par absurde, Supposons le contraire i.e.

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \|X(t)\|_2 = 0,$$

par définition de l'inf, on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $t_n \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\|X(t_n)\|_2 \leq \frac{1}{n},$$

donc la suite $X(t_n)$ converge dans L^2 vers 0.
Par conséquent, on peut extraire une sous suite, notée de la même façon, $X(t_n)$ qui converge presque sûrement vers 0, comme on peut considérer que, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(t)(\omega)$ est une solution déterministe de l'équation donnée et que

$$0 = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \|X(t_n)(\omega)\| \geq \inf_{t\in\mathbb{R}} \|X(t)(\omega)\| > 0$$

Contradiction !

On va annoncer un théorème plus important pour l'existance des solutions presque périodique en loi.

Théorème 2.4. *Considérons l'equation* (2.2) *avec les coefficients A, B_i, f, g_i sont presque périodiques pour tout $i = 1, .., m$. Supposons que* (2.2) *admet une solution L^2-bornée et satisfait la condition de Favard. Alors* (2.2) *admet une solution presque périodique en loi.*

Avant de démontrer ce théorème, on va annoncer les résultats suivants :
Commençons par donner un théorème fondamental qui annonce un resultat trés important qui dit que la limite en loi de suites de solutions d'équations est la loi d'une solution de l'équation limite.

Théorème 2.5. *Considérons la famille des équations différentielles stochastiques d'Itô sur $\mathbb{R}^d$*

$$\mathrm{d}X = f_n(t, X)\mathrm{d}t + g_n(t, X)\mathrm{d}W,\ n = 1, 2, ...$$

avec f_n sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, g_n sont des matrices $(d \times m)$ et W est un m-mouvement brownien.
Supposons que f_n et g_n satisfont la condition de Lipschitz et la condition de croissance avec

des constantes communes de Lipschitz et de croissance ; il existe deux constantes L et K indépendantes de $t \in \mathbb{R}$ et de $n \in \mathbb{N}$ telles que, pour tout $x,y \in \mathbb{R}^d$

$$|f_n(t,x) - f_n(t,y)| \vee |g_n(t,x) - g_n(t,y)| \leq L|x-y| \ , \ |f_n(t,x)| \vee |g_n(t,x)| \leq K(1+|x|).$$

avec $a \vee b = \max\{a,b\}$. Supposons de plus que $f_n \to f$ et $g_n \to g$ simplement dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ quand $n \to \infty$ et que $X_n \in \beta_{r_0}^{(f_n,g_n)}$ pour une certaine constante $r_0 > 0$ indépendante de n. Alors, il existe une sous suite de $\{X_n\}$ qui converge en loi , uniformément sur les intervalles compacts de $\mathbb{R}$, vers $X \in \beta_{r_0}^{(f,g)}$.

Preuve. *Fixons $n \in \mathbb{N}$. Soient $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $X_n \in \mathcal{B}_{r_0}^{(f_n,g_n)}$ avec (X_n, W_n) une solution faible de (f_n, g_n) dans un espace probabilisé filtré.*

1. *On démontre,en premier lieu, que $\mathcal{D}_{r_0}$ est un compact.*
   Pour cela, il suffit de vérifier la fermeture et la relative compacité (tendu)de la famille $\mathcal{D}_{r_0}$. D'autre part, pour démontrer la relative compacité de $\mathcal{D}_{r_0}$, il suffit de vérifier que $\mathcal{B}_{r_0}$ est tendu.
   Pour tout $C > 0$, on note B_C la boule fermée bornée de $\mathbb{R}^d$, de centre $0 \in (\mathbb{R}^d)$ et de rayon C, donc compact de $\mathbb{R}^d$. Pour toute variable aléatoire $X \in \mathcal{B}_{r_0}$, l'inégalité de Chebyshev donne :

   $$P(X \notin B_C) = P(|X| > C) \leq \frac{\|X\|_2^2}{C^2} \leq \frac{r_0^2}{C^2},$$

   pour un C suffisamment grand, on déduit que $\mathcal{B}_{r_0}$ est tendu, donc $\mathcal{D}_{r_0}$ est relativement compact.
   Il reste à montrer que $\mathcal{D}_{r_0}$ est fermé. En utilisant le lemme de Fatou, on peut démontrer que toute suite de $\mathcal{D}_{r_0}$ convergente, sa limite reste dans $\mathcal{D}_{r_0}$.
2. *Démontrons que la loi de X_n converge uniformément sur [a,b].*
   On démontre d'abord que X_n est équi-continue.
   Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'isométrie d'Itô et $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, on a pour tout $a \leq s \leq t \leq b$,

   $$\begin{aligned} E|X_n(t) - X_n(s)|^2 &= E|\int_s^t f_n(r, X_n(r))\mathrm{d}r + \int_s^t g_n(r, X_n(r))\mathrm{d}W_n|^2 \\ &\leq 2E(\int_s^t |f_n(r, X_n(r))|\mathrm{d}r)^2 + 2E(\int_s^t |g_n(r, X_n(r))|\mathrm{d}W_n(r))^2 \\ &\leq 2(t-s)E(\int_s^t |f_n(r, X_n(r))|^2\mathrm{d}r) + 2E(\int_s^t |g_n(r, X_n(r))|^2\mathrm{d}r) \end{aligned}$$

   En utilisant Fubini et la condition de croissance, on a

   $$\leq 2(t-s)\int_s^t E(K(1+|X_n|))^2\mathrm{d}r + 2\int_s^t E(K(1+|X_n|))^2\mathrm{d}r$$

$$\leq 4K^2(t-s)\int_s^t E(1+|X_n(r)|)^2\mathrm{d}r+2K^2\int_s^t E(1+|X_n(r)|)^2\mathrm{d}r$$
$$\leq 4(t-s)K^2(1+\|X_n\|_\infty^2)(t-s+1)$$
$$\leq 4K^2(1+r_0^2)(b-a+1)(t-s). \tag{2.5}$$

Il est clair que l'estimation (2.5) est uniforme pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $\{X_n\}$ définie de $[a,b]$ dans $L^2(P,\mathbb{R}^d)$ est equi-continue.
Or on a la continuité pour la norme de L^2 implique la continuité en loi, alors si on pose $\mu_n(.) = \mathcal{L}(X_n(.))$: $[a,b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, on aura la suite $\{\mu_n\}$ est équi-continue. Et comme $\{\mu_n\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ qui est compact, du théorème de Bolzano Weierstrass, la suite $\{\mu_n\}$ admet une sous suite notée $\{\mu_n\}$ qui converge. En appliquant la version générale du théorème d'Arzela-Ascoli(Voir [28] Théorème 4.25), on obtient une sous suite de $\{\mu_n\}$, notée $\{\mu_n\}$, qui converge uniformément sur $[a,b]$.
Pour avoir ce résultat sur tout $\mathbb{R}$, comme $[a,b]$ est arbitraire et $\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^\star}[-n,n]$, $\{\mu_n\}$ admet une sous suite qui converge uniformément sur chaque intervalle $[-n,n]$. En utilisant le procédé diagonal, on aura l'existance d'une sous suite, notée encore $\{\mu_n\}$ qui converge uniformément vers μ sur tout $\mathbb{R}$.

3. *Dans le reste la démonstration, on prouve que la limite μ est la loi d'une solution X L^2-bornée de l'équation (f,g) avec $\|X\|_\infty \leq r_0$.*
Pour un intervalle borné $[a,b]$, Comme $\mu_n(a) \to \mu(a)$ quand $n \to \infty$, du théorème de Skorohod(Théorème 2.2) il existe un espace probabilisé $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{P})$ et des variables aléatoires $\{\tilde{X}_n(a)\}_{n=1}^\infty$, $\tilde{X}(a)$ tels que $\mathcal{L}(\tilde{X}_n(a)) = \mathcal{L}(X_n(a))$, $\mathcal{L}(\tilde{X}(a)) = \mu(a)$ et $\tilde{X}_n(a) \to \tilde{X}(a)$ p.s quand $n \to \infty$.
Considérons l'équation (f_n,g_n) avec un mouvement brownien commun W dans l'espace probabilisé $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{P})$. Alors, comme les coefficients f_n,g_n satisfont la condition de Lipschitz et la condition de croissance, du théorème classique d'approximation([29] ,page 54), on a
$$\sup_{t\in[a,b]}|\tilde{X}_n(t)-\tilde{X}(t)| \to 0 \quad \textit{en probabilité quand } n \to \infty,$$
où $\tilde{X}_n(.)$ et $\tilde{X}(.)$ sont des solutions fortes sur $[a,b]$ de l'équation (f_n,g_n) et (f,g) avec un mouvement brownien commun W et des valeurs initiales $\tilde{X}_n(a)$ et $\tilde{X}(a)$, respectivement. Ce qui implique que
$$\mu_n(t) = \mathcal{L}(X_n(t)) = \mathcal{L}(\tilde{X}_n(t)) \to \mathcal{L}(\tilde{X}(t))$$
uniformément sur $[a,b]$, où $\mathcal{L}(X_n(t)) = \mathcal{L}(\tilde{X}_n(t))$ comme l'unicité faible de l'équation (f_n,g_n) sur $[a,b]$ et l'unicité faible implique l'unicité de loi sur $\mathbb{R}^d$.
D'autre part, $\mu_n(.) \to \mu(.)$ sur $[a,b]$. Donc cela impose que $\mu(t) = \mathcal{L}(\tilde{X}(t))$, $t \in [a,b]$. On peut recommencer par b et répéter la procédure ci-dessus. De cette maniére, on prouve que μ est la loi d'une solution de l'équation (f,g) sur $[a,\infty)$.

