REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Minstère de l'enseignement Supèrieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU.

Faculté des Sciences
Département de mathématiques

Mémoire de Master II

Spécialité :
mathématique
Option :
Analyse mathématique et application

Thème

Sur les fonctions S- asymptotiquement ω-périodiques à valeurs dans un espace de Banach et applications

---

Réalisé par :

SLIMANI Zahia

Proposé et dirigé par :

M^{me} **DAOUI Amina**

Devant le jury d'examen composé de :

Mohammed Morsli	Prf.	U.M.M.T.O.	Président
Amina Daoui	M.C.B.	U.M.M.T.O.	Rapporteur
Leila Rahmani	Prf.	U.M.M.T.O.	Examinatrice
Omar Mellah	M.C.B.	U.M.M.T.O.	Examinateur

Promotion 2019/2020

Remerciements

Toute ma reconnaissance et remerciement à mon Dieu, le tout puissant qui m'a donné la force, le courage et la volonté pour élaborer ce modeste travail.

Je remercie également ma famille, pour les sacrifices qu'ils ont fait pour que je termine mes études.

C'est avec une profonde reconnaissance et considération particulière que je remercie ma promotrice, Madame **Daoui.A** pour la sollicitude avec laquelle elle a suivi et guidé ce travail, pour son aide, sa gentillesse, ses conseils, ses encouragements, sa grand disponibilité et son ouverture d'esprit qui m'ont aidé à mener à bien ce travail.

Je remercie également le président ainsi que les membres de jury, pour l'effort qu'ils ont fait dans le but d'examiner ce modeste travail.

Je tiens à remercier aussi tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation de prés ou de loin.

Merci infiniment à tous

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À mes très chers parents qui m'ont guidée durant les moments les plus pénibles de ce long chemin, ma mère qui a été à mes côtés et ma soutenue durant toute ma vie, et mon père qui a sacrifié toute sa vie afin de me voir devenir ce que je suis, merci mes parents. ;

À mes très chers frères **Ahmed** et **Mouloud** ;

À mes très chères soeurs **Dahbia, Razika** et **Lydia** ;

À mes très chères amies : **Hayat, Assia** ;

À ceux que j'aime et m'aiment ;

À toute la promotion **2019/2020**.

Zahia

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié les fonctions S-asymptotiquement ω-périodiques à valeurs dans un espace de Banach.
On a présenté des résultats d'existence d'une solution "mild" S-asymptotiquement ω-périodique du problème de Cauchy abstrait de premier ordre. Cette partie est complété par une application aux équations aux dérivées partielles.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale

Le concept des fonctions S-asymptotiquement ω-périodiques a été introduit par **Henriquez et al** en 2008 dans [10]. Ces fonctions sont une généralisation des fonctions asymptotiquement ω-périodiques. Depuis plusieurs travaux ont succédé autour de cette "nouvelle" notion, notamment en ce qui concerne les résultats d'existence de solutions S-asymptotiquement ω-périodiques d'équations differentielles abstraites et d'équations intégro differentielles abstraites. On cite entre autre [2],[4],[6].

Dans ce mémoire, on étudie les fonctions S-asymptotiquement ω-périodiques à valeurs dans un espace de Banach. Notre objectif consiste à faire une synthèse sur les propriétés essentielles de cette notion. Le problème d'existence de solutions "mild" S-asymptotiquement ω-périodiques du problème de Cauchy abstrait de premier ordre sera aussi étudié. Plus précisément, considérons le système

$$\begin{cases} u'(t) = & Au(t) + G(t, u(t)) \;\; t \geq 0 \\ u(0) = & x_0 \in X \end{cases} \tag{0.1}$$

où $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X, $G : [0, +\infty[\times X \longrightarrow X$ continue, et X un espace de Banach. Nous allons parler des notions de semi-groupe fortement S-asymptotiquement ω-périodiques et fonction uniformément S-asymptotiquement ω-périodique à paramètre $G(t, x)$, qui vont jouer un rôle important dans l'obtention de théorèmes d'existence d'une solution "mild" S-asymptotiquement ω-périodique pour le problème (0.1).

Notre travail reprend les calculs fait dans [10], il est réparti en deux chapitres :

Le chapitre 1, nous exposerons les différentes définitions et propriétés des fonctions S-asymptotiquement ω-périodiques à valeurs dans un espace de Banach, en verra la relation entre ces fonctions et les fonctions asymptotiquement ω-périodiques.

Le chapitre 2 est consacré au problème d'existence de solutions "mild" S-asymptotiquement ω-périodiques du problème de Cauchy abstrait de premier ordre. Ce chapitre est complété par une application aux équations aux dérivées partielles.

A la fin de ce mémoire nous avons mis une partie annexe où nous avons rappelé quelques résultats de topologie et d'analyse fonctionnelle que nous avons utilisé tout au long de ce mémoire.

CHAPITRE 1

Fonctions S-asymptotiquement ω-périodiques à valeurs dans un espace de Banach

Dans ce chapitre, une nouvelle classe de fonctions est présentée : les fonctions S-asymptotiquement ω-périodiques à valeurs dans un espace de Banach. Un intérêt particulier est donné à cette classe et la classe des fonctions asymptotiquement ω-périodiques.
Avant d'entamer l'étude de ces fonctions, nous introduisons d'abord quelques notations et rappelons quelques notions dont on aura besoin dans la suite de ce document. Pour plus de détails concernant les résultats cités dans ce chapitre, on peut consulter les références [10],[3],[16],[12].

1.1 Notations-Rappel

Tout au long de ce document, $(X, \|.\|)$ est un espace de Banach réel ou complexe, $C_b([0, +\infty[, X)$ désigne l'espace des fonctions continues et bornées sur $[0, +\infty[$ qui sont à valeurs dans X muni de la norme de la convergence uniforme indiqué par $\|.\|_\infty$. $C_0([0, +\infty[, X)$ et $C_w([0, +\infty[, X), \;\; w > 0$ sont des sous espaces de $C_b([0,+\infty[,X)$ définis par :

$$\begin{aligned} C_0([0,+\infty[,X) &= \{x \in C_b([0,+\infty[,X) : \lim_{t \longrightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0\}. \\ C_w([0,+\infty[,X) &= \{x \in C_b([0,+\infty[,X) : x \text{ est } \omega- \text{ périodique } \}. \end{aligned}$$

Notons que ces espaces sont des espaces de Banach.
$\mathbb{K}$ désigne l'ensemble des nombres réels ou complexes.

Définition 1.1.1. Une fonction $f \in C_b(\mathbb{R}.,X)$ est dite presque périodique si : $\forall \varepsilon > 0$, l'ensemble $H(\varepsilon, f)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$ où :

$$H(\varepsilon, f) = \{\xi \in \mathbb{R} : \|f(t+\xi) - f(t)\| < \varepsilon, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Autrement dit, f est presque périodique si $\forall \varepsilon > 0, \exists l(\varepsilon) = l$ tel que $\forall a \in \mathbb{R}$, $H(\varepsilon, f) \cap [a, a+l] \neq \emptyset$.

Remarque 1.1.1. L'ensemble $H(\varepsilon, f)$ est appelé ensemble des ε-translations ou ε-périodes de f.
L'ensemble des fonctions presque périodiques sera noté $PP(X)$.

Propriétés 1.1.1. *Toute fonction presque périodique est bornée, uniformément continue à image relativement compacte.*

Définition 1.1.2. (voir [15]) Une fonction $f \in C_b([0,+\infty[,X)$ est **asymptotiquement presque périodique** si : $\forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) > 0$ telle que l'ensemble

$$H(\varepsilon, f) = \{\xi \in \mathbb{R}^+ : \|f(t+\xi) - f(t)\| < \varepsilon, \forall\, t \in \mathbb{R}^+,\ t, t+\xi > M(\varepsilon)\},$$

soit relativement dense dans $\mathbb{R}^+$.
L'ensemble des fonctions asymptotiqement presque périodiques sera noté $APP(X)$.

La proposition suivante fournit une caractérisation des fonctions asymptotiquement presque périodiques.

Proposition 1.1.1. ***(voir*** [15]***)*** *Une fonction $f \in C_b([0,+\infty[,X)$ est dite asymptotiquement presque périodique, s'il existe une fonction presque périodique* *g et une fonction* $\varphi \in C_0([0,+\infty[,X)$ *telle que :*

$$f = g + \varphi.$$

Si g *est périodique (respectivement* ω*-périodique)* f *est dite asymptotiquement périodique (respectivement asymptotiquement* ω*-périodique).*
La décomposition donnée dans cette proposition est unique(voir[17]).

