

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou

Faculté du génie de la construction

Département de Génie Mécanique



Mémoire de fin d'études

En vue d'obtention du diplôme Master en Génie Mécanique.

Option : Construction Mécanique

Application des éléments finis iso-géométriques à l'interaction fluide- structure

Proposé et Dirigé par :

M^r : ASMA.F

Réalisé par :

M^r : SEBKI Smail

Promotion 2010/2011

Remerciements

Nous tenons à exprimer notre profonde reconnaissance, et vive gratitude à monsieur F.Asma, pour avoir proposé, dirigé, suivi constamment le progrès de ce mémoire, et avoir consacré à l'encadrement de notre mémoire un temps et une disponibilité d'esprit considérable, et pour son soutien permanent.

Nous adressons nos remerciements aux fonctionnaires des bibliothèques de génie mécanique et de génie civil, et à toutes les personnes ayant contribué, de près ou de loin, jusqu'à l'aboutissement final de ce modeste travail.

Que messieurs le président et les membres du jury trouvent ici l'expression de notre gratitude pour nous avoir fait l'honneur d'accepter de lire et de juger ce mémoire.

- Remerciements
- Sommaire
- Liste des symboles
- Liste des tableaux
- Liste des figures
- Introduction générale

Chapitre I. Modélisation géométrique : Courbe de BEZIER.

I.1 Introduction.....	(4)
I.2 Notion des courbes de BEZIER.....	(5)
I.2.1 Polynôme de BERSTEIN.....	(6)
a) Propriétés du polynôme de BERSTEIN	(6)
b) Explication simplifier	(7)
c) Détails des calculs.....	(9)
d) Exemple.....	(9)
e) Remarque.....	(10)
f) Propriété de la construction	(10)
G) Cas particulier.....	(13)
I.2.2 Modèle de BEZIER non rationnel	(14)
a) Définition.....	(14)
b) La forme du polynôme de BERSTEIN dans le cas des courbes de BEZIER non rationnelles	(15)
c) Propriétés des courbes de BEZIER non rationnelles	(16)
d) Modification de la forme de la courbe	(18)
Ø Points de définition multiples	(18)
Ø Ajout de points de définition	(19)
Ø Réduction du nombre de points de définition.....	(20)
e) Modification du nombre de sommets du polygone caractéristique sans modifier la forme de la courbe	(20)
Ø Augmentation du nombre de sommets d'un polygone caractéristique	(21)

Ø Réduction du nombre de sommets d'un polygone caractéristique	(22)
I.2.3 Modèle de BEZIER rationnel	(24)
a) Introduction.....	(24)
b) Coordonnées homogènes.....	(24)
I.2.4 Les courbes rationnelles de BEZIER	(26)
a) Propriétés des courbes rationnelles de BEZIER	(26)
b) Présentation des coniques par les courbes de BEZIER.....	(27)
Ø Conclusion.....	(27)

Chapitre II. Modélisation en CAO : manipulation des courbes et surfaces

II.1 Introduction	(29)
II.2 Modélisation des courbes par le modèle de B-spline	(29)
a) Introduction.....	(29)
b) Nœuds et séquences nodale	(30)
c) Ordre de multiplicité	(30)
II.2.1 Équation des fonctions de base.....	(30)
II.2.2 Courbe de b-spline non rationnelle.....	(31)
II.2.3 Vecteur nodale et différents types de B-spline.....	(32)
a) Fonction b-spline uniforme.....	(32)
b) Fonction b-spline non uniforme.....	(33)
c) Forme B-spline périodique	(34)
II.2.4 Propriétés des fonctions de base B-spline.....	(34)
II.2.5 Propriétés des courbes B-spline non rationnelle	(35)
II.3 Courbes B-spline non uniforme rationnelle	(37)
II.3.1 Propriétés des fonctions b-spline non rationnelles	(38)

II.3.2 Propriétés des courbes (NURBS)	(39)
II.4 Modélisation de différentes surfaces	(40)
1) Introduction.....	(40)
2) Surface de BEZIER	(40)
3) Les surfaces rationnelles.....	(41)
4) Les surfaces de BEZIER rationnelles.....	(41)
a) Constructions des surfaces réglées par le modèle de BEZIER rationnel.....	(42)
b) Constructions des surfaces réglées par le modèle de BEZIER non rationnel.....	(43)
5) Surface de B-spline	(43)
c) Constructions des surfaces réglées par le modèle de B-spline rationnel.....	(44)
d) Constructions des surfaces réglées par le modèle de B-spline non rationnel.....	(45)
Ø Conclusion.....	(46)

Chapitre III. Modélisation éléments finis iso-géométriques

III.1 Introduction	(48)
III.2 L'analyse iso-géométrique	(48)
a) Définition	(48)
b) Présentation de la méthode	(49)
III.3 Méthode d'analyse iso-géométrique.....	(53)
1) Insertion des nœuds.....	(53)
2) Comparaison par rapport à la MEF	(56)
III.4 Interaction fluide-structure	(62)
a) Introduction	(62)

b) Approche décalée.....	(62)
c) Approche monolithique.....	(63)
Ø Conclusion.....	(63)

Chapitre IV. Application à l'interaction fluide-structure

IV.1 Présentation de la structure	(65)
IV.2 Détermination des différents paramètres	(66)
IV.3 Insertion des nœuds	(68)
IV.4 Détermination des fonctions NURBS	(69)
IV.5 Maillage éléments finis iso-géométriques	(69)
IV.6 Application de la charge	(71)
IV.7 Interprétation des résultats	(75)
IV.8 Conclusion	(75)

Liste des symboles

$[A]$	Matrice de dimension $n \times m$
J	Le jacobian
$\det(J)$	Déterminant du jacobian
u	Vecteur noeud
t,u,v	paramètres curviligne
ke	Matrice de raideur
$\mathbb{C}$	Matrice caractéristique au comportement élastique du matériau
Ω	Domaine physique
E	Module de Young
$R_{i,n}$	Fonction de base NURBS
$R_{j,m}$	Fonction de base NURBS
$N_{i,n}$	Fonction de base B-spline
$N_{j,m}$	Fonction de base B-spline
v	Vecteur nœuds
$B_{i,n}$	Fonction de BERSTEIN
$[K]$	Matrice de raideur
$S(u,v)$	Surface paramétrique
$C(t)$	Fonction définissant les courbes paramétriques
Ξ	Vecteur nœuds
Γ	Vecteur nœuds
H	Transformation projective
$w_{i,j}$	Poids des nœuds
F	Charges réparties
$C^n(t)$	Continuité d'ordre n
I	Moment d'inertie
$A(u,v)$	Dérivé de la section paramétrique
$E_p^{(e)}$	Energie potentielle élémentaire
$[T]$	Matrice de transfert
$[U^{(e)}]$	Vecteurs et déplacements élémentaires
$[k^{(e)}]$	Matrice de raideur élémentaire
l	Longueur de l'élément
L	Longueur totale de la structure
D	Diamètre

Liste des figures

Figure	Légende	Page
Fig.I.1	Courbe de BEZIER de degré 1 avec 4 points de contrôle	8
Fig.I.2	Courbe de BEZIER de degré 2 avec 3 points de contrôle	10
Fig.I.3	Courbe de BEZIER	12
Fig.I.4	Courbe de BEZIER de degré 4 avec 5 points de contrôle	17
Fig.I.5	Courbe de BEZIER de degré 4 avec 5 points de contrôle	19
Fig.I.6	Courbe de BEZIER de degré 5 avec 6 points de contrôle	19
Fig.I.7	Courbe de BEZIER de degré 3 avec 4 points de contrôle	20
Fig.I.8	Augmentation du nombre de sommets d'un polygone caractéristique sans modifier la forme de la courbe	22
Fig.I.9	Augmentation du nombre de sommets d'un polygone caractéristique sans modifier la forme de la courbe	23
Fig.II.1	Fonction de base B-spline	35
Fig.II.2	Surface de BEZIER rationnel avec sont réseau caractéristique	43
Fig.II.3	Surface de BEZIER non rationnel avec sont réseau caractéristique	43
Fig.II.4	Surface de B-spline rationnel avec sont réseau caractéristique	45
Fig.II.5	Surface de B-spline non rationnel avec sont réseau caractéristique	46
Fig.III.1	Répartition des nœuds dans le domaine paramétrique	50
Fig.III.2	Domaine paramétrique	51
Fig.III.3	Domaine physique	52
Fig.III.4	Distributions d'effort en utilisons l'approche de Von-Mises	52
Fig.III.5	Modèle élément fini	57
Fig.III.6	Modèle isogéométrique	58
Fig.IV.1	Durite d'eau sous pression	65
Fig.IV.2	Figure qui représente le cas d'une géométrie circulaire	67
Fig.IV.3	Répartition des poids dans le cas d'une géométrie circulaire	68
Fig.IV.4	Répartition nodale sur la géométrie cylindrique	70
Fig.IV.5	Répartition des efforts dans la durite	70
Fig.IV.6	Répartition des efforts dans la durite	71
Fig.IV.7	Courbe des fonctions B-spline	72
Fig.IV.8	La première dérivée des fonctions B-spline	73
Fig.IV.9	La deuxième dérivée des fonctions B-spline	73
Fig.IV.10	Durite après déformation	74

Listes des tableaux

Tableau	Legende	Page
Tab I.1	Le comportement des courbes en fonction des poids	27
Tab IV.1	Caractérisques mécanique de la structure	65

Liste des abréviations

NURBS : Non uniform Rational Basis Spline.

MEF : Méthode des éléments finis(ou FEM).

B-spline : Basis Spline.

CAO : Conception Assistée par Ordinateur.

CFAO : Conception et Fabrication Assistée par Ordinateur.

Depuis longtemps, l'être humain travail sans relâche dans le but de rendre plus sûr les structures et les outils utilisés dans le quotidien, c'est pourquoi il s'est beaucoup investi en édifiant des constructions plus performantes, et en développant des moyens de surveillance et de vérification de plus en plus fiables.

Les besoins des industries de pointe et les progrès effectués dans le domaine de l'analyse par éléments finis, conduit les techniques de calcul des structures à un développement considérable.

Ainsi la méthode des éléments finis est l'un des outils les plus efficaces et les plus généraux, qui à connu ces cinq dernières années une évolution importante par l'émergence d'une nouvelle génération d'éléments finis.

En effet, les éléments finis iso-géométriques utilisent le même concept que la CAO, c'est-à-dire que le maillage éléments finis habituel est remplacé par la modélisation CAO par les fonctions de base NURBS.

Ce travail est consacré à l'étude de la méthode d'analyse par éléments finis iso-géométriques, en faisant une application sur une interaction entre un fluide et cette structure. Pour une meilleure compréhension, il est structuré comme suit :

Dans le chapitre (I) nous commençons par une recherche bibliographique, puis nous énonçons quelques notions de base sur la technique de réalisation et modélisation géométrique des courbes de BEZIER.

Dans le chapitre (II) nous présentons quelques notions sur la technique de réalisation des surfaces par les courbes b-spline et les fonctions de base NURBS.

Dans le chapitre (III), nous présentons la méthode des éléments finis iso-géométriques en détail pour bien expliquer la procédure pour arriver à déterminer les différents paramètres nécessaires à la réalisation de ce modèle éléments finis.

Dans le chapitre (IV), nous appliquons la méthode d'analyse par éléments finis iso-géométriques à l'interaction fluide-structure entre une durite cylindrique (la structure), et l'eau (le fluide), et nous modélisons cette interaction sur le logiciel MATLAB.

En fin nous terminons par une conclusion générale pour résumer tous ce travail.

CHAPITRE I

Modélisation géométrique : Courbe de BEZIER

I.1 Introduction :

Une structure est généralement soumise à des conditions opérationnelles qui peuvent être, dans certains cas, extrêmement sévères et pouvant donc affecter son intégrité. Dans l'industrie et dans l'infographie, on a souvent besoin de représenter sur ordinateur des courbes ou surfaces dont le type est soit non classifiable (ni parabole ni cercle...) soit non connu à l'avance. On les regroupe généralement sous le nom de "courbes et surfaces non mathématiques", car l'équation mathématique n'est pas connue par le programmeur. Ces courbes ou surfaces sont en général définies par un ensemble de points, plus ou moins nombreux.

C'est ainsi que les courbes à pôles sont développées par Pierre BEZIER. Au début des années soixante, il était directeur des méthodes mécaniques dans la maison RENAULT. Sa préoccupation était d'offrir au dessinateur un moyen simple et puissant pour créer des formes et pour faciliter la programmation des machines à commande numérique. Les fameuses courbes et surfaces de BEZIER sont alors nées, dans le but de réaliser des surfaces très complexes.

Afin d'utiliser concrètement ces courbes et ces surfaces, un logiciel fut créé : Unisurf. Il est à la base de tous les logiciels créés par la suite, dont CATIA. Les concepts de CAO et de CFAO venaient de prendre forme.

L'objectif de l'optimisation de conception est de trouver la disposition optimale qui maximise l'exécution de système tout en satisfaisant les contraintes de conception.

D'une manière générale, deux genres de techniques d'optimisation de conception existent:

- Optimisation de conception de topologie.
- Optimisation de conception de forme.

Pour cela une méthode iso-géométrique d'analyse a été développée par Hughes et autres (2005), qui permet de manipuler une géométrie exacte avec la fonction de base de NURBS. La fonction de base de B-spline est calculée périodiquement à partir du vecteur nœud, et il est très simple d'ajuster l'ordre de la fonction de base, par conséquent, il est possible d'avoir une solution plus précise que la méthode des éléments finis (FEM), avec peu de degrés de liberté. D'ailleurs, par analogie aux améliorations apportées à la FEM

standard, ils ont proposé un nouvel arrangement efficace d'amélioration sans n'importe quel changement de la géométrie du modèle. Plus tard, ces issues d'amélioration plus en détail ont été discutées. La raideur a rapporté une solution plus précise que la méthode classique. Avec ces propriétés, une méthode iso-géométrique d'analyse a été maintenant largement appliquée à beaucoup de disciplines différentes, telles que des vibrations structurales [13], à la mécanique des fluides [1], interactions de fluide-structure [3]. Ainsi, il est souhaitable de développer les méthodes iso-géométriques d'analyse et d'optimisation de sensibilité de conception de forme, pour des applications dans ces secteurs.

Ils ont présenté un élément fini géométriquement exact [13], en employant un nouvel élément de la coque de base, sur des coordonnées curvilignes. Un élément tensoriel de base a été développé pour la triangularité d'un modèle géométrique en se basant sur les NURBS. Plus tard, ils ont proposés comment combiner des surfaces de NURBS avec la méthode des éléments finis (FEM), et comment déterminer les fonctions de forme appropriées. Pour satisfaire la propriété delta-Kronecker sur les frontières des nœuds, on a introduit une fonction B-spline non périodique, qui est beaucoup plus facile que la fonction périodique pour imposer des conditions aux limites.

I.2 Notion des courbes de BEZIER :

C'est au sein du bureau d'études du constructeur automobile RENAULT que l'ingénieur français P.BEZIER a proposé une modélisation spécifique pour concevoir différents éléments d'une voiture, ce support donne un moyen interactif pour recevoir les formes en utilisant un outil informatique, mis en place à partir de 1962. Ce modèle a été à la base du logiciel « Uniserf » développé chez RENAULT, à la suite de communication scientifique, la première en 1982, les nombreux logiciels de CAO, utilisé dans les domaines divers d'application tels que : mécanique, aéronautique, automobile, « design », polices de caractères,.....ect. Cette méthode doit permettre de modifier facilement la surface par déplacement d'un minimum de points et de pouvoir représenter toute surface (y compris plane), sans "cassure" (continuellement dérivable). L'idée directrice est de tracer une courbe en déplaçant le barycentre d'un certain nombre de points, appelés points de contrôle et affectés

des coefficients dépendant d'une variable. En modifiant ensuite la position des points de contrôle, on déforme progressivement la courbe jusqu'à l'obtention du profil recherché. Pour faciliter la compréhension de cette courbe, on ne traitera ici, que l'aspect "courbe plane" des courbes de Bézier. Ces courbes peuvent être définies comme une combinaison des fonctions de base appelées polynômes de BERSTEIN[2].

I.2.1 Polynôme de BERSTEIN :

Ces polynômes ont été utilisés par BERSTEIN, au début du XX^{ième} Siècle, pour l'approximation polynomiale des fonctions. Ils sont utilisés dans la description du modèle de BERIER par les points de définition nommés aussi points de BEZIER[5].

La $i^{ième}$ fonction de BERSTEIN de degré n , notée $B_{i,n}$ est définie par :

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} \cdot (1 - t)^{(n-i)} \cdot t^i \quad 0 \leq i \leq n \quad (I.1)$$

Avec : $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ Coefficient du binôme de NEWTON.

Et t : est une variable réelle, qui est sur l'intervalle $[0 \ 1]$.

On construit les courbes représentatives lorsque t varie entre 0 et 1.

- Pour $n=1$, ce sont des segments de droites parallèles aux 1^{ère} et 2^{nde}
- Pour $n=2$, ce sont des arcs de paraboles.
- Pour $n=3$, ce sont des arcs de cubiques.

a) Propriétés des polynômes de BERSTEIN :

Les fonctions $B_{i,n}(t)$ possèdent les propriétés importantes dans l'intervalle $I = [0 \ 1]$:

- Partition unité : (condition de Cauchy) :

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \equiv \forall t \in [0, 1] \quad (I.2)$$

Cette propriété permet d'obtenir des courbes indépendantes du référentiel utilisé.

- Non négativité : (positivité) :

$B_{i,n}(t) \geq 0$ pour toutes les valeurs de i, n et de t .

Particulièrement aux extrémités on obtient :

- En $t = 0$ $B_{0,n}(0) = 1, B_{i,n}(0) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$. (I.3)

- En $t = 1$ $B_{n,n}(1) = 1, B_{i,n}(1) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$. (I.4)

- Symétrie :

Un calcul élémentaire montre que :

$$B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t) \quad \text{pour } t \in [0, 1]. \quad (I.5)$$

Ce qui signifie que les fonctions de bases $B_{i,n}(t)$ sont deux à deux symétriques en t et $(1-t)$ par rapport à la droite $t = 0.5$.

- Relation de récurrence :

Une fonction de BERSTEIN peut s'exprimer à l'aide des fonctions du même type mais de degré inférieur [10] tel que :

$$B_{i,n}(t) = t \cdot B_{i-1,n-1}(t) + (1-t) \cdot B_{i,n-1}(t); \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (I.6)$$

$$B_{0,n}(t) = (1-t)^n; \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (I.7)$$

$$B_{n,n}(t) = t^n. \quad (I.8)$$

b) Explication simplifiée :

Prenons d'abord l'exemple le plus répandu, celui des courbes de Bézier avec 4 points de contrôle.

