République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
Université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou

Faculté des Sciences
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Spécialité : MATHÉMATIQUES

Option : methode et model de décision

Intitulé du mémoire

RESOLUTION D UN PROBLÈME MIN-MAX EN PROGRAMMATION LINÉAIRE

Réalisé par :

AIT ABDELMALEK yamina

BARA dihia

Dirigé par :

M^m **Rezki fariza**

Année Universitaire : 2016/2017

Table des matières

Introduction générale **3**

1 RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE PROGRAMMATION LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE **6**

1.1 Position du problème 7
1.2 Accroissement de la fonctionnelle 8
1.3 Déroulement de la méthode 12
1.4 Étape 1 :Changement de plan 12
1.5 Étape 2 : Changement d'appui 13
1.6 Algorithme de résolution 15

2 RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MIN-MAX AVEC CONTRAINTES GÉNÉRALISÉES EN PROGRAMMATION LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE **16**

2.1 position du problème 17
2.2 Préliminaire 17
2.3 vecteur des écarts de la fonctionnelle 18
2.4 support(appui) de la fonctionnelle 18
2.5 Formule d'accroissement de la fonctionnelle 20
2.6 Calcul de la valeur de suboptimalité 22
2.7 DÉROULEMENT DE LA MÉTHODE 27
2.8 Étape 1 : Changement de plan 27
2.9 Étape 2 : Changement d'appui 30
2.10 Algorithme de résolution 34

3 RÉSOLUTION DU PROBLÈME MIN-MAX AVEC ET SANS CHANGEMENT DE VARIABLES **36**

3.1 Position du problème 37
3.2 APPLICATION 38

Conclusion **48**

Bibliographie **49**

Introduction générale

Le développement technologique soumet l'homme aux contraintes d'un système de relations économiques de plus en plus complexe. On constate qu'il y a de plus en plus d'éléments nouveaux qui doivent être pris en complet lors de prises de décisions concernant une action donnée (organisation d'une production, un réseau de transport...etc) et que ces prises de décisions deviennent l'objet de véritables recherches qui ne peuvent être menées sans l'aide d'outils mathématiques. C'est ainsi que s'est développé un domaine des mathématique basé sur l'activité de décision ;appelé Recherche Opérationnelle.

Les premiers problèmes qui marquent le début des recherches opérationnelles ont été posés pendant la seconde guerre mondiale . A cette époque l'homme était préoccupé par l'organisation des opérations militaires et surtout aérienne (nombre d'avions, la formulation à adapter, la fréquence des vols pour avoir le maximum d'efficacité, etc).
Par la suite, les méthodes de recherches opérationnelles se sont de plus en plus appliqués aux problèmes économiques et commerciaux.

Elles se sont imposées auprès des dirigeants des grands organismes économiques et industriels comme les seuls outils permettant de prévenir aussi objectivement que possible les conséquences de leurs actions .
Une des parties essentielles de la Recherche Opérationnelle est la programmation linéaire, qui étudie la maximisation ou la minimisation de fonctions linéaires soumises à des contraintes linéaires.

La programmation linéaire est un outil très puissant qui permet d'aborder un grand nombre de problèmes d'optimisation en apparence très différents, dans des contextes très divers relevé des mathématiques de la recherche opérationnelle et à des applications en gestion ainsi en économie, en statistique, physique...etc.

Il s'agit d'un outil versatile et puissant, régulièrement cité par des entreprises comme un des modèles les plus utilisés de la Recherche Opérationnelle.

La programmation linéaire est un système d'équations ou d'inéquations appelées "contraintes" qui sont linéaires et à partir de ces contraintes on doit optimiser une fonction également linéaire appelée
"Fonction objectif" .

A partir de l'année 1947 George Dantzig [8] dans sa contribution au projet SCOOP (Scientific Computation Program , un projet de l'U.S Aire Force)formula et résolut le problème général de la programmation linéaire, en inventant la méthode du simplexe.

L'efficacité de cette méthode de calcul, jointe à la possibilité d'utiliser l'ordinateur ; permet d'employer le modèle de programmation linéaire pour résoudre des problèmes touchant à la production, finance, marketing,...etc[8, 12, 9, 13, 10, 14]

Le problème de programmation linéaire s'est rapidement imposé dès qu'on a voulu planifier un tant soit peu les activités économiques ou autres. C'est ainsi que des les années 1939, les nécessités de la planification soviétique conduisent Kantorovitch et Tolstoi a proposer une solution au problème, inspirée plus ou moins des travaux de Joseph Fourier $(1768 - 1830)$. En 1947 ,G,B Dantzig a proposé un algorithme exécutable sur ordinateur et lui donne le nom de simplexe.

Cette méthode simple, robuste et efficace permet d'attaquer avec succès des problèmes comportant plusieurs dizaines de milliers de variables et de contraintes.

A noter que cette algorithme a une complexité au moyenne polynomiale[7], en face à d'autre algorithme : algorithmes de la méthode projective de KARMARKAR, la méthode des éllipses de KHACHIYAN[7] et la méthode adaptée.

Elle resta en fait sans concurrence pendant prés de 40 ans. Par la suite, une généralisation de cette méthode, a été faite par k. Gabasov et F.M. Kirillova dans les années $1970 - 1980$, appelée méthode adaptée.

Cette méthode de points intérieurs converge plus rapidement que la méthode du simplexe, elle permet aussi l'obtention d'une solution approchée et résout des problèmes de contrôle optimal.

Au début de son invention, elle a été appliquée à différents type de problèmes de programmation mathématique [11], par la suite à des problèmes de contrôle optimal.

Notre travail se situe en programmation mathématique et en contrôle optimal.
On utilise les techniques de la programmation linéaire pour résoudre un problème de contrôle optimal.

Le premier chapitre comporte la résolution d'un problème de programmation linéaire par la méthode adapté ;

Dans le deuxième chapitre on a généralisé la méthode pour la résolution d'un problème min-max ;

Et le dernier chapitre est consacré à la transformation du problème en utilisant un changement de variable .

Et ensuite implémenter par une application a fin de comparer les deux méthodes.

**-

Chapitre 1

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE PROGRAMMATION LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE

INTRODUCTION

Nous proposons dans ce chapitre de résoudre un problème de programmation linéaire avec la méthode adaptée qui garde certaines structures de la méthode du simplexe comme elle permet d'avoir une solution approchée.
Cette méthode a été inventé par le professeur R.GABASSOV et F.M KNILLOVA [9]durant les années 80.

1.1 Position du problème

Soit le problème suivant :

$$(P_0) \begin{cases} f(x) = C'x \rightarrow max \\ Ax = b \\ d_1 \leqslant x \leqslant d_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

Où $x = x(j) \in \Re^n$,
d_1, d_2, C des vecteurs de $\Re^n$,
C' la transposée de C,
$b = b(I) \in \Re^m$ le vecteur des contraintes ;
$A(I, J)(m * n)$ matrice avec $I = \{1...m\}$ ensemble des indices des lignes,
$J = \{1...n\}$,$n \geq m$ ensemble des indices des colonnes.

Définition 1.1.1. *Tout vecteur x vérifiant les contraintes $Ax = b$ et $d_1 \leqslant x \leqslant d_2$ est dit plan du problème (P_0).*
►*Un plan x_0 est optimal si $C'x \leqslant C'x_0$ $\forall x$ plan du problème.*
►*Un plan x_0 est εoptimal si $C'x - C'x^{\varepsilon} \leqslant \varepsilon \setminus \varepsilon > 0$ donné.*

Définition 1.1.2. *(Base de l'ensemble J)*
choisissons le sous ensemble J_B ,$J_B \subset J$ et $|J_B| = m$; l'ensemble J_B est dit support du problème (P_0) si $detA(I, J_B) \neq 0$;
A peut être décomposée de la manière suivante :

$$A(I, J) = (A(I, J_B), A(I, J_H)) = (A_B, A_H)$$

$A(I, J_B)$ Matrice du support (matrice de base).
$A(I, J_H)$ Matrice du hors-support.
De même pour $x(J) = (x(J_B), x(J_H)) = (x_B, x_H)$.
En utilisant cette décomposition, le système $Ax = b$ prend la forme suivante :

$$Ax = (A(I, J_B), A(I, J_H))(x(J_B), x(J_H)) = b$$

$$Ax = (A(I, J_B))(x(J_B)) + (A(I, J_H))(x(J_H)) = b$$

Alors on peut calculer les composantes de x_B(comme A_B est inversible)

$$x_B = x(J_B) = A_B^{-1}(b - A_H.x_H)$$

► $J_B = \{j_1...j_n\}$ *ensemble des indices du support(appui).*

► $J_H = J - J_B$ *ensemble des indices hors support(hors appui).*

Définition 1.1.3. *La paire $\{x, J_B\}$ formée du plan x et du support J_B est appelée plan du support du problème(P_0).*

Définition 1.1.4. *Un plan de support $\{x, J_B\}$ est dit non dégénéré si*

$$d_{1j} < x_j < d_{2j}, \qquad j \in J_B$$

.

1.2 Accroissement de la fonctionnelle

Soit (x, J_B) un plan d'appui non dégénéré de départ et $\overline{x} = x + \Delta x$ un autre plan(Δx *accroissement de* x),

$$\Delta f = f(\overline{x}) - f(x) = C'\overline{x} - C'x$$

$$= C'(x + \Delta x) - C'x = C'\Delta x$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ A\overline{x} = A(x + \Delta x) = b \end{cases} \Rightarrow A\Delta x = 0$$

$\Rightarrow A_B\Delta x_B + A_H\Delta x_H = 0$

On multiplie par $A_B^{-1} \Rightarrow \Delta x_B = -A_B^{-1}A_H\Delta x_H$

$$\Rightarrow \Delta f = -(C'_B A_B^{-1} A_H - C'_H)\Delta x_H$$

Posons les vecteurs suivants :
$y' = C'_B A_B^{-1}$ vecteur des potentiels.
$\Delta' = y'A(I, j) - C'_j; \qquad j \in J$ vecteur des estimations.
On remarque $\Delta'(J_B) = 0$ alors

$$\Delta f = -\Delta'_H \Delta x_H = -\sum_{j \in J_H} \Delta_j \Delta x_j \tag{1.2}$$

Notre but est de chercher le maximum

$$\Delta f = -\sum_{j \in J_H} \Delta_j \Delta x_j \to \max_{\Delta x_j}.$$

$$d_{1j} - x_j \leqslant \Delta x_j \leqslant d_{2j} - x_j. \tag{1.3}$$

Le maximum de(1.2) sous les contraintes (1.3) est atteint pour :

$$\begin{cases} \Delta x_j = d_{1j} - x_j & si \quad \Delta_j > 0 \\ \Delta x_j = d_{2j} - x_j & si \quad \Delta_j < 0 \\ d_{1j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_{2j} - x_j & si \quad \Delta_j = 0 \quad j \in J_H \end{cases} \tag{1.4}$$

et est egal à :

$$\beta(x, J_B) = \sum_{j \in J_H^+} \Delta_j (x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} \Delta_j (x_j - d_{2j}) \tag{1.5}$$

appelé valeur de suboptimalité du plan d'appui$\{x, J_B\}$

$$J_H^+ = \{j \in J_H, \qquad \Delta_j > 0\}$$

$$J_H^- = \{j \in J_H, \qquad \Delta_j < 0\}$$

$$\Delta f = f(\overline{x}) - f(x) \leqslant \beta(x, J_B) \tag{1.6}$$

et pour $\overline{x} = x^0$ $\qquad f(x^0) - f(x) \leqslant \beta(x, J_B)$.

