

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou  
Faculté de Génie Electrique et de l'Informatique  
Département Electrotechnique



# MEMOIRE

*De fin d'études en vue de l'obtention du Diplôme  
De master En Électrotechnique*

## Thème

*Modélisation par éléments finis  
d'une machine linéaire tubulaire et  
Réalisation du prototype*

Proposé par :

Mr. H.MOHELLEBI (Professeur à UMMTO)

Dirigé par :

Mr. H.MOHELLEBI

Mr. F.HOCINI (Maitres de conférences classe B)

Réalisé par :

Mr. R.TAKILT

Mr. A.ALLOUCHE

*Promotion : 2013*

# Remerciements

*Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude au professeur H.MOHELLEBI chargé de cours à l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou pour son suivi et ses conseils tout le long de notre travail.*

*Nous vifs remerciements vont aussi M<sup>r</sup> F.HOCINI et M<sup>me</sup> Z.OUDNI collaboratrice de l'entreprise ELECTRO-INDUSTRIE pour leurs aide, et combien elle est précieuse.*

*On remercie encore tous ceux qui ont contribué de près ou de loin a l'aboutissement de ce travail.*

*Nous remercions vivement le président et membres de jury pour nous honneur et accepté de juger ce travail*

<b>Introduction générale.....</b>	<b>1</b>
-----------------------------------	----------

## **Chapitre I : Généralités sur les machines linéaires**

I.1.Introduction .....	2
I.2.Entrainement indirect .....	2
I.3.Entrainement direct.....	3
I.4.Description de la machine linéaire.....	4
I.5.Différence essentielle entre les moteurs linéaires et tournants.....	6
I.6.Classification des machines électriques linéaire .....	6
I.7.Fonctionnement du moteur linéaire à induction .....	9
I.8.Le schéma électrique équivalent d'une machine linéaire .....	9
I.9.Les avantages et les inconvénients des machines linéaires.....	10
I.10.Application est perspective.....	11
I.11.Conclusion .....	12

## **Chapitre II : Equations électromagnétiques**

II.1.Introduction.....	13
II.1.1.Première équation.....	13
II.1.2.Deuxième équation.....	14
II.1.3.Troisième équation.....	15
II.1.4.Quatrième équation.....	15
II.1.5.Tableau récapitulatif des équations de MAXWELL.....	16
II.2.Equation de MAXWELL et loi de comportement du milieu.....	16
II.2.1.Loi d'Ohm.....	17
II.2.2.Relation du milieu.....	18

II.2.3. Equation de conservation de la charge électrique.....	19
II.3. Hypothèses simplificatrices.....	20
II.4. Phénomènes électromagnétiques .....	20
II.4.1. Formulation magnétostatique bidimensionnelle .....	20
II.4.2. formulation magnétodynamique bidimensionnelle .....	23
II.5. Conclusion.....	27

### **Chapitre III : Méthodes de résolution**

III .1. Introduction.....	28
III.2 .Méthode des différences finies.....	28
III .3. Méthode d'intégrale de frontière.....	30
III.4. Méthode des éléments finis.....	30
III.4.1. Introduction.....	30
III.4.2. Principe de la méthode des éléments finis.....	30
III.4.3. Formulation éléments finis des équations électromagnétique.....	31
IV.5. Méthode de Galerkin .....	36
a. Modèle magnétostatique 2D.....	36
b-Modèle magnétodynamique.....	42
IV-6- Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis.....	46
IV-7- force magnétique .....	46

### **Chapitre VI : Physique des matériaux**

IV.1. Introduction .....	49
IV.2. Magnétisme à l'échelle atomique.....	49
IV.3. Origine de magnétisme.....	49
IV.4. Moment magnétique atomique .....	50

IV.5.L'atome de Bohr.....	51
IV.6.Aimantation et polarisation magnétique .....	53
IV.7.Susceptibilité et perméabilité magnétique.....	54
IV.8.Classification des matériaux d'un point de vu magnétique .....	55
IV.9.1.Le ferromagnétisme et matériaux ferromagnétiques .....	57
IV.9.2.Le domaine magnétique.....	58
IV.10.Bilan énergétique d'un cristal ferromagnétique.....	58
IV.10.1. Energie d'échange.....	58
IV.10.2. Energie magnétostatique .....	59
IV.10.3. Energie d'anisotropie .....	59
IV.10.4.Energie magnétostrictive.....	60
IV.10.5.Expression phénoménologie de l'énergie d'anisotropie .....	60
IV.11. Cycle d'hystérésis et courbe de première aimantation .....	60
IV.12. Classification des matériaux ferromagnétiques.....	62
IV.13.Les alliages magnétiques.....	63
IV.15.Conclusion.....	68

## **Chapitre V: Modélisation et résultats**

V.1. Introduction.....	69
V.2. Description de la machine.....	69
V.2.1.Caractéristiques géométriques pour 06 encoches .....	70
V.2.2. Caractéristiques physiques.....	70
V.3. Domaine de résolution et conditions aux limites.....	71
V. 3.1 Conditions aux limites .....	71

V. 3.2. Maillage du domaine d'études.....	72
V.4. Formes différentielles associées aux différentes régions du domaine d'étude.....	72
V.5.Les dimensions de la machine.....	73
V.6.Les résultats de calcul empirique.....	74
V.7.Les résultats du calcul empirique.....	76
V.8.matériaux utilisés pour la réalisation de la machine.....	77
V.9.le bobinage.....	77
V.10.Représentation de la machine.....	78
V.11. Les essais effectués.....	79
V.12.Conclusion.....	96
<b>Conclusion général.....</b>	<b>97</b>

# Introduction générale

---

Les Entraînements Électriques pénètrent progressivement, depuis plusieurs années dans tous les domaines de la société, dans un nombre croissant d'application et pour divers raisons, on souhaite transmettre directement les efforts à la charge mécanique, on parle alors des Entraînements directs.

De nos jours, la conception des dispositifs électromagnétiques tels que les machines électriques, les appareils de coupure, les appareils à haute tension. Les machines linéaires nécessitent la modélisation des différents phénomènes physiques, de tels systèmes font l'interaction entre deux domaines : l'électromagnétisme et la mécanique par l'intermédiaire des forces qui créent la partie mécanique.

La modélisation de la machine linéaire tubulaire réside principalement dans l'évolution de sa force électromagnétique, le déplacement de la charge ainsi que la vitesse cinétique.

Cette présente étude s'articule sur cinq chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la présentation des généralités sur les machines linéaires.

Le deuxième chapitre présente les équations de MAXWELL et les lois fondamentales de l'électromagnétisme, qui permettent la formulation des équations électromagnétiques de tous systèmes physiques.

Le troisième chapitre traite les différentes méthodes de résolutions, dans notre travail on s'intéresse à la méthode des éléments finis à fin de modéliser notre machine.

Le quatrième chapitre présente un rappel sur les grandeurs magnétiques, leurs naissances et les relations qui les lient

Nous sommes également intéressés par les principaux groupes de matériaux magnétiques, et les pertes magnétiques sont également abordées.

Le dernier Chapitre sera consacré à la modélisation et interprétation des résultats obtenus.

Enfin, nous terminerons notre travail par une conclusion générale.

## I. Introduction

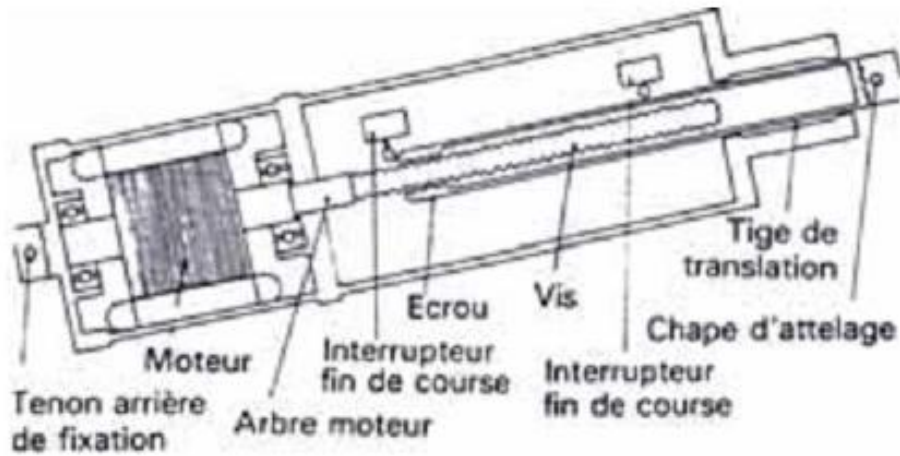
Les entraînements directs avec moteurs linéaires augmentent considérablement les performances du système puisque les limitations mécaniques sont supprimées. Ils sont caractérisés par une plus grande précision, une plus grande accélération et une plus grande vitesse. [1]

Le moteur linéaire est un type particulier de son homologue rotatif, cette nouvelle configuration est en principe envisageable pour tous les types de moteurs rotatifs, il est donc possible de concevoir des prototypes linéaires synchrones, asynchrones, à courant continu, pas à pas et oscillatoire, avec une réversibilité en exploitation et en mouvement, c'est-à-dire à induit fixe inducteur mobile et vice versa. Il est initialement conçu à moitié du XIXe siècle, les performances atteignent rarement celle des variantes rotatives. Vu les caractères spécifiques directs, remplaçant ainsi les systèmes conventionnels complexes associés au moteur rotatif assurant un mouvement rectiligne. [2]

### I. 1. Entraînement indirect

C'est le système le plus utilisé de nos jours, il est basé essentiellement sur les machines tournantes classiques et des organes de transmissions et de conversion du mouvement entre l'actionneur rotatif et de la charge, le mouvement rotatif des machines tournantes est transformé en mouvement de translation (linéaire) à l'aide d'engrenages, de crémaillères, ou de vis à billes. L'ensemble machines tournantes, organe de transmission et de conversion peut développer des efforts qui peuvent atteindre facilement 10 kN, et des vitesses de déplacements d'une dizaine de millimètres par seconde.

Ce mode d'entraînement offre l'avantage d'utiliser des machines standards, et de permettre un éventuel éloignement du dispositif par rapport à la charge entraînée, avec un faible coût, mais ce type d'entraînement présente des inconvénients qui se traduisent par une limitation en terme dynamique, qui est le résultat d'une accélération limitée par les différents moments d'inertie (axe, moteur et couplage), une force qui n'est pas directement appliquée à la charge, une précision réduite du positionnement, et un mauvais rendement et une nuisance sonore. [9,16]



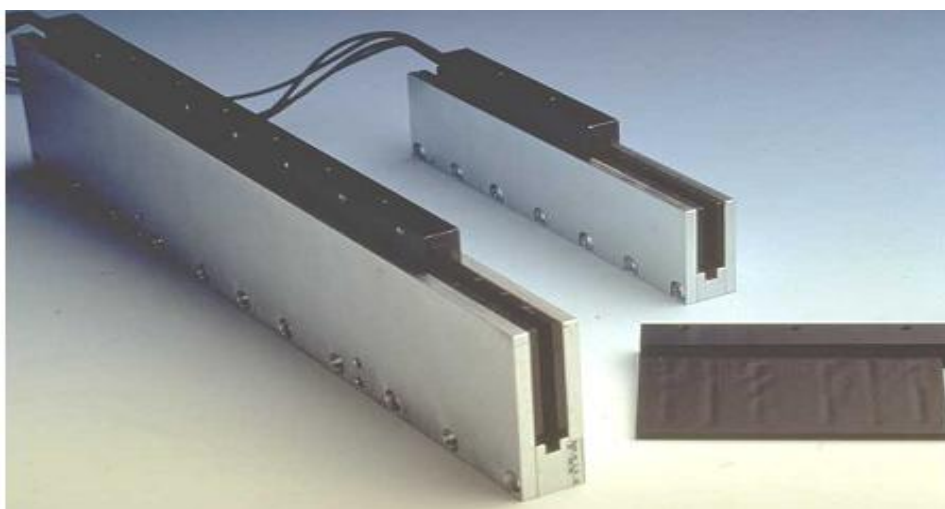
**fig.I.1-Actionneur linéaire indirect**

### I.2. Entraînement direct

Dans ce type d'entraînement, il s'agit de concevoir des dispositifs électromagnétiques adaptatifs appelés moteurs linéaires, ce mode est dispensé d'organes de conversion rotation-translation, le mouvement linéaire n'est pas une conversion d'un mouvement d'une autre nature.

Donc le mouvement et l'effort sont directement appliqués à la charge, alors moins de pièces en mouvements, donc moins d'inertie et une réduction de la taille du dispositif, ajouté à cela une bonne précision du positionnement et une propreté inégale.

Lorsque l'accélération, la taille, la précision du positionnement et propreté présentent un intérêt privilégié l'entraînement directs s'impose. [9 ,16]



**fig.I.2-Actionneur linéaire direct.**

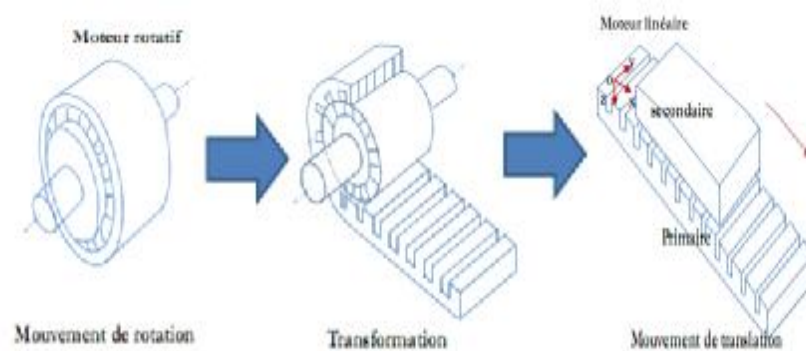
### I.3.Description d'une machine linéaire

Un moteur linéaire est essentiellement un moteur électrique qui a été déroulé de sorte qu'au lieu de produire un couple de rotation, il produit une force linéaire .Il se compose de deux parties essentielles, l'inducteur et l'induit .L'une de ces parties peut se déplacer sous l'effet de la force l'interaction des champs magnétique (inducteur –induit) tandis que l'autre reste bloquée.[2]

De cela on définit deux principaux types de moteur linéaire :

-à induit long inducteur court.

-à inducteur long induit court.



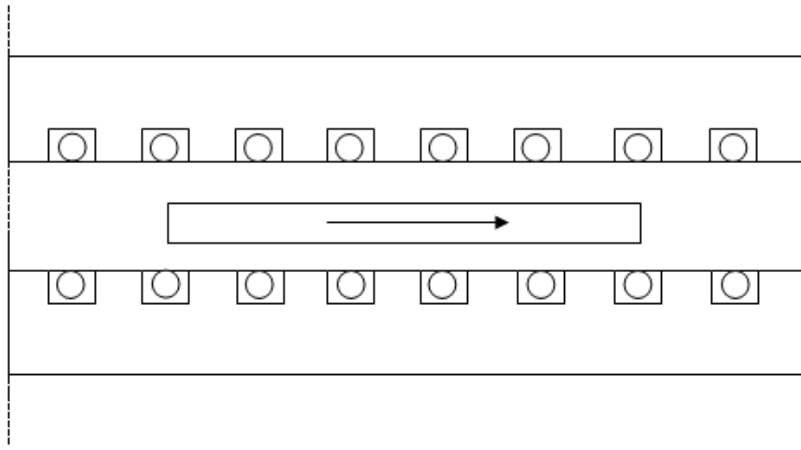
**fig.I.3- Transformation d'un moteur rotatif à un moteur linéaire.**

La figure (I.3) présente un moteur linéaire à induction avec un seul primaire .selon la figure (I.3), les enroulements sont place suivant l'axe transversal  $\overrightarrow{OY}$  .Ainsi, les courants créent un champ d'induction magnétique ,dirigé suivant l'axe  $\overrightarrow{Oz}$ .Si les enroulements sont convenablement répartis et alimentés par une source électrique polyphasée de pulsation  $w$ , le champ magnétique se propage sous la forme d'une onde glissante selon la direction  $\overrightarrow{Oz}$

$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\max} \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{\tau} - \omega t\right)$  où  $\tau$  représente le pas polaire du moteur .En réaction, les courants induits créent le flux magnétique au secondaire .Une force de translation apparait due à l'interaction entre le primaire et le secondaire. Le principe est identique à celui du moteur rotatif à induction, mais au lieu de créer un champ magnétique tournant, c'est un champ magnétique de translation qui est créée .Tous les types de moteurs rotatif peuvent être utilisés en moteur linéaire. [3]

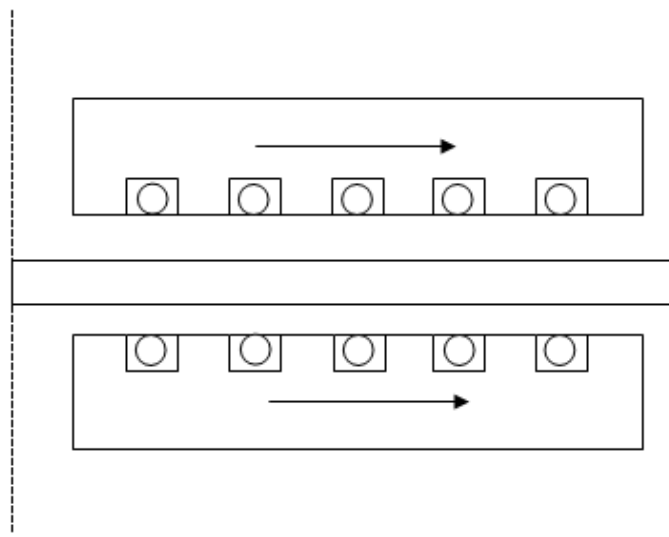
En effet on peut obtenir un moteur linéaire en effectuant un déploiement géométrique d'un moteur cylindrique sur un plan transversal. Nous distinguons alors deux catégories de structures :

✓ les machines linéaires à stator long, qui nécessitent une quantité importante de cuivre



**Fig.I.4- Machine linéaire a stator long.**

✓ les machines linéaire à stator court, qui sont dotées d'un système de rails en matériau ferromagnétique et d'un dispositif de contacts glissants pour l'alimentation de l'enroulement.



**Fig.I.5- Machine linéaire a stator court.**

Comme dans le cas de la machine cylindrique, le stator de la machine linéaire comporte un enroulement polyphasé(en générale triphasé), et l'induit est constitué d'une série d'aimants

supraconducteurs ou d'aimants permanents. On compte également parmi ces machines, les structures usuelles dites planes et les structures tubulaires, indiquées sur les figures (4 et 5)

#### **I.4. Différence essentielle entre les moteurs linéaires et tournants**

Le caractère spécifique du moteur linéaire exige des méthodes très puissantes d'analyse pour déterminer la distribution des courants qui y sont mis en jeu. En effet, le moteur linéaire diffère du moteur rotatif par les points fondamentaux suivants :

**1-** L'inducteur est ouvert aux deux extrémités, ce qui donne en outre la possibilité d'y ménager soit un nombre paire ou impaire de pôles

**2-** Induit constitué, par une masse conductrice, généralement homogène et isotrope, où des conducteurs isolés transportant les courants dans des directions imposées.

**3-** Entrefer important et occupe, dans sa majeure partie par l'induit.

#### **I.5. Classification des machines électriques linéaire**

Sur la base des principes d'opération, il existe trois principaux types de machines linéaires

##### **I.5.1. Moteurs linéaire à induction**

Le principe d'opération d'un moteur linéaire à induction est similaire à celui de son équivalent rotatif, l'enroulement polyphasé du primaire (inducteur) produit un champ glissant.

Ø Aux deux extrémités du moteur linéaire à induction, se produit un effet d'extrémité dû aux courants supplémentaire qui sont induits dans le secondaire à cause de la variation rapide des champs magnétique du primaire dans ces zones. Leurs conséquences sont :

- Force de tirée longitudinale supplémentaire.
- Perte joule supplémentaire.
- Distorsion (déformation) de la distribution longitudinale de la densité du flux.
- Réduction du facteur de puissance ainsi que le rendement.
- Les moteurs linéaires à induction de structures planes et tubulaires appartiennent à la classe des moteurs dans lesquels le flux magnétique reste dans le plan du mouvement. [2]

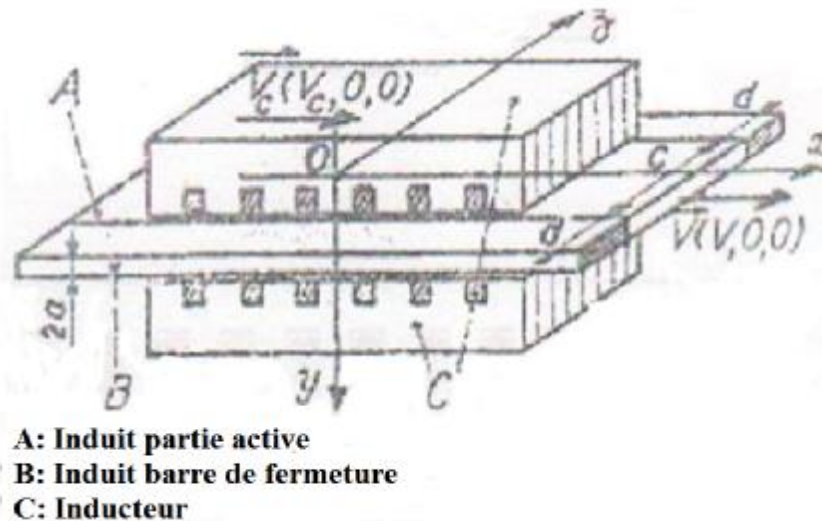


fig. I.6- schéma réel d'un moteur linéaire a induction.

### I-5-2 Moteur linéaire synchrone

Chaque moteur synchrone rotatif a son équivalent linéaire. Ainsi, il y'a des moteurs linéaires synchrones hétéro polaires et homo polaires.

Alors que le principe d'opération est de même pour les machines synchrones rotatives et linéaires, il existe quelques différences. Pour des raisons économiques, seulement quelques topologies sont considérées comme pratique : les moteurs linéaires synchrones a guide actif avec enroulement inducteur conventionnel ou supraconducteur sur le corps mobile, et le moteur linéaire synchrone a guide passif.

L'entrefer d'un moteur linéaire synchrone est presque le même que dans son équivalent topologique à moteur rotatif.

En plus des moteurs linéaires synchrones de grande et moyenne puissance, il existe des moteurs linéaires synchrones à aimants permanents où l'enroulement inducteur conventionnel est remplacé par des aimants permanents à grand énergie. [1][3]

Les moteurs linéaires hétéros polaires et homos polaire sont utilisés pour les applications a court mouvement et a faible poussée. la structure tubulaire est préférée pour une meilleure utilisation du cuivre de l'armature et d'équilibre des forces normales

On peut obtenir cette structure à partir de la structure plane par un enroulement supplémentaire dans la direction du mouvement, le désavantage est la longueur limitée pour laquelle la structure tubulaire peut être utilisée.[1]

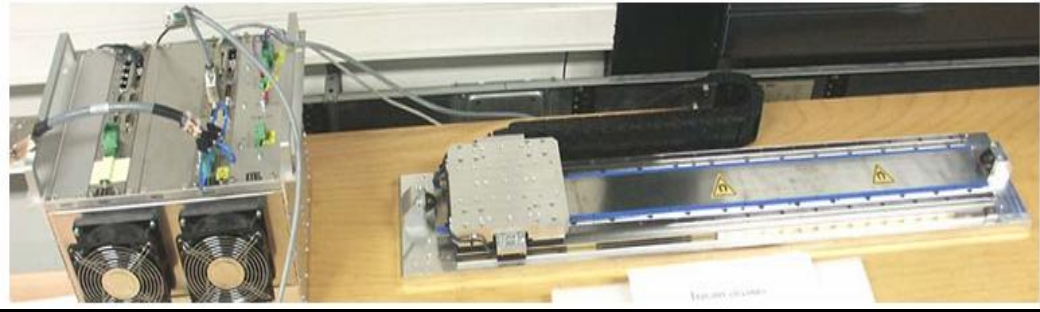


fig.I.7-schéma réel d'un moteur linéaire synchrone.

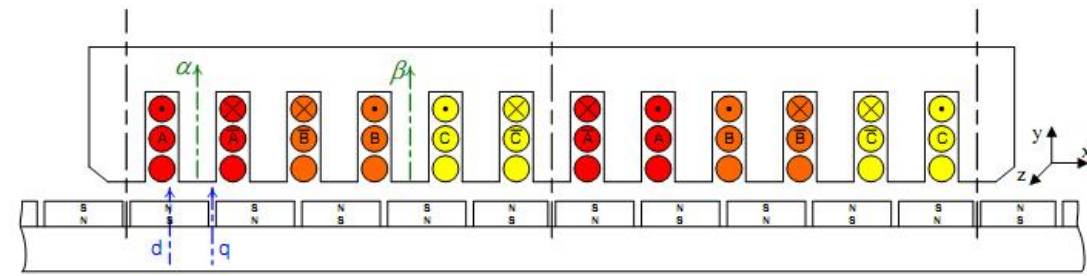


fig.-I.8-schéma simplifié se la structure d'un moteur linéaire synchrone.

### I-5-3-Moteur linéaire a courant continu

Les moteur linéaires à courant continu hétéro-polaire plane avec commutation électrique, sont les plus propose pour les longues excursions à fortes puissance, typiquement nécessaire pour le transport, c'est encore une fois une structure a guide actif.[4]

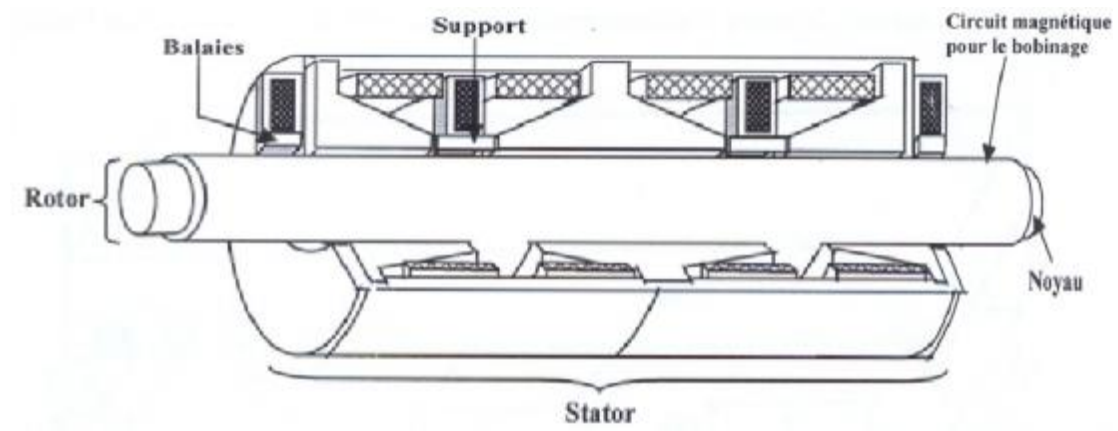


fig.I.9-schéma simplifie d'un moteur linéaire à courant continu.