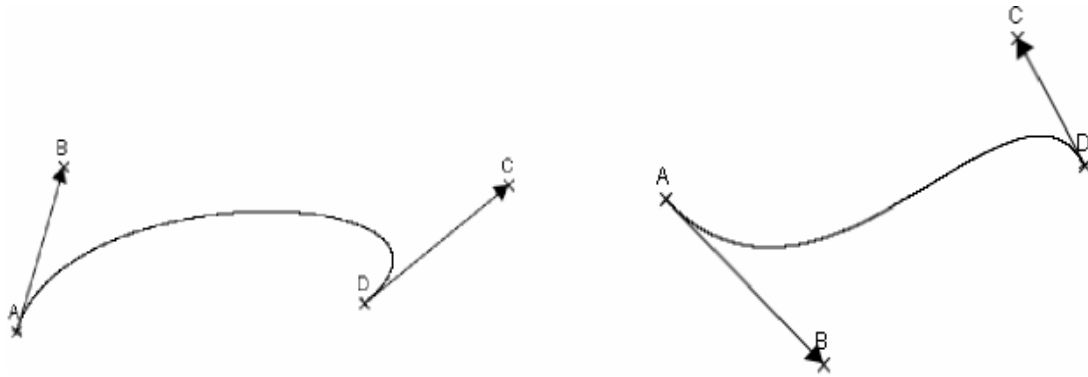


Figure I.1 – Courbe de BEZIER de degré 3 avec 4 points de contrôle.

On considère donc 4 points A,B,C,D du plan. Alors la courbe de Bézier de points de contrôle A,B,C,D est la seule courbe polynômiale de degré inférieur ou égal à 3 telle que :

Il est possible d'avoir une représentation paramétrique simple de la courbe : il s'agit en effet de l'ensemble des points $M(t)$ tels que :

$$M(t) = (1 - t)^3 \cdot A + 3 \cdot t \cdot (1 - t)^2 \cdot B + 3 \cdot t^2 \cdot (1 - t) \cdot C + t^3 \cdot D$$

Pour t parcourant l'intervalle $[0,1]$ (l'équation précédente doit se comprendre coordonnée par coordonnée).

Plus généralement, si $P_0, \dots, P_n$ sont $(n+1)$ points du plan, la courbe de Bézier de points de contrôle $P_0, \dots, P_n$ est la courbe polynômiale de degré inférieur ou égal à n donnée par :

$$M(t) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot u^k \cdot (1-u)^{n-k} \cdot P_k \quad (I.9)$$

Pour t dans $[0,1]$ (les experts reconnaîtront ici l'expression d'un polynôme de Bernstein).

Elle a les propriétés suivantes :

- Ø Elle passe par P_0 et P_n , mais pas en général par les autres points de contrôle.
- Ø La tangente en P_0 (respectivement en P_n) est donnée par $\overrightarrow{P_0P_n}$ et par $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- Ø La courbe est toujours contenue dans l'enveloppe convexe des points de contrôles

C) Détails des calculs :

Soit $M(t)$ le Barycentre de $(A, 1-t)$ (B, t) .

t est la proportion du segment $[AB]$ où se situe le point $M(t)$:

$$t = 0 \Rightarrow M = A$$

$$t = 0,5 \Rightarrow M = \text{milieu de } [AB]$$

$$t = 1 \Rightarrow M = B$$

Quand t parcourt l'intervalle $[0,1]$, il est clair que le point $M(t)$ décrit tout le segment $[AB]$.

d) Exemple :

Le segment $[AB]$ est la Courbe de Bézier de degré 1 avec points de contrôle A et B .
Les Polynômes $(1-t)$ et (t) sont les Polynômes - Poids de Bernstein de degré 1.

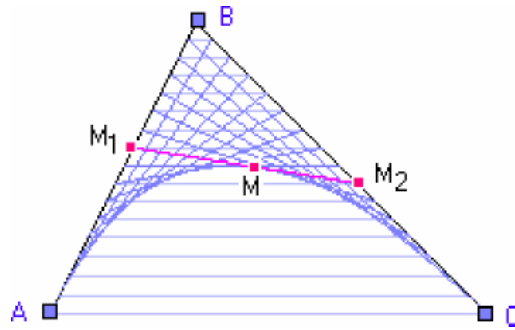


Figure I.2 – Courbe de BEZIER de degré 2 avec 3 points de contrôle.

Construisons une courbe en rajoutant une 2ème étape à ce qui précède :

ü 1ère étape :

Soit $M_1(t)$ le Barycentre de $(A, 1-t)$ (B, t) ; $M_1(t)$ décrit $[AB]$.
 Soit $M_2(t)$ le Barycentre de $(B, 1-t)$ (C, t) ; $M_2(t)$ décrit $[BC]$.

ü 2ème étape :

Soit $M(t)$ le Barycentre de $(M_1, 1-t)$ (M_2, t) .

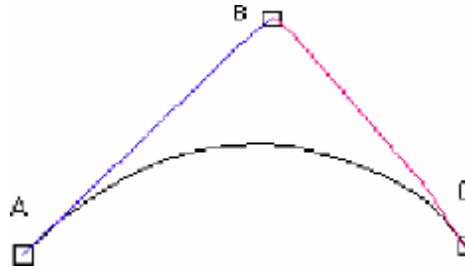
e) Remarque :

$M(t)$ se situe à la même proportion du segment $[M_1 M_2]$ que M_1 par rapport au segment $[AB]$ ou M_2 par rapport au segment $[BC]$.

f) Propriété de la construction :

La courbe obtenue est l'enveloppe des segments $[M_1 M_2]$: en tout point M , la tangente à la courbe est le segment $[M_1 M_2]$.

$M(t)$ décrit alors une Courbe de Bézier de degré 2, qui, par construction, commence en A et se finit en C, et a pour tangentes (AB) en A et (BC) en C. C'est en fait un arc de Parabole (que nous pourrions noter très logiquement $[ABC]$) :



Les propriétés d'association du Barycentre nous permettent d'exprimer $M(t)$ plus directement : $M(t)$ est ainsi le Barycentre de $(A, (1-t)^2)$ $(B, 2t(1-t))$ (C, t^2) .

$M(t)$ décrit la Courbe de Bézier de degré 2 avec 3 points de contrôle A, B et C.

Les Polynômes $(1-t)^2$, $2t(1-t)$ et t^2 sont les Polynômes de Bernstein de degré 2.

Rien ne nous interdit de prolonger au delà des extrémités A et C l'arc à la parabole entière :

il suffit, à partir de la même définition analytique à l'aide des Polynômes de Bernstein, de faire varier le paramètre t non dans $[0 ; 1]$ (interpolation), mais dans un ensemble encore plus vaste[7], (Extrapolation à l'ensemble des réels pour obtenir toute la parabole, voire même à (C) l'ensemble des nombres complexes, si l'on veut obtenir par exemple la surface de Riemann d'équation $Z = 2$).

Construisons une courbe paramétrée en rajoutant une 3ème étape à ce qui précède :

Ø 1ère étape : 3 Courbes de Bézier de degré 1 :

- ü Soit $M_1(t)$ le Barycentre de $(A, 1-t)$ (B, t) ; $M_1(t)$ décrit $[AB]$.
- ü Soit $M_2(t)$ le Barycentre de $(B, 1-t)$ (C, t) ; $M_2(t)$ décrit $[BC]$.
- ü Soit $M_3(t)$ le Barycentre de $(C, 1-t)$ (D, t) ; $M_3(t)$ décrit $[CD]$.

Ø 2ème étape : 2 Courbes de Bézier de degré 2

- ü Soit $N_1(t)$ le Barycentre de $(M_1, 1-t)$ (M_2, t)
- ü Soit $N_2(t)$ le Barycentre de $(M_2, 1-t)$ (M_3, t)

Ø 3ème étape : 1 Courbe de Bézier de degré 3 :

Soit $M(t)$ le Barycentre de $(N_1, 1-t)$ (N_2, t)

Les propriétés d'association du Barycentre nous permettent d'exprimer $M(t)$ plus directement : $M(t)$ est ainsi le Barycentre de $(A, (1-t)^3)$ $(B, 3t(1-t)^2)$ $(C, 3t^2(1-t))$ (D, t^3) .

$M(t)$ décrit la Courbe de Bézier de degré 3 avec 4 points de contrôle A, B, C et D .

Elle part de A pour finir en D .

C'est en fait un arc de Cubique (que nous pourrions noter très logiquement $[ABCD]$) :

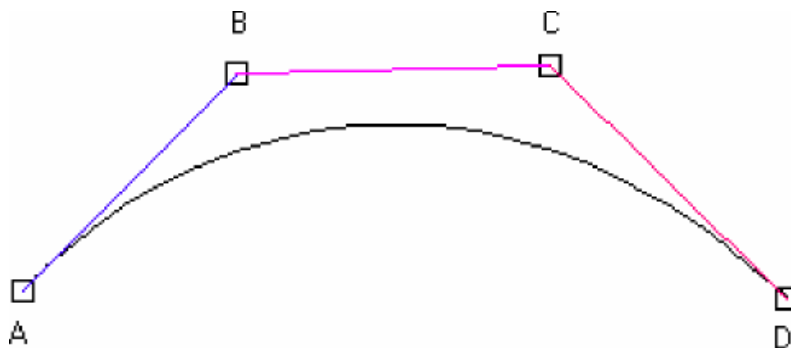


Figure I.3 – Courbe de BEZIER

Les Polynômes $(1 - t)^3$, $3t(1 - t)^2$, $3t^2(1 - t)$ et t^3 sont les Polynômes - Poids de Bernstein du degré 3.

Ø **Intérêt du degré 3** : en plus des courbes d'une plus forte régularité, il permet de dessiner des plis (comme ceux de la cubique d'équation : $y = x^3 - 3x$, en $x = 1$ ou -1), ou des points d'inflexion (comme celui de la cubique d'équation : $y = x^3 - 3x$, en $x = 0$), ou des points de rebroussements (comme le point médian dans le chiffre 3), ou des points doubles (comme le croisement dans la lettre alpha), ce que le degré 2, avec ses arcs de paraboles, ne sait pas faire !

G) Cas particulier :

- **Courbe d'un Polynôme de degré 3 :**

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ (fonction cubique, de dérivée

$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$, comme une Courbe de Bézier à 4 Points de Contrôle.

On s'impose leurs abscisses : $x_A < x_B < x_C < x_D$ suite arithmétique : ainsi f est définie sur l'intervalle $[x_A, x_D]$.

On voudrait alors savoir : quelles ordonnées y_A, y_B, y_C, y_D prendre.

- Pas de problème pour les 2 extrémités A et D : elles sont sur la courbe de f :

$$y_A = f(x_A) \text{ et } y_D = f(x_D) .$$

- Quant aux 2 points intermédiaires B et C, ils sont chacun sur une tangente à la courbe de f

$$B \text{ sur la tangente en A : } y_B = y_A + (x_B - x_A) f'(x_A) ;$$

$$C \text{ sur la tangente en D : } y_C = y_D + (x_C - x_D) f'(x_D) .$$

Cette méthode de calcul se généralise facilement à toute courbe paramétrique cubique $(x(t), y(t))$: on remplace dans les formules : l'abscisse par le paramètre de temps t , et l'ordonnée $f(t)$ par $x(t)$, puis par $y(t)$.

Les points de contrôle P_i ainsi définis ont 3 coordonnées (t_P, x_P, y_P) : pas grave, il suffit d'enlever le temps !

Tous les logiciels de dessin utilisent les courbes de Bézier de degré 3.

I.2.2 Modèle de BEZIER non rationnel :

Les courbes de BEZIER sont basées sur les approximations polynomiales de manière que chaque courbe paramétrique de degré n soit exprimée sous la forme : [6]

$$\vec{P}(t) = \sum_{i=0}^n F_{i,n}(t) \cdot \vec{a}_i \quad (\text{I. 10})$$

Avec $t \in [0,1]$;

Ou :

$$F_{i,n}(t) = \frac{(-1)^i \cdot d^{i-1}}{(i-1)! \cdot dt^{i-1}} \left[\frac{(1-t)^n - 1}{t} \right] \quad (\text{I. 11})$$

Ou les fonctions $F_{i,n}(t)$ sont appelées fonctions de BEZIER, le vecteur $\vec{a}_0$ indique le point de départ de la courbe.

Le polynôme formé par $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ est appelé polynôme de BEZIER et contrôle la forme de la courbe[13].

a) Définitions :

Soit n un entier strictement positif donné et $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ une suite de $n+1$ points quelconques choisis dans le plan ou dans l'espace à 3 dimensions.

La courbe de BEZIER associée à ces données est l'arc décrit par le point $M(t)$ défini, par l'intermédiaire d'une origine « 0 » choisie arbitrairement au moyen de la formule vectorielle (où t varie dans $[0,1]$).

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^n B_n^i(t) \cdot \overrightarrow{OP_i} \quad (\text{I.12})$$

Les points $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ sont dits « points de définition » ou « points de BEZIER ».

Le polygone dont les sommets successifs sont ces points est dit « polygone caractéristique de la courbe ».

b) La forme du polynôme de BERSTEIN dans le cas des courbes de BEZIER non rationnelles :

Une autre manière équivalente à été proposée par FORREST pour l'expression des courbes de BEZIER non rationnelles.

En se basant sur les polynômes de BERSTEIN on peut écrire :

$$C(t) = \sum_{i=1}^n B_{i,n}(t) \cdot P_i \quad (\text{I.13})$$

Avec $t \in [0,1]$;

Avec les fonctions de BERSTEIN :

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{(n-1)} = \frac{n!}{i!(n-1)!} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-1} \quad (\text{I.14})$$

Et P_i sont appelés les pôles du polygone caractéristique[13].

c) Propriétés des courbes de BEZIER non rationnelles :

- La courbe ne dépend que des points de définitions, et non de l'origine choisie.
- Degré de la courbe est égal au nombre de pôles moins un.
- Le degré du polynôme augmente impérativement avec le degré de la complexité de la courbe.

$$C(t = 0) = P_0 ; C(t=1) = P_n .$$

En étant tangente au polygone avec :

$$C'(0) = n \cdot (P_1 - P_0) \text{ et } C'(1) = n \cdot (P_n - P_{n-1}).$$

La partition unité :

Pour $t \in [0,1]$.

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1 \quad (I.15)$$

- Propriétés des barycentres :

La définition, indique puisque les coefficients $B_{i,n}(t)$ sont positifs et que leurs somme (de $i=0$ à $i=n$) est égale à 1, que pour t fixée dans $[0,1]$, $C(t)$ est le barycentre des points $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ affectés de ces coefficients.

- Globalité du modèle :

On peut noter que chaque force d'attraction $\vec{F}_i$ dépend de deux facteurs indépendants qui sont :

- Le coefficient pondérateur qui est constitué par $B_{i,n}(t)$.
- La position du point de définition P_i .

* Pour $t=1$ L'explication est la même, en remplaçant P_0 par P_n .

*En dehors des deux points précédents, extrémités de l'arc, l'influence des points de définition tout au long de la courbe de BEZIER est globale. On peut, pour mieux le voir, faire des découpes successives des graphiques Γ_n^i des polynômes de BERSTEIN. Ce qui permet de visualiser l'évolution des valeurs relatives de ces polynômes lorsque t varie de 0 à 1 ($t \in [0,1]$).

On peut se rendre compte que pour $t = 0$, seul P_0 a de l'influence, au fur et à mesure que t augmente l'influence de P_0 reste prépondérante mais diminuée, alors que celles de P_1 , P_2 , puis celle de P_3 , d'abord très faibles, augmentent. Pour $t = 1/3$, c'est P_1 qui a la plus grande influence, pour $t = 1/2$, P_1, P_2 ont la même influence P_0 et P_3 ont également même influence mais faible[11].

En fait, la courbe suit la forme de la ligne polygonale joignant les points de définition, cette allure générale est suggérée dans le graphique de la figure (I.4).

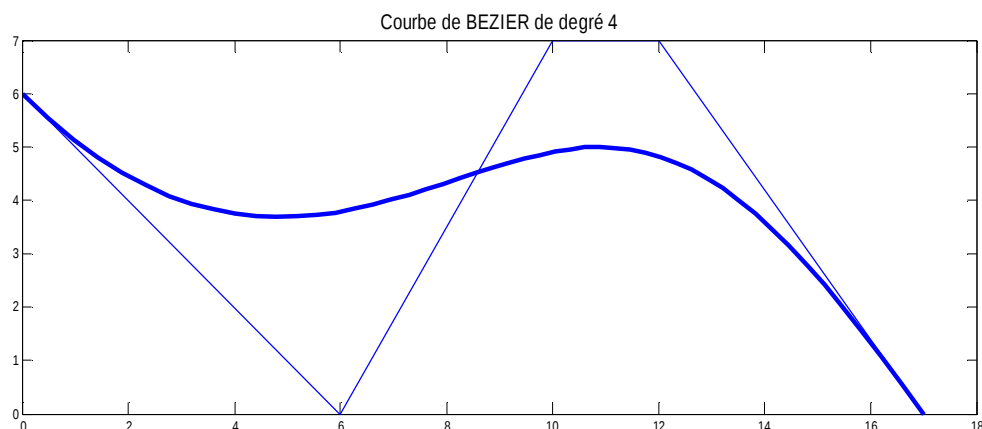


Figure I.4 – Courbe de BEZIER de degré 4 avec 5 points de contrôle.

- La continuité : naturellement C^n .
- Enveloppe convexe :

La courbe de BEZIER est toujours dans le polygone convexe formé par les pôles.

- Propriété de la variation décroissante :

Aucun plan n'a plus d'intersections avec la courbe qu'avec le polygone de contrôle.

- Invariance affine :

Une transformation affine est appliquée à la courbe si elle est appliquée au polygone caractéristique.

- Propriété de la réversibilité (symétrie) :

Une courbe de BEZIER décrite à partir du polygone caractéristique $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$, ne change pas de forme lorsqu'elle est décrite à partir du polygone caractéristique inverse $P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, \dots, P_0$.

d) Modification de la forme de la courbe :

Plusieurs possibilités sont offertes pour des modifications d'une courbe de BEZIER :

Ø Points de définition multiples :

Si l'on souhaite qu'un point de définition P_i , ait une influence plus grande sur la forme de l'arc en exerçant sur les points C (t) une plus grande force d'attraction, on donne un ordre de multiplicité à ce point P_i , ce qui veut dire qu'on prend ce point plusieurs fois de suite dans la séquence des points de définition (ce qui implique qu'on augmente le degré)[3].