1.2 Les fonctions S-asymptotiquement ω-périodiques

Dans cette section, nous présentons quelques propriétés des fonctions S-asymptotiquement ω-périodiques.
Pour abréger les calculs, on considère pour un nombre fixé positif ω et pour chaque $t \geq 0$ la décompsition, $t = \varepsilon(t) + \tau(t)\omega$ où $\varepsilon(t) \in [0,\omega[$ et $\tau(t) \in \mathbb{N}$.
De plus, pour $h \geq 0$ et $f \in C_b([0,+\infty[,X)$ on note par f_h la fonction $f_h : [0,+\infty[\longrightarrow X$ définie par $f_h(t) = f(t+h)$.

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1. Une fonction $f \in C_b([0,+\infty[,X)$ est dite S-asymptotiquement ω-périodique, s'il existe $\omega > 0$ tel que

$$\lim_{t\to+\infty} \|f(t+\omega) - f(t)\| = 0.$$

Dans ce cas, on dit que ω est une période asymptotique de f.
On note par $SAP_\omega(X)$ le sous espace de $C_b([0,+\infty[,X)$ composé des fonctions S-asymptotiquement ω-périodiques.

Définition 1.2.2. Une fonction $f \in C_b([0,+\infty[,X)$ est dite ω-normale sur les ensembles compacts, si pour chaque suite de nombres naturels $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $m_n \longrightarrow +\infty$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$, il existe une sous suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $F \in C_b([0,+\infty[,X)$, telle que $f_{k_n\omega} \longrightarrow F$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ uniformément sur les sous ensembles compacts de $[0,+\infty[$, i.e,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{s\in\mathbb{K}} \|f_{k_n\omega}(s) - F(s)\| = 0 \text{ avec } \mathbb{K} \text{ un compacte de } [0,+\infty[.$$

Remarque 1.2.1. Si $f \in C_b([0,+\infty[,X)$ une fonction uniformément continue à image relativement compacte, alors f est ω-normale sur les ensembles compacts. En particulier les fonctions presque périodiques sont alors ω-normales sur les ensembles compacts.

Preuve. Soit (m_n) une suite de nombres naturels, considérons la famille $\Phi = \{f_{m_n\omega}\}$. La restriction de la famille Φ sur l'intervalle $[0,1]$ est relativement compacte dans $C([0,1],X)$ (muni de la norme de la convergence uniforme). **En effet :** comme f est uniformément continue, la famille $\{f_{m_n\omega}\}$ est equi uniformément continue, et du fait que f est à image relativement compacte dans X, on déduit que $\{f_{m_n\omega}(t)\}$ est relativement compacte dans X, $\forall t \in [0,1]$. La conclusion découle alors du **théorème d'Arzela-Ascoli**. D'où de la suite $\{f_{m_n\omega}\}$, on peut extraire une sous suite notée $\{f^1_{m_n\omega}\}$ convergente vers une fonction f_1 sur $[0,1]$. On considère en suite sur l'intervalle $[0,2]$ la suite $\{f^1_{m_n\omega}\}$ et on applique le même procédé pour on extraite une sous suite $\{f^2_{m_n\omega}\}$ qui va converger vers une fonction f_2 uniformément sur $[0,2]$.

$\vdots$

Sur l'intervalle $[0,n]$, on extrait une sous suite $\{f^n_{m_n\omega}\}$ qui converge vers une fonction f_n uniformément. Par la suite, on utilise le procédé de l'extraction diagonale pour extraire une sous suite qui va être convergente vers une application F uniformément sur tout compact de $[0,+\infty[$.

Cette fonction F est en faite égale à f_1 sur $[0,1]$, f_2 sur $[0,2]$,... , f_n sur $[0,n]$,... D'où f est ω-normale sur les ensembles compacts.

■

1.2.2 Quelques propriétés des fonctions S-asymptotiquement ω-périodiques

Lemme 1.2.1. *Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow X$ une fonction S-asymptotiquement ω-périodique, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres naturels telle que $t_n \longrightarrow +\infty$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. Supposons que $f_{t_n} \longrightarrow F$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ uniformément sur les sous ensembles compacts de $[0,+\infty[$, alors $F \in C_\omega([0,+\infty[,X)$.*

Preuve. F est clairement continue sur $[0,+\infty[$, en effet : soit $t_0 \in \mathbb{R}^+$ et soit $\mathbb{K}$ un compact de $[0,+\infty[$ contenant t_0. F est limite uniforme de f_{t_n} sur $\mathbb{K}$, f_{t_n} étant continue donc F est continue sur $\mathbb{K}$ d'où continue sur t_0, t_0 étant quelconque F est alors continue sur $[0,+\infty[$.
D'autre part f étant S-asymptotiquement ω-périodique, donc

$$\lim_{t\to+\infty}\|f(t+w)-f(t)\| = 0,$$

et comme $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres naturels telle que $t_n \longrightarrow +\infty$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ alors

$$\lim_{n\to+\infty}\|f(\mu+t_n+\omega)-f(\mu+t_n)\| \ = 0, \quad \mu \geq 0. \tag{1.1}$$

De plus $f_{t_n} \longrightarrow F$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ uniformément sur les sous ensembles compacts de $[0,+\infty[$, i.e,

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{s\in\mathbb{K}}\|f_{t_n}(s)-F(s)\| = 0 \text{ avec } \mathbb{K} \text{ un compacte de } [0,+\infty[. \tag{1.2}$$

Ainsi de (1.1) et (1.2) on aura, pour tout $t \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$

$$\begin{gathered}\|f(s+t_n)-F(s)\| \leq \varepsilon \quad s \in [t, t+\omega],\\ \|f(\mu+t_n+\omega)-f(\mu+t_n)\| \leq \varepsilon, \quad \mu \geq 0.\end{gathered}$$

Maintenant, soit $t \geq 0$ et $n \geq n_0$, on a alors :

$$\begin{aligned}\|F(t+\omega)-F(t)\| &\leq \|F(t+\omega)-f(t+\omega+t_n)\| + \|f(t+\omega+t_n)-f(t+t_n)\|\\ &+ \|f(t+t_n)-F(t)\|\\ &\leq 3\varepsilon.\end{aligned}$$

ε étant quelconque, on déduit que $\|F(t+\omega)-F(t)\| = 0, \forall t \in [0,+\infty[$. F est donc ω-périodique.
■

Proposition 1.2.1. *Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow X$ une fonction uniformément* *continue, S-asymptotiquement ω-périodique et ω-normale sur les ensembles compacts. Si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres naturels telle que $t_n \longrightarrow +\infty$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$, alors il existe une sous suite $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $F \in C_\omega([0,+\infty[,X)$ telle que, $f_{s_j} \longrightarrow F$ lorsque $j \longrightarrow +\infty$ uniformément sur les ensembles compacts.*

Preuve. On a f est ω-normale sur les ensembles compacts, alors il existe une sous suite $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $G \in C_b([0,+\infty[,X)$ telles que, $f_{s_j\omega} \longrightarrow G$ lorsque $j \longrightarrow +\infty$ uniformément sur les sous ensembles compacts de $[0,+\infty[$. Comme f est S-asymptotiquement ω-périodique, G est ω-périodique en vertue du Lemme 1.2.1.
Considérons la décomposition $t_n = \varepsilon(t_n) + \tau(t_n)\omega$ pour $n \in \mathbb{N}$, où $\tau(t_n) \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon(t_n) \in [0,\omega[$.
Ainsi $s_j = \varepsilon(s_j) + \tau(s_j)\omega,\ \varepsilon(s_j) \in [0,\omega[$,
on a : $t_n \longrightarrow +\infty$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$, $\quad s_j \longrightarrow +\infty$ lorsque $j \longrightarrow +\infty$,
d'où

$$\tau(t_n) \longrightarrow +\infty \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty, \quad \tau(s_j) \longrightarrow +\infty \text{ lorsque } j \longrightarrow +\infty.$$

Comme f est ω-normale sur les ensembles compacts on a alors,

$$\lim_{j\to+\infty} \sup_{s\in\mathbb{K}} \|f_{\tau(s_j)\omega}(s) - G(s)\| \quad = 0 \text{ avec } \mathbb{K} \text{ un compact de } [0,+\infty[. \tag{1.3}$$