### I-6-Fonctionnement du moteur linéaire à induction

Dans les enroulements logés dans les encoches des inductions, alimentés par une source triphasée de pulsation  $\omega$ , circulent des courants dont la direction est celle de l'axe OZ, et créent un champ magnétique principal de direction OY.

Comme les enroulements sont uniformément repartis, alors les champs magnétiques principaux de la force magnétomotrice se propagent suivant l'axe OX, sous la forme d'une onde glissante à la vitesse linéaire :

$$V_c = \omega K$$

$$K = \frac{w}{c}$$

avec :

**K** : le nombre d'onde

Le flux magnétique traversant l'entrefer, induit des courants dans le rotor et par conséquent un flux magnétique qui glisse par rapport à l'induction et à l'induit, mais reste immobile par rapport au flux principal. La réaction (interaction) de ces deux flux crée une poussée linéaire motrice lorsque la vitesse V de l'induit est inférieure à celle du champ  $V_c$ . [1]

### I.7.Le schéma électrique équivalent d'une machine linéaire

Dans les moteurs linéaires, en négligeant l'effet d'extrémité, le champ d'induction résultant serait sensiblement équivalent au champ des machines rotatives et aurait comme expression :  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\max} e^{j(\omega t - kx)}$

Il est possible de tenir compte des effets spéciaux sur le schéma équivalent monophasé du moteur linéaire, qui est représenté sur la figure ci-dessus

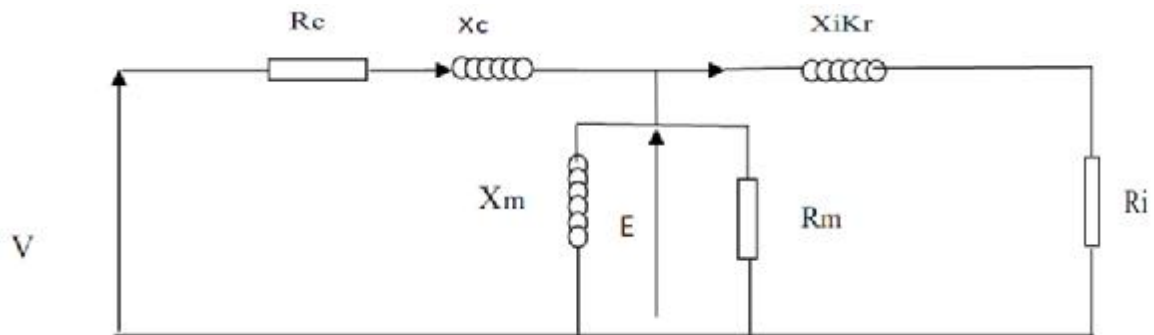


fig-I.10- Schéma équivalent relatif à une phase d'une machine linéaire

## I.8. Les avantages et les inconvénients des machines linéaires

### a- Les avantages

Les avantages essentiels des moteurs linéaires sont leurs faibles réactances de magnétisation, leur faible inertie mécanique et leur excellente capacité thermique, ce qui augmente leur champ d'application, c'est dans les domaines de transport, fabrication l'automatisation, traitements des matières, soins médicaux .....Ets, où de telles propriétés présentées un avantage majeur, c'est dans ces cas que les moteurs peuvent trouver d'intéressantes applications, d'autant plus qu'ils peuvent se substituer à des dispositifs électromécaniques très complexes donc peut intégrer des systèmes particuliers nécessitant peu d'espace.

C'est dans les installations de traction électrique, les organes d'asservissement, des chaînes de montage et d'outillages que l'avenir du moteur linéaire paraît le plus prometteur.

Comme la charge est directement reliée au moteur ceci lui procure une dynamique plus vive, il permet d'avoir des accélérations très importantes, et une précision de positionnement assez élevée.

Le moteur linéaire est apprécié encore pour sa fiabilité dans diverses situations, et sa durée de vie qui est dix fois plus qu'un système de transmission moteur rotatif-vis à bille. D'autre part, il ne nécessite que peu de maintenance, une propreté inégale et une insonorisation qu'un système classique ne peut procurer.

### b- Les inconvénients

Malgré que les moteurs linéaires aient des avantages importants, ils possèdent aussi des inconvénients, parmi ces inconvénients on trouve les suivants :

- Entrefer très important du moteur à induction exige une énergie considérable pour obtenir une pousse convenable.
- La conception de l'enroulement doit supporter de grande densité de courant.
- La surface de l'inducteur conduit alors des encoches très profonds, ce qui demande une quantité importante de cuivre
- La géométrie particulière de la machine impose une pousse spécifique à l'intérieur à celle de la machine rotatif.

### **I.9.Application est perspective**

L'utilisation à grand échelle des machines linéaires n'est pas pour demain, leurs application touche des domaines de recherche et des technologies de pointes, elles peuvent être employé aussi dans divers domaines comme :

- Û Alternative aux vérins hydrauliques à grande vitesse, elles sont aussi utilisées dans les pompes, compresseurs, ventilateurs de grand puissance et les machines à outils.
- Û Dans les applications domestiques comme les aspirateurs, les sèche linge, les fermenteurs de rideaux et les réfrigérateurs.
- Û L'informatique et l'audio visuel, comme moteurs d'entraînement pour les têtes de lectures des disques durs et des bandes magnétiques, dans ce cas le moteur d'entraînement est intégré à l'intérieur de l'empilement du disque (cylindrique rotor extérieur), on utilise dans ces cas des moteurs linéaires permanents autopiloté à effet Hall ou indirect.
- Û Propulsion naval, utilisé dans les portes avions comme propulseurs au décollage des avions chasseurs, dans ce cas on utilise des moteurs linéaires à grande poussée et à grande vitesse.
- Û Dans les parcs d'attraction (le grand huit) et des portes coulissantes (porte d'ascenseur), et les rideaux de scènes théâtrales.
- Û Ce type de moteurs est beaucoup utilisé dans le transport, comme le cas de tramways, traction routières, bicyclette à assistance électrique dans les trains.
- Û Actuellement, un grand nombre de recherches sur les machines linéaires présente des modèles très performants qui franchissent les limites rencontrés auparavant par les dispositifs classique, la recherche dans le domaine des matériaux magnétiques permet de propulser les performances de ces machines.

Les machines linéaires poly-entrefer à aimant permanent offrent de nouvelles perspectives pour leurs utilisations industrielles.

**I.10. Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons procédé à la description générale des moteurs linéaires, leur principe de fonctionnement, et les différents types de moteurs linéaires ainsi que leurs avantages et leurs inconvénients.

## II. Equations électromagnétiques

### II.1.Introduction

C'est grâce à James Clerk MAXWELL (1864) que nous possédons depuis de plus de cent cinquante ans, les expressions des équations qui régissent les phénomènes électromagnétiques. Ces équations de MAXWELL sont l'expression la plus générale des lois de l'électromagnétique classique. Et qui s'avère pleinement compatible avec la théorie de la relativité moderne, elle n'a jamais été mise en défaut jusqu'à présent.

Ces équations sont considérées jusqu'à aujourd'hui comme des postulats (référence) de la théorie.

#### II.1.1.Première équation

Cette équation c'est la « forme locale » du théorème de GAUSS qui exprime le flux du vecteur champ électrique à travers un volume ( $v$ ) délimité par une surface est égale à la densité volumique de charge divisée par la permittivité de l'air. d'après le théorème de Gauss [9][2]:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad \text{II.1}$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^n Q_i \quad \text{II.2}$$

D'autre part on a :

$$\sum_{i=1}^n Q_i = \iiint_v \rho \cdot dv \quad \text{II.3}$$

donc :

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_v \rho \cdot dv \quad \text{II.4}$$

Avec :

$\vec{D}$  : vecteur déplacement électrique [C/m<sup>2</sup>]

$\sum_{i=1}^n Q_i$ : la charge totale contenue dans le volume.

$dv$  : élément du volume [m<sup>3</sup>].

$\rho$  : la densité de la charge volumique [C /m<sup>3</sup>].

$ds$  : élément de surface [m<sup>2</sup>].

En appliquant le théorème d'Ostrogradski à l'intégrale de gauche on aura :

$$\iiint_v \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \cdot dv = \iiint_v \rho \cdot dv \quad \text{II.5}$$

D'où l'expression de la première équation de MAXWELL

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad \text{II.6}$$

### II.1.2. Deuxième équation.

Le flux  $\phi$  d'un champ magnétique  $\vec{B}$  à travers une surface S est donné par :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad \text{II.7}$$

La circulation du vecteur champ électrique sur le contour  $\vec{dl}$  est donnée par :

$$e = - \oint_c \vec{E} \cdot \vec{dl} \quad \text{II.8}$$

e: force électromotrice induite [V]

Si  $\frac{d\phi}{dt}$  est la densité du flux magnétique par rapport au temps décrit l'ensemble de cette variation du  $\phi$ , la f e m d'induction nous est donnée par la loi de FARADAY :

$$e = \frac{d\phi}{dt} \quad \text{II.9}$$

La combinaison de (II.8) et (II.9) nous permet d'écrire

$$\oint_c \vec{E} \cdot \vec{dl} = - \frac{d\phi}{dt} \quad \text{II.10}$$

On sait que

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad \text{II.11}$$

D'où on aura :

$$\oint_c \vec{E} \cdot \vec{dl} = \iint \text{rot} \vec{E} \cdot \vec{ds} \quad \text{II.12}$$

d'où :

$$\iint \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \, d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint \vec{B} \, d\vec{s} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \, d\vec{S} \quad \text{II.13}$$

donc

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{II.14}$$

Cette équation traduit un champ électrique rotationnel engendrée par la variation de l'induction magnétique en fonction du temps, et c'est l'une des lois qui illustre la dépendance du champ magnétique avec le champ électrique.

### II.1.3. Troisième équation

De la deuxième équation

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \implies \text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \text{div} \left( - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad \text{II.15}$$

On sait que :

$$\text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = 0 \quad \text{II.16}$$

D'où on aura :

$$\text{div} \left( - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = 0 \implies - \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{B}) = 0 \quad \text{II.17}$$

Donc

$$\text{div} \vec{B} = f(r) \quad \text{II.18}$$

$f(r)$  implique l'existence des charges magnétiques, ce qui est incohérent car jusqu'à présent l'existence de ces charges n'a jamais été mise en évidence, donc on peut poser  $f(r) = 0$

D'où on aura :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{II.19}$$

Cette équation exprime la conservation du champ  $\vec{B}$ , on dit que  $\vec{B}$  est à flux conservatif.

### II.1.4. Quatrième équation

C'est la généralisation de la loi d'Ampère pour les champs dynamiques [12]

En le théorème d'Ampère on a :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = \sum_{i=1}^n I \quad \text{II.20}$$

On a dans le cas de l'air

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \text{II.21}$$

D'où :

$$\int \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = I \quad \text{II.22}$$

Avec

I : l'intensité des courants de conduction enlacés par le contour.

la relation entre l'intensité de courant et la densité de courant est donnée par :

$$\sum I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

En appliquant le théorème de Stokes :

$$\int_C \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot d\vec{s} \quad \text{II.23}$$

d'où :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot d\vec{s} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{s} \quad \text{II.24}$$

$$\implies \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H}) \cdot d\vec{s} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{s} \quad \text{II.25}$$

$$\implies \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j} \quad \text{II.26}$$

Avec  $\vec{j} = \vec{j}_d + \vec{j}_c$  II.27

avec

$\vec{J}_d$ : Vecteur courant de déplacement.

$\vec{J}_c$ : Vecteur courant de conduction.

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{II.28}$$

Donc la quatrième équation de MAXWELL s'écrit comme suite

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{II.29}$$

Le rationnel du champ magnétique donne naissance à des courants de conduction et de déplacement, elle est dite MAXWELL-AMPERE, qui est d'une importance capitale pour le calcul du champ magnétique [12]

**II.1.5. Tableau récapitulatif des équations de MAXWELL**

Equations	Forme locale	Forme intégrale
Première équation	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$	$\iint_s D \cdot ds = \iiint_v \rho \cdot dv$
Deuxième équation	$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$
Troisième équation	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$
Quatrième équation	$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_s + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_s (\vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{s}$

**II.2. Equation de MAXWELL et loi de comportement du milieu**

les équations de MAXWELL traduisent généralement les interactions entre les grandeurs magnétiques B,H, et électrique E,D, ces relations s'écrivent ,comme on les a démontré précédemment :

$$\text{div} \vec{D} = \rho \tag{II.30}$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{II.31}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \tag{II.32}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{II.33}$$

D : excitation électrique.

B : induction magnétique [T]

H : champ magnétique [A /m]

E : champ électrique [V.m<sup>-1</sup>]

J<sub>C</sub> : le densité du courant de conduction [A.m<sup>-2</sup>]

ρ : charge volumique [C.m<sup>-3</sup>]

t : temps [S]

Sachant que le terme J<sub>C</sub> représente la somme des densités de courant qui peuvent être soit des courants induits dans l'inducteur soit la densité de courant imposée, ce qui nous permet d'écrire la relation suivante :

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \vec{J}_{ind} \quad \text{II.34}$$

$\vec{J}_s$  : densité du courant source

$\vec{J}_{ind}$  : densité du courant d'induit.

### II.2.1.Loi d'Ohm

En appliquant la loi d'ohm à un conducteur parcouru par un courant I, on peut écrire :

$$V = R \cdot I \quad \text{II.35}$$

V : potentiel électrique [V] .

R : résistance [Ω]

$$R = \frac{L}{\sigma S} \quad \text{II.36}$$

Donc :

$$V = \frac{L I}{\sigma S} \quad \text{II.37}$$

σ : conductivité électrique [A/m<sup>2</sup>] .

L : longueur du conducteur [m] .

S : section du conducteur  $[m^2]$

aussi elle interprète la relation entre le champ électrique H et la densité de courant J par l'intermédiaire de la conductivité électrique  $\sigma$ . [12]

La loi généralise s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \vec{J}_s + \vec{J}_{ind} \quad \text{II.38}$$

Avec :

$\sigma$  : La conductivité électrique.

$\vec{J}_s$  : La densité de courant de source.

$\vec{J}_{ind}$  : La densité de courant induit.

$\vec{E}_t$  : Le champ électrique qui règne dans le milieu considéré.

Et

$$\vec{E}_t = \vec{E} + \vec{E}' = (\vec{E}_s + \vec{E}_{ind}) + \vec{E}' \quad \text{II.39}$$

Avec :

$\vec{E}_s$  : Le champ électrique de source.

$\vec{E}'$  : Électromoteur.

$\vec{E}_{ind}$  : Le champ électrique induit.

Et on a encore :

$$\vec{E}' = \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{II.40}$$

Avec :

$\vec{v}$  : La vitesse de déplacement des pièces en mouvement, dans un champ de d'induction B.

**II.2.2.Relation du milieu**

Les équation de Maxwell traduisant généralement les interactions, qui existe entre le champ magnétique  $\vec{H}$  et l'induction magnétique  $\vec{B}$  en fonction de la perméabilité magnétique  $\mu$ , ainsi que celui existant entre l'induction électrique  $\vec{D}$  ( vecteur déplacement) et le champ électrique  $\vec{E}$ , en fonction de la permittivite electrique  $\epsilon$ . [13] [7].

**a) Cas d'un milieu magnétique linéaire**

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{II.41}$$

Avec :

$\mu$  : Perméabilité magnétique absolue [H/m].

$\mu_0$ : Perméabilité magnétique du vide

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \quad \text{[H /m]}$$

$\mu_r$ : Perméabilité magnétique relative du milieu considère

**b) Cas d'un milieu diélectrique linéaire**

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{II.42}$$

Avec :  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

$\epsilon$  : Permittivité électrique absolue [F/m].

$\epsilon_0$ : Permittivité électrique du vide  $\frac{1}{36\pi} 10^{-9}$  [F/m].

$\epsilon_r$ : Permittivité relative du milieu considéré.

Dans le cas ou le milieu considéré est à un comportement non linéaire, les relations (II.41) et (II.42) devient respectivement :

$$\vec{B} = m(\|\vec{H}\|) \times \vec{H} \quad \text{II.43}$$

$$\vec{D} = e(\|\vec{E}\|) \times \vec{E} \quad \text{II.44}$$

**c) Pour un aimant permanent**

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \quad \text{II.45}$$

$\vec{M}$  : Le vecteur aimantation du milieu magnétique considéré.)

### II.2.3. Equation de conservation de la charge électrique

La loi de conservation de charge électrique est donnée par

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \delta}{\partial t} = 0 \quad \text{II.46}$$

Avec :

$\vec{j}$  : Densité du courant [A/m]

$\delta$  : Densité de charge volumique [C /m<sup>3</sup>]

Cette équation traduit l'absence de variation discontinue de la charge électrique, donc il y a conservation de charge électrique du système.

### II.4. Hypothèses simplificatrices

En électrotechnique, les fréquences utilisées sont inférieures aux radio fréquences qui sont de l'ordre de 10<sup>12</sup> Hz, d'où les courants de déplacement sont faibles, ce nous permet de négliger le terme  $(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t})$  devant le terme de conduction  $\sigma \vec{E}$ . [9][11]

Pour un matériau conducteur il suffit de calculer le rapport entre  $J_d$  et  $J_c$ , qui est inférieure à 1. En considérant ces hypothèses, les équations de MAXWELL deviennent

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad \text{II.47}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{D} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{II.48}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{II.49}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j} \quad \text{II.50}$$

### II.5. Phénomènes électromagnétiques

#### II.5.1. Formulation magnétostatique bidimensionnelle

Dans ce modèle, on suppose que le champ magnétique est produit par des sources indépendantes du temps.

Donc  $(\frac{\partial}{\partial t} = 0)$

### II.5.1.1. Formulation en termes de potentiel vecteur magnétique $\dot{\mathbf{A}}$

On considère Les équations de Maxwell (II-20) et (II-38) :

Et la relation de milieu :

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}} \quad \text{II.51}$$

D'après l'équation (II-19), il existe un potentiel vecteur magnétique  $\dot{\mathbf{A}}$  tel que

$$\vec{\nabla} \cdot \dot{\mathbf{B}} = 0 \Rightarrow \exists \dot{\mathbf{A}} / \dot{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \wedge \dot{\mathbf{A}} \quad \text{II.52}$$

Avec :

$$\vec{\mathbf{B}} = m \vec{\mathbf{H}} \Rightarrow \vec{\mathbf{H}} = \frac{\dot{\mathbf{B}}}{m} \quad \text{II.53}$$

Ou :

$\dot{\mathbf{A}}$  : Potentiel vecteur magnétique [Tm]

On remplace  $\dot{\mathbf{H}}$  dans l'équation (II-29) on aura :

$$\vec{\nabla} \wedge \frac{\dot{\mathbf{B}}}{m} = \dot{\mathbf{J}} \quad \text{II.54}$$

La combinaison entre les équations suivantes (II-51) et (II-52) avec (II-29) nous donne :

$$\vec{\nabla} \wedge \frac{\dot{\nabla} \wedge \dot{\mathbf{A}}}{m} = \dot{\mathbf{J}} \quad \text{II.55}$$

Avec :

$$\dot{\mathbf{J}} = \dot{\mathbf{J}}_s + \dot{\mathbf{J}}_{ind} \quad \text{II.56}$$

Telles que :

$\dot{\mathbf{J}}_s$  : Densité de courant de source.

$\dot{\mathbf{J}}_{ind}$  : Densité de courants induits :  $\dot{\mathbf{J}}_{ind} = -s \frac{\partial \dot{\mathbf{A}}}{\partial t} = 0$

D'où :

$$\vec{\nabla} \wedge \frac{\dot{\mathbf{B}}}{m} = \vec{J}_s \quad \text{II.57}$$

a) *.En coordonnées cartésiennes*

Dans le cas des coordonnées cartésiennes, le potentiel vecteur magnétique  $\dot{\mathbf{A}}$  prend une seule composante.

$$\dot{\mathbf{A}} = (0, 0, A_z)$$

$$\dot{\mathbf{J}} = (0, 0, J_{sz})$$

En considérant le cas linéaire :

$$\mu = \text{Constante}$$

Donc l'équation (II-54) s'écrira :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \dot{\mathbf{A}}) = m \vec{J}_{sz} \quad \text{II.58}$$

Sachant que :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \dot{\mathbf{A}}) = -\Delta \dot{\mathbf{A}} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \dot{\mathbf{A}}) \quad \text{II.59}$$

Selon la condition de Jauge coulomb :

$$\vec{\nabla} \cdot \dot{\mathbf{A}} = 0 \quad \text{II.60}$$

Donc :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \dot{\mathbf{A}}) = -\Delta \dot{\mathbf{A}} \quad \text{II.61}$$

En introduisant (II-58) dans (II-61) on aura :

$$-\Delta \dot{\mathbf{A}} = m \vec{J}_{sz} \quad \text{II.62}$$

L'étude se fait dans le plan [x, y] (2D), ce qui permet d'écrire:

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = \mathbf{m}J_{sz} \quad \text{II.63}$$

C'est l'équation magnétostatique 2D en termes de potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$ .

### b) .En coordonnées cylindriques

Considérons un système à symétrie de révolution, donc on peut réduire le plan d'étude sur un plan  $[r, z]$ , et ça se traduira par la condition :

$$\frac{\partial A}{\partial j} = 0$$

Avec :

$$\vec{A} = (0, A_j, 0)$$

Donc on aura :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{U}_r & r\vec{U}_j & \vec{U}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial j} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rA_j & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \left[ -\frac{\partial r A_j}{\partial z} \vec{U}_r + \frac{\partial r A_j}{\partial r} \vec{U}_z \right]$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{U}_r & r\vec{U}_j & \vec{U}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial j} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial_r A_j}{\partial z} & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial_r A_j}{\partial r} \end{vmatrix}$$

On déduit, que l'équation magnétostatique en termes de potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  s'écrit sur la forme suivante :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r A_j}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r A_j}{\partial z} \right) \quad \text{II.64}$$

### II.5.2.formulation magnétodynamique bidimensionnelle

On parle de l'étude magnétodynamique quand les phénomènes magnétiques et électriques sont dépendants du temps.

Dans ce cas, on considère les trois équations de Maxwell suivantes :

$$\overset{\mathbf{r}}{\nabla} \cdot \overset{\mathbf{r}}{B} = 0 \quad \text{II.65}$$

$$\overset{\mathbf{r}}{\nabla} \wedge \overset{\mathbf{r}}{E} = -\frac{\partial \overset{\mathbf{r}}{B}}{\partial t} \quad \text{II.66}$$

$$\overset{\mathbf{r}}{\nabla} \wedge \overset{\mathbf{r}}{H} = \overset{\mathbf{r}}{J} \quad \text{II.67}$$

#### III.5.2.1.Formulation en termes de potentiel vecteur magnétique $\overset{\mathbf{r}}{A}$

D'après l'équation de Maxwell (II-51) :

On a :

$$\exists \overset{\mathbf{r}}{A} / \overset{\mathbf{r}}{B} = \overset{\mathbf{r}}{\nabla} \wedge \overset{\mathbf{r}}{A} \quad \text{II.68}$$

En remplaçant (II-66) dans (II-52) on obtient :

$$\overset{\mathbf{r}}{\nabla} \wedge \left( \frac{\overset{\mathbf{r}}{\nabla} \wedge \overset{\mathbf{r}}{A}}{m} \right) = \overset{\mathbf{r}}{J} \quad \text{II.69}$$

Avec :

$$\overset{\mathbf{r}}{J} = \overset{\mathbf{r}}{J}_s - s \frac{\partial \overset{\mathbf{r}}{A}}{\partial t}$$

Donc, (II-68) devient :

$$\overset{\mathbf{r}}{\nabla} \wedge \left( \frac{\overset{\mathbf{r}}{\nabla} \wedge \overset{\mathbf{r}}{A}}{m} \right) = \overset{\mathbf{r}}{J}_s - s \frac{\partial \overset{\mathbf{r}}{A}}{\partial t} \quad \text{II.70}$$

Finalement la forme de l'équation magnétodynamique en termes de potentiel vecteur magnétique  $\overset{\mathbf{r}}{A}$  est la suivante :

$$\mathbf{\nabla} \wedge \left( \frac{\mathbf{\nabla} \wedge \mathbf{A}}{m} \right) + s \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{J}_s = 0 \quad \text{II.71}$$

a). *En coordonnées cartésiennes 2D*

Dans ce cas, le plan d'étude est réduit au plan à deux dimensions [x, y].

Avec :

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} = 0 \right).$$

Donc on a :

$$\mathbf{A} = (0, 0, A_z).$$

$$\mathbf{J} = (0, 0, J_{sz}).$$

$$\mathbf{\nabla} \wedge \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix}$$

On aura :

$$\mathbf{\nabla} \wedge \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{j} = a \mathbf{i} + b \mathbf{j}$$

$$\mathbf{\nabla} \wedge (\mathbf{\nabla} \wedge \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a & b & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{\nabla} \wedge (\mathbf{\nabla} \wedge \mathbf{A}) = \left( \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{m} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{m} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - s \frac{\partial A_z}{\partial t} = -J_{sz} \quad \text{II.72}$$

En régime harmonique, on pose :  $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$

D'où l'équation (II-71) devient :

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{m} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{m} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - s j \omega A_z = -J_{sz} \quad \text{II.73}$$

**b). En 2D axisymétrique**

Dans ce cas le domaine d'étude est réduit au plan  $[r, z]$

Avec :

$$\frac{\partial}{\partial j} = 0$$

$$\dot{\mathbf{A}} = (0, A_j, 0).$$

$$\dot{\mathbf{J}}_s = (0, J_{sj}, 0).$$

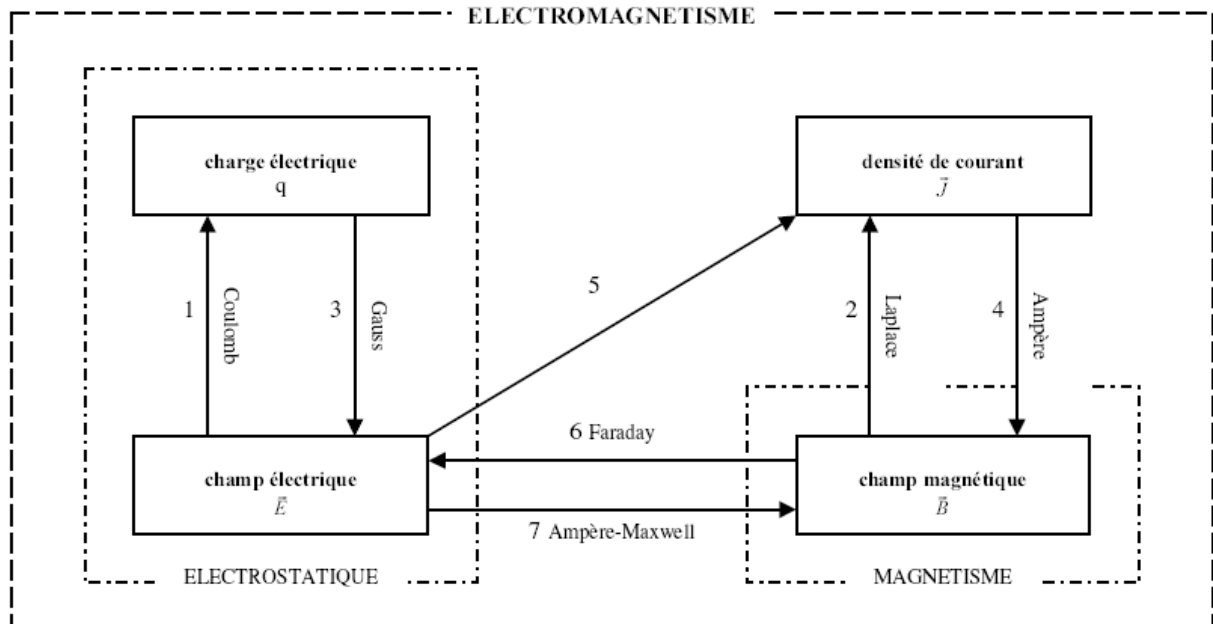
$$\dot{\nabla} \wedge \dot{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} \dot{U}_r & r\dot{U}_j & \dot{U}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial j} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rA_j & 0 \end{vmatrix}$$

On aura :

$$\dot{\nabla} \wedge \dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{r} \left[ -\frac{\partial r A_j}{\partial z} \mathbf{r} + \frac{\partial r A_j}{\partial r} \mathbf{U}_z \right]$$

$$\dot{\nabla} \wedge (\dot{\nabla} \wedge \dot{\mathbf{A}}) = \begin{vmatrix} \dot{U}_r & r\dot{U}_j & \dot{U}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial j} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial r A_j}{\partial z} & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial r A_j}{\partial r} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{r} \wedge \left( \frac{\dot{\nabla} \wedge \dot{\mathbf{A}}}{m} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r m} \frac{\partial r A_j}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r m} \frac{\partial r A_j}{\partial z} \right) - s \frac{\partial A_j}{\partial t} + J_{sz} = 0 \quad \text{II.74}$$



**Figure : II-1 : Schéma explicatif entre les différentes grandeurs magnétiques et électriques**

## II.6. Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à développer les équations de MAXWELL et les différents phénomènes magnétiques qui vont nous permettre la modélisation de la machine à étudier.