Théorème 1.1. ***(critére d'optimalité)***

1)Condition suffisante :
Les relations :

$$\begin{cases} x_j = d_{1j} & si \quad \Delta_j > 0 \\ x_j = d_{2j} & si \quad \Delta_j < 0 \\ x_j \in [d_{1j}, d_{2j}] & si \quad \Delta_j = 0 \quad j \in J_H \end{cases} \tag{1.7}$$

sont suffisantes pour l'optimalité du plan d'appui $\{x, J_B\}$.

2)Condition nécésaire :
Soit $\{x, J_B\}$ un plan d'appui optimal non dégénéré, alors les relations(1.7) sont vérifiées.

Preuve 1)Si les relations (1.7) sont vérifiées alors

$$C'x^0 - C'x \leqslant \beta(x, J_B) = 0$$

$$\Rightarrow C'x^0 \leqslant C'x$$

$$\Rightarrow x = x^{opt}$$

2)Soit $\{x, J_B\}$ un plan d'appui optimal non dégénéré et supposons que les relations (1.7) ne sont pas vérifiées c'est à dire il existe un indice $j_0 \in J_H$ tel que

$$\Delta_{j_0} > 0, x_{j_0} > d_{1j_0} \qquad ou \quad \Delta_{j_0} < 0, x_{j_0} < d_{2j_0}$$

Prenons par exemple le 2ème cas $\Delta_{j_0} < 0, x_{j_0} < d_{2j_0}$
Construisons un nouveau plan $\overline{x}$ de la manière suivante :
$\overline{x} = x + \Delta x = x + \theta\ell$, θ un réel positif non nul et ℓ est un vecteur (direction),il faut trouver ℓ et θ tel que $A\overline{x} = b \quad , \quad d_1 \leqslant \overline{x} \leqslant d_2$
Pour cela sur J_H posons

$$\Delta x = \begin{cases} 0 & si \quad j \in J_H - j_0. \\ \theta & si \quad j = j_0. \end{cases}$$

$\Delta x(J_B) = -A_B^{-1} A_H \Delta x(J_H) = -\theta A_B^{-1} a_{j_0}$,$\overline{x}$ vérifie $A\overline{x} = b$ et pour que $\overline{x}$ vérifie $d_1 \leqslant \overline{x} \leqslant d_2$, il faut prendre un θ suffisamment petit, d'autant plus que le plan d'appui $\{x, J_B\}$ est non dégénéré.
En portant $\overline{x} = x + \Delta x = x + \theta\ell$ dans la formule de l'accroissement, on obtient

$$\Delta f(x) = f(\overline{x}) - f(x) = -\theta \Delta_{j_0} \ell_{j_0} > 0$$

Ce qui contredit l'optimalité de $\{x, J_B\}$.

Théorème 1.2. ***(critère de suboptimalité)***
Soit $\{x, J_B\}$ un plan d'appui et $\varepsilon > 0$ donné, si $\beta(x, J_B) \leqslant \varepsilon \Rightarrow x$ est un plan ε-optimal.

preuve

$$C'x^0 - C'x \leqslant \beta(x, J_B) \leqslant \varepsilon$$
$$\Rightarrow C'x^0 - C'x \leqslant \varepsilon$$
$$\Rightarrow x \quad est \quad \varepsilon - optimal.$$

Théorème 1.3. *Si x est un plan ε-optimal alors il existe un tel support J_B tel que*

$$\beta(x, J_B) \leqslant \varepsilon.$$

Preuve

Faisons une décomposition de$\beta(x, J_B)$
pour cela construisons le problème dual de (P_0) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \varphi(u, v, w) = b'u - v'd_1 + w'd_2 \to min \\ A'u - v + w = C \\ v' \geq 0 \quad , \quad w \geq 0 \quad , \quad u \in \Re^n \end{cases}$$

Le vecteur $\{u, v, w\}$ construit de la manière suivante :
u=y ,$v = \Delta$,w=0 , si $\quad \Delta > 0$
$v = 0, w = -\Delta \quad , si \quad \Delta < 0$
est un plan dual(solution admissible du dual)
$\beta(x, J_B) = \sum_{\Delta_j > 0} \Delta_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{\Delta_j < 0} \Delta_j(x_j - d_{2j}) \quad j \in J_H$
$= \sum_{j \in J} \Delta_j x_j - \sum_{\Delta_j > 0} \Delta_j d_{1j} - \sum_{\Delta_j < 0} \Delta_j d_{2j} \qquad j \in J_H$

$= \Delta' x - \Delta' d_1 - \Delta' d_2$

$= (y'A - C')x - v'd_1 + w'd_2$

$= -C'x + y'Ax - v'd_1 + w'd_2$

$= -C'x + y'b - v'd_1 + w'd_2$

$= -C'x + \varphi(u, v, w)$

$= C'x^0 - C'x + \varphi(u, v, w) - C'x^0;$

$\beta(x, J_B) = C'x^0 - C'x + \varphi(u, v, w) - \varphi(u^0, v^0, w^0);$

$\beta(x, J_B) = \beta x + \beta(J_B);$

βx :mesure de la non optimalité de x,
$\beta(J_B)$:mesure de la non optimalité de l'appui J_B .

$$\beta(x, J_B) = C'x^0 - C'x + \beta(J_B) - \beta(J_B^0);$$

Pour $J_B = J_B^0$ c'est à dire $\beta(J_B) = \beta(J_B^0)$,

$$\beta(x, J_B) = C'x^0 - C'x \leqslant \varepsilon, \quad car \quad x \quad est \quad \varepsilon - optimal$$

Soit $\{x, J_B\}$ un plan d'appui non dégénéré de départ :
Si $\beta(x, J_B) = 0 \Rightarrow x$ est optimal.
Si $\beta(x, J_B) \leqslant \varepsilon \Rightarrow x$ est ε-optimal.
Si $\beta(x, J_B) > \varepsilon \Rightarrow$on passe a l'itération de algorithme.

1.3 Déroulement de la méthode

La méthode de résolution est constitué de deux procédures :
▶ **changement de plan** :consiste à augmenter $C'x$
▶ **changement d'appui** :consiste à diminuer $\beta(J_B)$.

1.4 Étape 1 :Changement de plan

Soit $\overline{x}$ un nouveau plan qui sera construit de la manière suivante :
$\overline{x} = x + \theta\ell$; ℓ : étant la direction admissible , θ(un réel positif) le pas admissible maximal le long de la direction ℓ ; (tel que $f(\overline{x}) \geqslant f(x)$). le vecteur de direction $\ell = (\ell(J_B), \ell(J_H))$ est construit de la manière suivante :
Sur J_H ,on pose $\theta = 1$ et

$$\ell_j = \begin{cases} d_{1j} - x_j \; si & \Delta_j > 0 \\ d_{2j} - x_j \; si & \Delta_j < 0 \\ 0 \qquad\quad si & \Delta_j = 0, J \in J_H \end{cases} \tag{1.8}$$

et $\ell(J_B) = -A_B^{-1} A_H.\ell(J_H)$ pour avoir $A\overline{x} = b$
pour que $\overline{x}$ vérifie
$d_1 \leqslant \overline{x} \leqslant d_2$ il faut calculer

$$\theta_j = \begin{cases} \dfrac{d_{1j} - x_j}{\ell_j} & si \quad \ell_j < 0 \\ \dfrac{d_{2j} - x_j}{\ell_j} & si \quad \ell_j > 0 \\ \infty & si \quad \ell_j = 0, \qquad j \in J_B \end{cases}$$

$\theta_{J0} = min(\theta_j)$ pour $j \in J_B$

et le pas maximal sera $\theta^0 = min(1, \theta_{j0})$.
De là le nouveau plan sera :$\overline{x} = x + \theta^0\ell$

Et le vecteur de suboptimalité pour le nouveau plan sera :
$\beta(\overline{x}, J_B) = \sum_{J\in J_H^+} \Delta_j(\overline{x}_j - d_{1j}) + \sum_{J\in J_H^-} \Delta_j(\overline{x}_j - d_{2j})$
$= \beta(\overline{x}, J_B) + \theta^0 \sum_{J\in J_H} \Delta_j\ell_j$ (en remplaçant les ℓ_j données par (1.8)
$= \beta(x, J_B) - \theta^0\beta(x, J_B) = (1-\theta^0)\beta(x, J_B)$.
De cette dernière expression on conclut :

- ▶ si $\theta^0 = 1$ alors $\overline{x}$ est optimal
- ▶ si $\beta(\overline{x}, J_B) \leqslant \varepsilon$ alors $\overline{x}$ - optimal.
- ▶ si $\beta(\overline{x}, J_B) > \varepsilon$, on passe au changement d'appui $J_B \longrightarrow \overline{J_B}$ $(A_B \rightarrow \overline{A}_B)$.

1.5 Étape 2 : Changement d'appui

Le changement d'appui $J_B \longrightarrow \overline{J_B}$ consiste à faire un changement du coplan Δ vers $\overline{\Delta}$ et du vecteur des potentiels Y vers $\overline{Y}$ de telle sorte que :
$\beta(\overline{x}, \overline{J_B}) \leqslant \beta(\overline{x}, J_B)$ pour cela on pose :

$$\begin{cases} \overline{\Delta}(J) = \Delta(J) + \sigma_0 t(J) \in \Re^n \\ \\ \overline{Y}(I) = Y(I) + \sigma_0 t(I) \in \Re^m \end{cases} \tag{1.9}$$

où t est la direction de diminution de la fonction duale ,σ_O le pas maximal le long de cette direction .

Calcul de t et σ_0 :
En utilisant la définition de Δ et Y on obtient :
$\overline{\Delta} = \overline{Y}'A - C' = (Y' + \sigma_0 t'(I))A - C' = \Delta' + \sigma_0 t'(I)A\Delta(J)\sigma_0 t'(J)$
de là :

$t'(J) = t'(I)A(I, J) \Rightarrow t'(J_B) = t'(I)A(I, J_B) \Rightarrow t'(I) = t'(J_B.)A_B^{-1}$.

ce qui nous donne $t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1}.A(I, J_H)$.