De plus, on peut supposer qu'il existe $\lambda \in [0,\omega]$ tel que $\varepsilon(s_j) \longrightarrow \lambda$ lorsque $j \longrightarrow +\infty$. En effet : si c'est le cas rien à montrer, alors si non comme $\varepsilon(s_j) \subseteq [0,\omega]$ qui est un compact on peut alors en extraire une sous-suite convergente.
De (1.3) et du fait que f est uniformément continue on aura :
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \geq j_0$

$$\|G(s+\lambda) - f(s+\lambda+\tau(s_j)\omega\| \leq \varepsilon \quad s \in \mathbb{K}$$

$$\|f(\lambda+\mu) - f(\varepsilon(s_j)+\mu)\| \leq \varepsilon \quad \mu \geq 0.$$

Par conséquence pour $t \in \mathbb{K}$ et $j \geq j_0$ on a :

$$\begin{aligned}\|G(\lambda+t)-f(s_j+t)\| &= \|G(\lambda+t)-f(\varepsilon(s_j)+\tau(s_j)\omega+t)\| \\ &\leq \|G(\lambda+t)-f(\lambda+t+\tau(s_j)\omega)\| \\ &+ \|f(\lambda+t+\tau(s_j)\omega)-f(\varepsilon(s_j)+\tau(s_j)\omega+t)\| \\ &\leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{K}$ et $\varepsilon > 0$ il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \geq j_o$

$$\|G(\lambda+t)-f(s_j+t)\| \leq 2\varepsilon.$$

Ce qui implique que $f_{s_j} \longrightarrow F = G_\lambda$ lorsque $j \longrightarrow +\infty$ uniformément sur les sous ensembles compacts de $[0,+\infty[$. De plus $F = G_\lambda \in C_\omega([0,+\infty[,X)$ puisque $G \in C_\omega[0,+\infty[,X)$.

■

Proposition 1.2.2. *Soit $f \in C_b([0,+\infty[,X)$ une fonction uniformément continue. Supposons que pour chaque suite de nombres naturels $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $m_n \longrightarrow +\infty$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$, il existe une sous suite $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $F \in C_\omega([0,+\infty[,X)$ telle que, $f_{k_j\omega} \longrightarrow F$ lorsque $j \longrightarrow +\infty$ uniformément sur les ensembles compacts, alors f est S-asymtotiquement ω-périodique.*

Preuve. Supposons que l'assertion est fausse, f n'est pas S-asymptotiquement ω-périodique, i.e,

$$\|f(t+\omega)-f(t)\| \nrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty.$$

On peut trouver alors $\varepsilon > 0$ et une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres naturels avec $t_n \longrightarrow +\infty$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ telle que :

$$\|f(t_n+\omega)-f(t_n)\| \geq \varepsilon \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Posons : $m_n = \tau(t_n)$, d'après les hypothèses de la proposition on déduit l'existence d'une sous suite $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'un nombre $\lambda \in [0,\omega]$ tel

que $\varepsilon(s_j) \longrightarrow \lambda$ lorsque $j \longrightarrow +\infty$ (quitte à passer à une sous-suite). De plus, puisque f est uniformément continue et $f_{k_j\omega} \longrightarrow F$ lorsque $j \longrightarrow +\infty$ uniformément sur les ensembles compacts, avec $F \in C_\omega([0,+\infty[,X)$ et $k_j = \tau(s_j)$, on aura :
Pour le $\varepsilon > 0$ associé à $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut trouver un $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $j \geq j_0$:

$$\|F(s) - f(s + k_j\omega)\| \leq \frac{\varepsilon}{8} \quad \forall s \in [\lambda, \lambda+\omega]$$
$$\|f(\lambda + k_j\omega + \mu) - f(\varepsilon(s_j) + k_j\omega + \mu)\| \leq \frac{\varepsilon}{8} \quad \forall \mu \geq 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} F(\lambda+\omega) - F(\lambda) &= (F(\lambda+\omega) - f(\lambda + k_j\omega + \omega)) + (f(\lambda + k_j\omega + \omega) - f(\varepsilon(s_j) + k_j\omega + \omega)) \\ &+ (f(\varepsilon(s_j) + k_j\omega + \omega) - f(\varepsilon(s_j) + k_j\omega)) + (f(\varepsilon(s_j) + k_j\omega) - f(\lambda + k_j\omega)) \\ &+ (f(\lambda + k_j\omega) - F(\lambda)). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \|F(\lambda+\omega) - F(\lambda)\| &\geq -\|F(\lambda+\omega) - f(\lambda + k_j\omega + \omega)\| - \|f(\lambda + k_j\omega + \omega) - f(\varepsilon(s_j) + k_j\omega + \omega)\| \\ &+ \|f(\varepsilon(s_j) + k_j\omega + \omega) - f(\varepsilon(s_j) + k_j\omega)\| - \|f(\varepsilon(s_j) + k_j\omega) - f(\lambda + k_j\omega)\| \\ &- \|f(\lambda + k_j\omega) - F(\lambda)\| \\ &\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ce qui contredit le fait que F est ω-périodique.
■

Dans ce qui suit, on va parler de relations entre la classe de fonctions S-asymptotiquement ω-périodiques et la classe de fonctions asymptotiquement ω-périodiques.

Proposition 1.2.3. . *Toute fonction asymptotiquement ω-périodique est S-asymptotiquement ω-périodique, i.e,*

$$AP_\omega(X) \subset SAP_\omega(X).$$

Preuve. Soit $f \in AP_\omega(X)$ alors f possède la décomposition suivante : $f = g + \varphi$ avec g est ω-périodique et $\varphi \in C_0([0,+\infty[, X)$, ainsi

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\|f(t+\omega)-f(t)\| &= \lim_{t\to+\infty}\|g(t+\omega)+\varphi(t+\omega)-g(t)-\varphi(t)\| \\ &= \lim_{t\to+\infty}\|\varphi(t+\omega)-\varphi(t)\| = 0.\end{aligned}$$

D'où $f \in SAP_\omega(X)$.

■

Remarque 1.2.2. L'inclusion dans la Proposition 1.2.3 est stricte.

Les exemples suivants confirment cette remarque.

Exemples 1.2.1. Soit X l'espace

$$C_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\}$$

muni de la norme $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$.
Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow X$ la fonction définie par : $f(t) = (\frac{2nt}{t^2+n^2})_{n\in\mathbb{N}}$
f est bornée et uniformément continue, **en effet :**
Soit $t \in [0,+\infty[$, $(t-n)^2 = t^2+n^2-2nt \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
d'où

$$\frac{2nt}{t^2+n^2} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Et donc, $\|f(t)\| \leq 1$ $\forall t \in [0,+\infty[$, f est alors bornée.
D'autre part, pour $s,\ t \in [0,+\infty[$, nous avons :

$$\|f(t+s)-f(t)\| \leq \sup_{n\geq 1}\frac{2ns|n^2-t^2-st|}{[(t+s)^2+n^2](t^2+n^2)} \leq 2s.$$

On en déduit alors que f est uniformément continue.
Maintenant, pour $\mu > 0$ et $t \geq 1$, nous avons :

$$\|f(t+\mu)-f(t)\| \leq \sup_{n\geq 1}\frac{2n|\mu n^2-\mu t^2-\mu^2 t|}{[(t+\mu)^2+n^2](t^2+n^2)}$$

$$\leq \sup_{n\geq 1}\frac{2n^3\mu+2n\mu t^2+2n\mu^2 t}{n^4+t^4}$$
$$\leq \sup_{n\geq 1}\frac{2n^3}{n^4+t^4}\mu+\sup_{n\geq 1}\frac{2nt^2}{n^4+t^4}\mu+\sup_{n\geq 1}\frac{2nt}{n^4+t^4}\mu^2.$$

Considérons les fonctions :

$$f_1(n)=\frac{2n^3}{n^4+t^4},\quad f_2(n)=\frac{2nt}{n^4+t^4},\quad f_3(n)=\frac{2nt^2}{n^4+t^4}.$$

$f_1'(n)=\frac{6n^2(n^4+t^4)-4n^3(2n^3)}{(n^4+t^4)^2}=\frac{2n^2(3t^4-n^4)}{(n^4+t^4)^2}$, f_1 atteint son sup au point $n=(3)^{\frac{1}{4}}t$, en remplaçant on trouve

$$f_1(n)=\frac{2(3)^{\frac{3}{4}}t^3}{4t^4}=\frac{(3)^{\frac{3}{4}}}{2t}\leq\frac{3}{2t}\leq\frac{4}{2t}\leq\frac{2}{t}.$$

$f_2'(n)=\frac{2t(n^4+t^4)-4n^3(2nt)}{(n^4+t^4)^2}=\frac{2t(t^4-3n^4)}{(n^4+t^4)^2}$, f_2 atteint son sup au point $n=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{4}}t$, en remplaçant on trouve

$$f_2(n)=\frac{2(\frac{1}{3})^{\frac{1}{4}}t^2}{\frac{4}{3}t^4}=\frac{3}{2t^2}(\frac{1}{3})^{\frac{1}{4}}\leq\frac{3}{2t^2}\leq\frac{6}{2t^2}\leq\frac{3}{t^2}.$$