### III. Méthodes de résolution

#### III .1.Introduction

L'étude de tous phénomènes physiques consiste en premier lieu en sa modélisation. Le choix d'une méthode de résolution est relié directement au problème formulé.

Deux grandes catégories de méthodes de résolution peuvent être utilisées à savoir la méthode analytique et la numérique. La résolution analytique des problèmes de géométries complexes n'est pas facile, pour cela nous nous intéressons aux méthodes numériques. Parmi ces méthodes, on trouve plusieurs méthodes : différences finies, intégrales de frontière et éléments finis, que nous allons détailler dans notre travail.

#### III.2 .Méthode des différences finies [8][9]

Cette méthode est basée sur la transformation de l'opérateur différentiel en un opérateur aux différences, où chaque dérivée est approchée par une différence de valeurs de l'inconnue déterminée en un certain nombre de points du domaine de résolution. Soit le réseau carré suivant :

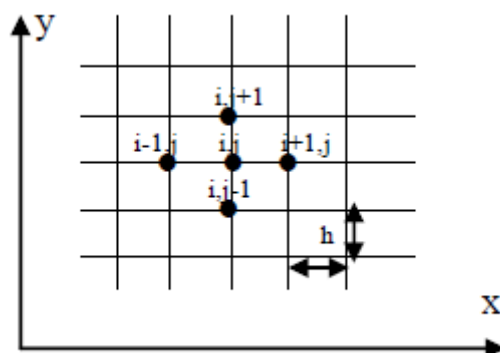


Figure III-1 : maillage type différences finis

Si on applique un développement limité en série de TAYLOR de la fonction à déterminer en chacun des nœuds du maillage, l'approximation des dérivées aux points  $(i, j)$  est :

Ainsi le Laplacien discrétise sera alors :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{i,j} &= \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2h} \\ \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{i,j} &= \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j-1}}{2h} \end{aligned} \right\} \text{III-1}$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_{i,j} &= \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{h^2} \\ \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{i,j} &= \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{h^2} \end{aligned} \right\} \text{III-2}$$

Ainsi Le Laplacien discrétisé sera alors

$$(\Delta A)_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_{i,j} + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{i,j} \text{III-3}$$

D'où :

$$(\Delta A)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j+1} + A_{i,j-1} - 4A_{i,j}}{h^2} \text{III-4}$$

Cette formule est appelée la forme à cinq points.

La forme de cette formule aux différents nœuds du domaine, s'écrit avec le système matriciel suivant:

$$[M][A] = [S] \text{III-5}$$

avec :

[M] :matrice inversible

[A] :matrice des inconnues

[S] :matrice source

Dans le cas des dispositifs à géométries complexes, cette méthode s'adapte difficilement, car elle présente des inconvénients relatifs à la définition des valeurs de l'inconnue sur la frontière du domaine d'étude.[8][9]

### III.3.Méthode d'intégrale de frontière

Cette méthode permet la présentation du domaine tout en limitant la discrétisation à la frontière, cette méthode est mise en œuvre par la méthode directe qui basée sur la loi de Biot et savart ou bien sur la méthode de l'identité de Green. [9][10]

Elle est utilisée dans l'étude des structures de grande dimension, et elle s'adapte aux problèmes à frontière ouvertes (Ex :le vecteur  $\vec{A}=0$  à l'infini), généralement utilisée en magnétique. En revanche elle a comme inconvénient la difficulté de prendre en considération la structure, et elle nécessite un espace mémoire considérable et un temps de calcul long, car le système algébrique issu de cette méthode est à matrice pleine.[10]

### III.4.Méthode des éléments finis

#### III.4.1.Introduction

La méthode des éléments finis est une méthode développée appliquée en premier lieu, en génie Mécanique et Civile, elle est appliquée en Electrotechnique vers 1970, par P.P.SILVESTER et M.V.CHARI.

Elle est basée sur une formulation intégrale du problème aux dérivées partielles et de leurs conditions aux limites.

Cette méthode est utilisée pour les traitements des problèmes à géométrie complexes, et les matériaux dont les propriétés physiques peuvent être non linéaires.

#### III.4.2.Principe de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est un outil numérique de résolution des équations aux dérivées partielles de la physique mathématique.

#### III.4.3.Formulation éléments finis des équations électromagnétiques

Le principe de la méthode des éléments finis est basée sur la substitution à la forme différentielle que représentent les équations aux dérivées partielles et aux conditions aux limites associées d'une formulation intégrale du phénomène à étudier.[10]

Cette formulation intégrale peut être de deux types :

- formulation projective (résidus pondérés)
- formulation vibrationnelle.

### III.4.3.1. Formulation vibrationnelle

Cette formulation nécessite la connaissance au préalable de la fonction d'énergie du système à étudier.

Cette fonctionnelle est déterminée à partir du principe de l'action Hamiltonienne qui stipule l'existence d'une fonctionnelle de type intégrale. [9][22]

Elle est définie par

$$F(A) = \int_{\Omega} L.d\Omega \quad \text{III-6}$$

Avec

$\Omega$ : domaine d'étude.

L: fonction de LAGRANGE déduite de la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie du potentiel du système.

### Cas d'un problème électromagnétique

Dans ce cas la fonction L est donnée par l'expression :

$$L = \int_0^B vBdB - JA \quad \text{III-7}$$

avec :

L: fonction de LAGRANGE .

A: Potentiel vecteur magnétique. [T.m]

J: densité de courant. [A/m<sup>2</sup>]

v: Reluctivité magnétique. [H/m]<sup>-1</sup>

B: induction magnétique. [T]

L'expression de la fonctionnelle de l'énergie est donnée par la fonction suivante :

$$F(A) = \int_{\Omega} \left[ \int_0^B vBdB - JA \right] d\Omega \quad \text{III-8}$$

La résolution du problème variationnelle défini par la fonctionnelle d'énergie  $F(A)$  revient à minimiser cette fonctionnelle, la minimisation est effectuée en utilisant le principe de RAYLEIGH-RITZ.[22]

Qui s'énonce comme suite :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = 0 \quad \text{III-9}$$

Et  $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Ou :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_2} = \dots = \frac{\partial F(A)}{\partial A_n} = 0 \quad \text{III-10}$$

Avec :

$n$ : nombre de nœuds du domaine d'étude.

$A_i$ : est l'inconnu aux nœuds  $i$  du domaine.

#### III.4.3.2. Formulation résidus pondérés

La méthode des résidus pondérés, appelée aussi méthode projective consiste à choisir des fonctions de projection  $\Phi_i$  de façon à minimiser l'intégrale du résidu dans l'équation suivante :

$$\int_{\Omega} R \Phi_i d\Omega = 0 \quad \text{III-11}$$

$$R = L(A) - F \quad \text{III-12}$$

Avec :

$R$ : représente le résidu de l'approximation.

$L(A)$ : opérateur différentiel.

$F$  : fonction définie sur le domaine d'étude  $\Omega$ .

$A$  : l'inconnu du problème.

$\Phi_i$ : fonction de projection.

Les valeurs de  $A$  permettent d'annuler l'intégrale représentant la solution du système algébrique obtenu.

Le choix des fonctions de projection permet de définir plusieurs méthodes, parmi celle-ci, on cite les méthodes suivantes :

- Méthode de collection par points.
- Méthode des moindres carrés.
- Méthode de GALERKINE

La méthode de collocation par points utilise les fonctions de DIRAC comme fonction de pondération (projection). [22]

La méthode de moindre carré utilise la minimisation de la norme quadratique de l'erreur sur l'équation et les conditions aux limites. [22]

Dans ce qui suit, on s'intéressera particulièrement à la méthode de projection de GALERKINE, qui est la plus utilisée en Electrotechnique, puisqu' elle conduit à un système matriciel symétrique.

#### **III.4.3.3. Discrétisation du domaine d'étude**

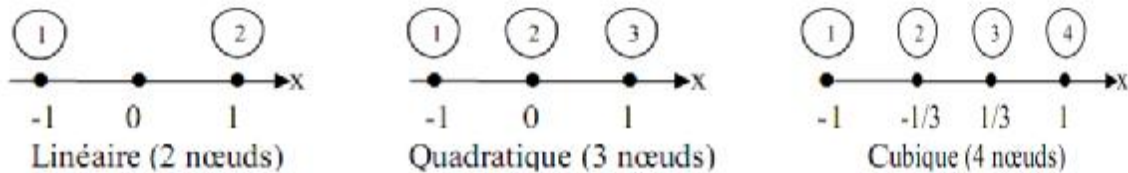
Quand l'équation aux dérivées partielles est transformée en une forme intégrale, on passe à l'étape de discrétisation, qui consiste en la subdivision du domaine en un nombre fini de sous domaine appelé "élément", dont la géométrie est préalablement choisie.

L'approximation de l'inconnu se fait en chaque élément par des fonctions d'interpolation, qui se déterminent en fonction des valeurs de l'inconnu aux nœuds de cet élément. C'est ce qu'on définit par l'interpolation nodale, ce qui est très important dans l'analyse par élément finis

**A) Eléments de références**

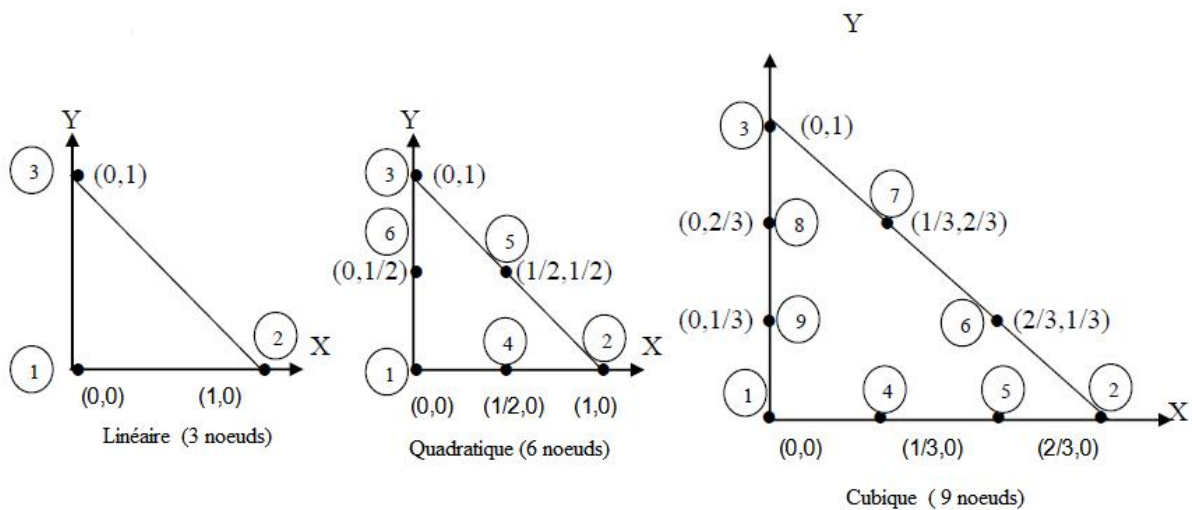
On utilise des éléments de références de manière à simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, et éléments les plus simple sont : le triangle, le rectangle, le tétraèdre et le parallélépipède, aux quels on associe un système de cordonnées normées.[23]

**A-1-Elément à une dimension 1D**

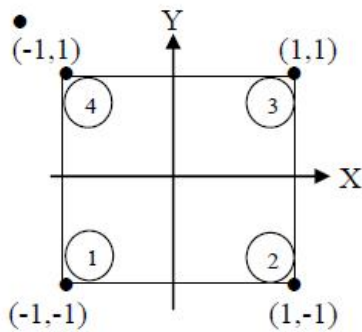


**A-2-Elément à deux dimensions 2D**

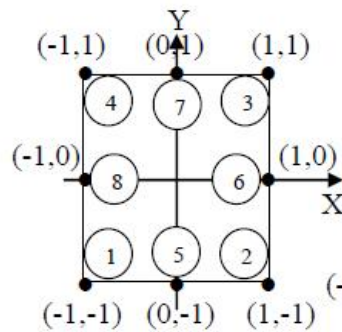
**Eléments triangulaires**



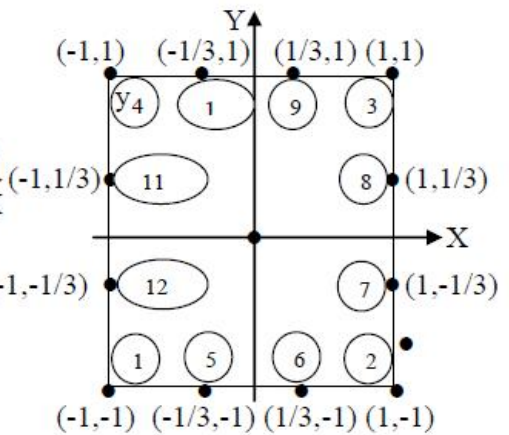
**Eléments carrés**



Linéaire (4 nœuds)

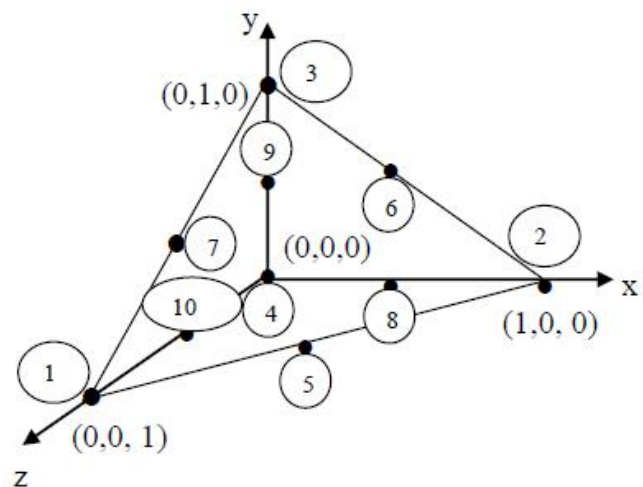
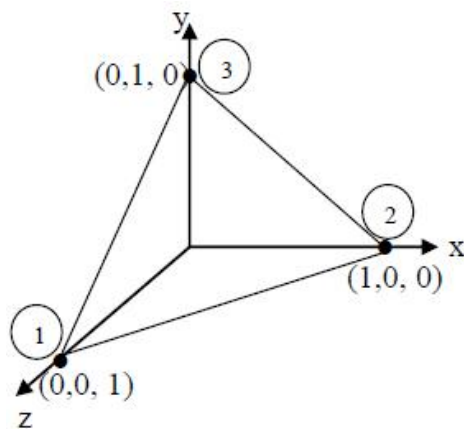


Quadratique (8 nœuds)



Cubique (12 nœuds)

**A-3-Eléments à trois dimensions 3D**



**B)-fonctions d'interpolations**

Les fonctions d'interpolation sont obtenues à partir du triangle de PASCAL, donné ci-dessus :

- 1 ————— ordre 0
- U V ————— ordre 1
- U<sup>2</sup> UV V<sup>2</sup> ————— ordre 2
- U<sup>3</sup> U<sup>2</sup>V UV<sup>2</sup> V<sup>3</sup> ————— ordre 3

**Triangle de PASCAL**

La construction de ces fonctions doit vérifier les conditions suivantes :

**B-1-Principe de l'état complet**

- la fonction doit contenir un terme constant.
- le nombre de termes de la fonction doit être égal au nombre de nœuds de l'élément.

**B-2-Principe de compatibilité**

La fonction doit être continus (c'est-à-dire la première dérivée existe). On peut citer un exemple d'une fonction d'interpolation :

$$A(U, V) = a + bU + cV + dUV + eU^2 + fV^2 \tag{III-13}$$

La base polynômiale sera alors :

$$P = [1 \ U \ V \ UV \ U^2 \ V^2] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} \tag{III-14}$$

**C-Fonction d'approximation sur un élément**

La construction d'une fonction approchée  $U^e(x)$ , avec (e) comme indice relatif à l'élément étudié, différente sur chaque élément par la méthode d'approximation nodale.

Donc la fonction d'approximation aura la forme suivant :

$$U(x) = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_n] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \end{bmatrix} = \Phi \cdot U \tag{III-15}$$

Avec :

$U(x)$  : c'est la fonction d'approximation qui d'identifie à la fonction exacte.

$\Phi_1 \Phi_2 \dots \dots \Phi_n$  : les fonctions de forme de l'élément.

$U_1, U_2, \dots, U_n$  : les variables associées aux nœuds du domaine.

#### IV-5-Méthode de Galerkin

Cette méthode consiste à choisir des fonctions de pondérations identiques aux fonctions de forme. On utilise cette méthode dans des problèmes magnétostatique et magnétodynamique avec l'existence d'une source du courant, formulés en terme de potentiel vecteur  $\vec{A}$ .

##### a- Modèle magnétostatique 2D

##### b- Cas cartésien

On a l'équation magnétostatique suivante :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) = \vec{J}_s \quad \text{III-16}$$

D'Ou :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] = -J_{sz} \quad \text{III-17}$$

Avec :

$\mu = \frac{1}{m}$  : Réductivité magnétique du milieu [H/m].

$\vec{A}$  : Potentiel vecteur magnétique [T.m].

$\vec{J}_{sz}$  : Vecteur de densité source [ $A/m^2$ ].

En utilisant la méthode de Galerkin sur l'équation (IV-17), on aura :

$$\int R_i \Psi_i d\Omega = 0 \quad \text{III-18}$$

Ou :

$$R_i = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathbf{u} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mathbf{u} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] + J_{sz} \quad \text{III-19}$$

On aura :

$$\iint_{\Omega} y_i \left[ - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathbf{u} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \mathbf{u} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] dx dy = \iint_{\Omega} y_i J_{sz} dx dy \quad \text{III-20}$$

En appliquant le théorème de Green nous obtenons :

$$\iint_{\Omega} y_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathbf{n} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mathbf{n} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right\} dx dy = C$$

$$C = - \iint_{\Omega} \mathbf{n} \left( \frac{\partial y_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial y_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) dx dy + \int \left( \mathbf{n} \frac{\partial A_z}{\partial n} y_i \right) d\Gamma \quad \text{III-21}$$

Avec :

$y_i$  : Fonction de forme.

$\Gamma$  : La frontière du domaine  $\Omega$ .

En introduisant ( IV-21 dans (IV-20) on aura :

$$- \iint_{\Omega} \mathbf{n} \left( \frac{\partial y_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial y_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) dx dy + \int \left( \mathbf{n} \frac{\partial A_z}{\partial n} y_i \right) d\Gamma = - \iint_{\Omega} J_{sz} y_i dx dy \quad \text{III-22}$$

$$\Rightarrow \iint_{\Omega} \mathbf{n} \left( \frac{\partial y_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial y_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) dx dy - \int \left( \mathbf{n} \frac{\partial A_z}{\partial n} y_i \right) d\Gamma = \iint_{\Omega} J_{sz} y_i dx dy \quad \text{III-23}$$

Lorsque le problème présente une condition aux limite de type Dirichlet ou Neumann homogène, le terme sur la frontière sera nul.

$$\int \frac{\partial A_z}{\partial n} f_i \cdot d\Gamma = 0$$

Avec :

$$\frac{\partial A_z}{\partial n} = 0$$

D'où l'équation (III-23) devient:

$$\iint_{\Omega} \mathbf{n} \left( \frac{\partial y_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial y_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\Omega} J_{s_z} y_i dx dy \quad \text{III-24}$$

En écriture condensée de (IV-24), on aura :

$$\iint_{\Omega} \vec{\nabla} y_i \cdot \vec{\nabla} A_z dx dy = \iint_{\Omega} \mathbf{m} J_{s_z} y_i dx dy \quad \text{III-25}$$

Avec :

$$v = 1 / \mu$$

Sachant que :

$$A_z(x, y) = \Phi \quad A_z = A_z^T \Phi^T$$

Donc

$$\vec{\nabla} A_z = A_z^T \vec{\nabla} \Phi^T$$

Donc l'équation (IV-25) devient :

On aura :

$$A_z^T \iint_{\Omega} \vec{\nabla} \Phi^T \cdot \vec{\nabla} y_i dx dy = \iint_{\Omega} J_{s_z} y_i dx dy \quad \text{III-26}$$

La méthode de Galerkin  $\implies \Psi_i = \Phi_i$

Et on pose :  $\Phi_i = \Phi^T$

Donc :  $\Psi_i = \Phi_j = \Phi$

Avec :

$\Phi$  : fonction de forme

$\Psi$  : fonction de projection

Donc l'équation (IV-26) devient :

$$[M][A_z^T] = [K] \quad \text{III-27}$$

Avec :

$$M_{i,j} = \iint_{\Omega} \mathbf{n} \nabla \mathbf{f}_i \cdot \nabla \mathbf{f}_j \, dx dy$$

$$K_j = \iint_{\Omega} J_{sz} \mathbf{f}_j \, dx dy$$

$[A_z^T] = [A_1, A_2, \dots]^T$  . Vecteur des inconnues du domaine d'étude.

Pour la résolution de ce système, on utilise la méthode de Gauss-Cholesky quand  $m$  dépend du champ magnétique.

#### Ü Cas axisymétrique

L'équation magnétostatique 2D s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{n}{r} \cdot \frac{\partial(rA_j)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{n}{r} \frac{\partial(rA_j)}{\partial z} \right) = -J_{sj} \quad \text{III-28}$$

En considérant  $A = rA_\phi$ , l'équation (IV-28) devient :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{n}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{n}{r} \frac{\partial A}{\partial z} \right) = -J_{sj} \quad \text{III-29}$$

La formulation intégrale de (IV-29) donne :

$$\iint_{\Omega} \left[ y_i \left( \frac{n}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{n}{r} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right] \cdot dr \cdot dz = - \iint_{\Omega} y_i \cdot J_{sj} \cdot dr \cdot dz \quad \text{III-30}$$

Appliquant le théorème de Green au premier terme de l'équation (IV-30), on obtient :

$$\iint_{\Omega} \mathbf{y}_i \frac{\mathbf{u}}{r} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right) dr.dz = - \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{u}}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla A} \cdot \overrightarrow{\nabla \mathbf{y}_i} dr dz + \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{n}}{r} \frac{\partial A}{\partial n} \mathbf{y}_i d\Gamma \quad \text{III-31}$$

On introduit (IV-31) dans (IV-30) on aura :

$$\iint_{\Omega} \frac{\mathbf{u}}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \mathbf{y}_i} \cdot \overrightarrow{\nabla A} . dr . dz - \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{u}}{r} \frac{\partial A}{\partial n} \mathbf{y}_i . d\Gamma = \iint_{\Omega} \mathbf{y}_i . J_{sj} . dr . dz \quad \text{III-32}$$

Dans le cas de condition aux limites types Dirichlet ou Neumann homogènes qui annule le terme sur la frontière.

On aura :

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0$$

$$\iint_{\Omega} \frac{\mathbf{u}}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \mathbf{y}_i} \cdot \overrightarrow{\nabla A} . dr . dz = \iint_{\Omega} \mathbf{y}_i . J_{sj} . dr . dz \quad \text{III-33}$$

Si en adoptant les mêmes transformations que dans (IV-5-a) à (IV-33), on obtient :

$$A^T \iint_{\Omega} \frac{\mathbf{u}}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \mathbf{f}_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \mathbf{f}_j} . dr . dz = \iint_{\Omega} \mathbf{f}_i . J_{sj} . dr . dz \quad \text{III-34}$$

Donc finalement (IV-34) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[M] [A^T] = [K] \quad \text{III-35}$$

Avec :

$$M_{i,j} = \iint_{\Omega} \frac{\mathbf{u}}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \mathbf{f}_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \mathbf{f}_j} . dr . dz .$$

$$K_j = \iint_{\Omega} \mathbf{f}_j J_{sj} . dr . dz .$$

$$[A] = [A_1, A_{21}, \dots, A_n]^T$$

**b-Modèle magnétodynamique**

L'équation obtenue à partir des équations de Maxwell permettent l'interprétation des problèmes magnétodynamiques avec le terme source :

$$\mathbf{\nabla} \wedge (\mathbf{\nabla} \wedge \mathbf{A}) + \mathcal{S} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}_s \quad \text{III-36}$$

En tenant compte de la condition de la jauge de Coulomb  $\mathbf{\nabla} \wedge \dot{\mathbf{A}} = 0$  qui assure l'unicité de la solution, la nature des caractéristiques magnétique et électrique permettent de définir deux types de modèle magnétodynamique.[22]

- Modèle linéaire.
- Modèle non linéaire.

