

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**  
**UNIVERSITE MOULOUD MAMMERY, TIZI OUZOU**



**Faculté des Sciences**  
**Département de mathématiques**

# **MEMOIRE**

**De Master**

**Spécialité : mathématiques**

**Option : Analyse mathématique et application**

**Thème**

***Sur différents types de convergence  
des séries de Fourier.***

**Proposé et dirigé par :**  
**Mr. MORSLI Mohamed**

**Réalisé par :**  
**Mr. ARAB Hakim**

**Promotion: 2018/ 2019**

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Les séries de Fourier</b>	<b>4</b>
1.1 Introduction . . . . .	4
1.2 Généralités . . . . .	4
1.2.1 Les fonctions périodiques : . . . . .	4
1.2.2 Les espaces $L^p(\mathbb{T})$ , $1 \leq p \leq \infty$ . . . . .	5
1.3 Le produit de convolution . . . . .	9
1.4 Les séries de Fourier . . . . .	16
1.4.1 Les coefficients de Fourier : . . . . .	16
1.4.2 Comportements asymptotiques des coefficients de Fourier : . . . . .	18
1.4.3 Les séries de Fourier . . . . .	24
<b>2 Convergence des séries de Fourier</b>	<b>28</b>
2.1 Introduction . . . . .	28
2.2 Convergence en moyenne . . . . .	29
2.2.1 Les Noyaux trigonométriques . . . . .	29
2.2.2 Sommabilité en norme . . . . .	36
2.2.3 Convergence ponctuelle: . . . . .	39
2.3 Divergence des séries de Fourier . . . . .	42
2.4 Convergence dans $L^p(\mathbb{T})$ , $1 < p < +\infty$ . . . . .	45

2.4.1	Convergence dans $L^2(\mathbb{T})$ . . . . .	45
2.4.2	Convergence dans $L^p(\mathbb{T})$ . . . . .	47
2.5	Interpolation . . . . .	52
2.5.1	Théorème de Hausdorff-Young . . . . .	53
2.5.2	Inégalité de Young . . . . .	54
2.6	Convergence simple et convergence presque partout . . . . .	54
2.6.1	Convergence simple . . . . .	54
2.6.2	Convergence presque partout des séries de Fourier . . . . .	56
2.7	Séries orthogonales . . . . .	58
2.7.1	Exemples de systèmes orthogonaux . . . . .	59
2.7.2	Convergence des séries orthogonales . . . . .	61
2.7.3	Convergence presque partout . . . . .	64
2.7.4	Séries de Fourier et fonctions de Lebesgue . . . . .	67
 <b>Conclusion</b>		 <b>71</b>
 <b>Bibliographie</b>		 <b>72</b>

# *Remerciements*

Je remercie mon promoteur Monsieur MORSLI Mohamed qui m'a fait découvrir ce domaine si riche de l'analyse harmonique. Ses grandes qualités scientifiques ont sans nul doute contribué à améliorer et parfaire mes travaux de mémoire.

Je remercie également les membres du juré qui m'ont fait l'honneur d'examiner mon travail et pour leur remarques pertinentes qui m'ont aidé dans l'élaboration de la version finale de ce manuscrit.

Je n'oublierai pas mes camarades de classe, auxquels j'adresse tous mes remerciement.

Je voudrais remercier du fond du cœur toute ma famille, mes parents et tous les autres pour m'avoir soutenu depuis le début.

# Introduction

L'analyse de Fourier et l'une de ses branches, la théorie des séries de Fourier constituent l'un des outils de choix en physique mathématique et théorie du signal, où elles sont systématiquement utilisées pour résoudre de nombreux modèles.

Les débuts de l'analyse de Fourier remontent aux travaux formels de J. Fourier qui a eu recours aux séries de Fourier pour résoudre notamment l'équation des ondes et celle dite de la chaleur. Actuellement elle s'est élargie à une théorie puissante, l'analyse harmonique, faisant appel à différents outils sophistiqués de l'analyse fonctionnelle moderne: théorie de la mesure, théorie des opérateurs, interpolation, etc ...

La position de base du problème est la suivante: Soit  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) une fonction périodique de période  $T$ , on associe à cette fonction la suite de coefficients  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  définie par  $c_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-i \frac{2k\pi}{T} t} dt$ . On pose alors:  $S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{i \frac{2k\pi}{T} t}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

La question fondamentale concerne la convergence de la suite  $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $f$  ( c'est à dire de la série dite de Fourier  $S(f)(t) = \sum_{k \geq 0} c_k e^{i \frac{2k\pi}{T} t}$ ).

Le cadre fonctionnel naturel classique est celui des espaces de Lebesgue  $L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  et les modes de convergence des séries en question peuvent être de différentes natures: convergence en moyenne ( ou en norme  $L^p$ ), convergence presque partout, convergence en mesure ou encore convergence ponctuelle (ou simple).

L'objectif est d'établir dans chacun des cas, des conditions suffisantes "optimales" assurant la convergence.

De manière générale, ces questions sont difficiles. Le cadre particulier des espaces de Hilbert  $L^2(\mathbb{T})$  s'avère plus adapté grâce à sa géométrie pour l'étude de certaines questions,

notamment celles liées à la convergence en norme. En utilisant la théorie des opérateurs et les méthodes de leur interpolation, il sera souvent possible de transférer les résultats obtenus dans l'espace  $L^2(\mathbb{T})$  aux espaces plus généraux  $L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

La difficulté des questions de convergence est bien illustrée par le théorème célèbre de Carleson (1966), concernant la convergence presque partout de la série de Fourier d'une fonction  $f \in L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 < p < \infty$ , répondant ainsi positivement à une question fondamentale restée longtemps ouverte et ayant reçue par différentes approches de nombreuses réponses partielles.

Il convient de noter que le système trigonométrique  $\left\{e^{i\frac{2k\pi}{T}t}\right\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  est une base orthogonale de l'espace  $L^2(\mathbb{T})$  et une base de chacun des espaces  $L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 < p < \infty$ .

En considérant maintenant un système orthogonal borné quelconque  $\{\varphi_k(t)\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  de fonctions dans les espaces  $L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , il est légitime de reconsidérer toutes les questions précédentes dans ce cas plus général.

Nous présenterons l'essentiel des résultats généraux obtenus ainsi que leurs méthodes.

Le mémoire est composé de deux chapitres:

Dans le premier chapitre, nous présentons le cadre fonctionnel de cette étude. Nous définissons aussi l'outil indispensable qu'est la convolution et énonçons ces principales propriétés. Le chapitre se termine par l'étude du comportement asymptotique de coefficients de Fourier.

Le deuxième chapitre est dédié à la convergence en norme des séries de Fourier et de leurs moyennes. On présentera aussi quelques résultats concernant la convergence presque partout. Enfin, on termine avec quelques résultats et méthodes sur les séries orthogonales.

# Chapitre 1

## Les séries de Fourier

### 1.1 Introduction

L'origine des séries de Fourier remonte aux premières civilisations qui utilisaient une forme primitive. L'analyse de Fourier moderne débute avec les travaux formels de J. Fourier et D'Alembert sur l'équation des ondes et l'équation de la chaleur au 18<sup>ème</sup> siècle. Ces travaux pionniers ont suscité l'intérêt de nombreux autres savants de l'époque, parmi lesquels Dirichlet avec son théorème sur la convergence des séries de Fourier. Les travaux de Riemann à travers son mémoire sur les séries trigonométriques (1864) constituent une avancée et un couronnement des travaux antérieurs. L'arrivée de l'intégrale de Lebesgue (1904) constitue un tournant majeur dans le développement de la théorie des séries de Fourier et de ses méthodes.

### 1.2 Généralités

Avant d'entamer l'étude des séries de Fourier, Nous introduisons leur cadre fonctionnel.

#### 1.2.1 Les fonctions périodiques :

**Définition 1.2.1** Soit  $f$  une fonction définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $f$  est dite périodique si il existe un réel  $T$  strictement positif, tel que pour tout  $t$  dans  $\mathbb{R}$ , on a:  $f(t + T) = f(t)$

*On dit alors que  $f$  est  $T$ -périodique.*

**Remarque 1.2.1** Les fonctions périodiques possèdent les propriétés suivantes:

1. Si  $T$  est une période de la fonction périodique  $f$ , alors tout multiple de  $T$ ,  $nT$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  est une période de la fonction  $f$ .
2. L'ensemble des périodes d'une fonction périodique est un sous groupe additif de  $\mathbb{R}$ .
3. Soit  $f$  une fonction  $T$ -périodique. Alors pour tout  $a$  dans  $\mathbb{R}$ , on a :  $\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$ . Donc, l'intégral sur un intervalle de longueur  $T$  ne dépend pas de l'intervalle choisie, mais de sa longueur.
4. Toute fonction périodique et continue sur  $\mathbb{R}$  est bornée et uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .
5. Si  $f$  est  $T$ -périodique, on peut la ramener à une fonction  $2\pi$ -périodique en effectuant le changement de variable suivant :  $t = \frac{xT}{2\pi}$ . C'est pourquoi dans notre étude, on se restreindra au fonctions  $2\pi$ -périodiques.

## 1.2.2 Les espaces $L^p(\mathbb{T})$ , $1 \leq p \leq \infty$

Soit  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  le tore à une dimension, les espaces suivants sont le cadre naturel de l'analyse de Fourier.

**Définition 1.2.2** On note  $C(\mathbb{T})$  l'ensemble des fonctions continues  $2\pi$ -périodiques à valeurs complexes définies sur  $\mathbb{R}$ .

L'espace  $C(\mathbb{T})$  muni de la norme  $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \sup_{t \in \mathbb{T}} (|f(t)|)$ ,  $f \in C(\mathbb{T})$  est un espace de Banach.

Du fait de la propriété (3) de la remarque 1.2.1,  $\mathbb{T}$  désignera en pratique un intervalle quelconque de longueur  $2\pi$ .

On note  $C^k(\mathbb{T})$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , l'ensemble des fonctions de  $C(\mathbb{T})$  qui sont de classe  $C^k$ .

**Définition 1.2.3** On note  $L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p < \infty$  l'ensemble des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  mesurables et  $2\pi$ -périodiques dont l'intégrale  $\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p dt$  est finie.

$L^\infty(\mathbb{T})$  désigne celui des fonctions mesurables,  $2\pi$ -périodiques et essentiellement bornées.

**Remarque 1.2.2** Les espaces  $L^p(\mathbb{T})$  possèdent les propriétés suivantes :

1. Muni de la norme  $\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ ,  $1 \leq p < \infty$  et  $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \sup_{t \in \mathbb{T}} |f(t)|$  ces espaces sont des Banach .
2.  $L^2(\mathbb{T})$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{g(t)} dt$  et de la norme  $\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ .
3. L'espace  $C(\mathbb{T})$  est dense dans chacun des espaces  $L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

**Proposition 1.2.1** Soient  $p$  et  $q$  deux réels tels que  $1 \leq p \leq q < \infty$ ,  $f \in L^q(\mathbb{T})$  et  $g \in C(\mathbb{T})$ . On a alors:

1.  $\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^q(\mathbb{T})}$ ,  $\|g\|_{L^q(\mathbb{T})} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ .
2.  $C(\mathbb{T}) \subset L^q(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$ .

**Preuve.** Soient  $f \in L^q(\mathbb{T})$  et  $g \in C(\mathbb{T})$  où  $p$  et  $q$  sont deux réels tel que  $1 \leq p \leq q < \infty$ .

On a alors:

$$1. \|g\|_{L^q(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$$

$$\text{Donc: } \|g\|_{L^q(\mathbb{T})} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$$

La première inégalité s'obtient en utilisant l'inégalité de Hölder:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^p &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p dt \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (|f(t)|^p)^{\frac{q}{p}} dt\right)^{\frac{p}{q}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} 1^{\frac{q}{q-p}} dt\right)^{\frac{q-p}{q}} \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^q dt\right)^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

$$\text{On aura donc : } \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^q(\mathbb{T})}$$

2. Ces inclusions résultent directement des inégalités précédentes.

■

**Remarque 1.2.3** D'après les résultats précédents, on a les inclusions suivantes:

$$C^k(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T}) \subset L^q(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T}) \text{ ou } k \in \mathbb{N} \text{ et } 1 < p \leq q < \infty.$$

Car la mesure utilisée est finie.

**Définition 1.2.4** On appelle polynôme trigonométrique  $P$  toute combinaison linéaire d'éléments du système trigonométrique  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  où  $e_n(t) = e^{int}$  pour tout  $t \in \mathbb{T}$  et  $n \in \mathbb{Z}$  et on écrit:

$$P(t) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{int} \text{ où } a_n \in \mathbb{C} \text{ et } N \in \mathbb{N}.$$

On note  $\mathcal{P}(\mathbb{T})$  l'ensemble de tout ces polynômes, on a clairement:  $\mathcal{P}(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T})$ .

**Définition 1.2.5** On appelle translation définie sur le tore  $\mathbb{T}$  l'application  $\tau_a$ , où  $a \in \mathbb{T}$  définie de  $L^1(\mathbb{T})$  dans  $L^1(\mathbb{T})$  comme suit :

$$\tau_a: L^1(\mathbb{T}) \longrightarrow L^1(\mathbb{T})$$

$$f \longmapsto \tau_a f$$

tel que:  $\tau_a f(t) = f(t - a)$ ,  $\forall t \in \mathbb{T}$ .

**Définition 1.2.6** Un espace de Banach  $B \subseteq L^1(\mathbb{T})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_B$  est dit Homogène sur  $\mathbb{T}$ , si il vérifie les conditions suivantes :

1.  $\|f\|_B \geq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$  pour tout  $f \in B$ .
2.  $e_n \in B$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\|e_0\|_B = 1$ .
3.  $\tau_a f \in B$  et  $\|\tau_a f\|_B = \|f\|_B$  pour tout  $a \in \mathbb{T}$  et  $f \in B$ .
4. L'application  $\phi_f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{B}$ , avec  $\phi_f(a) = \tau_a f$  est continue pour tout  $a \in \mathbb{T}$  et  $f \in B$ .

**Proposition 1.2.2** Les espaces  $L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p < +\infty$  et  $C(\mathbb{T})$  sont homogènes sur le tore  $\mathbb{T}$ .

**Preuve.**

1. La première condition est vérifiée pour tout les espaces  $L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p < +\infty$  et  $C(\mathbb{T})$  et cela d'après la proposition 1.2.1.
2. On sais que  $e_n \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$  et  $\mathcal{P}(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$  pour tout  $1 \leq p < +\infty$ , donc  $e_n \in C(\mathbb{T})$  et  $e_n \in L^p(\mathbb{T})$ .

On a  $e_0(t) = 1$  pour tout  $t \in \mathbb{T}$ , donc :  $\|e_0\|_{L^p(\mathbb{T})} = 1$  pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ .

3. Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$  et  $a \in \mathbb{T}$ , on a :

Si  $f \in C(\mathbb{T})$ , alors  $\tau_a f(t) = f(t - a)$ ,  $\forall t \in \mathbb{T}$  et donc  $\tau_a f(t) \in C(\mathbb{T})$  et

$$\|\tau_a f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$$

Si  $f \in L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p < \infty$ , alors pour tout  $t \in \mathbb{T}$  :

$$\begin{aligned} \|\tau_a f\|_{L^p(\mathbb{T})} &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |\tau_a f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t - a)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(u)|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{par le changement de variable } u = t - a) \\ &= \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

4. Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$  et  $a \in \mathbb{T}$ , on a:

Si  $f \in C(\mathbb{T})$  alors, comme  $\mathbb{T}$  est compacte,  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{T}$ .

Soit donc  $\varepsilon$  un réel strictement positif et  $a$  et  $a_0$  dans  $\mathbb{T}$ , alors :

Puisque  $|(t - a) - (t - a_0)| = |a - a_0|$  et  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{T}$ , il existe  $\delta > 0$  tel que:

Si  $|a - a_0| \leq \delta$ , alors:  $|f(t - a) - f(t - a_0)| \leq \varepsilon$ , c'est à dire :  $|\tau_a f(t) - \tau_{a_0} f(t)| \leq \varepsilon$  pour tout  $t \in \mathbb{T}$

D'où:  $\sup_{t \in \mathbb{T}} (|\tau_a f(t) - \tau_{a_0} f(t)|) \leq \varepsilon$ , c'est à dire:  $\|\tau_a f - \tau_{a_0} f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \varepsilon$

Donc  $\phi_f$  est continue pour tout  $f \in C(\mathbb{T})$

Soient maintenant  $f \in L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $\varepsilon$  un réel strictement positif et  $a$  et  $a_0$  dans  $\mathbb{T}$  tel que:  $|a - a_0| \leq \delta$ .

Comme  $C(\mathbb{T})$  est dense dans  $L^p(\mathbb{T})$  alors, on peut trouver  $g \in C(\mathbb{T})$  tel que:

$$\|f - g\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Donc, en utilisant la linéarité de  $\phi_f$  par rapport à  $f$  et la propriété (3) de la définition 1.2.7, on aura:

$$\begin{aligned} \|\tau_a f - \tau_{a_0} f\|_{L^p(\mathbb{T})} &\leq \|\tau_a f - \tau_a g\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|\tau_a g - \tau_{a_0} g\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|\tau_{a_0} g - \tau_{a_0} f\|_{L^p(\mathbb{T})} \\ &= \|\tau_a (f - g)\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|\tau_{a_0} (g - f)\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|\tau_a g - \tau_{a_0} g\|_{L^p(\mathbb{T})} \\ &= 2\|(f - g)\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|\tau_a g - \tau_{a_0} g\|_{L^p(\mathbb{T})} \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|\tau_a g - \tau_{a_0} g\|_{L^p(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

Comme  $\phi_f$  est continue sur  $C(\mathbb{T})$ , on peut trouver  $\delta$  tel que:

$$\text{Si } |a - a_0| \leq \delta, \text{ alors } \|\tau_a g - \tau_{a_0} g\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

On aura alors :

$$\|\tau_a f - \tau_{a_0} f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \varepsilon$$

En définitive  $\phi_f$  est continue pour tout  $f \in L^p(\mathbb{T})$ .

■

## 1.3 Le produit de convolution

Le produit de convolution est un outil très puissant pour l'étude des séries de Fourier ainsi que leurs convergences. Pour cette raison, nous allons l'introduire dans cette section et étudier ses propriétés essentielles.

**Définition 1.3.1** Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ . Le produit de convolution de  $f$  par  $g$  est la fonction notée  $f * g$ , définie par:  $f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t)g(t) dt$ , pour tout  $x \in \mathbb{T}$  :

Nous exposerons ici quelque propriétés algébriques et analytiques du produit de convolution.

**Proposition 1.3.1** [3] Soient  $f, g, h \in L^1(\mathbb{T})$ , alors:

1.  $f * g = g * f$  (Commutativité).
2.  $f * (g * h) = (f * g) * h$  (associativité).
3.  $(\alpha f + \beta g) * h = \alpha (f * h) + \beta (g * h)$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  (Linéarité).
4.  $(e_n f) * (e_n g) = (f * g) e_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .
5.  $e_n * e_m = \delta_n^m e_n$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{Z}$  où  $\delta_n^m$  est le symbole de Kronecker.
6.  $\tau_a (f * g) = \tau_a (f) * g = f * \tau_a (g)$ ,  $\forall a \in \mathbb{T}$
7. Si on pose  $\tilde{f}(t) = f(-t)$ , alors:  $\tilde{f} * \tilde{g} = \widetilde{f * g}$ .