Après calcul du plan $\overline{x} = x + \theta^0\ell$, le pas θ^0 est donné par
$\theta^0 = min(1, \theta_{j0}) = \theta_{j0}\ j_0 \in J_B$.
Pour cela posons un indice $j_i \in J_H$ qui entre dans la base à la place de j_0.

$$t_j = \begin{cases} -signe(\ell_{j0}) & si \quad j = j_0 \\ \\ 0 & si \quad j \in J_B - j_0 \end{cases}$$

$$t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1}.A(I, J_H)$$

et calculons

$$\sigma_0 = \sigma_{j_1} = min(\sigma_j)_{j \in J_H}$$

$$\sigma_j \begin{cases} -\dfrac{\Delta}{t_j} \quad si \quad \Delta_j t_j < 0, \\ 0 \quad si \quad \Delta_j = 0 \quad , \quad x_j \neq d_{1j} \quad , \quad t_j > 0 \quad ou, \\ \quad\quad \Delta_j = 0 \quad , \quad x_j \neq d_{2j} \quad , \quad t_j < 0, \quad j \in J_H, \\ +\infty \quad dans \quad les \quad autres \quad cas. \end{cases}$$

► Le calcul de σ_0 vérifie $\overline{\Delta_j}\Delta_j \geqslant 0, \forall j \in J$
► $\overline{\Delta}(j_1) = 0$
Le nouveau support sera $\overline{J_B} = (J_B - j_0) \bigcup j_1$
et on remarque que la quantité $\beta(\overline{x}, \overline{J_B})$ est égale à :
$\beta(\overline{x}, \overline{J_B}) = \sum_{j \in \overline{J}_H^+} \Delta_j(\overline{x_j} - d_{1j}) + \sum_{j \in \overline{J}_H^-} \Delta_j(\overline{x_j} - d_{2j})$
où

$$\overline{J}_{H^+} = \{j \in J_H \diagup \overline{\Delta_j} \geqslant 0\}$$
$$\overline{J}_{H^-} = \{j \in J_H \diagup \overline{\Delta_j} \leqslant 0\}$$

Selon la relation (1.9) et sur J_B

$\beta(\overline{x}, \overline{J}_B) = \sum_{j \in J_H^+} \Delta_j(\overline{x_j} - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} \Delta_j(\overline{x_j} - d_{2j}) + \sigma_0(\sum_{j \in J_H^+} t_j(\overline{x_j} - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} t_j(\overline{x_j} - d_{2j}))$

$\beta(\overline{x}, \overline{J}_B) = (1 - \theta^0).\beta(x, J_B) + \sigma_0(\sum_{j \in J_H^+} t_j(\overline{x_j} - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} t_j(\overline{x_j} - d_{2j}))$

$t\ell = 0$ car $A\ell = 0 \quad et \quad t'(J_B) = t'(J)A(I, J_B)$ et $t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1}.A(I, J_H)$.

Par construction toutes les composantes de $t'(J_B)$ sont nulles sauf à l'indice j_0.

Posons $\alpha_0 = \sum_{j \in J_H^+} t_j(\overline{x_j} - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} t_j(\overline{x_j} - d_{2j}) = -(1 - \theta^0) \sum_{j \in J_H^-} t_j \ell_j$
$= (1 - \theta^0) t_{j0} \ell_{j0}$

$$\alpha = \alpha_0 = (1-\theta^0)t_{j0}\ell_{j0} * \begin{cases} x_{j_0} + \ell_{j_0} - d_{1j_0} & si \quad t_{j_0} = 1 \\ -(x_{j_0} + \ell_{j_0} - d_{2j_0}) & si \quad t_{j_0} = -1 \end{cases}$$

donc $\beta(\overline{x}, \overline{J}_B) = (1-\theta^0).\beta(x, J_B) - \sigma_0|\alpha_0|$.

1.6 Algorithme de résolution

. Soit $\{x, J_B\}$ un plan d'appui de départ

1-Calculer

.$y' = c'_B A_B^{-1}$.

.$\Delta' = y'A - C'$.

.$\beta(x, J_B)$
Si $\beta(x, J_B) = 0$ alors $\{x, J_B\}$ est optimal arrêt du processus
Si $\beta(x, J_B) \leqslant \varepsilon \quad 0$ alors $\{x, J_B\}$ est $\varepsilon-$ optimal arrêt du processus
sinon aller à **2**
2-
. Déterminer le vecteur $\ell(J)$

. Déterminer le vecteur $\overline{x}(J)$

.$Calculer\ (1-\theta^0)\beta$
$Si \quad (1-\theta^0)\beta \leqslant \varepsilon$ alors $\{\overline{x}, J_B\}$ est $\varepsilon-$optimal arrêt du processus .
Si $\theta^0 = 1$ alors $\{\overline{x}, J_B\}$ est optimal arrêt du processus .
sinon aller à **3**

3-Changement d'appui

. Calculer le vecteur t
.$Calculer \quad \sigma_{j_1} = \min_{J \in J_H}(\sigma_j)$
. Le nouveau appui est $\overline{J_B} = (J_B - j_0) \bigcup j_1$,
. Aller à **1** avec un plan d'appui $\{\overline{x}, \overline{J}_B\}$.

Chapitre 2

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MIN-MAX AVEC CONTRAINTES GÉNÉRALISÉES EN PROGRAMMATION LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE

INTRODUCTION

Dans ce chapitre on se propose de résoudre le problème min-max en programmation linéaire avec la méthode adaptée, nous nous intéressons dans ce travail à la résolution du problème avec contraintes généralisées.

2.1 position du problème

On appelle problème min-max en programmation linéaire tout problème ; qui consiste à maximiser (resp minimiser)une fonctionnelle f défini par $f(x) = \min\limits_{k \in K}(C'_k x + \alpha_k)$

(resp $f(x) = \max\limits_{k \in K}(C'_k x + \alpha_k)$ sur un sous ensemble de $\Re^n$ définie par des contraintes linéaires
Considérons le problème suivant :

$$(P_1) \begin{cases} f(x) = \min\limits_{k \in K}(C'_k x + \alpha_k) \to \max\limits_{x} \\ Ax = b \\ d_1 \leqslant x \leqslant d_2 \end{cases} \tag{2.1}$$

Où x, d_1, d_2 sont des n- vecteurs réels , C_k $k \in K$ des n- vecteurs ,
b un m - vecteur , $\alpha_k, k \in K$ des salaires , C'_k la transposée du vecteur $C_k, k \in K$.
$A = A[I, J]$: $(m * n)$ matrice , rang $A = m \leq n$,
$K = \{1...p\}$: L'ensemble des indices des composantes de la fonctionnelle f.
$I = \{1...m\}$: L'ensemble des indices des lignes de A .
$J = \{1...n\}$:L'ensemble des indices des colonnes de A.
$C[K, J]$:(p*n) matrice formée par les vecteurs lignes C'_k, $k \in K$.

2.2 Préliminaire

Nous allons citer quelques définitions qui vont nous être utile pour la suite :

►plan admissible : tout vecteur $x \in \Re^n$ vérifiant $d_{1j} \leqslant x_j \leqslant d_{2j}$
$j \in J$, $Ax = b$ est une solution admissible .

►plan optimal : un plan $x^0 \in \Re^n$ est optimal si x^0 réalise le maximum de la fonctionnelle du problème (P_1) i-e $C'x \leqslant C'x^0, \forall x$.

►plan suboptimal : un plan x^ε est dit ε-optimal (suboptimal solution approchée à ε prés) si $f(x^0) - f(x^\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ i-e $C'x^0 - C'x^\varepsilon \leqslant \varepsilon$ ou $\varepsilon > 0$ réel donné.

Remarque 2.2.1. *Pour* d_1,d_2 *tel que* $\|d_1\| < +\infty$ *et* $\|d_2\| < +\infty$ *le problème* (P_1)*admet des solutions ;*

en effet l'ensemble

$$\{x \in \Re^n / d_1 \leqslant x \leqslant d_2 \ avec \ \|d_1\| < +\infty \ et \ \|d_2\| < +\infty\}$$

est un ensemble compact de $\Re^n$.

Théorème 2.2.1. *(Weierstrass)*
Sur un ensemble compact, toute fonction continue est bornée et atteint ses bornes. Il est donc évident que le problème (P_1) *admet au moins une solution.*

2.3 vecteur des écarts de la fonctionnelle

Soit x un plan du problème (P_1) et $K(x)$ ensemble des indices des composantes actives de la fonctionnelle

$$K(x) = \{k \in K : f(x) = C_k' x + \alpha_k\}$$

$K(x) \neq \emptyset$,pour tout plan x du problème (P_1).
On définit le vecteur des écarts des composantes de la fonctionnelle f :
$\omega(k) = \{\omega_k, k \in K\}$ avec

$$\omega_k = \omega_k(x) = C_k' x + \alpha_k - f(x), \quad k \in K \tag{2.2}$$

conséquence :

$$\begin{array}{l} *\omega_k(x) \geq 0, k \in K \\ *min \quad \omega_k(x) = 0 \end{array}$$

2.4 support(appui) de la fonctionnelle

Considérons les sous ensembles : K_f et J_f avec $k_f \subset K$,$J_f \subset J \setminus J_B$ tel que

$$|K_f| = |J_f| + 1$$

($|.|$ désigne le cardinal)

Et soit le vecteur $e[k] = (e_k = 1, k \in K)$
formons alors la matrice

$$\Delta_f = (\Delta[K_f, J_f], e[K_f]) \tag{2.3}$$

où

$$\Delta[K, J] = -C[K, J] \tag{2.4}$$

$C[K, J]$ la matrice d'ordre (p*n) formée par les vecteurs ligne $C'_k, \quad k \in K$.
La paire $Q_f = \{K_f, J_f\}$ est dite appui de la fonctionnelle si la matrice Δ_f correspondante est régulière i-e $det\Delta_f \neq 0$(inversible).

Remarque 2.4.1. *A partir de l'appui J_B et en utilisant la matrice $C[K, J]$ on définit la matrice $\Delta[K, J]$ par*

$$\Delta[K, J] = (\Delta_{kj}, k \in K; j \in J) = C[K, J_B]A_B^{-1}A[I, J] - C[K, J] \tag{2.5}$$

$$\Delta[K, J_B] = C[K, J_B]A_B^{-1}A[I, J_B] - C[K, J_B] = 0_{p*m} \tag{2.6}$$

Définition 2.4.1. *On définit le vecteur des estimations Δ_J par*

$$\Delta'_J = \gamma'(K_f)\Delta[K_f, J] \tag{2.7}$$

où $\gamma'(K_f)$ est la derniere ligne de la matrice Δ_f^{-1} qu'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\Delta_f^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta(K_f, J_f) \\ \gamma'(K_f) \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

De la, on a les relations suivantes :

- $\gamma'(K_f) = (0'(J_f), 1)\Delta_f^{-1}$
- $\gamma'(K_f)e(k_f) = 1.$
- $\Delta_f = 0(J_f).$

En effet on a :

$$\Delta_f^{-1}\Delta_f = \begin{pmatrix} \Delta(K_f, J_f) \\ \gamma'(K_f) \end{pmatrix} (\Delta(K_f, J_f); e(K_f)) = I(K_f, J_f) \qquad (2.9)$$

I : matrice identité
donc

$$\gamma\prime(K_f)(\Delta(K_f, J_f); e(K_f)) = (0'(J_f), 1) \qquad (2.10)$$

Définition 2.4.2. *L'appui Q_f de la fonctionnelle est dit régulier si et seulement si $\forall k \in K_f, \gamma_k \geq 0$.*

Un plan d'appui $\{x, Q_p\}$ avec Q_p régulière est dit plan d'appui régulier.

Dans tout ce qui suit on ne considérera que des appuis réguliers.