$f_3'(n)=\frac{2t^2(n^4+t^4)-4n^3(2nt^2)}{(n^4+t^4)^2}=\frac{2t^2(t^4-3n^4)}{(n^4+t^4)^2}$, f_3 atteint son sup au point $n=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{4}}t$, en remplaçant on trouve

$$f_3(n)=\frac{2(\frac{1}{3})^{\frac{1}{4}}t^3}{\frac{4}{3}t^4}=\frac{3}{2t}(\frac{1}{3})^{\frac{1}{4}}\leq\frac{3}{2t}\leq\frac{4}{2t}\leq\frac{2}{t}.$$

D'où

$$\|f(t+\mu)-f(t)\|\leq\frac{4\mu}{t}+\frac{3\mu^2}{t^2}.$$

Par passage à la limite quand $t\longrightarrow+\infty$, on aura :

$$\lim_{t\to+\infty}\|f(t+\mu)-f(t)\|=0.$$

Ce qui implique que f **est S-asymptotiquement μ-périodique** pour tout $\mu>0$. Cependant, f **n'est pas asymptotiqument μ-périodique.**

En effet : Supposons qu'il existe $g \in C_\mu([0,+\infty[,X)$ et $\varphi \in C_0([0,+\infty[,X)$ tels que $f = g + \varphi$.
Si $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors chaque coordonnée f_n est asymptotiquement μ-périodique et

$$\begin{aligned} f_n(t+k\mu) &= g_n(t+k\mu) + \varphi_n(t+k\mu) \\ &= g_n(t) + \varphi_n(t+k\mu) \text{ pour } k,n \in \mathbb{N} \textbf{ et } t > 0. \end{aligned}$$

Du fait que $\lim\limits_{k\to+\infty} f_n(t+k\mu) = 0$, on en déduit que $g_n(t) = 0\ \ \forall t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, en effet :

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} f_n(t+k\mu) &= \lim_{k\to+\infty} g_n(t) + \lim_{k\to+\infty} \varphi_n(t+k\mu) \\ &= g_n(t) + \lim_{k\to+\infty} \varphi_n(t+k\mu), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

D'où $g_n(t) = 0\ \ \forall t \geq 0$ car $\varphi_n \in C_0([0,+\infty[,\mathbb{R})$.
Par conséquent $g = 0$ et $f = \varphi$, ce qui est absurde puisque $\varphi \in C_0([0,+\infty[,X)$ donc $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} \|\varphi(t)\| = 0$.
Or

$$\|\varphi(m)\| = \|f(m)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{2nm}{m^2+n^2} = 1;\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Ce qui montre que f n'est pas asymptotiquement μ-périodique.

Exemples 1.2.2. Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow C_0$ où C_0 est l'ensemble des suites bornées $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, muni de la norme $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ et f définie par $f(t) = (\exp(\frac{-t}{n}))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
f est bornée et uniformément continue, en effet :
Soit $t \in [0,+\infty[$, $f(t)$ qui est dans C_0 est une suite de norme 1

$$\|f(t)\| = \|\exp(\frac{-t}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |\exp(\frac{-t}{n})| = 1,$$

car $(\exp(\frac{-t}{n}))_{n\geq 1}$ est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(\frac{-t}{n}) = 1$.
D'où $\|f(t)\| = 1\ \ \forall t \in [0,+\infty[$, f est donc bornée.

D'autre part, pour $t,\ \mu \in [0,+\infty[$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|f(t+\mu)-f(t)\| &= \sup_{n\geq 1}|\exp(\frac{-(t+\mu)}{n})-\exp(\frac{-t}{n})| \\
&= \sup_{n\geq 1}|\exp(\frac{-t}{n})[\exp(\frac{-\mu}{n})-1]| \\
&\leq \sup_{n\geq 1}|\exp(\frac{-\mu}{n})-1|.
\end{aligned}$$

Maintenant, considérons la fonction

$$\begin{aligned}
g(\mu) &= \exp(\frac{-\mu}{n})-1 \\
g^{'}(\mu) &= \frac{-1}{n}\exp(\frac{-\mu}{n})
\end{aligned}$$

on a $|g^{'}(\mu)| \leq 1$.
Par le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0,\mu]$ on a :

$$\begin{aligned}
|g(\mu)-g(0)| &= |g^{'}(c)|.|\mu-0| \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\
|\exp(\frac{-\mu}{n})-1| &= |g^{'}(c)|\mu \leq \mu \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|f(t+\mu)-f(t)\| \leq \sup_{n\geq 1}|\exp(\frac{-\mu}{n})-1| \leq \mu.$$

On en déduit alors que f est uniformément continue.
Maintenant, pour $\mu > 0$ et $t \geq 1$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|f(t+\mu)-f(t)\| &= \sup_{n\geq 1}|\exp(\frac{-t}{n})[\exp(\frac{-\mu}{n})-1]| \\
&= \sup_{n\geq 1}|\exp(\frac{-t}{n}).\frac{-\mu}{n}.\exp(\theta)| \text{ avec } \frac{-\mu}{n} \leq \theta \leq 0.
\end{aligned}$$

En effet :
On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $\exp(x)$ sur l'intervalle $[\frac{-\mu}{n},0]$, on aura alors :

$$\exp(\frac{-\mu}{n})-1 = \frac{-\mu}{n}.\exp(\theta) \text{ avec } \frac{-\mu}{n} \leq \theta \leq 0,$$

ainsi

$$\|f(t+\mu)-f(t)\| = \sup_{n\geq 1}|\exp(\frac{-t}{n}).\frac{\mu}{n}.\exp(\theta)| \leq \sup_{n\geq 1}|\exp(\frac{-t}{n}).\frac{\mu}{n}|.$$

Posons $\frac{1}{n}=x$

$$\begin{aligned}\|f(t+\mu)-f(t)\| &\leq \sup_{n\geq 1}|\exp(\frac{-t}{n}).\frac{\mu}{n}|\\ &= \sup_{x=\frac{1}{n},\, n\in\mathbb{N}^*}|\exp(-tx).x.\mu|\\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^+}|\exp(-tx).x.\mu|.\end{aligned}$$

Considérons la fonction $g(x)=\exp(-tx).\mu.x$
$g'(x) = -t\mu x\exp(-tx)+\mu\exp(-tx) = \mu\exp(-tx)[1-tx]$
g atteint son sup au point $x=\frac{1}{t}$.
En remplaçant dans g on obtient :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*}|\exp(-tx).\mu.x| = \exp(-1).\frac{\mu}{t}.$$

Par suite

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\|f(t+\mu)-f(t)\| &= \lim_{t\to+\infty}\sup_{n\geq 1}|\exp(\frac{-t}{n})[\exp(\frac{-\mu}{n})-1]|\\ &\leq \lim_{t\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|\exp(-tx).\mu.x|\\ &\leq \lim_{t\to+\infty}\exp(-1).\frac{\mu}{t}=0.\end{aligned}$$

Ce qui implique que f **est S-asymptotiquement μ-périodique pour tout $\mu>0$.** Cependant, f **n'est pas asymptotiquement μ-périodique**.
En effet : Supposons qu'il existe $g\in C_\mu([0,+\infty[,X)$ et $\varphi\in C_0([0,+\infty[,X)$ tels que $f=g+\varphi$.
Si $f=(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors chaque coordonnée f_n est asymptotiquement μ-périodique

et

$$\begin{aligned} f_n(t+k\mu) &= g_n(t+k\mu)+\varphi_n(t+k\mu) \\ &= g_n(t)+\varphi_n(t+k\mu) \text{ pour } k,n\in\mathbb{N} \text{ et } t>0. \end{aligned}$$

Du fait que $\lim\limits_{k\to+\infty} f_n(t+k\mu)=0$, on en déduit que $g_n(t)=0\ \forall t\geq 0$ et $n\in\mathbb{N}$, en effet :

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} f_n(t+k\mu) &= \lim_{k\to+\infty} g_n(t)+\lim_{k\to+\infty}\varphi_n(t+k\mu) \\ &= g_n(t)+\lim_{k\to+\infty}\varphi_n(t+k\mu)\ \ \forall t\geq 0. \end{aligned}$$

D'où $g_n(t)=0\ \ \forall t\geq 0$ car $\varphi_n\in C_0([0,+\infty[,\mathbb{R})$.
Par conséquent $g=0$ et $f=\varphi$, ce qui est absurde puisque $\varphi\in C_0([0,+\infty[,X)$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\|\varphi(t)\|=0$.
Or

$$\|\varphi(t)\|=\|f(t)\|=1\ \ \forall t\in\mathbb{R}^+.$$

Ce qui montre que f n'est pas asymptotiquement μ-périodique.