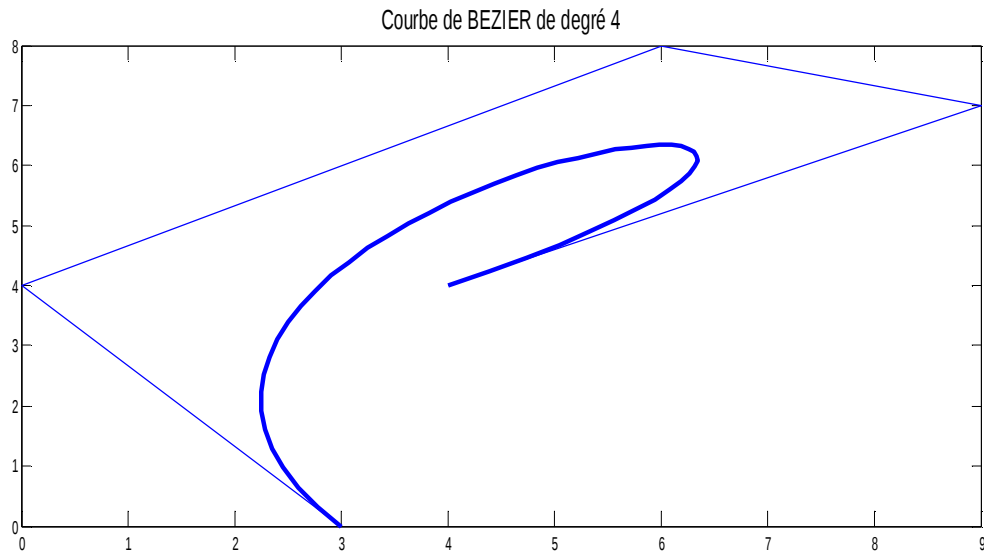


Figure I.5 – Courbe de BEZIER de degré 4 avec 5 points de contrôle.

Ø Ajout de points de définition :

Si on souhaite attirer davantage la courbe au voisinage d'un point de définition, il suffit d'adjoindre des points de définition supplémentaires au voisinage de ce point.

L'ensemble de la courbe va se modifier (globalité du modèle) mais, localement, il existera une déformation plus marquée vers le point de définition considéré voir figure (I.6).

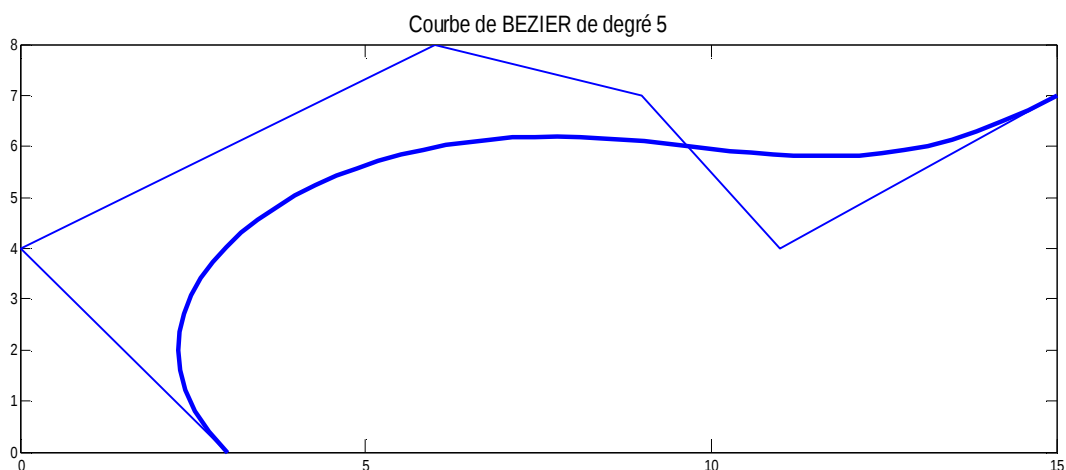


Figure I.6 – Courbe de BEZIER de degré 5 avec 6 points de contrôle.

Ø Réduction du nombre de points de définition :

Il faut préciser que de la modification de cette opération qui, résulte la modification du degré de la courbe. Cette transformation répond à plusieurs contraintes, comme la réduction des calculs et donc du cout numérique.

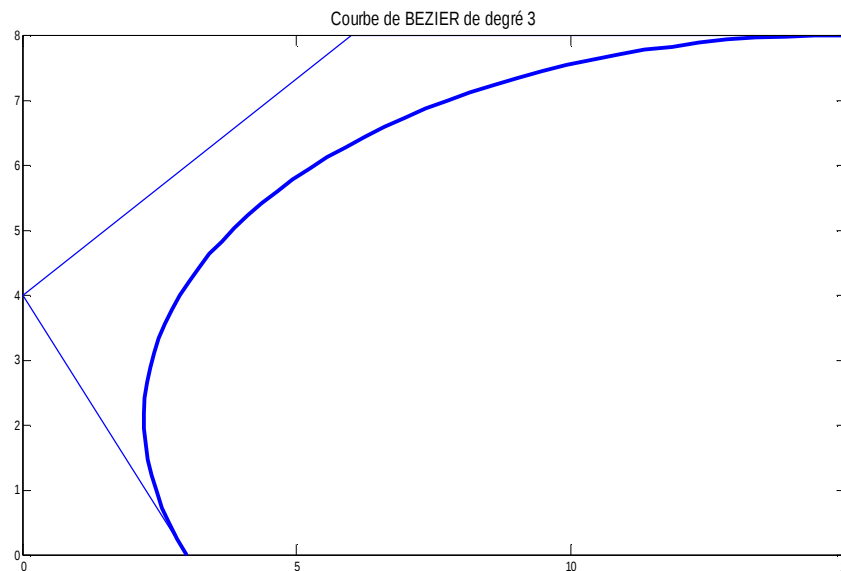


Figure I.7 – Courbe de BEZIER de degré 3 avec 4 points de contrôle.

e) Modification du nombre de sommets du polygone caractéristique sans modifier la forme de la courbe :

L'accroissement du nombre de sommets du polygone caractéristique contribue à la construction de carreaux lorsque ces derniers s'appuient sur une série de courbe C_i , $i \in \{1, 2, \dots, p\}$. Parmi les techniques les plus couramment implantées au sein de logiciels de CFAO, certaines supposent un nombre de sommets identique pour chacun des polygones caractéristiques P_{GI} associés à une courbe C_i , lorsque cette condition n'est pas satisfaite, la démarche consiste à accroître le nombre de sommets soient en nombre identique pour chaque courbe C_i , afin d'éviter toute perturbation de la forme des courbes C_i et de remettre en cause le travail de modification effectué, il est souhaitable de réaliser l'insertion de sommets sans modifier la forme de la courbe[10].

Ø Augmentation du nombre de sommets d'un polygone caractéristique :

Soit P_{Gm} le polygone caractéristique d'une courbe de BEZIER de degré m répondant à l'équation :

$$P(t) = \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t) \cdot S_i, \quad t \in [0,1] \quad (I.16)$$

Il s'agit de construire une courbe de BEZIER, $P_1(t)$, correspondant exactement à $P(t)$ (voir figure (I-9)) admettant pour polygone caractéristique, P_{Gm+1} .

$P_1(t)$ est liée à $P(t)$ par l'équation suivante :

$$P_1(t) = \sum_{i=0}^m B_{i,m+1}(t) \cdot S'_i = \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t) \cdot S_i, \quad \forall t \in [0,1] \quad (I.17)$$

Où les sommets S'_i se déduisent des sommets S_i comme suit :

$$S'_0 = S_0;$$

$$S'_i = S'_{i-1} + \frac{(m+1-i)}{m+1} \cdot (S_i - S_{i-1}), \text{ avec } : i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (I.18)$$

$$S'_{m+1} = S_m$$

§ Remarque :

Dans le cas où le nombre de sommets à insérer est supérieur à 1 (un) et s'élève à k par exemple, on réitérera k fois le processus d'insertion s'appuyant sur les relations (I.18).

Ø Réduction du nombre de sommets du polygone caractéristique :

A partir d'un polygone caractéristique P_{Gm} , il s'agit de construire le polygone caractéristique, P_{Gm-1} d'une courbe de BEZIER $P_1(t)$ tel que :

$$P_1(t) = \sum_{i=0}^{m-1} B_{i,m-1}(t) \cdot S'_i \approx \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t) \cdot S_i = P(t) ; \text{avec } t \in [0,1] \quad (\text{I.19})$$

Le principe de la construction est basé sur l'algorithme d'accroissement du nombre des sommets appliqués à l'envers, sous la forme la plus simple, il faut distinguer les situations :

- m est impair :

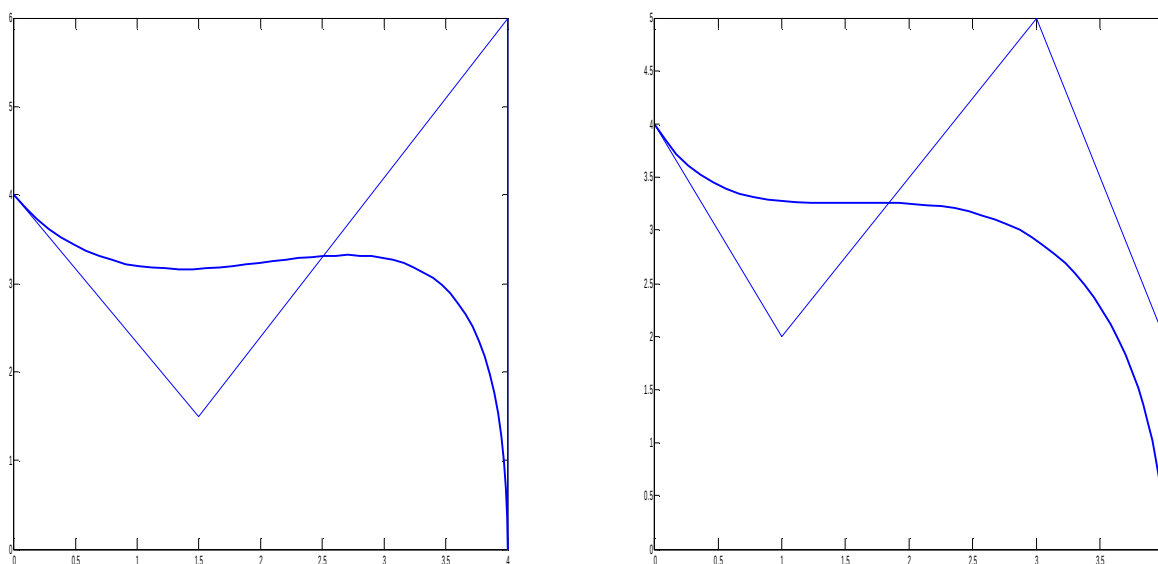


Figure I.8 -Augmentation du nombre de sommets d'un polygone caractéristique sans modifier la forme de la courbe.

-Lorsque m est pair :

Les sommets S'_i sont donnés par la relation suivante :

$$\left. \begin{aligned} S'_0 &= S_0 ; \\ S'_i &= S'_{i-1} + \frac{m}{m-i} \cdot (S_i - S'_{i-1}), \text{ avec } : i \in \{1, 2, \dots, (\frac{m}{2} - 1)\} \\ S'_i &= S'_{i+1} + \frac{m}{m-i} \cdot (S_{i+1} - S'_{i+1}), \text{ avec } : i \in \{(m-2), \dots, (\frac{m}{2})\} \\ S'_{m-1} &= S_m \end{aligned} \right\} \quad (I.20)$$

-Lorsque m est impair :

Les sommets S'_i sont définis par la relation (I.20).

$$\left. \begin{aligned} S'_0 &= S_0 ; S'_i = S'_{i-1} + \frac{m}{m-i} \cdot (S_i - S'_{i-1}), \text{ avec } : i \in \{1, 2, \dots, (\frac{m-1}{2} - 1)\} \\ S'_i &= S'_{i+1} + \frac{m}{m-i} \cdot (S_{i+1} - S'_{i+1}), \text{ avec } : i \in \{(m-2), \dots, (\frac{m-1}{2} + 1)\} \\ S'_{m-1} &= S_m \end{aligned} \right\} \quad (I.21)$$

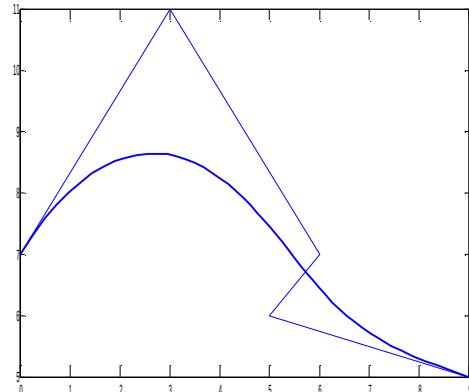
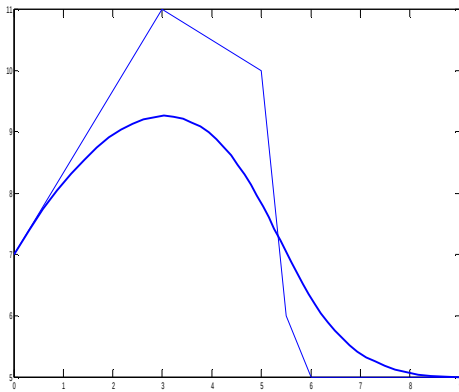


Figure I.9 -Augmentation du nombre de sommets d'un polygone caractéristique sans modifier la forme de la courbe.

I.2.3 Modèle de BEZIER rationnel :

a) Introduction :

La première utilisation de ces modèles remonte à longtemps avec l'intégration des courbes de BEZIER rationnelles dans le logiciel « CONSURF ». On peut considérer que chaque forme rationnelle affecte à chaque point de contrôle un coefficient qui joue le rôle d'un poids, et donne une influence à chacun des points de définition.

Le premier avantage des formes rationnelles est l'aptitude à présenter une classe plus importante de formes (quadratique, conique, cercle, parabole, hyperbole, arc de cercle....etc) donc à faciliter l'homogénéisation des bases de données des logiciels.

Les modèles géométriques rationnels font appel aux concepts des coordonnées homogènes.

b) Coordonnées homogènes :

Il est plus avantageux de résoudre un problème à (N) dimensions dans un espace à (N+1) dimensions puis projeter la solution dans un hyperplan de cet espace.

Le concept général des coordonnées homogènes est donc d'exprimer des points de l'espace R_N (dimension N) dans un espace R_{N+1} (dimension $N + 1$).

Les points $[WX_1, WX_2, \dots, WX_N, W]$ de R_{N+1} s'ils sont normalisés sous la forme :

$[W.X_1/w, W.X_2/w, \dots, WX_N/w, 1]$, présentent les points $[WX_1/w, WX_2/w, \dots, WX_N/w]$ de l'espace R_N .

La normalisation des coordonnées homogènes peut être interprétée comme une transformation projective du centre de l'origine de l'espace R_{N+1} sur l'hyperplan $X_{n+1} = 1$

Défini par :

$$H : R_{N+1} \longrightarrow R_N.$$

La transformation projective homogène est définie par :

$$H\{WX_1, WX_2, \dots, WX_N, W\} =$$

{

*

$(WX_1/w, WX_2/w, \dots, WX_N/w)$ si $W \neq 0$
 $\text{point à l'infini, sur la droite passant par l'origine et dirigée suivant :}$
 $(W.X_1, W.X_2, \dots, W.X_N), \dots$ si $W=0$.

On notera que le point $(0, 0, \dots, 0)$ (à $N+1$ éléments) n'a pas d'interprétation dans R_N par H d'une façon plus courante les coordonnées homogènes sont utilisées pour exprimer des points de l'espace cartésien à 3 dimensions dans un espace à 4 dimensions par exemple :

$$H : R^3 \longrightarrow R^2.$$

$$\vec{p^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{p^2} \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \end{pmatrix}$$

Cette application, qui consiste à diviser les 2 premières composantes par la 3^{ème}, s'interprète géométriquement comme une projection conique de sommets de l'origine R^3 , sur le plan $w=1$.

L'emploi des coordonnées homogènes en CAO offre plusieurs avantages entre autres, la possibilité de combiner toutes les transformations géométriques courantes (translation, rotation).

I.2.4 Les courbes rationnelles de BEZIER :

Pour les pôles $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ chargés respectivement par les poids $(W_0, W_1, \dots, W_n)$, la courbe rationnelle de BEZIER associée est définie par l'équation (I.22) :

$$C(t) = \frac{\sum_{i=0}^n W_i \cdot P_i \cdot B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n W_i \cdot B_{i,n}(t)} = \sum_{i=0}^n G_{i,n}(t) \cdot P_i \quad (I.22)$$

Avec les fonctions rationnelles de BERSTEIN :

$$G_{i,n}(t) = \frac{w_i \cdot B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i \cdot B_{i,n}(t)}; \quad w_i > 0 \text{ et } t \in [0,1] \quad (I.23)$$

La propriété de non négativité des w_i assure que le dénominateur de (I.22) est non nul pour tout $t \in [0,1]$, ce qui évite des singularités à la courbe $C(t)$.

a) Propriétés des courbes rationnelles de BEZIER :

- 1) Comportement aux extrémités du polygone caractéristique ;

$$C(t = 0) = P_0 \text{ et } C(t=1) = P_n.$$

- 2) Le support global.
- 3) Enveloppe convexe.
- 4) Propriété de la variance affine.
- 5) La continuité : naturellement C_n .
- 6) La positivité : les $G_{i,n}(t) \geq 0$ pour tout i, n et t .

7) La réversibilité : la forme de la courbe reste inchangée lorsque l'ordre des sommets du polygone caractéristique ainsi que celui de la séquence des coordonnées homogènes, w_i sont inversés étant données que la propriété de symétrie est vérifiée.

b) Présentation des coniques par les courbes de BEZIER :

Une courbe de BEZIER rationnelle quadratique (de degré 2) représente une conique :

Soit :

$$C(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 W_i \cdot G_{i,2}(t) \cdot P_i}{\sum_{j=0}^2 W_j \cdot G_{j,2}(t)} \quad (I.24)$$

Soit les sommets P_0, P_1 , et P_2 non alignés et W_0, W_1, W_2 leurs poids respectifs.

Si on fixe $W_0 = W_2 = 1$; on obtient toute une famille de coniques, en faisant varier le poids W_1 pour les valeurs $(0 ; 0.5 ; 1 ; 5)$, on remarque le comportement de la courbe comme l'indique le tableau suivant :

$W_1 = 0$	—————→	Droite
$W_1 = 1$	—————→	Parabole
$W_1 = 0.5$	—————→	Ellipse
$W_1 > 1$	—————→	hyperbole

Tableau I.1 – Comportement des courbes en fonction des poids

Ø Conclusion :

Les courbes de BEZIER rationnelles sont des outils mathématiques important car ils sont utilisés pour la réalisation des formes complexes dans l'industrie.

CHAPITRE II

Modélisation en CAO : Manipulation des Courbes et Surfaces

II.1 Introduction :

La modélisation des courbes et surfaces est une nécessité dans la mécanique, il s'agit généralement de la modélisation paramétrique pour bénéficier d'une plus grande souplesse des structures.

La complexité des formes des objets rend impossible la modélisation par une entité géométrique (courbe ou surface) unique, ça nécessite souvent une approche simplifiée obtenue par coupure en hyperplan, il est donc indispensable d'être en mesure d'étudier avec soin les intersections de ces entités avec des plans ou des droites.