Remarque 2.4.2. *L'appui $Q_f = \{K_f, J_f\}$ avec $J_f = \varnothing$ est régulier.*

2.5 Formule d'accroissement de la fonctionnelle

Soit $\{x, Q_p\}$ où $Q_p = \{J_B, Q_f\}$un plan d'appui du problème (P_1) et $\overline{x} = x + \delta x$ un autre plan et calculons la quantité représentant l'accroissement de la fonctionnelle f :

$$\Delta f(x) = f(\overline{x}) - f(x)$$

Par définition même de f on a :

$$f(\overline{x}) \leq C'_k\overline{x} + \alpha_k; \quad \forall k \in K \qquad (2.11)$$

i-e

$$f(\overline{x}) \leq C'_k x + \alpha_k + C'_k\partial x \quad \forall k \in K \qquad (2.12)$$

donc

$$-C'_k\partial x + f(\overline{x}) \leq C'_k x + \alpha_k \qquad \forall k \in K \qquad (2.13)$$

d'où

$$-C'_k\partial x + (f(\overline{x}) - f(x)) \leq \omega_k \qquad \forall k \in K \qquad (2.14)$$

Posons

$$\partial\omega[k] = (\partial\omega_k, k \in K)^t$$

avec

$$\partial\omega_k = C'_k\partial x + (f(\overline{x}) - f(x)),$$

on aura alors de (2.2) :

$$\partial\omega_k \geq -\omega_k$$

d'autre part on a

$$A\overline{x} = A(x + \Delta x) = Ax + A\partial x = b$$

$$Ax = b \Rightarrow A\partial x = 0$$

On a le vecteur des estimations

$$\Delta[K, J] = C[K, J_B]A_B^{-1}A[I, J] - C[K, J],$$

$$\Delta[K, J]\partial x[J] = -C[K, J]\partial x[J],$$

$$\partial\omega_k = C'_k\partial x - (f(\overline{x}) - f(x)) \qquad \forall k \in K,$$

on aura

$$\partial\omega_k = -\sum_{j\in J}\Delta_{kj}\partial x_j - (f(\overline{x}) - f(x)) \qquad \forall k \in K,$$

$$\partial\omega[k] = -\Delta[K, J]\partial x[J] - (f(\overline{x}) - f(x))e[K],$$

et donc

$$\begin{aligned}\partial\omega[K_f] &= -\Delta[K_f, J]\partial x[J] - (f(\overline{x}) - f(x))e[K] \qquad (2.15)\\ &= -\Delta[K_f, J \setminus J_B]\partial x[J \setminus J_B] - (f(\overline{x}) - f(x))e[K]\\ &= -\Delta[K_f, J_f]\partial x[J_f] - \Delta[K_f, J_H]\partial x[J_H] - (f(\overline{x}) - f(x))e[K]\\ &= -(\Delta[K_f, J_f]; e[K_f])(\frac{\delta x[J_f]}{f(\overline{x}) - f(x)}) - \Delta[K_f, J_H]\partial x[J_H]\end{aligned}$$

donc

$$\Delta_f^{-1}\partial\omega[K_f] = -(\frac{\partial x[J_f]}{f(\overline{x}) - f(x)}) - \Delta^{-1}[K_f, J_H]\partial x[J_H] \qquad (2.16)$$

d'ou

$$\underbrace{(0\prime[K_f],1)\Delta_f^{-1}}_{\gamma\prime[k_f]}\partial\omega[K_f] = -(f(\overline{x}) - f(x)) - \underbrace{[0\prime[J_f],1]\Delta_f^{-1}}_{\gamma\prime[k_f]} * \Delta[K_f, J_H]\partial x[J_H]$$

$$\Rightarrow f(\overline{x}) - f(x) = -\gamma\prime[k_f]\partial\omega[K_f] - \gamma\prime[k_f]\Delta[K_f, J_H]\partial x[J_H]$$

finalement

$$f(\overline{x}) - f(x) = -\sum_{k\in K_f}\gamma_k\partial\omega_k - \sum_{j\in J_H}\Delta_j\partial x_j \tag{2.17}$$

$$\Delta_j = \sum_{k\in K_f}\gamma_k\Delta_{kj} \qquad \forall j \in J_H = J \setminus (J_B \cup J_f)$$

Remarque 2.5.1. $\Delta_j = 0$ *pour* $j \in J_B \cup J_f$.
En effet

$\star$ *Pour* $j \in J_B \qquad \Delta_{kj} = 0; \quad \forall k \in K_f$
$\Rightarrow \Delta_j = \sum_{k\in K_f}\gamma_k\Delta_{kj} = 0; \qquad \forall j \in J_B$

$\star$*Pour* $j \in J_f$ *on a* :$\gamma\prime[K_f] = (0\prime[J_f],1)\Delta_f^{-1} \Leftrightarrow \gamma\prime[k_f]\Delta_f = (0[J_f];1)$
donc

$$\gamma\prime[k_f](\Delta[K_f, J_f], e[K_f]) = (0\prime[J_f], 1)$$

$$\Rightarrow \gamma\prime[k_j]\Delta[K_f, J_f] = 0\prime[J_f]$$

$$\Rightarrow \Delta_j = \sum_{k\in K_f}\gamma_k\Delta_{kj} = 0 \qquad \forall j \in J_f$$

2.6 Calcul de la valeur de suboptimalité

Calculons le maximum de (2.17) sous les contraintes $d_1 - x \leqslant \partial x \leqslant d_2 - x$ *et*, $\quad \partial\omega_k \geqslant -\omega_k, \forall k \in K_f$

on a $f(\overline{x}) - f(x) = -\sum_{k\in K_f}\gamma_k\partial\omega_k - \sum_{j\in J_H}\Delta_j\partial x_j$

$$\Delta_j = \sum_{k\in K_f}\gamma_k\Delta_{kj} \qquad et \qquad d_{1j} - x_j \leqslant \partial x_j \leqslant d_{2j} - x_j \qquad j \in J$$

$$\partial\omega_k \geq -\partial\omega_k \qquad \forall k \in K$$

Le maximum de (2.17) est atteint pour :

$$\begin{cases} \partial x_j = d_{1j} - x_j & si \quad \Delta_j > 0 \\ \partial x_j = d_{2j} - x_j & si \quad \Delta_j < 0 \\ d_{1j} - x_j \leq \partial x_j \leq d_{2j} - x_j & si \quad \Delta_j = 0 \quad j \in J_H \\ \partial\omega_k \geq -\omega_k & si \quad \gamma_k = 0 \\ \partial\omega_k = -\omega_k & si \quad \gamma_k > 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

Et il est égale à :

$$\beta(x, Q_p) = \sum_{j\in J_H^+}\Delta_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{j\in J_H^-}\Delta_j(x_j - d_{2j}) + \sum_{k\in K_f}\gamma_k\omega_k. \tag{2.19}$$

sachant que : $J_H^+ = \{j \in J_H, \Delta_j > 0\}$; $J_H^- = \{j \in J_H, \Delta_j < 0\}$.

$\beta(x, Q_p)$ est appelée valeur de suboptimalité du plan d'appui $\{x, Q_p\}$ et vérifie

$$\Delta f(x) = f(\overline{x}) - f(x) \leqslant \beta(x, Q_p)$$

.

Et pour $\overline{x} = x^0$ on obtient

$$0 \leqslant f(x^0) - f(x) \leqslant \beta(x, Q_p). \tag{2.20}$$

De cette dernière inégalité on déduit le critère suivant :

Théorème 2.6.1. *(critère d'optimalité) Les relations*

$$\begin{cases} x_j = d_{1j} & si \quad \Delta_j \geq 0 \\ x_j = d_{2j} & si \quad \Delta_j \leqslant 0 \\ d_{1j} \leq x_j \leq d_{2j} & si \quad \Delta_j = 0 \quad j \in J_H \\ \omega_k \geq 0 & si \quad \gamma_k = 0 \quad k \in K_f \\ \omega_k = 0 & si \quad \gamma_k \geq 0 \quad k \in K_f \end{cases} \tag{2.21}$$

Sont suffisantes pour l'optimalité et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité du plan d'appui $\{x, Q_p\}$.

Condition suffisante
Supposons que les condition (2.21) sont vérifiés pour le plan d'ppui $\{x, Q_p\}$ on aura alors $\beta\{x, Q_f\} = 0$.
Comme $0 \leqslant f(x^0) - f(x) \leqslant \beta(x, Q_p)$ donc $f(x^0) - f(x) = 0$
i-e $\{x, Q_p\}$ est un plan d'appui optimal.

Condition nécessaire
Soit $\{x, Q_p\}$ un plan d'appui optimal non dégénérés, supposons que pour ce plan d'appui les conditions (2.21) ne sont pas vérifiées.
On a alors les deux cas suivants :

- ▶ $\exists j_0 \in J_H \quad tel \quad que \quad \begin{cases} \Delta_{j_0} > 0 \quad x_{j_0} \neq d_{1j_0} \\ \quad ou \\ \Delta_{j_0} < 0 \quad x_{j_0} \neq d_{2j_0} \end{cases}$
- ▶ $\exists k_0 \in K_f \quad tel \quad que \quad \gamma_{k_0} > 0 \quad \omega_{k_0} > 0.$

considérons alors, un nouveau plan admissible $\overline{x} = x + \theta\ell$, tel que $f(\overline{x}) > f(x)$; en considérant les deux cas séparément :

Le cas A :

$$▶ \exists\, j_0 \in J_H \quad tel\, que \quad \begin{cases} \Delta_{j_0} > 0 \quad x_{j_0} \neq d_{1j_0} \\ \quad ou \\ \Delta_{j_0} < 0 \quad x_{j_0} \neq d_{2j_0} \end{cases} \tag{2.22}$$

Construisons alors un nouveau plan $\overline{x} = x + \theta\ell$ tel que $f(\overline{x}) > f(x)$,avec :
θ : le pas admissible ;
ℓ : la direction admissible. Posons :

$$\ell_{j_0} = -signe\,\alpha_0 \quad ; ou \quad \alpha_0 = \begin{cases} x_{j_0} - d_{1j_0} \quad si \quad \Delta_{j_0} > 0 \quad et \quad x_{j_0} \neq d_{1j_0} \\ x_{j_0} - d_{2j_0} \quad si \quad \Delta_{j_0} < 0 \quad et \quad x_{j_0} \neq d_{2j_0} \end{cases} \tag{2.23}$$

notons que le signe $\alpha_0 = signe\Delta_{j_0}$
Posons aussi

$$\ell[J_H \setminus j_0] = 0 \quad et \quad \partial\omega_k = 0 \quad \forall k \in K_f$$

Comme

$$\partial\omega_k = C_k'\theta\ell - (f(\overline{x}) - f(x)) \quad \forall k \in K_f$$

Alors posons $f(\overline{x}) - f(x) = y$

$$\partial\omega[K_f] = -\Delta[K_f, J_f \cup J_H]\theta\ell[J_f \cup J_H] - ye[K_f]$$

$$\partial\omega[K_f] = -(\Delta[K_f, J_f], e[K_f])(\frac{\theta\ell[J_f]}{y}) - (\Delta[K_f, J_H]\theta\ell[J_H])$$

$\ell[J_f]$ et y sont donc (d'après la condition $\partial\omega_k = 0 \quad \forall k \in K$)solution du système de cramer $\partial\omega[K_f] = 0$

De l'équation (2.3) on a :

$$-\Delta_f(\frac{\theta\ell[J_f]}{y}) - (\Delta[K_f, J_H]\theta\ell[J_H]) = 0.$$

$$(\frac{\theta\ell[J_f]}{y}) = -\Delta_f^{-1}(\Delta[K_f, J_H]\theta\ell[J_H]).$$

$$\ell[J_f] = -\Delta_f^{-1}[J_f, K_f](\Delta[K_f, J_H]\ell[J_H]).$$

D'autre part pour que $A\overline{x} = b$ il faut que $A\ell = 0$ d'où

$$\ell[J_B] = -A_B^{-1}A[I, J_f \cup J_H]\ell[J_f \cup J_H].$$

Finalement on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_{j_0} = -signe\,\alpha_0, \qquad \ell[J_H \setminus j_0] = 0 \qquad \partial\omega_k = 0 \quad \forall k \in K. \\ \ell[J_f] = -\Delta_f^{-1}[J_f, K_f]\Delta[K_f, J_H]\ell[J_H]. \\ \ell[J_B] = -A_B^{-1}A[I, J_f \cup J_H]\ell[J_f \cup J_H]. \end{array} \right. \tag{2.24}$$

On a

$$\overline{x}_j = x_j \qquad \forall j \in J_H \setminus \{J_0\}.$$

$$\overline{x}_{j_0} = x_{j_0} - \theta\, signe\,\alpha_0.$$

1- si $\quad \Delta_{j_0} > 0$ et $x_{j_0} \neq d_{1j_0}$ alors $\alpha_0 > 0$ (signe $\alpha_0 = +1$) et $x_{j_0} > d_{1j_0}$ donc il existe un $\theta_1 > 0$ tel que $\overline{x}_{j_0} = x_{j_0} - \theta_1 signe\,\alpha_0 \geq d_{1j}$.