Et pour avoir le résultat sur $(-\infty, a]$, on utilise la méthode stochastique de flow de Kunita [30]. Comme f et g satisfont la condition de Lipschitz, du Théorème 2.4.3 [30],on a l'application $\phi_{s,t}(.,\omega) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ solution de l'équation (f,g) est un homeomorphisme de $\mathbb{R}^d$ pour tout $s < t$ et presque tout ω. Pour un $c < a$, on prend $\tilde{X}(c,\omega) = \phi_{c,a}^{-1}(\tilde{X}(a,\omega),\omega)$ pour tout ω, i.e. l'image réciproque de $\tilde{X}(a)$ à l'instant c. Alors si on considére l'équation (f,g) sur $[c,a]$ avec la valeur initiale $\tilde{X}(c)$, alors la valeur de la solution à l'instant a c'est exactement $\tilde{X}(a)$. De la même manière, on prend $\tilde{X}_n(c,\omega) = {\phi_{c,a}^n}^{-1}(\tilde{X}_n(a,\omega),\omega)$ avec l'application ϕ^n c'est la solution de l'équation (f_n, g_n). Alors, la convergence de $\tilde{X}_n(a)$ vers $\tilde{X}(a)$ implique la convergence de $\tilde{X}_n(c)$ vers $\tilde{X}(c)$ comme ϕ^n est un homéomorphisme et $\phi_{c,a}^n \to \phi_{c,a}$ quand $n \to \infty$ par le théorème d'approximation mentionné ci-dessus.

On montre que $\mu(.)$ c'est la loi de $\tilde{X}(.)$ sur $[c,a]$ avec le même argument utilisé sur $[a,b]$. En répétant la procedure, on aura $\mu(.)$ est la loi de $\tilde{X}(.)$ sur $(-\infty, a]$ et donc sur $\mathbb{R}$.

Comme $\tilde{X}_n(t)$ converge en probabilité vers $\tilde{X}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, le lemme de Fatou et le fait que $\|\tilde{X}_n\|_\infty \leq r_0$ implique que

$$E|\tilde{X}(t)|^2 \leq \liminf_n E|\tilde{X}_n(t)|^2 \leq r_0^2.$$

Alors, $\|\tilde{X}\|_\infty \leq r_0$.

Finallement, on remplace $\tilde{X}(a)$ sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ par la variable aléatoire $X(a)$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avec la même loi sur $\mathbb{R}^d$, et notons la solution de l'équation (f,g) par $X(t)$(l'existence et l'unicité de la solution est garantie par les conditions de Lipschitz et de croissance). Alors la solution $X(t)$ admet la même loi sur $\mathbb{R}^d$ comme celle de $\tilde{X}(t)$ par l'unicité faible de (f,g), et on a aussi $\|X\|_\infty \leq r_0$. D'où X_n converge en loi vers $X \in \mathcal{B}_{r_0}^{(f,g)}$.

Remarque 2.4.

1. *De la preuve du Théorème 2.5, sous la condition initiale $a \in \mathbb{R}$, les conditions de Lipschitz et de croissance polynomiale, une solution faible sur $\mathbb{R}$ est réellement une solution forte.*
2. *On a remarqué de la preuve du Théorème 2.5 que si on considére seulement la loi unidimensionnelle sur $\mathbb{R}^d$ des solutions de (2.3) sur $\mathbb{R}$, alors cette loi est déterminée par une loi d'une condition initiale à l'instant $a \in \mathbb{R}$ par l'unicité faible sur $\mathbb{R}_+$ et le fait que le théorème stochastique de flow de Kunita est vérifié sous la condition de Lipschitz et de croissance.Ce qui veut dire que pour deux variables aléatoires données en $a \in \mathbb{R}$ de même loi, les solutions sur $\mathbb{R}$ ont la même loi unidimensionnelle sur $\mathbb{R}^d$. Réellement, nous avons un résultat plus fort, les lois infini-dimensionnelles des solutions sont égales.*

Lemme 2.1. *Supposons que les coefficients f et g de l'équation* (2.3) *satisfont les conditions de Lipschitz et de croissance et qu'il existe une solution L^2-bornée de* (2.3)*. Alors,* (2.3) *admet une solution minimale.*

Preuve. *Soit l'équation d'Itô sur* $\mathbb{R}^d$

$$\mathrm{d}X = f(t,X)\mathrm{d}t + g(t,X)\mathrm{d}W,$$

avec f *et* g *sont presque périodiques uniformément et satisfont les conditions de Lipschitz et de croissance.*
Notons $\lambda := \inf_{X\in\beta_r^{(2.3)}} \|X\|_\infty$ *la valeur minimale de* (2.3).
Soit la suite $\{X_n\}$ *une solution* L^2*-bornée de* (2.3) *telle que :*

$$\|X_n\|_\infty \leq \lambda + \frac{1}{n}.$$

Du Théorème 2.5, il existe une sous suite de $\{X_n\}$ *qui converge en loi vers* $X \in \beta_r^{(2.3)}$ *avec* $\|X\|_\infty \leq \lambda$ *(car* $\int_\Omega X^2\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega X_n\,\mathrm{d}\mu_n \leq \lim_{n\to\infty}\int_\Omega(\lambda+\frac{1}{n})^2\,\mathrm{d}\mu_n = \lambda^2$*) . Comme* λ *c'est la valeur minimale de* (2.3)*, alors* $\|X\|_\infty = \lambda$.
D'où X *est la solution minimale de* (2.3).

Lemme 2.2. *Considérons l'équation linéaire homogène qui correspond à l'équation* (2.2) *sur* $\mathbb{R}^d$

$$\mathrm{d}X = A(t)X\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)X\mathrm{d}W_i.$$

Supposons que A *et* B_i *sont presque périodiques et que* $Y(t)$ *est une solution* L^2*-bornée de l'équation homogène sur* $\mathbb{R}$ *qui est presque périodique en loi. Alors, on a*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}}\|Y(t)\|_2 > 0 \quad ou \quad Y(t) = 0 \ \ \forall t\in\mathbb{R} \quad p.s.$$

Preuve. *Soit* $Y(t)$ *une solution* L^2*-bornée de l'équation homogène correspondante à* (2.2). *Pour démontrer que*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}}\|Y(t)\|_2 > 0 \quad ou \quad Y(t) = 0 \ \ \forall t\in\mathbb{R} \quad p.s.$$

il suffit de démontrer que

$$\inf_{t\in\mathbb{R}}\|Y(t)\|_2 = 0 \ \Rightarrow \ Y(t) = 0 \quad \forall t\in\mathbb{R} \quad p.s.$$

Supposons que $\inf_{t\in\mathbb{R}}\|Y(t)\|_2 = 0$*, alors il existe une suite* $\{\alpha'_n\}$ *telle que* $Y(\alpha'_n) \to 0$ *sur* $L^2(\mathcal{P},\mathbb{R}^d)$.
Comme A *et* B_i *sont presque périodiques, d'aprés Bochner, pour* $\grave{\alpha} = \{\grave{\alpha}_n\}$ *et* $\grave{\beta} = \{\grave{\beta}_n\}$ *deux suites réelles (posons* $\grave{\beta} = -\grave{\alpha}$*), on peut extraire une sous suite* $\alpha \subset \grave{\alpha}$ *telle que : pour tout* $i = 1,...,m$

$$T_\alpha A(t) = \tilde{A}(t), \quad T_\alpha B_i(t) = \tilde{B}_i(t), \quad T_{-\alpha}\tilde{A}(t) = A(t), \quad T_{-\alpha}\tilde{B}_i(t) = B(t)$$

Pour $\mu(.)$ la loi de $Y(.)$ dans $\mathbb{R}^d$ et comme $Y(t)$ est presque périodique en loi , alors $\mu(.)$ est une application presque périodique donc d'aprés Bochner : $T_\alpha \mu(t) = \tilde{\mu}(t)$ et $T_{-\alpha}\tilde{\mu}(t) = \mu(t)$.
De la preuve du Théorème 2.5, la limite $\tilde{\mu}(t)$ est la loi de la solution $\tilde{Y}(t)$ de l'équation limite

$$\mathrm{d}X = \tilde{A}(t)X\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{m} \tilde{B}_i(t)X\mathrm{d}W_i.$$

Notons

$$\tilde{\mu}(0) = T_\alpha \mu(0) = \lim_{n\to\infty} \mu(\alpha_n) = \delta_0$$

avec δ_0 est la mesure de Dirac. Donc $\tilde{Y}(0) = 0$ p.s (cette solution passe par 0 et 0 est une solution) et comme la solution est unique, alors $\tilde{Y}(t) = 0$ p.s $\quad \forall t \geq 0$.
En utilisant la méthode stochastique de flow de Kunita, on aura $\tilde{Y}(t) = 0$ p.s $\quad \forall t \leq 0$.
Alors, $\tilde{Y}(t) = 0$ p.s $\forall t \in \mathbb{R}$ donc, $\tilde{\mu} \equiv \delta_0$.
Or on a $\mu(t) = T_{-\alpha}\tilde{\mu}(t) = \delta_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
D'où $\quad Y(t) = 0$ p.s $\quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.5. *Considérons l'équation linéaire sur $\mathbb{R}^d$ de la forme*

$$\mathrm{d}X = (AX + f(t))\mathrm{d}t + g(t)\mathrm{d}W, \tag{2.6}$$

où A est une matrice constante avec f et g sont presque périodiques. l'équation homogène de (2.6) est $dX = AX$ et d'aprés ce qu'on a vu dans le cas déterministe, toute solution bornée non triviale de l'équation $\dot{x} = Ax$ est presque périodique et d'aprés le lemme 2.2 ces solutions sont séparées de 0(satisfont la condition de Favard). Alors de la Proposition 2.1, la condition de Favard est vérifiée pour l'équation donnée.