Une des principales difficultés en CFAO surfacique concerne la définition précise des raccords entre différents carreaux formant un objet. Le problème consiste à préciser quelles relations doivent exister entre les réseaux de deux domaines voisins, afin que le raccord entre les surfaces voisines ait certaines propriétés de continuités soit assuré, on a besoin d'un outil qui nous permet de réaliser des formes complexes.

II.2 Modélisation des courbes par le modèle de B-spline :

a) Introduction :

Le modèle B-spline veut dire « splines de base », physiquement le mot « spline » est un instrument utilisé dans la construction navale et aéronautique.

En CAO, la spline est un modèle mathématique qui est utilisée en géométrie. Le modèle B-spline qui utilise les splines comme fonctions de base, fut utilisé pour la première fois en CAO par RIESSENFELD. Il permet d'accroître considérablement la souplesse de manipulation des courbes et des surfaces.

b) Nœuds et séquence nodale :

Une courbe B-spline est une forme paramétrique polynomiale par morceaux, c'est-à-dire qu'elle est construite à partir d'une succession de polynômes de même degré m , se raccordant entre eux à des abscisses U_i , de telle façon à ce que la continuité en ces points soit au maximum de nature C^{m-1} .

Les abscisses U_i des points de raccordement des polynômes seront appelées des nœuds, et on appelle séquence nodale l'ensemble des nœuds associés à une courbe B-spline avec une importance égale à celle du polygone caractéristique.

c) Ordre de multiplicité :

L'ordre de multiplicité d'un nœud caractérise le nombre de fois qu'un nœud de valeur numérique U apparaît dans une même séquence nodale.

L'ordre de multiplicité d'un nœud devient un nouveau paramètre en plus de séquence nodale et du polygone caractéristique.

II.2.1 Équations des fonctions de base :

Notions :

- $N_{i,m}(t)$ les fonctions de base B-spline de degré m (d'ordre $m+1$) pour le paramètre réel t variant de t_{min} à t_{max} .
- $P_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}$, pôles ou sommets du polygone caractéristique.
- $U (u_0, u_1, \dots, u_p)$, une suite croissante de valeurs réelles appelée séquence nodale avec : $u_0 = t_{min}$ et $u_p = t_{max}$.

Les fonctions de base $N_{i,m}(t)$ peuvent être définies sur l'intervalle $[t_{min}, t_{max}]$ par la formule de récurrence de COX et BOOR [10] suivante :

$$N_{i,m}(t) = \frac{t-u_i}{u_{i+m}-u_i} \cdot N_{i,m-1}(t) + \frac{u_{i+m+1}-t}{u_{i+m+1}-u_{i+1}} \cdot N_{i+1,m-1}(t) \quad (II.1)$$

Avec :

$$\begin{cases} N_{i,0}(t) = 1 : \text{si } \dots u_i \leq t \leq u_{i+1}. \\ N_{i,0}(t) = 0 : \text{si } \dots \text{non.} \end{cases}$$

Lorsque : $u_{i+m} = u_i$ ou $u_{i+m+1} = u_{i+1}$ on adopte la convention $\frac{x}{0} = 0$.

II.2.2 Courbe de B-spline non rationnelle :

Une courbe de degré m est définie comme suit :

$$P(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^n N_{i,m}(t) \cdot P_i, \text{ avec : } t \in [u_0, u_p], \text{ et : } n > m \quad (II.2)$$

Où : $P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ sont les pôles du polygone caractéristique de la courbe et les

$N_{i,m}(t)$ sont les fonctions de base de degré m définies par l'équation (II.1) pour un vecteur nodal $U [u_0, \dots, u_p]$. La relation qui lie le nombre des sommets du polygone caractéristique n ; le degré m et le nombre de valeur nodales $(p+1)$ est : $p = n+m+1$.

L'équation (II.2) montre la similitude de cette expression avec l'équation (I.14) d'une courbe de BEZIER. On note cependant les différences suivantes :

- Le degré m des fonctions de base $N_{i,m}(t)$ n'est pas imposé par le nombre de sommets n lié au polygone caractéristique PG_n alors qu'une courbe de BEZIER impose l'égalité $n=m$.

- Les fonctions de base $N_{i,m}(t)$ sont des splines de degré m définies sur l'intervalle $t \in [u_0, u_{n+m+1}]$.
- L'intervalle de définition n'est plus restreint à $[0,1]$ comme pour les courbes de BEZIER[4].

II.2.3 Vecteur nodal et différents types de B-spline :

D'après l'expression (II.2), on remarque bien que les fonctions de base sont influencées par le choix des composantes du vecteur nodal U . La construction d'un vecteur nodal exige d'avoir des composantes à valeur croissantes c'est-à-dire : $u_{i+1} \geq u_i$.

Donc, plusieurs types de fonctions B-spline sont utilisés :

Les fonctions B-spline :

- § uniforme / non uniforme.
- § périodique / non périodique.

a) Fonction B-spline uniforme :

Dans ce cas la séquence nodale, définissant l'ensemble des fonctions de base constituée de nœuds possédant tous une multiplicité de 1 et distant les uns des autres d'une valeur constante.

Alors, les fonctions de base se déduisent les unes des autres par translation d'amplitude α .

Pour une séquence $u_i, j \in \{0, 1, \dots, p\}$, ces particularités s'écrivent :

$$u_{j+1} - u_j = \alpha.$$

Pour des raisons de simplicité de multiplication, on choisit couramment $\alpha = 1$ et des nœuds u_j à valeur entière.

Le principal avantage des B-spline uniformes réside dans la possibilité de produire une forme explicite des fonctions de base $N_{i,m}(t)$:

$$N_{i,m}(t) = \frac{1}{m!} \cdot \sum_{j=0}^{m+1} (j^{m+1}) \cdot (-1)^{(m+1-j)} \cdot (i+j-t)^m \quad (\text{II.3})$$

La multiplicité des B-spline uniformes se heurte à un manque de souplesse pour certaines manipulations géométriques du fait de l'équidistance des nœuds, d'où l'avantage du type non uniforme.

b) Fonction B-spline non uniforme :

Dans ce cas l'intervalle entre 2 nœuds successifs n'est pas constant. Les fonctions B-spline non uniformes, pour offrir une plus grande souplesse de traitement, doivent être construites à partir d'une séquence nodale telle que :

$$\sum_{i=1}^n N_{i,m}(t) \equiv 1 \quad \forall t \in [u_0, u_{n+1+m}] \quad (\text{II.4})$$

soit vraie et U_0 et U_{n+m+1} Correspondant aux nœuds extrêmes de la séquence. En fixant une multiplicité de $(m+1)$ pour les premiers et derniers nœuds de la séquence nodale, sera satisfaite entre U_0 et U_{n+m+1} et $(n+1)$ fonction de base $N_{i,m}(t)$, de degré m , seront construites à partir de cette séquence [7].

$$U_0, U_1, \dots, U_m, U_{m+1}, \dots, U_{n+1}, \dots, U_{n+m+1}.$$

c) Fonction B-spline périodique :

Dans ce type de fonction les nœuds ne sont pas nécessairement équidistants, cette disposition permet de construire des courbes fermées possédant une continuité élevée en tout point de la courbe ([10]), et la périodicité est fixée par la dimension du polygone caractéristique PG_n , la séquence nodale adoptée pour la construction de fonction de base B-splines périodiques sera :

$$U_j, j \in \{0, 1, \dots, (n + 1)\}$$

Les fonctions $N_{i,m}(t)$ sont périodiques de période : $U_{n+1} - U_0$ avec :

$$U_{n+1+j} = U_j + (U_{n+1} - U_0) \text{ pour } 1 \leq j \leq m.$$

$$\text{Et } N_{i,k}(t) = N_{i,k}(t + U_{n+1}) \text{ pour } U \in [U_0, U_m] \text{ et } n-m+1 \leq i \leq n$$

II.2.4 Propriétés des fonctions de bases B-spline :

- ü Support d'une fonction B-spline : La fonction B-spline d'indice i et de degré m est nulle en dehors du segment $[U_i, U_{i+m+1}]$, qu'on appelle support local.
- ü Positivité des fonctions B-spline : Soit une fonction B-spline $N_{i,m}(t)$ de support $[U_i, U_{i+m+1}]$ non réduit à un point, alors sur l'intervalle ouvert associé, on a : $N_{i,m}(t) > 0$.
- ü Propriété dite de « partition unité » : soit le vecteur nœud $(U_0, U_1, \dots, U_p)$ et le degré m avec $2m < p$ et $U_m < U_{p-m}$ alors la somme des fonctions B-spline de degré m , associées à ce nœud est égale à 1 sur l'intervalle $[U_m, U_{p-m}[$ ($\sum_{i=0}^n N_{i,m}(t) = 1$)
- ü Dérivation : $N_{i,m}(t)$ est un polynôme dont toutes les dérivées donnent des polynômes valides sur l'intervalle nodal de $N_{i,m}(t)$.

Pour une valeur nodale de multiplicité k , la fonction possède une continuité d'ordre $m-k$.

ü Extremum : Sauf pour $m=0$, possède un seul extremum.

ü Le vecteur nodal : Le vecteur nodal ayant la forme $U\{0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$, ou le 0 et le 1 sont de multiplicité $m+1$, donne une fonction de base du type BERSTEIN de degré $m = n$.

Les courbes suivantes illustrent les différentes caractéristiques énoncées précédemment :

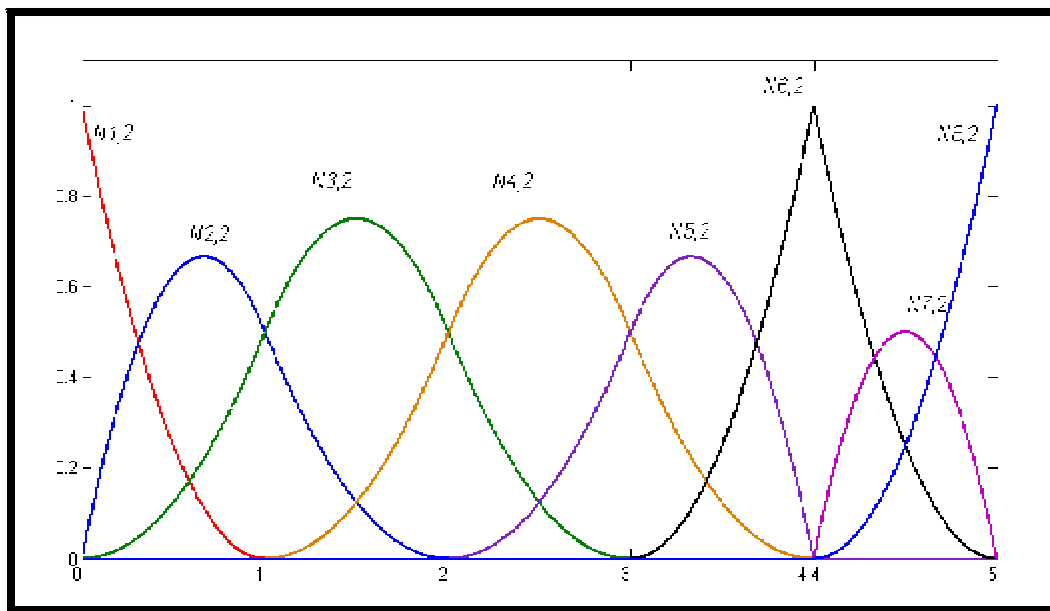


Figure II.1 – Fonction de base B-spline avec $u=\{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$

II.2.5 Propriétés des courbes B-spline non rationnelles :

ü La multiplicité $(m+1)$ des nœuds extrêmes engendre ces conditions aux extrémités de la courbe :

$$C(0) = \quad, C(1) = \quad, C'(0) = \text{———}$$

$$\text{et : } C'(1) = \text{———}$$

ü Invariance affine : une transformation affine est appliquée à la courbe si elle est appliquée aux pôles.

- ü Enveloppe convexe locale : La courbe est dans une enveloppe convexe des pôles, c'est-à-dire si $t \in [t_j, t_{j+1}]$ et $m \leq j \leq p - m - 1$, alors $C(t)$ est dans l'enveloppe convexe des pôles P_{j-m}, P_j .
- ü Le polygone formé par les pôles P_j représente une approximation linéaire par morceaux de la courbe.
- ü Comportement local : Si on déplace un pôle la courbe sera localement déformée et affecte la courbe dans $(m+1)$ intervalles.
- ü Phénomène commutateur : On se déplaçant le long d'une courbe de $t = 0$ à $t = 1$ les fonctions B-spline agissent comme un commutateur, d'un intervalle à l'autre en passant par un nœud une fonction « s'éteint » une autre « s'allume ».
- ü A l'intervalle non nul $[t_j, t_{j+1}]$ toutes les dérivées existent, pour un nœud de multiplicité k , elle est $m-k$ fois continûment dérivable.
- ü Propriété de la variance décroissante : Aucun plan n'a plus d'intersections avec la courbe qu'avec le polygone de contrôle.
- ü Type de BEZIER : Une courbe B-spline sans nœuds internes est une courbe de BEZIER.
- ü Séquence nodale et invariance d'une courbe : Une courbe B-spline, quelle que soit sa nature ; uniforme, périodique ou non uniforme, définie par un polygone caractéristique PG_n et une séquence nodale $U_i \in \{0, 1, \dots, m + n + 1\}$ déterminant des fonctions de base de degré m , ne change pas de forme lorsque la séquence nodale est soumise à une transformation linéaire.[3]

Soit la courbe initiale :

$$P(t) = \sum_{i=0}^n S_i \cdot N_{i,m}(t), \text{ avec : } t \in [u_0, u_{m+n+1}] \quad (\text{II.5})$$

La transformation linéaire s'écrit : $t' = \alpha \cdot t + \beta$, $\alpha > 0$.

La nouvelle séquence nodale $U'i$ s'exprime en fonction de l'ancienne par :

$$U'i = \alpha \cdot U_i + \beta$$

On obtient alors :

$$P_1(t') = P(t) = \sum_{i=0}^n S_i \cdot N_{i,m}(t') \quad (\text{II.6})$$

$$t' \in [U'_0, U'_{n+m+1}] \text{ et } t \in [U_0, U_{n+m+1}]$$

La transformation linéaire appliquée à t n'affecte ni le polygone caractéristique, ni la forme de $p(t)$.

II.3 Courbes B-splines non uniforme rationnelles (NURBS) :

Le modèle B-spline rationnel non uniforme (NURBS) est actuellement une des formes mathématiques les plus générales employées pour la description des surfaces géométriques complexes. Les excellentes propriétés géométriques et analytiques des NURBS ont permis leur prolifération et leur incorporation rapide dans les systèmes de CAO et CFAO.

Une courbe NURBS est décrite par :

$$P(t) = H. \{P^w(u)\} = H. \left\{ \sum_{i=0}^n N_{i,m}(t) \cdot P_i^w \right\} \quad (\text{II.7})$$

$$P(t) = \sum_{i=0}^n R_{i,m}(t) \cdot P_i \quad (\text{II.8})$$

avec :

$$R_{i,m}(t) = \frac{W_i \cdot N_{i,m}(t)}{\sum_{j=0}^n W_j \cdot N_{j,m}(t)} \quad (\text{II.9})$$

Et :

$R_{i,m}(t)$: Fonctions NURBS.

(W_i) une séquence de coordonnées associée au polygone (P_i) , $N_{i,m}(t)$ les fonctions de base B-spline obtenues à l'aide du vecteur nodal (U) , n est le nombre de côtés du polygone caractéristique et m est le degré de la courbe.

Les principaux intérêts des NURBS par rapport aux BEZIER rationnelles sont de s'affranchir des conditions de raccordements des courbes élémentaires, et de choisir le degré indépendamment de la complexité du polygone[11].

II.3.1 Propriétés des fonctions de base B-spline non rationnelles :

ü Positivité : $R_{i,m}(t) \geq 0$ pour toute valeur de i , m et t .

ü Propriété de CAUCHY :

$$\sum_{i=0}^n R_{i,m}(t) = 1, \forall t \in [U_i, U_{i+m+1}] ; \quad (\text{II. 10})$$

Sur un intervalle nodal donné, il existe au maximum $m+1$ fonctions de base $R_{i,m}(t)$ non nulles.

ü Dérivabilité : A l'intérieur des intervalles nodaux, toutes les dérivées de $R_{i,m}(t)$ existent. Pour un nœud de multiplicité k , $R_{i,m}(t)$ est $(m-k)$ fois continûment dérivable.

ü Extremum : Sauf pour le cas ou $m=0$, $R_{i,m}(t)$ possède *uniquement un seul* extremum qui est en fait un maximum.

ü $R_{i,m}(t)$ est une généralisation des fonctions de base B-spline.

En effet, $R_{i,m}(t) = N_{i,m}(t)$ si tous les éléments de la suite des coordonnées homogènes W_i sont égaux : $\{W_0, W_1, \dots, W_n\} = \{h, h, \dots, h\}$.

ü $R_{i,m}(t)$ est une généralisation des fonctions de base de BERSTEIN rationnelle si $m = n$.

I.3.2 Propriétés des courbes (NURBS) :

Les propriétés suivantes sont données par les coordonnées homogènes admissibles.

ü Comportement aux extrémités :

$$P(t = U_{min}) = P_0, P(t = U_{max}) = P_n.$$

$$\frac{dP}{dt}(t = U_{min}) = m \cdot W_1 \left(\frac{(P_1 - P_0)}{W_0(U_{m+1} - U_m)} \right).$$

$$\frac{dP}{dt}(t = U_{max}) = m \cdot W_{n-1} \left(\frac{(P_n - P_{n-1})}{W_n(U_{n+1} - U_n)} \right)$$

- ü Invariance affine et projective : Une application affine ou projective appliquée sur le polygone caractéristique de la courbe donne le même résultat.
- ü Enveloppe convexe : la courbe $P(t)$ est entièrement située à l'intérieur du polygone caractéristique.
- ü Si $m=1$ alors la courbe est exactement confondue avec son polygone caractéristique.
- ü Support local : Si on change la position d'un pôle ou la valeur d'un poids, la courbe ne sera affectée que sur $m+1$ intervalle nodaux.
- ü Dérivation et continuité : Pour tout t qui n'est pas une valeur nodale, $P(t)$ est infiniment dérivable. Si t est égal à une valeur nodale de multiplicité k , $P(t)$ est $(m-k)$ fois dérivable (mais pas nécessairement continue).
- ü Propriété de la variance décroissante.
- ü L'adoption d'une séquence nodale sans nœuds internes du type $U=\{0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$ donne une courbe de BEZIER rationnelle, tandis que la séquence de coordonnées homogènes identiques ($W_i = cste, 0 \leq i \leq n$) donne une courbe B-spline non rationnelle non uniforme.
- ü L'adoption des deux conditions à la fois conduit à l'obtention d'une courbe de BEZIER non rationnelle [12].