♦ Dans l'article [11], il est affirmé que toute fonction S-asymptotiquement ω-périodique **numérique** est une fonction asymptotiquement ω-périodique. En fait cette affirmation est fausse, comme le montre le contre exemple suivant :

Exemples 1.2.3. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que $b_n\neq 0$, $\forall n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=0$, et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a_n=\sum_{i=1}^n b_i$ est bornée et non convergente.
Considérons la fonction $f:[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$f(t)=\begin{cases} a_n \text{ si } t=n \\ a_{n+1}+(a_{n+1}-a_n)(t-n-1) \text{ si } t\in[n,n+1] \end{cases}$$

f ainsi définie est bornée et continue, de plus f est uniformément continue.
En effet :
Posons $c=\max\limits_{n\geq 1}|a_n-a_{n-1}|$, et soit $s\in[n,n+1]$, $t\in[n,n+2]$.

Si $s,\ t$ sont tout les deux dans $[n, n+1]$, alors

$$\begin{aligned}
(f(t)-f(s)) &= (a_{n+1}+(a_{n+1}-a_n)(t-n-1)-a_{n+1}-(a_{n+1}-a_n)(s-n-1)\\
&= (a_{n+1}-a_n)(t-s).
\end{aligned}$$

D'où $|f(t)-f(s)| \leq |a_{n+1}-a_n||t-s| \leq c|t-s|$.
Si $s \in [n, n+1]$ et $t \in [n+1, n+2]$, alors
$(f(t)-f(s)) = (f(t)-f(n+1)+f(n+1)-f(s))$.
D'où

$$\begin{aligned}
|f(t)-f(s)| &\leq |f(t)-f(n+1)|+|f(n+1)-f(s)|\\
&\leq c|t-n-1|+c|n+1-s|\\
&= c|t-s|.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour $t \in [n, n+1], (t+1 \in [n+1, n+2])$.
On a :

$$\begin{aligned}
|f(t+1)-f(t)| &= |f(t+1)-f(n+1)+f(n+1)-f(t)|\\
&\leq |f(t+1)-f(n+1)|+|f(n+1)-f(t)|\\
&\leq |a_{n+2}-a_{n+1}|+|a_{n+1}-a_n|\\
&\leq |b_{n+2}|+|b_{n+1}|.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $b_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$n \geq n_0 \Rightarrow |b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
D'où $\forall t \geq n_0\ |f(t+1)-f(t)| \leq |b_{n+2}|+|b_{n+1}| < \varepsilon$.
On a alors $\underset{t\to+\infty}{lim} |f(t+1)-f(t)| = 0$.
On conclut alors que f est S-asymptotiquement 1-périodique. Cependant f n'est pas asymptotiquement 1-périodique, en effet :
Supposons que $f = g+\alpha$, où g est une fonction 1-périodique et α une fonction qui s'annulle à l'infini. Dans ce cas,

$$f(n) = a_n = g(n)+\alpha(n) = g(0)+\alpha(n),$$

maintenant, comme $\lim_{n\to+\infty} \alpha(n) = 0$. On déduit que $\lim_{n\to+\infty} a_n = g(0)$ et donc la suite (a_n) est convergente, ce qui est en contraduction avec l'hypothèse de départ.

► Dans la suite, nous établissons des conditions sous lesquelles les fonctions S-asymptotiquement ω-périodiques sont asymptotiquement ω-périodiques.

Proposition 1.2.4. *Soit $f \in C_b([0, +\infty[, X)$ une fonction ω-normale sur les ensembles compacts et* ***S-asymptotiquement ω-périodique****. Supposons qu'il existe une suite strictement croissante de nombres naturels $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite de nombres positifs $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :*

$$\sum_{j\geq 0}(\tau_{j+1} - \tau_j)\gamma_j < +\infty$$

si $\|f(t+\omega) - f(t)\| \leq \gamma_n$ pour chaque $t \in [\tau_n\omega, \tau_{n+1}\omega]$, alors f ***est asymptotiquement ω-périodique****.*

Preuve. D'après la Définition 1.2.2 et le Lemme 1.2.1 on peut trouver une sous suite $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $m_j = \tau_{n_j}$ et $F \in C_\omega([0, +\infty[, X)$ telle que $f_{m_j\omega} \longrightarrow F$ lorsque $j \longrightarrow +\infty$ uniformément sur les sous ensembles compacts de $[0, +\infty[$.
On affirme que $\|F(t) - f(t)\| \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$, auquel cas f est asymptotiquement ω-périodique, pour se faire :
pour toute $\varepsilon > 0$ on peut trouver $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $j \geq j_0$,

$$\sum_{j\geq j_0}(\tau_{j+1} - \tau_j)\gamma_j \leq \varepsilon \text{ et } \|F(s) - f(s + m_j\omega)\| \leq \varepsilon \quad \forall s \in [0, \omega].$$

Soit $t \geq m_{j_0}\omega$, alors il existe un indice $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq j_0$ tel que
$t \in [m_p\omega, m_{p+1}\omega]$.
L'intervalle $[m_p, m_{p+1}]$ peut contenir d'autres points de la suite originale $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous la forme $\tau_{n_p} < \tau_{n_p+1} < \tau_{n_p+2} < .... < \tau_{n_p+q} = \tau_{n_{p+1}}$.
De même chaque intervalle $[\tau_{n_p+i}, \tau_{n_p+i+1}]$ avec $i = 0, ..., q-1$, peut contenir des nombres naturels $\tau_{n_p+i} + h$ avec $h = 0, ..., H(i)$ de sorte que

$\tau_{n_p+i} + H(i) = \tau_{n_p+i+1}$.
Pour abréger les notations on écrit $k(i) = \tau_{n_p+i}$, de plus pour $0 \le s \le q-1$ tel que $t \in [\tau_{n_p+s}\omega, \tau_{n_p+s+1}\omega]$, considère la décomposition $t = \varepsilon(t) + \eta(t)\omega$ avec $\varepsilon(t) \in [0, \omega[$ et $\eta(t)$ un nombre naturel tel que $\eta(t) = \tau_{n_p+s} + h(t)$ où $0 \le h(t) \le H(s)$.
Avec ces notations on obtient :

$$\begin{aligned}
\|F(t) - f(t)\| &= \|F(\varepsilon(t) + \eta(t)\omega) - f(\varepsilon(t) + \eta(t)\omega)\|, \\
&= \|F(\varepsilon(t)) - f(\varepsilon(t) + \eta(t)\omega)\|, \\
&\le \|F(\varepsilon(t)) - f(\varepsilon(t) + m_p\omega)\| + \|f(\varepsilon(t) + m_p\omega) - f(\varepsilon(t) + \eta(t)\omega)\|, \\
&\le \varepsilon + \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j=k(i)}^{k(i)+H(i)-1} \|f(\varepsilon(t) + (j+1)\omega) - f(\varepsilon(t) + j\omega)\|, \\
&+ \sum_{j=k(s)}^{k(s)+h(t)-1} \|f(\varepsilon(t) + (j+1)\omega) - f(\varepsilon(t) + j\omega)\|, \\
&\le \varepsilon + \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j=k(i)}^{k(i)+H(i)-1} \gamma_{n_p+i} + \sum_{j=k(s)}^{k(s)+h(t)-1} \gamma_{n_p+s}, \\
&\le \varepsilon + \sum_{i=0}^{s} \gamma_{n_p+i} H(i), \\
&= \varepsilon + \sum_{i=0}^{s} \gamma_{n_p+i} (\tau_{n_p+i+1} - \tau_{n_p+i}), \\
&\le \varepsilon + \sum_{i \ge n_p} \gamma_i (\tau_{i+1} - \tau_i), \\
&\le 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\|F(t) - f(t)\| \le 2\varepsilon$ pour tout $t \ge m_{j_0}\omega$, donc f est asymptotiquement ω-périodique.
■

Proposition 1.2.5. *Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow X$ une fonction S-asymptotiquement ω-périodique et asymptotiquement presque périodique. Alors f est asymptotiquement ω-périodique.*

Preuve. On a f est asymptotiqement presque périodique, donc f possède la décomposition suivante : $f = g + \varphi$ avec g une fonction presque périodique et $\varphi \in C_0([0, +\infty[, X)$.
De la définition des fonctions presque périodiques, il existe une suite de nombres réels $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $t_n \longrightarrow +\infty$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$, et $g_{t_n} \longrightarrow g$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ uniformément sur $[0, +\infty[$.
On aura : $f_{t_n} = g_{t_n} + \varphi_{t_n} \longrightarrow g$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ uniformément sur $[0, +\infty[$ (car $\varphi \in C_0([0, \infty[, X))$.
Ainsi d'après le Lemme 1.2.1, $g \in C_\omega([0, \infty[, X)$. Ce qui implique que f est asymptotiquement ω-périodique.
■

Corollaire 1.2.1. *Soit $f \in C_b([0, +\infty[, X)$. Supposons qu'il existe une suite de nombres naturels $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ avec $n_1 = 1$ et $n_j \longrightarrow +\infty$ lorsque $j \longrightarrow +\infty$ telle que : $\alpha = \sup_{j\in\mathbb{N}}(n_{j+1} - n_j) < +\infty$ et*

$$\lim_{t\to+\infty} \|f(t + n_j\omega) - f(t)\| = 0 \text{ uniformément par rapport à } j \in \mathbb{N}.$$

Alors f est asymptotiquement ω-périodique.