Lemme 2.3. *Supposons que la condition de Favard est vérifiée pour l'équation (2.2), alors pour tout mouvement brownien W de l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$, il existe au plus une solution forte minimale pour toute équation limite de (2.2).*

Preuve. *Soit W un mouvement brownien standard sur $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$. Démontrons que pour toute équation limite de (2.2), il existe au plus une solution forte minimale.*
Procédant par l'absurde.
Supposons qu'il existe une équation limite de (2.2)

$$\mathrm{d}X = (\tilde{A}(t)X + \tilde{f}(t))\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{m} (\tilde{B}_i(t)X + \tilde{g}_i(t))\mathrm{d}W_i, \tag{2.7}$$

qui admet deux solutions minimales X_1 et X_2 avec une valeur minimale commune λ(i.e $\|X_1\|_\infty = \|X_2\|_\infty = \lambda$). Alors $\frac{(X_1 - X_2)}{2}$ est une solution L^2-bornée de l'équation homogène

$$\mathrm{d}X = \tilde{A}(t)X\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{m} \tilde{B}_i(t)X\mathrm{d}W_i.$$

Comme (2.2) *vérifie la condition de Favard, elle nous donne l'existence d'une constante* $\eta > 0$ *telle que :*

$$\inf \frac{1}{2}\|X_1(t) - X_2(t)\|_2 \geq \eta,$$

On aura pout tout $t \in \mathbb{R}$

$$\|\frac{1}{2}(X_1 + X_2)\|_2^2 + \|\frac{1}{2}(X_1 - X_2)\|_2^2 = \frac{1}{2}(\|X_1\|_2^2 + \|X_2\|_2^2) \leq \frac{1}{2}(\lambda^2 + \lambda^2) = \lambda^2$$

alors,

$$\|\frac{1}{2}(X_1 + X_2)\|_2^2 \leq \lambda^2 - \|\frac{1}{2}(X_1 - X_2)\|_2^2 \leq \lambda^2 - \eta^2 < \lambda^2$$

donc,

$$\|\tfrac{1}{2}(X_1 + X_2)\|_2 \leq \lambda \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ce qui donne

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\frac{1}{2}(X_1 + X_2)\|_2 = \|\frac{1}{2}(X_1 + X_2)\|_\infty < \lambda$$

avec $\frac{(X_1+X_2)}{2}$ *est une solution de* (2.7).
Contradiction avec X_1 *et* X_2 *solutions minimales de* (2.7).

Remarque 2.6. *Du lemme 2.3 et la Remarque 2.4, pour toute équation limite de* (2.2), *toutes ses solutions faibles(si elles existent) ont la même loi sur* $\mathbb{R}$ *puis sur* $\mathbb{R}^d$ *si la condition de Favard est vérifiée pour* (2.2).

Lemme 2.4. *Supposons que* f *et* g *de* (2.3) *sont presque périodiques uniformément et elles satisfont la condition de Lipschitz avec la constante de Lipschitz qui ne dépend pas de* t. *Alors, toutes équations limites de* (2.3) *admettent la même valeur minimale égale à celle de* (2.3).

Preuve. *Soit l'équation* (2.3)

$$\mathrm{d}X = f(t, X)\mathrm{d}t + g(t, X)\mathrm{d}W.$$

avec f *et* g *sont presque périodiques et satisfont la condition de Lipschitz.*
Supposons que φ *est la solution minimale de* (2.3) *i.e* $\|\varphi\|_\infty = \lambda$ *avec* λ *est la valeur minimale de* (2.3). *Alors, on a pour tout* $s < t$

$$\varphi(t) = \varphi(s) + \int_s^t f(r, \varphi(r))\,\mathrm{d}r + \int_s^t g(r, \varphi(r))\,\mathrm{d}W(r),$$

avec W *un mouvement brownien standard.*
Considérons l'équation limite de (2.3) $(\tilde{f}, \tilde{g})$ *avec* $T_\alpha(f, g) = (\tilde{f}, \tilde{g})$.
Notons

$$\varphi_n(.) := \varphi(. + \alpha_n),\ f_n(.) := f(. + \alpha_n),\ g_n(.) := g(. + \alpha_n) et\ W_n(.) := W(. + \alpha_n) + W(\alpha_n).$$

f_n et g_n sont presque périodiques et elles vérifient la condition de Lipschitz avec une constante commune égale à celle de f et g et W_n est un mouvement brownien ; $f_n \to \tilde{f}$ et $g_n \to \tilde{g}$ uniformément de $\mathbb{R} \times S$ pour tout $S \subset \mathbb{R}^d$ compact.
Il est clair que φ_n satisfait l'équation suivante, pour tout $s < t$

$$\varphi_n(t) = \varphi_n(s) + \int_s^t f(r, \varphi_n(r))\,\mathrm{d}r + \int_s^t g_n(r, \varphi_n(r))\,\mathrm{d}W_n(r),$$

Du Théorème 2.5, il existe une sous suite de $\{\varphi_n\}$ notée $\{\varphi_n\}$ qui converge en loi, uniformément sur un compacte, vers $\tilde{\varphi}$ quand $n \to \infty$ qui satisfait l'équation limite dans $\mathbb{R}$; pour tout $s < t$

$$\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}(s) + \int_s^t \tilde{f}(r, \tilde{\varphi}(r))\,\mathrm{d}r + \int_s^t \tilde{g}(r, \tilde{\varphi}(r))\,\mathrm{d}\tilde{W}(r),$$

avec $\tilde{W}$ est un mouvement brownien.
Comme

$$\tilde{\varphi} = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \liminf_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \liminf_{n\to\infty} \varphi(t + \alpha_n).$$

d'aprés le Lemme de Fatou, on aura

$$\|\tilde{\varphi}\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty = \lambda$$

donc $\tilde{\lambda} \leq \lambda$ avec $\tilde{\lambda}$ est la valeur minimale de $(\tilde{f}, \tilde{g})$.
Inversement, par la propriété de la presque périodicité au sens de Bochner, on a

$$T_{-\alpha}\tilde{f} = f,\ T_{-\alpha}\tilde{g} = g,$$

on a

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}(t - \alpha_n).$$

Par symétrie, on a

$$\|\varphi\|_\infty \leq \|\tilde{\varphi}\|_\infty$$

donc $\lambda \leq \tilde{\lambda}$,
d'où $\tilde{\lambda} = \lambda$.

Corollaire 2.3.1. *Considérons (2.3) et supposons que les hypothèses du lemme 2.4 sont vérifiées. Supposons de plus que φ est la solution minimale de (2.3) et que la suite α satisfait $T_\alpha(f, g) = (\tilde{f}, \tilde{g})$ et $T_\alpha \varphi$ converge en loi, uniformément dans un compact, vers une solution $\tilde{\varphi}$ de $(\tilde{f}, \tilde{g})$. Alors, $\tilde{\varphi}$ est une solution minimale de $(\tilde{f}, \tilde{g})$.*

Preuve. *De la Preuve du lemme 2.4, on a*

$$\|\varphi\|_\infty = \|\tilde{\varphi}\|_\infty = \lambda$$

avec $\tilde{\varphi}$ est solution de l'équation limite $(\tilde{f}, \tilde{g})$ et λ est la valeur minimale de (2.3) et $(\tilde{f}, \tilde{g})$. D'où $\tilde{\varphi}$ est la solution minimale de $(\tilde{f}, \tilde{g})$.

Lemme 2.5. *Supposons que chaque équation limite de* (2.3) *admet une unique solution minimale en loi i.e toutes les solutions minimales des équations limites de* (2.3) *ont une même loi sur* $\mathbb{R}^d$. *Alors ces solutions minimales sont presque périodiques en loi.*

Preuve. *On a* f *et* g *sont presque périodiques uniformément. Soit* $(\tilde{f}, \tilde{g}) \in H(f, g)$ *alors,* $\tilde{f}$ *et* $\tilde{g}$ *sont presque périodiques donc elles vérifient le critère de suite double de Bochner : Pour* $\grave{\alpha}$ *et* $\grave{\beta}$ *deux suites réelles, on peut extraire deux sous suites* α *et* β *respectivement telles que :*

$$T_\alpha T_\beta \tilde{f} = T_{\alpha+\beta} \tilde{f} \text{ et } T_\alpha T_\beta \tilde{f} = T_{\alpha+\beta} \tilde{f}$$

uniformément sur S, *avec* S *un compact de* $\mathbb{R}^d$.
Supposons que $\tilde{\varphi}$ *est une solution minimale de* $(\tilde{f}, \tilde{g})$ *avec* $\tilde{\mu}$ *sa loi sur* $\mathbb{R}^d$.
On démontre que $\tilde{\mu}$ *est presque périodique, en utilisant le critère de suite double de Bochner. De la preuve du Théorème 2.5, on a l'existance de* α *et* β *pour lesquelles* $T_\alpha T_\beta \tilde{\mu}$ *et* $T_{\alpha+\beta}\tilde{\mu}$, *uniformément dans un compact, et elles sont les lois de* φ_1 *et* φ_2 *solutions de* $(T_\alpha T_\beta \tilde{f}, T_\alpha T_\beta \tilde{g})$ *et* $(T_{\alpha+\beta}\tilde{f}, T_{\alpha+\beta}\tilde{g})$ *respectivement. Comme* $\tilde{f}$ *et* $\tilde{g}$ *sont presque périodiques,* φ_1 *et* φ_2 *solutions de la même équation, du Corollaire 2.3.1* φ_1 *et* φ_2 *sont des solutions minimales de* $(T_{\alpha+\beta}\tilde{f}, T_{\alpha+\beta}\tilde{g})$ *donc de la Remarque 2.6* $\mathcal{L}(\varphi_1) = \mathcal{L}(\varphi_2)$. *Alors*

$$T_\alpha T_\beta \tilde{\mu} = T_{\alpha+\beta}\tilde{\mu}$$

autrement dit, $\tilde{\mu}$ *satisfait le critère de suite double de Bochner, donc* $\tilde{\mu}$ *est presque périodique. D'où* $\tilde{\varphi}$ *est presque périodique en loi.*

Preuve (Théorème 2.4). *Soit l'équation* (2.2) *avec des coefficients presque périodiques et satisfont la condition de Lipschitz et de croissance. Comme les hypothèses du lemme 2.1 sont satisfaites ,alors* (2.2) *admet une solution minimale* φ.
Puisque la condition de Favard est vérifiée, du lemme 3.2, l'équation limite de (2.2) *admet une solution minimale* $\tilde{\varphi}$. *Du Corollaire 2.3.1,* $T_\alpha \varphi$ *converge en loi vers* $\tilde{\varphi}$ *(où* α *est une suite réelle).*
De la Remarque 2.6, la solution $\tilde{\varphi}$ *est unique en loi. Donc du lemme 2.5,* $\tilde{\varphi}$ *est presque périodique en loi. En utilisant les propriétés des fonctions presque périodiques, on déduit que* φ *est presque périodique en loi.*