**b-1-Modèle linéaire**

Si la réductivité magnétique  $\mathbf{u}$  est indépendante du champ  $\dot{\mathbf{H}}$ , et que la conductivité électrique  $\mathcal{S}$  ne dépend pas de la température (c'est qu'une approximation en réalité), le modèle ainsi défini est linéaire, l'équation magnétodynamique (III-36) devient :

$$\mathbf{\nabla} \wedge (\mathbf{\nabla} \wedge \mathbf{A}) + \mathcal{S} \mathbf{m} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{m} \mathbf{J}_s \quad \text{III-37}$$

**Ø Cas cartésien**

L'équation magnétodynamique dans le cas comportant une source est donnée sous l'écriture suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \mathbf{n} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mathbf{n} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right] - j \omega \mathcal{S} A_z = -J_{sz} \quad \text{III-38}$$

La formulation intégrale de (IV-37) est sous la forme suivante :

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathbf{n} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mathbf{n} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - j \omega \mathcal{S} A_z \right) \mathbf{y}_i dx dy = \iint_{\Omega} J_{sz} \mathbf{y}_i dx dy \quad \text{III-39}$$

En appliquant le théorème de Green, qui nous permet d'écrire :

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathbf{n} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mathbf{n} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \mathbf{y}_i dx dy = - \iint_{\Omega} \mathbf{n} \overrightarrow{\nabla A_z} \cdot \overrightarrow{\nabla \mathbf{y}_i} dx dy + \int_{\Gamma} \mathbf{n} \frac{\partial A_z}{\partial n} \mathbf{y}_i d\Gamma \quad \text{III-40}$$

En remplaçant (III-39) dans (III-38) on aura :

$$\iint_{\Omega} \overrightarrow{n} \overrightarrow{\nabla A_z} \overrightarrow{\nabla y_i} dx dy - \int_{\Gamma} \overrightarrow{n} \frac{\partial A_z}{\partial n} y_i d\Gamma + j\omega \iint_{\Omega} \mathbf{s} A_z y_i dx dy = - \iint_{\Omega} J_{sz} y_i dx dy \quad \text{III-41}$$

Dans le cas des conditions aux limites de types Dirichlet ou Neumann homogènes, le terme sur la frontière est nul.

On aura :  $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$

Donc l'équation (IV-40) devient :

$$\iint_{\Omega} \overrightarrow{n} \overrightarrow{\nabla A_z} \overrightarrow{\nabla y_i} dx dy + j\omega \iint_{\Omega} \mathbf{s} A_z y_i dx dy = - \iint_{\Omega} J_{sz} y_i dx dy \quad \text{III-42}$$

Avec la même transformation que (IV-5-a) cette équation devient :

$$A_z^T \iint_{\Omega} \overrightarrow{n} \overrightarrow{\nabla f_i} \overrightarrow{\nabla f_j} dx dy + j\omega A_z^T \iint_{\Omega} \mathbf{s} f_i f_j dx dy = - \iint_{\Omega} J_{sz} f_j dx dy \quad \text{III-43}$$

Sous la forme matricielle elle devient:

$$[A_z^T] [M] + j\omega [A_z^T] [L] = [N] \quad \text{III-44}$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \mathbf{u} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\Omega} \overrightarrow{n} \overrightarrow{\nabla f_i} \overrightarrow{\nabla f_j} dx dy$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \mathbf{s} f_i f_j dx dy.$$

$$N_{ij} = \iint_{\Omega} J_z f_j dx dy.$$

$$A = A_r + j A_i$$

Ou :

$A_r$  : est la partie réelle de A.

$A_i$  : est la partie imaginaire.

**ù Cas axisymétrique**

Dans ce cas la formulation intégrale est donnée sous forme suivante :

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \frac{\mathbf{n}}{r} \mathbf{y}_i dr dz - j\omega \iint_{\Omega} \mathbf{s} A \mathbf{y}_i \frac{dr \cdot dz}{r} = - \iint_{\Omega} \mathbf{y}_i \cdot \mathbf{J}_{sj} dr \cdot dz \quad \text{III-45}$$

Avec :  $A = r A_{\phi}$

L'application du théorème de Green donne :

$$\iint_{\Omega} \overrightarrow{\nabla A} \cdot \overrightarrow{\nabla \mathbf{y}_i} \frac{\mathbf{n}}{r} dr dz - \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{n}}{r} \frac{\partial A}{\partial n} \mathbf{y}_i d\Gamma + j\omega \iint_{\Omega} \mathbf{s} A \mathbf{y}_i \frac{dr \cdot dz}{r} = \iint_{\Omega} \mathbf{y}_i \cdot \mathbf{J}_{sj} dr \cdot dz \quad \text{III-46}$$

Dans le cas des conditions aux limites de types Dirichlet ou Neumann homogènes, le terme sur la frontière est nul.

On aura :  $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$

Donc l'équation (III-45) devient :

$$A^T \iint_{\Omega} \overrightarrow{\nabla f_i} \cdot \overrightarrow{\nabla f_j} \frac{\mathbf{n}}{r} dr dz + j\omega A^T \iint_{\Omega} \mathbf{s} f_i f_j \frac{dr \cdot dz}{r} = \iint_{\Omega} \mathbf{y}_i \cdot \mathbf{J}_{sj} dr \cdot dz \quad \text{III-47}$$

L'écriture sous forme matricielle est la suivante :

$$[A^T] \cdot [M] + j\omega [A^T] \cdot [L] = [N] \quad \text{III-48}$$

Avec :

$$M_{i,j} = \iint_{\Omega} \mathbf{u} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\Omega} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{\nabla f_i} \cdot \overrightarrow{\nabla f_j} dx dy$$

$$L_{i,j} = \iint_{\Omega} \mathbf{s} f_i f_j \frac{dr \cdot dz}{r}$$

$$N_j = \iint_{\Omega} \mathbf{J}_{sj} f_j dr \cdot dz$$

$$A = A_r + j A_i$$

Ou :

$A_r$  : est la partie réelle de A.

$A_i$  : est la partie imaginaire.

### b-2 - Modèles non linéaires

Dans le cas où la réductivité magnétique  $\mathbf{u}$  dépend de l'induction magnétique  $\dot{\mathbf{B}}$ , et la conductivité  $\mathcal{S}$  dépend de la température alors l'équation magnétodynamique (III-36) est non linéaire et l'équation à résoudre sera :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) + \mathcal{S} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}_s \quad \text{III-49}$$

Pour résoudre numériquement cette équation non linéaire, il est nécessaire d'utiliser une discrétisation temporelle par la méthode d'Euler implicite.[23]

### IV-6- Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis

#### a. Les avantages

- Adaptation aux géométries complexes.
- Prise en compte des non linéarités.
- Temps de calcul relativement avantageux.

#### b. Les inconvénients

- La non-prise en considération des domaines infinis.
- Impuissante en présence de singularités dans le domaine d'étude.

### V-7- Force magnétique

C'est la force électromagnétique et le travail mécanique que cette force exerce sur le dispositif, en termes de déplacement ou de déformation.

Pour calculer la force magnétique on peut utiliser les quatre méthodes suivantes :

- La méthode de la force de Lorentz.
- La méthode du tenseur de Maxwell.

- La méthode des travaux virtuels.
- La méthode de la variation de la Co-énergie ou de l'énergie magnétique.

#### IV-7-1-La force déduite à partir de la méthode de l'énergie magnétique totale

Elle est parmi les méthodes les plus utilisées pour le calcul de la force, basée sur la variation de l'énergie provoquée par un déplacement, en maintenant le courant constant. Elle est déterminée par la formule suivante:

$$F_m = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_{\Omega} \left( \int_0^B H dB \right) d\Omega \right] \quad \text{III-50}$$

Avec :

x: la variation spatiale de la coordonnée.

#### IV-7-2- La force déduite à partir de la méthode de la Co-énergie

Pour obtenir la force magnétique par cette méthode, on calcule la dérivée de la Co-énergie magnétique par rapport au déplacement, en maintenant le flux constant.

Elle est déterminée par l'expression suivante :

$$F_{co} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_{\Omega} \left( \int_0^H B dH \right) d\Omega \right] \quad \text{III-51}$$

#### IV-7-3- La force déduite à partir de la méthode des travaux virtuels

Le principe de calcul de la force dans cette méthode consiste à l'utilisation de la méthode des éléments finis.

Un domaine  $\Omega_d$  déformé est subdivisé en sous-domaines  $\Omega_e$ , sur lesquels toutes les intégrales effectuées par rapport à un système de coordonnées locales (u,v,w). [9,22]

Elle est déterminée par l'expression suivante :

$$F = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_v \left( \int_0^H B dH \right) dv \right] \quad \text{III-52}$$

$$F = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_{\Omega_e} \left( \int_0^H B dH \right) d\Omega_e \right] \quad \text{III-53}$$

x: représente la coordonnée liée au déplacement.

Cette méthode présente un avantage, elle s'adapte à la MEF et fournit une bonne précision. [2,22]

#### IV-7-4- La force déduite à partir de la méthode du tenseur de Maxwell

Dans des milieux non parcourus par des courants, les forces et les couples peuvent être calculés par l'application de cette méthode, alors que la méthode des travaux virtuels est basée sur la variation de l'énergie, le tenseur de Maxwell définit les forces directement en terme de champ magnétique.

Elle est déterminée par l'expression suivante :

$$F = \oint_s \left[ \left( \overset{\mathbf{r}}{B}_n \overset{\mathbf{r}}{H}_t \right) \overset{\mathbf{r}}{t} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2m_0} B_n^2 - m_0 H_t^2 \right) \overset{\mathbf{r}}{n} \right] ds \quad \text{III-54}$$

Avec :  $\overset{\mathbf{r}}{B}_n$  : La composante normale de l'induction magnétique.

$\overset{\mathbf{r}}{H}_t$  : La composante tangentielle du champ magnétique.

$\overset{\mathbf{r}}{n}$  : La normale extérieure à la surface d'intégration.

$\overset{\mathbf{r}}{t}$  : Le vecteur unitaire tangent à la surface d'intégration.

S: La surface d'intégration contenant le milieu où la force doit être calculée.

## IV.7.5. la force déduite à partir de la méthode de LORENTZ

La force électromagnétique de LORENTZ, résulte de la coexistence d'une induction magnétique résultante d'une source d'excitation et d'une densité de courant induite dans un milieu conducteur.

L'expression de cette force est la suivante :

$$F = \iiint_v (\mathbf{J} \wedge \mathbf{B}) dv \quad \text{III-55}$$

$(\mathbf{J} \wedge \mathbf{B})$  : Densité de force magnétique, qui est souvent utilisée à la place de la force magnétique.

La force de Lorentz dans le cas axisymétrique 2D :

$$F_r = 2p \iint_s J_j B_z r . dr dz \quad \text{III-56}$$

$$F_z = 2p \iint_s J_j B_r r . dr dz \quad \text{III-57}$$

Pour  $A = (0, A_j, 0)$

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_j)}{\partial z} \quad \text{III-58}$$

$$J_j = -\frac{s}{r} \frac{\partial(rA_j)}{\partial t} \quad \text{III-59}$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(sA_j)}{\partial r} \quad \text{III-60}$$

La force de Lorentz dans le cas cartésienne 2D :

$$F_x = \iint_s J_z B_y . dx dy \quad \text{III-61}$$

$$F_y = -\iint_s J_z B_x . dx dy \quad \text{III-62}$$

Avec :

$$B_z = \frac{\partial A_z}{\partial y} \quad \text{III-63}$$

$$B_z = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \quad \text{III-64}$$

$$J_z = -S \frac{\partial A_z}{\partial t} \quad \text{III-65}$$

### IV.1. Introduction

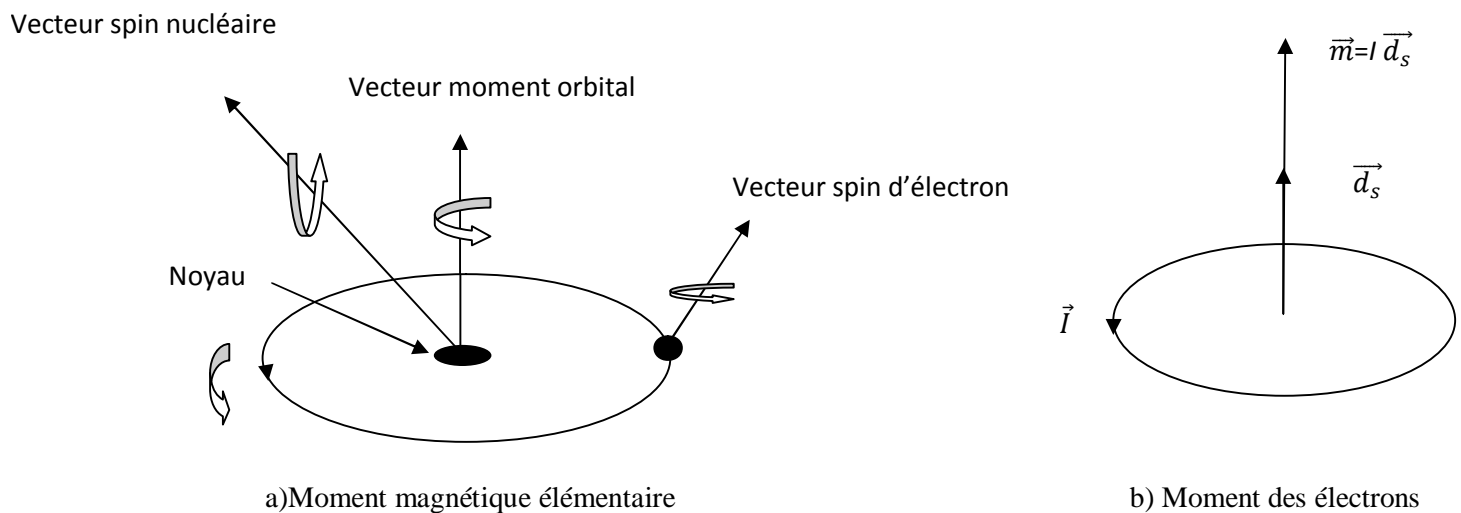
Afin de comprendre le magnétisme en générale et en particulier les substances magnétiques, nous aborderons dans ce chapitre les principales lois physiques et définitions associées à l'étude du magnétisme. Ensuite nous étalerons les matériaux magnétiques et l'importance du matériau ferromagnétique par rapport aux autres.

### IV.2. Magnétisme à l'échelle atomique

Soumis à une induction magnétique, certaines substances se mettent à produire elles mêmes, dans le volume qu'elles occupent et à l'extérieur une induction magnétique. On dit qu'elles s'aimantent ou se polarisent magnétiquement. Cette propriété se manifeste très visiblement dans certains matériaux appelés « matériaux magnétiques ». [15]

### IV.3. Origine de magnétisme

Les propriétés magnétiques d'un matériau sont attribuables au spin des électrons, et à leur mouvement orbital autour du noyau. Figure (IV.1)

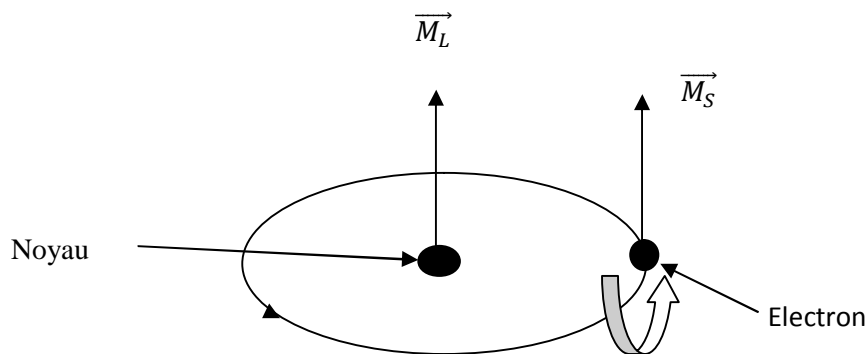


Figure(IV.1)-structure atomique

Les électrons qui tournent sur eux-mêmes (spin) et autour du noyau (orbital) forment de petits pôles magnétiques qui peuvent être simulés par des moments magnétiques engendrés par des boucles élémentaires de courant. [16]

#### IV.4. Moment magnétique atomique

Les moments magnétiques des atomes sont dus à la fois aux mouvements orbitaux des électrons et aux mouvements sur eux-mêmes (figure IV.2)



**Figure(IV.2)-Mouvement orbital des électrons**

Le mouvement orbital de l'électron provoque un moment magnétique orbital  $\vec{M}_L$  qui est défini par la relation :

$$\vec{M}_L = \frac{e}{2m_e} \vec{L}_{tot} \quad \text{IV.1}$$

Avec :

$$\vec{L}_{tot} = \sum_i \vec{L}_i$$

Est le moment cinétique orbital de l'atome. Et  $m_e$  représente respectivement le charge et la masse de l'électron qui sont égale à :

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \quad m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

Le mouvement de l'électron sur lui-même provoque un moment magnétique de spin  $M_s$  qui est défini par l'expression :

$$\vec{M}_s = \frac{e}{m_e} \vec{S}_{tot} \quad \text{IV.2}$$

Avec :

$\vec{S}_{\text{tot}} : \sum_i \vec{s}_i$  : est le moment cinétique de spin de l'atome

Le moment magnétique résultant est la somme des deux moments :

$$\vec{M} = \vec{M}_L + \vec{M}_s$$

$$\vec{M} = -\frac{e}{2m_e} [ \vec{L}_{\text{tot}} + 2\vec{S}_{\text{tot}} ] \quad \text{IV.3}$$

Dans la relation (IV.2), le spin apparait deux fois plus efficace qu'un moment orbital dans la production du moment magnétique.[16]

#### IV.5.L'atome de Bohr

Le modèle proposé par Niels Bohr décrit l'atome la plus simple (hydrogène) comme étant un noyau de charge positive de masse  $m$  et un électron de charge négative de masse  $m'$  qui gravite autour du noyau.

Le moment magnétique atomique résulte des mouvements des électrons qui gravitent autour du noyau dans une trajectoire elliptique et qui en même temps tournent sur eux mêmes.

La rotation de l'électron (- e), charge électrique négative, autour du noyau provoque un moment magnétique dit orbital  $m_l$ .

Dans ce cas l'électron est équivalent à un courant élémentaire  $i$ , et sa trajectoire est assimilée à une spire traversée par ce courant, ce qui génère un moment atomique orbital  $m_l$

$$i = -\frac{e \cdot \omega_l}{2 \cdot \pi} \quad \text{IV.4}$$

$$m_l = -\frac{e \cdot \omega_l}{2} \cdot r^2 \quad \text{IV.5}$$

Avec :

$e$  : est la charge de l'électron, elle vaut  $1,619 \cdot 10^{-19}$  C.

$m$  : est la masse de l'électron, elle vaut  $9,11 \cdot 10^{-31}$  Kg.

Dans son mouvement l'électron possède un moment cinétique appelé moment cinétique orbitale noté  $L$

$$L = m \cdot \omega_l \cdot r^2 \quad \text{IV.6}$$

De l'équation (1) et (2) le moment orbital atomique s'écrit :

$$m_l = -\frac{e \cdot \mathbf{h}}{2 \cdot m} \cdot L \quad \text{IV.7}$$

La quantification du module du moment cinétique orbitale nous donne :

$$L = \mathbf{h} \cdot \mathbf{l} \quad \text{IV.8}$$

Avec :

$$\mathbf{h} = \frac{h}{2 \cdot p} \quad \text{IV.9}$$

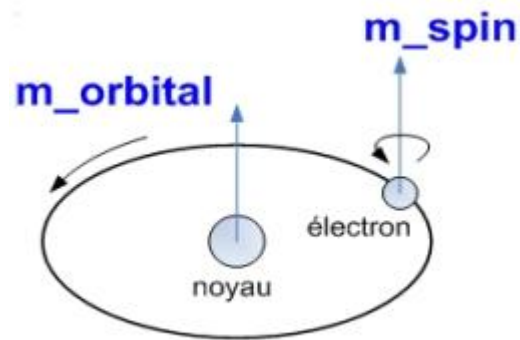
Où  $h$  désigne la constante de Planck et  $\ell$  est un nombre entier qui prend les valeurs (0, 1, 2, 3, ...).

Le moment magnétique orbital est un multiple entier d'un moment unité appelé magnéton de Bohr noté :

$$m_b = \frac{e \cdot \mathbf{h}}{2 \cdot m} = 9,273 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2 \quad \text{IV.10}$$

En plus de la rotation autour du noyau l'électron tourne sur lui-même provoquant un moment magnétique dit de spin  $m_s$ .

$$m_s = -\frac{e \cdot \mathbf{h}}{2 \cdot m} s \quad \text{IV.11}$$



Figure(IV.3)-Moment dipolaire atomique

Dans un atome, ces différents moments magnétiques se composent pour donner le moment magnétique atomique.[15]

#### IV.6.Aimantation et polarisation magnétique

##### IV.6.1. Aimantation [17]

On appelle intensité d'aimantation, la valeur du moment ampérien par unité de volume d'une substance magnétique, elle est obtenue en soumettant le matériau à l'influence d'un champ magnétique, le vecteur d'aimantation est alors donné par la relation

$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{m}_i}{V} \quad \text{IV 12}$$

Elle s'exprime en [A/m].

$m_i$  : représente le moment magnétique ampérien.

Le champ d'excitation  $H$  et l'aimantation  $M$  se superposent pour donner le champ d'induction  $B$ , défini par l'équation :

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}).$$

**IV.6.2.Polarisation magnétiques [17]**

On définit la polarisation magnétique, comme étant la valeur du moment magnétique dipolaire par unité de volume d'une substance magnétique.

La vectrice polarisation est donnée par l'expression :

$$\vec{J} = \frac{\sum \vec{m}_i^c}{V} \quad \text{IV.13}$$

Elle s'exprime en [Tesla].

$m_i^c$  : représente le moment magnétique colombien.

La polarisation et l'aimantation sont liées par la relation

$$\vec{J} = \mu_0 (\vec{M})$$

Le champ d'induction magnétique peut aussi être exprimé par la formule

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J})$$

**IV.7.Susceptibilité et perméabilité magnétique [17]****IV.7.1.Susceptibilité magnétique**

Elle est définie comme étant le rapport entre la polarisation et le champ magnétique, effectivement lorsqu'une substance magnétique est plongée dans un champ magnétique H, elle acquiert une certaine aimantation M tel que :

$$M = \chi \cdot H \quad \text{IV -14}$$

Où le coefficient  $\chi$  désigne la susceptibilité magnétique relative de la substance, elle exprime dans un sens le taux d'aimantation.

**IV.7.2. La perméabilité magnétique**

On appelle perméabilité magnétique absolue

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0 \quad \text{IV.15}$$

la faculté que possède la substance à canaliser le champ magnétique, elle s'exprime en [H/m].

Avec :

$\mu_r$  : est la perméabilité relative, elle est sans unité.

$\mu_0$ : est la perméabilité magnétique du vide, elle vaut  $4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ .

**IV.8. Classification des matériaux d'un point de vue magnétique [18] [19]****IV.8.1. Matériaux diamagnétiques**

Le diamagnétisme est un comportement (propriété) général de la matière, il se traduit par le fait que plongé dans un champ d'excitation magnétique H le matériau acquiert une polarisation proportionnelle à H, elle se traduit par l'équation suivante :

$$J = \mu_0 \cdot \chi \cdot H \quad \text{IV-6}$$

Ou  $\chi$  désigne la susceptibilité diamagnétique qui est une grandeur négative et très faible de l'ordre de  $10^{-5}$ , on ne peut la désigner que dans les substances ne présentant aucun moment magnétique intrinsèque.

Donc on ne qualifie de diamagnétique que les substances pour les quelles ce caractère est dominant, celle-ci présente obligatoirement des sous couches électroniques pleines.

Ce comportement s'explique par le fait que les électrons en mouvement autour du noyau atomique se comporte comme des spires traversées par un courant, qui plongées dans un champ magnétique vont sous l'action de la loi de Lenz généré un flux qui s'oppose à la variation du flux appliqué qui lui a donné naissance.

Malgré la faiblesse du comportement diamagnétique, mais il est très significatif dans les matériaux supra conducteurs qui possèdent une susceptibilité proche de -1

### II.8.2. Matériaux paramagnétiques

Le paramagnétisme est un comportement concernant les substances dont certains atomes caractérisés par des couches électroniques incomplètes qui sont porteurs de moments magnétiques permanents et indépendants les uns des autres qui sont de l'ordre de  $10^{-23} \text{ Am}^2$ .

Le paramagnétisme est caractérisé par une susceptibilité relative positive mais très faible, elle est comprise entre  $10^{-6}$  et  $10^{-3}$ , et elle est inversement proportionnelle à la température.

Sous l'action d'un champ magnétique extérieur les moments magnétiques des atomes d'une substance paramagnétique tendent à s'aligner, mais la polarisation résultante est très faible à cause de l'agitation thermique qui oriente aléatoirement les moments magnétiques de ces atomes.

Pour la majorité des corps paramagnétiques, la susceptibilité relative varie en raison inverse de la température, elle obéit à la loi de Curie suivante :

$$X_r = \frac{C}{T}$$

Où :

C : est la constante de Curie.

T : la température thermodynamique

### II.8.3. Matériaux ferromagnétiques

Les matériaux ferromagnétiques se distinguent par leurs propriétés de posséder une aimantation spontanée permanente en l'absence du champ magnétique extérieur. Ils sont aussi caractérisés par la valeur très élevée que peut prendre cette aimantation.

L'aimantation varie avec la température selon la théorie de Langevin. Ainsi au dessus d'une température donnée  $T_c$ , appelée la température de Curie, tous les matériaux ferromagnétiques deviennent paramagnétiques (figure IV.4) et obéissent à la loi de Curie-Weiss qui est donnée par la formule suivante :

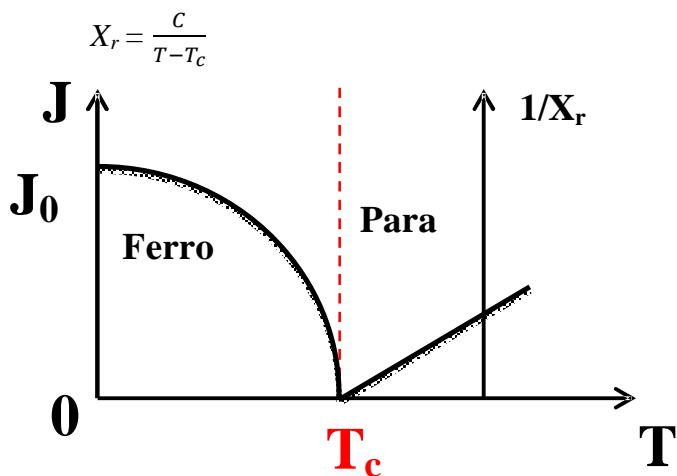


Figure (IV.4) Variation de l'aimantation en fonction de la température

II.9.1. Le ferromagnétisme et matériaux ferromagnétiques [15]

A la différence du paramagnétisme et du diamagnétisme qui sont les propriétés individuelles des atomes, les propriétés ferromagnétique sont liés aux particularités des structures cristallines de ces substances, le ferromagnétisme se définit comme étant la propriété du fer cristallin qui est une structure dont les atomes forment des arrangements réguliers et périodiques ;il est une propriété manifesté par le moment magnétique de spin qui résulte des électrons libres(non couplés) dans les sous couches électroniques incomplètes comme la 3d pour les éléments de transition (Fe ,Ni ,Co,...) et la 4f pour les terres rares tel (Sm ,Pr ,Nd,...)