Preuve. On a pour $n_j = 1$, $\lim_{t\to+\infty} \|f(t+\omega)-f(t)\| = 0$, d'où $f \in SAP_\omega(X)$.
D'autre part,

$$\lim_{t\to+\infty} \|f(t + n_j\omega) - f(t)\| = 0 \text{ uniformément par rapport à } n_j,$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{n_j} \|f(t + n_j\omega) - f(t)\| = 0,$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall\varepsilon > 0; \exists\mathbb{N}_\varepsilon > 0 : \forall t \geq \mathbb{N}_\varepsilon, \|f(t + n_j w) - f(t)\| \leq \varepsilon \;\; \forall n_j.$$

Ce qui montrer que $H(\varepsilon, f) = \{n_j, j \in \mathbb{N}\}$ (voir Définition 1.1.2).
Comme $\alpha = \sup_{j\in\mathbb{N}}(n_{j+1} - n_j) < +\infty$, on déduit alors que tout intervalle de longueur α contient au moins un élément de l'ensemble $H(\varepsilon, f)$. $H(\varepsilon, f)$ est re-

lativement dense dans $\mathbb{R}^+$, ainsi f est asymptotiquement presque périodique. Par la Proposition 1.2.5 f est asymptotiquement ω-périodique.

■

Théorème 1.2.1. *Supposons que X un espace réflexif.*
Soit $f \in C_b([0,+\infty[, X)$ une fonction uniformément continue telle que : pour chaque $x' \in X'$, $\lim\limits_{t\to+\infty} x'(f(t+n\omega)-f(t)) = 0$ uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe $g \in C_\omega([0,+\infty[, X)$ et $\varphi \in C_b([0,+\infty[, X)$ telles que, $f = g+\varphi$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} x'(\varphi(t)) = 0$ pour chaque $x' \in X'$.

Preuve. Pour chaque $x' \in X'$, la fonction $x'(f)$ vérifie les conditions du Corollaire 1.2.1, elle est alors asymptotiquement ω-périodique. Donc, il existe une fonction ω-périodique $g_{x'} \in C_\omega([0,+\infty[, \mathbb{K})$ et une fonction $\varphi_{x'} \in C_0([0,+\infty[, \mathbb{K})$ telles que

$$x'(f) = g_{x'} + \varphi_{x'}.$$

En effet :

$$\begin{aligned} x'(f) : [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{K} \\ t &\longmapsto x'(f)(t) \end{aligned}$$

$x'(f)$ est clairement dans $C_b([0,+\infty[, \mathbb{K})$, et de l'hypothèse :

$$\lim_{t\to+\infty} x'(f(t+n\omega)-f(t)) = \lim_{t\to+\infty} [x'(f)(t+n\omega) - x'(f)(t)] = 0$$

uniformément par rapport à n, on voit bien qu'elle vérifie les conditions du Corollaire 1.2.1.
Pour chaque $t \geq 0$, on définit la fonction

$$\begin{aligned} \Lambda_t : X' &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x' &\longmapsto \Lambda_t(x') = g_{x'}(t). \end{aligned}$$

Il découle de l'unicité de la décomposition de $x'(f)$, comme somme d'une fonction ω-périodique et d'une fonction de $C_0([0,+\infty[, \mathbb{K})$, que Λ_t est une

fonctionnelle (forme) linéaire sur X'.
En effet :

$$\Lambda_t(\lambda x' + y') = g_{\lambda x'+y'}(t),$$

$$\begin{aligned}(\lambda x' + y')(f) &= g_{\lambda x'+y'} + \varphi_{\lambda x'+y'},\\ &= \lambda x'(f) + y'(f),\\ &= \lambda g_{x'} + \lambda\varphi_{x'} + g_{y'} + \varphi_{y'},\\ &= \underbrace{\lambda g_{x'} + g_{y'}} + \underbrace{\lambda\varphi_{x'} + \varphi_{y'}}.\end{aligned}$$

D'où $g_{\lambda x'+y'} = \lambda g_{x'} + g_{y'}$. Et donc :

$$\Lambda_t(\lambda x' + y') = g_{\lambda x'+y'}(t) = \lambda g_{x'}(t) + g_{y'}(t) = \lambda\Lambda_t(x') + \Lambda_t(y').$$

Maintenant on a :

$$\begin{aligned}|\Lambda_t(x')| = |g_{x'}(t)| &= |g_{x'}(t+k\omega)|,\\ &= |x'(f(t+k\omega)) - \varphi_{x'}(t+k\omega)|,\\ &\leq |x'(f(t+k\omega))| + |\varphi_{x'}(t+k\omega)|,\\ &\leq \|x'\|\|f(t+k\omega)\| + |\varphi_{x'}(t+k\omega)|,\\ &\leq \|x'\|\|f\|_\infty + |\varphi_{x'}(t+k\omega)|,\end{aligned}$$

par passge à la limite quand $k \longrightarrow +\infty$, il s'en suit que

$$|\Lambda_t(x')| \leq \|x'\|\|f\|_\infty \;\forall t \geq 0.$$

Donc $\|\Lambda_t\| \leq \|f\|_\infty \;\forall t \geq 0$.
Ainsi $\forall t,\ \Lambda_t$ est une forme linéaire continue sur X'. On déduit alors $\Lambda_t \in X''$, et comme X est réfléxif, il existe un élément de X (cet élément sera noté $g(t)$) tel que

$$\Lambda_t(x') = x'(g(t)) = g_{x'}(t).$$

Donc on peut dire, qu'il existe une fonction $g : [0, +\infty[\longrightarrow X$ telle que :

$$\Lambda_t(x') = x'(g(t)) = g_{x'}(t) \;\forall x' \in X', \forall t \geq 0.$$

On définit alors $\varphi(t) = f(t) - g(t)$.
Il est claire que $g \in C_\omega([0,+\infty[, X)$, en effet :

$$g_{x'}(t + k\omega) = x'(g(t + k\omega)) = g_{x'}(t) = x'(g(t)). \;\star$$

Car $g_{x'}$ est ω-périodique.
Par suit, comme $\star$ est vérifiée, $\forall x' \in X'$, on a alors $g(t) = g(t + k\omega)$. D'où g est ω-périodique et que la limite de $x'(\varphi(t))$ quand $t \longrightarrow +\infty$ est 0, en effet : Soit $x' \in X'$

$$x'(\varphi(t)) = x'(f(t)) - x'(g(t)) = x'(f(t)) - g_{x'}(t) = \varphi_{x'}(t).$$