Remarque 2.7. *De la Remarque 2.6 et le Théorème 2.4, l'existence de solutions* L^2*-bornées de* (2.6) *implique l'existence d'une solution presque périodique en loi.*

Du *Théorème 2.4* dérive la conséquence suivante :

Corollaire 2.3.2. *Considérons l'équation sur* $\mathbb{R}^d$ *de la forme*

$$\mathrm{d}X = [A(t)X + f(t)]\mathrm{d}t + g(t)\mathrm{d}W, \tag{2.8}$$

où A, f *et* g *sont des fonctions presque périodiques.*
Si on considére l'équation déterministe correspndante

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \tag{$E_{A,f}$}$$

satisafait la condition de Favard(vu dans le Chapitre 1) et (2.8) *admet une solution L^2-bornée, alors* (2.8) *admet une solution presque périodique en loi.*

Preuve. *On a l'équation homogène de* (2.8) *et la même que celle de $E_{A,f}$. Comme l'équation $E_{A,f}$ satisfait la condition de Favard, donc de la Proposition 2.1, l'équation* (2.8) *satisfait aussi la condition de Favard de plus on a, par hypothèse,* (2.8) *admet une solution L^2-bornée. Alors, du Théorème 2.4, l'équation* (2.8) *admet une solution presque périodique en loi.*

On remarque de ce qui précède que toutes les solutions presque périodiques sont minimales. Le resultat suivant confirme l'existence des solutions presque périodiques en loi en plus de solutions minimales.

Théorème 2.6. *Considérons l'équation linéaire sur $\mathbb{R}^d$*

$$\mathrm{d}X = (AX + f(t))\mathrm{d}t + g(t)\mathrm{d}W, \tag{2.9}$$

où A est une matrice constante, f et g sont presque périodiques, et W est un m-mouvement brownien.
Si X est une solution forte L^2-bornée de (2.9) *sur $\mathbb{R}$ avec $X(\tau) - X_0(\tau)$ est indépendant de $X_0(\tau)$ et W pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, où X_0 est la solution forte minimale de* (2.9).
Alors X est presque périodique en loi.

Preuve. *Soit X une solution de* (2.9), *démontrons que X est presque périodique en loi.*
De la Remarque 2.5, on a la condition de Favard est vérifiée pour l'équation (2.9). *Alors, du lemme 2.1 et lemme 2.3, on a l'existence d'une unique solution forte minimale X_0 de* (2.9) *et du lemme 2.5, cette solution est presque périodique en loi.*
Posons $Y(.) = X(.) - X_0(.)$. Comme X et X_0 sont solutions de (2.9), *alors (du Théorème 1.2 chapitre 1) Y est une solution L^2-bornée de l'equation homogène de* (2.9) *qui est presque périodique en moyenne quadratique i.e* $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|Y(t+\tau) - Y(t)\|_2 \leq \epsilon$.
En effet, comme Y est solution de l'équation $\mathrm{d}Y = AY$, donc $Y_t = Y_0 \exp{(At)}$.
Soient t,$\tau \in \mathbb{R}$, pour $\omega \in \Omega$ fixé,

$$E|Y_{t+\tau}(\omega)-Y_t(\omega)|^2 = E|Y_0(\exp(A(t+\tau))-\exp(At))|^2 = |(\exp(A(t+\tau))-\exp(At))|^2 E|Y_0(\omega)|^2 < \infty.$$

En utilisant la définition de la presque périodicité au sens de Bochner et le fait que la convergence en moyenne quadratique implique la convergence en loi, on aura $Y(.)$ est presque périodique en loi.
On a X_0 est une solution de (2.9) *avec une valeur initiale $X_0(\tau)$, en utilisant le théorème de Yamada-Watanabe[37], on aura*

$$X_0(.) = F(X_0(\tau), W)$$

pour toute fonction mesurable F et $t \geq \tau$.
Pour prolonger ce resultat sur tout $\mathbb{R}$, on utilise le théorème de flow de Kunita.

De même, on a $Y(.) = G(Y(\tau))$ *pout toute fonction* G *mesurable sur tout* $\mathbb{R}$.
Or on a par hypothèse, $Y(\tau)$ *est indépendante de* $X_0(\tau)$ *et* W*, et de ce qui précède,* $Y(.)$ *est indépendante de* $X_0(.)$*. En particulier,* $Y(t)$ *est indépendante de* $X_0(t)$ $\quad \forall t \in \mathbb{R}$ *et* $X(t) = X_0(t) + Y(t)$*, alors* $\mathcal{L}(X(t)) = \mathcal{L}(X_0(t) + Y(t)) = \mathcal{L}(X_0(t)) * \mathcal{L}(Y(t))$ $\forall t \in \mathbb{R}$.
Notons $\mu_1 = \mathcal{L}(X_0(t))$ *et* $\mu_2 = \mathcal{L}(Y(t))$ $\forall t \in \mathbb{R}$.
On a X_0 *et* Y *sont des solutions presque périodiques en loi, donc pour deux suites* α' *et* β', *on a deux sous suites* α *et* β *respectivement telles que* $\mathrm{T}_{\alpha+\beta}\mu_i = \mathrm{T}_\alpha \mathrm{T}_\beta \mu_i$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.
Comme la convolution de mesures est continue(car par définition, pour μ,ν *deux mesures et* $B \in \mathcal{F}$, $\mu * \nu(B) = \int_\Omega \mu(B - x)\mathrm{d}\nu(x)$*), on a* $\mathrm{T}_{\alpha+\beta}(\mu_1 * \mu_2) = \mathrm{T}_\alpha \mathrm{T}_\beta(\mu_1 * \mu_2)$*, autrement dit* $\mathcal{L}(X(t))$ *est presque périodique,*
d'où X *est presque périodique en loi.*

Chapitre 3

Extension de Favard

On a vu dans le premier chapitre que Favard a introduit la méthode de séparation pour que la solution bornée soit presque périodique pour les équations différentielles à coefficients variables, mais la condition $(*)$ mise par Favard (vue dans le 1er chapitre) est trés forte, pour cela, dans ce chapitre, on relaxe cette condition en produisant une extension du théorème de Favard sous une hypothése faible.

3.1 Cas général

En premier lieu, on lance le théorème (Extension de Favard).

Théorème 3.1. *Soient $A(t)$,$f(t)$ presque périodiques dans $\mathbb{R}$.*
Supposons qu'il existe $\ell > 0$ tel que pour tout $(B, g) \in H(A, f)$, toute solution non triviale $y(t)$ de l'équation (E_B) satisfait la condition

$$\inf_{t\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}\|y(s)\|\,\mathrm{d}s\right) > 0 \tag{3.1}$$

S'il existe $(t_0, x_0) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ tel que $K = \{x(t, t_0, x_0)/t \in \mathbb{R}\}$ est borné dans $\mathbb{R}^d$, alors, pour tout $(B, g) \in H(A, f)$, il existe une solution de l'équation $E_{(B,g)}$ qui est presque périodique dans $\mathbb{R}$.

Pour démontrer ce théorème on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 3.1. *(Voir [20]) Soient $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$.*
Si f est presque périodique et $g \in H(f)$, alors g est presque périodique dans $\mathbb{R}$.

Lemme 3.2. *(Voir [20]) Soit $x(t)$ une solution bornée de $(E_{A,f})$.*
Alors, pour tout $(B, g) \in H(A, f)$, il existe une suite $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ et une solution $y(t)$ de $(E_{(B,g)})$ telles que : $\lim_{n\to\infty} x(t + \alpha_n) = y(t)$ simplement.

On définit, pour tout $x(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$,

$$L_\ell\,(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}\|x(s)\|^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemme 3.3. *(Voir [20]) Si pour* $u, v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ *il existe une suite* $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ *telle que* $\lim_{n\to\infty} u(t+\alpha_n) = v(t)$ *;* $\forall\, t \in \mathbb{R}$ *, alors* $\forall\, \ell > 0$

$$L_\ell\,(v) \leq L_\ell\,(u).$$

Supposons que pour tout $(B, g) \in H(A, f)$ et $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, l'équation

$$\dot{x} = B(t)x + g(t) \qquad (E_{B,g})$$

admet une solution continue et il existe $(t_0, x_0) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ telle que la solution $x(t, t_0, x_0)$ notée $x_0(t)$ de l'équation $(E_{A,f})$ est bornée dans $\mathbb{R}^d$.
On définit

$$K = \text{clco}\ \{\ x(t, t_0, x_0)/t \in \mathbb{R}^+\}\,;$$

avec clco{...} c'est la fermeture convexe de l'ensemble {...} et

$$F_{B,g} = \{y(t)/\ y(t) \text{ satisfait } (E_{B,g})\text{et } y(t) \in K, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\ \}.$$

Remarque 3.1. *Du lemme 3.2, pour tout* $(B, g) \in H(A, f)$*,* $F_{B,g}$ *n'est pas vide.*

Lemme 3.4. *(Voir [20]) Pour tout* $(B, g) \in H(A, f)$ *et* $\ell > 0$*, il existe* $y_0 \in F_{B,g}$ *telle que :*

$$L_\ell(y_0) = \inf_{u \in F_{B,g}} L_\ell(u).$$

Lemme 3.5. *(Voir [20]) Pour tout* $(B, g), (D, h) \in H(A, f)$ *et pour tout* $\ell > 0$ *on a :*

$$\inf_{u \in\ F_{B,g}} L_\ell\,(u) = \inf_{u \in\ F_{D,h}} L_\ell\,(u).$$

Lemme 3.6. *(Voir [20]) Soit* $(B, g) \in H(A, f)$ *et* $\ell > 0$ *un nombre réel.*
Si pour toute solution non triviale y(t) de (E_B) *satisfait* (3.1) *.i.e.*

$$\inf_{t \in \mathbb{R}}\Big(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell} \|y(s)\|\, \mathrm{d}s\Big) > 0.$$