8. Soient  $1 \leq p, q, r \leq \infty$  des réels tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ ,  $f \in L^p(\mathbb{T})$  et  $g \in L^q(\mathbb{T})$ , alors:

$$f * g \in L^r(\mathbb{T}) \text{ et } \|f * g\|_{L^r(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \|g\|_{L^q(\mathbb{T})} \text{ (Inégalité de Young).}$$

**Preuve.**

1. Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ . On a pour tout  $x \in \mathbb{T}$ :

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) g(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(u) g(x-u) du \text{ (en posant } u = x-t) \\ &= g * f(x) \end{aligned}$$

2. Soient  $f, g, h \in L^1(\mathbb{T})$ , on a pour tout  $x \in \mathbb{T}$ :

$$\begin{aligned} (f * (g * h))(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) (g * h)(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(t-u) h(u) du \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) g(t-u) h(u) dt \right) du \text{ (par Fubini).} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) g(t-u) dt \right) h(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) g((x-u) - (x-t)) dt \right) h(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f((x-u) - s) g(s) ds \right) h(u) du \text{ (en posant } s = t-u). \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (f * g)(x-u) h(u) du \\ &= ((f * g) * h)(x) \end{aligned}$$

3. La linéarité du produit de convolution est une conséquence directe de la linéarité de l'intégrale.

4. Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , on a:

$$\begin{aligned} ((e_n f) * (e_n g))(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) e^{in(x-t)} g(t) e^{int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) e^{inx} g(t) dt \\ &= ((f * g) e_n)(x) \end{aligned}$$

5. Soient  $n, m \in \mathbb{Z}$ , on a :

$$e_n * e_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{in(x-t)} e^{imt} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^{inx}}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{i(m-n)t} dt \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ e^{inx} & \text{si } m = n \end{cases} \\
 &= \delta_n^m e_n(x)
 \end{aligned}$$

6. Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$  et  $a \in \mathbb{T}$ , en utilisant la commutativité du produit de convolution, on a:

$$\begin{aligned}
 \tau_a(f * g)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x - a - t) g(t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x - u) g(u - a) du \quad (\text{en posant } u = t + a) \\
 &= (f * \tau_a(g))(x) \\
 &= \tau_a(g * f)(x) \\
 &= (g * \tau_a(f))(x) \\
 &= (\tau_a(f) * g)(x)
 \end{aligned}$$

7. Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ , tel que  $\tilde{f}(t) = f(-t)$  pour tout  $t \in \mathbb{T}$ , alors :

$$\begin{aligned}
 \tilde{f} * \tilde{g}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \tilde{f}(x - t) \tilde{g}(t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(-x + t) g(-t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(-x - u) g(u) du \quad (\text{en posant } u = -t) \\
 &= f * g(-x) \\
 &= \widetilde{f * g}(x)
 \end{aligned}$$

8. Soient  $1 \leq p, q, r < \infty$  des réels, tel que:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ ,  $f \in L^p(\mathbb{T})$  et  $g \in L^q(\mathbb{T})$ , on a:

Si  $r = \infty$ , alors:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , en utilisant l'inégalité de Hölder, on aura pour tout  $x \in \mathbb{T}$ :

$$\begin{aligned}
 |f * g(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x - t) g(t) dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x - t) g(t)| dt \\
 &\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \|g\|_{L^q(\mathbb{T})}
 \end{aligned}$$

Et donc:

$$\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \|g\|_{L^q(\mathbb{T})}$$

Si  $r < \infty$ , nous démontrons d'abord le résultat intermédiaire suivant:

Pour tout  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ , on a  $f * g \in L^1(\mathbb{T})$  et  $\|f * g\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \|g\|_{L^1(\mathbb{T})}$ .

En effet, on a:

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^1(\mathbb{T})} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) g(t) dt \right| dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x-t)| |g(t)| dt \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x-t)| |g(t)| dx \right) dt \quad (\text{par Fubini}). \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(t)| \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |\tau_t f(x)| dx \right) dt \\ &= \|\tau_t f\|_{L^1(\mathbb{T})} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(t)| dt \\ &\leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \|g\|_{L^1(\mathbb{T})} \quad (\text{car } \|\tau_t f\|_{L^1(\mathbb{T})} = \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}). \end{aligned}$$

On conclut donc que:  $f * g \in L^1(\mathbb{T})$

Revenons maintenant à notre démonstration:

Soient  $p'$  et  $q'$  les deux composants conjugués de  $p$  et  $q$ , alors:  $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r} = 1$

Donc:  $1 - \frac{p}{r} = \frac{p}{q'}$  et  $1 - \frac{q}{r} = \frac{q}{p'}$ , alors:

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^r(\mathbb{T})}^r &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) g(t) dt \right|^r dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x-t)| |g(t)| dt \right)^r dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x-t)|^p |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q'}} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x-t)|^p |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{p'}} dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left( \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x-t)|^p dt \right)^{\frac{1}{q'}} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{p'}} \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (|f(x-t)|^p |g(t)|^q) dt \right)^{\frac{1}{r}} \right)^r dx \\ &\quad (\text{en utilisant l'inégalité de Hölder généralisé}) \\ &= \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^{\frac{p}{q'} r} \|f\|_{L^q(\mathbb{T})}^{\frac{q}{p'} r} \| |f|^p * |g|^q \|_{L^1(\mathbb{T})} \\ &\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^{r-p} \|f\|_{L^q(\mathbb{T})}^{r-q} \|f^p\|_{L^1(\mathbb{T})} \|g^q\|_{L^1(\mathbb{T})} \quad (\text{en utilisant le résultat} \\ &\quad \text{intermédiaire}). \\ &= \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^{r-p} \|f\|_{L^q(\mathbb{T})}^{r-q} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p dt \right) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(t)|^q dt \right) \\ &= \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^{r-p} \|f\|_{L^q(\mathbb{T})}^{r-q} \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^p \|g\|_{L^q(\mathbb{T})}^q \end{aligned}$$

$$= \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^r \|f\|_{L^q(\mathbb{T})}^r$$

Donc:  $\|f * g\|_{L^r(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \|g\|_{L^q(\mathbb{T})}$ , d'où:  $f * g \in L^r(\mathbb{T})$ .

■

**Proposition 1.3.2** [8]

1. Soient  $1 \leq p, q \leq \infty$  des réels tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $f \in L^p(\mathbb{T})$  et  $g \in L^q(\mathbb{T})$ , alors  $f * g \in L^\infty(\mathbb{T})$  et  $\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \|g\|_{L^q(\mathbb{T})}$ , de plus  $f * g \in C(\mathbb{T})$ .

2. Soient  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f \in L^p(\mathbb{T})$  et  $g \in L^1(\mathbb{T})$ , alors  $f * g \in L^p(\mathbb{T})$  et

$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \|g\|_{L^1(\mathbb{T})}$ , de plus si  $f \in C(\mathbb{T})$ , alors  $f * g \in C(\mathbb{T})$ .

**Preuve.**

1. Soient  $1 \leq p, q \leq \infty$  des réels tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $f \in L^p(\mathbb{T})$  et  $g \in L^q(\mathbb{T})$ , alors :

D'après l'inégalité de Young, en posant  $r = \infty$ , on trouve :  $\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \|g\|_{L^q(\mathbb{T})}$  et donc  $f * g \in L^\infty(\mathbb{T})$ .

Pour la continuité, supposons en premier lieu que  $f \in C(\mathbb{T})$ .

Comme  $f$  est continue sur le compacte  $\mathbb{T}$ , alors  $f$  est uniformément continue.

Soit maintenant  $\varepsilon$  un réel strictement positif.

Alors:

$$\begin{aligned} |f * g(x) - f * g(y)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (f(x-t) - f(y-t)) g(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x-t) - f(y-t)| |g(t)| dt \end{aligned}$$

Comme  $f$  est uniformément continue, alors il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{T}$ , on a:

$$\text{Si } |x - y| \leq \delta, \text{ alors } |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{\|g\|_{L^1(\mathbb{T})}}$$

Supposons que  $|x - y| \leq \delta$ . Puisque  $|(x-t) - (y-t)| = |x - y|$ , alors :

$$|f(x-t) - f(y-t)| \leq \frac{\varepsilon}{\|g\|_{L^1(\mathbb{T})}}$$

Donc:

$$\begin{aligned}
 |f * g(x) - f * g(y)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varepsilon}{\|g\|_{L^1(\mathbb{T})}} |g(t)| dt \\
 &= \frac{\varepsilon}{\|g\|_{L^1(\mathbb{T})}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(t)| dt \\
 &= \frac{\varepsilon}{\|g\|_{L^1(\mathbb{T})}} \|g\|_{L^1(\mathbb{T})} \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

D'où  $f * g \in C(\mathbb{T})$ .

Soit maintenant  $f \in L^p(\mathbb{T})$  :

Comme  $C(\mathbb{T})$  est dense dans  $L^p(\mathbb{T})$  pour  $p \in [1, +\infty[$  alors, il existe une suite de fonction  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(\mathbb{T})$  tel que  $\|f - f_n\|_{L^p(\mathbb{T})} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  d'où:

$$\begin{aligned}
 \|f * g - f_n * g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} &= \|(f - f_n) * g\|_{L^p(\mathbb{T})} \\
 &\leq \|f - f_n\|_{L^p(\mathbb{T})} \|g\|_{L^q(\mathbb{T})} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty
 \end{aligned}$$

Donc  $\|f * g - f_n * g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$

On déduit que  $f * g$  est continue comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues.

Dans le cas ou  $p = \infty$ , on utilise les mêmes arguments avec  $q$ .

2. Soient  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f \in L^p(\mathbb{T})$  et  $g \in L^1(\mathbb{T})$ , alors en prenant  $r = p$  et  $q = 1$  dans l'inégalité de Young, on trouve :

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \|g\|_{L^1(\mathbb{T})}$$

On déduit alors que  $f * g \in L^p(\mathbb{T})$ .

Pour la continuité de  $f * g$ , lorsque  $f \in C(\mathbb{T})$ , on procède comme dans la première partie.

■

**Proposition 1.3.3** [8]

1. L'application  $\varphi: L^1(\mathbb{T}) \times L^1(\mathbb{T}) \longrightarrow L^1(\mathbb{T})$  est bilinéaire

$$(f, g) \longmapsto f * g$$

2. Soient  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $g \in L^1(\mathbb{T})$ , alors le produit de convolution:  $\varphi : L^p(\mathbb{T}) \longrightarrow L^1(\mathbb{T})$  est continu sur  $L^p(\mathbb{T})$ .  $f \longmapsto f * g$
3. Si  $g \in C^1(\mathbb{T})$ , alors  $f * g \in C^1(\mathbb{T})$  et  $D(f * g) = f * D(g)$  où  $D$  est l'opérateur de dérivation.

**Preuve.**

1. La bilinéarité de l'application  $\varphi$  résulte de la linéarité et de la commutativité du produit de convolution.
2. Soient  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f \in L^p(\mathbb{T})$  et  $g \in L^1(\mathbb{T})$  et soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{T})$  tel que  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^p(\mathbb{T})$ , alors:

$$\begin{aligned} \|f * g - f_n * g\|_{L^p(\mathbb{T})} &= \|(f - f_n) * g\|_{L^1(\mathbb{T})} \\ &\leq \|f - f_n\|_{L^p(\mathbb{T})} \|g\|_{L^1(\mathbb{T})} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Donc, le produit de convolution est continu dans  $L^p(\mathbb{T})$ .

3. Soient  $g \in C^1(\mathbb{T})$ , alors pour tout  $x$  et  $h$  dans  $\mathbb{T}$ , on a:

$$\begin{aligned} D(f * g)(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f * g(x+h) - f * g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tau_{-h}(f * g)(x) - f * g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f * (\tau_{-h}(g))(x) - f * g(x)}{h} \text{ (d'après la proposition 1.3.1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f * (\tau_{-h}(g) - g)(x)}{h} \text{ (linéarité du produit de convolution)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f * \left( \frac{\tau_{-h}(g) - g}{h} \right) (x) \\ &= f * \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tau_{-h}(g) - g}{h} \right) (x) \text{ (continuité du produit de convolution).} \\ &= f * D(g)(x) \end{aligned}$$

Donc,  $f * g \in C^1(\mathbb{T})$  et  $D(f * g) = f * D(g)$

■

## 1.4 Les séries de Fourier

Avants d'entamer l'étude des séries de Fourier, nous commençons par introduire les coefficients de Fourier et donner quelques propriétés les concernant.

### 1.4.1 Les coefficients de Fourier :

**Définition 1.4.1** Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . On appelle coefficient de Fourier d'ordre  $n$  associé à la fonction  $f$  dans  $L^1(\mathbb{T})$  le nombre complexe  $\widehat{f}(n)$  défini par :

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt$$

Si  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , alors  $\widehat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle$  où  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{g(t)} dt$  pour tout  $f, g \in L^2(\mathbb{T})$  est le produit scalaire défini dans  $L^2(\mathbb{T})$ .

Dans le théorème suivant, on donne quelques propriétés de base de ces coefficients.

**Théorème 1.4.1** [3], [8] Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$  et  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

1.  $|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$ .
2. Linéarité :  $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 : \widehat{\alpha f + \beta g}(n) = \alpha \widehat{f}(n) + \beta \widehat{g}(n)$
3. Conjugaison :  $\widehat{\overline{f}}(n) = \overline{\widehat{f}(-n)}$
4. Transposition :  $\widehat{\widetilde{f}}(n) = \widehat{f}(-n)$  ou  $\widetilde{f}(t) = f(-t)$  pour tout  $t \in \mathbb{T}$ .
5. Translation :  $\forall a \in \mathbb{T} : \widehat{\tau_a f}(n) = e^{-ina} \widehat{f}(n)$
6. Modulation :  $\widehat{e_m f}(n) = \widehat{f}(n - m)$
7. Convolution :  $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n)$
8. Polynôme trigonométrique : Soit  $P$  un polynôme trigonométrique tel que

$$P(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{ikt} \text{ où } N \in \mathbb{N} \text{ et } a_k \in \mathbb{C} \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}, \text{ alors:}$$

$$\widehat{P}(n) = \begin{cases} a_n & \text{si } |n| \leq N \\ 0 & \text{si } |n| > N \end{cases}$$

**Démonstration.** Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$  et  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

1. On a:

$$\left| \widehat{f}(n) \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)| dt \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$$

Donc, les coefficients de Fourier sont bien définis pour toute fonction  $f \in L^1(\mathbb{T})$ .

2. La linéarité : Elle résulte directement de la linéarité de l'intégrale.

3. Conjugaison: On a:

$$\widehat{\overline{f}}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \overline{f(t)} e^{-int} dt = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{int} dt} = \overline{\widehat{f}(-n)}$$

4. Transposition : On a:

$$\begin{aligned} \widehat{\widetilde{f}}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \widetilde{f}(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(-t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(u) e^{inu} du \\ &\quad (\text{en posant } u = -t) \\ &= \widehat{f}(-n) \end{aligned}$$

5. Translation : On a pour tout  $a \in \mathbb{T}$ :

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_a f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \tau_a f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t-a) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(u) e^{-in(u+a)} du \\ &\quad (\text{en posant } u = t-a) \\ &= e^{-ina} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(u) e^{-inu} du = e^{-ina} \widehat{f}(n) \end{aligned}$$

6. Modulation : On a:

$$\widehat{e_m f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{imt} e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-i(n-m)t} dt = \widehat{f}(n-m)$$

7. Convolution : On a:

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f * g(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t-u) g(u) du \right) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t-u) g(u) e^{-int} du \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t-u) g(u) e^{-int} dt \right) du \quad (\text{par Fubini}). \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(u) e^{-inu} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t-u) e^{-in(t-u)} dt \right) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(u) e^{-inu} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(v) e^{-inv} dv \right) du \quad (\text{en posant } v = t-u) \end{aligned}$$

$$= \widehat{f}(n) \widehat{g}(n)$$

8. Polynôme trigonométrique : Soit  $P$  un polynôme trigonométrique tel que

$$P(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{ikt} \text{ où } N \in \mathbb{N} \text{ et } a_k \in \mathbb{C} \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}, \text{ alors:}$$

$$\begin{aligned} \widehat{P}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sum_{k=-N}^N a_k e^{ikt} e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sum_{k=-N}^N a_k e^{-i(n-k)t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N a_k \int_{\mathbb{T}} e^{-i(n-k)t} dt = \begin{cases} a_n & \text{si } |n| \leq N \\ 0 & \text{si } |n| > N \end{cases} \end{aligned}$$

■

### 1.4.2 Comportements asymptotiques des coefficients de Fourier :

Dans cette partie, on s'intéressera au comportement asymptotique des coefficients de Fourier quand  $|n|$  tend vers l'infini et étudier la relation existante entre la régularité d'une fonction dans  $L^1(\mathbb{T})$  et la vitesse de convergence vers zéro des coefficients de Fourier associés à cette dernière.

**Définition 1.4.2** Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des suites  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . On note :

1.  $\ell^\infty(\mathbb{Z})$  l'ensemble des suites bornées dans  $\mathbb{C}$ .
2.  $\ell^p(\mathbb{Z})$ ,  $1 \leq p < \infty$  l'ensemble des suites  $x \in \mathcal{S}$  dont la somme  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^p$  est finie.
3.  $c_0(\mathbb{Z})$  l'ensemble des suites  $x \in \mathcal{S}$  tel que  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} x_n = 0$
4.  $c_{00}(\mathbb{Z})$  l'ensemble des suites  $x \in \mathcal{S}$  pour lesquelles il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $x_n = 0$  pour  $|n| > N$ .

**Remarque 1.4.1** Les espaces  $\ell^p(\mathbb{Z})$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$  munis de la norme  $\|x\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$  pour  $p \neq \infty$  et de la norme  $\|x\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} (|x_n|)$  pour  $p = +\infty$  sont des espaces de Banach.  $c_0(\mathbb{Z})$  et  $c_{00}(\mathbb{Z})$  sont des sous espaces de  $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ .

**Théorème 1.4.2 (Lemme de Riemann-Lebesgue):** [8] Si  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , alors  $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$  quand  $|n| \rightarrow +\infty$

**Démonstration.** Soient  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a :

$$\begin{aligned}
 |\widehat{f}(n)| &= \frac{1}{2} \left| \widehat{f}(n) + \widehat{f}(n) \right| \\
 &= \frac{1}{2} \left| \widehat{f}(n) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt \right| \\
 &= \frac{1}{2} \left| \widehat{f}(n) + e^{i\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-in(t+\frac{\pi}{n})} dt \right| \\
 &= \frac{1}{2} \left| \widehat{f}(n) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-in(t+\frac{\pi}{n})} dt \right| \\
 &= \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(u - \frac{\pi}{n}) e^{-inu} du \right| \text{ (en posant } u = t + \frac{\pi}{n} \text{).} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left| \int_{\mathbb{T}} (f(t) - f(t - \frac{\pi}{n})) e^{-int} dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t) - f(t - \frac{\pi}{n})| dt \\
 &\leq \frac{1}{2} \|f - \tau_{\frac{\pi}{n}} f\|_{L^1(\mathbb{T})}
 \end{aligned}$$

Comme la translation est continue dans  $L^1(\mathbb{T})$ , d'après la proposition 1.2.2, alors :

$$\|f - \tau_{\frac{\pi}{n}} f\|_{L^1(\mathbb{T})} \rightarrow 0 \text{ quand } |n| \rightarrow +\infty \text{ et donc en définitive, } |\widehat{f}(n)| \rightarrow 0 \text{ quand } |n| \rightarrow +\infty. \blacksquare$$

De ce théorème, on déduit que les coefficients de Fourier d'une fonction  $f \in L^1(\mathbb{T})$  sont des éléments de l'ensemble  $c_0(\mathbb{Z})$ .

**Proposition 1.4.1** Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , alors :

1. L'application  $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{T}) \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$  est linéaire continue de norme  $\|\mathcal{F}\| = 1$ .

$$f \mapsto \left( \widehat{f}(n) \right)_{n \in \mathbb{Z}}$$

2. La restriction de l'application  $\mathcal{F}$  à  $L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 < p < +\infty$  et  $C(\mathbb{T})$  est continue.

**Preuve.** Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , alors :

1. La linéarité de  $\mathcal{F}$  découle directement de celle de l'intégrale.

Pour la continuité, on a d'après le Théorème 1.4.1, pour tout  $f \in L^1(\mathbb{T})$

$$|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}, \forall n \in \mathbb{Z} \text{ et donc aussi: } \left\| \widehat{f} \right\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$$

D'où la continuité de  $\mathcal{F}$  et de plus:  $\|\mathcal{F}\| \leq 1$ .

D'autre part, on a:  $\mathcal{F}(e_0) = 1$  et  $\|e_0\|_{L^1(\mathbb{T})} = 1$ .

En définitive, on a bien:  $\|\mathcal{F}\| = 1$ .

2. Soit  $f \in L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 < p < \infty$ , on a d'après le résultat précédent et la proposition 1.2.1:

$$\left| \widehat{f}(n) \right| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

D'où la continuité de la restriction de l'application  $\mathcal{F}$  à  $L^p(\mathbb{T})$ .

La démonstration est la même pour  $f \in C(\mathbb{T})$ .

■

**Proposition 1.4.2** [8] Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$  dérivable en tout point de  $\mathbb{T}$  et  $f'$  sa dérivée.