1 H 1.008																	2 He 4.003																
3 Li 6.941	4 Be 9.012	<b>Elements de transition 3d</b>										5 B 10.81	6 C 12.01	7 N 14.01	8 O 16.00	9 F 19.00	10 Ne 20.18																
11 Na 22.99	12 Mg 24.31	25 Mn 54.94	26 Fe 55.85	27 Co 58.93	28 Ni 58.70	13 Al 26.98	14 Si 28.09	15 P 30.97	16 S 32.06	17 Cl 35.45	18 Ar 39.95	19 K 39.10	20 Ca 40.08	21 Sc 44.96	22 Ti 47.90	23 V 50.94	24 Cr 52.00	25 Mn 54.94	26 Fe 55.85	27 Co 58.93	28 Ni 58.70	29 Cu 63.55	30 Zn 65.38	31 Ga 69.72	32 Ge 72.59	33 As 74.92	34 Se 78.96	35 Br 79.90	36 Kr 39.95				
37 Rb 85.47	38 Sr 87.62	39 Y 88.91	40 Zr 91.22	41 Nb 92.91	42 Mo 95.94	43 Tc (98)	44 Ru 101.1	45 Rh 102.9	46 Pd 106.4	47 Ag 107.9	48 Cd 112.4	49 In 114.8	50 Sn 118.7	51 Sb 121.8	52 Te 127.6	53 I 126.9	54 Xe 131.3	55 Cs 132.9	56 Ba 137.3	57 La 138.9	58 Ce 140.1	59 Pr 140.9	60 Nd 144.2	61 Pm (145)	62 Sm 150.4	63 Eu 152.0	64 Gd 157.3	65 Tb 158.9	66 Dy 162.5	67 Ho 164.9	68 Er 167.3	69 Tm 168.9	70 Yb 173.0
87 Fr (223)	88 Ra (226)	<b>Terres rares</b>														81 Tl 204.4	82 Pb 207.2	83 Bi 209.0	84 Po (209)	85 At (210)	86 Rn (222)												
89 Ac (227)	90 Th 232.0	91 Pa (231)	92 U 238.0	93 Np (237)	94 Pu (244)	95 Am (243)	96 Cm (247)	97 Cf (251)	98 Bk (247)	99 Es (252)	100 Fm (257)	101 Md (258)	102 No (259)																				
<b>Actinides</b>																																	

Figure (IV.5) Tableau de Mendeleïev

### IV.9.2. Le domaine magnétique [20]

Les propriétés ferromagnétiques sont liées aux particularités des structures ordonnées à l'état solide (cristallisation) de ces substances.

La structure cristalline est un arrangement régulier et périodique des atomes. Ces atomes ont un comportement collectif à l'intérieur d'un domaine, leurs moments magnétiques sont fortement couplés.

Beaucoup d'expériences ont été réalisées pour visualiser les frontières de ces domaines, la première à été faite par Bitter qui a utilisé la poudre de fer ( $Fe_3$ ) en solution, ces particules se déposent sur les frontières des domaines qu'on peut observer à la surface des échantillons

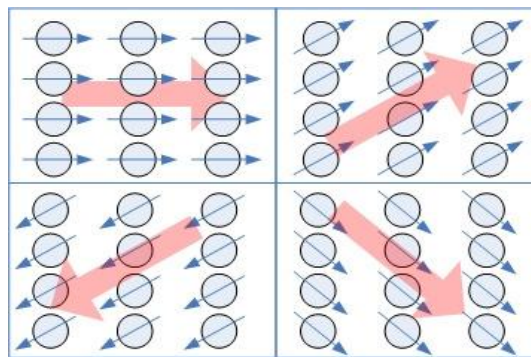


Figure (IV.6) Schéma simplifié de domaines

### IV.10. Bilan énergétique d'un cristal ferromagnétique [21]

Lorsqu'un ferromagnétique est soumis à l'action d'un champ magnétique extérieur, il doit fournir de l'énergie à l'action collective de ce champ appliqué et son propre champ auquel peut s'ajouter des contraintes physiques ou mécaniques, la configuration énergétique des domaines est alors déterminée par l'énergie totale du corps qui correspond aux énergies suivantes :

#### IV.10.1. Énergie d'échange

Une substance ferromagnétique est caractérisée par un arrangement géométrique de ces atomes et un arrangement directionnel des moments, l'arrangement géométrique des atomes peut être détruit lorsque on atteint la température de fusion du matériau, une autre caractéristique se voit dans l'arrangement directionnel des moments atomiques qui est aussi en

fonction de la température, le retour à l'arrangement aléatoire est obtenu pour des températures supérieures à celle de Curie.

Dans un cristal ferromagnétique l'énergie d'échange entre deux atomes voisins impose l'ordre directionnel des moments quantique de spin qui est donné par l'équation :

$$W_{ij} = - 2 \cdot J_{ij} \cdot \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad \text{IV.17}$$

Ou :

$J_{ij}$  : désigne l'intégral d'échange entre les atomes i et j.

$S_i \cdot S_j$  : désigne les moments magnétiques de spins associés aux deux atomes.

#### IV.10.2. Energie magnétostatique

Elle résulte des interactions entre chaque moment atomique et le champ  $\vec{B}_i$  crée par les atomes voisins, où est plongé un moment  $m_i$ , l'expression de son énergie potentielle magnétostatique est donnée par la loi d'aimantation statique :

$$\vec{U}_i = - \vec{m}_i \cdot \vec{B}_i \quad \text{IV.18}$$

#### II.10.3. Energie d'anisotropie

L'énergie d'anisotropie magnéto-cristalline provient de l'interaction électrostatique entre les orbitales des électrons responsables du magnétisme de l'atome et du champ électrique cristallin.

L'aimantation ferromagnétique dépend de cette énergie ,en effet lorsqu'on augmente le champ d'excitation H ,les domaines qui se trouvent dans le même sens que H s'agrandissent au détriment des autres domaines par le déplacement des parois de Bloch ,si l'augmentation de H persiste alors c'est le vecteur aimantation qui subira une modification, ce qui augmente le cycle d'hystérésis et provoque ainsi un échauffement qui se traduit par les pertes magnétiques.

**IV.10.4. Energie magnétostrictive**

C'est une énergie due essentiellement aux déformations et aux contraintes que les domaines exercent les uns sur les autres, cela résulte du couplage magnéto-mécanique et autres effets magnéto-élastique, le cristal peut s'allonger ou se contracter, selon la direction de la polarisation par rapport à la déformation.

Si la polarisation et la déformation sont de même sens, alors il y aurait allongement du cristal, mais s'ils sont de sens opposés alors il y aurait contraction.

D'autres effets magnéto-élastiques peuvent également apparaître dans un matériau, ce sont des déformations libres qui donnent lieu à des allongements spontanés, les causes sont d'origines divers (contraintes résiduelles de fabrication, contraintes thermiques,...).

**IV.10.5. Expression phénoménologie de l'énergie d'anisotropie**

Toutes les directions équivalentes d'un cristal doivent avoir la même énergie interne. Aussi les expressions analytiques rendent compte de l'énergie d'anisotropie dépendent nécessairement du système cristallin auquel appartient le matériau magnétique considéré.

**Cas d'un cristal cubique :**

Son énergie d'anisotropie est donnée par :

$$W_{an} = k_0 + k_1 (\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2) + k_2 (\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2) + \dots \quad \text{IV.19}$$

Où :

$\alpha_0, \alpha_1$  et  $\alpha_3$  : cosinus directeur qui caractérisent la position du vecteur polarisation spontanée par rapport aux axes cristallins de référence.

$k_0, k_1$  et  $k_2$  : représente des constantes d'anisotropie en  $[J/m^3]$

**IV.11. Cycle d'hystérésis et courbe de première aimantation [16]**

Le matériau est initialement démagnétisé (pas d'aimantation). On fait progressivement croître le champ d'excitation dans lequel est plongé le matériau. La courbe de la figure (IV.8) représente l'induction  $B$ . On distingue trois zones : la première, linéaire, puis le coude de saturation et la zone de saturation.

A partir d'un point  $(H, B)$  de la courbe de première aimantation, on diminue le champ  $H$ , l'induction  $B$  ne repasse pas sur la même courbe. En conséquence,  $B$  nulle ne correspond plus à une valeur nulle de  $H$ . Il subsiste une induction rémanente  $B_r$  (l'induction qui demeure après la disparition du champ).

Le champ d'excitation doit s'inverser pour annuler  $B$ , c'est le champ coercitif  $H_c$  (le champ à appliquer pour annuler l'induction).

L'induction maximale est l'induction de saturation

On assiste à un phénomène irréversible car les domaines de Weiss sont bouleversés.

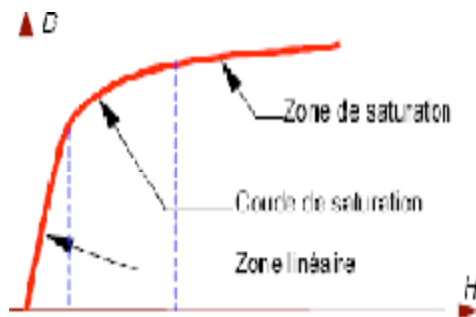


Figure (IV.8)

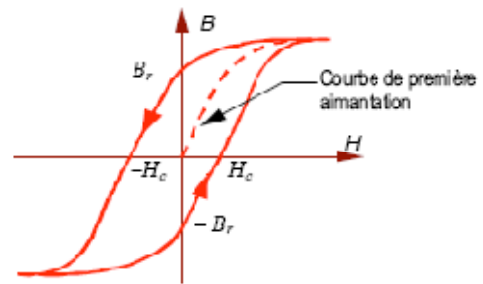
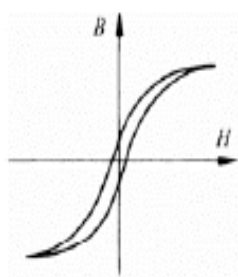
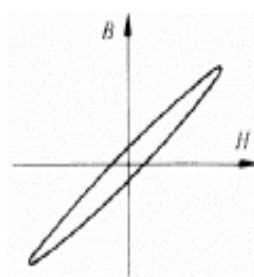


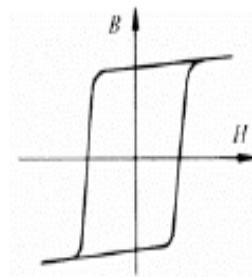
Figure (IV.9)



Permalloy (Fe-Ni)

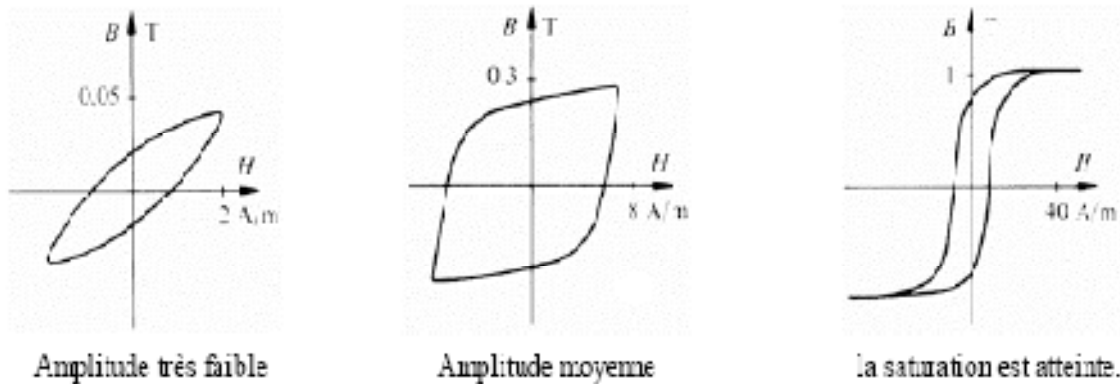


Isoperm (Fe-Ni)



Alnico (Fe - Ni - Cu - Co)

Figure (IV.10) Cycles d'hystérésis de quelques matériaux ferromagnétiques



**Figure (IV. 11) Cycles d'hystérésis du même matériau pour différentes amplitudes de l'induction**

#### IV.12. Classification des matériaux ferromagnétiques [14]

D'après les observations faites sur les cycles hystérésis on distingue deux types de matériaux :

##### IV.12.1. Matériaux ferromagnétiques doux

Ceux sont des matériaux à cycle hystérésis très mince, aimantation rémanente très faibles, les matériaux présentant ces caractéristiques sont le fer, le nickel, le cobalt et leurs alliages.

Ces matériaux à l'état pur n'offrent pas un grand intérêt à leurs exploitations, souvent on fait recours à leurs alliages ou bien on leur ajoute des additifs comme le silicium.

Ils s'aimantent et se désaimantent facilement, on les utilise le plus souvent dans les applications où l'on cherche à maximiser le flux.

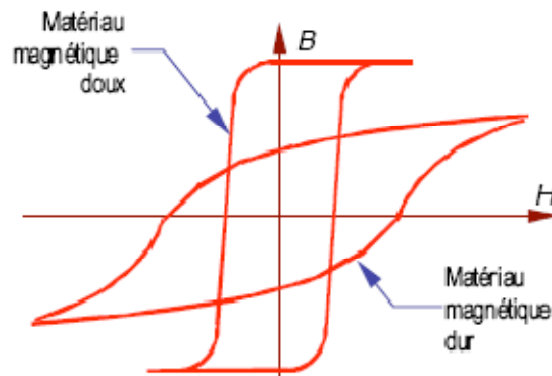
Applications : les transformateurs, inductances, électroaimants, et les relais de protection.

Les matériaux typiques : Fe-Si, Fe-Ni, Fe-Co et les ferrites doux.

##### IV.12.2. Matériaux ferromagnétiques durs :

Ceux sont des matériaux à large cycle hystérésis caractérisés par une aimantation rémanente, ils sont destinés en générale à la fabrication des aimants permanents utilisés dans les machines électriques tournantes, les hauts parleurs, les supports d'enregistrements bandes, disques magnétiques et moteurs génératrices.....ets.

Les matériaux typiques : alliages alnico, ferrites durs, platine cobalt.



Figure(IV.12) Matériaux ferromagnétiques doux et durs

### IV.13. Les alliages magnétiques [21] [22]

La quasi-totalité des matériaux magnétiques utilisés en électrotechnique sont à base de Fer, c'est pour ces propriétés magnétiques exceptionnelles que son utilisation est indispensables dans divers domaines.

Mais le Fer à lui seule représente beaucoup d'inconvénients, chose qui impose l'ajout d'autres matériaux en vue d'améliorer ces propriétés magnétiques et physiques et surtout métallurgiques.

#### IV.13.1. Les alliages Fe-Ni

Ils constituent une grande famille des alliages magnétiques doux, grâce à leurs constantes électromagnétiques ( $K_1, \lambda_{100}, \lambda_{111}$ ) favorable à de multiples applications dans le domaine électromagnétique où le rendement est primordiale devant ces caractéristiques.

Ces alliages doivent leurs performances élevés à leurs structures cubiques à faces centrés (cfc) qui apparaissent dès l'ajout de 25-30% de Ni, cette configuration reste stable dans toute la gamme classique de traitement thermique et elle est plus facile à laminier jusqu'à à de très faible épaisseur ( $25\mu\text{m}$ ).

Ses applications sont très variées allant de l'électrotechnique miniature aux transformateurs de signaux en passant par les relais haute sensibilité et les blindages à fortes atténuations.

#### IV.13.2. Les alliages Fe-Co

Pour répondre à la miniaturisation et la diminution de l'encombrement dans les systèmes électromagnétiques demeure plus que jamais d'actualité, les alliages Fe-Co offrent une grande possibilité dans ce sens en effet dans de nombreux domaines comme l'aéronautique, le spatial, le ferroviaire.

L'utilisation de Fe-Co diminue considérablement le poids des dispositifs électromagnétiques, un impacte direct sur la réduction de l'énergie stocké et une augmentation de l'autonomie d'énergie.

Les performances acquises lors de l'ajout du cobalt sont multiple, on peut citer :

- L'augmentation de l'aimantation à saturation, elle atteint 2,4 T a 20°C.
- Pour 35% en poids de Co permet une réduction considérable dans le volume et le poids des machines électriques.
- Une croissance significative de magnétostriction apparente a saturation exploité dans un fonctionnement en capteur.
- Une température de Curie très élevé, qui avoisine 1040°C avec 94% de Co, possibilité d'usage dans les milieux a très haute température.

#### IV.13.3. Les alliages Fe-Si

L'addition de silicium au fer pur améliore certaines propriétés magnétiques selon le taux de silicium. Les avantages apportent par le Si dans le Fer

- L'augmentation de la résistivité électrique  $\rho$  et par conséquent la diminution des pertes par courants de Foucault.
- Une augmentation de la perméabilité magnétique.
- Une diminution du champ coercitif ce qu'induit une diminution des pertes par hystérésis.
- L'adaptation pour l'utilisation en hautes fréquences.

**IV.13.4.Domaine d'utilisation [22]**

Le fer-silicium est comme un circuit magnétique dans un régime alternatif sous forme de circuit feuillète. A cet effet, il faut assurer une bonne isolation entre les tôles et un bon facteur de remplissage

Les deux principales utilisations des tôles fe-si sont :

**IV.13.4.1.Les transformateurs**

La direction de l'induction B dans les transformateurs est fixe en chaque point sauf au niveau des coins ou elle est tournante. Sa variation temporelle est du type sinusoïdal.

Les tôles a grains orientes (GO) sont les mieux adaptes pour la construction les transformateurs.

**IV.13.4.2.Les machines tournantes « moteurs, générateurs »**

Le tôles fe-si a grains orientes ne représente aucun intérêt pour les moteurs. Puisque l'induction est tournante dans les machines c'est-à-dire que l'induction dans le fonctionnement de la machine occupe en effet toutes les directions. Dans ce cas c'est les tôles a grain non oriente (GNO) qui sont les plus adapte lors de construction de ces machines.

**IV.14.Pertes magnétiques [14] [24]**

Les pertes magnétiques sont composées de trios termes :

- Les pertes par l'hystérésis,
- Les pertes par courant de Foucault (pertes dynamiques),
- Les pertes supplémentaires.

La relation entre les trois types de pertes est

$$P_{\text{fer}} = P_h + P_f + P_{\text{sup}} \quad \text{IV.20}$$

$P_h$  : Pertes par hystérésis [J].

$P_f$  : Pertes par courant de Foucault [J].

$P_{\text{sup}}$  : Pertes supplémentaires [J].

#### IV.14.1. Pertes par courant de Foucault $P_{\text{CF}}$

Les matériaux ferromagnétiques ont souvent des propriétés conductrices de courant électrique, en présence d'un flux variable, ces matériaux sont le siège de courants induits qui circulent dans la masse de ces matériaux. L'effet joule dissipe l'énergie sous forme de chaleur appelée «pertes classiques par courants induits ».

Ces pertes sont proportionnelles au carré de la fréquence, elles peuvent être calculées en connaissant la nature du matériau, ses dimensions, sa résistivité électrique  $\rho$  ou bien sa conductivité électrique.

Ces pertes sont dissipées par effet joule sous forme de chaleur appelée classiques par courant induit :

$$P_{\text{CF}} = \frac{K.e^2.f^2.B^2}{\rho} \quad \text{IV.21}$$

$e$  : L'épaisseur du ferromagnétique[m].

$f$  : Fréquence du réseau [Hz].

$\rho$  : La résistivité électrique [ $\Omega \cdot \text{m}$ ].

$K$  : Le coefficient de Steinmetz ; avec  $5 \cdot 10^{-5} < K < 4 \cdot 10^{-4}$  et l'induction est  $0,2\text{T} < B < 1,5\text{T}$  pour des fréquences  $f < 100\text{Hz}$ .

#### IV.14.2. Les pertes par Hystérésis

Les pertes sont dues au travail des forces de freinage agissant sur les parois de Bloch en mouvement durant les processus d'aimantation et de désaimantation, elles correspondent au travail nécessaire parcourus complètement, la boucle d'hystérésis complète.

La loi selon Steinmetz est

$$P = K \cdot f \cdot B \cdot M^n \quad \text{IV.22}$$

Avec  $n = 2$  pour les tôles Fe-Si.

\* $n = 1,6$  pour les tôles fer ordinaires.

$f$  : Fréquence du réseau [Hz],  $f < 100\text{Hz}$ .

$B_M$  : l'induction de crête [T],  $0,2 < B < 1,5 \text{ T}$ .

$K$  : Le coefficient de Steinmetz,  $5 \cdot 10^{-5} < K < 4 \cdot 10^{-2}$ , il varie selon le pourcentage d'alliage et la nature du matériau.

#### IV.14.3. Les pertes supplémentaires ou par excès

Les pertes supplémentaires peuvent être considérées comme des pertes résiduelles ou anormales dues au non sinusoidalité de l'induction  $B$ , plus les pertes par trainage dues au retard de l'induction par rapport au champ appliqué. Les pertes supplémentaires sont obtenues par la différence entre les pertes dynamiques et les pertes par courant de Foucault:

$$P_{dy} = P_{fer} - P_h$$

$$P_{dy} > P_{CF}$$

Ø Si l'induction est sinusoidale :  $P_{dy} = \eta \cdot P_{CF}$ , avec  $\eta$  : coefficient d'anomalie des pertes.

Ø Si l'induction est non sinusoidale :  $P_{dy} = \eta(F/F_s)^2 \cdot P_{CF}$ .

$F$  : Le facteur de forme de l'induction non sinusoidale,

$F_s$  : Le facteur de forme de l'induction sinusoidale,

$\eta$ : Coefficient d'anomalie des pertes,

Ce ci conduit à une approximation des pertes supplémentaires, selon Bertotti pour une induction sinusoidale donnée par :

$$P_{sup} = K_{sup}(B_n \cdot F)^{3/2} \quad \text{IV.23}$$

$K_{sup}$  : Constante supplémentaire.

### IV.15. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons cités les différentes notions physique fondamentale sur les matériaux magnétique, de l'origine du magnétique et ces pertes, ces notions sont nécessaires pour comprendre l'intérêt l'utilisation des matériaux magnétiques dans la conception des actionneurs électromagnétiques.

### V.1. Introduction

Dans ce chapitre on se propose d'étudier un moteur linéaire asynchrone, l'étude concernera une modélisation et le calcul de la force électromagnétique.

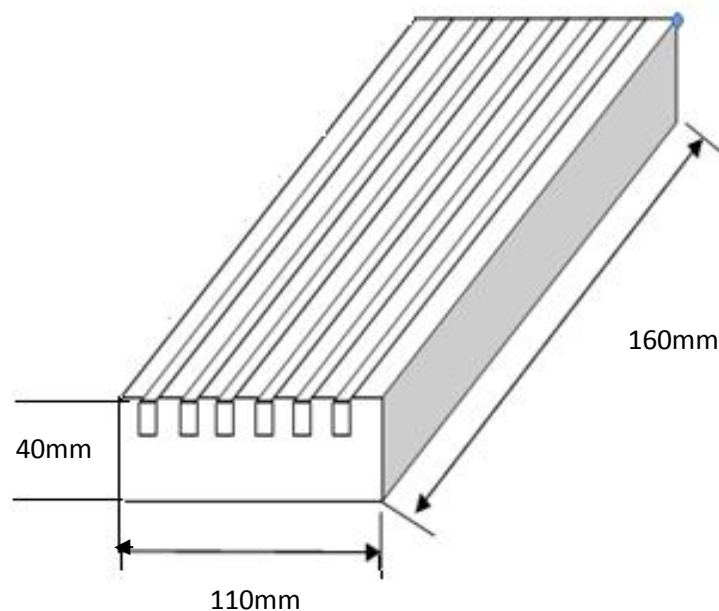
Pour calculer la force engendrée par la machine, nous avons opté pour la méthode de Lorentz, qui est choisie parmi plusieurs méthodes. Celle-ci est évaluée dans l'induit en fonction de plusieurs paramètres « nombre d'encoche, le choix du matériau de l'induit, le courant induit et la perméabilité magnétique de l'inducteur ».

Pour un bon calcul est un calcul de précision, il est nécessaire d'avoir un outil d'informatique très performant diminuant le temps de calcul et une grande précision, le logiciel PDETOOL sous l'environnement MATLAB est un bon outil à utiliser pour répondre aux exigences souhaitées.

### V.2. Description de la machine

La machine réalisée est une machine compose d'un inducteur qui est fabrique par un compactage de tôles magnétique à grains non oriente en fer-silicium, et un induit sous forme d'un tube en aluminium.