Alors, il existe une unique solution de $(E_{B,g})$ *notée* $y_{B,g}$ *telle que :*

$$L_\ell(y_{B,g}) = \inf_{u \in F_{B,g}} L_\ell(u).$$

Preuve (Théorème 3.1). *Comme il existe* $\ell > 0$*, pour tout* $(B, g) \in H(A, f)$*, toute solution non triviale de* (E_B) *satisfait la condition* (1) *par hypothèse ; du lemme 3.5, 3.6 on a l'existence d'une solution* $y_{B,g}$ *de* $(E_{B,g})$ *telle que :*

$$L_\ell(y_{B,g}) = \inf_{u \in F_{B,g}} L_\ell(u).$$

Il reste à démontrer la presque périodicité de la solution $y_{B,g}$*.*

On a A *et* f *sont presque périodiques et* $(B, g) \in H(A, f)$ *; du lemme 3.1 on déduit que* B *et* g *sont presque périodiques aussi donc elles vérifient* ***le critére de suite double de Bochner*** *: de toute suite* $\{\alpha'_n\}$*,* $\{\beta'_n\} \subset \mathbb{R}$ *, on peut extraire deux sous-suites de mêmes indices* $\{\alpha_n\} \subset \{\alpha'_n\}$ *et* $\{\beta_n\} \subset \{\beta'_n\}$ *telles que pour chaque* $t \in I \subset \mathbb{R}$*,*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} B(\alpha_n + \beta_m + t) = \lim_{n\to\infty} B(\alpha_n + \beta_n + t).$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} g(\alpha_n+\beta_m+t) = \lim_{n\to\infty} g(\alpha_n+\beta_n+t).$$

avec ces limites qui existent uniformément. Alors,

$$B(t+\alpha_n) \stackrel{converge}{\rightarrow} D \in H(A)$$

et

$$g(t+\alpha_n) \stackrel{converge}{\rightarrow} h \in H(f)$$

Donc

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} B(t+\alpha_n+\beta_m) = \lim_{m\to\infty} D(t+\beta_m)$$

et

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} g(t+\alpha_n+\beta_m) = \lim_{m\to\infty} h(t+\beta_m)$$

Ce qui veut dire que,

$$B(t+\alpha_n+\beta_n) \stackrel{converge}{\rightarrow} N \in H(A) \stackrel{converge}{\leftarrow} D(t+\beta_n)$$

et

$$g(t+\alpha_n+\beta_n) \stackrel{converge}{\rightarrow} e \in H(f) \stackrel{converge}{\leftarrow} h(t+\beta_n)$$

Comme $(B,g),(D,h) \in H(A,f)$ *on a alors* $(D,h) \in H(B,g)$ *; du lemme 3.2, il existe une suite* $\{\alpha_n\}$ *et une solution* $y_{D,\,h}$ *de l'équation* $(E_{D,h})$ *telles que* $y_{D,\,h} \in F_{D,\,h}$ *et* $y_{B,\,g}(t+\alpha_n) \stackrel{converge}{\rightarrow} y_{D,\,h}(t)$ *simplement dans* $\mathbb{R}$*. De la même maniére, on aura l'existence de deux solutions* $y_{N,\,e}$ *et* $z_{N,\,e}$ *de l'équation* $(E_{N,e})$ *avec* $y_{N,\,e}$ *et* $z_{N,\,e} \in F_{N,e}$ *telles que*

$$y_{D,\,h}(t+\beta_n) \stackrel{converge}{\rightarrow} y_{N,\,e}(t)$$

$$y_{B,\,g}(t+\alpha_n+\beta_n) \stackrel{converge}{\rightarrow} z_{N,\,e}(t).$$

Du lemme 3.3, on aura :

$$L_\ell(y_{D,\,h}) \leq L_\ell(y_{B,\,g}) \qquad (i)$$

$$L_\ell(y_{N,\,e}) \leq L_\ell(y_{D,\,h}) \qquad (ii)$$

$$L_\ell(z_{N,\,e}) \leq L_\ell(y_{B,\,g}) \qquad (iii)$$

Or du lemme 3.6, on a

$$L_\ell(y_{B,g}) = \inf_{u\in F_{B,g}} L_\ell(u)$$

de (i)

$$\inf_{u\in F_{D,h}} L_\ell(u) \leq L_\ell(y_{D,h}) \leq \inf_{u\in F_{B,g}} L_\ell(u)$$

et comme $(B,g),(D,h) \in H(A,f)$ du lemme 3.5

$$\inf_{u\in F_{D,h}} L_\ell(u) = \inf_{u\in F_{B,g}} L_\ell(u)$$

donc,

$$L_\ell(y_{D,h}) = \inf_{u\in F_{D,h}} L_\ell(u)$$

En suivant le même raisonnement, de (ii) et (iii) on trouve :

$$L_\ell(y_{N,e}) = \inf_{u\in F_{N,e}} L_\ell(u)$$

et

$$L_\ell(z_{N,e}) = \inf_{u\in F_{N,e}} L_\ell(u)$$

Alors,

$$L_\ell(y_{N,e}) = L_\ell(z_{N,e})$$

D'où

$$y_{N,e} = z_{N,e}.$$

autrement dit :

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} y_{B,g}(\alpha_n+\beta_m+t) = \lim_{n\to\infty} y_{B,g}(\alpha_n+\beta_n+t)$$

Ce qui veut dire que la solution $y_{B,g}$ vérifie ***le critère de suite double de Bochner****, donc elle est presque périodique dans $\mathbb{R}$.*

3.2 Cas simple

Dans cette section, on s'intéresse à l'équation différentielle du premier ordre

$$\dot{x} = a(t)x + f(t). \tag{$E_{a,f}$}$$

avec $a(.)$ et $f(.)$ sont deux fonctions définies dans $\mathbb{R}$.
Dans ce qui suit, on suppose que a et f sont presque périodiques.
On va annoncer le premier théorème sans démonstration :

Théorème 3.2. *Soit l'équation*

$$\dot{x} = a(t)x + f(t) \tag{$E_{a,f}$}$$

avec a et f sont deux fonctions réelles.
Supposons que l'équation $(E_{a,f})$ admet une solution bornée.
Si $\exists \ell > 0$ tel que pour tout $b \in H(a)$, on a :

$$\inf_{t\in\mathbb{R}}\Big(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}\big(\exp\big(\int_0^s b(u)\,\mathrm{d}u\big)\big)\,\mathrm{d}s\Big) > 0,$$

Alors, $(E_{b,g})$ admet une solution presque périodique dans $\mathbb{R}$.

Avant d'annoncer le deuxiéme théorème,on définit d'abord le résultat suivant :

La condition intégrale :

On dit que a et f vérifient la condition intégrale, si elles vérifient ces deux conditions :

1. Pour tout $b \in H(a)$, il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\limsup_{\ell\to\infty}(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}(\exp{(2\int_0^s (b(u))\,\mathrm{d}u)\,\mathrm{d}s)}) \leq M.$$

2. Soient $(b, g) \in H(a, f)$ et $(d, h) \in H(b, g)$.
   Soient $u(t)$ et $v(t)$ solutions de $(E_{b,g})$ et $(E_{d,h})$ respectivement.
   Si u(t) est bornée dans $\mathbb{R}$, pour toute suite $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$, $u(t+\alpha_n) \underset{n\to\infty}{\to} v(t)$ pout $t \in \mathbb{R}$, alors : $\forall\, t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty}(\limsup_{\ell\to\infty}(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u(s+\alpha_n) - v(s)|^2\,\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}) = 0.$$

Théorème 3.3. *Soient a et f deux fonctions satisfont la condition intégrale. Supposons que pour tout $b \in H(a)$, la condition*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}}(\liminf_{\ell\to\infty}(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}(\exp\int_{t_0}^{t_0+s} b(u)\,\mathrm{d}u)\,\mathrm{d}s)) > 0,$$

est vérifiée.(avec t_0 fixé arbitrairement)
Si $(E_{a,f})$ admet une solution bornée, alors : pour tout $(b, g) \in H(a, f)$, $(E_{b,g})$ admet une solution presque périodique dans $\mathbb{R}$.

Pour démontrer ce théorème, on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 3.7. *(Voir [20]) Soient a et f satisfont la condition intégrale, $(b, g) \in H(a, f)$ et $\{v_n\} \subset F_{b,g}$. Alors, il existe une sous suite notée $\{v_n(t)\}$ et une solution $v(t)$ de $(E_{b,g})$ telles que $\{v(t)\} \in F_{b,g}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n\to\infty}(\limsup_{\ell\to\infty}(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|v_n(s) - v(s)|^2\,\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}) = 0.$$

Preuve. *Soient a et f satisfont la condition intégrale et $(b, g) \in H(a, f)$.*
Soit $\{v_n\} \subset \mathcal{F}_{b,g}$. Comme $\mathcal{F}_{b,g}$ est un compact, il existe une sous suite, notée $\{v_n\} \subseteq \mathcal{F}_{b,g}$, telle que

$$v_n(t) \to v(t) \subseteq \mathcal{F}_{b,g} \qquad \textit{simplement} \qquad \textit{quand } n \to \infty$$

et comme v_n et v satisfont l'équation $(E_{b,g})$,

$$\dot{v}_n(t) - \dot{v}(t) = b(t)(v_n(t) - v(t)),$$

alors,

$$v_n(t) - v(t) = (v_n(0) - v(0))\exp{(\int_0^t b(s)\,\mathrm{d}s)}$$

donc,

$$|v_n(t) - v(t)|^2 = (v_n(0) - v(0))^2 \exp\big(2\int_0^t b(s)\,\mathrm{d}s\big)$$