Si  $f' \in L^1(\mathbb{T})$ , alors  $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$ ,  $\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$  et  $\left| \widehat{f}(n) \right| \leq \frac{\|f'\|_{L^1(\mathbb{T})}}{|n|}$

**Preuve.** Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$  dérivable en tout point de  $\mathbb{T}$  tel que sa dérivée  $f' \in L^1(\mathbb{T})$ , alors, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f'(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} [f(t) e^{-int}]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi} in \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt = in \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt \right) \\ &= in\widehat{f}(n) \end{aligned}$$

Comme  $f' \in L^1(\mathbb{T})$ , d'après le lemme de Riemann-Lebesgue  $\widehat{f'}(n) \rightarrow 0$  quand  $|n| \rightarrow +\infty$

Donc  $in\widehat{f}(n) \rightarrow 0$  quand  $|n| \rightarrow +\infty$ , d'où  $\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$

De l'égalité :  $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$ , on aura:

$$\begin{aligned} \left| \widehat{f}(n) \right| &= \left| \frac{1}{in} \widehat{f'}(n) \right| \\ &= \frac{1}{|n|} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{T}} f'(t) e^{-int} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|n|} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f'(t)| dt \\ &= \frac{\|f'\|_{L^1(\mathbb{T})}}{|n|} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Proposition 1.4.3** [8] Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$  dérivable à l'ordre  $k$  en tout point de  $\mathbb{T}$  où  $k \in \mathbb{N}$  et  $f^{(k)}$  sa dérivée d'ordre  $k$ .

Si  $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{T})$ , alors  $\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \widehat{f}(n)$ ,  $\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$  et  $\left| \widehat{f}(n) \right| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_{L^1(\mathbb{T})}}{|n|^k}$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}^*$

**Preuve.** Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$  dérivable à l'ordre  $k$  en tout point de  $\mathbb{T}$  où  $k \in \mathbb{N}$  tel que:  $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{T})$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a:

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f^{(k)}(t) e^{-int} dt$$

En intégrant par partie  $k$  fois, on trouve:  $\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \widehat{f}(n)$

Comme  $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{T})$ , on déduit que  $(in)^k \widehat{f}(n) \rightarrow 0$  quand  $|n| \rightarrow +\infty$

Donc:  $\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$

De l'égalité :  $\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \widehat{f}(n)$

Par le même procédé que la proposition précédente, on montre que:  $\left|\widehat{f}(n)\right| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_{L^1(\mathbb{T})}}{|n|^k}$

■

**Définition 1.4.3** [8] Soient  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , on dit que  $f$  est Hölderienne si il existe  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $A > 0$  tel que pour tout  $x, y \in \mathbb{T}$  on a:  $|f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^\alpha$ .

On note l'ensemble des fonctions Hölderienne par  $C^\alpha(\mathbb{T})$  et on écrit:  $f \in C^\alpha(\mathbb{T})$

**Proposition 1.4.4** [8] Si  $f \in C^\alpha(\mathbb{T})$  où  $\alpha \in ]0, 1]$  alors  $\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ .

**Preuve.** Soit  $f \in C^\alpha(\mathbb{T})$  où  $\alpha \in ]0, 1]$ , alors:

$$\begin{aligned} \left|\widehat{f}(n)\right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t) - f\left(t - \frac{\pi}{n}\right)| dt \quad (\text{voir la démonstration du Théorème 1.4.2}). \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{T}} A \left|\frac{\pi}{n}\right|^\alpha dt \\ &= \frac{A\pi^\alpha}{2} \frac{1}{|n|^\alpha} \end{aligned}$$

Donc:  $\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ . ■

**Définition 1.4.4 (Fonction à variation bornée):** Soient  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  où  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $\Delta$  l'ensemble des subdivisions finies de l'intervalle  $[a, b]$ , soit  $\sigma \in \Delta$  tel que  $\sigma = (t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b)$ ,  $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}$  où  $n \in \mathbb{N}$ , on note par  $V_f(\sigma, a, b)$  le réel défini par:  $V_f(\sigma, a, b) = \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})|$ .

On appelle variation totale de  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$  le réel  $V_f(a, b)$  définie par:

$$V_f(a, b) = \sup_{\sigma \in \Delta} V_f(\sigma, a, b)$$

On dit que  $f$  est à variation bornée sur l'intervalle  $[a, b]$  si  $V_f(a, b)$  est finie.

**Proposition 1.4.5** [9] Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction à variation bornée sur l'intervalle  $[a, b]$ .

1. Soient  $x, y, z \in [a, b]$  tel que  $x \leq y \leq z$ , alors, on a :  $V_f(x, z) = V_f(x, y) + V_f(y, z)$ .
2. Les parties réelle et imaginaire de  $f$  sont la différence de deux fonctions croissantes.

**Preuve.** Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction à variation bornée sur l'intervalle  $[a, b]$ .

1. Soient  $x, y, z \in [a, b]$  tel que  $x \leq y \leq z$  et soient  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  des subdivisions finies des intervalles  $[x, y]$  et  $[y, z]$  respectivement, alors:  $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$  est une subdivision de l'intervalle  $[x, z]$ .

donc :

$$V_f(\sigma_1, x, y) + V_f(\sigma_2, y, z) = V_f(\sigma, x, z) \leq V_f(x, z)$$

$$\text{d'où } V_f(x, y) + V_f(y, z) \leq V_f(x, z)$$

D'autre part, soit  $\sigma = (t_0 = x, t_1, \dots, t_n = z)$  une subdivision de l'intervalle  $[x, z]$ .

Puisque  $y \in [x, z]$ , alors il existe un sous intervalle  $[t_{k-1}, t_k]$  où  $k \in \{1, \dots, n\}$  de la subdivision  $\sigma$  tel que  $y \in [t_{k-1}, t_k]$ .

Donc :

$$\begin{aligned} V_f(\sigma, x, z) &= \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} |f(t_j) - f(t_{j-1})| + |f(t_k) - f(t_{k-1})| + \sum_{j=k+1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})| \\ &\leq \sum_{j=1}^{k-1} |f(t_j) - f(t_{j-1})| + |f(y) - f(t_{k-1})| + |f(t_k) - f(y)| \\ &\quad + \sum_{j=k+1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})| \\ &= V_f(\sigma_1, x, y) + V_f(\sigma_2, y, z) \\ &\leq V_f(x, y) + V_f(y, z) \end{aligned}$$

$$\text{D'où: } V_f(x, z) \leq V_f(x, y) + V_f(y, z)$$

On déduit donc que:  $V_f(x, z) = V_f(x, y) + V_f(y, z)$ .

2. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $f$  est à valeurs réelles.

Pour tout  $t \in [a, b]$ , on a :

$$f(t) = V_f(a, t) - (V_f(a, t) - f(t))$$

On pose:  $g(t) = V_f(a, t)$  et  $h(t) = V_f(a, t) - f(t)$  et donc:  $f(t) = g(t) - h(t)$

Soient  $x, y \in [a, b]$  tel que  $x \leq y$ , on a donc:

$$g(y) - g(x) = V_f(a, y) - V_f(a, x) = V_f(x, y)$$

et comme  $V_f(x, y) \geq 0$ , alors :  $g(y) - g(x) \geq 0$

Donc :  $g$  est croissante.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} h(y) - h(x) &= V_f(a, y) - f(y) - (V_f(a, x) - f(x)) = V_f(a, y) + V_f(a, x) + f(x) - f(y) \\ &= V_f(x, y) + f(x) - f(y) \end{aligned}$$

Et comme  $V_f(x, y) + f(x) - f(y) \geq 0$ , alors  $h(y) - h(x) \geq 0$

Donc  $h$  est croissante.

■

**Proposition 1.4.6** [3] Soient  $f \in L^1(\mathbb{T})$  à variation bornée, alors  $\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ .

**Preuve.** Soient  $f \in L^1(\mathbb{T})$  à variation bornée,  $n \in \mathbb{Z}^*$  et  $V_f(\mathbb{T})$  la variation totale de  $f$  sur  $\mathbb{T}$ .

Soit  $\sigma = (t_0 = 0, t_1, \dots, t_{|n|N} = 2\pi)$  une subdivision de l'intervalle  $[0, 2\pi]$  tel que

$t_j - t_{j-1} = \frac{2\pi}{|n|N}$  et  $t_j = \frac{2\pi j}{|n|N}$  où  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $j \in \{1, \dots, |n|N\}$ , alors :

$$\begin{aligned} \left| \widehat{f}(n) \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{j=1}^{|n|N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t) e^{-int} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{j=1}^{|n|N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t_j) e^{-int} dt \right| + \left| \sum_{j=1}^{|n|N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (f(t) - f(t_j)) e^{-int} dt \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \left| \sum_{j=1}^{|n|N} f(t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-int} dt \right| + \left| \sum_{j=1}^{|n|N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (f(t) - f(t_j)) e^{-int} dt \right| \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \left| \frac{1}{|n|} \sum_{j=1}^{|n|N} f(t_j) (e^{-int_j} - e^{-int_{j-1}}) \right| + \left| \sum_{j=1}^{|n|N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (f(t) - f(t_j)) e^{-int} dt \right| \right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left( \left| \frac{1}{|n|} \sum_{j=1}^{|n|N} f(t_j) (e^{-int_j} - e^{-int_{j-1}}) \right| + \sum_{j=1}^{|n|N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f(t) - f(t_j)| dt \right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left( \left| \frac{1}{|n|} \sum_{j=1}^{|n|N} f(t_j) (e^{-int_j} - e^{-int_{j-1}}) \right| + \sum_{j=1}^{|n|N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} V_f(t_j, t_{j-1}) dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \left| \frac{1}{|n|} \sum_{j=1}^{|n|N} f(t_j) (e^{-int_j} - e^{-int_{j-1}}) \right| + \frac{2\pi}{|n|N} \sum_{j=1}^{|n|N} V_f(t_j, t_{j-1}) \right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left( \left| \frac{1}{|n|} \sum_{j=1}^{|n|N} f(t_j) (e^{-int_j} - e^{-int_{j-1}}) \right| + \frac{2\pi}{|n|N} V_f(\mathbb{T}) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{|n|} \left| \sum_{j=0}^{|n|N-1} (f(t_j) - f(t_{j+1})) e^{-int_j} \right| + \frac{2\pi}{|n|N} V_f(\mathbb{T}) \right)$$

Car ici:  $f(t_{|n|N}) e^{-int_{|n|N}} = f(2\pi) e^{-2in\pi} = f(t_0) e^{-int_0} = f(0) = f(2\pi)$  et donc:

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(n)| &\leq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{|n|} \sum_{j=0}^{|n|N-1} |f(t_j) - f(t_{j+1})| + \frac{2\pi}{|n|N} V_f(\mathbb{T}) \right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{|n|} V_f(\mathbb{T}) + \frac{2\pi}{|n|N} V_f(\mathbb{T}) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|n|} \left( 1 + \frac{2\pi}{N} \right) V_f(\mathbb{T}) \end{aligned}$$

En faisant tendre  $N$  vers l'infini, on obtient :

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{V_f(\mathbb{T})}{2\pi} \frac{1}{|n|}$$

Donc:  $\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$  ■

**Définition 1.4.5** [3] *On dit qu'une fonction  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$  est absolument continue si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que pour toute famille finie d'intervalles  $(]a_j, b_j])_{j \in I}$  ouverts et deux à deux disjoint inclus dans l'intervalle  $[a, b]$ , on a :*

$$\sum_{j \in I} |t_j - t_{j-1}| \leq \delta \implies \sum_{j \in I} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \leq \varepsilon$$

*On note l'ensemble des fonctions absolument continues sur  $[a, b]$  par  $\mathcal{AC}([a, b])$*

**Remarque 1.4.2** 1. *On note l'ensemble des fonctions absolument continues sur le Tore  $\mathbb{T}$  par  $\mathcal{AC}(\mathbb{T})$ .*

2. *Toute fonction  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$  absolument continue admet presque partout sur  $[a, b]$  une dérivée  $f'$  localement intégrable, tel que:*

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a) \text{ (pour la démonstration voir [5] ou [9]).}$$

**Proposition 1.4.7** *Si  $f \in \mathcal{AC}(\mathbb{T})$ , alors  $\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ .*

**Preuve.** Soit  $f \in \mathcal{AC}(\mathbb{T})$ .

Par la remarque précédente, on sait que  $f$  est dérivable presque partout sur  $\mathbb{T}$  et que  $f' \in L^1(\mathbb{T})$  donc, d'après la proposition 1.4.2:  $\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ . ■

### 1.4.3 Les séries de Fourier

**Définition 1.4.6** *On appelle série trigonométrique toute somme de la forme :  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{int}$*

On note  $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  la suite des sommes partielles de la série précédente et on écrit:

$$T_n(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikt}$$

**Définition 1.4.7** Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , on appelle série de Fourier associée à  $f$  la série trigonométrique définie par:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int}$ , où  $\widehat{f}(n)$  sont les coefficients de Fourier associés à  $f$ .

On note  $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des sommes partielles de la série de Fourier associée à  $f$  et on écrit:  $S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikt}$  pour tout  $t \in \mathbb{T}$ .

**Remarque 1.4.3** 1. Une série de Fourier associée à une fonction  $f \in L^1(\mathbb{T})$  peut diverger pour tout  $t \in \mathbb{T}$ .

2. Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , on a dans le cas de convergence:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{m \in \mathbb{N}^*} (a_m(f) \cos(mt) + b_m(f) \sin(mt)), \text{ où}$$

$$a_m(f) = \widehat{f}(m) + \widehat{f}(-m) \text{ et } b_m(f) = i \left( \widehat{f}(m) - \widehat{f}(-m) \right) \text{ pour tout } m \text{ dans } \mathbb{N}.$$

En effet, comme  $e^{int} = \cos(nt) + i \sin(nt)$  pour tout  $n$  dans  $\mathbb{Z}$ , alors:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) (\cos(nt) + i \sin(nt)) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \left( \left( \widehat{f}(m) + \widehat{f}(-m) \right) \cos(mt) + i \left( \widehat{f}(m) - \widehat{f}(-m) \right) \sin(mt) \right) \end{aligned}$$

Et cela en posant  $m = n$  si  $n \geq 0$  et  $m = -n$  si  $n \leq 0$ .

Cette somme est appelée série de Fourier des cosinus et sinus.

On peut trouver l'expression des coefficients de Fourier  $\widehat{f}(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  en fonction de  $a_m(f)$  et  $b_m(f)$  à partir des relations suivantes:

$$a_m(f) = \widehat{f}(m) + \widehat{f}(-m)$$

$$b_m(f) = i \left( \widehat{f}(m) - \widehat{f}(-m) \right)$$

et on obtient:

$$\widehat{f}(m) = \frac{a_m(f) - ib_m(f)}{2} \text{ et } \widehat{f}(-m) = \frac{a_m(f) + ib_m(f)}{2} \text{ pour tout } m \text{ dans } \mathbb{N}$$

**Proposition 1.4.8** Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , on a les résultats suivants :

$$1. a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \cos(nt) dt \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \sin(nt) dt \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$2. \text{ Si } f \text{ est paire } (f(-t) = f(t), \forall t \in \mathbb{T}), \text{ alors } \widehat{f}(-n) = \widehat{f}(n) \text{ et } b_n(f) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. Si  $f$  est impaire ( $f(-t) = -f(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{T}$ ), alors  $\widehat{f}(-n) = -\widehat{f}(n)$  et  $a_n(f) = 0$   $\forall n \in \mathbb{N}$ .

4. Si  $f(t) \in \mathbb{R}$ ,  $\forall t \in \mathbb{T}$ , alors  $\widehat{f}(-n) = \overline{\widehat{f}(n)}$ ,  $a_n(f) \in \mathbb{R}$  et  $b_n(f) \in \mathbb{R}$   $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Preuve.** Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , alors :

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a:

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \widehat{f}(n) + \widehat{f}(-n) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) (e^{-int} + e^{int}) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \left( \frac{e^{-int} + e^{int}}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \cos(nt) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n(f) &= i \left( \widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n) \right) \\ &= i \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{int} dt \right) \\ &= i \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) (e^{-int} - e^{int}) dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \left( \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \sin(nt) dt \end{aligned}$$

2. Supposons que  $f$  est paire donc  $\forall t \in \mathbb{T}$   $\tilde{f}(t) = f(t)$  où  $\tilde{f}(t) = f(-t)$ , d'où pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\widehat{\tilde{f}}(n) = \widehat{f}(n)$  et d'après la propriété (4) du théorème 1.4.1, on obtient:  $\widehat{\tilde{f}}(n) = \widehat{f}(-n)$  et donc  $b_n(f) = 0$ .

3. Supposons que  $f$  est impaire, donc  $\forall t \in \mathbb{T}$ :  $\tilde{f}(t) = -f(t)$ , d'où pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$\widehat{\tilde{f}}(n) = -\widehat{f}(n)$  et d'après la propriété (4) du théorème 1.4.1, on obtient:

$\widehat{\tilde{f}}(n) = \widehat{f}(-n)$  et donc  $a_n(f) = 0$ .

4. Supposons que  $\forall t \in \mathbb{T}$ :  $f(t) \in \mathbb{R}$ , alors  $f(t) = \overline{f(t)}$  et donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$\widehat{\tilde{f}}(n) = \widehat{f}(n)$  d'après la propriété (3) du théorème 1.4.1, on obtient :  $\widehat{\tilde{f}}(n) = \overline{\widehat{f}(-n)}$

d'où:

$$a_n(f) = \widehat{f}(n) + \widehat{f}(-n) = \widehat{f}(n) + \overline{\widehat{f}(n)}$$

Donc:  $a_n(f) \in \mathbb{R}$

$$b_n(f) = i \left( \widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n) \right) = i \left( \widehat{f}(n) - \overline{\widehat{f}(n)} \right)$$

Donc:  $b_n(f) \in \mathbb{R}$ .

■

# Chapitre 2

## Convergence des séries de Fourier

### 2.1 Introduction

A toute fonction  $f$  dans  $L^1(\mathbb{T})$ , on peut associer la série de Fourier dont les sommes partielles sont notées  $S_n(f)$ . Le problème est de savoir si elle converge ou pas et si c'est le cas, de quelle type de convergence il s'agit:

De convergence simple.

De convergence presque partout.

De convergence en mesure.

De convergence uniforme.

De convergence en norme.

De convergence en moyenne.

De convergence au sens des distributions. etc...

L'étude de la convergence des séries de Fourier est un sujet très délicat, qui a contribué au développement des mathématiques et en particulier de l'analyse fonctionnelle. Son intérêt réside dans les nombreuses applications obtenues dans les domaines de la physique et de la technologie. Dans ce chapitre, on va s'intéresser à l'étude de quelques types de convergences des séries de Fourier.

## 2.2 Convergence en moyenne

Au début du 19<sup>ème</sup> siècle, Fourier conjectura que la continuité d'une fonction périodique est suffisante pour que la série de Fourier associée converge. Mais, en 1876 du Bois Raymond construit une fonction continue dont la série de Fourier diverge en un point. En 1900 Fejér proposa un autre contre exemple et énonça un résultat très important de la convergence des séries de Fourier en utilisant les sommes de Cesàro.

### 2.2.1 Les Noyaux trigonométriques

Avant d'entamer l'étude de la convergence en moyenne des séries de Fourier, nous allons présenter quelques noyaux trigonométriques et définir la notion de l'approximation de l'unité, très utile pour l'étude de la convergence en moyenne des séries de Fourier.

**Définition 2.2.1 (Approximation de l'unité):** [8] *On appelle approximation de l'unité toute suite de fonctions  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $L^1(\mathbb{T})$  telles que:*

1.  $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} K_n(t) dt = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2.  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|K_n\|_{L^1(\mathbb{T})} < +\infty$ .
3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt = 0$  pour tout  $\delta \in ]0, \pi[$

Si de plus  $K_n(t) \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $t \in \mathbb{T}$ , alors, le noyau est dit positif.

**Remarque 2.2.1** *Certains noyaux vérifient une propriété de convergence plus forte que la propriété (3):*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| = 0$$

**Définition 2.2.2 (Noyau de Dirichlet):** *On appelle noyau de Dirichlet, le polynôme trigonométrique  $D_n$  où  $n \in \mathbb{N}$ , défini pour tout  $t \in \mathbb{T}$  par:*

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt}$$

Voici quelques propriétés du noyau de Dirichlet:

**Proposition 2.2.1** [8] *Soient  $f \in L^1(\mathbb{T})$  et  $n \in \mathbb{N}$ , alors:*

1.  $D_n$  est une fonction paire et  $2\pi$ -périodique.

2.  $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} D_n(t) dt = 1$

3.  $S_n(f) = D_n * f$

4.  $D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}$  pour tout  $t \in \mathbb{T}$ .

5.  $\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} = \frac{4}{\pi^2} \ln(n) + O(1)$

**Preuve.** Soient  $f \in L^1(\mathbb{T})$  et  $n \in \mathbb{N}$ , alors:

1. Pour tout  $t \in \mathbb{T}$ :

$$D_n(-t) = \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} = \sum_{j=n}^{-n} e^{ijt} = \sum_{j=-n}^n e^{ijt} = D_n(t)$$

Donc  $D_n$  est paire.