La figure(V.1) illustre la geometrie de la machine réalisée :



**Figure (V.1) : la géométrie de la machine**

**V.2.1. Caractéristiques géométriques pour 06 encoches**

Épaisseur de l'entrefer :  $e = 3$  [mm]

Épaisseur de l'induit = 1 [mm]

Nombre de spires par phase :  $N = 140$

Largeur de l'encoche :  $b_{en} = 20$  [mm]

Profondeur de l'encoche :  $h_{en} = 7$  [mm]

Largeur de la dent :  $b_z = 5$  [mm]

Profondeur de la dent :  $h_z = 7$  [mm]

Longueur de la machine :  $L = 160$  [mm]

Hauteur de la culasse :  $h = 40$  [mm]

Diamètre du conducteur (cuivre) :  $d = 1.6$  [m]

Pas dentaire :  $t = \frac{L}{Z} = 25$  [mm]

Pas polaire :  $\tau = \frac{Z}{2P} = 6$

Nombre d'encoche par pole est par phase :  $q_1 = \frac{Z}{2P \cdot m} = 1$

Nombre de spire d'une voie parallèle :  $W_1 = \frac{p \cdot q_1 \cdot U_{en}}{a_1} = 140$

**V.2.2. Caractéristiques physiques**

**Air:** Conductivité électrique  $\sigma = 0$

Perméabilité magnétique relative  $\mu_r = 1$  [H /m]

Densité de courant  $J_m = 0$

**Inducteur (Cuivre) :**

Conductivité électrique  $\sigma = 0$

Perméabilité magnétique relative  $\mu_r = 1$  [H /m]

Densité de courant  $J_m = 7.10^6$  [A/mm]

**Induit** (Aluminium) :

Conductivité électrique  $\sigma = 3,5.10^7$  [ $\Omega.m$ ]<sup>-1</sup>

Perméabilité magnétique relative  $\mu_r = 1$  [H /m]

Densité de courant  $J_m = 0$

**Culasse** (ferromagnétique) :

Conductivité électrique  $\sigma = 3,5.10^7$  [ $\Omega.m$ ]<sup>-1</sup>

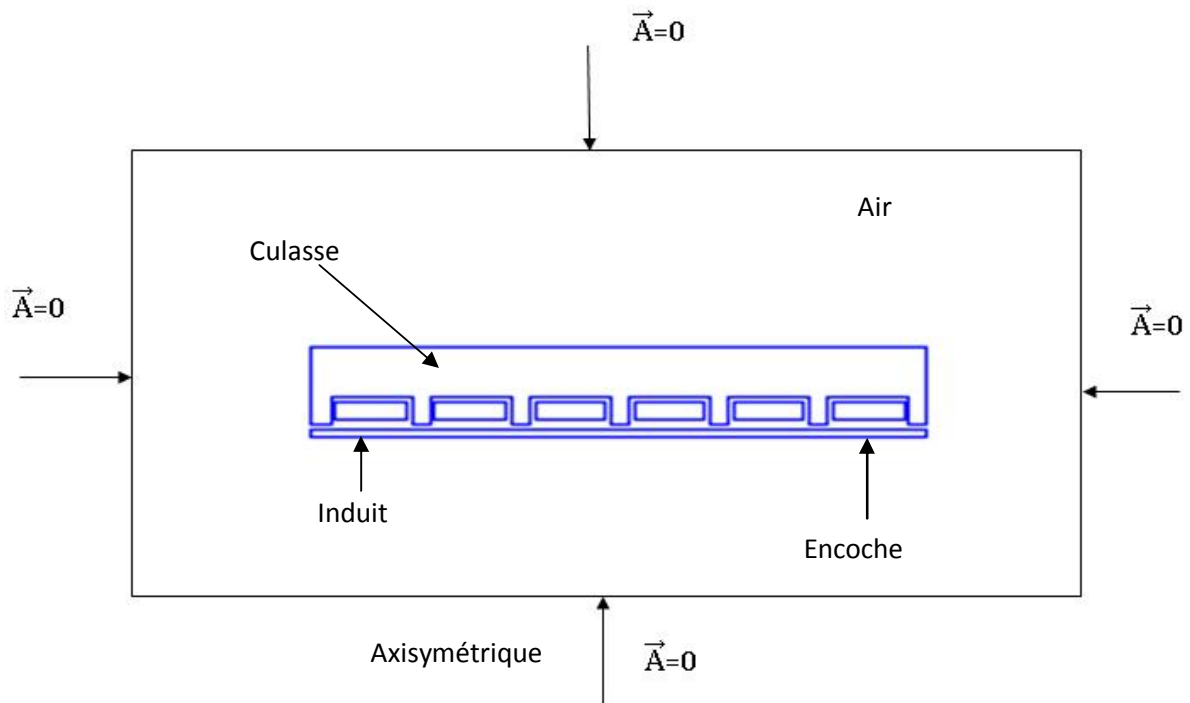
Perméabilité magnétique relative  $\mu_r = 1500$  [H /m]

Densité de courant  $J_m = 0$

**V.3. Domaine de résolution et conditions aux limites**

**V. 3.1 Conditions aux limites**

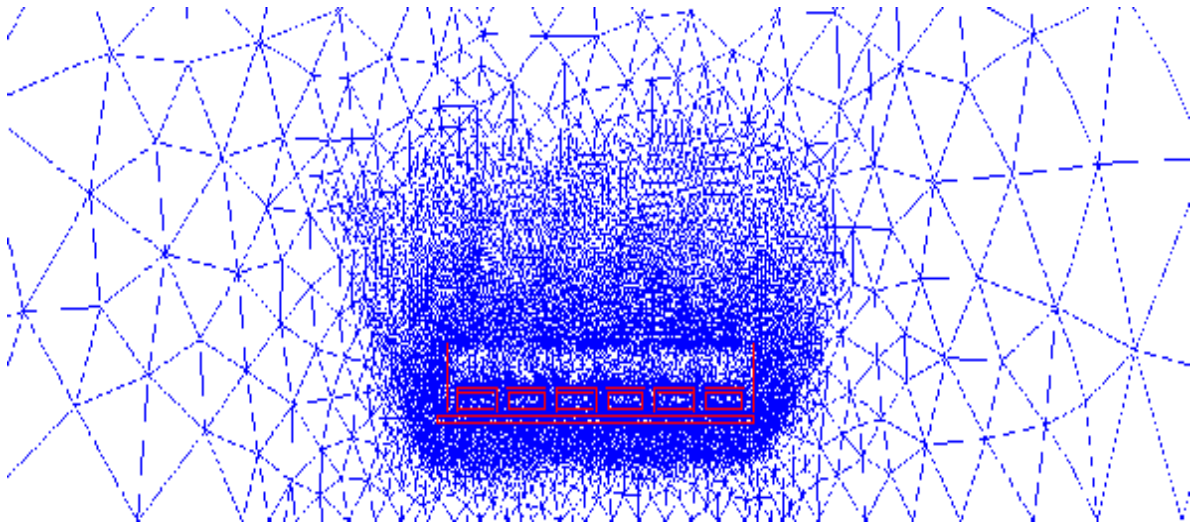
On impose des conditions aux limites sur toutes les frontières du domaine de résolutions du dispositif de type Dirichlet, comme indique sur la figure (V.2).



**Figure V.2 : Domaine de résolution et conditions aux limites**

### V. 3.2. Maillage du domaine d'études

pour le maillage du domaine est constitué d'éléments triangulaires du 1<sup>er</sup> ordre.



### V.4. Formes différentielles associées aux différentes régions du domaine d'étude

Chacune des régions du domaine à étudier est régie par une équation aux dérivées partielles associée à cette région, que nous citerons ci-dessous :

**Air :**

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( v_{\text{air}} \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_{\phi})}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{\text{air}} \frac{1}{r} \frac{\partial(A_{\phi})}{\partial z} \right) \right] = 0$$

**Inducteur:**

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( v_{\text{ind}} \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_{\phi})}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{\text{ind}} \frac{1}{r} \frac{\partial(A_{\phi})}{\partial z} \right) + \left( \sigma \frac{1}{r} \frac{\partial(A_{\phi})}{\partial t} \right) \right] = J_{\text{sp}}$$

**Induit :**

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( v_{\text{induit}} \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_{\phi})}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{\text{induit}} \frac{1}{r} \frac{\partial(A_{\phi})}{\partial z} \right) \right] = 0$$

**Culasse :**

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( v_{\text{cul}} \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_{\phi})}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{\text{cul}} \frac{1}{r} \frac{\partial(A_{\phi})}{\partial z} \right) \right] = 0$$

Avec:

$$v = \frac{1}{\mu} : \text{réductivité magnétique du milieu} \quad [\text{H/m}]^{-1}$$

$\nu_{\text{air}}$ : réductivité magnétique de l'air	$[\text{H/m}]^{-1}$
$\nu_{\text{induit}}$ : réductivité magnétique de l'induit	$[\text{H/m}]^{-1}$
$\nu_{\text{ind}}$ : réductivité magnétique de l'inducteur	$[\text{H/m}]^{-1}$
$\nu_{\text{cul}}$ : réductivité magnétique de l'inducteur	$[\text{H/m}]^{-1}$
A : potentiel vecteur magnetique	$[\text{H/m}]^{-1}$
$J_{\text{sp}}$ : vecteur de densite électrique	$[\text{A/m}^2]$

### V.5. Les dimensions de la machine

#### V.5.1. Les dimensions de l'encoche

La longueur  $L_{\text{en}} = 20 \text{ mm}$

La hauteur de l'encoche  $h_{\text{en}} = 5 \text{ mm}$

#### V.5.2. Les dimensions de la dent

La longueur de la dent :  $L_z = 5 \text{ mm}$

La hauteur de la dent  $h_z = 7 \text{ mm}$

#### V.5.3. Le nombre d'encoches Z

Le nombre d'encoches peut se calculer à partir de la longueur de la machine divisé sur le pas dentaire.

Le pas dentaire est égal à  $L_z + L_{\text{en}}$

Le nombre d'encoche est donc :

$$Z = L/t$$

#### V.5.4. La surface de l'encoche

$$S_{\text{en}} = L_{\text{en}} * h_{\text{en}}$$

**V.5.5. Le diamètre du conducteur avec isolation**

Le diamètre du conducteur utilisé est :

$$d_{\text{con}} = 1.06 \text{ mm}$$

**V.5.6. Le nombre de conducteur par encoche  $U_{\text{en}}$** 

Le nombre de conducteurs peut se calculer :

Selon la hauteur on aura :

$$N_1 = \text{hen} / d_{\text{con}}$$

Sur la largeur

$$N_2 = \text{Len} / d_{\text{con}}$$

$$U_{\text{en}} = N_1 * N_2$$

**V.5.7. La section du cuivre dans l'encoche**

$$S_{\text{cui}} = S_{\text{nu}} * U_{\text{en}}$$

$S_{\text{nu}}$  : section d'un conducteur nu.

**V.6. Les résultats de calcul empirique**

Le pas dentaire :

$$t = \frac{p * D}{Z} \approx \frac{L}{Z}$$

Le pas polaire :

$$\tau = \frac{Z}{2p}$$

Nombre d'encoches par pôle et par phase:

$$q_1 = \frac{Z_1}{2p * m}$$

Le nombre de spires d'une voie parallèle :

$$W_1 = \frac{P \cdot q_1 \cdot U_{en1}}{a_1}$$

Le flux magnétique :

$$\Phi = \frac{E_1}{4 \cdot k_f \cdot f_1 \cdot W_1 \cdot K_{en1}}$$

$K_{d1}$  : Coefficient de distribution

$$K_{dn} = \frac{\sin\left(n \frac{a}{2}\right)}{q_1 \sin\left(n \frac{a}{2q_1}\right)} \Rightarrow K_{d1} = \frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{q_1 \sin\left(\frac{a}{2q_1}\right)}$$

$a$  : Zone de phase (angle mécanique)

$$a = q_1 \cdot g$$

$g$  : Angle électrique

$$g = p \frac{360}{Z_1}$$

$$a = q_1 \cdot g$$

$$K_{d1} = \frac{\sin\left(\frac{30}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{30}{4}\right)}$$

$$y_1 = \frac{Z_1}{2p} \pm e$$

$t$  : Pas polaire

$$t = \frac{Z_1}{2p}$$

**V.6.1. Calcul de l'induction magnétique dans l'entrefer**

Le calcul de l'induction magnétique se fait par l'équation suivante :

$$B = \Phi/S$$

**V.6.2. Calcul de l'induction magnétique dans les dents**

L'induction magnétique se calcul par la relation suivante

$$B_z = \frac{B_\delta * t_1}{K_{fer} * b_z}$$

**V.6.3. Calcul de l'induction magnétique dans le dos**

Le champ magnétique se calcul par la relation suivante :

$$B_c = \frac{0.5 * \tau * \alpha_i * B_\delta * L_1}{K_{fer} * h_c}$$

Avec :

$\alpha_i = 0,64$  : est le coefficient de recouvrement virtuelle.

$\tau$  : est le pas polaire en encoche par phase.

$t_1$  : est le pas dentaire.

$h_c$  : est la hauteur du dos statorique.

$K_{fer}$  : est le coefficient de remplissage du noyau du stator.

**V.7. Les résultats du calcul empirique**

La force électromotrice de l'inducteur	$E = 32$
Le nombre d'encoches	$Z = 06.$
Le pas dentaire	$L_d = 25 \text{ mm.}$
La surface d'une encoche	$S_{en} = 140 \text{ mm}^2.$
Le nombre de conducteur par encoche	70.
Le pas polaire	$\tau = 80 \text{ mm.}$

Le nombre d'encoche par pole et par phase	$q = 1.$
Le nombre de spire par vois parallèle	$W = 140.$
Le flux sous un pole	$\Phi = 3,70 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}.$
Le coefficient de distribution	$K_{en1} = 0,96.$
L'induction dans l'entrefer	$B_{\delta} = 0,038 \text{ T}.$
L'induction dans le dos de la machine	$B_c = 0.63 \text{ T}$
L'induction dans une dent de la machine	$B_z = 0.2 \text{ T}$

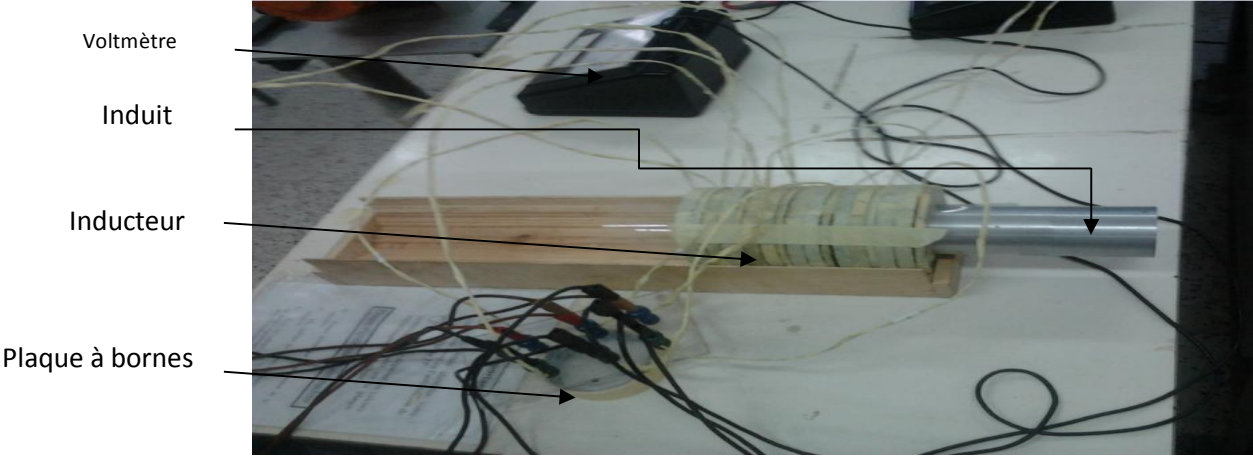
### V.8.materiaux utilises pour la realisation de la machine

- a- Les toles ferrromagnetique** : les deux cornes utilisees sont disponible au laboratoire Q/ETH, ces cornes ont le meme diametre exterieur « 110mm », et la meme epaisseur « 0.5mm » et deux diametre interieurs differents, une 70mm et l'autre 63mm usinees au niveau du Hall technologique de Oeud-aissi .
- b- Le tube d'aluminium** : il est fait au niveau du Hall technologique de Oeud-aissi, il est de 175mm de longueur, et d'un diametre interieur de 62mm
- c- Fils de cuivre** : sont disponible au laboratoire Q/ETH de diametre 1.06mm avec isolation.
- d- Le gabarit du bois** :disponible au laboratoir Q/ETH

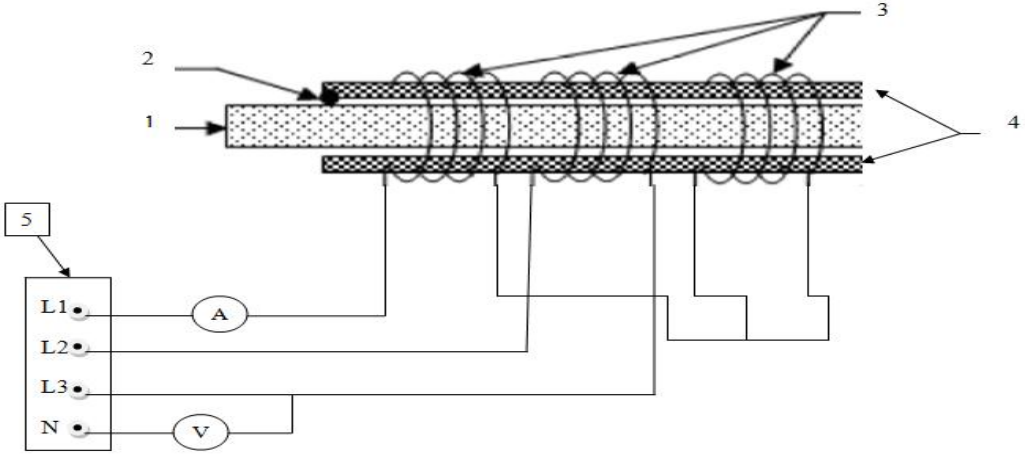
### V.9.le bobinage

La machine lineaire tubulaire est constitué d'un enroulement triphasé logé dans les encoches de telle sorte à avoir deux enchoche par phase, est une encoche par pole et par phase, chacune des encoche se compose de 70 spires,cette etape est realise au niveau de laboratoir Q/ETH.

V.10.Representation de la machine



Fig(V.4) : essai de la machine tubulaire réalisée au niveau de laboratoire



Fig(V.5) : Schéma d'alimentation du moteur

### V.11. Les essais effectués

Dans notre travail nous avons effectués six essais différents sur la machine linéaire tubulaire.

#### V.11.1 .Prototype à trois encoches

##### V .11.1.1.Étude du système à trois encoches avec une connexions directe.

Conditions de simulation :

La masse=0.02kg, la longueur de l'induit = 0.16 m , nombre d'itération=100 ,  $J=5.10^6$  A/m<sup>2</sup>,  
La position initial de l'induit : première encoche.

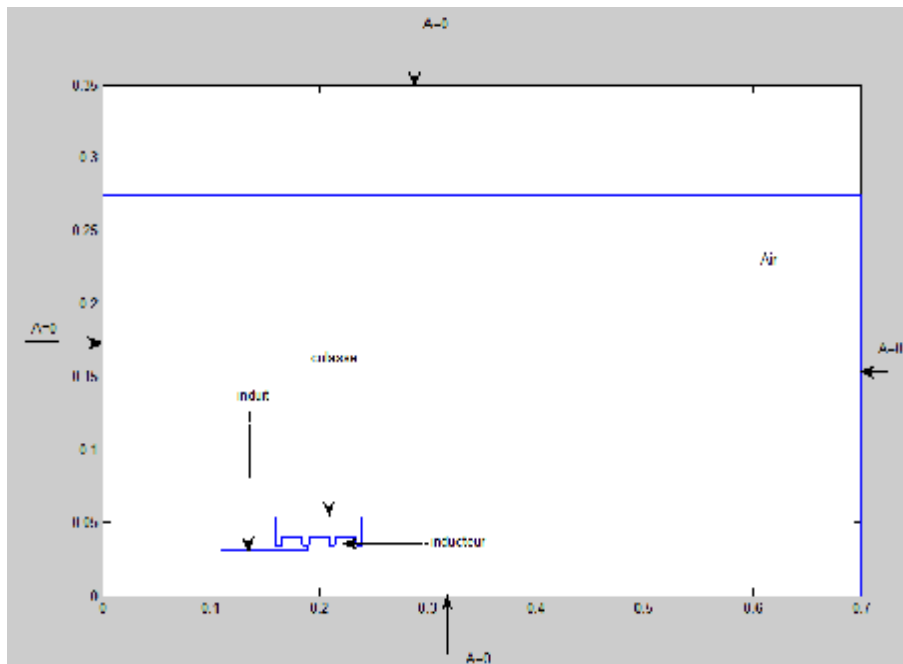
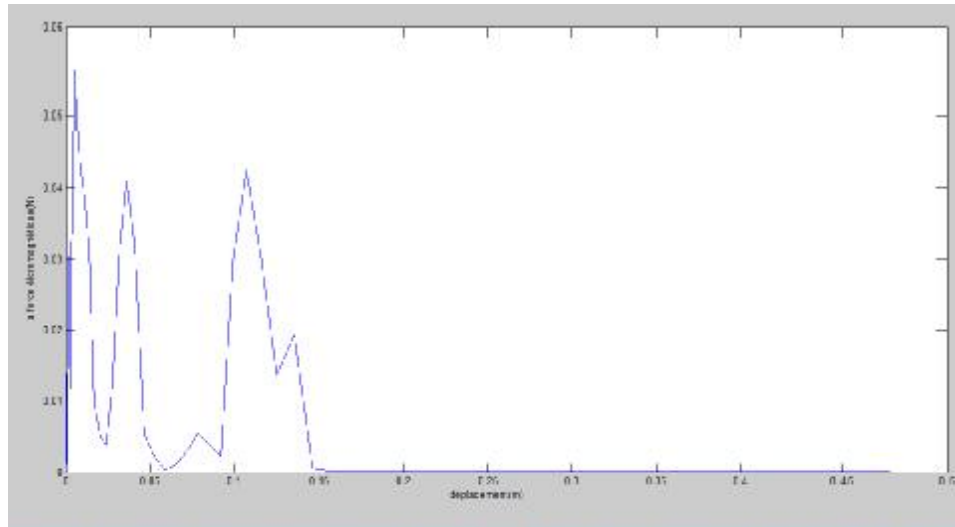
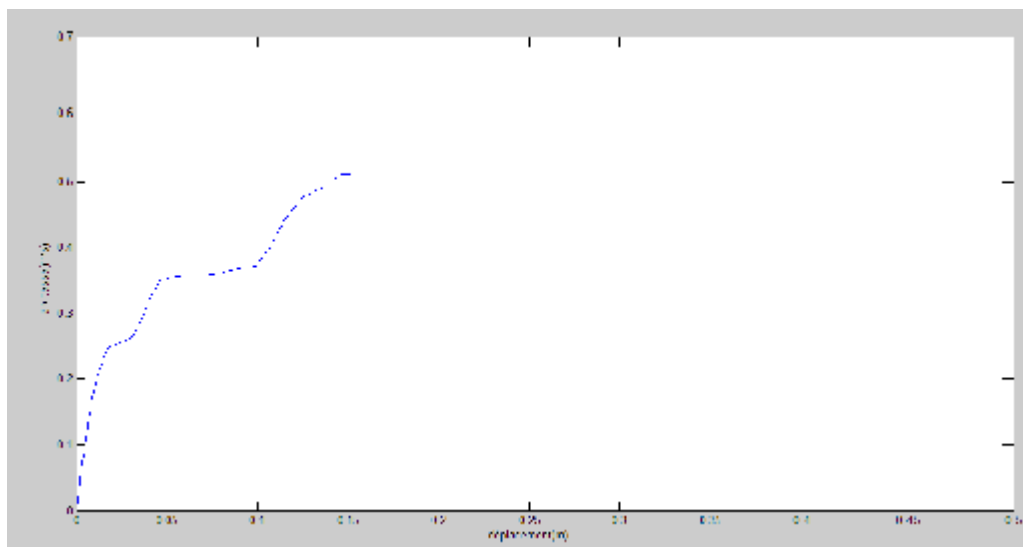


Fig (V.6) : domaine de résolution et condition aux limites



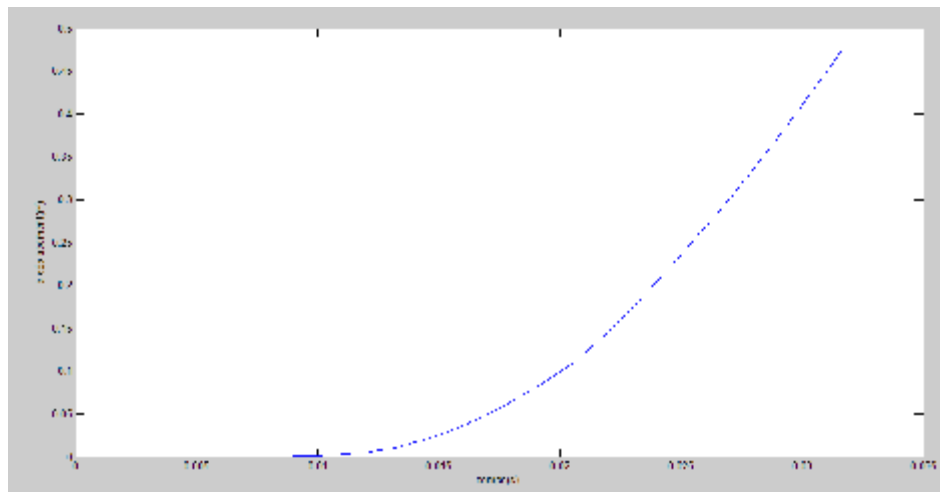
**Fig(V.7) : Force en fonction du déplacement**

La force (max)=0.055 N.



**Fig(V.8) :La vitesse en fonction du déplacement**

La vitesse (max)=0.52 m.s<sup>-1</sup>



**Fig(V.9) : Le déplacement en fonction du temps**

Le déplacement (max)= 0.45m.

#### **V.11.1.2. Interprétation des courbes**

La figure(V.7) représente l'allure de la variation de la force en fonction du déplacement, on remarque qu'elle atteint sa valeur maximum au début de déplacement, quand la valeur de déplacement égal à (0.15m) la force s'annule, car l'induit quitte la zone d'influence de l'inducteur.

Pour la figure(V.8) représente l'allure de la variation de la vitesse en fonction du déplacement, on remarque que la vitesse augmente d'une manière non linéaire jusque la valeur de déplacement égale (0.15m), puis elle reste constante.

La figure(V.9) représente l'allure de la variation de déplacement en fonction du temps.

#### **V.11.2 .Etude sur le prototype à six encoches**

##### **V.11.2.1 : L'influence de la longueur de l'encoche sur les performance du système**

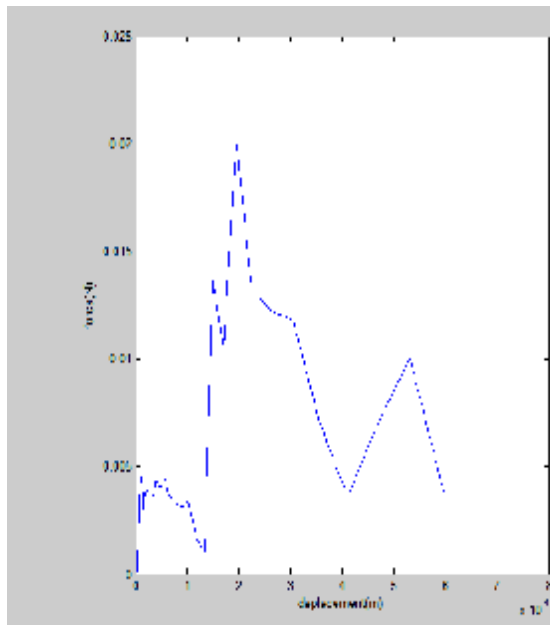
###### **Conditions de simulation**

**Les grandeurs constants :** La masse=0.7kg, la longueur de l'induit = 0.16 m , la densité du courant  $J=5.10^6$  A/m<sup>2</sup>, l'induit occupe la première encoche.

**Les grandeurs variables :** la longueur de l'encoche .

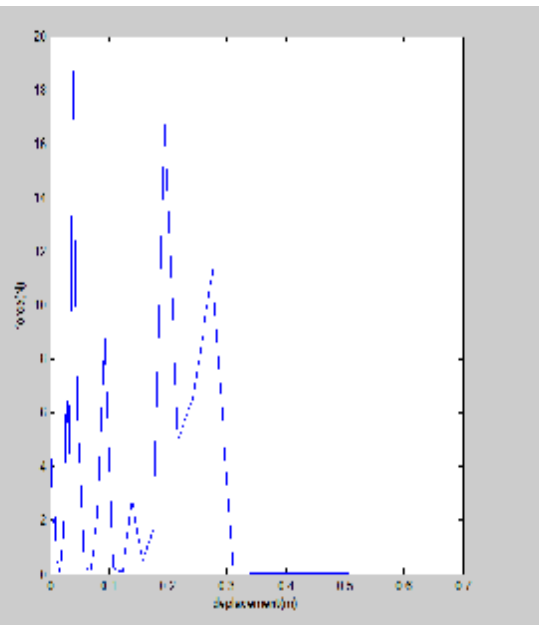
**1<sup>er</sup> cas :** Encoche1 = 5mm, dent1 = 20mm.