Puisque les hypothèses de la condition intégrale sont vérifiées, de la 1ère condition, on aura : l'existence d'un réel $M > 0$ tel que

$$\limsup_{\ell\to\infty}\Big(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}\big(\exp\big(2\int_0^s (b(u))\,\mathrm{d}u\big)\,\mathrm{d}s\big)\Big) \le M.$$

donc,

$$(v_n(0) - v(0))^2 \limsup_{\ell\to\infty}\Big(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}\big(\exp\big(2\int_0^s (b(u))\,\mathrm{d}u\big)\,\mathrm{d}s\big)\Big)^{\frac{1}{2}} \le N(v_n(0) - v(0))^2,$$

avec N un réel positif.
Alors,

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\limsup_{\ell\to\infty}\Big(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|v_n(s) - v(s)|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\Big) \le N(v_n - v(0))^2 = 0.$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\limsup_{\ell\to\infty}\Big(\tfrac{1}{2\ell}\textstyle\int_{t-\ell}^{t+\ell}|v_n(s) - v(s)|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\Big) = 0 \qquad \textit{pour tout} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Lemme 3.8. *(Voir [20]) Soient a et f satisfont la condition intégrale et $(b, g) \in H(a, f)$. Si $u(t)$ est une solution bornée de $(E_{a,f})$, alors il existe une solution bornée $v(t)$ de $(E_{b,g})$ telle que :*

$$L(v) \le L(u).$$

avec

$$L(u) = \sup_{t\in\mathbb{R}}\Big(\limsup_{\ell\to\infty}\Big(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u(s)|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\Big).$$

Preuve. *On a $u(t)$ est une solution bornée de $E_{a,f}$ et $(b, g) \in H(a, f)$. Du lemme 3.2, il existe une suite $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ et une solution $v(t)$ de $E_{b,g}$ telles que*

$$\lim_{n\to\infty} u(t + \alpha_n) = v(t) \qquad \textit{simplement sur } \mathbb{R}.$$

Comme a et f satisfont la condition intégrale, de la condition 2, on a : $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\limsup_{\ell\to\infty}\Big(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u(s + \alpha_n) - v(s)|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\Big) = 0.$$

En utilisant l'inégalité de Minkovskii, on aura :

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|v(s)|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}} &= \Big(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u(s + \alpha_n) - u(s + \alpha_n) + v(s)|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \Big(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u(s+\alpha_n)|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u(s+\alpha_n) - v(s)|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

alors,

$$\limsup_{\ell\to\infty}(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|v(s)|^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}} \leq \limsup_{\ell\to\infty}(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u(s+\alpha_n)|^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}+\limsup_{\ell\to\infty}(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u(s+\alpha_n)-v(s)|^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sup_{t\in\mathbb{R}}(\limsup_{\ell\to\infty}(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u(s)|^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}})+\limsup_{\ell\to\infty}(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u(s+\alpha_n)-v(s)|^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}$$

quad $n \to \infty$, on aura

$$\limsup_{\ell\to\infty}(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|v(s)|^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}} \leq \sup_{t\in\mathbb{R}}(\limsup_{\ell\to\infty}(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u(s)|^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}) = L(u)$$

d'où

$$L(v) \leq L(u).$$

Lemme 3.9. *(Voir [20]) Soient a et f satisfont la condition intégrale.*
Pour tout $(b,g) \in H(a,f)$, il existe $u_0 \in F_{b,g}$ telle que :

$$L(u_0) = \inf_{u\in F_{b,g}} L(u).$$

Preuve. *Comme $F_{b,g}$ est un compact pour la topologie de la convergence simple, $F_{b,g}$ est un fermé pour la topologie de la convergence uniforme sur un ensemble compact.*
On définit λ par :

$$\lambda = \inf_{u\in\mathcal{F}_{b,g}} L(u),$$

et

$$\lambda_n = \inf_{u\in\mathcal{F}_{b,g}}(\sup_{|t|\leq n}(\limsup_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u(s)|^2\ \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}),$$

alors, $\lambda_n \leq \lambda$ et $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \lambda$.
Par définition de l'inf, soit $u_n \in \mathcal{F}_{b,g}$ telle que :

$$\sup_{|t|\leq n}(\limsup_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u_n|^2\ \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda_n + \frac{1}{n},$$

de lemme 3.7, il existe une sous suite notée $\{u_n\} \subset \mathcal{F}_{b,g}$ et une solution $u_0 \in \mathcal{F}_{b,g}$ telles que : pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}(\limsup_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u_n(s)-u_0(s)|^2\ \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Fixons $t \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n > 0$ tel que $|t| < n$.
En utilisant l'inégalité de Minkovskii :

$$(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u_0(s)|^2\ \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}} \leq (\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u_0(s)-u_n(s)|^2\ \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}} + (\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u_n(s)|^2\ \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}},$$

alors,

$$\limsup_{\ell\to\infty}(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u_0(s)|^2\ \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}} \leq \limsup_{\ell\to\infty}(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u_0(s)-u_n(s)|^2\ \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}+\limsup_{\ell\to\infty}(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u_n(s)|^2\ \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}},$$

$$\leq \limsup_{\ell\to\infty}(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u_0(s)-u_n(s)|^2\ \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}+\sup_{|t|\leq n}(\limsup_{\ell\to\infty}(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u_n(s)|^2\ \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}),$$

$$\leq \limsup_{\ell\to\infty}(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u_0(s)-u_n(s)|^2\ \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}+\lambda_n+\frac{1}{n}.$$

Quand $n\to\infty$, on a pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$\limsup_{\ell\to\infty}(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u_0(s)|^2\ \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}\leq\lambda,$$

alors,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}(\limsup_{\ell\to\infty}(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|u_0(s)|^2\ \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}})=L(u_0)\leq\lambda.$$

Comme $u_0\in\mathcal{F}_{b,g}$ et de la définition de λ, on aura

$$L(u_0)=\lambda=\inf_{u\in\mathcal{F}_{b,g}}L(u).$$

Lemme 3.10. *(Voir [20]) Soient a et f satisfont la condition intégrale.*
Pour tout (b,g),$(d,h)\in H(a,f)$, on a

$$\inf_{u\in F_{b,g}}L(u)=\inf_{u\in F_{d,h}}L(u).$$

Preuve. *On a a et f satisfont la condition intégrale.*
Soient $(b,g),(d,h)\in H(a,f)$, du lemme 3.9, il existe $u_{b,g}\in\mathcal{F}_{b,g}$ et $u_{d,h}\in\mathcal{F}_{d,h}$, telles que

$$L(u_{b,g})=\inf_{u\in\mathcal{F}_{b,g}}L(u)\quad\text{ et }\quad L(u_{d,h})=\inf_{u\in\mathcal{F}_{d,h}}L(u).$$

On veut démontrer que $L(u_{b,g})=L(u_{d,h})$.
*Comme $(b,g),(d,h)\in H(a,f)$, du Théorème 1.1 on a $(d,h)\in H(b,g)$; du **lemme 3.2**, il existe une suite $\{\alpha_n\}\subset\mathbb{R}$ et une solution $\tilde{u}_{d,h}$ de $E_{d,h}$ telles que*

$$\lim_{n\to\infty}u_{b,g}(t+\alpha_n)=\tilde{u}_{d,h}(t)\quad\text{ sur }\mathbb{R}$$

du lemme 3.8, on a

$$L(\tilde{u}_{d,h})\leq L(u_{b,g}),$$

et comme $L(u_{d,h})=\inf_{u\in\mathcal{F}_{d,h}}L(u)$, alors

$$L(u_{d,h})\leq L(u_{b,g}).$$

En suivant le même raisonnement pour $(b,g)\in H(d,h)$, on aura

$$L(u_{b,g})\leq L(u_{d,h}).$$

D'où

$$L(u_{b,g})=L(u_{d,h}).$$

Lemme 3.11. *(Voir [20]) Soient a et f satisfont la condition intégrale.*
Si $(b,g) \in H(a,f)$ tel que, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\inf_{t\in\mathbb{R}}(\liminf_{\ell\to\infty}(\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}(\exp\int_{t_0}^{t_0+s} b(u)\,\mathrm{d}u)\,\mathrm{d}s)) > 0,$$

alors, il existe une unique solution $v_{b,g}$ de $(E_{b,g})$ telle que :

$$L(v_{b,g}) = \inf_{u\in F_{b,g}} L(u).$$

Preuve. *On a $(b,g) \in H(a,f)$, du lemme 3.4, il existe $v_{b,g} \in \mathcal{F}_{b,g}$ telle que :*

$$L(v_{b,g}) = \inf_{u\in\mathcal{F}_{b,g}} L(u).$$

Reste à démontrer que $v_{b,g}$ est unique.
Procédant par absurde.
Supposons le contraire i.e.Supposons qu'il existe deux solutions différentes $u_{b,g}$ et $v_{b,g}$ de $E_{b,g}$ telles que

$$L(u_{b,g}) = L(v_{b,g}) = \inf_{u\in\mathcal{F}_{b,g}} L(u).$$

Posons

$$w = \tfrac{1}{2}(u_{b,g} + v_{b,g}) \qquad et \qquad y = \tfrac{1}{2}(u_{b,g} - v_{b,g}),$$

alors,
on a w est une solution de $E_{b,g}$, $w \in \mathcal{F}_{b,g}$ et y est une solution de E_b avec $y(t) \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$.
On définit

$$\delta = \inf_{t\in\mathbb{R}}(\liminf_{\ell\to\infty}\tfrac{1}{2\ell}\textstyle\int_{t-\ell}^{t+\ell}|y(s)|\,\mathrm{d}s) \qquad et \qquad \lambda = \inf_{u\in\mathcal{F}_{b,g}} L(u).$$

Comme y est une solution non triviale de E_b, on a par hypothèse $\delta > 0$.
En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, on aura

$$\delta = \inf_{t\in\mathbb{R}}(\liminf_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|y(s)|\,\mathrm{d}s) \le \inf_{t\in\mathbb{R}}(\liminf_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|y(s)|^2\,\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}},$$

alors,

$$\inf_{t\in\mathbb{R}}(\liminf_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|y(s)|^2\,\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}} \ge \delta > 0.$$