Pour tout  $t \in \mathbb{T}$ :

$$D_n(t + 2\pi) = \sum_{k=-n}^n e^{ik(t+2\pi)} = \sum_{k=-n}^n e^{ikt+2\pi ik} = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = D_n(t)$$

Donc  $D_n$  est  $2\pi$ -périodique.

2. On a:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sum_{k=-n}^n e^{ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{\mathbb{T}} e^{ikt} dt = 1$$

3. Pour tout  $t \in \mathbb{T}$ , on a:

$$\begin{aligned} S_n(f)(t) &= \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikt} = \sum_{k=-n}^n \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(u) e^{-iku} du \right) e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(u) \sum_{k=-n}^n e^{ik(t-u)} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(u) D_n(t-u) du = D_n * f(t) \end{aligned}$$

4. On a pour tout  $t \in \mathbb{T}$ :

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = e^{-int} \frac{1 - e^{i(2n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{-int} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{\left( e^{-i(n+\frac{1}{2})t} - e^{i(n+\frac{1}{2})t} \right)}{\left( e^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{it}{2}} \right)} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}$$

5. Soit  $t \in \mathbb{T}$  :

En effectuant le développement limité de  $\frac{1}{\sin(\frac{t}{2})}$  au voisinage de zéro:

$$\frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} = \frac{1}{\frac{t}{2}(1+O(t^2))} = \frac{2}{t} (1 + O(t^2)) = \frac{2}{t} + O(t)$$

Donc:

$$\begin{aligned}\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |D_n(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{\sin(\frac{1}{2}t)} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} \frac{2|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{t} dt + \int_0^{\pi} |\sin((n+\frac{1}{2})t)| O(t) dt \right)\end{aligned}$$

L'intégrale  $\int_0^{\pi} |\sin((n+\frac{1}{2})t)| O(t) dt$  est bornée, donc:

$$\begin{aligned}\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{t} dt + O(1) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin(u)|}{u} du + O(1) \text{ (en posant } u = (n+\frac{1}{2})t) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt + \int_{n\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt + O(1) \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(t)|}{t} dt + O(1) \right) \\ &\quad \text{(en posant } u = t - n\pi) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt + O(1)\end{aligned}$$

Car les deux intégrales  $\int_0^{\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$  et  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$  sont bornées.

En posant  $u = t - kt$  pour  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , on aura:

$$\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u)|}{u+k\pi} dt + O(1)$$

On a pour  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $u \in ]0, \pi[$ :

$$\frac{1}{u+k\pi} \leq \frac{1}{k\pi}$$

$$\text{Donc: } \frac{1}{u+k\pi} - \frac{1}{(1+k)\pi} \leq \frac{1}{k\pi} - \frac{1}{(1+k)\pi}$$

D'où:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{u+k\pi} - \frac{1}{(1+k)\pi} \right) &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{(1+k)\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \\ &\leq \frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

En multipliant les membres de cette inégalité par  $|\sin(u)|$ , on obtient:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left( \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u)|}{u+k\pi} du - \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u)|}{(1+k)\pi} du \right) \leq \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u)|}{\pi} du$$

Donc:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left( \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u)|}{u+k\pi} du - \frac{2}{(1+k)\pi} \right) \leq \frac{2}{\pi}, \text{ c'est à dire: } \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u)|}{u+k\pi} du - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1+k} \leq \frac{4}{\pi^2}$$

On a le résultat suivant:  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1+k} = \ln(n) + O\left(\frac{1}{n}\right)$

En remplaçant dans l'inégalité précédente, on obtient:

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u)|}{u+k\pi} du - \frac{4}{\pi^2} \left( \ln(n) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \leq \frac{4}{\pi^2}$$

C'est à dire:  $\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u)|}{u+k\pi} du = \frac{4}{\pi^2} \ln(n) + O(1)$

En définitive, nous avons obtenu:

$$\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u)|}{u+k\pi} du + O(1) = \frac{4}{\pi^2} \ln(n) + O(1)$$

■

**Remarque 2.2.2** D'après la proposition précédente  $\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} = \frac{4}{\pi^2} \ln(n) + O(1)$  et donc  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} = +\infty$ , ce qui signifie que la suite  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas une approximation de l'unité.

**Définition 2.2.3 (Noyau de Fejér):** On appelle noyau de Fejér d'ordre  $n$  et on note  $F_n$ , la moyenne arithmétique des  $n + 1$  premiers noyaux de Dirichlet et on écrit:

$$F_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k$$

**Définition 2.2.4** Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$ . On note  $\sigma_n(f)$  où  $n \in \mathbb{N}$ , La somme de Cesàro de la série de Fourier de la fonction  $f$ :

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f)$$

Les propriétés du noyau de Fejér sont résumées dans la proposition suivante:

**Proposition 2.2.2** [8] Soient  $f \in L^1(\mathbb{T})$  et  $n \in \mathbb{N}$ , alors:

1.  $F_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e_k$

2.  $F_n(t) = \frac{1}{n+1} \left( \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \right)^2$

3.  $\sigma_n(f) = F_n * f$

4. La suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une approximation positive de l'unité.

**Preuve.** Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$  :

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$  alors, Pour tout  $t \in \mathbb{T}$ :

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n D_j(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \sum_{k=-j}^j e^{ikt} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \left( \sum_{|k| \leq j} e^{ikt} \right) = \frac{1}{n+1} \sum_{|k| \leq n} e^{ikt} \sum_{|k| \leq j \leq n} (1) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{|k| \leq n} e^{ikt} (n+1 - |k|) = \sum_{k=-n}^n \left( 1 - \frac{|k|}{n+1} \right) e^{ikt} \end{aligned}$$

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in \mathbb{T}$ , on a:

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} = \frac{1}{(n+1)\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \sum_{k=0}^n \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \sum_{k=0}^n \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i(n+1)\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \left( \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} e^{i\frac{t}{2}} - \frac{1 - e^{-i(n+1)t}}{1 - e^{-it}} e^{-i\frac{t}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2i(n+1)\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \left( \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}t} - e^{i\frac{n+1}{2}t}}{e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}} e^{i\frac{n+1}{2}t} - \frac{e^{i\frac{n+1}{2}t} - e^{-i\frac{n+1}{2}t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} e^{-i\frac{n+1}{2}t} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \left( \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \left( \frac{e^{i\frac{n+1}{2}t} - e^{-i\frac{n+1}{2}t}}{2i} \right) \right) = \frac{1}{n+1} \left( \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \right)^2 \end{aligned}$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$  alors, pour tout  $t \in \mathbb{T}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_n(f) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (D_k * f) \\ &= \left( \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k \right) * f \text{ (linéarité du produit de convolution).} \\ &= F_n * f \end{aligned}$$

4. Montrons maintenant que la suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une approximation de l'unité:

(a) On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} F_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t) dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \int_{\mathbb{T}} D_k(t) dt = 1$$

(b) On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\|F_n\|_{L^1(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |F_n(t)| dt$$

Comme  $F_n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in \mathbb{T}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , alors:

$$\|F_n\|_{L^1(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} F_n(t) dt = 1, \text{ d'où } \sup_{n \in \mathbb{N}} \|F_n\|_{L^1(\mathbb{T})} < +\infty.$$

(c) Soit  $\delta$  un réel tel que  $0 < \delta < \pi$ , alors:

$$\sin\left(\frac{1}{2}t\right) \geq \sin\left(\frac{1}{2}\delta\right) \text{ pour tout } t \in ]\delta, \pi].$$

$$\text{Donc: } \frac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)} \leq \frac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\delta\right)} \text{ et alors: } \left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\right)^2 \leq \frac{\left(\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)\right)^2}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\delta\right)} \leq \frac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\delta\right)}$$

On déduit que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :

$$F_n(t) \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\delta\right)}$$

En intégrant l'inégalité sur l'intervalle  $]\delta, \pi]$ , on obtient:

$$\int_{\delta < |t| \leq \pi} |F_n(t)| dt \leq \frac{1}{n+1} \int_{\delta < |t| \leq \pi} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\delta\right)} dt \leq \frac{1}{n+1} \frac{2(\pi-\delta)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\delta\right)}$$

En passant à la limite, on aura:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |F_n(t)| dt \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n+1} \frac{2(\pi-\delta)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\delta\right)} \right) = 0$$

La suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc bien une approximation positive de l'unité.

■

**Définition 2.2.5 (Noyau de Poisson):** Soit  $r$  un réel tel que  $0 \leq r < 1$ . On appelle noyau de Poisson la fonction  $P_r$  définie pour tout  $t \in \mathbb{T}$  par:

$$P_r(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int}.$$

**Définition 2.2.6** Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$ . On note par  $S_r[f]$  la série définie par:

$$S_r[f](t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \widehat{f}(n) e^{int}, \forall t \in \mathbb{T}$$

Le noyau de Poisson possède les propriétés suivantes:

**Proposition 2.2.3** [8] Soient  $r \in [0, 1[$ ,  $f \in L^1(\mathbb{T})$  et  $t \in \mathbb{T}$ , alors:

1.  $P_r(t) = 1 + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} r^n \cos(nt)$

2.  $P_r(t) = \operatorname{Re} \left( \frac{1+re^{int}}{1-re^{int}} \right) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos(t)+r^2}$

3. Si la série  $S_r[f]$  converge uniformément, alors:  $S_r[f] = P_r * f$

4. Soit  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle tel que  $0 \leq r_n < 1$  et convergente vers 1, alors la suite  $(P_{r_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est une approximation de l'unité.

**Preuve.** Soit  $r \in [0, 1[$ , alors:

1. pour tout  $t \in \mathbb{T}$ , on a:

$$P_r(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} = 1 + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} r^n \left( \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \right) = 1 + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} r^n \cos(nt)$$

2. En posant  $\omega = r^{|n|} e^{int}$  pour tout  $t \in \mathbb{T}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on obtient:

$$\begin{aligned} P_r(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \bar{\omega} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \omega = \frac{\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}} + \frac{1}{1-\omega} = \frac{1-|\omega|^2}{1-(\omega+\bar{\omega})+|\omega|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r \cos(t)+r^2} \\ &= \frac{\operatorname{Re}((1+\omega)(1-\bar{\omega}))}{|1-\omega|^2} = \frac{\operatorname{Re}((1+\omega)(1-\bar{\omega}))}{(1-\omega)(1-\bar{\omega})} = \operatorname{Re} \left( \frac{1+\omega}{1-\omega} \right) \end{aligned}$$

3. Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$  tel que la série  $S[f]$  converge uniformément alors, pour tout  $t \in \mathbb{T}$ :

$$\begin{aligned} S_r[f](t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \widehat{f}(n) e^{int} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(u) e^{-inu} du \right) e^{int} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} r^{|n|} f(u) e^{in(t-u)} du \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} f(u) e^{in(t-u)} du \text{ (grâce à la convergence uniforme).} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(t-u)} \right) f(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P_r(t-u) f(u) du = P_r * f(t) \end{aligned}$$

4. Soit  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle tel que  $0 \leq r_n < 1$  et converge vers 1, alors:

- (a) On a pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et  $t \in \mathbb{T}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P_{r_n}(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{|m|} e^{imt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{|m|} \int_{\mathbb{T}} e^{imt} dt \text{ (car la série est uniformément convergente).} \\ &= \frac{1}{2\pi} r_n^0 \int_{\mathbb{T}} dt = 1 \end{aligned}$$

- (b) On a pour:  $0 \leq r_n < 1$ :

$$1 - r_n^2 \geq 0 \text{ et } 1 - 2r_n \cos(t) + r_n^2 \geq (1 - r_n)^2 \geq 0$$

Donc:

$$\|P_{r_n}\|_{L^1(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |P_{r_n}(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P_{r_n}(t) dt = 1$$

D'où:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_{r_n}\|_{L^1(\mathbb{T})} < +\infty$$

(c) Soit  $\delta$  un réel strictement positif tel que  $\delta \in ]0, \pi]$ , alors:

Pour tout  $t \in ]\delta, \pi]$ , on a:

$$\cos(t) \leq \cos(\delta)$$

$$\text{Donc: } -2r_n \cos(t) \geq -2r_n \cos(\delta)$$

$$\text{D'où: } 1 - 2r_n \cos(t) + r_n^2 \geq 1 - 2r_n \cos(\delta) + r_n^2$$

$$\text{Alors: } P_{r_n}(t) \leq \frac{1-r_n}{1-2r_n \cos(\delta)+r_n^2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En intégrant sur les intervalles  $[-\pi, -\delta[$  et  $]\delta, \pi]$ , on obtient:

$$\begin{aligned} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |P_{r_n}(t)| dt &= \int_{\delta < |t| \leq \pi} P_{r_n}(t) dt \\ &\leq \int_{\delta < |t| \leq \pi} \frac{1-r_n}{1-2r_n \cos(\delta)+r_n^2} dt \\ &= \frac{1-r_n}{1-2r_n \cos(\delta)+r_n^2} \int_{\delta < |t| \leq \pi} dt \\ &= \frac{2(1-r_n)(\pi-\delta)}{1-2r_n \cos(\delta)+r_n^2} \end{aligned}$$

$$\text{Et comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 1, \text{ alors: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(1-r_n)(\pi-\delta)}{1-2r_n \cos(\delta)+r_n^2} = 0$$

$$\text{Donc: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |P_{r_n}(t)| dt = 0$$

Ce qui montre que la suite  $(P_{r_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est une approximation de l'unité.

■

### 2.2.2 Sommabilité en norme

Dans cette partie, nous allons étudier la convergence en moyenne des séries de Fourier dans chacun des espaces  $L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p < +\infty$  et  $C(\mathbb{T})$ .

**Théorème 2.2.1** [8] *Soient  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une approximation de l'unité et  $f \in L^1(\mathbb{T})$ :*

*Si  $f \in C(\mathbb{T})$ , on a  $K_n * f \rightarrow f$  dans  $C(\mathbb{T})$*

*Si  $f \in L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , on a  $K_n * f \rightarrow f$  dans  $L^p(\mathbb{T})$*

**Démonstration.** Soient  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une approximation de l'unité et  $f \in L^1(\mathbb{T})$ .

► Supposons que  $f \in C(\mathbb{T})$  et  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Alors:

Comme  $f$  est continue sur le compact  $\mathbb{T}$ , alors elle est aussi uniformément continue.

Donc, il existe un réel  $\delta$  strictement positif tel que pour tout  $x, y \in \mathbb{T}$ , si  $|x - y| \leq \delta$ , on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2\|K_n\|_{L^1(\mathbb{T})}}$$

Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{T}$ , on aura:

$$\begin{aligned}
 |K_n * f(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} K_n(t) f(x-t) dt - f(x) \right| \\
 &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} K_n(t) f(x-t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} K_n(t) f(x) dt \right| \\
 &\quad \left( \text{car } \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} K_n(t) dt = 1 \right) \\
 &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} K_n(t) (f(x-t) - f(x)) dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |K_n(t)| |f(x-t) - f(x)| dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} |K_n(t)| |f(x-t) - f(x)| dt \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| |f(x-t) - f(x)| dt \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{2\|K_n\|_{L^1(\mathbb{T})}} \int_{|t| \leq \delta} |K_n(t)| dt + \frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}}{\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2\|K_n\|_{L^1(\mathbb{T})}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |K_n(t)| dt + \frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}}{\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}}{\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt
 \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt = 0$

Alors, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que: si  $n \geq N$ , on a:  $\int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt \leq \frac{\pi\varepsilon}{2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}}$

Donc, pour tout  $n \geq N$ :

$$|K_n * f(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

D'où:  $\sup_{x \in \mathbb{T}} |K_n * f(x) - f(x)| \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ , c'est à dire:  $\|K_n * f - f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \varepsilon$

► Soient maintenant  $f \in L^p(\mathbb{T})$  et  $\varepsilon$  un réel strictement positif.

Comme  $C(\mathbb{T})$  est dense dans  $L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p < +\infty$  alors, il existe une fonction  $g \in C(\mathbb{T})$

tel que:  $\|f - g\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \frac{\varepsilon}{2(1 + \|K_n\|_{L^1(\mathbb{T})})}$ .

Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
 \|K_n * f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} &\leq \|K_n * f - K_n * g\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|K_n * g - g\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|f - g\|_{L^p(\mathbb{T})} \\
 &= \|K_n * (f - g)\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|K_n * g - g\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|f - g\|_{L^p(\mathbb{T})} \\
 &\leq \|K_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \|f - g\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|K_n * g - g\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|f - g\|_{L^p(\mathbb{T})} \\
 &\leq \|K_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \|f - g\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|K_n * g - g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + \|f - g\|_{L^p(\mathbb{T})} \\
 &\quad \text{(d'après la proposition 1.2.1).}
 \end{aligned}$$

$$\leq \left(1 + \|K_n\|_{L^1(\mathbb{T})}\right) \|f - g\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|K_n * g - g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$$

Comme  $K_n * g \rightarrow g$  dans  $C(\mathbb{T})$ , il existe un rang  $N' \in \mathbb{N}$ , tel que:

$$\text{si } n \geq N': \|K_n * g - g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En définitive, on a:  $\|K_n * f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \varepsilon$  ■

**Corollaire 2.2.1 (Théorème de Fejér):** [3] Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , on note  $\sigma_n(f)$  la somme de Cesàro de la série de Fourier de la fonction  $f$ , alors:

1. Si  $f \in C(\mathbb{T})$ , la suite  $\sigma_n(f)$  converge vers  $f$  dans  $C(\mathbb{T})$ .
2. Si  $f \in L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , la suite  $\sigma_n(f)$  converge vers  $f$  dans  $L^p(\mathbb{T})$ . De plus
 
$$\|\sigma_n(f)\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

**Preuve.** Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , alors:  $\sigma_n(f) = F_n * f$ , où  $F_n$  est le noyau de Fejèr

Comme la suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une approximation de l'unité, la convergence est une conséquence du théorème précédent.

D'une autre part, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a:

$$\begin{aligned} \|\sigma_n(f)\|_{L^p(\mathbb{T})} &= \|F_n * f\|_{L^p(\mathbb{T})} \\ &\leq \|F_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

Comme  $\|F_n\|_{L^1(\mathbb{T})} = 1$ , on aura bien:  $\|\sigma_n(f)\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$  ■

**Corollaire 2.2.2** Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , alors:  $S_r[f] \rightarrow f$  quand  $r \rightarrow 1$  dans  $C(\mathbb{T})$  (si  $f \in C(\mathbb{T})$ ) et  $L^p(\mathbb{T})$  (si  $f \in L^p(\mathbb{T})$ ),  $1 \leq p < +\infty$ .

On dit dans ce cas, que la série de Fourier associée à  $f$  converge au sens d'Abel.

**Preuve.** Conséquence directe du théorème précédent, car  $P_r$  est une approximation de l'unité. ■

**Corollaire 2.2.3** L'ensemble des polynômes trigonométriques  $\mathcal{P}(\mathbb{T})$  est dense dans  $C(\mathbb{T})$ .

**Preuve.** Ce résultat est une conséquence directe du théorème de Fejér, car  $\sigma_n(f)$  est un polynôme trigonométrique arbitrairement proche de  $f$ . ■

**Corollaire 2.2.4** Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ , alors: si  $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a:  $f = g$  dans  $L^1(\mathbb{T})$ , en d'autres termes, l'application  $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{T}) \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$  est injective.

**Preuve.** Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$  tel que  $\widehat{f}(m) = \widehat{g}(m)$  pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ , alors:

$$F_n * f = F_n * g \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

et comme  $F_n * f \rightarrow f$  et  $F_n * g \rightarrow g$  dans  $L^1(\mathbb{T})$  et par unicité de la limite, on déduit que  $f = g$  dans  $L^1(\mathbb{T})$ , ce qui prouve l'injectivité de l'application  $\mathcal{F}$ . ■

### 2.2.3 Convergence ponctuelle:

On a vu dans la partie précédente que pour les fonctions dans  $C(\mathbb{T})$ , la convergence des sommes de Cesàro des séries de Fourier est uniforme, donc en particulier pour tout  $t \in \mathbb{T}$  :  $\sigma_n(f)(t) \rightarrow f(t)$  où  $f \in C(\mathbb{T})$ . Dans cette partie, nous allons étudier la convergence des sommes de Cesàro des séries de Fourier des fonctions continues en un point.