2- si $\Delta_{j_0} < 0$ et $x_{j_0} \neq d_{2j_0}$ alors $\alpha_0 < 0$ (signe $\alpha_0 = -1$) et $x_{j_0} < d_{2j_0}$
donc il existe un $\theta_1 > 0$ tel que $\overline{x}_{j_0} = x_{j_0} - \theta_1 signe\, \alpha_0$
$i - e\, \overline{x_{j_0}} = x_{j_0} + \theta_1 \leq d_{2j}$.

Donc dans les deux cas il existe $\theta_1 \setminus d_{1j_0} \leqslant \overline{x}_{j_0} = x_{j_0} - \theta_1 signe\, \alpha_0 \leq d_{2j_0}$

pour $j \in J_B \cup J_f$: on a $\{x, Q_p\}$ non dégénéré donc

$$d_1[J_B \cup J_f] < x[J_B \cup J_f] < d_2[J_B \cup J_f]$$

et il existe alors $\theta_2 > 0$ tel que

$$d_1[J_B \cup J_f] < \overline{x} = x[J_B \cup J_f] + \theta_2 \ell[J_B \cup J_f] < d_2[J_B \cup J_f]$$

Si on prend $\theta = min\{\theta_1, \theta_2\}$ on aura $\overline{x} = x + \theta\ell$ est un plan de notre problème .

$$f(\overline{x}) - f(x) = -\sum_{k \in K_f} \gamma_k \partial\omega_k - \sum_{j \in J_H} \Delta_j \theta \ell_j \qquad \setminus \partial\omega_k = 0.$$

$$f(\overline{x}) - f(x) = \theta\Delta_{j_0} signe\, \alpha_0 = \theta\Delta_{j_0}\, signe\, \Delta_{j_0} = \theta \mid \Delta_{j_0} \mid > 0.$$

Ce qui contredit l'optimalité du plan d'appui $\{x, Q_p\}$.

Le cas B :

▶ $\exists k_0 \in K_f \quad tel \quad que \quad \gamma_{k_0} > 0 \quad \omega_{k_0} > 0$

On construit alors un nouveau plan $\overline{x} = x + \theta\ell$ tel que $f(\overline{x}) > f(x)$
Dans ce cas, on pose $\partial\omega_{k_0} = -\theta\, signe\, \gamma_{k_0}$ et $\partial\omega_k = 0 \quad \forall k \in K_f \setminus \{k_0\}$.
$\ell_{J_H} = 0$.
$\ell_{J_f} = \Delta(K_f, J_f)\omega(K_f)$ d'après la relation

$$\partial x(J_f) = -\Delta(J_f, K_f)\Delta(K_f, J_H)\partial x(J_H) - D(J_f, K_f)\partial\omega(K_f).$$

Comme $\{x, Q_p\}$ est un plan d'appui non dégénéré alors on a $d_{1j} < x_j < d_{2j}$ $\forall j \in J_f \cup J_B$

donc $\exists\theta_2 > 0, d_{1j} < x_j + \theta_2\ell_j \leqslant d_{2j}$
Donc pour un θ suffisamment petit $\overline{x} = x + \theta\ell$ est un plan du problème (P_1)

et on obtient :

$$\Delta f(x) = \theta\gamma_{k_0}\omega_{k_0} > 0.$$

ce qui contredit l'optimalité du plan d'appui $\{x, Q_p\}$.

Théorème 2.6.2. *(critère de suboptimalité)*
Pour un $\varepsilon > 0$ donné la condition suivantes :

$$B(x, Q_p) \leqslant \varepsilon. \tag{2.25}$$

est suffisante pour l'$\varepsilon-$optimalité du plan d'appui $\{x, Q_p\}$.

Preuve. *Soit le plan d'appui $\{x, Q_p\}$ vérifiant pour un $\varepsilon > 0$ donné l'inégalité (2.25)de cette relation :*

$$0 \leq f(x^0) - f(x) \leq B(x, Q_p) \leq \varepsilon.$$

On obtient $f(x^0) - f(x) \leq \varepsilon$ où x^0 est un plan ε-optimal du problème (P_1).
D'ou le resultat.

2.7 DÉROULEMENT DE LA MÉTHODE

La méthode de résolution constitue deux procédures :
▶ **changement de plan**
▶ **changement d'appui**

2.8 Étape 1 : Changement de plan

Dans cette étape de l'itération on construit un nouveau plan admissible du problème (P1) posons :$x \longrightarrow \overline{x} = x + \theta\ell$ tel que $f(\overline{x}) > f(x)$;

où θ est le pas maximal le long de cette direction et ℓ est une direction admissible au point x définie par :

pour $j \in J_H$ on pose :

$$\ell_j = \begin{cases} d_{1j} - x_j & si \quad \Delta_j > 0 \\ d_{2j} - x_j & si \quad \Delta_j < 0 \\ 0 \quad si & \Delta = 0 \end{cases} \tag{2.26}$$

pour $j \in J_B$: $A\overline{x} = Ax + \theta A\ell = b$
$\Rightarrow \theta A\ell = 0 \Rightarrow A\ell = 0$

$$A\ell = A(I, J_B)\ell(J_B) + A(I, J_H)\ell(J_H) = 0$$

$$\Rightarrow A_B\ell_B = -A_H\ell_H$$

Alors

$$\ell(J_B) = \ell_B = -A_B^{-1}A_H\ell_H$$

Posons

$$\partial\omega(K_f) = -\theta\omega(K_f)$$

ce qui nous donne :

$$\ell(_{J_f}) = \Delta(K_f, J_f)(-\Delta(K_f, J_H)\ell(J_H) + \omega(K_f))$$

Calcul du pas maximal θ^0 :

Soit θ^0 la valeur maximale de θ ; pour laquelle les conditions suivantes sont vérifiées :
1) $d_{1j} \leqslant x + \theta^0\ell \leqslant d_{2j}; \forall j \in J$
2) $\partial\omega_k \geqslant \omega_k; \forall k \in K$

La 1 ^{ere} condition est vérifiée sur J_H , pour $\theta \in [0, 1]$;

telle que : sur $J_H, \theta = 1$

$$\begin{cases} d_{1j} \leqslant \overline{x}_j \leqslant d_{2j} & \forall j \in J_H \\ \\ d_{1j} \leqslant x_j + \ell_j \leqslant d_{2j} \end{cases} \tag{2.27}$$

et sur $J_B \cup J_f$ pour $\theta = \theta_{J_0}$ avec : $\theta_{J_0} = \min\limits_{j \in J_B}(\theta_j)$ où

$$\theta_j = \begin{cases} \dfrac{d_{1j} - x_j}{\ell_j} \; si \; \ell_j < 0 \\ \dfrac{d_{2j} - x_j}{\ell_j} \; si \; \ell_j > 0 \\ +\infty \; si \; \ell_j = 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

$$sur J_B \cup J_H : \begin{cases} d_{1j} \leqslant x_j + \theta \ell_j \leqslant d_{2j} \\ \\ d_{1j} - x_j \leqslant \theta \ell_j \leqslant d_{2j} - x_j \end{cases} \tag{2.29}$$

Posons

$$\partial\omega[K_f] = -\theta\omega[K_f]$$

$\ell[J_f]$, y formeront alors une solution du système de cramer

$$C[K_f, J]\, \theta\, \ell[J] - y\, e[K_f] = -\theta\omega[K_f]$$

$$C[K_f, J]\theta\ell[J] - y\, e[K_f] = -\Delta[K_f, J_f]\, \theta\, \ell[J_f] - \Delta[K_f, J_H]\theta\, \ell[J_H] - y\, e[K_f]$$

Remarque : On pose

$$\begin{aligned} f(\overline{x}) - f(x) &= -\sum_{j \in J_H} \Delta_j \theta\, \ell_j - \sum_{k \in k_f} \lambda_k \partial\omega_k \\ &= \theta(\sum_{k \in K_f} \lambda_k \omega_k + \theta(\sum_{j \in J_{H+}} \Delta_j(-\ell_j) + \sum_{j \in J_{H-}} \Delta_j(-\ell_j)) \\ &= \theta\beta(x, Q_p). \end{aligned}$$

Calcul du pas θ :

Pour avoir $y = f(\overline{x}) - f(x)$ il faut avoir θ tel que

$$\partial\omega_k = \theta C_k^{'} \ell - y \geq -\omega_k \; pour \; k \in K$$

pour $k \in K_f$:

$$\theta C_k^{'}\ell - y = -\theta\omega_k \geq -\omega_k \; pour \; \theta \in [0,1]$$

pour $k \in K_H$:

$$\theta C_k^{'}\ell - y = \theta C_k^{'}\ell - \theta\beta(x, Q_p) \geq -\omega_k = (-C_k^{'}x + \alpha_k - f(x))$$
$$\theta(\beta(x, Q_p) - C_k^{'}\ell) \leqslant C_k^{'}x + \alpha_k \qquad\qquad k \in K_H$$

Cette inégalité est vérifié pour $\theta_{k_0} = \min\limits_{k \in K_H} \theta_k$,
avec

$$\theta_k = \begin{cases} \dfrac{c_k^{'}x + \alpha_k - f(x)}{\beta(x, Q_p) - c_k^{'}\ell} & si \qquad \beta(x, Q_p) > C_k^{'}\ell \\ \infty & sinon \end{cases}$$

On pose alors $\theta^0 = \min(\theta_{J_0}, \theta_{k_0}, 1)$
On aura alors $\overline{x} = x + \theta\ell$ un plan de notre problème et :

$$y = f(\overline{x}) - f(x) = \theta^0\beta(x, Q_p)$$

θ^0 est dit pas maximal

la valeur de suboptimalité du plan d'appui $\{\overline{x}, Q_p\}$ est égale à :

$$\beta(\overline{x}, Q_p) = (1 - \theta^0)\beta(x, Q_p)$$

d'où
si $\theta^0 = 1 \Rightarrow \beta(\overline{x}, Q_p) = 0 \Rightarrow \overline{x}$ est optimal, c'est à dire $\{\overline{x}, Q_p\}$ est un plan d'appui optimal
si $\beta(\overline{x}, Q_p) \leqslant \varepsilon \Rightarrow \overline{x}$ est ε - optimal
c'est à dire $\{\overline{x}, Q_p\}$ est ε - optimal
si $\beta(\overline{x}, Q_p) > \varepsilon$ on passe à la 2éme étape de l'itération .