Remarque :

Les NURBS sont la généralisation des modèles : de BEZIER non rationnel, BEZIER rationnel et B-spline non rationnel.

- ü La variation du poids W_i influe sur le pôle P_i analogue à celui des BEZIER rationnelle à l'exception que la variation, dans le cas de NURBS est locale.
- ü Les courbes NURBS peuvent représenter exactement toutes les formes coniques usuelles de conception (cercle, ellipse, ...)

I.4 Modélisation des différentes surfaces :**1) Introduction :**

Les premiers modèles utilisés en CFAO sont les surfaces de FAYARD publiées en 1961.

Les surfaces FERGUSON développées pour la société « Boing » vers 1964, et les surfaces d'INABA développées pour la société « Fuji-Tsushinski » vers 1967. Les modèles les plus utilisés sont les surfaces de BEZIER et B-spline.

2) Surfaces de BEZIER :

Dans la modélisation géométrique, le déplacement et la déformation d'une courbe génératrice qui est une courbe de BEZIER, déterminée par son polygone caractéristique P_{Gm} , chaque sommet S_i de P_{Gm} décrit une courbe D_i , appelée directrice, représentée également par une courbe de BEZIER de degré n .

La surface de BEZIER est le produit cartésien de deux familles de courbes de BEZIER suivant deux directions avec deux paramètres descripteurs u et v .

Un point de carreau de BEZIER décrit à partir d'une génératrice et de $(m+1)$ directrices définie à base des fonctions de BERSTEIN présentant les avantages de programmation et permettant de voir directement l'influence d'un pôle sur la forme de la surface[6].

Pour un ensemble de pôles de contrôle dont la disposition spatiale est typologiquement rectangulaire appelé réseau caractéristique, la surface de BEZIER est définie par l'expression :

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_{i,m}(u) \cdot B_{j,n}(v) \cdot P_{ij} \quad u \in [0,1], v \in [0,1] \quad (\text{II.11})$$

qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$S(u, v) = \begin{bmatrix} B_{0,m}(u) & B_{1,m}(u) & \dots & B_{n,m}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{0,0} & \dots & P_{0,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{m,0} & \dots & P_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{0,n}(v) \\ \dots \\ B_{n,m}(v) \end{bmatrix}$$

3) Les surfaces rationnelles :

Comme pour les surfaces non rationnelles les surfaces rationnelles sont le produit cartésien de deux familles de courbes rationnelles suivant deux directions u et v .

Elle représente la transformation projective des surfaces non rationnelles en coordonnées homogènes définies dans l'espace 3D[8].

4) Les surface de BEZIER rationnelles :

Dans l'espace homogène, le carreau de BEZIER est engendré par déplacement et déformation d'une courbe de BEZIER. Le réseau caractéristique RS_{nn}^n et la séquence admissible de coordonnées homogènes définissent le carreau $S^n(u, v)$ dans l'espace homogène :

$H : R^3 \longrightarrow R^3$. Après application de la transformation on obtient :

$$S(u, v) = H. \{S^w(u, v)\} = H. \left\{ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,m}(u) \cdot B_{j,n}(v) \cdot P_{i,j}^w \right\} \quad (II.13)$$

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n W_{i,j} \cdot B_{i,m}(u) \cdot B_{j,n}(v) \cdot P_{i,j}}{\sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n W_{k,l} \cdot B_{k,m}(u) \cdot B_{l,n}(v)} \quad u, v \in [0,1], \quad (II.14)$$

et : $W_{i,j}, W_{k,l} > 0$

Avec :

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n G_{i,m}(u) \cdot G_{j,n}(v) \cdot P_{i,j} \quad (II.15)$$

a) Construction de surface réglée par le modèle de BEZIER rationnel :

Soit $C_1(t)$, $C_2(t)$ deux courbes données par :

$C_1(t) = \sum_{i=0}^m G_{i,m}(t) \cdot P_{i,0}$ et $C_2(t) = \sum_{i=0}^m G_{i,m}(t) \cdot P_{i,1}$ avec $G_{i,m}(t)$: fonction de BERSTEIN rationnelle.

Les surfaces sont données par la figure suivante :

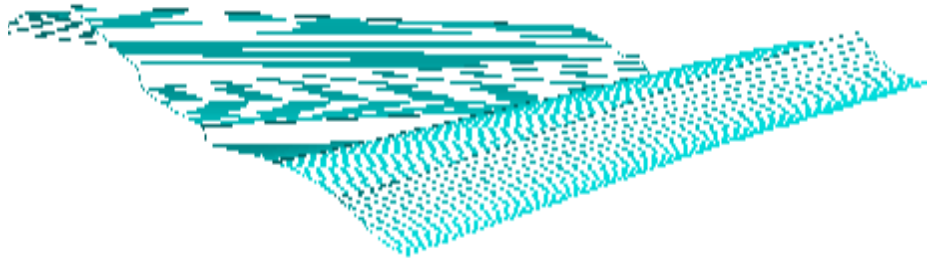


Figure II.2 – Surface de BEZIER rationnelle avec son réseau caractéristique.

b) Construction de surface réglée par le modèle de BEZIER non rationnel :

La figure suivante montre quelques exemples de courbes de BEZIER non rationnelle.

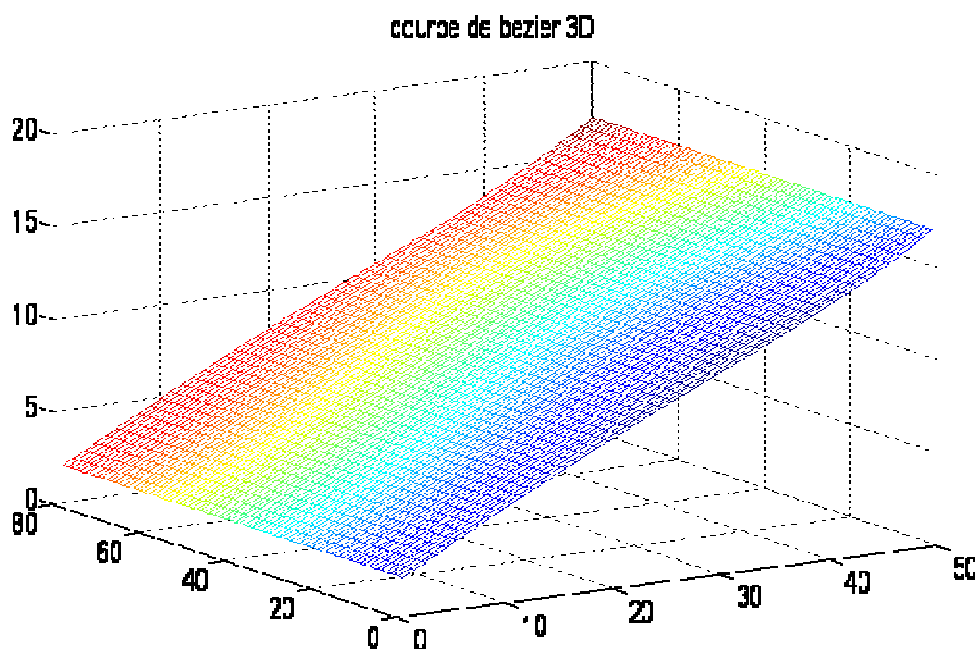


Figure II.3 – Surface de BEZIER non rationnelle avec son réseau caractéristique.

5) Surfaces B-spline :

Un carreau B-spline représente le lieu géométrique d'une courbe B-spline lorsqu'elle subit simultanément un déplacement et une déformation. La surface de B-

spline est le produit cartésien de deux familles de courbe B-spline suivant deux directions avec deux paramètres descripteurs u et v .

Le déplacement et la déformation d'une génératrice représentée par une courbe B-spline sont déterminés par un réseau de directrices qui sont toutes représentées par des courbes B-spline de même degré et de même séquence nodale[5].

L'expression du carreau de B-spline $S(u,v)$ définie par :

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,m}(u) \cdot N_{j,n}(v) \cdot P_{i,j} \quad (\text{II. 12})$$

Avec $u \times v \in [U_0, U_{n+m+1}] \times [V_0, V_{n+m+1}]$

$U_i, i \in \{0, \dots, n+m+1\}$	Séquence nodale suivant u .
$V_j, j \in \{0, \dots, t+r+1\}$	Séquence nodale suivant v .

Qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$S(u, v) = [N_{0,m}(u), N_{1,m}(u), \dots, N_{n,m}(u)] \begin{bmatrix} P_{0,0} & \dots & \dots & \dots & P_{0,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{m,0} & \dots & \dots & \dots & P_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_{0,n}(v) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ N_{n,n}(v) \end{bmatrix}$$

a) Construction de surface réglée par le modèle de B-spline rationnel :

Les courbes de B-spline rationnelles sont données par les relations suivantes :

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^1 R_{i,m}(u) \cdot R_{j,1}(v) \cdot P_{i,j}$$

$R_{j,n}(v), R_{i,m}(u)$: Fonctions de base B-splines rationnelles.

Pôles du réseau caractéristique.

Courbe réglée par les B-spline rationnel

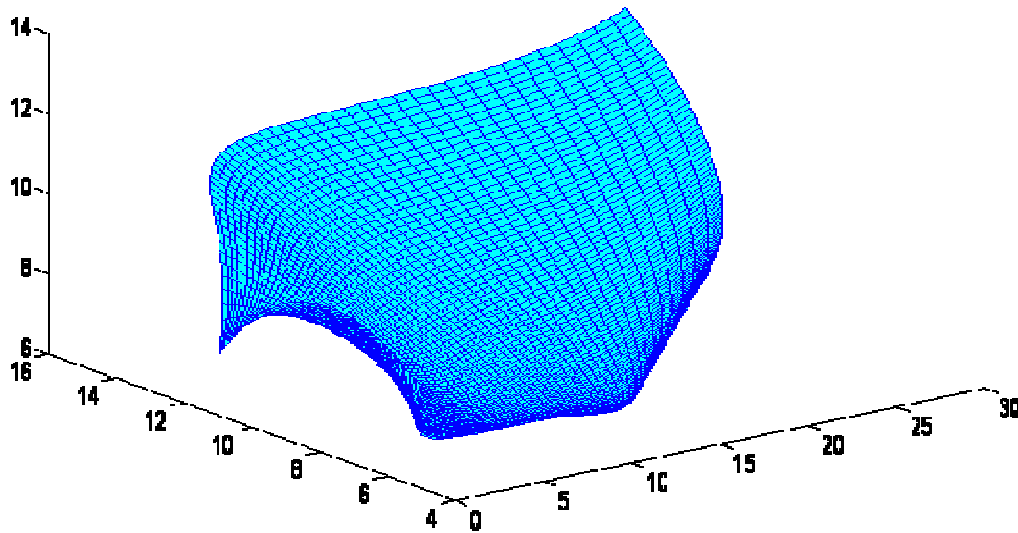


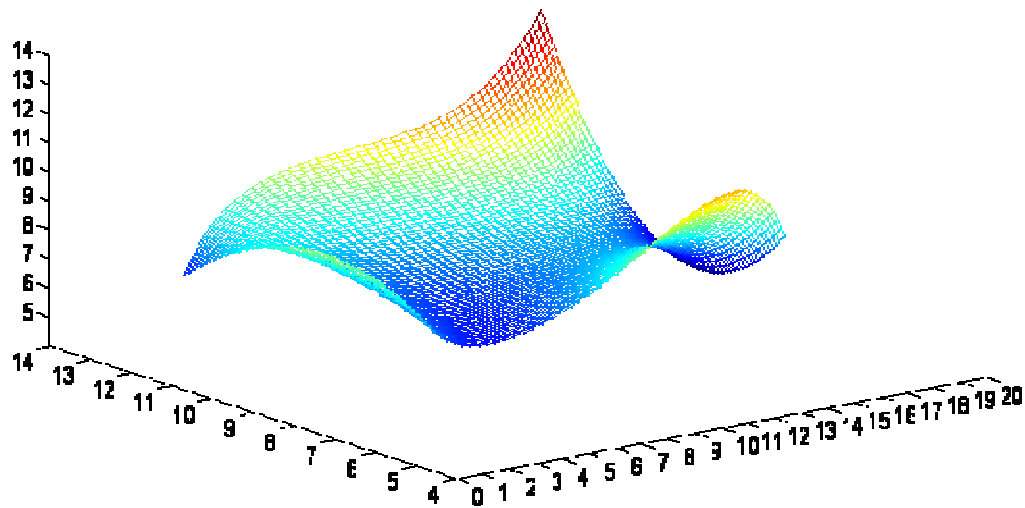
Figure II.4 – Surface de B-spline rationnelle avec son réseau caractéristique

b) Construction de surface réglée par le modèle de B-spline non rationnel :

Soit , deux courbes rationnelles de type NURBS, la surface réglée recherchée sera la surface $S(u,v)$ de degré 3 en v et de degré 4 en u , est contrôlée seulement par les pôles et les poids des deux courbes et ayant X et Y comme vecteurs nœuds.

La surface est donnée par :

Surface réglée par les B-spline non rationnel

**Figure II.5** – Surface de B-spline non rationnelle avec son réseau caractéristique

Ø Conclusion :

L'utilisation des courbes B-spline non rationnelles permettent une réalisation des formes plus complexe que celles réalisées par les courbes de BEZIER car il ya apparition des nouveaux paramètres qui sont les poids.

CHAPITRE III

Modélisation éléments finis iso-géométriques

III.1 Introduction :

Une méthode numérique pour l'analyse et l'optimisation de sensibilité de conception de forme complexe est développée, en utilisant la méthode d'analyse iso-géométrique avec des fonctions de base de NURBS. Dans la méthode d'analyse iso-géométrique, une fonction de base est adoptée directement à l'aide des fonctions NURBS dans la géométrie à réaliser, qui permet la description exacte d'un modèle géométrique. La conception de forme, en utilisant les éléments finis classiques a éprouvé certains problèmes, c'est-à-dire, la frontière des éléments finis devrait être paramétrisée pour la variation sans heurt en utilisant un modèle géométrique séparé, tel qu'un système réalisé par le DAO. En outre, le modèle de conception devrait être transformé, pour exprimer la grande perturbation d'un domaine par éléments finis. Dans l'approche iso-géométrique, la fonction de base NURBS qui est employée dans la représentation du modèle géométrique du système, est directement employée dans l'analyse de réponse du système, et la frontière de conception est exprimée par la même fonction de NURBS.

III.2 Analyse iso-géométrique:**a) Définition :**

Dans cette méthode, le champ de réponse est interpolé par exactement les mêmes fonctions de base NURBS utilisées dans la modélisation de la géométrie à étudier. Dans la méthode d'analyse iso-géométrique, des limites d'ordre plus supérieur sont exactement évaluées, pour fournir des informations plus précises sur la sensibilité du modèle éléments-finis de base. Pour une meilleure qualité de solution, des techniques d'amélioration des résultats qui sont h-raffinement, et P-raffinement et k-raffinement sont utilisées. Puis, la méthode d'analyse iso-géométrique est comparée à la méthode des éléments finis, pour la vérification de cette méthode, des exemples analytiques et leurs formulations détaillées sont donnés pour un cas bidimensionnel.

Dans MEF il y a une notion d'une maille et une notion d'un élément, mais un élément a deux représentations, une dans le domaine apparent, et l'autre dans l'espace

physique. Des éléments sont habituellement définis par leurs coordonnées nodales, et leurs degrés de liberté sont les valeurs des fonctions de base aux nœuds. Les fonctions d'interpolation des éléments finis sont généralement interpolées et peuvent prendre des valeurs positives et négatives. Des fonctions de base des éléments finis sont connues souvent sous le nom des "fonctions d'interpolation"

Dans l'approche iso-géométrique il y a deux notions de mailles, la maille de commande et la maille physique. Les points de commande définissent la maille de commande, et la maille de commande interpole les points de commande. La maille de commande contient des éléments non linéaires, dans deux dimensions ils sont les éléments quadrilatéraux bilinéaires, et dans le cas tridimensionnel ce sont les éléments hexaédriques trilitères. La maille de commande ne se conforme pas à la géométrie réelle. Plutôt, elle est comme un échafaudage qui commande la géométrie. La maille de commande a la même forme d'une maille multilinéaire. Les variables de commande sont les degrés de liberté et elles sont situées aux points de commande. Elles peuvent être considérées en tant que "coordonnées généralisées." Des éléments de commande peuvent être dégénérés à une forme plus primitive, telle que des triangles et des tétraèdres. La maille de commande peut également être sévèrement tordue et même inversée jusqu'à un degré, alors qu'en même temps, pour NURBS elle est suffisamment lisse, la géométrie physique peut être immobile (contrairement aux éléments finis).

La maille physique est une décomposition de la géométrie réelle. Il y a deux notions des éléments dans la maille physique, la pièce rapportée et l'envergure de nœud. La pièce rapportée peut être considérée comme un macroélément. La plupart des géométries utilisant une pièce rapportée simple.

b) Présentation de la méthode :

Dans l'analyse iso-géométrique, le modèle géométrique $C(u)$ est exprimé à l'aide des fonctions NURBS qui correspondent aux points de contrôle P_i tel que :

Les $C(u)$ permettent la continuité inter-élément dans l'espace physique.

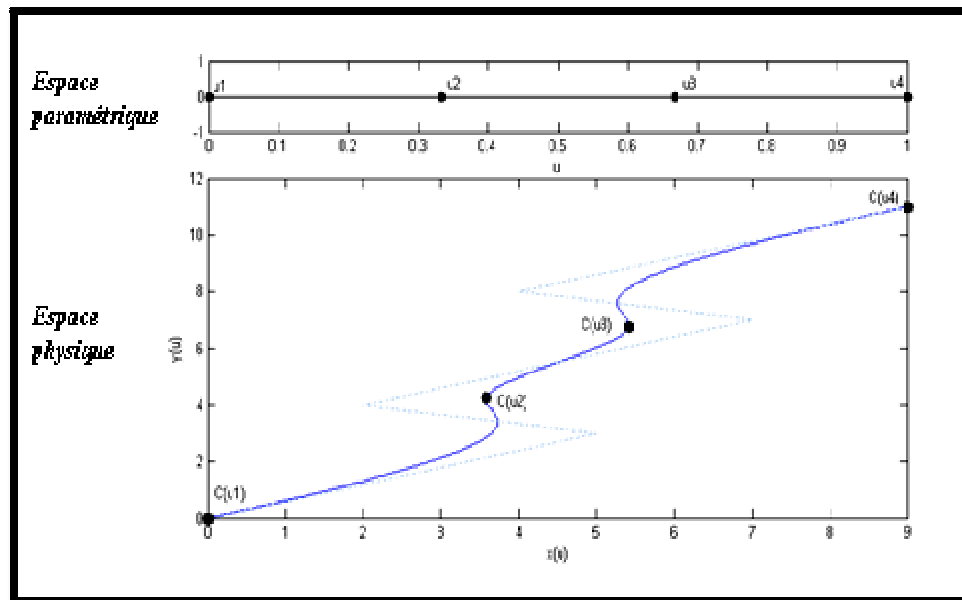


Figure III.1 – Répartition des nœuds dans le domaine paramétrique.