2<sup>eme</sup> cas : Encoche2 = 20mm, dent2= 5mm.



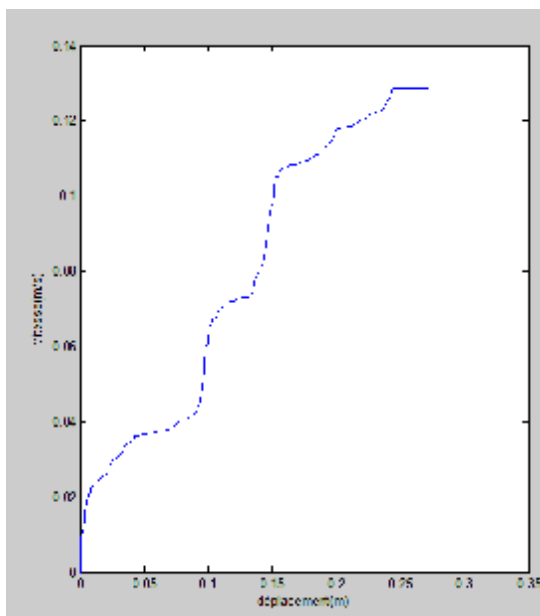
**Fig(V.10) :** La force en fonction du déplacement pour l'encoche1

Force max fig(V.10)=0,021N



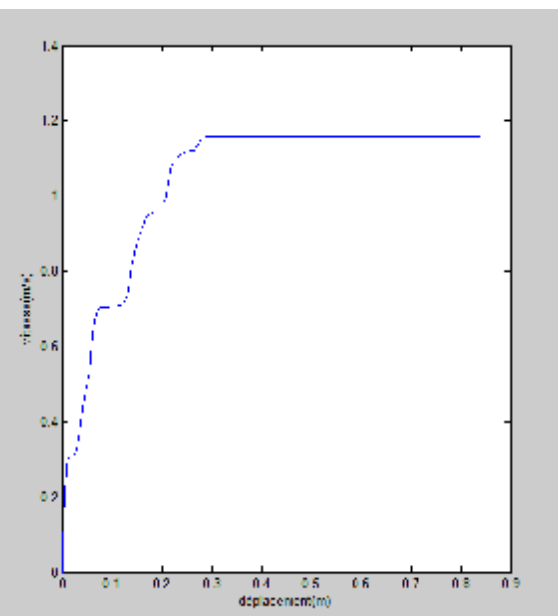
**Fig(V.11) :** La force en fonction du déplacement pour l'encoche2

Force max fig(V.11)=19N



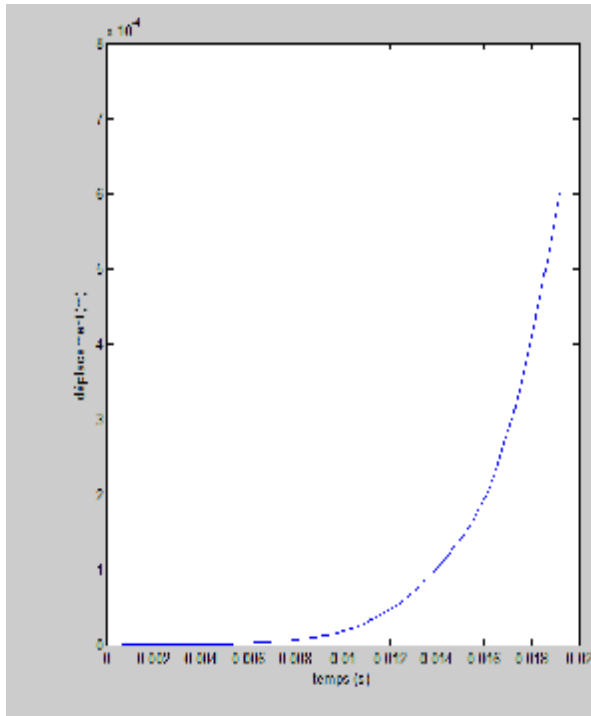
**Fig(V.12) :** La vitesse en fonction du déplacement pour l'encoche1

Vitesse max fig(12)= 0,013 m/s

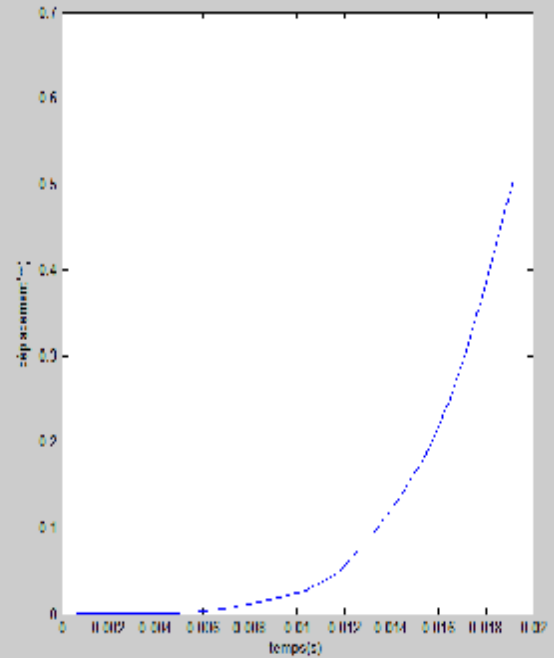


**Fig(V.13) :** La vitesse en fonction du déplacement pour l'encoche2

Vitesse max fig(13)=1,18 m/s



**Fig(V.14)** : Le déplacement en fonction du temps pour l'encoche 1



**Fig(V.15)** : Le déplacement en fonction du temps pour l'encoche 2

$X_{\max} \text{ fig(14)} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

$X_{\max} \text{ fig(15)} = 0,5 \text{ m}$

### V .11.2.2. Interprétation des courbes

La figure(V.10) représente l'allure de la force en fonction du déplacement pour le cas de l'encoche 1, (V.11) représente l'allure de la force en fonction du déplacement pour le cas de l'encoche 2, on fait la comparaison entre les deux cas on voit bien que la force est plus grande dans le deuxième cas, elle atteint les 19N.

Pour la figure(V.12) représente l'allure de la vitesse en fonction du déplacement pour le cas de l'encoche 1, et (V.13) représente l'allure de la vitesse en fonction du déplacement pour le cas de l'encoche 2, on voit bien que la vitesse est plus grande dans le deuxième cas, elle atteint 1,18m/s.

La figure(V.14) représente l'allure de le déplacement en fonction du temps pour le cas de l'encoche 1, et (V.15) représente l'allure de le déplacement en fonction du temps pour le cas ou l'encoche 2, on voit bien que le déplacement est très important dans le deuxième cas, il atteint 0,5m.

**Remarque**

On remarque bien que la force est très importante lorsque l'encoche est plus grande que la dent, elle atteint les 20N.

On remarque bien que l'induit n'est pas déplacé « déplacement très faible de l'ordre  $10^{-4}$  » pour le cas où la dent est plus grande que l'encoche, mais pour le cas où l'encoche est plus grande que la dent on voit que l'induit se déplace bien il atteint 0,8m.

pour la vitesse on remarque que celle-ci est plus grande dans le cas où l'encoche est plus grande que la dent elle atteint les 2,3m/s.

L'induit ne se déplace pas assez pour sortir de l'inducteur pour un nombre d'itération  $n = 100$  pour le cas où la tôle est plus grande que le cuivre (dent > encoche), Pour différentes positions de l'induit. Pour ce cas il faut augmenter le nombre d'itération ou le courant.

D'après les figures(V.10) et(V.11) on constate que la force est plus importante dans le 2<sup>ème</sup> cas où l'encoche est plus grande que la dent.

**V.11.2.3.1. l'influence de la position de l'induit sur les performances du système****Conditions de simulation :**

**Les grandeurs constantes :** La masse=0,7kg, la longueur de l'induit = 0.16 m, la densité du courant= $5.10^6$  A/m<sup>2</sup>.

**Les grandeurs variables :** La position initiale de l'induit

Position1 : l'induit occupe toutes les encoches.

Position2 : l'induit occupe la première encoche.

Position3 : l'induit à la de la première dent.

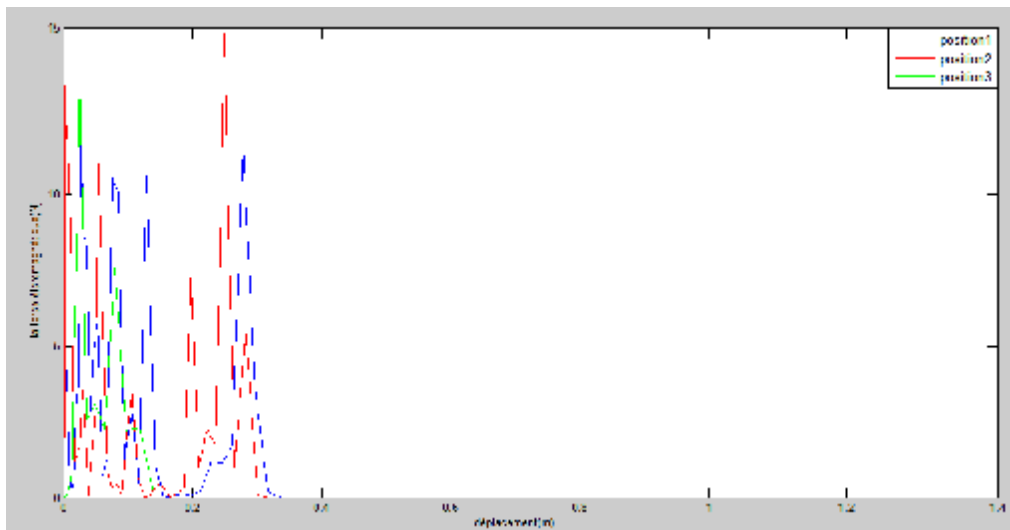


Fig (V-16) : la force en fonction de déplacement.

La force (max)= 15 N.

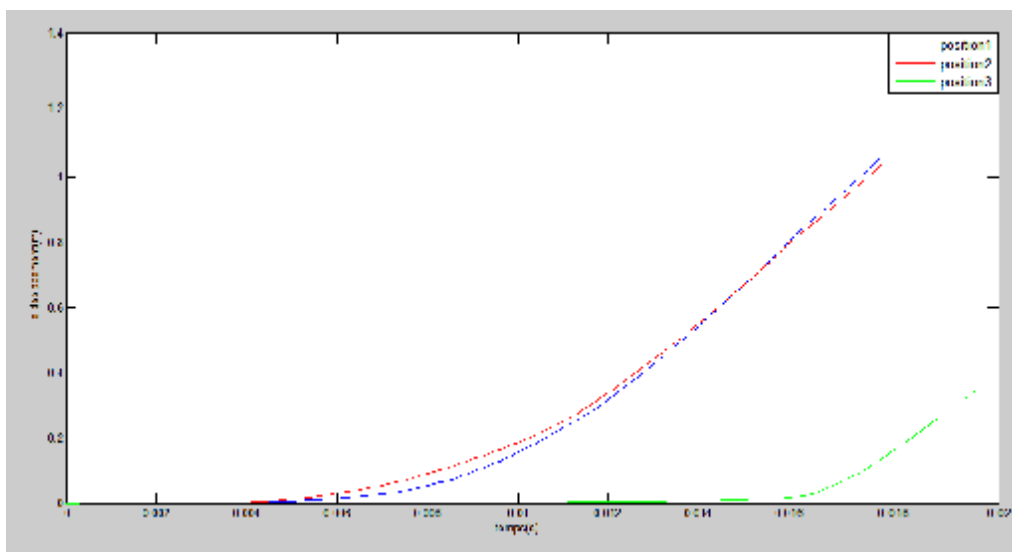


Fig (V-17) : le déplacement en fonction du temps.

### V.11.2.3.2. Interprétation des courbes

La figure(V.16) représente l’allure de la variation de la force en fonction du déplacement pour les différentes positions de l’induit.

La figure(V.17) représente l’allure de la variation de déplacement en fonction du temps pour les différentes positions de l’induit. .

**Remarque**

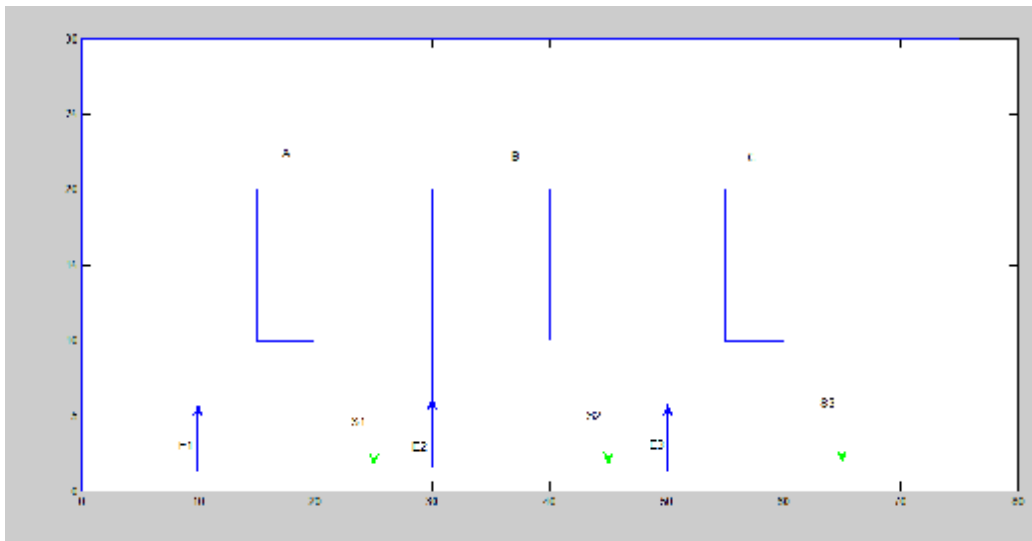
On remarque bien que la force est très importante lorsque l'induit est dans la position 2, elle atteint 15N.

On remarque bien qu'on obtient un déplacement maximum quand la charge est dans la position 2.

### V.11.2.4.1. Étude de l'influence des modes de connexions des bobines sur les performances du système

#### V.11.2.4.1.1. Schémas de connexion des bobines.

1<sup>er</sup> cas : la connexion des bobines est directe.



**Schéma.1** : connexion des bobines directes.

Avec : E : les entrées des bobines.

S : les sorties des bobines.

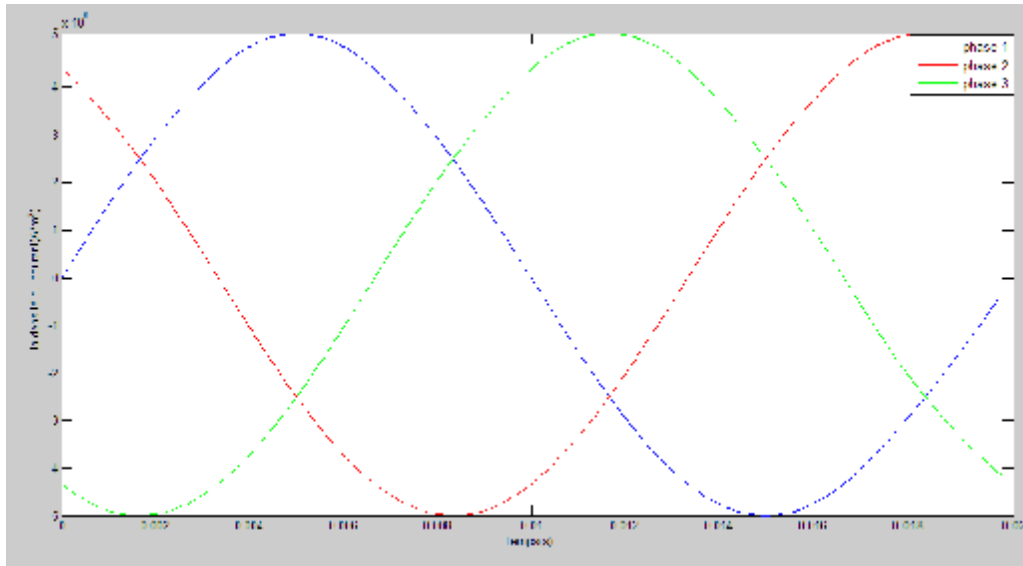


Fig (V-18) : la densité du courant en fonction du temps

2<sup>ème</sup> cas : les bobines sont connectées avec un champ glissant.

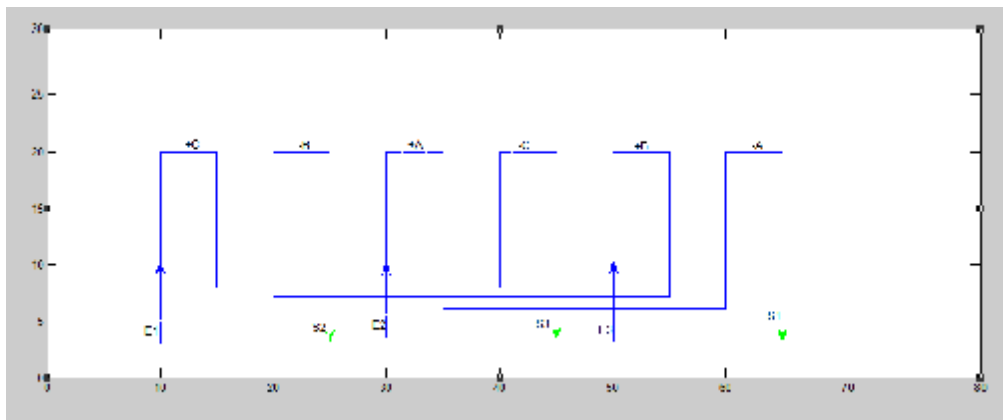


Schéma.2 : connexion des bobines avec un champ glissant.

Avec : E : les entrées des bobines.

S : les sorties des bobines.

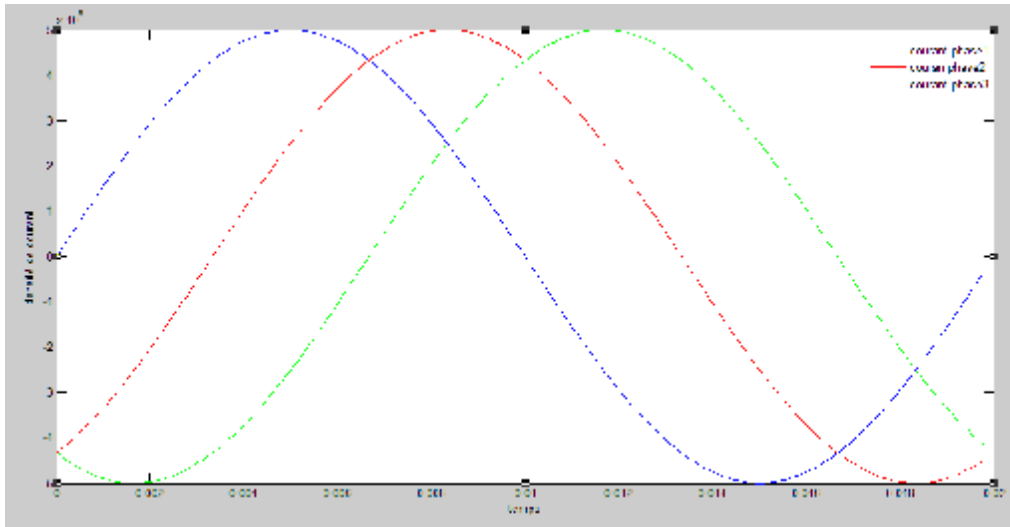


Fig (V-19) : la densité du courant en fonction du temps

### Conditions de simulation :

**Les grandeurs constants :** La masse=0,7kg, la longueur de l'induit = 0.16 m, la densité du courant= $5 \cdot 10^6$  A/m<sup>2</sup>.

Dans ce cas l'induit occupe la première encoche.

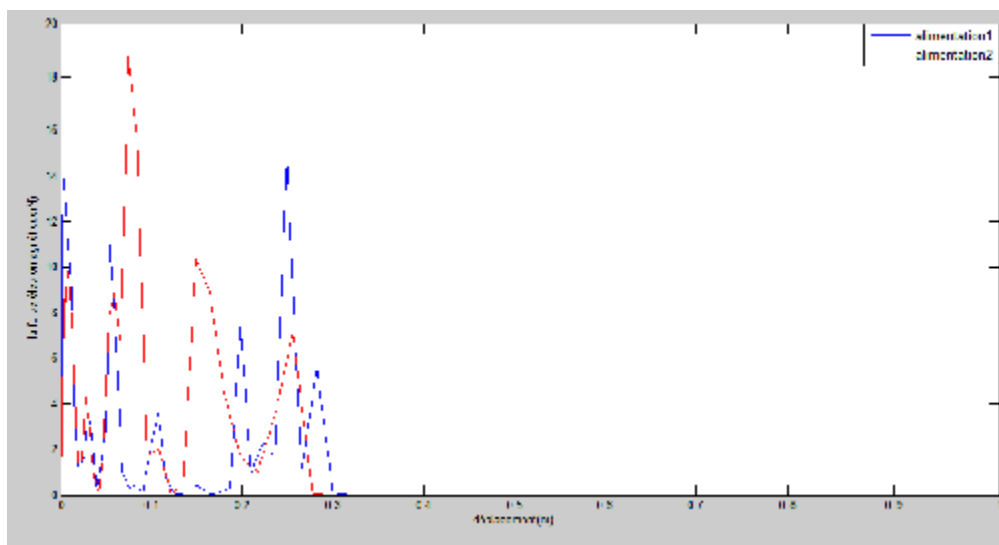


Fig (V-20) : la force en fonction du déplacement.

La force (max)=19 N.

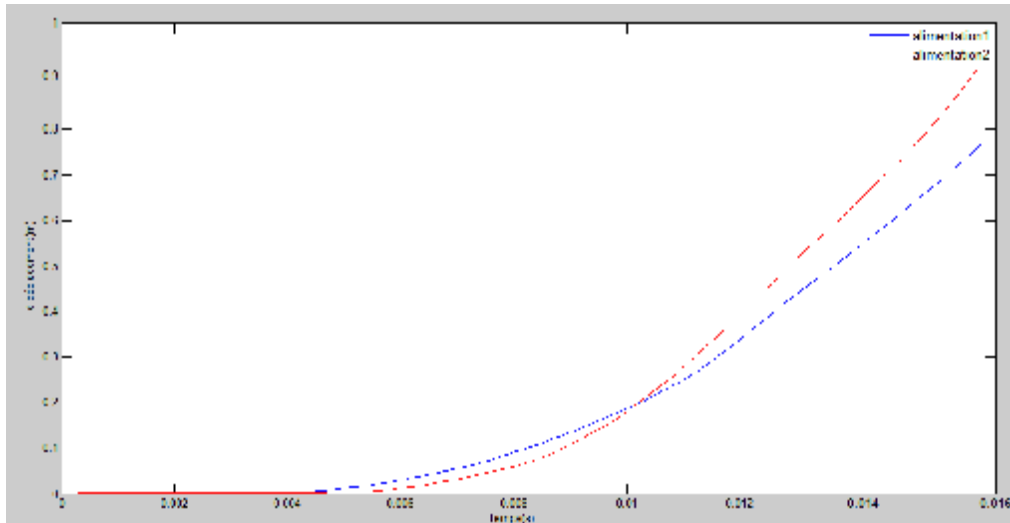


Fig (V-21) : le déplacement en fonction du temps

Le déplacement (max)=0.9m

#### V.11.2.4.2. Interprétation des courbes

La figure(V.20) représente l'allure de la variation de la force en fonction du déplacement pour les deux types de connexion. On remarque bien que la force est très importante lorsque les bobines sont connectées selon le schéma 2, elle atteint 19N.

La figure(V.21) représente l'allure de la variation de déplacement en fonction du temps pour les deux types de connexion.

On remarque bien qu'on obtient un déplacement maximal (0.9m) en 2<sup>ème</sup> schéma.

#### V.11.2.5.1. Étude de l'influence de la densité de courant sur les performances de système

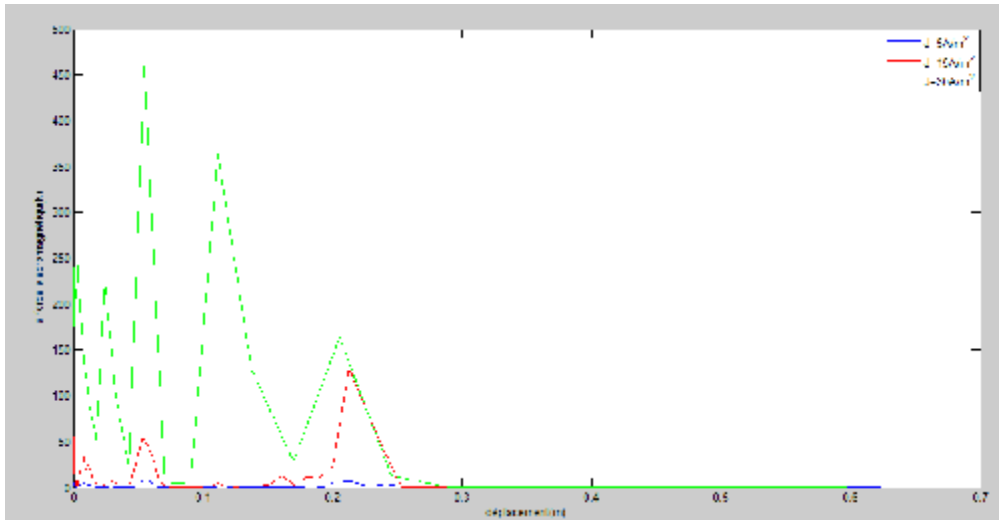
**Conditions de simulation :**

**Les grandeurs constants :** La masse=0.7kg, la longueur de l'induit = 0.16 m .

Dans ce cas, l'induit occupe la troisième encoches.

**Les grandeurs variable :** la densité du courant

$J_1 = 5. \cdot 10^6 \text{ A /m}^2$ ,  $J_2 = 15. \cdot 10^6 \text{ A /m}^2$ ,  $J_3 = 30. \cdot 10^6 \text{ A /m}^2$ .