2.9 Étape 2 : Changement d'appui

Pour faire ce changement d'appui on construit un dual du problème (P_1) transformé sous forme linéaire .
posons

$$\varphi = f(x); \qquad \varphi \leq C_k^{'}x + \alpha_k \qquad \forall k \in K$$

le problème (P_1) est équivalent au problème

$$P_* \begin{cases} \varphi \longrightarrow Max \\ -C_k^{'}x + \varphi \leq \alpha_k & \forall k \in K \\ Ax = b \\ d_1 \leq x \leq d_2 \end{cases}$$

le dual du problème (P_*) est :

$$P_{**} \begin{cases} \phi(x) = \alpha^{'}\lambda + b^{'}y - d_1^{'}v + d_2^{'}w \longrightarrow min \\ -c^{'}\lambda + A^{'}y - v + w = 0 \\ \sum_{k \in K} \lambda_k = 1 \qquad \lambda_k \geq 0 \qquad \forall k \in K, \qquad v \geq 0, \qquad w \geq 0. \end{cases}$$

Où

$$x = t(\lambda, y, v, w), \lambda \in R^p, y \in R^m, v, w \in R^n.$$

à partir de l'appui Q_p on définit un plan dual

$$x = (\lambda, y, v, w) \qquad ou \qquad -C^{'}\lambda + A^{'}y - \Delta = 0 \qquad avec :$$

$$\begin{cases} V_j = \Delta_j & w_j = 0 & si & \Delta_j \geq 0 \\ V_j = 0 & w_j = -\Delta_j & si & \Delta_j < 0 \end{cases}$$

on aura alors $\beta(x, Q_p) = \beta(x) + \beta(Q_p)$ ou :

$$\beta(x) = f(x^0) - f(x)$$

(mesure de non optimalité de x)
et

$$\beta(Q_p) = \phi(x) - \phi(x^0) = b^{'}y + \alpha^{'}\lambda - d_1^{'}v + d_2^{'}w - f(x^0)$$

(mesure de non optimalité de Q_p)
Le changement de l'appui s'accompagne de la diminution de la fonctionnelle duale : c'est à dire que le changement de Q_p vers $\overline{Q}_p$ entraine le changement du plan dual,

$$(\lambda, y, v, w) \qquad vers \qquad (\overline{\lambda}, \overline{y}, \overline{v}, \overline{w})$$

de la posons

$$\begin{cases} \overline{\lambda} = \lambda + \sigma\delta\lambda \\ \overline{v} = v + \delta v \\ \overline{w} = w + \delta w \\ \overline{y} = y + \sigma\delta y \end{cases}$$

donc grâce au changement du plan X par $\overline{X}$ on améliore l'estimation de suboptimalité en diminuant $\beta(x)$ (d'une valeur égal à $f(\overline{x}) - f(x)$)
on fera donc une itération duale pour diminuer $\beta(Q_p)$ en passant à un autre appui $\overline{Q}_p$:

$$(\Delta, \lambda, Q_p) \longrightarrow (\overline{\Delta}, \overline{\lambda}, \overline{Q}_p)$$

tel que :

$$\beta(\overline{Q}_p) \leq \beta(Q_p)$$
$$\overline{\Delta} = \Delta + \sigma^0 t$$
$$\overline{\lambda} = \lambda + \sigma^0 \partial\lambda$$

t est la direction de la diminution de la fonction duale et σ^0 le pas maximal le long de cette direction.

le calcul de la direction admissible et du pas maximal se fait comme suit :

On a $\overline{\Delta} = \Delta + \sigma t$; X et $\overline{X}$ des plans duaux

$$t'(J) = \delta y'(I)A(I,J) - \delta\lambda'(K)C(K,J) \tag{2.30}$$

ce qui résulte que

$$t'(J_B) = \delta y'(I)A_B - \delta\lambda'(K)C(K,J_B)$$

donc

$$\delta y'(I) = t'(J_B)A_B^{-1} + \delta\lambda'(K)C(K,J_B)A_B^{-1}$$

en substituant dans (2.30) , on aura

$$t'(J) = t'(J_B)A_B^{-1}A(I,J) + \delta\lambda'(K)\Delta(K,J) \tag{2.31}$$

$$(t'(J_f);0) = (t'(J_B)A_B^{-1}A(I,J),0) + \delta\lambda'(K_f)(\Delta(K_f,J_f);e(K_f)) + \delta\lambda'(K_H)(\Delta(K_H,J_f);e(K_H))$$

Alors

$$\delta\lambda'(K_f) = (t'(J_f);0) - (t'(J_B)A_B^{-1}A(I,J),0) - \delta\lambda'(K_H)(\Delta(K_H,J_f);e(K_H))\Delta_f^{-1}$$

$$t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1}A(I,J_H) + \delta\lambda'(K_H)(\Delta(K_H,J_H))\delta\lambda'(K_f)\Delta(K_f,J_H))$$

$t'(J_f), t'(J_B), \delta\lambda'(K_H)$ sont construites de maniéré à assurer une diminution de la fonctionnelle du problème dual P_{**} :

▶ $\theta^0 = \theta_{j_0}$; *on pose* $\quad t_{j_0} = -signe(\ell_{j0}); t(J_f \cup J_B - j_0) = 0 \,;\, \delta\lambda(K_H) = 0$

▶ $\theta^0 = \theta_{k_0}$; *on pose* $\quad \delta\lambda_{k_0} = 1 \,,\, \delta\lambda(K_H - k_0) = 0 \,,\, t(J_f \cup J_B) = 0$

2- **Calcul du pas maximal** σ^0 :

$$\sigma^0 = min(\sigma_{j1}, \sigma_{k1})$$

où

$$\sigma_{j1} = min(\sigma_j) \qquad pour \qquad j \in J_H$$

$$\sigma_j = \begin{cases} -\dfrac{\Delta_j}{t_j} \qquad si \qquad \Delta_j t_j < 0 \\ 0 \qquad si \qquad \Delta_j = 0, x_j \neq d_{1j}, \qquad t_j > 0 \\ \qquad\qquad ou \\ \qquad\qquad \Delta_j = 0, x_j \neq d_{2j}, \qquad t_j < 0, j \in J_H \\ \infty \qquad dans \qquad les \qquad autres \qquad cas \end{cases} \tag{2.32}$$

σ_{j_1} assure la diminution de la valeur de suboptimalité.

et d' autre part $\qquad \sigma_{k_1} = \min\limits_{k \in K_f}(\sigma_k)$

$$\sigma_k = \begin{cases} -\dfrac{\lambda_k}{\delta\lambda_k} \qquad si \qquad \delta\lambda_k.\lambda_k < 0 \\ +\infty \qquad sinon \end{cases} \tag{2.33}$$

σ_{k_1} assure la régularité de l'appui $\overline{Q}_p$

on construit le nouveau appui $\overline{Q}_p$ comme suit :

.*si* $\theta^0 = \theta_{j_0} \quad j_0 \in J_f \quad et \quad \sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors $\overline{J_B} = J_B \quad \overline{J}_f = J_f - j_0,\ \overline{K}_f = K_f - k_1$

.*si* $\theta^0 = \theta_{j_0} \quad j_0 \in J_f \quad et \quad \sigma^0 = \sigma_{j_1}$ alors $\overline{J_B} = J_B \quad \overline{J}_f = (J_f - j_0) \cup j_1,\ \overline{K}_f = K_f$

Si $\theta^0 = \theta_{j_0} \quad j_0 \in J_B$ alors

si $\exists j_2 \in J_f / t'(J_B) A_B^{-1} A(I, j_2) \neq 0$ *alors* $\overline{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_2,\ \overline{J}_f = (J_f - j_2) \cup j_0$

faire comme le cas $\theta^0 = \theta_{j_0} \quad j_0 \in J_f$

si $\sigma^0 = \sigma_{j.}$ *alors* $\overline{J_B} = J_B \quad \overline{J}_f = (\overline{J}_f - j_0) \cup j.,\ \overline{K}_f = K_f$

sinon si $\quad \sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors $\overline{J_B} = \overline{J}_B \quad \overline{J}_f = \overline{J}_f - j_0,\ \overline{K}_f = K_f - k_1$

sinon $t'(J_B)A_B^{-1}A(I,j_2)=0$ pour tout $j_2\in\overline{J_f}$ alors $\sigma^0=\sigma_{j_1}$ et $\overline{J_B}=(J_B-j_0)\cup j_1$,$\overline{K}_f=K_f$

.*si* $\theta^0=\theta_{k_0}$ *et* $\sigma^0=\sigma_{j_1}$ alors $\overline{J_B}=J_B$ $\overline{J}_f=J_f\cup j_1,\overline{K}_f=K_f\cup K_0$
.*si* $\theta^0=\theta_{k_0}$ *et* $\sigma^0=\sigma_{k_1}$ alors $\overline{J_B}=J_B$ $\overline{J}_f=J_f,$ $\overline{K}_f=(K_f-k_1)\cup k_0$

la construction du nouveau support $\overline{Q}_f=\{\overline{K}_f,\overline{J}_f\}$;détermine une itération de la méthodes , si bien que tous les résultats sont résumés dans l'algorithme de résolution suivant :

2.10 Algorithme de résolution

1. soit le plan d'appui $\{x,Q_p\}$ du problème (P_1) et $\varepsilon>0$, un nombre réel donné.
2.calculer $\beta(x,Q_p)$.
si $\beta(x,Q_p)=0$ alors $\{x,Q_p\}$ est optimal
si $\beta(x,Q_p)<\varepsilon$ alors $\{x,Q_p\}$ est ε - optimal
si $\beta(x,Q_p)>\varepsilon$ alors continuer le processus
3.calculer
► $\ell(J_H);\ell(J_f);\ell(J_B)$
► $\theta^0=min(1;\theta_{k_0};\theta_{j_0})$
► calculer $\overline{x}=x+\theta^0\ell$
si $\beta(\overline{x},Q_p)=0$ alors $\{\overline{x},Q_p\}$ est optimal
si $\beta(\overline{x},Q_p)<\varepsilon$ alors $\{\overline{x},Q_p\}$ est ε - optimal
si $\beta(\overline{x},Q_p)>\varepsilon$ alors continuer le processus.