On a

$$(\limsup_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|w(s)|^2\,\mathrm{d}s) + (\limsup_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|y(s)|^2\,\mathrm{d}s)$$

$$= (\limsup_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}\frac{1}{2}|u_{b,g}(s)|^2\,\mathrm{d}s) + (\limsup_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}\frac{1}{2}|v_{b,g}(s)|^2\,\mathrm{d}s)$$

$$\le \sup_{t\in\mathbb{R}}(\limsup_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}\frac{1}{2}|u_{b,g}(s)|^2\,\mathrm{d}s) + \sup_{t\in\mathbb{R}}(\limsup_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}\frac{1}{2}|v_{b,g}(s)|^2\,\mathrm{d}s) = \frac{1}{2}L(u_{b,g}) + \frac{1}{2}L(v_{b,g})$$

alors,

$$
\begin{aligned}
(\limsup_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|w(s)|^2\ \mathrm{d}s) &\leq \frac{1}{2}L(u_{b,g})+\frac{1}{2}L(v_{b,g})-(\limsup_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|y(s)|^2\ \mathrm{d}s) \\
&\leq \tfrac{1}{2}L(u_{b,g})+\tfrac{1}{2}L(v_{b,g})-(\liminf_{\ell\to\infty}\tfrac{1}{2\ell}\textstyle\int_{t-\ell}^{t+\ell}|y(s)|^2\ \mathrm{d}s) \\
&\leq \frac{1}{2}L(u_{b,g})+\frac{1}{2}L(v_{b,g})-(\liminf_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|y(s)|^2\ \mathrm{d}s) \\
&\leq \frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda^2-\delta^2
\end{aligned}
$$

alors,

$$(\limsup_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|w(s)|^2\ \mathrm{d}s) < \lambda^2$$

donc,

$$L^2(w)=\sup_{t\in\mathbb{R}}(\limsup_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\int_{t-\ell}^{t+\ell}|w(s)|^2\ \mathrm{d}s) < \lambda^2$$

alors,

$$L(w) < \lambda.$$

Contradiction (car $\lambda = \inf\limits_{u\in\mathcal{F}_{b,g}} L(u)$*).*
D'où l'unicité de la solution.

Preuve (Théorème 3.3). *Du lemme 3.10 et lemme 3.11, on a l'existence d'une unique solution* $v_{b,g}$ *de* $(E_{b,g})$ *telle que :*

$$L(v_{b,g}) = \inf_{u\in F_{b,g}} L(u).$$

Il reste à démontrer la presque périodicité de la solution $v_{b,g}$.
On a a *et* f *sont presque périodiques et* $(b,g)\in H(a,f)$ *; du lemme 3.1 on déduit que* b *et* g *sont presque périodiques aussi donc elles vérifient* ***le critére de suite double de Bochner*** *: de toute suite* $\{\alpha'_n\}$, $\{\beta'_n\}\subset\mathbb{R}$ *, on peut extraire deux sous-suites de mêmes indices* $\{\alpha_n\}\subset\{\alpha'_n\}$ *et* $\{\beta_n\}\subset\{\beta'_n\}$ *telles que pour chaque* $t\in I\subset\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} b(\alpha_n+\beta_m+t) = \lim_{n\to\infty} b(\alpha_n+\beta_n+t).$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} g(\alpha_n+\beta_m+t) = \lim_{n\to\infty} g(\alpha_n+\beta_n+t).$$

avec ces limites qui existent uniformément.

Alors,

$$b(t+\alpha_n) \overset{converge}{\rightarrow} d \in H(a)$$

et

$$g(t+\alpha_n) \overset{converge}{\rightarrow} h \in H(f)$$

Donc

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} b(t+\alpha_n+\beta_m) = \lim_{m\to\infty} d(t+\beta_m)$$

et

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} g(t+\alpha_n+\beta_m) = \lim_{m\to\infty} h(t+\beta_m)$$

Ce qui veut dire que,

$$b(t+\alpha_n+\beta_n) \overset{converge}{\rightarrow} e \in H(a) \overset{converge}{\leftarrow} d(t+\beta_n)$$

et

$$g(t+\alpha_n+\beta_n) \overset{converge}{\rightarrow} k \in H(f) \overset{converge}{\leftarrow} h(t+\beta_n)$$

Comme $(b,g),(d,h) \in H(a,f)$*, on a alors :* $(d,h) \in H(b,g)$ *; du lemme 3.2, il existe une suite* $\{\alpha_n\}$ *et une solution* $v_{d,\,h}$ *de l'équation* $(E_{d,h})$ *telles que* $v_{d,\,h} \in F_{d,\,h}$ *et* $v_{b,\,g}(t+\alpha_n) \overset{converge}{\rightarrow} v_{d,\,h}(t)$ *simplement dans* $\mathbb{R}$*. De la même maniére, on aura l'existance de deux solutions* $v_{k,\,e}$ *et* $w_{k,\,e}$ *de l'équation* $(E_{k,e})$ *avec* $v_{k,\,e}$ *et* $w_{k,\,e} \in F_{k,e}$ *telles que*

$$v_{d,\,h}(t+\beta_n) \overset{converge}{\rightarrow} v_{k,\,e}(t)$$

$$v_{b,\,g}(t+\alpha_n+\beta_n) \overset{converge}{\rightarrow} w_{k,\,e}(t).$$

Comme (b,g)*,*(d,h) *et* $(k,e) \in H(a,f)$*, on a alors* $(d,h) \in H(b,g)$ *,* $(k,e) \in H(d,h)$ *et* $(k,e) \in H(b,g)$*. Du lemme 3.8, on aura :*

$$L(v_{d,\,h}) \leq L(v_{b,\,g}) \qquad (i)$$

$$L(v_{k,\,e}) \leq L(v_{d,\,h}) \qquad (ii)$$

$$L(w_{k,\,e}) \leq L(v_{b,\,g}) \qquad (iii)$$

Or on a

$$L(v_{b,g}) = \inf_{u\in F_{b,g}} L(u)$$

de (i)

$$\inf_{u\in F_{d,h}} L(u) \leq L(v_{d,h}) \leq \inf_{u\in F_{b,g}} L(u)$$

et comme $(b,g),(d,h) \in H(a,f)$ *du lemme 3.10*

$$\inf_{u\in F_{d,h}} L(u) = \inf_{u\in F_{b,g}} L(u)$$

donc,

$$L(v_{d,h}) = \inf_{u \in F_{d,h}} L(u)$$

En suivant le même raisonnement, de (ii) et (iii) on trouve :

$$L(v_{k,e}) = \inf_{u \in F_{k,e}} L(u)$$

et

$$L(w_{k,e}) = \inf_{u \in F_{k,e}} L(u)$$

Alors,

$$L(v_{k,e}) = L(w_{k,e})$$

D'où

$$v_{k,e} = w_{k,e}.$$

autrement dit :

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} v_{b,g}(\alpha_n + \beta_m + t) = \lim_{n\to\infty} v_{b,g}(\alpha_n + \beta_n + t)$$

Ce qui veut dire que la solution $v_{b,g}$ vérifie ***le critère de suite double de Bochner*** *et d'aprés Bochner, la solution $v_{b,g}$ est presque périodique dans $\mathbb{R}$.*

3.3 Exemple d'application

On construit un exemple où on a l'existence d'une solution presque périodique dont la condition $(*)$ de Favard n'est pas vérifiée mais la condition clé du *Théorème 3.3* est vérifiée.

Considérons l'équation différentielle linéaire du premier ordre $(E_{a,f})$ où $a,f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions presque périodiques.
Soit $x(t,\tau,x_0)$ une solution de l'équation $(E_{a,f})$, pour tout $\tau, x_0 \in \mathbb{R}$.
Pour tout $b \in H(a)$ et $g \in H(f)$, il existe une solution $y(t,\tau,y_0)$ de $(E_{b,g})$.
Supposons que la fonction $a(t)$ satisfait les trois conditions suivantes :

1. $a(t)$ est presque périodique dans $\mathbb{R}$,
2. $\int_0^t a(s)\, \mathrm{d}s < 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$,
3. Il existe une suite $\{t_n\}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{t_n} a(s)\, \mathrm{d}s = -\infty$.

Considérons l'équation différentielle spéciale $(E_{a,-a})$

$$\dot{x} = a(t)(x-1),$$

c'est clair que cette équation admet une solution presque périodique $x(t) \equiv 1$, mais l'équation

$$\dot{x} = a(t)(x) \tag{E_a}$$

ne satisfait pas la condition $(*)$ de Favard. En effet, de la 2ème condition posée sur $a(t)$, la solution $x(t) = \exp \int_0^t a(s)\, \mathrm{d}s$ de (E_a) est bornée , mais de la 3ème, on a $\inf_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| = 0$.

Néanmoins, nous allons démontrer que ce système satisfait la condition du *Théorème 3.3* pour une fonction spéciale a(t).

Pour que la condition du *Théorème 3.3* soit vérifiée, nous allons construire a(t) comme suit :

$$g_1(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}t, & t \in [0,2]\,; \\ t-3, & t \in [2,3]. \end{cases}$$

$$g_2(t) = \begin{cases} -\frac{1}{3^2-2^1}\frac{2}{2^1}t, & t \in [0, 3^2-2^1]\,; \\ \frac{2-1}{2^{2-1}}t - \frac{1}{2^{2-1}}((2-1)(3^2-2^{2-1})+2), & t \in [3^2-2^1, 3^2-2^1+1]\,; \\ -\frac{1}{2^{2-1}}, & t = 8\,; \\ \frac{1}{2^{2-1}}t - \frac{3^2}{2^{2-1}}, & t \in [3^2-1, 3^2]. \end{cases}$$

$$g_n(t) = \begin{cases} -\frac{1}{3^n-2^{n-1}}\frac{n}{2^{n-1}}t, & t \in [0, 3^n-2^{n-1}]\,; \\ \frac{n-1}{2^{n-1}}t - \frac{1}{2^{n-1}}((n-1)(3^n-2^{n-1})+n), & t \in [3^n-2^{n-1}, 3^n-2^{n-1}+1]\,; \\ -\frac{1}{2^{n-1}}, & t \in [3^n-2^{n-1}+1, 3^n-1]\,; \\ \frac{1}{2^{n-1}}t - \frac{3^n}{2^{n-1}}, & t \in [3^n-1, 3^n]. \end{cases}$$

On prolonge $g_n(t)$ pour qu'elle soit impaire et périodique de période 2×3^n. Alors, $g_n(t)$ satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{gathered} \int_0^t g_n(s)\, \mathrm{d}s \leq 0\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}; \\ \sup_{t\in\mathbb{R}} |g_n(t)| = \frac{n}{2^{n-1}}; \\ \int_0^t g_n(s)\, \mathrm{d}s \geq -\frac{1}{n}; \\ \forall t \notin [k.2.3^n - 2^{n-1}, k.2.3^n + 2^{n-1}] \quad pour \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \end{gathered} \tag{3.2}$$

et

$$\int_0^{3^n} g_n(s)\, \mathrm{d}s \leq -1,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Posons $a_n(t) = \frac{1}{n}g_n(t)$, il est clair que $a_n(t)$ est périodique et continue donc elle est presque périodique et de (3.2) on a $|a_n(t)| = |\frac{1}{n}g_n(t)| \leq |\frac{1}{2^{n-1}}|$.