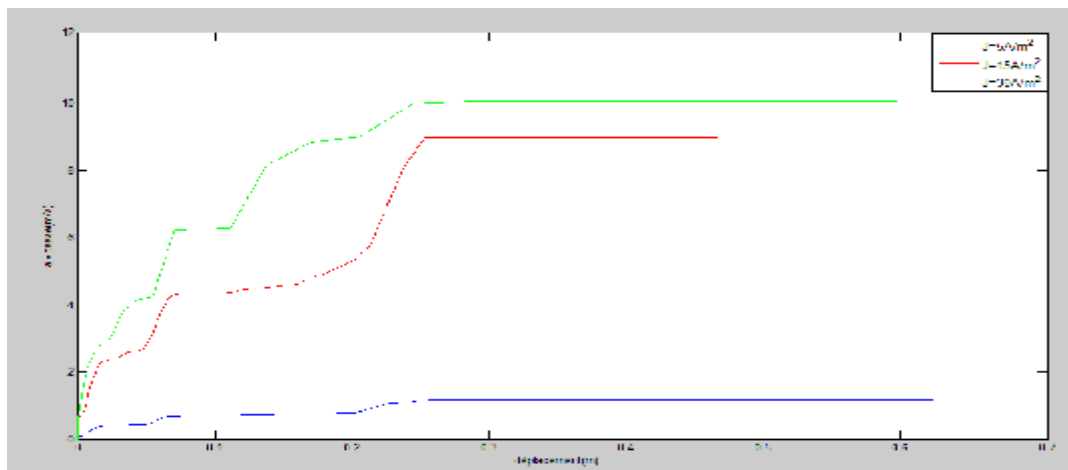


**Fig (V-22) :** la force en fonction du déplacement, avec la variation de la densité du courant

pour une densité du courant égale à  $5 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$  , la force électromagnétique (max)=9N.

pour une densité du courant égale à  $15 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$  , la force électromagnétique (max)=140N.

pour une densité du courant égale à  $30 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$  , la force électromagnétique (max)=450N.

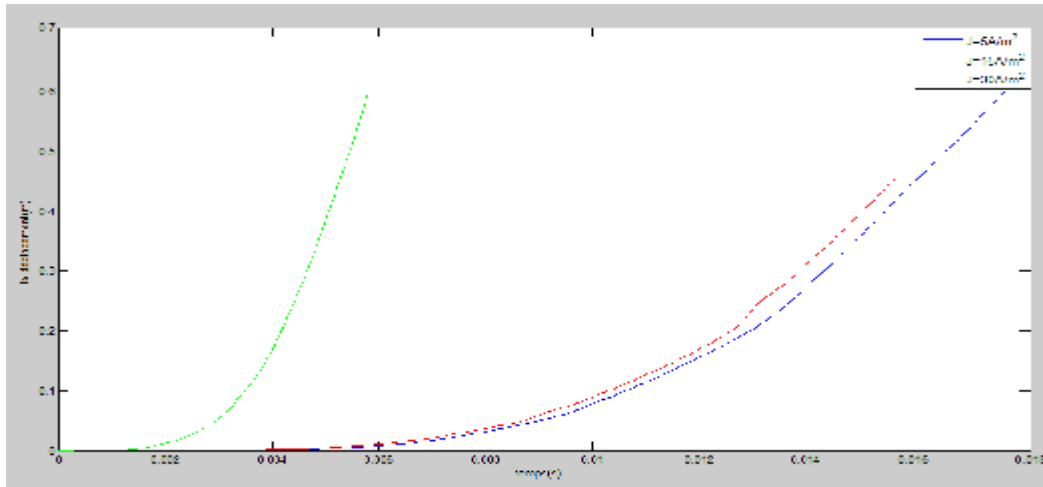


**Fig (V-23) :** la vitesse en fonction du déplacement, avec la variation de la densité du courant

pour une densité du courant égale à  $5 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$  , la vitesse (max)=1,18m.s<sup>-1</sup>.

pour une densité du courant égale à  $15 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$  , la vitesse (max)=9 m.s<sup>-1</sup> .

pour une densité du courant égale à  $30 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$  , la vitesse (max)=10 m.s<sup>-1</sup> .



**Fig (V-24) :** le déplacement en fonction du temps, avec la variation de la densité du courant

### V.11.2.5.2. Interprétation des courbes

La figure(V.22) représente l'allure de la force en fonction du déplacement pour les différentes valeurs de densité de courant, on voit bien que la force est plus importante dans le troisième cas.

Pour la figure(V.23) représente l'allure de la vitesse en fonction du déplacement pour les différentes valeurs de densité de courant, on voit bien que la vitesse est plus grande dans le troisième cas, elle atteint 10m/s.

La figure(V.24) représente l'allure du déplacement en fonction du temps pour les différentes valeurs de densité de courant, on voit bien que le déplacement est très important dans le troisième cas.

### V.11.2.6.1. Influence de la longueur de l'induit sur les performances du système

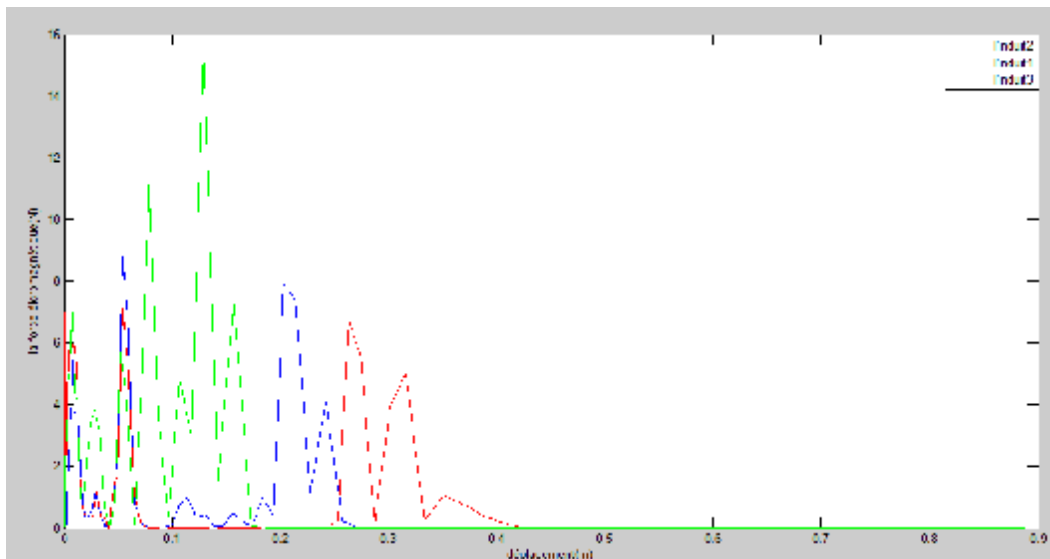
**Conditions de simulation :**

**Les grandeurs constants :** La masse=0.7kg,  $J=5 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$ .

Dans ce cas l'induit occupe la troisième encoches.

**Les grandeurs variable :** la longueur de l'induit .

l'induit1 = 0.08 m, l'induit2 = 0.16 m, l'induit3 = 0.32 m

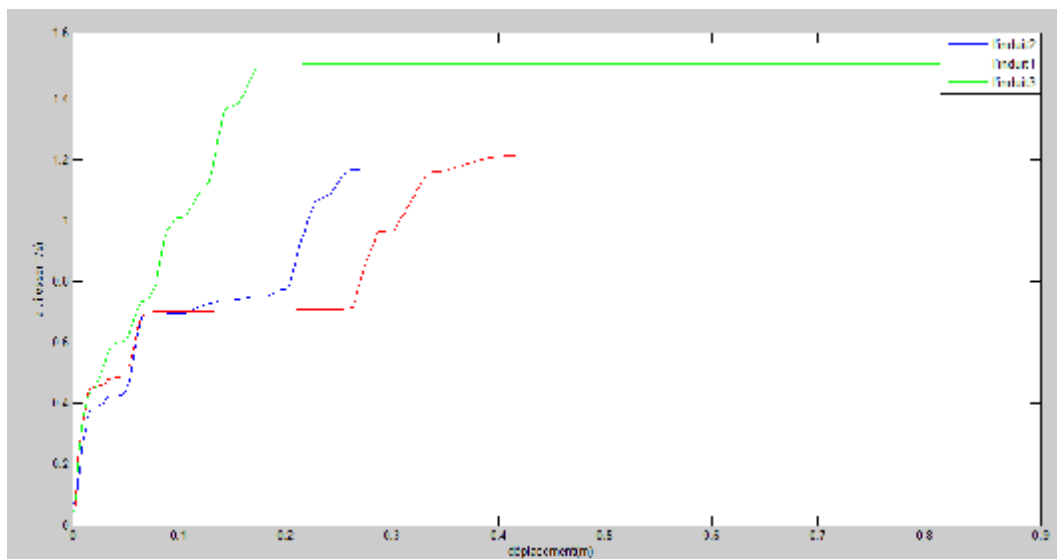


**Fig(V-25)** : la force électromagnétique en fonction de déplacement, avec variation de la longueur de l'induit.

L'induit1 : la force électromagnétique (max)=7 N.

L'induit2 : la force électromagnétique (max)=9 N.

L'induit3 : la force électromagnétique (max)=15.80 N.

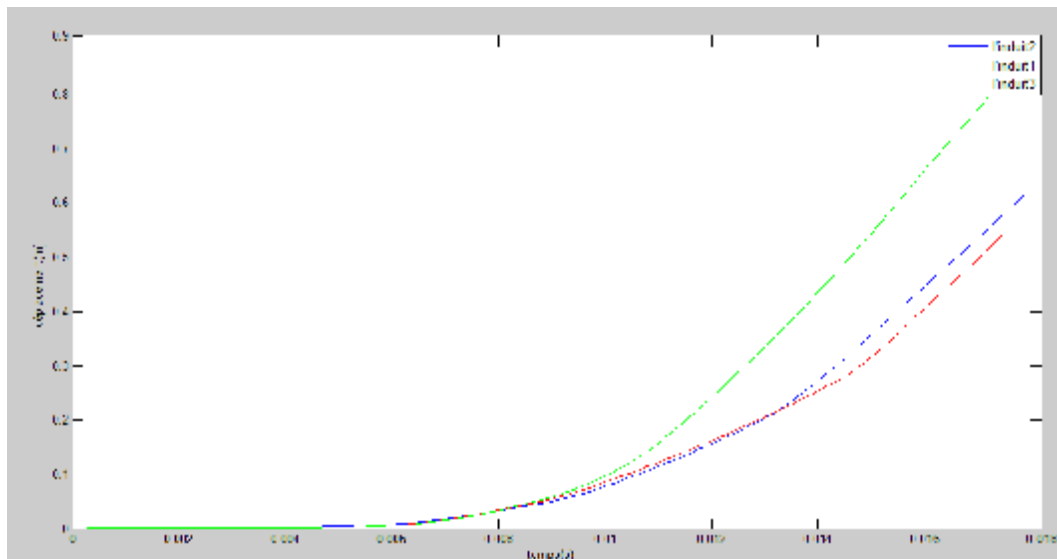


**Fig(V-26)** : la vitesse en fonction du déplacement, avec variation de la longueur de l'induit.

L'induit1 : la vitesse (max)=0,7 m.s<sup>-1</sup>.

L'induit2 : la vitesse (max)=1,18 m.s<sup>-1</sup>.

L'induit3 : la vitesse (max)=1,5 m.s<sup>-1</sup>.



**Fig(V-27)** : le déplacement en fonction du temps, avec variation de la longueur de l'induit.

#### V.11.2.6.2. Interprétation des courbes

La figure(V.25) représente l'allure de la force en fonction du déplacement pour les différentes longueurs de l'induit, on fait la comparaison entre les trois cas on voit bien que la force est plus importante dans le cas où l'induit est plus long, elle atteint 15.80 N.

Pour la figure(V.26) représente l'allure de la vitesse en fonction du déplacement pour les différentes longueurs de l'induit, on voit bien que la vitesse est plus grande dans le cas où l'induit est plus long, elle atteint 1.5 m/s.

La figure(V.27) représente l'allure du déplacement en fonction du temps pour les différentes longueurs de l'induit, on voit bien que le déplacement est très important dans le cas où l'induit est plus long.

#### Remarque :

On remarque que la force est proportionnelle à la longueur de l'induit.

On remarque que la vitesse est proportionnelle à la longueur de l'induit, mais dans le cas de l'induit1 l'allure de la vitesse à eu deux niveaux.

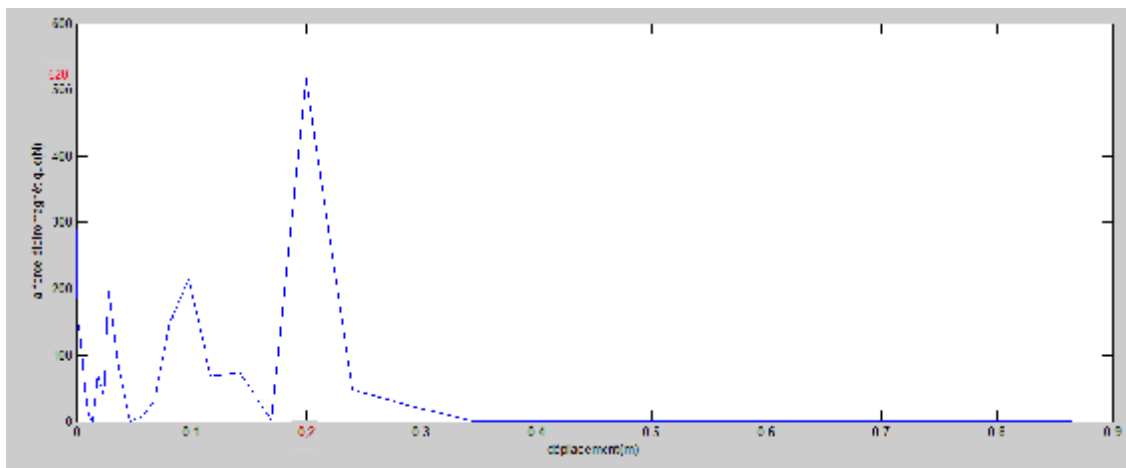
On remarque que le déplacement est plus important lorsque nous avons un induit plus long.

### V.11.3 : prototype à six encoches, essai final.

#### Conditions de simulation :

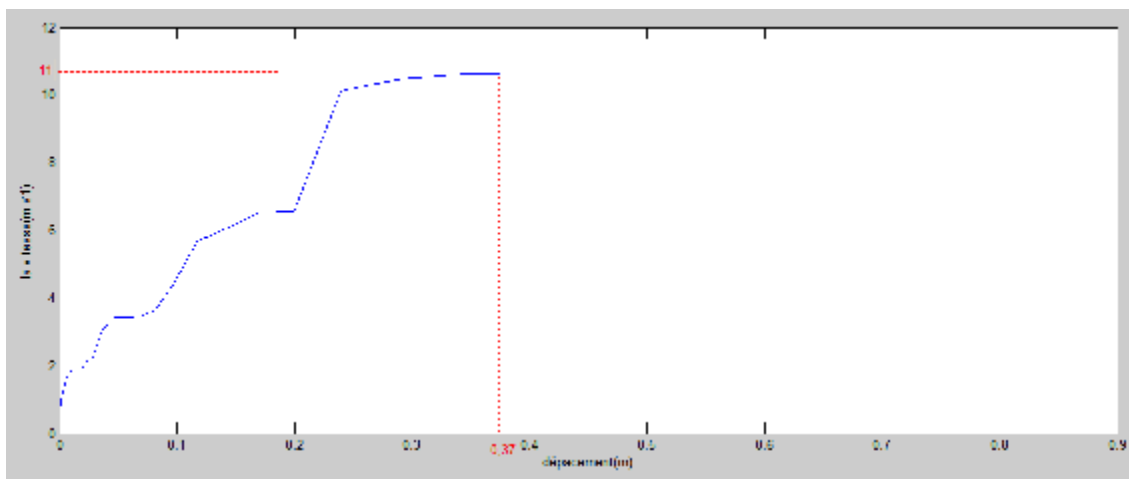
La masse=0.7kg, la longueur de l'induit = 0.32 m , nombre d'itération=100 ,  $J=30.10^6$  A/m<sup>2</sup>, l'induit occupe la première encoche, les bobines sont connectées avec un champ glissant.

Dans ce cas l'encoche est plus grande que la dent.



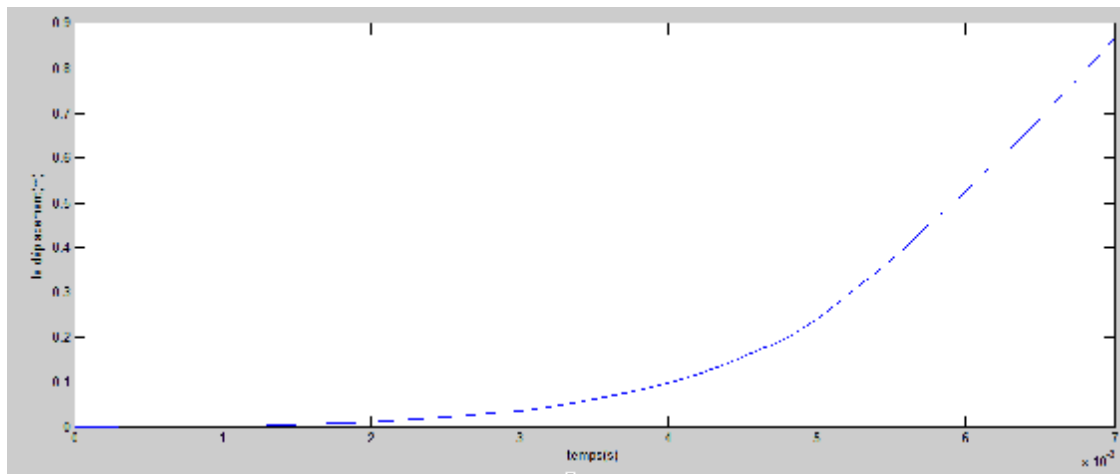
Fig(V-28) : la force en fonction de déplacement

La force électromagnétique (max)=550N.



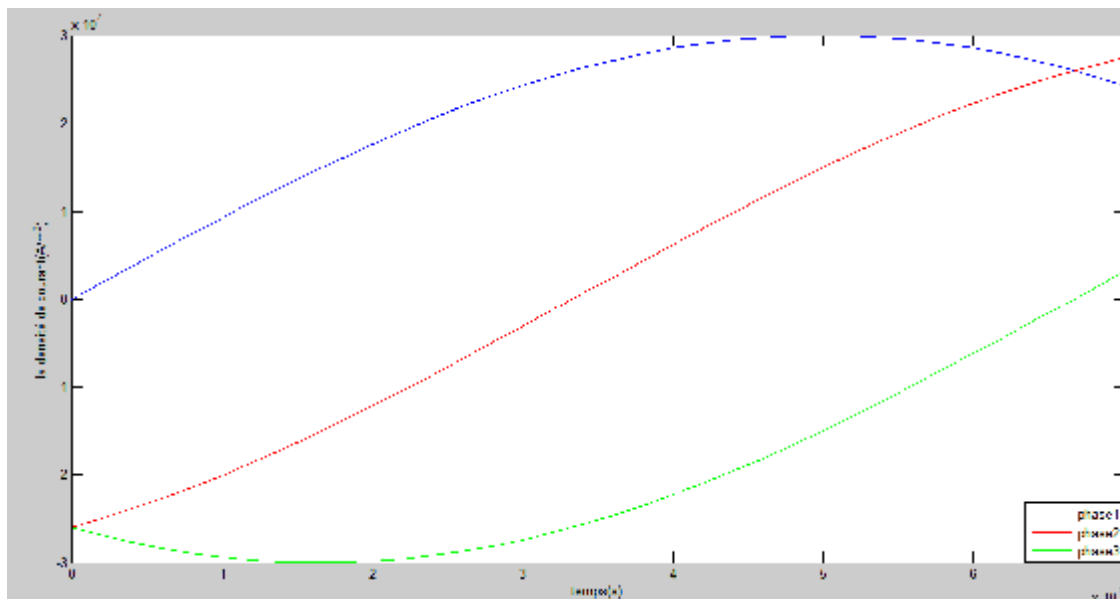
Fig(V-29) : la vitesse en fonction de déplacement

La vitesse (max)=11 m.s<sup>-1</sup>



Fig(V-30) : le déplacement en fonction du temps

Le déplacement (max)=0.88m.



Fig(V-31) : la densité de courant en fonction du temps

### V.11.3.2. Interprétation des courbes

La figure(V.28) représente l'allure de la force en fonction du déplacement, elle atteint 550 N.

Pour la figure(V.29) représente l'allure de la vitesse en fonction de déplacement, elle atteint 11 m/s

La figure(V.30) représente l'allure de déplacement en fonction du temps.

La figure(V.31) représente l'allure de la densité de courant en fonction du temps.

### **V.12.Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'influence de certains paramètres sur les performances dynamiques de la machine tubulaire.

## Conclusion générale

---

L'objectif de ce mémoire est d'évaluer l'influence des différents paramètres (la longueur de l'encoche, type d'alimentation, la position de l'induit et sa longueur ainsi que la densité du courant), sur les différentes grandeurs (la force de poussé d'un moteur linéaire tubulaire, la vitesse et le déplacement de la charge), et pour cela la méthode utilisée c'est la méthode des éléments finis et la réalisation de prototype.

Pour parvenir à réussir la modélisation, la méthodologie suivie est la recherche bibliographique, l'étude des documents et assimilation des informations sur la modélisation de moteur linéaire tubulaire par éléments finis. Puis on a introduit la méthode de calcul basée sur les formules analytique-empirique, on a choisit un exemple de calcul et puis déterminé les caractéristiques géométrique de la machine.

On a appliqué la méthode des éléments finis pour évaluer le déplacement de la charge, sa vitesse, et la force de poussé produite par la machine à l'aide d'un programme sur MATLAB.

Après avoir modélisé le dispositif sa réalisation devient une phase primordiale pour mettre on évidence d'éventuelles défaillances. La réalisation du prototype à permit de vérifier et d'appuyer les résultats obtenue par la simulation.

La réussite du prototype réalisé au sein du laboratoire d'électrotechnique Q-ETH à été une bonne base des données, qui confirme les résultats obtenus en simulant un dispositif électromagnétique équivalent en mettant en évidence l'effet de différentes grandeurs telles que la longueur de l'induit, la densité du courant, la position de l'induit, la longueur de l'encoche et le type d'alimentation sur les performances de ce type de machine électrique qui reste un domaine d'innovation et de recherche d'actualité.

D'après les résultats obtenus des essais effectués sur la machine linéaire tubulaire que nous avons réalisée, on peut conclure que pour avoir une force de poussée élevée, une grande vitesse, et un déplacement important, il faut augmenté le nombre d'encoche, le rapport cuivre/tôle élevé, l'alimentation avec un champ glissant, la position de l'induit est à la première encoche, et une densité du courant importante.

Enfin nous souhaitons que les promotions à venir puissent compléter ce modeste travail, avec des meilleurs moyens pour des résultats complémentaires et une analyse approfondie.

## Bibliographie

- [1] A.MILOUD « contribution à l'étude d'un moteur synchrone linéaire à aimants permanents ».Thèse magistère, Université de BATNA, 2011
- [2] H.DJEMAI «contribution à l'amélioration des performances d'un moteur linéaire ». Thèse de doctorat, Université de BATNA, 2007.
- [3] G.JINLIN « modélisation et conception optimale d'un moteur linéaire à induction pour un de traction Ferroviaire ».Thèse de doctorat, école centrale de Lille, 2002
- [4] H.ACI, K.AMEUR «étude des actionneurs électromagnétiques par la méthode des éléments finis avec prise en compte de la saturation ».Mémoire d'ingénieur, 2006, UMMTO
- [5] S. YAICI « modélisation par éléments finis d'une structure de machine linéaire synchrone à aimant permanent ».thèse de magistère, 1996, USTHB
- [6] M.AZZOUZ, S.BOUAMRA, R.BEDRENE « étude des performances dynamiques d'un actionneur électromagnétique linéaire ».Mémoire d'ingénieur 2007.UMMTO
- [7] R.AMIMER, N.BELHANAFI « prise en compte de l'aimantation magnétiques dans la modélisation par éléments finis en régime dynamique d'une machine synchrone linéaire à aimants permanents ».Mémoire d'ingénieur d'Etat, 2002, UMMTO
- [8] B.HALLOU«étude des caractéristiques d'une machine linéaire à aimants permanents en intégrant le modèle d'hystérésis de JILES-ATHERK».Mémoire d'ingénieur d'Etat, 2007, UMMTO
- [9] F.BRIHMAT«effet d'une alimentation non sinusoïdale sur les performances d'un moteur linéaire a induction ».Mémoire d'ingénieur d'Etat, 2007, UMMTO
- [10] H.MOHELLEBI« cours de modélisation numérique des systèmes d'entraînement électrique » cours master II Entraînement Electrique , UMMTO, 2010
- [11]Physique II-électromagnétisme. école d'ingénieur de CANTON DE VAUD, FRANCE
- [12] L.HAMOUDI, M.KAOUDJI « étude théorique et expérimentale d'une machine linéaire à induit conducteur » .Mémoire d'ingénieur d'Etat 2009.UMMTO
- [13] O.KANA, B.ADI « étude et réalisation d'un circuit magnétique destiné à la propulsion électromagnétique » .Mémoire d'ingénieur d'Etat 2008.UMMTO
- [14] F.AMRANI, D.KACI « étude comparative des parties dans les tôles magnétiques a partir d'essais et du modèle théorique ». Mémoire d'ingénieur 2011, UMMTO.
- [15] C.CYR : "modélisation et caractérisation des matériaux magnétique composites doux utilises dans les machine électriques » Thèse de doctorat, université de Québec et ENSAM 2007 Paris, France

- [16] M.Dubois : Matériaux de l'électrotechnique, chapitre 3, IGEE403 ,2006 .
- [17] A.Kedous-Lebouc, Electromagnétisme et matériaux magnétiques pour le Génie Electrique, ENSIEG-2<sup>ème</sup> NRJ-2005/2006.
- [18] B.F .Renault, Matériaux magnétique : électromagnétisme 4538 C 13728
- [19] Matériaux et propriétés magnétique, Electrotechnique, éditions la Dunanche/septembre 2000
- [20]WILDI-SYBILLE : Electrotechnique, 4<sup>ème</sup> édition, deboeck. 2005.
- [21] A.Kedous-Lebouc : Les matériaux magnétique 1, édition Lavoisier, 2006
- [22]K .FEKRACHIF, H.MENTOUICHE : »Modélisation par éléments finis d'une structure de la machine linéaire à aimant permanente de simulation du mouvement par la technique de MACRO élément ». Mémoire d'ingénieur d'état 2001, UMMTO.
- [23] G.DHATT, G.TOUZOT, E.LEFRANCOIS : « méthodes des éléments finis, Lavoisier, 2005
- [24] M<sup>elles</sup> :F.amari et DJ.Kaci « étude comparative des pertes dans les tôles magnétiques a partir d'essais et du modèle théorique» mémoire d'ingénieur d'état en électrotechnique a UMMTO de tizi ouzou ;2011.