Or $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi_{x'}(t) = 0$ (car $\varphi_{x'} \in C_0([0,+\infty[, \mathbb{K})$), d'où $\lim\limits_{t\to+\infty} x'(\varphi(t)) = 0$.
Il reste à montrer que g est continue.
Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\delta > 0$ tel que $\|f(t) - f(s)\| \leq \varepsilon$, $\forall s,\ t \in [0,+\infty[$ tel que $|t - s| < \delta$ (l'uniforme continuité de f),
d'où, pour tout $t \geq 0,\ 0 \leq |h| \leq \delta$ avec $t + h \geq 0,\ x' \in X'$ et $k \in \mathbb{N}$.
Nous avons :

$$\begin{aligned}
|x'(g(t+h) - g(t))| &= |x'(g(t+h)) - x'(g(t))|, \\
&= |g_{x'}(t+h) - g_{x'}(t)|, \\
&= |g_{x'}(t+h+k\omega) - g_{x'}(t+k\omega)|, \\
&= |x'(f(t+h+k\omega)) - \varphi_{x'}(t+h+k\omega) - x'(f(t+k\omega)) + \varphi_{x'}(t+k\omega)|, \\
&\leq |x'(f(t+h+k\omega)) - x'(f(t+k\omega))| + |\varphi_{x'}(t+h+k\omega) - \varphi_{x'}(t+k\omega)|, \\
&\leq \|x'\|\|f(t+h+k\omega) - f(t+k\omega)\| + |\varphi_{x'}(t+h+k\omega) - \varphi_{x'}(t+k\omega)|, \\
&\leq \varepsilon\|x'\| + |\varphi_{x'}(t+h+k\omega) - \varphi_{x'}(t+k\omega)|.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $k \longrightarrow +\infty$, on déduit que

$$|x'(g(t+h) - g(t))| \leq \varepsilon\|x'\| \;\; \forall x' \in X'.$$

Ce qui implique que $\|g(t+h) - g(t)\| \leq \varepsilon$, g est donc continue.
■

Théorème 1.2.2. *Soit $f \in C_b([0,+\infty[, X)$ une fonction ω-normale sur les*

ensembles compacts telle que, pour chaque $x' \in X'$,
$\lim\limits_{t \to +\infty} x'(f(t+n\omega) - f(t)) = 0$ *uniformément par rapport à* $n \in \mathbb{N}$. *Alors* f *est asymptotiquement* ω*-périodique.*

Preuve. Comme f est ω-normale sur les ensembles compacts, il existe une suite $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{N}$ et $F \in C_b((0,+\infty[, X)$ tel que $f_{n_j\omega} \longrightarrow F$ lorsque $j \longrightarrow +\infty$ uniformément sur les ensembles compacts.
Pour chaque $x' \in X'$, la fonction $x^{'}(f)$ vérifie les conditions du Corollaire 1.2.1. Donc elle est asymptotiquement ω-périodique, elle est S-asymptotiquement ω-périodique et $x'(f_{n_j\omega}) \longrightarrow x'(F)$ lorsque $j \longrightarrow +\infty$ uniformément sur les ensembles compacts (car $x^{'}$ forme linéaire continue sur X).
Il découle de Lemme 1.2.1 que $x'(F) \in C_\omega([0,+\infty[, X)$, donc il existe $\omega > 0$ tel que $x^{'}(F(t+\omega)) = x'(F(t))$, $\forall x' \in X'$, d'où F(t+ω)=F(t) ainsi $F \in C_\omega([0,+\infty[, X)$.
On affirme que $\|F(t) - f(t)\| \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$, au quel cas f est asymptotiquement ω-périodique. Pour se faire :
Comme $x'(f) \in AP_\omega(X)$, il existe alors une fonction ω-périodique $g_{x'} \in C_\omega([0,+\infty[, \mathbb{K})$ et une fonction $\varphi_{x'} \in C_0([0,+\infty[, \mathbb{K})$ telles que

$$x'(f)(t) = g_{x'}(t) + \varphi_{x'}(t),\ \forall t \geq 0.$$

Par conséquant

$$x'(f)(t+n_j\omega) = g_{x'}(t+n_j\omega) + \varphi_{x'}(t+n_j\omega) = g_{x'}(t) + \varphi_{x'}(t+n_j\omega).$$

Par passage à la limite quand $j \longrightarrow +\infty$

$$\lim_{j\to+\infty} x'(f)(t+n_j\omega) = g_{x'}(t) + \lim_{j\to+\infty} \varphi_{x'}(t+n_j\omega).$$

Donc $x'(f_{n_j\omega}) \longrightarrow g_{x'}$ quand $j \longrightarrow +\infty$ (car $\varphi_{x'} \in C_0([0,+\infty[, \mathbb{K})$).
Or $x'(f_{n_j\omega}) \longrightarrow x'(F)$ quand $j \longrightarrow +\infty$.
Ce qui implique que $x'(F)(t) = g_{x'}(t)$ pour tout $t \geq 0$, cela montrer que F est indépendante de la suite $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$, et par conséquent $f_{n\omega} \longrightarrow F$ uniformément sur les ensembles compacts.

Alors pour $\varepsilon > 0$ fixe, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall j \geq n_0; \|f(s+j\omega)-F(s)\| \leq \varepsilon$ pour chaque $s \in [0, \omega]$.
Si $t \geq n_0\omega$ alors $\tau(t) \geq n_0$ et

$$\begin{aligned} \|F(t) - f(t)\| &= \|F(\varepsilon(t) + \tau(t)\omega) - f(\varepsilon(t) + \tau(t)\omega)\|, \\ &= \|F(\varepsilon(t)) - f(\varepsilon(t) + \tau(t)\omega)\|, \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $F(t) - f(t) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$, donc f est asymptotiquement ω-périodique.
■

On termine ce chapitre avec la propriété suivante de l'espace $SAP_\omega(X)$.

Proposition 1.2.6. *$SAP_\omega(X)$ le sous espace de $C_b([0, +\infty[, X)$ composé des fonctions S-asymptotiquement ω-périodique est de Banach.*

Preuve. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $SAP_\omega(X)$ qui converge vers f quand $n \longrightarrow +\infty$. On a :

$$\|f(t+\omega)-f(t)\| \leq \|f(t+\omega)-f_n(t+\omega)\|+\|f_n(t+\omega)-f_n(t)\|+\|f_n(t)-f(t)\|.$$

Ce qui implique que $\lim\limits_{t\to+\infty} \|f(t+\omega) - f(t)\| = 0$ donc $f \in SAP_\omega(X)$, d'où l'espace $SAP_\omega(X)$ est fermé. Comme $C_b([0, +\infty[, X)$ est un espace de Banach, alors $SAP_\omega(X)$ est aussi de Banach.
■

CHAPITRE 2

Problème de Cauchy abstrait

L'objectif de ce chapitre est d'énoncer des résultats sur l'existence d'une solution "mild" S-asymptotiquement ω-périodique du problème de Cauchy abstrait de premier ordre suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = & Au(t) + G(t, u(t)), \quad t \geq 0, \\ u(0) = & x_0 \in X, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X et
$G : [0, +\infty[\times X \longrightarrow X$ est une fonction continue.
Pour une lecture supplémentaire sur les semi-groupes d'opérateurs linéaires nous renvoyons le lecteur à [14].

2.1 Résultats d'existence d'une solution "mild" S-asymptotiquement ω-périodique d'un problème de Cauchy

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude du Problème (2.1).
On commence d'abord par étudier le problème homogène, i.e, nous considérons

le cas où $G = 0$. Dans ce cas, la question de l'existence d'une solution "mild" S-asymptotiquement ω-périodique du Problème (2.1) est réduite à l'étude des semi-groupes fortement S-asymptotiquement ω-périodiques, notion que l'on va introduire dans le paragraphe suivant.

2.1.1 Problème de Cauchy Homogène

Définition 2.1.1. ([14]) Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X de générateur infinitésimal A. Alors pour tout $x_0 \in X$,
la fonction $u : t \longmapsto u(t) = T(t)x_0$ est l'unique solution "mild" du problème homogène de valeur initiale x_0.

Définition 2.1.2. ([10]) Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur X. Alors :
•$(T(t))_{t\geq 0}$ est dit semi-groupe fortement S-asymptotiquement ω-périodique, s'il existe $\omega > 0$ tel que $T(.)x$ est S-asymptotiquement ω-périodique pour tout $x \in X$.
•$(T(t))_{t\geq 0}$ est dit semi-groupe fortement S-asymptotiquement périodique, si pour tout $x \in X$ il existe $\omega_x > 0$ tels que $T(.)x$ est S-asymptotiquement ω_x-périodique.
•$(T(t))_{t\geq 0}$ est dit semi-groupe fortement périodique, si pour tout $x \in X$ il existe $\omega_x > 0$ tels que $T(.)x$ est ω_x-périodique.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire pour l'existence d'une solution "mild" S-asymptotiqument ω-périodique du problème de Cauchy homogène.

Théorème 2.1.1. *([10]) Supposons que $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement S-asymptotiquement périodique, tel que l'ensemble $\{T(t)x : 0 \leq t < +\infty\}$ est relativement compact pour tout $x \in X$.*
Alors il existe $\omega > 0$ et une décomposition de X, $X = X_0 \oplus X_1$ où $X_i, i = \overline{0,1}$ un sous-espace fermé de X invariant sous $T(t)$, et le semi-groupe
$T_0(t) = T(t)/X_0$ est ω-périodique, et le semi-groupe $T_1(t) = T(t)/X_1$ est fortement stable.