**Théorème 2.2.2** [8] *Soient  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une approximation de l'unité,  $f \in L^1(\mathbb{T})$  et  $t_0 \in \mathbb{T}$ . Supposons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\delta < |t| < \pi} |K_n(t)| = 0$ ,  $\delta \in ]0, \pi]$  ou bien  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt = 0$  si  $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ , alors:*

1. Si  $f$  est continue en  $t_0$ , on a:  $K_n * f(t_0) \rightarrow f(t_0)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .
2. Si  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0+h)+f(t_0-h)}{2} = \ell$  ( $\ell$  finie) et  $K_n$  est paire, alors:  $K_n * f(t_0) \rightarrow \ell$ ,  $\ell \in \mathbb{C}$

**Démonstration.** Soient  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une approximation de l'unité,  $f \in L^1(\mathbb{T})$  et  $t_0 \in \mathbb{T}$ :

1. Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Comme  $f$  est continue en  $t_0$ , alors il existe un réel strictement positif  $\delta \in ]0, \pi]$  tel que pour tout  $t \in \mathbb{T}$ , si  $|t - t_0| \leq \delta$ , on a:  $|f(t) - f(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2\|K_n\|_{L^1(\mathbb{T})}}$ .

Donc:

$$\begin{aligned}
 |K_n * f(t_0) - f(t_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} K_n(t) (f(t_0 - t) - f(t_0)) dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |K_n(t)| |(f(t_0 - t) - f(t_0))| dt \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} |K_n(t)| |(f(t_0 - t) - f(t_0))| dt \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| |f(t_0 - t)| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| |f(t_0)| dt \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{2\|K_n\|_{L^1(\mathbb{T})}} \int_{|t| \leq \delta} |K_n(t)| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| |f(t_0 - t)| dt \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} |f(t_0)| \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2\|K_n\|_{L^1(\mathbb{T})}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |K_n(t)| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| |f(t_0 - t)| dt \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} |f(t_0)| \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| |f(t_0 - t)| dt \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} |f(t_0)| \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt
 \end{aligned}$$

Si  $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ , on aura:

$$|K_n * f(t_0) - f(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2\pi} \left( \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + |f(t_0)| \right) \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt = 0$ , alors il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que: si  $n \geq N$ ,

$$\text{on a: } \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt \leq \frac{\pi}{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + |f(t_0)|} \varepsilon$$

Donc:

$$|K_n * f(t_0) - f(t_0)| \leq \varepsilon$$

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\delta < |t| < \pi} |K_n(t)| = 0$ , dans ce cas :  $\sup_{\delta < |t| < \pi} |K_n(t)| < +\infty$ , alors:

$$\begin{aligned} |K_n * f(t_0) - f(t_0)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2\pi} \left( \sup_{\delta < |t| < \pi} |K_n(t)| \right) \int_{\delta < |t| \leq \pi} |f(t_0 - t)| dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} |f(t_0)| \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \left( \sup_{\delta < |t| < \pi} |K_n(t)| \right) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t_0 - t)| dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} |f(t_0)| \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \sup_{\delta < |t| < \pi} |K_n(t)| + \frac{1}{2\pi} |f(t_0)| \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt = 0$  alors, il existe un rang  $N' \in \mathbb{N}$  tel que: si  $n \geq N'$ ,

$$\text{on a: } \int_{\delta < |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt \leq \frac{\pi}{2\|f(t_0)\|} \varepsilon$$

De même pour  $\sup_{\delta < |t| < \pi} |K_n(t)|$ , il existe un rang  $N_0 \in \mathbb{N}$ , tel que si  $n \geq N_0$ , alors:

$$\sup_{\delta < |t| < \pi} |K_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{4\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}}$$

Donc pour  $n \geq \max(N_0, N')$ , on aura:  $|K_n * f(t_0) - f(t_0)| \leq \varepsilon$

2. Supposons maintenant que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0+h)+f(t_0-h)}{2} = \ell$ , où  $\ell$  est un nombre complexe fini et  $K_n$  est paire.

Posons  $f_-(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(t_0 - h)$  et  $f_+(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(t_0 + h)$ . Nous avons:

$$\begin{aligned} |K_n * f(t_0) - \ell| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} K_n(t) f(t_0 - t) dt - \frac{f_+(t_0)+f_-(t_0)}{2} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) f(t_0 - t) dt - \frac{f_+(t_0)+f_-(t_0)}{2} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 K_n(t) f(t_0 - t) dt + \int_0^{\pi} K_n(t) f(t_0 - t) dt - \frac{f_+(t_0)+f_-(t_0)}{2} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi K_n(-u) f(t_0 + u) dt + \int_0^\pi K_n(t) f(t_0 - t) dt - \frac{f_+(t_0) + f_-(t_0)}{2} \right| \\
 &\quad (\text{en posant } u = -t) \\
 &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi K_n(t) (f(t_0 + t) + f(t_0 - t)) dt - \frac{f_+(t_0) + f_-(t_0)}{2} \right| \\
 &\quad (\text{car } K_n \text{ est paire}) \\
 &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi K_n(t) (f(t_0 + t) + f(t_0 - t) - f_+(t_0) - f_-(t_0)) dt \right| \\
 &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{0 \leq t \leq \delta} K_n(t) (f(t_0 + t) + f(t_0 - t) - f_+(t_0) - f_-(t_0)) dt \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < t \leq \pi} K_n(t) (f(t_0 + t) + f(t_0 - t) - f_+(t_0) - f_-(t_0)) dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{0 \leq t \leq \delta} |K_n(t)| (|f(t_0 + t) - f_+(t_0)| + |f(t_0 - t) - f_-(t_0)|) dt \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < t \leq \pi} |K_n(t)| (|f(t_0 + t)| + |f(t_0 - t)| + |f_+(t_0)| + |f_-(t_0)|) dt
 \end{aligned}$$

Le reste de la démonstration est analogue à celle du premier point.

■

**Corollaire 2.2.5** Soient  $f \in L^1(\mathbb{T})$ ,  $\ell \in \mathbb{C}$  et  $t_0 \in \mathbb{T}$ , alors:

1. Si  $f$  est continue en  $t_0$ , on a:  $\sigma_n(f)(t_0) \rightarrow f(t_0)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .
2. Si  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0+h) + f(t_0-h)}{2} = \ell$ , on a:  $\sigma_n(f)(t_0) \rightarrow \ell$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Preuve.** Soient  $f \in L^1(\mathbb{T})$  et  $t_0 \in \mathbb{T}$ :

Comme le noyau de Fejér est paire, il reste à vérifier que:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\delta < |t| < \pi} |F_n(t)| = 0$  où  $\delta \in ]0, \pi]$

On a:  $|F_n(t)| \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin^2(\frac{1}{2}\delta)}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in \mathbb{T}$

Donc:  $\sup_{\delta < |t| < \pi} |F_n(t)| \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin^2(\frac{1}{2}\delta)}$

En passant à la limite:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\delta < |t| < \pi} |F_n(t)| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin^2(\frac{1}{2}\delta)}$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin^2(\frac{1}{2}\delta)} = 0$ , alors:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\delta < |t| < \pi} |F_n(t)| = 0$

D'après le théorème précédent, on déduit que:

Si  $f$  est continue en  $t_0$ , alors  $\sigma_n(f)(t_0) \rightarrow f(t_0)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

et si  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0+h) + f(t_0-h)}{2} = \ell$ , alors:  $\sigma_n(f)(t_0) \rightarrow \ell$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . ■

**Proposition 2.2.4** Soient  $f \in L^1(\mathbb{T})$ ,  $\ell \in \mathbb{C}$  et  $t_0 \in \mathbb{T}$ . Si  $S_n(f)(t_0)$  converge vers  $f(t_0)$ , alors  $\sigma_n(f)(t_0)$  converge vers  $f(t_0)$  et si  $S_n(f)(t_0)$  converge vers  $\ell$ , alors  $\sigma_n(f)(t_0)$  converge vers  $\ell$ .

**Preuve.** Conséquence directe du Lemme de Cesàro ■

## 2.3 Divergence des séries de Fourier

Comme nous l'avons signalé dans la section précédente, la continuité d'une fonction n'est pas suffisante pour la convergence de sa série de Fourier. Après la construction du contre exemple concernant les fonctions continues par du Bois Raymond en 1876, Kolmogorov en 1922, construit à son tour un exemple de fonction intégrable dont la série de Fourier est divergente en tout point. Dans cette section, nous allons démontrer l'existence de fonctions dont les séries de Fourier divergent respectivement dans les espaces  $C(\mathbb{T})$  et  $L^1(\mathbb{T})$ .

**Proposition 2.3.1** L'opérateur:  $S_n : L^p(\mathbb{T}) \longrightarrow L^p(\mathbb{T})$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq p \leq +\infty$  est

$$f \longmapsto S_n(f), S_n(f) = D_n * f$$

linéaire et continu.

**Preuve.** Soit  $f \in L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$  et  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons:

$$\|S_n(f)\|_{L^p(\mathbb{T})} = \|D_n * f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

Donc  $S_n$  est linéaire et continu de norme  $\|S_n\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{T}))} \leq \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})}$  ■

**Proposition 2.3.2** [6] Les propriétés suivantes sont équivalentes pour:  $1 \leq p \leq +\infty$

1. Soit  $f \in L^p(\mathbb{T})$ , (ou bien  $f \in C(\mathbb{T})$  si  $p = +\infty$ ), on a:  $\|S_n(f) - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

2.  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{T}))} < +\infty$ .

**Preuve.** ► Supposons que  $\|S_n(f) - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Alors, en vertu de l'inégalité triangulaire, on a pour tout  $f \in L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$  :

$$\left| \|S_n(f)\|_{L^p(\mathbb{T})} - \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \right| \leq \|S_n(f) - f\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

Donc:

$$\|S_n(f)\|_{L^p(\mathbb{T})} \rightarrow \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Comme  $\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} < +\infty$ , alors:  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n(f)\|_{L^p(\mathbb{T})} < +\infty$

Du théorème de Banach-Steinhaus ([5]), on déduit que:  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{T}))} < +\infty$ .

► Supposons maintenant que:  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{T}))} < +\infty$

Soient  $F_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  le noyau de Fejér et  $\varepsilon$  un réel strictement positif.

D'après le théorème de Fejér, on a  $\|\sigma_n(f) - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Donc, il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$ , tel que: si  $n \geq N$ , alors:  $\|\sigma_n(f) - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \frac{\varepsilon}{\|S_n\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{T}))} + 1}$

Pour tout  $f \in L^p(\mathbb{T})$ , on a:

$$\begin{aligned} \|S_n(f) - f\|_{L^p(\mathbb{T})} &= \|S_n(f) - S_n(\sigma_n(f)) + S_n(\sigma_n(f)) - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \\ &\leq \|S_n(f) - S_n(\sigma_n(f))\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|S_n(\sigma_n(f)) - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \\ &\leq \|S_n(f) - S_n(F_n * f)\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|S_n(F_n * f) - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \\ &\leq \|S_n(f - F_n * f)\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|F_n * f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \text{ (car } F_n * f \text{ est un} \\ &\quad \text{polynôme trigonométrique)} \\ &\leq \|S_n\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{T}))} \|f - F_n * f\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|F_n * f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \\ &\leq \left( \|S_n\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{T}))} + 1 \right) \|F_n * f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \\ &\leq \varepsilon \blacksquare \end{aligned}$$

### Théorème 2.3.1 [6]

1. Il existe des fonctions  $f \in C(\mathbb{T})$  telles que  $S_n(f)$  ne converge pas uniformément vers  $f$ .
2. Il existe des fonctions  $g \in L^1(\mathbb{T})$  telles que  $S_n(g)$  ne converge pas dans  $L^1(\mathbb{T})$ .

**Preuve.**

1. Soit  $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ , on a:

$$\begin{aligned} \|S_n\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{T}))} &= \sup_{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}=1} \left( \|S_n(f)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \right) \\ &\geq \sup_{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}=1} (|D_n * f(0)|) \end{aligned}$$

En prenant

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } D_n(t) \geq 0 \\ -1 & \text{si } D_n(t) < 0 \end{cases}$$

On a bien:  $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 1$ .

Alors:

$$\begin{aligned} \|S_n\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{T}))} &\geq (|D_n * f(0)|) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{T}} D_n(-t) f(t) dt \right| \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} D_n(t) f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |D_n(t)| dt \\ &= \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

D'autre part, d'après la proposition 2.3.1, on a:  $\|S_n\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{T}))} \leq \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})}$

On déduit alors que:  $\|S_n\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{T}))} = \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})}$

D'après la proposition 2.2.1, on a:  $\|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} = \frac{4}{\pi^2} \ln(n) + O(1)$

Donc  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{T}))} = +\infty$

Ces estimations restent vraies si on suppose que  $f$  est une approximation continue de  $\text{sign}(D_n)$  dans  $L^1(\mathbb{T})$ .

On conclut donc, qu'il existe  $f \in C(\mathbb{T})$  dont la série de Fourier ne converge pas dans  $C(\mathbb{T})$ .

2. Considérons maintenant le noyau de Fejér:  $F_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , Comme  $\|F_m\|_{L^1(\mathbb{T})} = 1$ , alors:

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a:  $S_n(F_m) = D_n * F_m$  et donc, on aura:

$$\begin{aligned} \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})} &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left( \|S_n(F_m)\|_{L^1(\mathbb{T})} \right) \\ &\leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \|S_n\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{T}))} \|F_m\|_{L^1(\mathbb{T})} \\ &\leq \|S_n\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{T}))} \end{aligned}$$

Car  $D_n * F_m$  converge vers  $D_n$  quand  $m$  tend vers l'infini dans  $L^1(\mathbb{T})$ .

Alors:

$$\|S_n\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{T}))} \geq \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})}$$

D'autre part, la proposition 2.3.1 nous donne:  $\|S_n\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{T}))} \leq \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})}$ .

On déduit donc que:

$$\|S_n\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{T}))} = \|D_n\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Donc:  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{T}))} = +\infty$

Ce qui montre d'après la proposition 2.3.2 qu'il existe  $f \in L^1(\mathbb{T})$  dont la série de Fourier ne converge pas dans  $L^1(\mathbb{T})$ .

■

## 2.4 Convergence dans $L^p(\mathbb{T})$ , $1 < p < +\infty$

Dans cette section, nous allons étudier la convergence en norme des séries de Fourier dans les espaces  $L^p(\mathbb{T})$  où  $p \in ]1, +\infty[$ . Dans la première partie, nous nous intéresserons à l'espace  $L^2(\mathbb{T})$ , dont la structure Hilbertienne facilite énormément l'étude de la convergence des séries de Fourier. Dans la deuxième partie, nous abordons le cas où  $p \neq 2$ , où l'étude de la convergence des séries de Fourier est plus élaborée que dans le cas de l'espace  $L^2(\mathbb{T})$ .

### 2.4.1 Convergence dans $L^2(\mathbb{T})$

$L^2(\mathbb{T})$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{T})}$  défini par  $\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{g(t)} dt$  pour tout  $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ . La structure Hilbertienne de cette espace facilite beaucoup l'étude de convergence des séries de Fourier, grâce aux propriétés géométriques du produit scalaire.

**Notation 2.4.1** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on note par  $P_n(\mathbb{T})$  le sous espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  où  $|k| \leq n$ , et on écrit:

$$P_n(\mathbb{T}) = \text{Vect}(e_k, |k| \leq n)$$

**Proposition 2.4.1**  $\|S_n\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))} = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Preuve.** Soit  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $|k| \leq n$ :

$$\begin{aligned} \langle f - S_n(f), e_k \rangle_{L^2(\mathbb{T})} &= \langle f, e_k \rangle_{L^2(\mathbb{T})} - \langle S_n(f), e_k \rangle_{L^2(\mathbb{T})} \\ &= \widehat{f}(k) - \widehat{S_n(f)}(k) \\ &= \widehat{f}(k) - \widehat{f}(k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, le vecteur  $f - S_n(f)$  est orthogonal au sous espace vectoriel  $P_n(\mathbb{T})$  et comme  $S_n(f) \in P_n(\mathbb{T})$ , on déduit que les vecteurs  $f - S_n(f)$  et  $S_n(f)$  sont orthogonaux.

Comme:  $f = S_n(f) + (f - S_n(f))$

En appliquant le théorème de Pythagore, on obtient:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \|S_n(f)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \|f - S_n(f)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2$$

Donc:

$$\|S_n(f)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2, \text{ c'est à dire: } \|S_n(f)\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

Il en résulte que :  $\|S_n\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))} \leq 1$

Inversement, on a:  $S_n(e_0) = 1$

Comme  $\|e_0\|_{L^2(\mathbb{T})} = 1$ , on déduit que:  $\|S_n\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))} \geq 1$

Donc:  $\|S_n\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))} = 1$  ■

**Théorème 2.4.1** Pour tout  $f \in L^2(\mathbb{T})$ ,  $S_n(f)$  converge vers  $f$  dans  $L^2(\mathbb{T})$ .

**Démonstration.** D'après la proposition précédente, on a:  $\|S_n\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))} = 1$ .

La conclusion découle en appliquant la proposition 2.3.2. ■

**Proposition 2.4.2** [6] Soient  $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ , alors:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\mathbb{T})} &= \left\| \widehat{f} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \quad (\text{égalité de Plancherel}) \\ \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T})} &= \left\langle \widehat{f}, \widehat{g} \right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} \quad (\text{égalité de Parseval}) \end{aligned}$$

**Preuve.** Soient  $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ , alors:

Comme la famille de vecteurs  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est orthonormal, on a:

$$\|S_n(f)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{k=-n}^n \left( \widehat{f}(k) \right)^2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Comme  $S_n(f)$  converge vers  $f$  dans  $L^2(\mathbb{T})$  alors, en passant à la limite, on obtient:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \widehat{f}(k) \right)^2, \text{ c'est à dire: } \|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \left\| \widehat{f} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}.$$

En utilisant l'égalité de polarisation [3] et l'égalité de Plancherel, on obtient:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T})} &= \|f + g\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 - \|f - g\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + i \|f + ig\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 - i \|f - ig\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\ &= \|\widehat{f} + \widehat{g}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 - \|\widehat{f} - \widehat{g}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 + i \|\widehat{f} + i\widehat{g}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 - i \|\widehat{f} - i\widehat{g}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 \\ &= \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_{\ell^2(\mathbb{T})} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Remarque 2.4.1** *Comme conséquence directe de cette proposition, l'application  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  est un isomorphisme isométrique.*

## 2.4.2 Convergence dans $L^p(\mathbb{T})$

L'étude de la convergence dans les espaces  $L^p(\mathbb{T})$  où  $p \in ]1, +\infty[$  et  $p \neq 2$  est délicate et nécessite une construction beaucoup plus élaborée que celle de  $L^2(\mathbb{T})$ .

Avants de commencer notre étude, Donnons quelques définitions concernant les fonctions conjuguées et les projections de Riesz.

**Définition 2.4.1** [6] *Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$  une fonction trigonométrique. On appelle fonction conjuguée de  $f$  la fonction  $\widetilde{f}$  définie pour tout  $t \in \mathbb{T}$  par:*

$$\widetilde{f}(t) = -i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{sgn}(n) \widehat{f}(n) e^{int}$$

*On considère les deux opérateurs notés  $P_+$  et  $P_-$  (appelés projections de Riesz) définis par:*

$$P_+(f) = \sum_{n>0} \widehat{f}(n) e_n, \quad P_-(f) = \sum_{n<0} \widehat{f}(n) e_n$$

On remarque que:

$$f(t) = P_+(f)(t) + P_-(f)(t) + \widehat{f}(0) \quad \text{et} \quad \widetilde{f}(t) = -iP_+(f)(t) + iP_-(f)(t) \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

**Lemme 2.4.1** *Soient  $f \in L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 < p < +\infty$  et  $T_n(f)(t) = \sum_{k=0}^{2n} \widehat{f}(k) e^{ikt}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $t \in \mathbb{T}$ , alors:*

$$\|S_n\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{T}))} = \|T_n\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{T}))}$$

**Preuve.** Soit  $f \in L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 < p < +\infty$  alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in \mathbb{T}$ :

$$\begin{aligned} e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} \widehat{f}(k) e^{ikt} &= e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} \widehat{f}(k-n) e^{ikt} = \sum_{k=0}^{2n} \widehat{f}(k-n) e^{i(k-n)t} \\ &= \sum_{j=-n}^n \widehat{f}(j) e^{ijt} \quad (\text{en posant } j = k - n). \end{aligned}$$

Donc:

$$\|S_n(f)\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left\| e^{-n} \sum_{k=0}^{2n} \widehat{e_n f}(k) e_k \right\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left\| \sum_{k=0}^{2n} \widehat{e_n f}(k) e_k \right\|_{L^p(\mathbb{T})} = \|T_n(e_n f)\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

Alors:

$$\begin{aligned} \|S_n\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{T}))} &= \sup_{\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}=1} \left( \|S_n(f)\|_{L^p(\mathbb{T})} \right) = \sup_{\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}=1} \left( \|T_n(e_n f)\|_{L^p(\mathbb{T})} \right) \\ &= \sup_{\|e_n f\|_{L^p(\mathbb{T})}=1} \left( \|T_n(e_n f)\|_{L^p(\mathbb{T})} \right) = \|T_n\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{T}))} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Proposition 2.4.3** [6] *Soit  $1 < p < +\infty$ , alors:  $S_n(f) \rightarrow f$  quand  $n \rightarrow +\infty$  dans  $L^p(\mathbb{T})$  si et seulement si il existe une constante  $C_p > 0$  tel que:  $\|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$  pour tout polynôme trigonométrique.*

**Preuve.** ► Supposons que pour tout  $f \in L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 < p < +\infty$ ,  $S_n(f) \rightarrow f$  quand  $n \rightarrow +\infty$  dans  $L^p(\mathbb{T})$ .