Le champ de solution $U(u)$ est représenté par les mêmes fonctions de base qui correspondent aux réponses telles que :

Pour l'analyse iso-géométrique le domaine paramétrique est donné par le produit tensoriel des deux vecteurs de on a :

On prend l'exemple des deux vecteurs nœuds suivants :

$$\Xi = \{0,0,0,0,2,4,4,4,4\}$$

$$\mathcal{H} = \{0,0,0,0,2,4,4,4,4\}$$

Donc le domaine paramétrique Ω_u est donné par la figure (III.2).

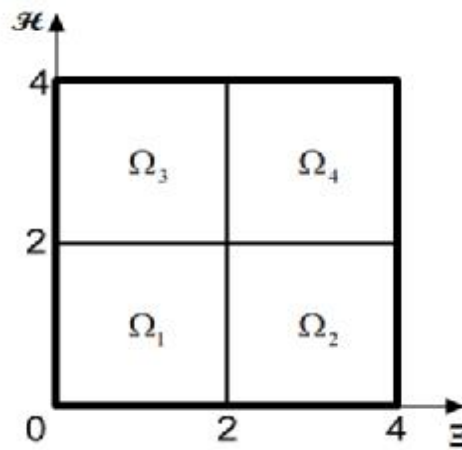


Figure III.2 –Domaine paramétrique Ω_u .

Chaque envelopure de nœud est considérée comme une maille pour l'intégration numérique, Sur la figure (III.2), le domaine paramétrique est divisé en quatre mailles comme suit :

$$\Omega_1 = [0, 2] \times [0, 2],$$

$$\Omega_2 = [2, 4] \times [0, 2],$$

$$\Omega_3 = [0, 2] \times [2, 4],$$

$$\Omega_4 = [2, 4] \times [2, 4].$$

Les points de commande (points rouges) correspondant aux fonctions de base qu'on calcule à partir de chaque vecteur de nœud définissent la géométrie du modèle

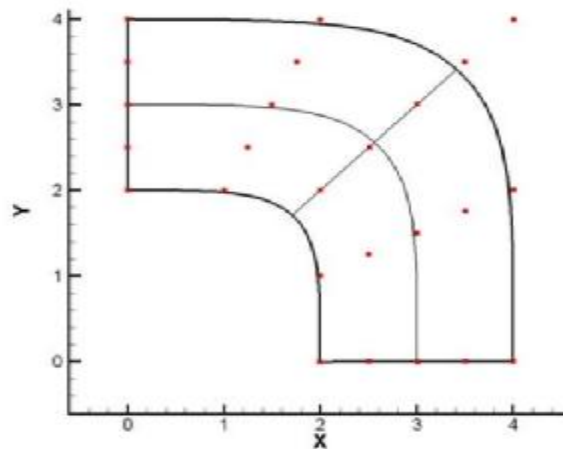
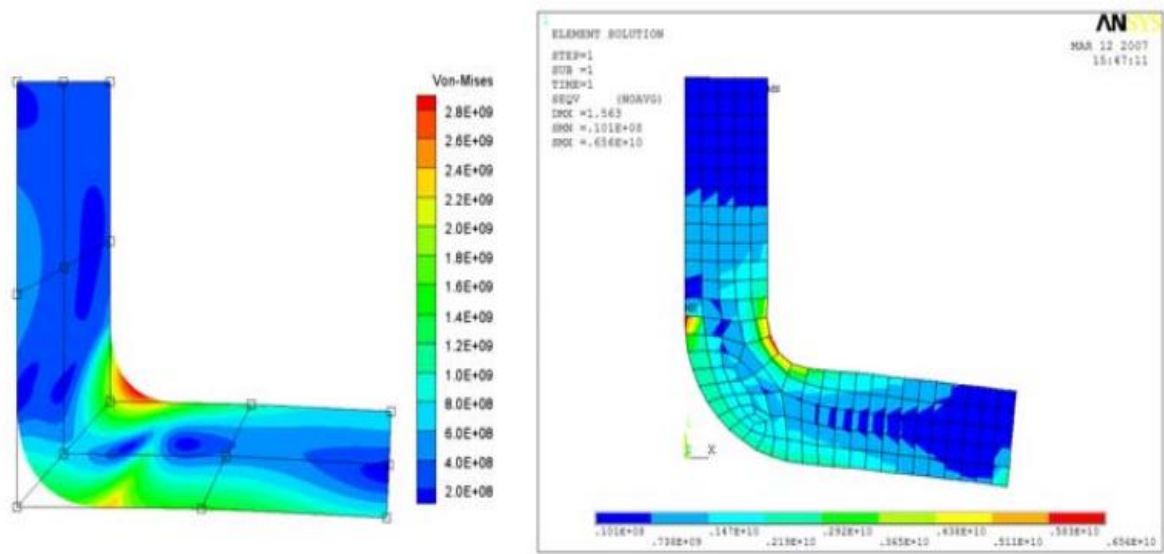


Figure III.3 – Domaine physique Ω

Les fonctions de base pour l'analyse iso-géométrique l'ordre P , sont $(P-m)$ fois continuellement dérivables aux voisinages des champs des contraintes, quand les fonctions de base du deuxième ou plus supérieur ordre sont utilisées, tandis que la méthode des éléments finis donne seulement la continuité inter-éléments[6].



(a) - Méthode d'analyse iso-géométrique.

(b) – Méthode des éléments finis.

Figure III.4 - Distributions d'effort en utilisant l'approche de Von-Mises

III.3 Méthode d'analyse d'Iso-géométrie :

1) Insertion des nœuds :

Dans l'analyse iso-géométrie, il y a trois méthodes : On a h-refinement et l'autre est p-refinement, et k-refinement.

Pour notre cas on va juste utiliser la méthode h-refinement, cette méthode consiste à augmenter le nombre de fonctions de base, il n'y a aucun changement de forme avant et après l'amélioration[4].

Pour un ensemble donné de points de contrôle $P_i(x_i, y_i, z_i)$ et les poids W_i , la courbe qui définit les NURBS est donnée à l'aide du vecteur nœud suivant :

$$\Xi = \{u_1, \dots, u_{n+p+1}\} \quad (\text{III. 4})$$

Alors :

$$C^w(u) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(u) \cdot P_i^w \quad (\text{III. 5})$$

Où P_i^w est défini comme suit :

$$P_i^w = (w_i \cdot x_i, w_i \cdot y_i, w_i \cdot z_i, w_i) \quad (\text{III. 6})$$

Après insertion du nœud $\tilde{u} \in [u_k, u_{k+1})$ le nouveau vecteur nœud est défini par :

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi} &= \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_k, \tilde{u}_{k+1}, \tilde{u}_{k+2}, \dots, \tilde{u}_{n+p+1}, \tilde{u}_{n+p+2}\} \\ &= \{u_1, u_2, \dots, u_k, \tilde{u}, u_{k+1}, \dots, u_{n+p}, u_{n+p+1}\} \end{aligned}$$

Si V_{Ξ} , $V_{\tilde{\Xi}}$ sont deux vecteurs espace des deux courbes définie par Ξ et $\tilde{\Xi}$ respectivement, il est clair que $V_{\Xi} \subset V_{\tilde{\Xi}}$ alors $C^w(u)$ peut être représenté par :

$$C^w(u) = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{N}_{i,p}(u) \cdot \tilde{P}_i^w \quad (\text{III. 7})$$

Les nouveaux points de contrôle $\{\tilde{P}_i^w\}$ peuvent être déterminés après résolution du système d'équations linéaires suivant :

$$\sum_{i=1}^n N_{i,p}(u) \cdot P_i^w = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{N}_{i,p}(u) \cdot \tilde{P}_i^w \quad (\text{III. 8})$$

Alors :

$$\sum_{i=k-p}^k N_{i,p}(u) \cdot P_i^w = \sum_{i=k-p}^{k+1} \tilde{N}_{i,p}(u) \cdot \tilde{P}_i^w \quad (\text{III. 9})$$

Pour tout $\tilde{u} \in [u_k, u_{k+1})$, on a :

$$N_{i,p}(u) = \tilde{N}_{i,p}(u) \quad i = 0, \dots, k-p-1 \quad (\text{III. 10})$$

$$N_{i,p}(u) = \tilde{N}_{i+1,p}(u) \quad i = k+1, \dots, n \quad (\text{III. 11})$$

Cela veut dire que :

$$P_i^w = \tilde{P}_i^w \quad i = 0, \dots, k-p-1 \quad (\text{III. 12})$$

$$P_i^w = \tilde{P}_{i+1}^w \quad i = k+1, \dots, n \quad (\text{III. 13})$$

Puis considérons les $N_{i,p}(u)$ pour $i = k - p, \dots, k$. Qui peuvent être exprimés en fonction des $\tilde{N}_{i,p}(u)$ pour $i = k - p, \dots, k + 1$, par

$$N_{i,p}(u) = \frac{\tilde{u} - \tilde{u}_i}{\tilde{u}_{i+p+1} - \tilde{u}_i} \tilde{N}_{i,p}(u) + \frac{\tilde{u}_{i+p+2} - \tilde{u}}{\tilde{u}_{i+p+2} - \tilde{u}_{i+1}} \tilde{N}_{i+1,p}(u) \quad (\text{III. 14})$$

Après interpolation, pour $i = k - p + 1, \dots, k$,

$$\alpha_i = \frac{\tilde{u} - u_i}{u_{i+p} - u_i} \quad (\text{III. 15})$$

Et :

$$1 - \alpha_i = \frac{u_{i+p} - \tilde{u}}{u_{i+p} - u_i} \quad (\text{III. 16})$$

On a alors :

$$\tilde{P}_{k-p}^w = P_{k-p}^w$$

$$\tilde{P}_i^w = \alpha_i \cdot P_i^w + (1 - \alpha_i) \cdot \tilde{P}_{i-1}^w \quad k - p + 1 \leq i \leq k. \quad (\text{III.17})$$

$$\tilde{P}_{k+1}^w = P_k^w$$

Finalement, on aura les nouveaux points de contrôle $\{\tilde{P}_i^w\}$ comme suit :

$$\tilde{P}_i^w = \alpha_i \cdot P_i^w + (1 - \alpha_i) \cdot \tilde{P}_{i-1}^w \quad (\text{III. 18})$$

Où :

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & i \leq k - p \\ \frac{\tilde{u} - u_i}{u_{i+p} - u_i} & k - p + 1 \leq i \leq k \\ 0 & k + 1 \leq i \end{cases} \quad (\text{III. 19})$$

En prenant un exemple qui a pour vecteur nœud original $\Xi = \{0,0,0,0,1,2,2,2,2\}$, et le nouveau nœud inséré est 1.5, alors le vecteur nœud va être défini par :

$$\tilde{\Xi} = \{0,0,0,0,1,1.5,2,2,2,2\}$$

Puisque les nœuds d'extrémité sont répétés quatre fois l'ordre des fonctions de base est $p=3$, et $k=5$.

On aura alors :

$$\{\alpha_i\} = \left\{1, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0\right\} \quad (\text{III.20})$$

En substituant l'équation (III.16) par (III.18) on aura :

$$\tilde{P}_1^w = \alpha_1 \cdot P_1^w = P_1^w$$

$$\tilde{P}_2^w = \alpha_2 \cdot P_2^w + (1 - \alpha_2) \cdot P_1^w$$

$$\tilde{P}_3^w = \alpha_3 \cdot P_3^w + (1 - \alpha_3) \cdot P_2^w$$

$$\tilde{P}_4^w = \alpha_4 \cdot P_4^w + (1 - \alpha_4) \cdot P_3^w$$

$$\tilde{P}_5^w = \alpha_5 \cdot P_5^w + (1 - \alpha_5) \cdot P_4^w$$

$$\tilde{P}_6^w = (1 - \alpha_6) \cdot P_5^w = P_5^w$$

2) Comparaison par rapport à la MEF :

La méthode des éléments finis et la méthode d'analyse iso-géométrique ont toutes les deux le concept iso-paramétrique. Elles utilisent les mêmes fonctions de base dans la description du modèle de la géométrie et l'analyse de réponse. La différence est que la méthode des éléments finis emploie habituellement des fonctions polynômiales de base, alors que la méthode iso-géométrique d'analyse tire

leurs profits des fonctions de base NURBS. Dans la formulation des éléments finis, chaque élément est habituellement transformé en coordonnées paramétriques :

$u(-1,1) \times v(-1,1)$, comme le montre la figure (III.5).

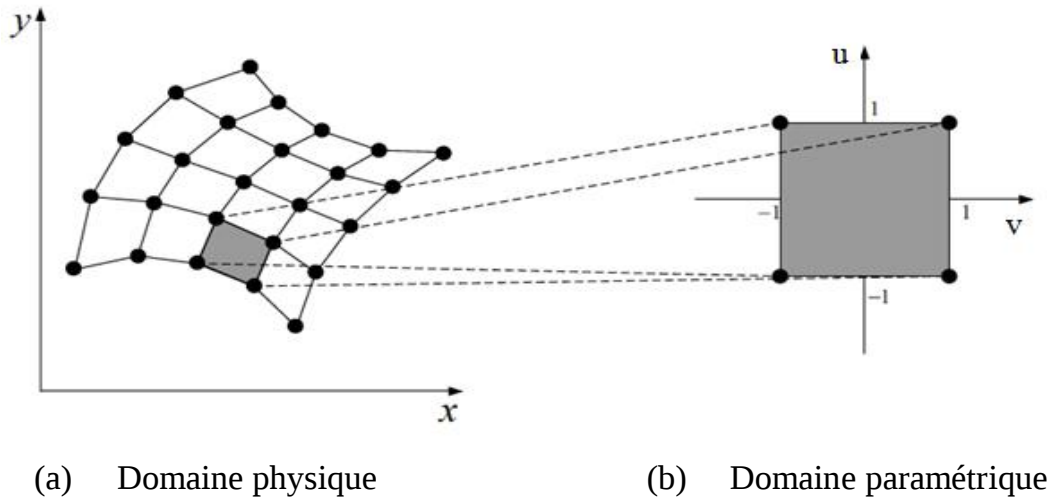


Figure III.5 - Modèle éléments finis.

Pour le cas d'un élément quadrilatéral (possédant 4 nœuds), les fonctions de base utilisées dans la MEF sont :

$$N_1 = \frac{1}{4} \cdot (1 - u) \cdot (1 - v), \quad N_2 = \frac{1}{4} \cdot (1 + u) \cdot (1 - v)$$

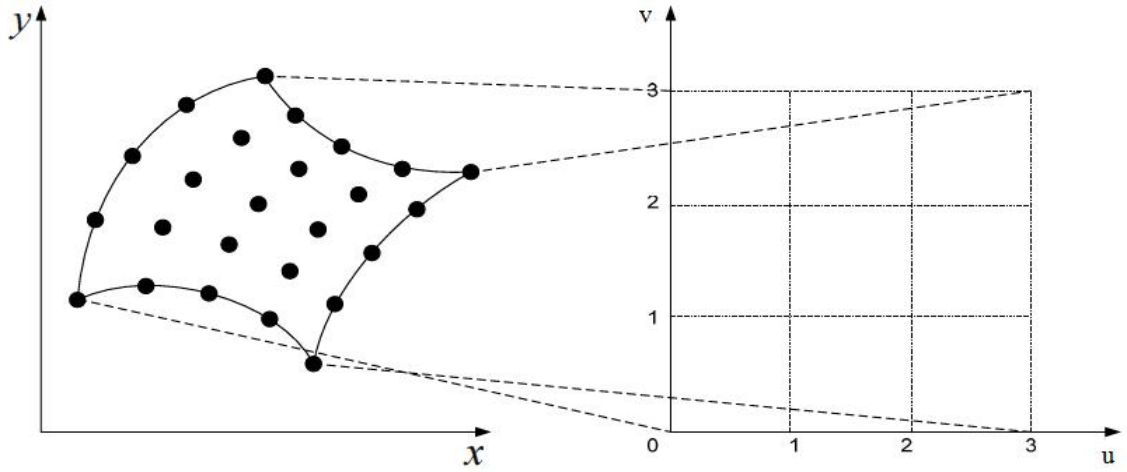
$$N_3 = \frac{1}{4} \cdot (1 + u) \cdot (1 + v), \quad N_4 = \frac{1}{4} \cdot (1 - u) \cdot (1 + v)$$

Et les coordonnées géométriques X sont interpolées par la relation suivante :

$$X(u, v) = \sum_{i=1}^4 N_i(u, v) \cdot x_i \quad (\text{III.21})$$

Où x_i sont les coordonnées géométriques des points de contrôle.

Dans l'approche d'analyse iso-géométrique, le domaine physique s'est transformé en domaine paramétrique $(u \times v)$.



(a) Domaine physique

(b) Domaine paramétrique

Figure III.6 - Modèle iso-géométrique.

Dans l'analyse iso-géométrique, X est donné par la relation suivante :

$$X(u, v) = \sum_i^n R_i(u, v) \cdot P_i \equiv \mathbf{R} \mathbf{P} \quad (\text{III. 22})$$

Où les matrices de base des fonctions NURBS $\mathbf{R}$ est donnée comme suit :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & R_2 & 0 & \dots & \dots & 0 & R_n & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & R_2 & 0 & \dots & \dots & 0 & R_n \end{bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

Et le vecteur position $\mathbf{P}$ est définit par :

$$\mathbf{P} = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ \dots \ \dots \ x_n \ y_n]^T \quad (\text{III. 24})$$

En utilisant les mêmes fonctions de base NURBS, la réponse du système est donnée par la relation suivante :

$$\mathbf{u}(u, v) = \sum_i^n R_i(u, v) \cdot d_i \quad (\text{III. 25})$$

Qui est exprimé par le vecteur $\mathbf{d}$:

$$\mathbf{d} = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ \dots \dots \dots u_n \ v_n]^T \quad (\text{III. 26})$$

On peut facilement déterminer la matrice de l'opérateur linéaire de contrainte

$\mathbf{B}(\mathbf{x})$ après les dérivations partielles de la matrice $\mathbf{R}$ tel que :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R} \quad (\text{III. 27})$$

Pour un polynôme donné d'ordre p et de vecteur nodal Ξ , la dérivée de la $i^{\text{ème}}$ fonction de base est donnée par :

$$\frac{d}{du} N_{i,p}(u) = \frac{p}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) - \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u). \quad (\text{III. 28})$$

Pour une dérivée d'ordre k :

$$\frac{d^k}{d^k u} N_{i,p}(u) = \frac{p}{u_{i+p} - u_i} \left(\frac{d^{k-1}}{d^{k-1} u} N_{i,p-1}(u) \right) - \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \left(\frac{d^{k-1}}{d^{k-1} u} N_{i+1,p-1}(u) \right) \quad (\text{III. 29})$$

On détermine la matrice jacobine J qui est donnée par :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

Qu'on peut déterminer autrement :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial R}{\partial y} \end{pmatrix} = J^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial u} \\ \frac{\partial R}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (\text{III.31})$$

Ou $\frac{\partial R}{\partial u}$ et $\frac{\partial R}{\partial v}$ sont les dérivées partielles des fonctions de base NURBS. Ceci nous permet d'accéder à la matrice de rigidité élémentaire :

$$K_e = \iint_{\Omega} \mathbf{B}^T(u, v) \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{B}(u, v) \cdot \det(J) \, du \, dv \quad (\text{III.32})$$

Pour la simplicité nous nous limitons à une pièce rapportée de NURBS. L'équation discrète fondamentale d'équilibre est :

$$K_e \cdot \mathbf{U} = \mathbf{f} \quad (\text{III.33})$$

Après avoir déterminé les déplacements des nœuds par le vecteur $\mathbf{U}$, on peut par la suite déterminer la déformation de la structure à étudier[5].