4.**SI** $\theta^0=\theta_{k_0}$

$\delta\lambda_{k_0}=1;\delta\lambda(K_H-k_0)=0;\quad t(J_f\cup J_B)=0.$
$\delta\lambda'(K_f)=-\delta\lambda'(K_H)(\Delta(K_H,J_f);e(K_H))\Delta_f^{-1}$

$t'(J_H)=\delta\lambda'(K)(\Delta(K,J_H))$ faire (6.)
► **SI** $\theta^0=\theta_{j0}$ $j_0\in J_B$
$t_{j0}=-signe(\ell_{j0})\,;\,t'(J_B-j_0)=0,t'(J_f)=0$
$\delta\lambda(K_H)=0$
$\delta\lambda'(K_f)=-(t'(J_B)A_B^{-1}A(I,J_f),0)).\Delta_f^{-1}$
$t'(J_H)=t'(J_B)A_B^{-1}A(I,J_H)+\delta\lambda'(K_f)(\Delta(K_f,J_H))$
faire(4')
► **SI** $\theta^0=\theta_{j_0},j_0\in J_f$
$t_{j_0}=-signe(\ell_{j_0});\qquad t'(J_f-j_0)=0,\qquad t'(J_B)=0$
$\delta\lambda(K_H)=0,\delta\lambda'(K_f)=((t'(J_f),0))\Delta_f^{-1},\qquad t'(J_H)=\delta\lambda'(K_f)(\Delta(K_f,J_H)$

$aller(5.)$
4'.$si\, \exists j_2 \in J_f / t'(J_B)A_B^{-1}A(I, j_2) \neq 0 \quad alors \overline{J_B} = (J_B - j_0) \cup j_2, \overline{J_f} = (J_f - j_2) \cup j_0$
$faire\, comme\, le\, cas \quad \theta^0 = \theta_{j_0}, \quad j_0 \in J_f$
$si \quad \sigma^0 = \sigma_j.alors \quad \overline{J_B} = \overline{J_B}, \quad \overline{J_f} = (\overline{J_f} - j_0) \cup J., \overline{K_f} = K_f$
$sinon\, si \qquad \sigma^0 = \sigma_{k_1}\, alors\, \overline{J_B} = \overline{J_B}, \overline{J_f} = \overline{J_f} - j_0, \overline{K_f} = K_f - K_1$
$aller\ 2$

$sinon \qquad t'(J_B)A_B^{-1}A(I, j_2) = 0, \quad pour\, tout\, j_2 \in \overline{J_f}, alors \quad \sigma^0 = \sigma_{j_1} \quad et$
$\overline{J_B} = (J_B - j_0) \cup j_1, \quad \overline{J_f} = J_f, \overline{K_f} = K_f$
$aller\ 2$

5.calculer σ^0
$\sigma^0 = \sigma_{j_1}$:$\overline{J_B} = J_B$ $\overline{J}_f = (J_f - j_0) \cup j_1; \overline{K}_f = K_f.$
$\sigma^0 = \sigma_{k_1}$:$\overline{J_B} = J_B$; $\overline{J}_f = (J_f - j_0); \overline{K}_f = K_f - k_1$.
aller a 2
6. calculer σ^0
$\sigma^0 = \sigma_{j_1}$, $\overline{J_B} = J_B$, $\overline{J}_f = J_f \cup j_1$; $\overline{K}_f = K_f \cup K_0$.
$\sigma^0 = \sigma_{k_1}$, $\overline{J_B} = J_B$, $\overline{J}_f = J_f$; $\overline{K}_f = (K_f - k_1) \cup k_0$.
aller a 2. [2]

Chapitre 3

RÉSOLUTION DU PROBLÈME MIN-MAX AVEC ET SANS CHANGEMENT DE VARIABLES

INTRODUCTION

On se propose dans cette partie de faire un changement de variables c'est à dire passer d'un problème min-max résolu au deuxième chapitre à un problème de programmation linéaire simple avec un changement de variables qui lui est résolu au premier chapitre, et de comparer à la fin les deux résultats .

3.1 Position du problème

Soit le problème initial suivant :

$$(P_1) \begin{cases} f(x) = \min\limits_{k \in K}(C'_k x + \alpha_k) \to \max \\ Ax = b \\ d_1 \leqslant x \leqslant d_2 \end{cases} \tag{3.1}$$

Où x, d_1, d_2, C_k $(k \in K)$ des vecteur de $\Re^n$, C'_k la transposée de C_k.
$\alpha_k \quad k \in K$ des scalaires, et $k \in \{1, 2, ...p\}$ l'ensemble des indices de la composante de la fonctionnelle f.
$b = b(I) \in \Re^n$ le vecteur des contraintes ;
$A(I, J)(m * n)$ matrice avec $I = \{1...m\}$, $J = \{1...n\}$.

On fait la transformation du problème de la maniéré suivante :

$$(P_2) \begin{cases} x_{p+1} \to max \\ x_{p+1} \leq C'_k x + \alpha_k \qquad k \in K \\ Ax = b \\ d_1 \leqslant x \leqslant d_2 \end{cases} \tag{3.2}$$

En posant $x_{p+1} = \min\limits_{k \in K}(C'_k x + \alpha_k)$
De là on aura un problème équivalent :

$$(P_0) \begin{cases} f(x) = C'x \to max \\ A'x = b \\ d_1 \leqslant x \leqslant d_2 \end{cases} \tag{3.3}$$

Et on fait la résolution tel énoncé dans le premier chapitre.

3.2 APPLICATION

Exemple du problème min-max
soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{k \in K=\{1,2\}} (c_k' x + \alpha_k) \longrightarrow max \\ \\ 2x_1 + x_2 \qquad = 2 \\ \\ x_1 - x_2 + x_3 \quad = 4 \\ \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 2 \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 4 \\ 0 \leqslant x_3 \leqslant 8 \end{cases} \tag{3.4}$$

où
$x =^t (x_1, x_2, x_3)$
$c_1 =^t (1, 2, 0)$, $\alpha_1 = 2$
$c_2 =^t (3, 1, 0)$, $\alpha_2 = 3$
On considèré le problème (3.4) à résoudre par la méthodes adaptée :
prenons $A_B = (a_2, a_3)$, $J_B = \{2, 3\}$.
soit $x =^t (0, 2, 6)$; x est un plan du processus (3.4) .
f(x)= min $\{c_1' x + \alpha_1, c_2' x + \alpha_2\} = min\{6, 5\} = 5 = c_2' x + \alpha_2$.
posons
$K_f = \{2\}$ $K_H = K \setminus K_f = \{1\}$
$J_f = \phi$ $J_H = J \setminus (J_B \cup J_f) = \{1\}$.

$Q_f = \{K_f, J_f\}$
$Q_B = \{J_B, Q_f\}$

$\{x^t(0, 2, 6), Q_B\}$ est un plan d'appui initial non dégénéré en effet :
$d_{1j} < x_j < d_{2j} \quad \forall \quad j \in J_B \cup J_f = \{2, 3\}$.

et $f(x) = 5 < c_1' x + \alpha_1 = 6$
-Calculons W[K]

$$W[K] = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$W[K] = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta[K,J] = c[K,J_B]A_B^{-1}A[I,J] - C[K,J]$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda[K_f] = \lambda_2 = 1$
$\lambda[k_H] = \lambda_1 = 0$
$\lambda =^t (0,1)$

$$\Delta'[J] = \gamma'[K]\Delta[K,J] = (0,1)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Test d'optimalité du plan d'appui
$\{^t(0,2,6), Q_B\}$
$\beta(x,Q_B) = \sum_{j\in J_H \Delta_j<0} \Delta_j(x_j - d_{2j}) + \sum_{j\in J_H \Delta_j>0} \Delta_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{k\in K_f=\{2\}} \lambda_k w_k$
$\beta(x,Q_B) = \Delta_1(x_1 - d_{21}) = -1(0-2) = 2.$

le critère d'optimalité n'est pas vérifié, on a $\Delta_1 < 0$ alors que $x_1 \neq d_{21} = 2$
$\beta(x,Q_B) = 2$.
Changement de plan de x en $\overline{x} = x + \theta\ell$ Calculons $\ell[J]$

$j \in J_H = \{1\}$, $\ell_1 = d_{21} - x_1 = 2.$

$$\ell_B = -A_B^{-1}a_1\ell_1 = -\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\ell = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$J_B \bigcup J_f = \{2,3\}$;

$\theta_2 = \dfrac{d_{12} - x_2}{\ell_2} = \dfrac{0-2}{-4} = \dfrac{1}{2}$.

$\theta_3 = \dfrac{d_{13} - x_3}{\ell_3} = \dfrac{0-6}{-6} = 1$.

$\theta_{j0} = \min\limits_{j \in J_B w_f} \theta_j = min\{\theta_2, \theta_3\} = \theta_2\,;\;\; j_0 = 2.$
$\theta_{k0} = \min\limits_{k \in K_H = \{1\}} \theta_k$

$$c_1' \ell = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = 2 - 8 = -6$$

$c_1'\ell = -6 < \beta(x, Q_B) = 2.$

donc $\theta_1 = \dfrac{w_1}{\beta(x,Q_B) - c_1'\ell} = \dfrac{1}{2-(-6)} = \dfrac{1}{8}$. $k_0 = 1.$
$\theta^0 = min\{1, \theta_{k0}, \theta_{j0}\} = \theta_{k0} = \dfrac{1}{8}.$

$$\overline{x} = x + \theta^0 \ell = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/2 \\ 21/4 \end{pmatrix}$$

$\beta(\overline{x}, Q_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, Q_B) = (1 - \frac{1}{8}) * 2 = \dfrac{7}{4}$
Le changement de Q_B en $\overline{Q}_B$

$$X[J] = x[J] + \ell[J] = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$f(X) = min\{c_1'X + \alpha_1, c_2'X + \alpha_2\} = min\{0, 7\} = 0$
D' ou $X[K] = C[K, J]X[J] + \alpha[K]$

$$X[K] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\overline{\Delta} = \Delta + \sigma^0 t\,;\, \overline{\lambda} = \lambda + \sigma^0 \partial\lambda.$

$\theta^0 = \theta_{k0}$, posons $\partial\lambda_1 = 1$, $t_2 = t_3 = 0$;

$\partial\lambda'[K_f] = \partial\lambda_2 = -1.$

$t'[J_H] = t_1 = \partial\lambda_2\Delta_{21} + \partial\lambda_1\Delta_{11} = -1 * -1 + 1 * 3 = 4$

donc :

$$t = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\sigma_{j*} = \min\limits_{j \in J_H} \sigma_j$, $J_H = \{1\}$.

$\sigma_1 = -\dfrac{\Delta_1}{t_1} = \dfrac{1}{4}$ (car $\Delta_1 t_1 < 0$).

$\sigma_{j*} = \sigma_1 = \dfrac{1}{4}$; $j_* = 1$,

$\sigma_{k*} = \min\limits_{k \in K_f = \{2\}} \{-\dfrac{\lambda_k}{\partial\lambda_k}, \partial\lambda_k < 0\}$

$\partial\lambda_2 < 0 \Rightarrow \sigma_{k*} = \sigma_2 = 1$, $k_* = 2$.

$\sigma^0 = min\{\sigma_{j*}, \sigma_{k*}\} = \sigma_{j*} = \dfrac{1}{4}$.

on pose , $\overline{J}_B = J_B = \{2,3\}$; $\overline{J}_f = \{1\}$; $\overline{K}_f = K_f \bigcup k_0 = \{1,2\}$; $K_H = \varnothing$.

$$\overline{\Delta} = \Delta + \sigma^0 t = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\lambda} = \lambda + \sigma^0 \partial\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$\overline{W}[K] = C[K,J]\overline{x} + \alpha[K] - f(\overline{x})e[K]$

$f(\overline{x}) = min\{c_1'\overline{x} + \alpha_1, c_2'\overline{x} + \alpha_2\} = min\{\frac{21}{4}, \frac{21}{4}\}.$

$$\overline{W}[K] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $\beta(\overline{x}, \overline{Q}_B) = 0$

et $\{\overline{x} =^t (\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{21}{4}), \overline{Q}_B\}$ est un plan d'appui optimal

avec $\overline{Q}_B = \{\overline{J}_B = J_B = \{2,3\}, \overline{Q}_f\}$, $\overline{Q}_f = \{\overline{K}_f = K, \overline{J}_f = \{1\}\}$ et $f(\overline{x}) = \frac{21}{4}$.