Alors d'après la proposition 2.3.2, on a:  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{T}))} < +\infty$

D'après le lemme précédent, on aura aussi:  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{T}))} < +\infty$

Soit  $A(f) = P_+(f) + \widehat{f}(0)$

Comme l'opérateur  $A$  est borné dans  $L^p(\mathbb{T})$ , alors l'opérateur  $P_+$  l'est aussi.

D'autre part, on a:

$$P_+(f) = \frac{1}{2} \left( f + i\tilde{f} - \widehat{f}(0) \right)$$

Donc, l'opérateur  $f \mapsto \tilde{f}$  est continu dans  $L^p(\mathbb{T})$ .

► Inversement, supposons maintenant qu'il existe une constante  $C_p > 0$  tel que:

$$\|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \text{ pour tout polynôme trigonométrique.}$$

Alors, l'opérateur  $P_+$  est continu sur l'ensemble des polynôme trigonométrique  $P(\mathbb{T})$  et comme  $P(\mathbb{T})$  est dense dans  $L^p(\mathbb{T})$ ,  $P_+$  se prolonge en un opérateur continu sur  $L^p(\mathbb{T})$ .

Nous aurons aussi pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in \mathbb{T}$ :

$$\begin{aligned} T_n(f)(t) &= \sum_{k=0}^{2n} \widehat{f}(k) e^{ikt} \\ &= \sum_{k \geq 0} \widehat{f}(k) e^{ikt} - \sum_{k \geq 2n+1} \widehat{f}(k) e^{ikt} \\ &= \sum_{k \geq 0} \widehat{f}(k) e^{ikt} - e^{2int} \sum_{k \geq 2n+1} \widehat{f}(k) e^{i(k-2n)t} \\ &= \sum_{k \geq 0} \widehat{f}(k) e^{ikt} - e^{2int} \sum_{j \geq 1} \widehat{f}(j+2n) e^{ijt} \text{ (en posant } j = k - 2n) \end{aligned}$$

On obtient alors:

$$T_n(f) = P_+(f) - e_{2n} P_+(e_{-2n} f) + \widehat{f}(0)$$

Donc:

$\|T_n(f)\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \left(2\|P_+\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{T}))} + 1\right) \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout polynôme trigonométrique.

Par densité de  $P(\mathbb{T})$  dans  $L^p(\mathbb{T})$ , l'inégalité reste valable pour tout fonction dans  $L^p(\mathbb{T})$ .

Il en résulte que:  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(f)\|_{L^p(\mathbb{T})} < +\infty$

Donc, du lemme précédent, on déduit que:  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\|_{L^p(\mathbb{T})} < +\infty$

Alors, de la proposition 2.3.2, on conclut que:  $S_n(f) \rightarrow f$  quand  $n \rightarrow +\infty$  dans  $L^p(\mathbb{T})$ .

■

**Théorème 2.4.2 (Riesz-Thorin):** Soient  $(E, \mu)$  et  $(F, \nu)$  deux espaces mesurés et  $p_1, p_2, q_1, q_2$  des réels tel que  $1 \leq p_1, p_2, q_1, q_2 \leq +\infty$  et  $p_1 < p_2$ ,  $q_1 < q_2$ .

Si pour  $j = 1, 2$  l'opérateur  $T$  est continu de  $L^{p_j}(E, \mu)$  dans  $L^{q_j}(F, \nu)$  de norme  $M_j$ , alors  $T$  est continu de  $L^p(E, \mu)$  dans  $L^q(F, \nu)$  de norme  $M$ , où  $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}$  et  $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2}$  et  $M \leq M_1^{1-\theta} M_2^\theta$ , pour tout  $\theta \in ]0, 1[$ .

**Remarque 2.4.2** Observons que l'on a  $p_1 \leq p \leq p_2$  et  $q_1 \leq q \leq q_2$ . Les espaces  $L^p(E, \mu)$  et  $L^q(F, \nu)$  sont dits intermédiaires à  $L^{p_1}(E, \mu)$  et  $L^{p_2}(E, \mu)$  (respectivement  $L^{q_1}(F, \nu)$  et  $L^{q_2}(F, \nu)$ ) lorsque les mesures de ces espaces sont finies, cela se traduit par les inclusions  $L^{p_2}(E, \mu) \subset L^p(E, \mu) \subset L^{p_1}(E, \mu)$  et  $L^{q_2}(F, \nu) \subset L^q(F, \nu) \subset L^{q_1}(F, \nu)$ .

**Démonstration.** voir: [7] ou [8] ■

**Proposition 2.4.4** [6] Soit  $1 < p < +\infty$ , alors, il existe une constante  $C_p > 0$  telle que pour toute fonction  $f \in L^p(\mathbb{T})$ , on a:  $\|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$ .

**Preuve.** Soit  $f$  un polynôme trigonométrique, c'est à dire:  $f(t) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikt}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;  $t \in \mathbb{T}$ .

Comme  $\|\operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f)\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq 2 \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$  et  $\|\hat{f}(0)\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$ , on peut supposer en premier lieu que  $f$  est à valeurs réelles et  $\hat{f}(0) = 0$ .

Dans ce cas, on a  $\hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , donc:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= -i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(n) \hat{f}(n) e^{int} \\ &= -i \sum_{n > 0} \hat{f}(n) e^{int} + i \sum_{n < 0} \hat{f}(n) e^{int} \\ &= -i \sum_{n > 0} \hat{f}(n) e^{int} + i \sum_{n > 0} \hat{f}(-n) e^{-int} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\sum_{n>0} \left( i\widehat{f}(n) e^{int} + \overline{i\widehat{f}(n) e^{int}} \right) \\
 &= -2 \operatorname{Re} \left( i \sum_{n>0} \widehat{f}(n) e^{int} \right)
 \end{aligned}$$

D'où  $\widetilde{f}$  est à valeurs réelles.

On a pour tout  $t \in \mathbb{T}$ :

$$\begin{aligned}
 f(t) + i\widetilde{f}(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ikt} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(k) \widehat{f}(k) e^{ikt} \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ikt} + \sum_{k>0} \widehat{f}(k) e^{ikt} - \sum_{k<0} \widehat{f}(k) e^{ikt} \\
 &= 2 \sum_{k>0} \widehat{f}(k) e^{ikt}
 \end{aligned}$$

Soit  $m \in \mathbb{N}$ , comme  $f + i\widetilde{f} \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$  et ne contient que les fréquences strictement positives ( $k > 0$ ), alors  $(f + i\widetilde{f})^{2m} \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$  avec des fréquences également positives

Donc, pour tout  $t \in \mathbb{T}$ , on a:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left( f(t) + i\widetilde{f}(t) \right)^{2m} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left( \sum_{k>0} \widehat{(f + i\widetilde{f})}^{2m}(k) e^{ikt} \right) dt = \widehat{(f + i\widetilde{f})}^{2m}(0) \quad (0)$$

Comme  $f + i\widetilde{f}$  ne contient que les fréquences strictement positives, alors:

$$\widehat{(f + i\widetilde{f})}^{2m}(0) = \widehat{\left( \widehat{(f + i\widetilde{f})}(0) \right)^{2m}} = 0$$

Donc:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left( f(t) + i\widetilde{f}(t) \right)^{2m} dt = 0$$

En appliquant la formule du binôme de Newton, on obtient:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^k (i)^{2m-k} (f(t))^k (\widetilde{f}(t))^{2m-k} dt = 0$$

La partie réelle de cette expression est aussi nulle:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sum_{j=0}^m C_{2m}^{2j} (-1)^{m-j} (f(t))^{2j} (\widetilde{f}(t))^{2m-2j} dt = 0$$

En séparant le terme correspondant à  $j = 0$ , on trouve:

$$(-1)^m \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (\widetilde{f}(t))^{2m} dt = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m C_{2m}^{2j} (-1)^{m-j} \int_{\mathbb{T}} (f(t))^{2j} (\widetilde{f}(t))^{2m-2j} dt$$

Donc:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (\widetilde{f}(t))^{2m} dt \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m C_{2m}^{2j} \int_{\mathbb{T}} (f(t))^{2j} (\widetilde{f}(t))^{2m-2j} dt$$

En appliquant l'inégalité de Hölder au terme de droite de l'inégalité précédente avec les

exposants conjugués  $\frac{2m}{2m-2j}$  et  $\frac{2m}{2j}$ , on trouve:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m C_{2m}^{2j} \int_{\mathbb{T}} (f(t))^{2j} (\widetilde{f}(t))^{2m-2j} dt &\leq \sum_{j=1}^m C_{2m}^{2j} \|f^{2j}\|_{L^{\frac{2m}{2j}}(\mathbb{T})} \|\widetilde{f}^{2m-2j}\|_{L^{\frac{2m}{2m-2j}}(\mathbb{T})} \\
 &= \sum_{j=1}^m C_{2m}^{2j} \|f\|_{L^{2m}(\mathbb{T})}^{2j} \|\widetilde{f}\|_{L^{2m}(\mathbb{T})}^{2m-2j}
 \end{aligned}$$

D'où:

$$\|\widehat{f}\|_{L^{2m}(\mathbb{T})}^{2m} \leq \sum_{j=1}^m C_{2m}^{2j} \|f\|_{L^{2m}(\mathbb{T})}^{2j} \|\widehat{f}\|_{L^{2m}(\mathbb{T})}^{2m-2j}$$

En divisant par  $\|f\|_{L^{2m}(\mathbb{T})}^{2m}$  et en posant:  $Y = \frac{\|\widehat{f}\|_{L^{2m}(\mathbb{T})}}{\|f\|_{L^{2m}(\mathbb{T})}}$ , on obtient l'inégalité:

$$Y^{2m} \leq \sum_{k=1}^m C_{2m}^{2j} Y^{2m-2j}$$

On pose:  $P(Y) = Y^{2m} - \sum_{k=1}^m C_{2m}^{2j} Y^{2m-2j}$ , alors:  $P(Y) \leq 0$

Du fait de la parité de  $P$ , on a aussi:  $\lim_{|Y| \rightarrow +\infty} P(Y) = +\infty$

On en déduit l'existence d'une constante:  $M = C_{2m}$  (dépendant de  $m$ ) pour laquelle

$$|Y| \leq C_{2m}, \text{ c'est à dire: } \|\widehat{f}\|_{L^{2m}(\mathbb{T})} \leq C_{2m} \|f\|_{L^{2m}(\mathbb{T})}$$

Si  $\widehat{f}(0) \neq 0$ , on prend la fonction  $g$  définie pour tout  $t \in \mathbb{T}$  par:  $g(t) = f(t) - \widehat{f}(0)$

Donc:  $\widehat{g}(0) = 0$

En appliquant l'inégalité précédente pour  $g$  et en prenant en compte le fait que les fonctions constantes ne possèdent que le coefficient de Fourier correspondant à  $n = 0$ , on obtient:

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_{L^{2m}(\mathbb{T})} &\leq \left\| \widetilde{f - \widehat{f}(0)} \right\|_{L^{2m}(\mathbb{T})} + \left\| \widetilde{\widehat{f}(0)} \right\|_{L^{2m}(\mathbb{T})} \\ &= \|\widetilde{g}\|_{L^{2m}(\mathbb{T})} \\ &\leq C_{2m} \left\| f - \widehat{f}(0) \right\|_{L^{2m}(\mathbb{T})} \\ &\leq C_{2m} \left( \|f\|_{L^{2m}(\mathbb{T})} + \left\| \widehat{f}(0) \right\|_{L^{2m}(\mathbb{T})} \right) \\ &\leq 2C_{2m} \|f\|_{L^{2m}(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

Si  $f$  est à valeur dans  $\mathbb{C}$ , alors:  $f = \text{Re}(f) + i \text{Im}(f)$  où  $\text{Re}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont des polynômes trigonométriques à valeurs réelles.

On obtient alors:

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_{L^{2m}(\mathbb{T})} &= \left\| \widetilde{\text{Re}(f)} + i \widetilde{\text{Im}(f)} \right\|_{L^{2m}(\mathbb{T})} \\ &\leq 4C_{2m} \|f\|_{L^{2m}(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

Cette inégalité étant vrai pour tout polynômes trigonométriques  $f$ , elle reste encore vrai par densité dans  $L^{2m}(\mathbb{T})$ .

En appliquant le théorème de Riesz-Thorin à l'opérateur  $f \mapsto \widetilde{f}$  borné dans  $L^{2m}(\mathbb{T})$  et  $L^{2m+2}(\mathbb{T})$  où  $m \in \mathbb{N}^*$ , on déduit qu'il est borné dans  $L^p(\mathbb{T})$  pour tout  $p \in [2m, 2m+2]$ .

Donc, l'opérateur  $f \mapsto \widetilde{f}$  est borné dans  $L^p(\mathbb{T})$  pour tout  $p \in [2, +\infty[$ . et pour tout  $f \in P(\mathbb{T})$ .

Par conséquent, on a :

$$\left\| \tilde{f} \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \text{ pour tout } p \in [2, +\infty[ \text{ et } f \in P(\mathbb{T}).$$

Par densité de  $P(\mathbb{T})$  dans  $L^p(\mathbb{T})$ , se résultat reste vrai pour toute fonction  $f$  dans  $L^p(\mathbb{T})$ .

Il reste a démontrer ce résultat pour  $1 < p < 2$ . On utilisera pour cela, la formulation suivante de la norme dans  $L^p(\mathbb{T})$ .

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} = \sup_{g \in L^q(\mathbb{T})} \left\{ \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{g(t)} dt \right| : \|g\|_{L^q(\mathbb{T})} = 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right\}$$

Soit  $p \in ]1, 2[$  et  $q$  son conjugué, alors:  $q > 2$ .

En appliquant la proposition 2.4.2, on aura:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \tilde{f}(t) \overline{g(t)} dt &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\tilde{f}}(k) \overline{\widehat{g}(k)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) (-i \operatorname{sgn}(k)) \overline{\widehat{g}(k)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) \overline{(i \operatorname{sgn}(k)) \widehat{g}(k)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{-g}(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{(-\tilde{g}(t))} dt \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{f} \right\|_{L^p(\mathbb{T})} &= \sup_{g \in L^q(\mathbb{T})} \left\{ \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \tilde{f}(t) \overline{g(t)} dt \right| : \|g\|_{L^q(\mathbb{T})} = 1 \right\} \\ &= \sup_{g \in L^q(\mathbb{T})} \left\{ \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{(-\tilde{g}(t))} dt \right| : \|g\|_{L^q(\mathbb{T})} = 1 \right\} \\ &= \sup_{g \in L^q(\mathbb{T})} \left\{ \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{\tilde{g}(t)} dt \right| : \|g\|_{L^q(\mathbb{T})} = 1 \right\} \\ &\leq \sup_{g \in L^q(\mathbb{T})} \left\{ \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \|\tilde{g}\|_{L^q(\mathbb{T})} : \|g\|_{L^q(\mathbb{T})} = 1 \right\} \text{ (en appliquant Hölder).} \\ &\leq \sup_{g \in L^q(\mathbb{T})} \left\{ \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} C_p \|g\|_{L^q(\mathbb{T})} : \|g\|_{L^q(\mathbb{T})} = 1 \right\} \\ &\leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

Ainsi, nous venons de démontrer la continuité de l'opérateur  $f \mapsto \tilde{f}$  dans  $L^p(\mathbb{T})$  pour tout  $p \in ]1, +\infty [$  et  $f \in P(\mathbb{T})$ . Par densité de  $P(\mathbb{T})$  dans  $L^p(\mathbb{T})$ , on déduit que l'opérateur  $f \mapsto \tilde{f}$  est continu dans  $L^p(\mathbb{T})$  pour tout  $p \in ]1, +\infty [$ . ■

**Théorème 2.4.3** Pour tout  $f \in L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 < p < +\infty$ ,  $S_n(f)$  converge vers  $f$  dans  $L^p(\mathbb{T})$ .

**Démonstration.** Comme  $\left\| \tilde{f} \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$ , d'après la proposition précédente, il suffit donc d'appliquer la proposition 2.4.3. ■

## 2.5 Interpolation

Dans le domaine de l'analyse, nous disposons d'un outil très important d'interpolation des opérateurs linéaires. Autrement dit, si nous savons comment un opérateur se comporte

dans certains espaces, on peut déduire le comportement de cet opérateur dans des espaces intermédiaires.

Le premier théorème d'interpolation est le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin, énoncé dans la deuxième partie de ce chapitre.

Le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin est une conséquence directe d'un résultat classique d'analyse complexe appelé: lemme des trois droites de Hadamard dont voici l'énoncé:

**Lemme 2.5.1 (Lemme des trois droites de Hadamard):** *Pour toute fonction  $f$  analytique dans la bande ouverte  $U = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$  et continue et bornée dans la bande fermée  $\bar{U} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$  tel que  $\sup_{t \in \mathbb{R}} (|f(\theta + it)|) = M_\theta$  pour tout  $\theta \in [0, 1]$ . Alors on a:  $M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$ . (Pour la démonstration voir [7] ou [8]).*

### 2.5.1 Théorème de Hausdorff-Young

Nous allons présenter dans cette partie un premier résultat d'interpolation utilisant le théorème de Riesz-Thorin.

**Théorème 2.5.1 (Hausdorff-Young):** [7], [8] *Soient  $p$  un réel tel que:  $1 \leq p \leq 2$  et  $q$  son conjugué. Soit  $f \in L^p(\mathbb{T})$ . L'application  $\mathcal{F}: L^p(\mathbb{T}) \longrightarrow \ell^q(\mathbb{Z})$  est linéaire et continue.*

$$f \longmapsto \left( \widehat{f}(n) \right)_{n \in \mathbb{Z}}$$

**Démonstration.** D'après la proposition 1.4.1 dans le premier chapitre, on sait bien que  $\mathcal{F}$  est continue de  $L^1(\mathbb{T})$  dans  $c_0(\mathbb{Z})$  et comme  $c_0(\mathbb{Z}) \subset \ell^\infty(\mathbb{Z})$ , alors  $\mathcal{F}$  est continue de  $L^1(\mathbb{T})$  dans  $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ .

D'autre part, d'après l'inégalité de Bessel, on a pour tout  $f \in L^2(\mathbb{T})$ :  $\left\| \widehat{f} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$

Il en résulte que  $\mathcal{F}$  est continue de  $L^2(\mathbb{T})$  dans  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .

Donc, d'après le théorème de Riesz-Thorin, on déduit que  $\mathcal{F}$  est continue de  $L^p(\mathbb{T})$  dans  $\ell^q(\mathbb{Z})$ , où  $p \in [1, 2]$  et  $q$  son conjugué.

Donc:  $\left\| \widehat{f} \right\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$  pour tout  $f \in L^p(\mathbb{T})$  ■

**Remarque 2.5.1** *On a établi le théorème de Hausdorff-Young dans le cadre des séries de Fourier. Dans sa forme générale, ce théorème s'applique aux transformés de Fourier [7].*

**Remarque 2.5.2** *le théorème de Hausdorff-Young n'est valable que pour  $p \in [1, 2]$ .*

### 2.5.2 Inégalité de Young

Dans le premier chapitre, on a démontré l'inégalité de Young en utilisant les propriétés des espaces  $L^p(\mathbb{T})$ . Dans cette partie, on va établir cette inégalité en utilisant le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin.

Soient  $q$  un réel tel que:  $1 \leq q \leq +\infty$ ,  $g \in L^q(\mathbb{T})$  et  $T$  l'opérateur de convolution, alors:  $T(f) = f * g$  pour tout  $f \in L^1(\mathbb{T})$ .