Pour l'application des NURBS à l'analyse des structures, la première dérivée des surfaces NURBS en respectant les paramètres des surfaces u et v , on peut définir :

$$S(u, v) = \frac{w(u, v) \cdot S(u, v)}{w(u, v)} = \frac{A(u, v)}{w(u, v)} \quad (III. 34)$$

Où $A(u, v)$ est la surface nonrationnelle B-spline et $w(u, v)$ est le paramètre poids de la surface.

$$w(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_i^{(p)}(u) \cdot M_j^{(q)}(v) \cdot w_{i,j} \quad (III. 35)$$

Où $N_i^{(p)}(u)$ et $M_j^{(q)}(v)$ sont les fonctions de base NURBS.

Les dérivées de $S(u, v)$ en respectant la variable u et v sont données par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} S(u, v) = S_{,u}(u, v) &= \frac{(w(u, v) \cdot S(u, v))_{,u} \cdot w_u(u, v) - (w(u, v) \cdot S(u, v)) \cdot w_u(u, v)}{(w(u, v))^2} \\ &= \frac{A_{,u}(u, v) - S(u, v) \cdot w_u(u, v)}{w(u, v)} \end{aligned} \quad (III. 36)$$

La dérivée $A_{,u}(u, v)$ de la surface B-spline $A(u, v)$ est définie comme suit :

$$A_{,u}(u, v) = p \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m N_{i+1}^{(p-1)}(u) \cdot M_j^{(q)}(v) \cdot \frac{P_{(i+1).j} - P_{i,j}}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \quad (III. 37)$$

Par la suite on peut déterminer $S_{,v}(u, v)$ de la même façon que $S_{,u}(u, v)$.

III.4 Interaction fluide-structure :**a) Introduction :**

Ces dernières années des techniques informatiques ont été appliquées largement par des chercheurs, qui essaient de simuler l'écoulement d'un fluide dans les modèles tridimensionnelles, par exemple :

- Une coque d'un navire ;
- Écoulement du sang dans les artères ;
- Écoulement de l'eau dans une durite.

Bien que le progrès significatif ait été accompli ces dernières années en résolvant des problèmes d'interaction de fluide-structure, cette résolution est un grand défi pour l'informatique car il est très difficile de résoudre des problèmes de ce genre.

Dans un problème d'interaction fluide-structure il existe deux approches :

ü Approche monolithique

ü Approche décalée

b) Approche décalée :

Dans des approches décalées, les équations de fluide, de solide et de mouvement de maille sont résolues séquentiellement, de mode désaccouplée. En outre pour beaucoup de problèmes, l'approche décalée fonctionne bien car elle est efficace, ce pendant, des difficultés sous forme de manque de convergence ont été noté dans certaines cas, et pour cela plusieurs ont essayé de les éviter.

c) Approche monolithique :

Dans le cas des approches monolithiques, les équations d'interaction fluide –structure et du mouvement des mailles sont résolue simultanément.

Le but de notre travail est de développer une formulation iso-géométrique robuste, pour l'analyse de l'interaction. En conséquence, nous avons opté pour une approche monolithique, en supposons la présence d'un fluide à l'intérieur de la structure, et nous avons calculé le décalage des nœuds des mailles [3].

Ø Conclusion :

L'analyse iso-géométrique remplace la MEF dans les logiciels de DAO car elle permet de modélisé des forme géométrique complexes, elle permet aussi l'analyse des structure a partir des fonctions données par les équations précédentes.

L'application des éléments finis iso-géométrique pour l'analyse des interactions fluide-structure permet de validé cette méthode d'analyse.

CHAPITRE IV

*Application à l'interaction
fluide-structure*

Ce chapitre est consacré aux applications test numériques. Les cas test de simulation sont exécutés avec le logiciel MATLAB.

IV.1 – Présentation de la structure :

Notre structure est une durite d'eau mince en silicone avec une épaisseur négligeable, qui a une forme cylindrique, et les caractéristiques mécaniques représentées dans le tableau ci-dessous.

<i>Caractéristique mécaniques :</i>	
Module d' Young	$E = 200 \text{ Mpa}$
Longueurs	$L = 300 \text{ mm}$ $D = 20 \text{ mm}$

Tableau IV.1 – Caractéristiques mécaniques de la structure

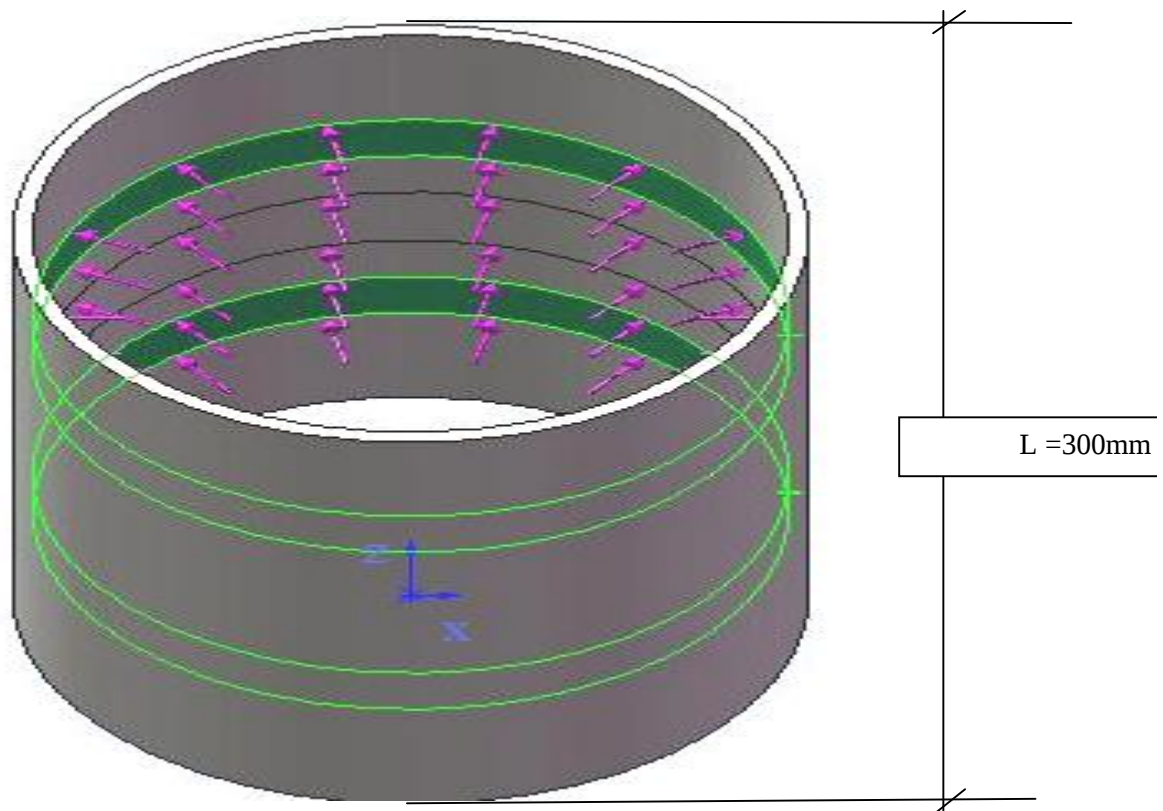


Figure IV.1 – Durite d'eau sous pression.

Avant de passer aux calculs d'application numérique nous tenant à exprimer les conditions suivantes :

- Ø On suppose que l'eau est un fluide incompressible ;
- Ø Qu'il n'y a pas de variation volumique (fluide iso volume) ;
- Ø Et on néglige la poussée d'Archimède.

IV.2 – Détermination des différents paramètres :

En utilisant deux vecteurs nœuds Ξ et Γ pour la détermination des fonctions de base B-spline, on se base sur les formules (II.1) de COX et BOOR énoncés dans le chapitre II, avec les paramètres suivant :

- ü Degré du polynôme 1 : $P_1 = 2$.
- ü Ordre de multiplicité : $P_1 + 1 = 3$.
- ü Abscisse curviligne : $t_1 = 0 : 1/41 : 1$.
- ü Nombre de pôles (points de contrôle) : $n = 9$.

En respectant la règle : $\Xi = \{0, 0, 0, \dots, 1, 1, 1\}$.

$$\begin{array}{c} \underbrace{\quad\quad\quad}_{P_1 + 1} \quad \underbrace{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}_{P_1 + n + 1} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{P_1 + 1} \\ \{0, 0, 0, \dots, 1, 1, 1\} \end{array}$$

- ü Vecteur nœud 1 :

$$\Xi = \left\{0, 0, 0, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{7}, 1, 1, 1\right\}.$$

Pour déterminer les fonctions de base NURBS $R_{i,m}(u)$, il faut utiliser les fonctions B-spline précédentes, en tenant compte de la présence du vecteur poids W .

Dans le cas d'une géométrie circulaire avec $n = 9$ points de contrôle on a le vecteur poids suivant :

$$W = \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right\}$$

La figure suivante montre une simulation d'un cercle sur le logiciel MATLAB.

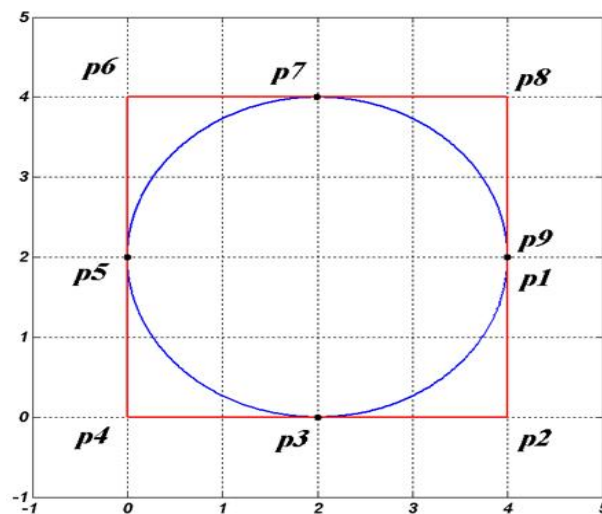


Figure IV.2 – Figure qui représente le cas d'une géométrie circulaire.

La figure suivante montre bien la répartition des poids sur la géométrie, tel que les points de contrôle sont les P_i représentés sur la figure (IV.2)

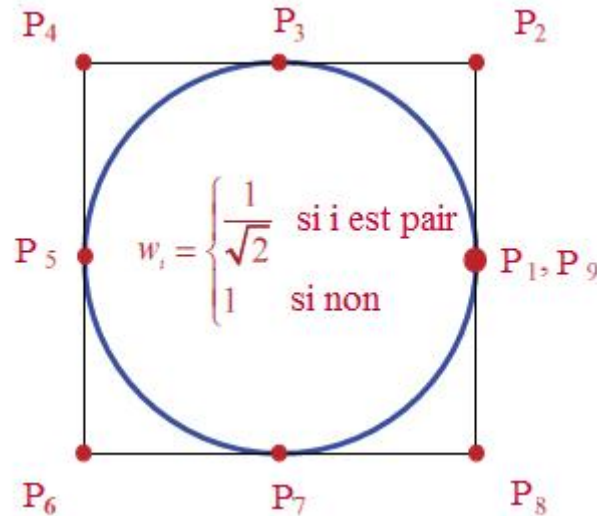


Figure IV.3 – Répartition des poids dans le cas d'une géométrie circulaire.

Ø Remarque :

D'après le vecteur nœud on aura quatre éléments qui est insuffisant pour faire une analyse de la structure, donc on aura besoin d'utiliser la méthode d'insertion de nœuds.

IV.3 -Insertion des nœuds :

Les nœuds intermédiaires sont donnés par le vecteur Ξ_i tel que :

$$\Xi_i = \left\{ \frac{4}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{6}{7} \right\}$$

A la fin de l'opération de l'insertion de nœuds on aura à la totalité $n_1 = 15$, tout en respectant la règle suivante $\Xi = \{0, 0, 0, \dots, 1, 1, 1\}$.

$$\underbrace{\underbrace{P_1 + 1} \quad \underbrace{P_1 + 1}}_{P_1 + n_1 + 1}$$

Donc le vecteur nœud final est :

$$\Xi = \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{6}{7}, 1, 1, 1 \right\}$$

IV.4 -Détermination des fonctions NURBS :

Après on calcule les fonctions de base B-spline $N_{i,n}(u)$ par la relation de COX et BOOR, après avoir déterminé la fonction NURBS, on aura besoin d'un deuxième vecteur nœud Γ , et des différents paramètres tel que les fonctions NURBS suivant ce vecteur pour arriver a représenter la durite, qui a une géométrie cylindrique, telle que :

- ü Degré du polynôme 1 : $P_2 = 1$.
- ü Ordre de multiplicité : $P_2 + 1 = 2$.
- ü Abscisse curviligne : $t_2 = 0 : 1/41 : 1$.
- ü Nombre de pôles (points de contrôle) : $n_2 = 7$.

$$\Gamma = \underbrace{\left\{ 0, 0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7} \right\}}_{P_2+1} \underbrace{\left\{ 1, 1 \right\}}_{P_2+1}$$

$P_2 + n_2 + 1$

IV.5 -Maillage éléments finis iso-géométriques :

Donc on aura la répartition des éléments finis iso-géométriques suivante à partir des vecteurs nœuds Γ et Ξ :

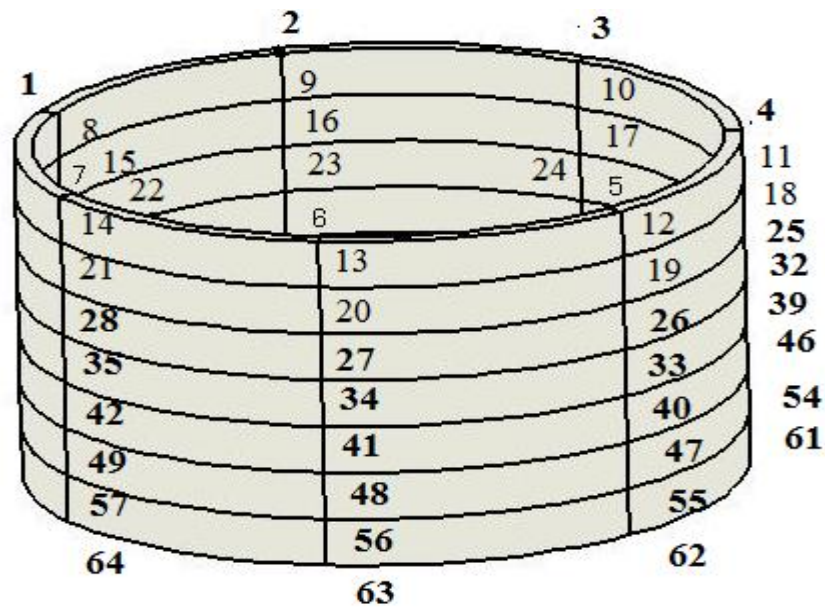


Figure IV.4 – Répartition nodale sur la géométrie cylindrique.

Après détermination des fonctions NURBS, en utilisant les pôles et les autres données précédentes, on peut également modéliser la durite cylindrique qui est donnée par la figure (IV.4)

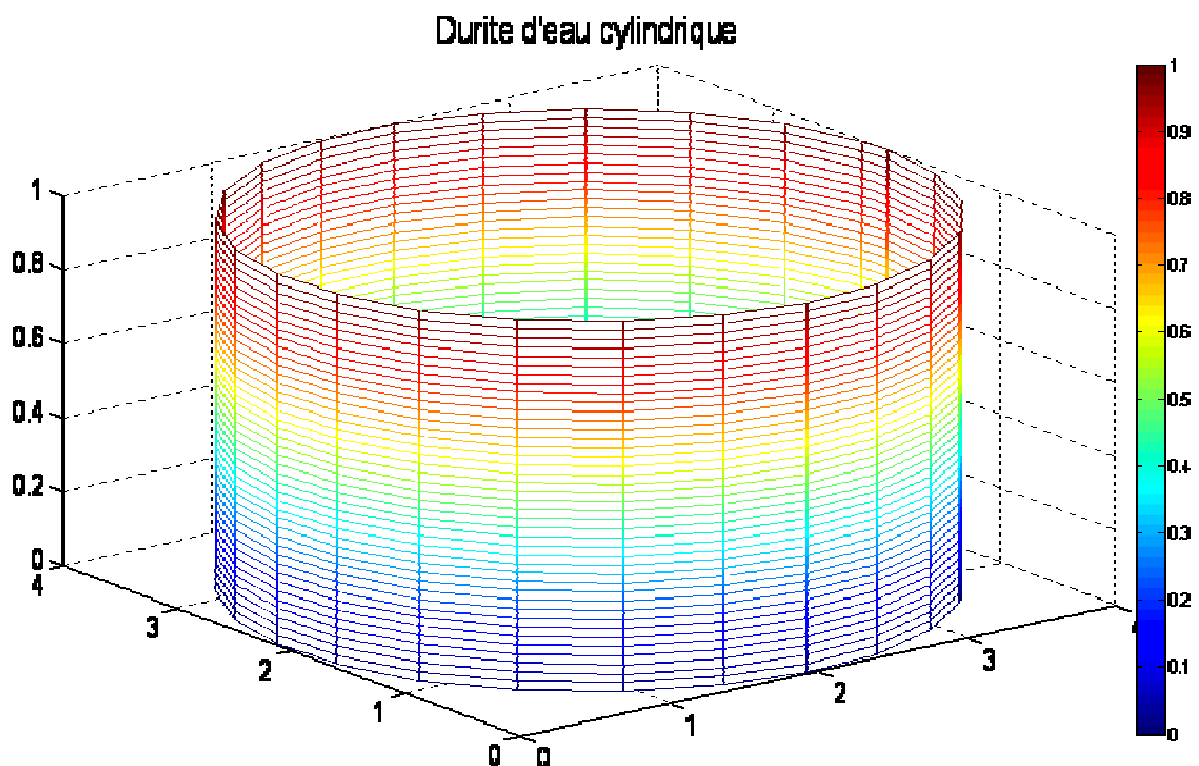


Figure IV.5 – Durite sous forme cylindrique avant déformation.