Comme $\sum |a_n(t)| < \infty$, alors on peut poser $a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)$ donc $a(t)$ est presque périodique.

Démontrons que

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} (\liminf_{\ell\to\infty} (\frac{1}{2\ell} \int_{t-\ell}^{t+\ell} |x(s)|\, \mathrm{d}s)) > 0,$$

avec $x(t) = x_0 \exp \int_0^s a(s)\, \mathrm{d}s$ solution de (E_a).

Posons

$$A(t) = \int_0^t a(s)\, \mathrm{d}s = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)\, \mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t a_n(s)\, \mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^t g_n(s)\, \mathrm{d}s \leq 0,$$

et pour n fixé

$$J_n = \mathbb{R} \backslash \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [3^n + k.2.3^n - 2^{n-1}, 3^n + k.2.3^n + 2^{n-1}].$$

Alors, pour tout $\ell > 0$, il existe un J_n tel que la longueur de $J_n \cap [-\ell, \ell] \geq \ell$. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on peut prendre un $\ell > 0$ telle que la longueur de $J_n \cap [t-\ell, t+\ell] \geq \ell$. Notons par $\lambda(J_n \cap [t-\ell, t+\ell])$ la longueur de $J_n \cap [t-\ell, t+\ell]$ avec λ est la mesure de Lesbegue. Alors, comme $\int_0^t g_n(s)\, \mathrm{d}s \geq -\frac{1}{n}$,

$$\frac{1}{2\ell} \int_{t-\ell}^{t+\ell} \exp A(s) \mathrm{d}s \geq \frac{1}{2\ell} \int_{J_n \cap [t-\ell, t+\ell]} \exp A(s) \mathrm{d}s \geq \frac{\lambda(J_n \cap [t-\ell, t+\ell])}{2\ell} \exp(-\sum \frac{1}{n^2})$$

$$\geq \tfrac{1}{2} \exp(-\sum \tfrac{1}{n^2}) = \tfrac{1}{2} \exp -\delta.$$

On aura alors, $\frac{1}{2\ell} \int_{t-\ell}^{t+\ell} |x_0 \exp A(s)| \mathrm{d}s \geq \frac{|x_0|}{2} \exp -\delta$,
d'où

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} (\liminf_{\ell \to \infty} (\frac{1}{2\ell} \int_{t-\ell}^{t+\ell} |x(s)|\, \mathrm{d}s)) \geq \frac{|x_0|}{2} \exp -\delta > 0, \tag{3.3}$$

et comme $b \in H(a)$(en utilisant le lemme 3.2), la solution $y(t)$ de (E_b) satisfait (3.3).

$(E_{(a,-a)})$ vérifie la condition intégrale. Autrement dit, a et $-a$ satisfont deux conditions.En effet :

1. On a $\int_0^t a(s) \mathrm{d}s \leq 0$ et $b \in H(a)$, donc $\int_0^t b(s) \mathrm{d}s \leq 0$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

   $$\limsup_{l \to \infty} (\frac{1}{2\ell} \int_{t-\ell}^{t+\ell} \exp(2 \int_0^s b(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda)\, \mathrm{d}s) \leq \limsup_{l \to \infty} (\frac{1}{2\ell} \int_{t-\ell}^{t+\ell} \exp 0\, \mathrm{d}s) = 1.$$

   d'où la 1ère condition.

2. Soient $u(t)$ et $v(t)$ deux solutions de $(E_{(a,-a)})$ et $(E_{(b,-b)})$ respectivement avec $b \in H(a)$, donc il existe une suite $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ telle que $a(t+\alpha_n) \to b(t)$ uniformément, du lemme 3.2, on aura $u(t+\alpha_n) \to v(t)$ simplement quand $n \to \infty$ i.e pour un $\epsilon > 0$, $|u(t+\alpha_n) - v(t)| \leq \epsilon$;

   $$(\limsup_{\ell \to \infty} \frac{1}{2\ell} \int_{t-\ell}^{t+\ell} |u(s+\alpha_n) - v(s)|^2\, \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon,$$

   alors,

   $$\inf_{t \in \mathbb{R}} (\limsup_{\ell \to \infty} \frac{1}{2\ell} \int_{t-\ell}^{t+\ell} |u(s+\alpha_n) - v(s)|^2\, \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

   d'où la 2ème condition.

Perspective

1. Généraliser la condition de séparation de Favard au cas des équations différentielles non linéaires ([16] pages :8125-8129).
2. Etudier la presque périodicité infini-dimensionnelle des solutions d'équations différentielles stochastiques linéaires et non linéaires.
3. Généraliser les conditions de *Mingarrelli* et *Hu*(voir l'article [20]), au cas non linéaire déterministe et au cas d'equations différentielles stochastiques linéaires et non linéaires.

Il nous semble que les deux derniers problèmes ne sont pas encore traités.

Bibliographie

[1] Harald Bohr. Zur theorie der fastperiodischen funktionen. *Acta Mathematica*, 46(1-2) :101–214, 1925.

[2] Salomon Bochner. Abstrakte fastperiodische funktionen. *Acta Mathematica*, 61(1) :149–184, 1933.

[3] Luigi Amerio and Giovanni Prouse. *Almost-periodic functions and functional equations.* Springer Science & Business Media, 2013.

[4] C Corduneanu. Almost periodic functions, volume 22 of interscience tracts in pure and aplied mathematics, 1968.

[5] Arlington M Fink. *Almost periodic differential equations*, volume 377. Springer, 2006.

[6] Boris Moiseevich Levitan and Vasilii Vasilévich Zhikov. *Almost periodic functions and differential equations.* CUP Archive, 1982.

[7] Samuel Zaidman. *Almost-periodic functions in abstract spaces*, volume 126. Pitman Advanced Pub. Program, 1985.

[8] Jean Favard and Gaston Julia. *Leçons sur les fonctions presque-périodiques.* Gauthier-Villars Paris, 1933.

[9] T Morozan and C Tudor. Almost periodic solutions of affine itô equations. *Stochastic Analysis and Applications*, 7(4) :451–474, 1989.

[10] J.L. Massera, , J. 17 (1950) . The existence of periodic solutions of systems of differential equations. *Duke Math*, 17(4) :457–475., 1950.

[11] O. Neugebauer H. Bohr,. Über lineare differentialgleichungen mit konstanten koeffizienten und fastperiodischer rechter seite. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl.*, pages 8–22., 1926.

[12] M. Tarallo R. Ortega,. Almost periodic linear differential equations with non-separated solutions. *J. Funct. Anal.*, 237 :402–426., 1950.

[13] R.A. Johnson. A linear almost periodic equation with an almost automorphic solution. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 82 :199–205., 1981.

[14] J. Favard. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients presque-périodiques. *Acta Math.*, 51 :31–81., 1927.

[15] L. Amerio. Soluzioni quasi-periodiche, o limitate, di sistemi differenzali non lineari quasi-periodiche, o limitati. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 39 :97–119., 1955.

[16] Zhenxin Liu and Wenhe Wang. Favard separation method for almost periodic stochastic differential equations. *Journal of Differential Equations*, 260(11) :8109–8136, 2016.

[17] A Halanay. Periodic and almost periodic solutions to affine stochastic systems. In *Proceedings of the Eleventh International Conference on Nonlinear Oscillations (Budapest, 1987)*, pages 94–101. János Bolyai Math. Soc. Budapest, 1987.

[18] Ludwig Arnold and Constantin Tudor. Stationary and almost periodic solutions of almost periodic affine stochastic differential equations. *Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 64(3-4) :177–193, 1998.

[19] G Da Prato and Constantin Tudor. Periodic and almost periodic solutions for semilinear stochastic equations. *Stochastic Analysis and Applications*, 13(1) :13–33, 1995.

[20] Zuosheng Hu and Angelo Mingarelli. On a theorem of favard. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 132(2) :417–428, 2004.

[21] Harald Bohr. Almost periodic functions. 1951.

[22] Salomon Bochner. A new approach to almost periodicity. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 48(12) :2039–2043, 1962.

[23] Taro Yoshizawa. *Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions*, volume 14. Springer Science & Business Media, 2012.

[24] Angelo Bernardo Mingarelli, FQ Pu, and Ligang Zheng. A counter-example in the theory of almost periodic differential equations. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, pages 437–440, 1995.

[25] C Tudor. Almost periodic stochastic processes. *Qualitative problems for differential equations and control theory*, pages 289–300, 1995.

[26] Giuseppe Da Prato and Jerzy Zabczyk. *Stochastic equations in infinite dimensions.* Cambridge university press, 2014.

[27] Bernt Øksendal. Stochastic differential equations. In *Stochastic differential equations*, pages 65–84. Springer, 2003.

[28] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer Science & Business Media, 2010.

[29] A.V. Skorohod I.I. Gihman. *Stochastic Differential Equations, translated from the Russian by Kenneth Wickwire.* Gauthier-Villars Paris, 1972.

[30] Hiroshi Kunita. Stochastic differential equations and stochastic flows of diffeomorphisms. In *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XII-1982*, pages 143–303. Springer, 1984.