D'après l'inégalité de Hölder, on a:  $\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \|g\|_{L^q(\mathbb{T})} \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{T})}$  où  $q'$  est le conjugué de  $q$ .

Donc  $T$  est continu de  $L^{q'}(\mathbb{T})$  dans  $L^\infty(\mathbb{T})$ .

D'autre part, d'après l'inégalité de Minkowski, on a:  $\|f * g\|_{L^q(\mathbb{T})} \leq \|g\|_{L^q(\mathbb{T})} \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$ .

Donc  $T$  est continue de  $L^1(\mathbb{T})$  dans  $L^q(\mathbb{T})$ .

Par conséquent, d'après le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin, on a:

$T$  est continu de  $L^p(\mathbb{T})$  dans  $L^r(\mathbb{T})$ , où:  $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{q}$  et  $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{q'} + \theta$ , donc  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$

Donc:  $\|f * g\|_{L^r(\mathbb{T})} \leq \|g\|_{L^q(\mathbb{T})} \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$ .

## 2.6 Convergence simple et convergence presque partout

Il existe de nombreux critères de convergence ponctuelle. Ils sont obtenus moyennant des estimations judicieuses des noyaux localement. Nous citerons les plus connus: le test de Dini et le théorème de Dirichlet.

Les questions concernant la convergence presque partout des séries de Fourier sont autrement plus délicates. Nous décrirons sommairement l'une des approches utilisées dans l'étude de ces questions.

### 2.6.1 Convergence simple

**Théorème 2.6.1 (Test de Dini):** [8] Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$  et  $t \in \mathbb{T}$ :

Si  $\int_{\mathbb{T}} \left| \frac{f(t+h)+f(t-h)-2f(t)}{h} \right| dh < +\infty$ , alors  $S_n(f)(t) \rightarrow f(t)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Démonstration.** Soient  $f \in L^1(\mathbb{T})$  et  $t \in \mathbb{T}$ , tel que:  $\int_{\mathbb{T}} \frac{f(t+h)+f(t-h)-2f(t)}{h} dt < +\infty$ , alors:

$$\begin{aligned}
 S_n(f)(t) - f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (f(t-h) - f(t)) D_n(h) dh \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t-h) - f(t)) D_n(h) dh \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(t-h) + f(t+h) - 2f(t)) D_n(h) dh \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(t-h) + f(t+h) - 2f(t)) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})h)}{\sin(\frac{1}{2}h)} dh \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{(f(t-h)+f(t+h)-2f(t))}{h} \frac{h}{\sin(\frac{1}{2}h)} \cos\left(\frac{1}{2}h\right) \right) \sin(nh) dh \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(t-h) + f(t+h) - 2f(t)) \cos(nh) dh
 \end{aligned}$$

Comme  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , alors, par le Lemme de Riemann-Lebesgue, on a:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(t-h) + f(t+h) - 2f(t)) \cos(nh) dh \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

La fonction  $h \mapsto \frac{h}{\sin(\frac{1}{2}h)}$  est définie et continue sur l'intervalle  $[0, \pi]$  donc, elle est bornée sur cette intervalle et comme par hypothèse, la fonction  $h \mapsto \frac{(f(t-h)+f(t+h)-2f(t))}{h}$  est intégrable sur cette intervalle alors, la fonction  $h \mapsto \frac{(f(t-h)+f(t+h)-2f(t))}{h} \frac{h}{\sin(\frac{1}{2}h)}$  est intégrable sur l'intervalle  $[0, \pi]$ .

Donc, en appliquant à nouveaux le lemme de Reimann-Lebesgue, on aura:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{(f(t-h)+f(t+h)-2f(t))}{h} \frac{h}{\sin(\frac{1}{2}h)} \cos\left(\frac{1}{2}h\right) \right) \sin(nh) dh \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

Il en résulte que  $S_n(f)(t) \rightarrow f(t)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . ■

**Corollaire 2.6.1 (Convergence des fonctions hölderiennes):** Soit  $f \in C^\alpha(\mathbb{T})$ ,  $\alpha \in ]0, 1]$ , alors  $S_n(f)(t) \rightarrow f(t)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . pour tout  $t \in \mathbb{T}$ .

**Preuve.** Soit  $f \in C^\alpha(\mathbb{T})$ ,  $\alpha \in ]0, 1]$ , alors, il existe  $A > 0$  tel que pour tout  $x, y \in \mathbb{T}$ , on a:  $|f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^\alpha$

Donc:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{f(t+h)+f(t-h)-2f(t)}{h} \right| dh &= \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{f(t+h)-f(t)+f(t-h)-f(t)}{h} \right| dh \\
 &\leq \int_{\mathbb{T}} \left( \left| \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \right| + \left| \frac{f(t-h)-f(t)}{h} \right| \right) dh \\
 &\leq \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{2A}{|h|^{1-\alpha}} \right) dh
 \end{aligned}$$

En appliquant la règle de Riemann, on déduit que l'intégrale généralisée  $\int_{\mathbb{T}} \left( \frac{2A}{|h|^{1-\alpha}} \right) dh$  est finie car  $1 - \alpha < 1$ .

On conclut donc, en utilisant le test de Dini. ■

**Proposition 2.6.1 (Principe de localisation):** [8] Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$  et  $t \in \mathbb{T}$ , si  $f(x) = g(x)$  pour tout  $x \in ]t - \delta, t + \delta[$ ,  $\delta > 0$ , alors  $S_n(f)$  et  $S_n(g)$  sont de même nature et si elles convergent alors  $S_n(f)(t) - S_n(g)(t) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Preuve.** Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$  et  $t \in \mathbb{T}$ .

Si  $f(x) = g(x)$  pour tout  $x \in ]t - \delta, t + \delta[$ , alors  $f(x) - g(x) = 0$  au voisinage de  $t$ .

Donc, en posant  $h(x) = f(x) - g(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{T}$ , on aura:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{h(t+x)+h(t-x)-2h(t)}{x} \right| dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{h(t+x)+h(t-x)}{x} \right| dx \\ &= \int_{-\pi}^{-\delta} \left| \frac{h(t+x)+h(t-x)}{x} \right| dx + \int_{\delta}^{\pi} \left| \frac{h(t+x)+h(t-x)}{x} \right| dx \end{aligned}$$

Comme  $h \in L^1(\mathbb{T})$ , on déduit que:  $\int_{\mathbb{T}} \left| \frac{h(t+x)+h(t-x)-2h(t)}{x} \right| dx < +\infty$

On conclut directement en utilisant le test de Dini. ■

**Notation 2.6.1** Soient  $f \in L^1(\mathbb{T})$  et  $t, h \in \mathbb{T}$ , tel que  $h > 0$ , alors, on note les limites à gauche et à droite de  $t$  par:

$$f_-(t) = \lim_{h \rightarrow 0} f(t_0 - h) \quad \text{et} \quad f_+(t) = \lim_{h \rightarrow 0} f(t + h),$$

Si de plus  $f$  est dérivable à droite et à gauche de  $t$ , on note:

$$f'_-(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0-h) - f_-(t)}{h} \quad \text{et} \quad f'_+(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0+h) - f_+(t)}{h}$$

**Théorème 2.6.2 (Dirichlet):** [8] Soient  $f \in L^1(\mathbb{T})$  et  $t \in \mathbb{T}$ , alors:

Si les limites  $f_-(t)$ ,  $f_+(t)$ ,  $f'_-(t)$  et  $f'_+(t)$  existent, alors:  $S_n(f)(t) \rightarrow \frac{f_+(t) + f_-(t)}{2}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Démonstration.** Soient  $f \in L^1(\mathbb{T})$  et  $t \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h)+f(t-h)-(f_-(t)+f_+(t))}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h)-f_+(t)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t-h)-f_-(t)}{h} \\ &= f'_+(t) + f'_-(t) \end{aligned}$$

Alors, la fonction  $h \mapsto \frac{f(t-h)+f(t+h)-(f_-(t)+f_+(t))}{h}$  admet une limite au voisinage de zéro donc, elle est bornée près de zéro. Il en résulte que cette fonction est intégrable sur  $\mathbb{T}$  et d'après le test de Dini, on déduit que  $S_n(f)(t)$  converge vers  $\frac{f_+(t) + f_-(t)}{2}$ . ■

## 2.6.2 Convergence presque partout des séries de Fourier

Ces questions sont à l'origine de l'invention de la théorie des ensembles de Cantor et de la théorie de la mesure de Lebesgue.

Longtemps, Lusin a conjecturé que toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{T})$  a une série de Fourier convergente presque partout. En 1960, Calderón montrera que si cela était vrai, alors on a aussi:  $mes \left\{ x : \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(x)| > y \right\} \leq C \frac{\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}}{y^2}$ .

Cette dernière affirmation a installé le doute sur la conjecture de Lusin. C'est donc avec une grande surprise qu'a été accueilli le théorème de Carleson confirmant la conjecture de Lusin. Ce résultat a été d'ailleurs immédiatement étendu par Hunt aux espaces  $L^p(\mathbb{T})$  avec  $1 < p < +\infty$ .

En réalité, le contre exemple de Kolmogorov (d'une fonction ayant une série de Fourier divergente presque partout) est une fonction  $f \in L(\log \log L)$ . Hunt a par ailleurs montré que toute fonction  $f \in L(\log L)^2$  a une série de Fourier convergente presque partout, résultat élargi ensuite à  $f \in L(\log L \cdot \log \log L)$  et  $f \in L(\log L(\log \log \log L))$  par Sjolín et Antonov (1996).

**Définition 2.6.1** [8] Soit  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une famille d'opérateurs:  $T_n : L^p(\mathbb{T}) \longrightarrow M(\mathbb{T})$  ( $M(\mathbb{T})$  : fonctions mesurables sur  $\mathbb{T}$ ). On pose:  $T^*(f)(t) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |T_n(f)(t)|$ ,  $t \in \mathbb{T}$

$T^*$  sera dit de type  $(p, q)$  – fort lorsque  $T^* : L^p(\mathbb{T}) \longrightarrow L^q(\mathbb{T})$  est borné, c'est à dire qu'il existe  $C > 0$  tel que:  $\|T^*(f)\|_{L^q(\mathbb{T})} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$ ,  $f \in L^p(\mathbb{T})$ .

$T^*$  sera dit de type  $(p, q)$  – faible lorsqu'il existe  $C > 0$  tel que:

$$\mu(\{y \in \mathbb{T}, |T^*(f)(y)| > \lambda\})^{\frac{1}{q}} \leq C \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}}{\lambda}, \forall \lambda > 0, f \in L^p(\mathbb{T})$$

On montre les propriétés essentielles suivantes:

1. Si  $T^*$  est de type  $(p, q)$  – fort, alors il est aussi de type  $(p, q)$  – faible.
2. Si  $T^*$  est de type  $(p, q)$  – faible, alors pour tout  $r$ ,  $0 < r < q$ , on a:  $T^*(f) \in L^r(\mathbb{T})$ .

(Pour la démonstration de ces deux propriétés, voir [8]).

**Définition 2.6.2 (Fonctions maximales):** La fonction  $T^*$  est dite: opérateur maximal de la famille  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ou simplement: fonction maximale

Les fonctions maximales sont liées à la convergence presque partout par le théorème suivant:

**Théorème 2.6.3** Si  $\{(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, T_n : L^p(\mathbb{T}) \longrightarrow M(\mathbb{T})\}$  est une famille d'opérateurs linéaires tel que l'opérateur maximal  $T^*$  est de type  $(p, q) -$  faible. Alors:

L'ensemble  $C = \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}), \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(f)(t) = f(t) \text{ p.p} \right\}$  est fermé dans  $L^p(\mathbb{T})$ .

**Démonstration.** voir: [8] ■

**Exemple 2.6.1 (Opérateurs maximaux):**

$$1. D^*(f)(t) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |(D_n * f)(t)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(t)| \text{ (Dirichlet).}$$

$$2. F^*(f)(t) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |(F_n * f)(t)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\sigma_n(f)(t)| \text{ (Fejér).}$$

$$3. P^*(f)(t) = \sup_{0 < r < 1} |(P_r * f)(t)|.$$

On sait par exemple que  $F^*$  est de type  $(p, p) - fort \forall p \geq 1$ , donc aussi de type  $(p, p) -$  faible  $\forall p \geq 1$ , d'après le théorème précédent, l'ensemble  $C = \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}), \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(t) = f(t) \text{ p.p} \right\}$  est fermé dans  $L^p(\mathbb{T})$  or, manifestement l'ensemble  $C$  contient tout les polynômes trigonométriques et comme  $C$  est fermé et  $P(\mathbb{T})$  est dense dans  $L^p(\mathbb{T})$ , on a nécessairement  $C = L^p(\mathbb{T})$ . Ce qui signifie que l'on a:

$$\forall p \geq 1, \forall f \in L^p(\mathbb{T}) : \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(t) = f(t) \text{ presque partout.}$$

Pour l'opérateur  $D^*$ , il sera de type  $(p, p) - fort$  si on a:  $\left\| \sup_{n \in \mathbb{N}} (D_n * f) \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$ .

On sait déjà que l'on a pour  $p \geq 1$ ,  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|D_n * f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$ , mais cette inégalité est loin d'impliquer que  $D^*$  est de type  $(p, p) - fort$  et c'est justement ce passage qui renferme les subtilités et les estimations judicieuses utilisées pour montrer le théorème de Carleson.

## 2.7 Séries orthogonales

La théorie des séries de Fourier (ou trigonométriques) s'étend de manière naturelle à un cadre plus large, celui des séries orthogonales. Nous développons ici certains aspects importants de cette théorie.

**Définition 2.7.1** Soient  $[a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , tel que  $a < b$  et  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $L^1[a, b]$ . On dit que le système  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est orthonormal si et seulement si pour tout  $m, n \in \mathbb{N}$ :

$$\int_a^b \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

**Définition 2.7.2** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite à valeur réelles. On appelle série orthogonale la série définie par la suite des sommes partielles:  $S_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t)$ ,  $t \in [a, b]$

### 2.7.1 Exemples de systèmes orthogonaux

Nous allons dans cette partie définir quelques systèmes orthogonaux classiques.

**Définition 2.7.3 (Système de Haar):**[1] Le système de Haar est défini sur  $[0, 1]$  par:

$$\chi_0^0(t) = 1 \text{ pour tout } t \in [0, 1]$$

$$\chi_0^1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[ \\ 0 & \text{si } t = \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } t \in ]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Et de manière générale:

$$\chi_n^k(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{si } t \in ]\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}[ = I_n^{k_1} \\ -\sqrt{2^n} & \text{si } t \in ]\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}[ = J_n^{k_2} \\ 0 & \text{pour tout } t \notin I_n^{k_1} \cup J_n^{k_2} \end{cases}$$

Où  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k = 1, 2, \dots, 2^n$

**Proposition 2.7.1** Le système de Haar est orthonormal.

**Preuve.** Soit  $n, m \in \mathbb{N}$ , alors:

$$\int_0^1 (\chi_n^k(t))^2 dt = 1$$

Pour  $n = 0$ , on a:  $\int_0^1 \chi_0^0(t) \chi_0^1(t) dt = 0$ .

Et les fonctions  $\chi_0^0(t)$  et  $\chi_0^1(t)$  sont orthogonales aux autres fonctions  $\chi_m^k$  où  $m \neq 0$

Pour  $n \neq 0$  et  $m \neq 0$  on a clairement:

$$\int_0^1 \chi_n^i(t) \chi_n^j(t) dt = 0 \text{ si } i \neq j$$

Supposons maintenant  $n > m$ , alors dans ce cas la fonction  $\chi_n^j$  prend ces valeurs dans un intervalle où la fonction  $\chi_m^i$  est constante et égale à  $\varepsilon \sqrt{2^m}$  où  $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$ . Donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \chi_n^i(t) \chi_m^j(t) dt &= \varepsilon \sqrt{2^m} \int_0^1 \chi_n^i(t) dt \\ &= 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Définition 2.7.4 (Système de Rademacher):**[1] *Le système de Rademacher est défini pour tout  $t \in [0.1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  par:*

$$\begin{aligned} r_0(t) &= 1 \\ r_n(t) &= \text{sign}(\sin(2^n \pi t)) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left[ \frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n} \right[ \\ -1 & \text{si } t \in \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left[ \frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n} \right[ \\ 0 & \text{pour tout } t = \frac{k}{2^n} \end{cases} \\ &\text{Où } k = 0, 1, \dots, 2^{n+1} \end{aligned}$$

**Remarque 2.7.1** *On a:  $r_0(t) = \chi_0^0(t)$  pour tout  $t \in [0.1]$  et  $r_1(t) = \chi_0^1(t)$  pour tout  $t \in ]0.1[$  et  $r_1(0) = r_1(1) = 0$  et de manière générale:*

$$r_{n+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=1}^{2^n} \chi_n^k(t) \text{ pour tout } t \in ]0.1[ \text{ et } r_{n+1}(0) = r_{n+1}(1) = 0 \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

**Proposition 2.7.2** *Le système de Rademacher est orthonormal.*

**Preuve.** On a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (r_n(t))^2 dt &= \frac{1}{2^n} \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^{2^n} \chi_n^k(t) \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{2^n} \int_0^1 \sum_{k=1}^{2^n} (\chi_n^k(t))^2 dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

pour  $n = 0$ , on a:  $\int_0^1 (r_0(t))^2 dt = 1$

Soit  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $m \neq n$ , alors:

$$\begin{aligned} \int_0^1 r_n(t) r_m(t) dt &= \frac{1}{\sqrt{2^{n+m}}} \int_0^1 \sum_{i=1}^{2^n} \chi_n^i(t) \sum_{j=1}^{2^m} \chi_m^j(t) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Car le Système de Haar est orthonormal.

Pour  $n = 0$ ,  $r_0$  est clairement orthogonal aux autres fonctions  $r_m$  où  $m \neq 0$ .  $\blacksquare$

**Définition 2.7.5 (Système de Walsh):**[1] *Le système de Walsh est défini pour tout  $t \in [0.1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  par:*

$$w_0(t) = 1$$

$$w_n(t) = r_{\nu_1+1}(t) \cdot r_{\nu_2+1}(t) \cdots r_{\nu_p+1}(t)$$

Où  $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \cdots \leq \nu_p$  et  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \cdots + 2^{\nu_p}$

**Proposition 2.7.3** *Le système de Walsh est orthonormal.*

**Preuve.** On a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\int_0^1 (w_n(t))^2 dt = \int_0^1 (r_{\nu_1+1}(t) \cdot r_{\nu_2+1}(t) \cdots r_{\nu_p+1}(t))^2 dt = 1$$

pour  $n = 0$  on a:  $\int_0^1 (w_0(t))^2 dt = 1$

et  $w_0$  est clairement orthogonal aux autres fonctions  $w_m$  où  $m \neq 0$ .

Soit  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $m \neq n$ , alors:

$$\int_0^1 w_n(t) w_m(t) dt = \int_0^1 (r_{\nu_1+1}(t) \cdot r_{\nu_2+1}(t) \cdots r_{\nu_p+1}(t)) (r_{\nu'_1+1}(t) \cdot r_{\nu'_2+1}(t) \cdots r_{\nu'_p+1}(t)) dt = 0$$

Car le système de Rademacher est orthonormal. ■

## 2.7.2 Convergence des séries orthogonales

Nous allons en premier lieu étudier les propriétés de convergence des séries orthogonales.

Nous rappelons ici quelques théorèmes très utiles pour notre étude des séries orthogonales:

**Théorème 2.7.1 (Egorov):** *Soient  $E$  un ensemble de mesure finie et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions mesurables, convergeant presque partout sur  $E$  vers une fonction  $f$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un sous ensemble mesurable  $E_\varepsilon$  de  $E$  tel que:  $\mu(E_\varepsilon) \geq \mu(E) - \varepsilon$  et la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur l'ensemble  $E_\varepsilon$ .*

**Démonstration.** Voir: [2] ou [5]. ■

**Théorème 2.7.2 (Lusin):** *Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[a, b]$ . Alors,  $f$  est mesurable si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une fonction  $g$  continue sur  $[a, b]$ , tel que:  $\mu\{t \in [a, b] : f(t) \neq g(t)\} \leq \varepsilon$ .*

**Démonstration.** Voir: [2] (exercice (03) du Chapitre 12) ou [5]. ■

**Théorème 2.7.3** [1] Soit  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  un système orthonormal défini sur l'intervalle  $[a, b]$ , alors:

1. Si  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est borné et tel que  $\sum_{n \geq 1} a_n \varphi_n(t)$  converge presque partout, on a:  

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$
2. Si  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est borné, on a:  $\sum_{n \geq 1} \varphi_n^2(t) = +\infty$  sur un ensemble de mesure positive.
3. Si  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est complet, alors:  $\sum_{n \geq 1} \varphi_n^2(t) = +\infty$  presque partout.