La barre représenté sur la figure (IV.5), représente la variation de .

IV.6 -Application des efforts :

Après avoir modélisé le cylindre avant la déformation, on doit montrer la répartition des efforts dans la durite (le cylindre), la figure ci-dessous illustre les efforts dans la durite :

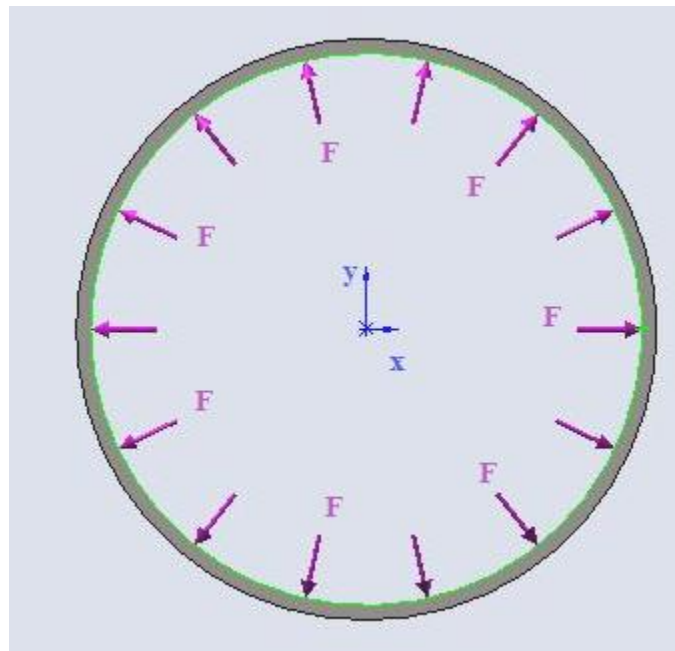


Figure IV.6 – Répartition des efforts dans la durite

Les efforts sont F exercés sur la paroi du cylindre par effet de l'interaction entre le fluide (eau) et la structure (durite cylindrique) tel que F est une charge répartie suivant les deux axes perpendiculaires x et y :

$$F = (0 : 1.5) \text{ [N]}$$

$$F = \text{ , avec le pas } Pa = 0.03\text{N.}$$

est exercée sur la ligne qui contient les nœuds suivants :

{8,9,10,11,12,13,14} et la ligne qui contient les nœuds {57,58,59,60,61,62,63,64}

Après avoir dérivé les fonctions de base B-spline, on détermine le jacobien des , on doit intégrer pour avoir les matrices de rigidité élémentaires en utilisant la méthode du trapèze.

En définissant les matrices élémentaires de rigidité suivantes à partir de la formule (III.32) :

$ke1 = 1.0e+015$

```
[0.2459 -0.6485  0.7629 -0.5643  0.2776 -0.0862  0.0126  0.0000
-0.6485  1.7600 -2.1889  1.7628 -0.9648  0.3325 -0.0531  0.0000
 0.7629 -2.1889  3.0178 -2.7995  1.7839 -0.6988  0.1226  0.0000
-0.5643  1.7628 -2.7995  3.0583 -2.2518  0.9784 -0.1839  0.0000
 0.2776 -0.9648  1.7839 -2.2518  1.8449 -0.8582  0.1683 -0.0000
-0.0862  0.3325 -0.6988  0.9784 -0.8582  0.4160 -0.0837  0.0000
 0.0126 -0.0531  0.1226 -0.1839  0.1683 -0.0837  0.0171 -0.0000
 0.0000  0.0000  0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000]
```

Les fonctions B-spline sont alors données par la figure (IV.7) suivante :

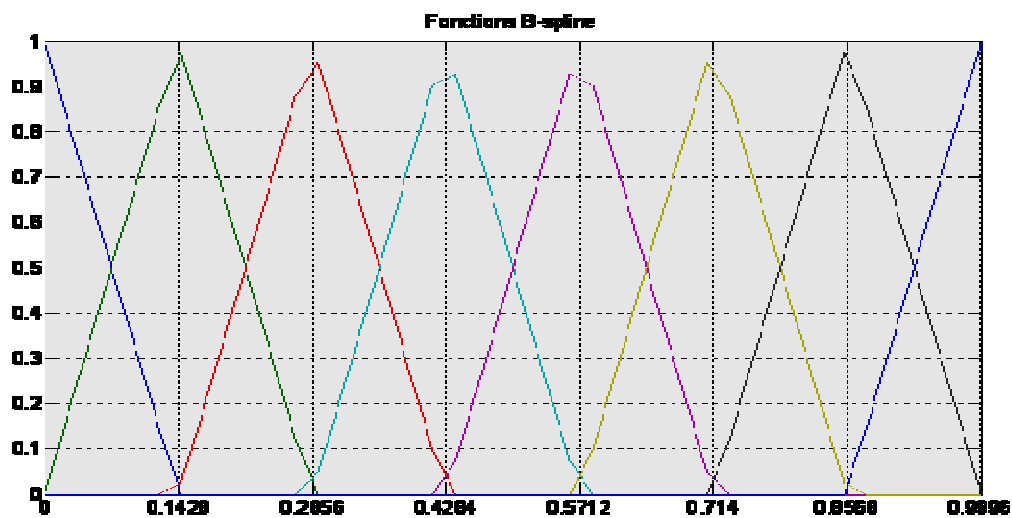


Figure IV.7 – Courbe des fonctions B-spline.

La première dérivée des fonctions B-spline est alors donnée par la figure (IV.8) suivante :

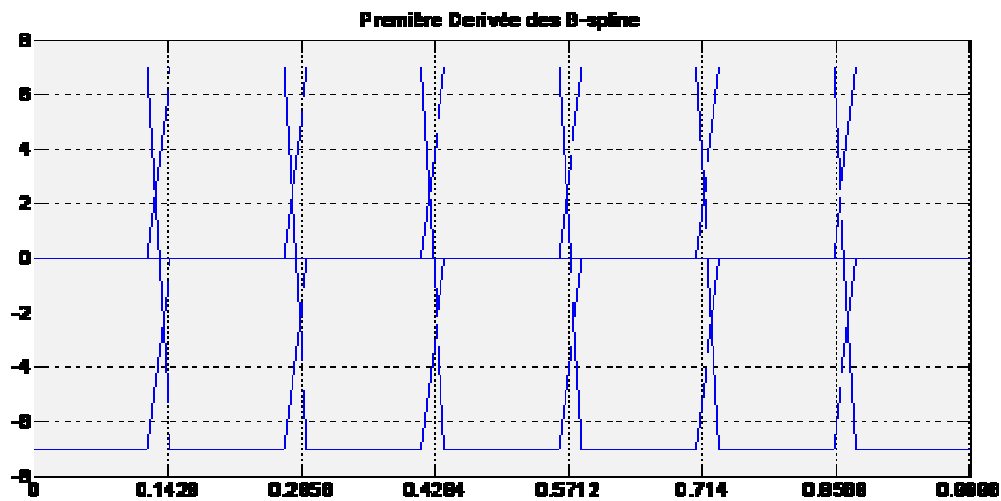


Figure IV.8 – La première dérivée des fonctions B-spline.

La deuxième dérivée des fonctions B-spline est alors donnée par la figure (IV.9) suivante :

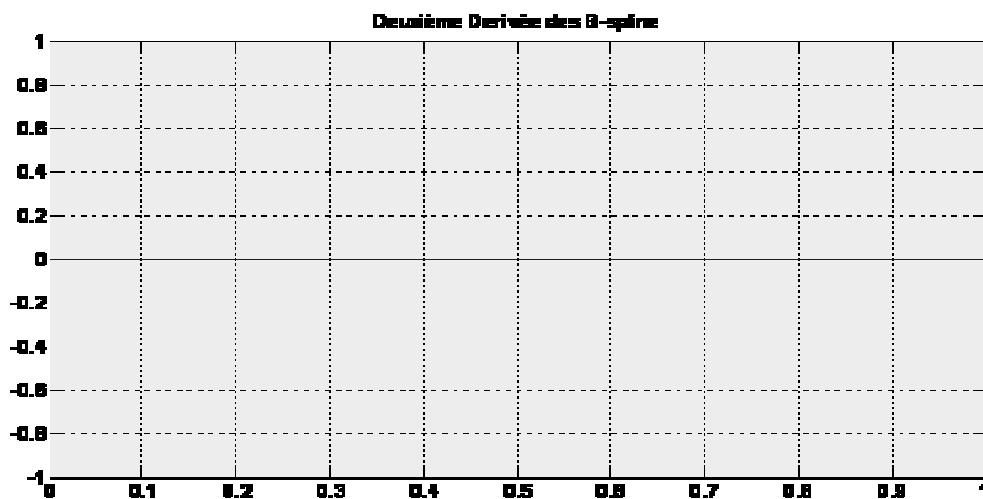


Figure IV.9 – La deuxième dérivée des fonctions B-spline.

On peut déterminer la déformation qui est donnée par la figure suivante :

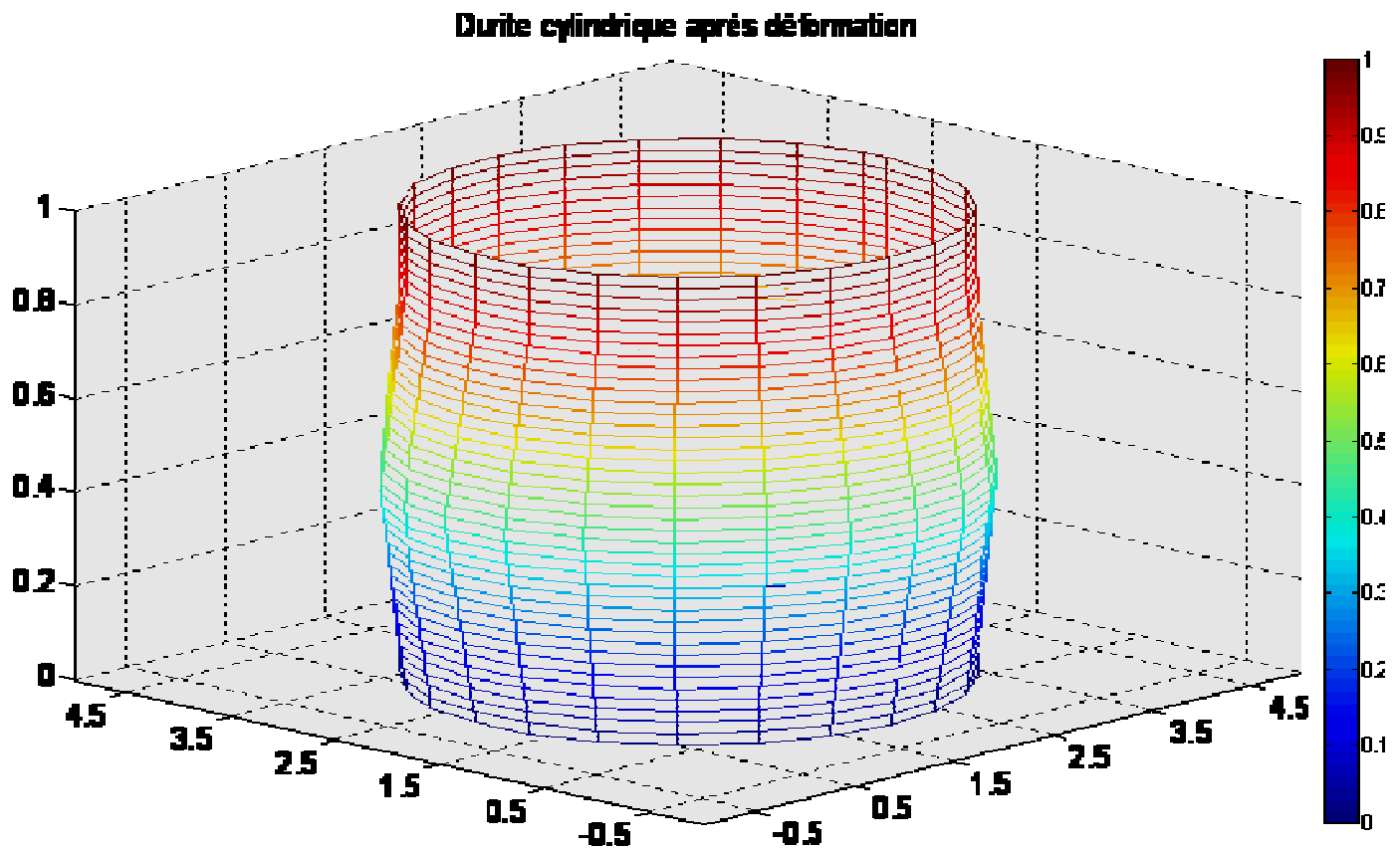


Figure IV.10 – Durite après déformation.

La barre représenté sur la figure (IV.10), représente la variation de σ_{xx} .

Remarque :

- On remarque bien que la structure se déforme par la présence du fluide à l'intérieur et change de forme.
- La déformation est suivant l'axe x, et y, car on avait exercé la charge réparties juste sur les deux directions x et y.
- La hauteur reste inchangée.

VI.7 -Interprétation des résultats :

Les résultats obtenus montrent bien que l'analyse par élément finis iso-géométriques est beaucoup plus précise que la MEF classique.

On peut voir aussi qu'avec cette méthode on détermine la déformation avec 49 éléments finis iso-géométriques, or que si c'était la MEF classique il faudra un maillage plus important que celui-ci pour avoir les mêmes résultats.

La méthode d'analyse iso-géométrique est une méthode qui permet d'avoir des résultats de haute précision car les fonctions NURBS et les fonctions B-spline, et leurs dérivées partielles recouvrent toutes la surface délimitée des points de contrôle.

IV.8 -Conclusion :

L'utilisation des NURBS dans cette méthode d'analyse est la clé du succès de l'analyse iso-géométrique car les fonctions B-spline arrivent à couvrir toute la surface pour permettre une analyse complète de la structure, en plus des NURBS et des fonctions de base B-spline on a un degré de liberté en plus c'est les poids qui permettent de gérer la forme de la courbe avec succès

D'après le résultat, on peut dire que la méthode d'analyse iso-géométrique élaborée par le professeur Hughes, permet d'avoir des résultats avec exactitude, mais par contre elle prend un temps important, du fait qu'il y a toute une analyse à faire pour chaque structure à étudier, et puis cette étude est coûteuse car c'est de nouvelles notions qui sont en cours de recherche.

Conclusion générale

Ce travail nous a mené tout d'abord à des technologies de pointe en l'occurrence la CAO (conception Assistée par Ordinateur), l'analyse iso-géométrique, l'interaction fluide structure, qui a pour objectif de maîtriser l'analyse par élément finis iso-géométriques 2D tout en faisant une modélisation d'une interaction fluide-structure pour bien expliquer les différents paramètres qui rentrent dans ce type d'analyse.

De même, cette étude nous a permis d'élargir nos connaissances dans le domaine de la CAO et le calcul des structures, ainsi que dans le domaine de la modélisation par éléments finis iso-géométriques, et l'utilisation de l'outil informatique pour la programmation sur le logiciel MATLAB.

L'utilisation des surfaces particulières contribuent et offrent une plus ou moins grande souplesse dans la modélisation de forme.

Les raccordements et les intersections participent grandement à la qualité de la surface finale.

La méthode d'analyse des structures par éléments finis iso-géométriques permet l'analyse d'une structure donnée avec une grande précision vu les résultats obtenus.

Son avantage, réside dans l'utilisation des fonctions B-spline, et des fonctions NURBS comme fonctions de base, ces dernières arrivent à recouvrir toute la surface pour permettre une analyse complète de la structure.

L'application des éléments finis iso-géométriques pour l'analyse de l'interaction fluide structure nous permet de confirmer la robustesse de l'analyse iso-géométrique, mais il est toujours un défi d'adapter l'analyse iso-géométrique dans les logiciels de CFAO.

En fin ce travail a permis d'enrichir nos connaissances et de comprendre l'étendue du problème posé, et de comprendre les différentes étapes pour utiliser l'analyse iso-géométrique comme outil d'analyse.

Références Bibliographiques

- [1] Y. Bazilevs, L. Beirao Da Veiga, J. Cottrell, T.J.R. Hughes, G. Sangalli
“Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes”, Math. Mod. Meth. Appl. Sci. 16 (2006) 1031–1090.
- [2] Y. Bazilevs, V. Calo, J. Cottrell, T. Hughes, A. Reali, G. Scovazzi
“Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows”
2^{ème} édition, Masson, 1997
- [3] Y. Bazilevs, V.M. Calo, Y. Zhang, T.J.R. Hughes
“Isogeometric fluid structure interaction analysis with applications to arterial blood flow”
Comput. Mech. 38 (4) (2006) 310–322.
- [4] M. Bendsoe, O
“Sigmund, Topology Optimization. Theory, Methods and Applications”
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2003.
- [5] J. Bennet, M. Botkin
“Structural shape optimization with geometric problem description and adaptive mesh refinement”
AIAA J. 23 (1984) 458–464.
- [6] K.-U. Bletzinger, F. Daoud, M. Firl
“Filter techniques in shape optimization with cad-free parametrization, in: Conference Proceedings of the Third European Conference on Computational Mechanics”
Lisbon, Portugal, 2006.

- [7] K.-U. Bletzinger, S. Kimmich, E. Ramm
“Efficient modeling in shape optimal design”
Comput. Syst. Engrg. 2 (5–6) (1991) 483–495.
- [8] K.-U. Bletzinger, E. Ramm
“A general finite element approach to the form finding of tensile structures by the updated reference strategy” Int. J. Space Struct. 14 (15) (1999) 131–145.
- [9] K.-U. Bletzinger, E. Ramm
“Structural optimization and form finding of light weight structures”
Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. 194 (30–33) (2005) 3438–3452.
- [10] V. Braibant, C. Fleury
“Shape optimal design using b-splines”
Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. 44 (3) (1984) 247–267.
- [11] V. Braibant, C. Fleury, P. Beckers
“Shape optimal design: an approach matching c.a.d. and optimization concepts”
Technical Report, Report SA-109, Aerospace Laboratory of the University of Liege, Belgium, 1983.
- [12] E. Cervera, J. Trevelyan
“Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS”.
Part i: 2d algorithms, Comput. Struct. 83 (23–24) (2005) 1902–1916.
- [13] J. Cottrell, T. Hughes, A. Reali
“Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis”
Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. 196 (41–44) (2007) 4160–4183.

[14] Seung-Hyum HA

“Isogéométric shape desigh optimization using NURBS basis function”

Student number 2004-21019