Résolution du même exemple avec changement de variables

Soit à résoudre le problème min-max suivant :

$$min\,\{\quad x_1 + 2x_2 + 2, \quad 3x_1 + x_2 + 3\} \to \max_x$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 0 \le x_1 \le 2 \\ 0 \le x_2 \le 4 \\ 0 \le x_3 \le 8. \end{cases}$$

La méthode adaptée appliquée au problème linéaire (P_2) équivalent :
En transformant ce problème sous forme linéaire et en ajoutant les variableS d'écart on obtient le problème linéaire équivalent :

$$\begin{cases} x_6 \to max \\ x_6 \le x_1 + 2x_2 + x_6 + 2 \\ x_6 \le 3x_1 + x_2 + 3 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 0 \le x_1 \le 2 \\ 0 \le x_2 \le 4 \\ 0 \le x_3 \le 8 \\ 0 \le x_6 \le 12 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x_6 \to max \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + x_6 = 2 \\ -3x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 0 \leq x_1 \leq 2 \\ 0 \leq x_2 \leq 4 \\ 0 \leq x_3 \leq 8 \\ 0 \leq x_4 \leq 8 \\ 0 \leq x_5 \leq 11 \\ 0 \leq x_6 \leq 12 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x_6 \to max \\ 4x_1 + x_4 - x_5 = 1 \\ -x_1 + x_5 + x_6 = 5 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \\ 3x_1 + x_3 = 6 \\ 0 \leq x_1 \leq 2 \\ 0 \leq x_2 \leq 4 \\ 0 \leq x_3 \leq 8 \\ 0 \leq x_4 \leq 8 \\ 0 \leq x_5 \leq 11 \\ 0 \leq x_6 \leq 12 \end{cases}$$

$\{X^1 = (0, 2, 6, 1, 0, 5), J_B = (4, 6, 2, 3)\}$ est un plan d'appui initial ;
$y' = C'_B A_B^{-1} = (0, 1, 0, 0)$.

$$\Delta' = y'A(I, j) - C'_j = (0, 1, 0, 0) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = (-1; 1) = (\Delta_1, \Delta_5)$$

$\Delta_5 = 1 > 0$ et $x_5 = d_{15} = 0$
$\Delta_1 = -1 < 0$ et $x_1 = d_{11} = 0 \neq d_{21}$ (critère d'optimalité non vérifié)
$\beta(X, J_B) = 2 > \varepsilon$

On passe au changement de plan

$$X^2 = X^1 + \theta\ell$$

$\Delta_1 = -1 < 0 \Longrightarrow \ell_1 = d_{21} - x_1 = 2$
$\Delta_5 = 1 > 0 \Longrightarrow \ell_5 = d_{15} - x_5 = 0$

$$\ell(J_B) = -A_B^{-1} A_H.\ell(J_H)$$

$$\begin{pmatrix} \ell_4 \\ \ell_6 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\theta^0 = min(1, \theta_{j0})$$

$\theta_{j0} = \{\theta_4, \theta_6, \theta_2, \theta_3\} = \{1/8; \infty; 1/2; 2\}$

$$\Rightarrow \theta^0 = min(1, 1/8) = 1/8 = \theta_4$$

$$X^2 = X^1 + \theta\ell = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/2 \\ 21/4 \\ 0 \\ 0 \\ 21/4 \end{pmatrix}$$

$\beta(X^2, J_B) = 7/4 > \varepsilon$

On passe au changement d'appui
$\overline{\Delta}(J) = \Delta(J) + \sigma_0 t(J)$
$t_4 = 1, t_3 = t_2 = t_6 = 0.$

$t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1}.A(I, J_H)(1,0,0,0) * \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = (4, -1) = (t_1, t_5).$

$\sigma_0 = min(\sigma_j) = min(\sigma_1; \sigma_5) = min(1/4; \infty).$
$\sigma_0 = 1/4.$

$$\overline{\Delta}(J) = \Delta(J) + \sigma_0 t(J) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/4 \\ 5/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

$$\overline{J_B} = (J_B \setminus \{4\}) \cup \{1\} = \{1; 6; 2; 3\}.$$
$$\beta(X^2, \overline{J_B}) = 0.$$

Donc $\{X^2, \overline{J_B}\}$ est un plan d'appui optimal et $f(x) = 21/4$.

Remarque 3.2.1. *On remarque que la valeur de notre fonction objective trouvée par le changement de variables est la même que celle trouvée dans l'exemple du deuxième chapitre(sans changement de variables)*

Comparaison entre changement de variable et sans changement de variables

• Les deux méthodes ont des algorithmes de résolution finis .
• On a remarqué d'après l'exemple que la résolution du problème (P_2) par changement de variables nécessite l'ajout de variables supplémentaires ce qui entraine plus de calculs en comparant avec résolution directe du problème min-max.

• La solution converge plus rapidement vers l'optimal dans le problème transformé
• On a moins d'itérations avec le changement de variables qu'avec le problème min-max.

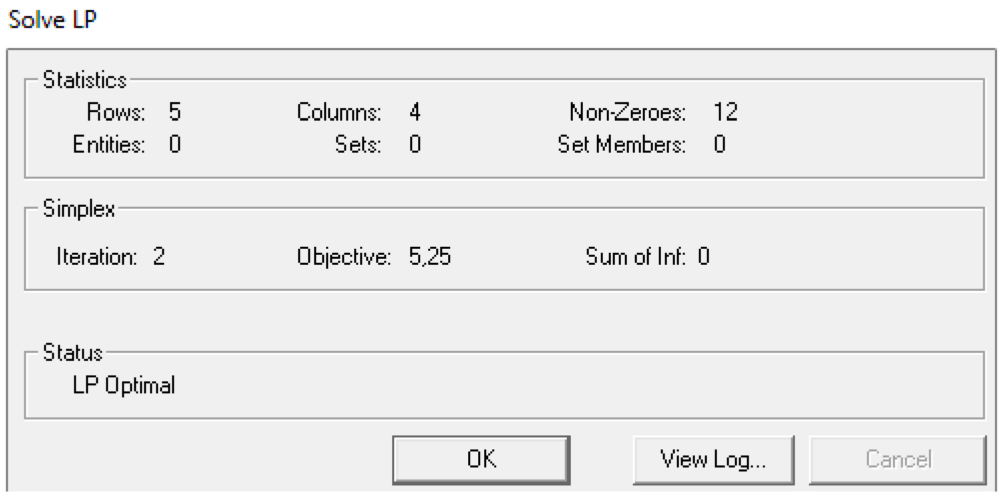

FIGURE 3.1 – LPsolv sans changement de variables

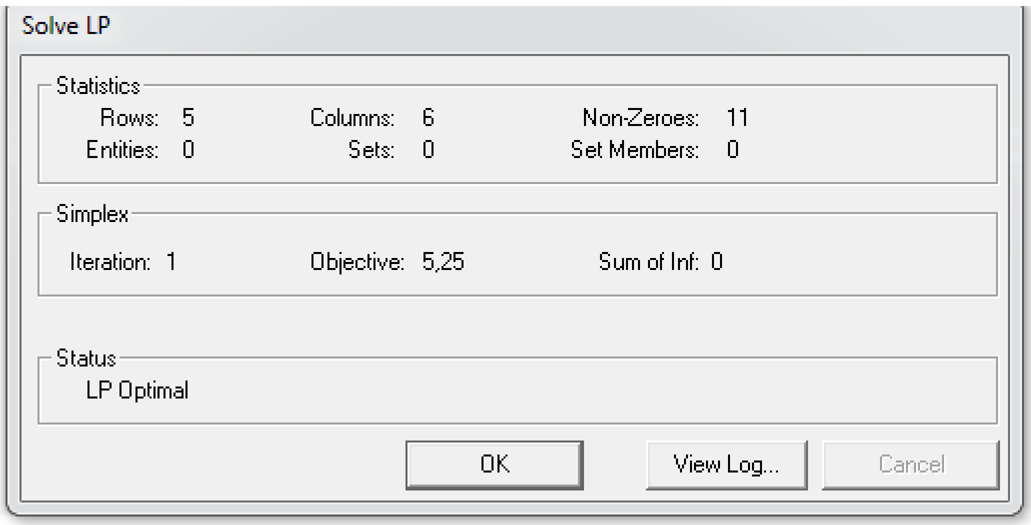

FIGURE 3.2 – LPsolv avec changement de variable

Remarque 3.2.2. *Toutes les comparaisons faites dans ce chapitre c'est des comparaisons du problème transformé c'est à dire que toutes les étapes pour faire un changement de variable ne sont pas comptés comme itérations.*

VISUAL XPRESS :
C'est un logiciel simple à utiliser qui comporte un langage de modélisation, il permet d'écrire les programmes linéaires sous une forme symbolique proche à l'écriture mathématique permettant ainsi de modifier les données , enlever ou rajouter des

contraintes, comparer deux modèles similaires, analyser la sensibilité des solutions par rapport aux données .

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objectif du travail présenté dans ce mémoire est de comparer les résultats obtenus par la résolution d'un problème min-max avec des contraintes généralisées avec les résultats obtenus pour le même problème transformé en un problème simple de programmation linéaire.
Et pour cela on a utilisé la méthode adaptée inventé par R.Gabasov et F. M. Kirillova .

En premier lieu nous avons introduit la méthodes adaptée en résolvant un problème simple, nous nous sommes intéressé ensuite à la généralisation de la méthode pour le cas du problème min-max avec contraintes généralisées. La dernière partie du travail a été consacrée pour l'application de la méthode adaptée et nous avons obtenus le même résultat.
Pour plus tard ça serai intéressant de comparer la méthode adaptée avec d'autre méthodes pour résoudre un problème min-max.

Bibliographie

[1] BELKACEM.RACHID
Thèse :Résolution d'un problème min-max en programmation linéaire par la méthode adapté 2016.

[2] CHEBBAH MOHAMMED
Thèse :Résolution et implémentation de problème min-max en contrôle optimal 2006.

[3] R. GABASOV
Adptive methode solving linear programing problems.preprint seies of university of karlsrwhe institue for statitic and mathématics 1980.

[4] HAMDOUS SALIHA
Thèse : Méthode de résolution de problème min-max en programmation linaire UMMTO 2001.

[5] ARNAUD HENRY-LABORDERE
Cours de recherche operationnelles presse de l'école Nationale des ponts et chaussées 1995.

[6] GERALD BAILLARGEON
Programmation linéaire appliquée Édition Smg

[7] JEAN CHRISTOPHE CULIOLI
Introduction à l'optimisation Edition Ellipses 1994.

[8] G.DANTZIG
Programation linéaire Edition Dunod paris 1966.

[9] R.GABASSOV et F.M KIRILLOVA
Méthode de programmation linéaire Édition de l'université de Minsk 1980.

[10] CLAUD GUERARD
Programmation linéaire les presses de l'université de Montréal Édition Eyrolle-Paris 1976.

[11] MICHEL MINOUX
Programmation mathématique Théorie et algorithme volume 1 Borbas et C.N.E.T-Enst 1983.

[12] G H.OPRIS
Programmation linéaire université de constantine Édition o.p.u 1983.

[13] ROSEAUX Exercices et problèmes Résolus de Recherche Opérationnelle.T.3 Programmation linéaire et extension ; problème classique Édition Masson 1996.

[14] MICHEL SAKAROVITCH
Optimisation Combinatoire Méthodes mathématiques et Algorithmes tome 1,tome 2 Édition Hermann 1983.

[15] KARA FADILA
thèse : Résolution d'un problème de programmation linéaire par la méthode adaptées 2012.

[16] M.AIDENE et O.OUKACHA
Programmation linéaire Recherche Opérationnelle 2005 Édition page bleu.