**Démonstration.** Soit  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  un système orthonormal défini sur l'intervalle  $[a, b]$ .

1. Supposons que  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est borné et que  $\sum_{n \geq 1} a_n \varphi_n(t)$  converge presque partout, où  $a_n \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors:

Comme  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est borné, il existe un réel  $M > 0$  tel que:  $|\varphi_n(t)| < M$  pour tout  $t \in [a, b]$ .

Soit  $\varepsilon$  et  $\sigma$  deux réels strictement positif tel que:  $0 < \sigma < 1$  et  $M^2\varepsilon < \sigma$

Comme  $\sum_{n \geq 1} a_n \varphi_n(t)$  converge presque partout sur l'intervalle  $[a, b]$  alors, d'après le théorème d'Egorov, il existe un ensemble  $E \subset [a, b]$  tel que  $\mu(C_E) \leq \varepsilon$  sur lequel la série  $\sum_{n \geq 1} a_n \varphi_n(t)$  converge uniformément.

On déduit que:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \varphi_n(t) = 0$  uniformément sur  $E$  et donc:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 \int_E \varphi_n^2(t) dt = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part, on a : } \int_E \varphi_n^2(t) dt &= \int_a^b \varphi_n^2(t) dt - \int_{C_E} \varphi_n^2(t) dt \\ &\geq 1 - M^2\varepsilon \\ &> 1 - \sigma \end{aligned}$$

Il en résulte que:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

2. Soit  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  un système orthonormal borné et  $\varepsilon > 0$ .

Supposons le contraire c.a.d  $\sum_{n \geq 1} \varphi_n^2(t)$  converge presque partout, alors:

Comme  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est borné, il existe un réel  $M > 0$  tel que:  $|\varphi_n(t)| < M$  pour tout  $t \in [a, b]$ .

D'après le théorème d'Egorov, il existe un ensemble  $E \subset [a, b]$  tel que  $\mu(C_E) \leq \frac{\varepsilon}{M^2}$  sur lequel la série  $\sum_{n \geq 1} \varphi_n^2(t)$  converge uniformément.

$$\text{Donc: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E \varphi_n^2(t) dt + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{C_E} \varphi_n^2(t) dt \leq \varepsilon$$

On déduit alors que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n^2(t) dt = 0$ , ce qui contredit l'hypothèse:  $\int_a^b \varphi_n^2(t) dt = 1$ .

3. Soit  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  un système orthonormal complet et  $\varepsilon > 0$ .

Supposons que  $\sum_{n \geq 1} \varphi_n^2(t)$  converge presque partout sur un ensemble de mesure positive  $E \subset [a, b]$ .

D'après le théorème d'Egorov, il existe un ensemble  $F \subset E \subset [a, b]$ , tel que la série  $\sum_{n \geq 1} \varphi_n^2(t)$  converge uniformément sur  $F$  et d'après le théorème de Lusin, il existe une constante  $\chi > 0$  tel que  $\sum_{n \geq 1} \varphi_n^2(t) < \chi$  pour tout  $t \in F$ .

Soient  $G \subset F$  tel que  $\mu(G) < \frac{1}{4\chi}$  et  $g$  une fonction définie par:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in G \\ 0 & \text{si } t \notin G \end{cases}$$

On note:  $S_g(t) = \sum_{n \geq 1} a_n \varphi_n(t)$  la série de Fourier associée à  $g$ .

D'après l'inégalité de Bessel, on a:

$$\sum_{n \geq 1} a_n^2 \leq \int_a^b (g(t))^2 dt \leq \mu(G) \leq \frac{1}{4\chi}$$

Donc, pour tout  $t \in F$  :

$$\left| \sum_{n \geq 1} a_n \varphi_n(t) \right| \leq \left( \sum_{n \geq 1} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n \geq 1} \varphi_n^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \frac{1}{4\chi} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} \quad \forall t \in F \quad (1)$$

Comme la série  $\sum_{n \geq 1} a_n^2$  est convergente, alors le reste d'ordre  $n$  de cette série converge vers zéro donc, il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout  $n \geq N$ , on a:  $\sum_{n \geq N} a_n^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{\chi}$

Donc, pour tout  $t \in F$ , on a:

$$\left| \sum_{n \geq N} a_n \varphi_n(t) \right| \leq \left( \sum_{n \geq N} a_n^2 \sum_{n \geq N} \varphi_n^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \frac{\varepsilon^2}{X} \chi \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$$

Il en résulte que la série  $\sum_{n \geq 1} a_n \varphi_n(t)$  converge presque partout sur  $G$  (et même uniformément). D'autre part, le système  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  étant complet, on a par l'égalité de Parseval:

$$\|g\|_{L^2[a,b]}^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k^2 \text{ ou bien sous une autre forme:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E \left( g(t) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t) \right)^2 dt = 0$$

En particulier:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t) = g(t)$  presque partout sur  $G$ .

Contradiction avec l'inégalité (1) car  $g(t) = 1$  pour tout  $t \in G$ .

■

### 2.7.3 Convergence presque partout

Les noyaux de Dirichlet et Fejér ont joué un rôle important dans l'étude de la convergence (simple ou ponctuelle) des séries de Fourier trigonométriques. Dans le cas général de systèmes orthogonaux quelconques, de tels noyaux ne peuvent pas être toujours explicités.

Nous donnerons ici une approche utilisée dans les questions concernant ce type de convergence.

**Proposition 2.7.4** [1] *Soient  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  un système orthonormal,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  deux suites réelles, telles que  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$  et la somme  $\sum_{n \geq 1} a_n^2 V_n$  est finie. Alors pour toute suite d'entiers  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  vérifiant  $n_{k+1} > n_k$  et  $k \leq V_{n_k} \forall k \geq 1$ , on a:  $S_{n_k}(t) = \sum_{j=1}^{n_k} a_j \varphi_j(t)$  converge presque partout.*

*En particulier, si  $V_n = \log_2(n)$  et  $n_k = 2^k$ , on pourra écrire: Si  $\sum_{n \geq 1} a_n^2 \log_2(n) < +\infty$ , on*

*a la sous suite  $S_{2^n}(t) = \sum_{j=1}^{2^n} a_j \varphi_j(t)$  converge presque partout.*

**Preuve.** Soient  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  un système orthonormal et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  deux suites telles que définies plus haut. Nous avons du fait des hypothèses:  $\sum_{n \geq 1} a_n^2 < +\infty$

Donc d'après le théorème de Riesz-Fischer (généralisé aux séries orthogonales), il existe une fonction  $f$  dans  $L^2[a, b]$  tel que:  $\int_a^b (f(t))^2 dt = \sum_{n \geq 1} a_n^2$

On pose:  $S_n(t) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(t)$ , alors:

$$\int_a^b (f(t) - S_n(t))^2 dt = \int_a^b (f(t))^2 dt - \int_a^b (S_n(t))^2 dt = \sum_{j \geq 1} a_j^2 - \sum_{j=1}^n a_j^2 = \sum_{j \geq n+1} a_j^2$$

Posons:  $r_{n_k} = \sum_{j \geq n_k+1} a_j^2$ , alors, par la transformation d'Abel, on a:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p r_{n_k} &= \sum_{k=1}^p k (r_{n_k} - r_{n_{k+1}}) + p \cdot r_{n_{p+1}} \\ &= \sum_{k=1}^p k \left( \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j^2 \right) + p \cdot r_{n_{p+1}} \\ &\leq \sum_{k=1}^p V_{n_k} \left( \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j^2 \right) + V_{n_p} \sum_{j \geq n_{p+1}+1} a_j^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^p V_{n_k} \left( \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j^2 \right) + \sum_{j \geq n_{p+1}+1} V_j a_j^2 \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} r_{n_k} &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} V_{n_k} \left( \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j^2 \right) + \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{j \geq n_{p+1}+1} V_j a_j^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} V_j a_j^2 \right) + 0 \\ &= \sum_{n \geq 1} V_n a_n^2 \\ &< +\infty \end{aligned}$$

D'où:

$$\sum_{k \geq 1} \int_a^b (f(t) - S_{n_k}(t))^2 dt < +\infty, \text{ par le théorème de Levi, on déduit que:}$$

$$\sum_{k \geq 1} \int_a^b (f(t) - S_{n_k}(t))^2 dt < +\infty \text{ presque partout.}$$

Donc:  $\lim_{k \rightarrow +\infty} S_{n_k}(t) = f(t)$  presque partout. ■

**Lemme 2.7.1** Soit  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  un système orthonormal. Alors pour toute suite  $a_1, a_2, \dots, a_n$  de nombres réels, il existe une fonction  $\delta$  dans  $L^2[a, b]$  et une constante  $M$  strictement positive, tel que:

$$1. \left| \sum_{k=i}^j a_k \varphi_k(t) \right| \leq \delta(t) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq j \leq n \text{ et } t \in [a, b]$$

$$2. \int_a^b \delta^2(t) dt \leq M \log^2(n) \sum_{k=1}^n a_k^2$$

**Preuve.** Voir: [1] ou [4] ■

Nous en déduisons le théorème général suivant sur la convergence presque partout des séries orthogonales.

**Théorème 2.7.4** [1] *Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de nombres réels tel que la série:  $\sum_{n \geq 1} a_n^2 \log^2(n)$  est convergente. Alors, pour tout système orthonormal  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , la série  $\sum_{n \geq 1} a_n \varphi_n(t)$  converge presque partout.*

**Démonstration.** Soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de nombres réels tel que:  $\sum_{n \geq 1} a_n^2 \log^2(n) < +\infty$  et  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  un système orthonormal.

Posons  $V_n = \log_2(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Donc:  $k = V_{2^k}$ , on déduit d'après la proposition 2.7.4 que la série  $(S_{2^k})_{k \in \mathbb{N}}$  est convergente presque partout.

Montrons maintenant la convergence presque partout de la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $2^k \leq n \leq 2^{k+1}$ .

Donc, d'après le lemme précédent, on a l'existence d'une fonction  $\delta_k$  dans  $L^2[a, b]$  et une constante réelle  $M$  strictement positive, tel que:

$$|S_n(t) - S_{2^k}(t)| \leq \delta_k(t) \text{ et } \int_a^b \delta_k^2(t) dt \leq M \log^2(2^{k+1}) \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_j^2$$

D'où:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b \delta_k^2(t) dt &\leq M \sum_{k=1}^{+\infty} \log^2(2^{k+1}) \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_j^2 \\ &= M \log^2(2) \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)^2 \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_j^2 \\ &\leq 4M \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)^2 \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_j^2 \\ &\leq 4M \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_j^2 \log^2(j) \\ &\leq 4M \sum_{j=1}^{+\infty} a_j^2 \log^2(j) \\ &< +\infty \end{aligned}$$

Par le théorème de Levi, on déduit que la série  $\sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k^2(t)$  est convergente presque partout. C'est à dire aussi  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_k(t) = 0$  presque partout.

En définitive, on a bien:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_{2^k}(t)$  et la série  $\sum_{n \geq 1} a_n \varphi_n(t)$  est donc convergente presque partout. ■

### 2.7.4 Séries de Fourier et fonctions de Lebesgue

Nous allons à présent introduire les fonctions de Lebesgue et donner quelques propriétés les concernant.

Soient  $f \in L^2[a, b]$  et  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  un système orthonormal. Soit  $\sum_{n \geq 1} a_n \varphi_n(t)$  la série orthogonale associée à la fonction  $f$ , tel que  $a_n = \int_a^b f(u) \varphi_n(u) du$

Alors:

$$\begin{aligned} S_n(f)(t) &= \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \int_a^b f(u) \varphi_k(u) du = \int_a^b f(u) \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \varphi_k(u) du \\ &= \int_a^b f(u) K_n(t, u) du \end{aligned}$$

On pose:  $K_n(t, u) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \varphi_k(u)$  : noyau du système orthonormal  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**Définition 2.7.6** On appelle fonction de Lebesgue associée au système orthonormal  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , la fonction  $L_n$  définie pour tout  $t \in [a, b]$  par:

$$L_n(t) = \int_a^b |K_n(t, u)| du$$

**Lemme 2.7.2** Soit  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite réelle tel que la série  $\sum_{n \geq 1} c_n^2$  est convergente alors, il existe une suite réelle  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  croissante vers  $+\infty$  tel que  $\sum_{n \geq 1} c_n^2 r_n$  est convergente.

**Lemme 2.7.3 (Kronecker):** Soit  $(H_n)$  et  $(u_n)$  deux suites réelles tel que  $H_n = \sum_{k=1}^n u_k$  et soit  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite réelle positive et croissante tel que  $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{\lambda_n} < +\infty$ . Alors:  $H_n = o(\lambda_n)$

**Preuve.** Pour tout  $n, m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m < n$ , en utilisant la transformation d'Abel:

$$\begin{aligned} |H_n - H_m| &= \left| \sum_{k=m+1}^n u_k \right| \\ &= \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{u_k}{\lambda_k} \lambda_k \right| \\ &\leq \sum_{k=m+2}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \left| \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{u_j}{\lambda_j} \right| + \lambda_{m+1} \left| \sum_{j=m+1}^{+\infty} \frac{u_j}{\lambda_j} \right| + \lambda_n \left| \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{u_j}{\lambda_j} \right| \end{aligned}$$

Comme  $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{\lambda_n} < +\infty$ , alors:  $\sum_{k \geq n} \frac{u_k}{\lambda_k} = o(1)$

Donc:

$$\begin{aligned} |H_n - H_m| &\leq o(\lambda_n - \lambda_{m+1}) + o(\lambda_{m+1}) + o(\lambda_n) \\ &= o(\lambda_n) \end{aligned}$$

D'autre part, on a:

$$\begin{aligned} |H_n| &\leq |H_n - H_m| + |H_m| \\ &= o(\lambda_n) + |H_m| \end{aligned}$$

Pour  $m$  fixé, on a:  $H_m = o(\lambda_n)$  car  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$

Donc:  $H_n = o(\lambda_n)$  ■

**Théorème 2.7.5** [1] Soient  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  un système orthonormal et  $L_n$  la fonction de Lebesgue associée. On se donne  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite réelle positive et croissante et  $E \subset [a, b]$ . On a les propriétés suivantes:

1. Si  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty$ , alors:  $L_n(t) = o(\sqrt{\lambda_n})$  presque partout.

2. Si  $\sum_{k=1}^n \varphi_k^2(t) = O(n)$ , alors:  $L_n(t) = O(\sqrt{n})$  pour tout  $t \in E$ .

En particulier, ce sera le cas si le système est borné (dans le cas du système trigonométrique on sait déjà que:  $L_n(t) = O(\log(n))$ ).

3. Si pour tout  $t \in E$ ,  $L_n(t) = O(\lambda_n)$  quand  $\sum_{n \geq 1} a_n^2 < +\infty$ , alors:  $S_n(t) = O_t(\sqrt{\lambda_n})$  presque partout sur  $E$ .

4. Si  $L_n(t) = O(\lambda_n)$  presque partout sur  $E$ . Alors: si  $\sum_{n \geq 1} a_n^2 \lambda_n < +\infty$ , la série orthogonal  $\sum_{n \geq 1} a_n \varphi_n$  est convergente presque partout sur  $E$ .

**Démonstration.** Soient  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  un système orthonormal et  $L_n$  la fonction de Lebesgue associée et soient  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite réelle positive et croissante et  $E \subset [a, b]$ . On a:

1. Supposons que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n}$  est convergente, alors:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\int_a^b \varphi_n^2(t) dt}{\lambda_n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n}$$

Donc  $\sum_{n \geq 1} \frac{\int_a^b \varphi_n^2(t) dt}{\lambda_n}$  converge sur  $[a, b]$ , d'après le théorème de Beppo-Levi, on a:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi_n^2(t) dt}{\lambda_n} \text{ est convergente.}$$

Donc, d'après le lemme de Kronecker, on a:  $\sum_{n \geq 1} \varphi_n^2(t) = o(\lambda_n)$ .

Pour tout  $t \in [a, b]$ , on a :

$$L_n^2(t) = \left( \int_a^b K_n(t, u) du \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b K_n^2(t, u) du \leq (b-a) \sum_{k=1}^n \varphi_n^2(t)$$

Donc:  $L_n(t) = o(\sqrt{\lambda_n})$

2. On a pour tout  $t \in E$  :

$$L_n^2(t) \leq (b-a) \sum_{k=1}^n \varphi_n^2(t) = O(n)$$

Donc:  $L_n(t) = O(\sqrt{n})$ .

3. La démonstration de ce point est technique, longue et difficile (voir [1]).

4. Supposons que  $L_n(t) = O(\lambda_n)$  presque partout sur  $E$  et que la série  $\sum_{n \geq 1} a_n^2 \lambda_n < +\infty$ .

D'après le lemme 2.6.2, il existe une suite réelle  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  croissante vers  $+\infty$  tel que

$$\sum_{n \geq 1} a_n^2 \lambda_n r_n < +\infty$$

$$\text{Soit } \tilde{S}_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \sqrt{\lambda_k r_k} \varphi_k(t)$$

D'après la transformation d'Abel, on a pour tout  $n, p \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned} |S_{n+p}(t) - S_n(t)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \varphi_k(t) \right| \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k r_k}} a_k \sqrt{\lambda_k r_k} \varphi_k(t) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_k r_k}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1} r_{k+1}}} \right) |\tilde{S}_k(t)| + \frac{|\tilde{S}_n(t)|}{\sqrt{\lambda_{n+1} r_{n+1}}} + \frac{|\tilde{S}_{n+p}(t)|}{\sqrt{\lambda_{n+p} r_{n+p}}} \end{aligned}$$

En appliquant le point (3) à la série  $\sum_{n \geq 1} a_n \sqrt{\lambda_n r_n} \varphi_n(t)$ , on aura:

$$\tilde{S}_n(t) = O_t(\sqrt{\lambda_n}) \text{ presque partout sur } E.$$

Donc:

$$|S_{n+p}(t) - S_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_k r_k}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1} r_{k+1}}} \right) |\tilde{S}_k(t)| + o_t(1) \text{ presque partout sur } E.$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \int_a^b \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_n r_n}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1} r_{n+1}}} \right) |\tilde{S}_n(t)| dt &\leq \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_n r_n}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1} r_{n+1}}} \right) \left( \int_a^b dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b \tilde{S}_n^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{b-a} \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_n r_n}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1} r_{n+1}}} \right) \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \lambda_k r_k \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= O(1) \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_n r_n}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1} r_{n+1}}} \right) \\ &< +\infty \end{aligned}$$

Donc  $S_{n+p}(t) - S_n(t) = o(1)$  presque partout sur  $E$ , c'est à dire que  $S_n(t)$  converge presque partout.

■

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude des séries de Fourier et en particulier aux méthodes de leur convergence dans les espaces  $L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ . Ces questions font partie d'un domaine plus vaste appelé analyse de Fourier.

Cette thématique continue de susciter un engouement dans la communauté scientifique, tout pour son aspect académique que pour ces nombreux développements technique. De nombreuses questions, même de nature classique, restent encore posées. De même, la théorie des séries de Fourier et ses méthodes peut s'élargir à d'autres espaces. Un aspect intéressant serait de considérer tous ces questions dans le cadre des fonctions presque périodiques.

# Bibliographie

- [1] **ALEXITS, György**, Convergence problems of orthogonal series. Vol. 20. Elsevier, 2014.
- [2] **BOUZIAD, Ahmed**, Théorie de la mesure et de l'intégration. Publication Univ Rouen Havre, 1993.
- [3] **EL AMRANI, Mohammed**, Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels: niveau M1. Ellipses Marketing, 2008.
- [4] **KASHIN, Boris Sergeevic et SAAKYAN, A. A.**, Orthogonal series. Vol. 75. American Mathematical Soc., 2005.
- [5] **Kolmogorov, A. N., Fomine, S. V**, Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Éditions Mir, 1974.
- [6] **MIAO, JING**, CONVERGENCE OF FOURIER SERIES IN  $L_p$  SPACE. Math.uchicago.edu/may/Rev 2014.
- [7] **NORDENFORS, Oskar**, The Riesz-Thorin Interpolation Theorem. 2018.
- [8] **Richard S. Laugesen**, Harmonic analysis lecture notes. Université de l'Illinois, 2009.
- [9] **WAGSCHAL, Claude**. Dérivation, intégration. Éditions Hermann, 1999.