2.1.2 Problème de Cauchy Non homogène

Définition 2.1.3. ([10]) Une fonction $u \in C_b([0,+\infty[,X)$ est dite une solution "mild" S-asymptotiquement ω-périodique du Problème (2.1) si :
u est S-asymptotiquement ω-périodique et u est donnée par :

$$u(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)G(s,u(s))ds, \quad t \geq 0.$$

• **Premier résultat d'existence d'une solution "mild" S-asymptotiquement ω-périodique**

Théorème 2.1.2. *Supposons que $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement S-asymptotiquement ω-périodique. Soit $G : [0,+\infty[\times X \longrightarrow X$ une fonction continue telle que $G(.,0)$ intégrable sur $[0,+\infty[$, et supposons qu'il existe une fonction continue intégrable $L : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$\|G(t,x) - G(t,y)\| \leq L(t)\|x-y\|, \quad \forall t \geq 0 \text{ et } x,\ y \in X.$$

Alors il existe une unique solution "mild" S-asymptotiquement ω-périodique du Problème (2.1).

Preuve. Soit l'opérateur Γ définie sur l'espace $SAP_\omega(X)$ par :

$$\Gamma u(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)G(s,u(s))ds = T(t)x_0 + v(t).$$

Pour montrer que $\Gamma u \in SAP_\omega(X)$, il suffit de montrer que $v \in SAP_\omega(X)$ (puisque $T(t)x_0 \in SAP_\omega(X)$).
Le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est uniformément borné sur $[0,+\infty[$, i.e, $\exists M \geq 1$ tel que $\|T(t)\| \leq M, \quad \forall t \geq 0$. En effet :
$(T(t))_{t\geq 0}$ est une famille d'opérateurs linéaires bornés de X dans X. Comme $B = \{x \in X \text{ tel que } \sup\limits_{t\in[0,+\infty[} \|T(t)x\| < +\infty\} = X$, par le théorème de **Banach-Steinhauss,** on déduit alors $\exists M > 0$ telle que $\|T(t)\| \leq M$, $\forall t \geq 0$.

D'autre part, on a :

$$\|G(t,x) - G(t,y)\| \leq L(t)\|x-y\|, \ \ \forall t \geq 0 \text{ et } x, \ y \in X.$$

On particulier pour $x = u(s), \ s \geq 0$ et $y = 0$
on aura :

$$\|G(s,u(s))\| \leq L(s)\|u(s)\| + \|G(s,0)\|.$$

Il découle de cette inégalité que l'application $s \longmapsto G(s,u(s))$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. On obtient alors que :

$$\int_a^t T(t-s)G(s,u(s))ds \longrightarrow 0, \text{ quand } a \longrightarrow +\infty$$

uniformément par rapport à $t \geq a$.
En effet :

$$\begin{aligned} \| \int_a^t T(t-s)G(s,u(s))ds\| &\leq \int_a^t \|T(t-s)G(s,u(s))\|ds \\ &\leq \int_a^t \|T(t-s)\|\|G(s,u(s))\|ds \\ &\leq \int_a^t M\|G(s,u(s))\|ds \\ &\leq M\int_a^{+\infty} \|G(s,u(s))\|ds. \end{aligned}$$

Comme $G(s,u(s))$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (et donc $\|G(s,u(s))\|$ aussi).
On a :

$$\lim_{a\to+\infty}\int_a^{+\infty} \|G(s,u(s))\|ds = 0,$$

et donc

$$\lim_{a\to+\infty}\int_a^t T(t-s)G(s,u(s))ds = 0 \text{ uniformément par rapport à } t \geq a.$$

De plus, pour un a fixé, l'ensemble $\{G(s,u(s)), \ 0 \leq s \leq a\}$ est compact (car, image d'un compact par une application continue).

Ce qui implique que

$$T(t+\omega)G(s,u(s)) - T(t)G(s,u(s)) \longrightarrow 0, \text{ quand } t \longrightarrow +\infty$$

uniformément par rapport à $s \in [0,a]$.
En effet : Comme $\{G(s,u(s)),\ 0 \leq s \leq a\}$ est compact ;
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ε-réseau fini de $\{G(s,u(s)),\ 0 \leq s \leq a\}$
c-à-d $\exists$ une partie finie $\{s_i,\ i = 1,...,n,\ 0 \leq s_i \leq a\}$ telle que $\forall s \in [0,a]$,
$\exists\, i \in \{1,...,n\}$ tel que :

$$\|G(s,u(s)) - G(s_i,u(s_i))\| \leq \varepsilon.$$

Considérons alors un $\frac{\varepsilon}{3M}$ réseau fini de l'ensemble $\{G(s,u(s)),\ 0 \leq s \leq a\}$,
soit $\{s_i,\ 1 \leq i \leq n\}$. Pour tout $i \in \{1,....,n\}, \exists A_i > 0$ tel que

$$t \geq A_i \Rightarrow \|T(t+\omega)G(s_i,u(s_i)) - T(t)G(s_i,u(s_i))\| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

car $T(.)G(s_i,u(s_i))$ est $SAP_\omega(X)$. Soit alors $A = \sup\limits_{i=1...n} A_i$.
On aura donc : $\forall i \in \{1....n\}$

$$t \geq A \Rightarrow \|T(t+\omega)G(s_i,u(s_i)) - T(t)G(s_i,u(s_i))\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $s \in [0,a]$ et Considérons la quantité $T(t+\omega)G(s,u(s)) - T(t)G(s,u(s))$.
On a pour i tel que $\|G(s,u(s)) - G(s_i,u(s_i))\| \leq \frac{\varepsilon}{3M}$:

$$\begin{aligned}
\|T(t+\omega)G(s,u(s)) - T(t)G(s,u(s))\| &\leq \|T(t+\omega)G(s,u(s)) - T(t+\omega)G(s_i,u(s_i))\| \\
&+ \|T(t+\omega)G(s_i,u(s_i)) - T(t)G(s_i,u(s_i))\| \\
&+ \|T(t)G(s_i,u(s_i)) - T(t)G(s,u(s))\| \\
&\leq \|T(t+\omega)\|\|G(s,u(s)) - G(s_i,u(s_i))\| \\
&+ \|T(t+\omega)G(s_i,u(s_i)) - T(t)G(s_i,u(s_i))\| \\
&+ \|T(t)\|\|G(s,u(s)) - G(s_i,u(s_i))\| \\
&\leq M\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + M\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon \text{ dès que } t \geq A.
\end{aligned}$$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0$ tel que : $\forall t \geq A$

$$\|T(t+\omega)G(s,u(s)) - T(t)G(s,u(s))\| \leq \varepsilon \ \forall s \in [o,a].$$

D'où $T(t+\omega)G(s,u(s)) - T(t)G(s,u(s)) \longrightarrow 0$, quand $t \longrightarrow +\infty$ uniformément par rapport à $s \in [0,a]$.

Maintenant, avec ces propriétés on aura :

$$\begin{aligned}
v(t+\omega) - v(t) &= \int_0^{t+\omega} T(t+\omega-s)G(s,u(s))ds - \int_0^t T(t-s)G(s,u(s))ds \\
&= \int_0^a [T(t+\omega-s) - T(t-s)]G(s,u(s))ds + \int_a^{t+\omega} T(t+\omega-s)G(s,u(s))ds \\
&- \int_a^t T(t-s)G(s,u(s))ds.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0, \exists M > 0$ tel que $\forall a \geq M$ on a :

$$\|\int_a^{t+\omega} T(t+\omega-s)G(s,u(s))ds\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall t \geq a,$$

et

$$\|\int_a^t T(t-s)G(s,u(s))ds\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall t \geq a.$$

Soit alors $a > 0$ tel que $a \geq M$.
Il existe $M' > 0$ tel que $\forall t \geq M'$

$$\|[T(t+\omega-s) - T(t-s)]G(s,u(s))\| \leq \frac{\varepsilon}{3a} \ \forall s \in [0,a].$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|v(t+\omega) - v(t)\| &\leq \int_0^a \|[T(t+\omega-s) - T(t-s)]G(s,u(s))\|ds \\
&+ \|\int_a^{t+\omega} T(t+\omega-s)G(s,u(s))ds\| + \|\int_a^t T(t-s)G(s,u(s))ds\| \\
&\leq \varepsilon \text{ dès que } t \geq M'.
\end{aligned}$$

Il s'en suit que $v(t+w) - v(t) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$, et donc $v \in SAP_\omega(X)$.

Ainsi $\Gamma u \in SAP_\omega(X)$.

Maintenant, pour $u_1,\ u_2 \in SAP_\omega(X)$ on a : $\forall t \geq 0$

$$\begin{array}{rcl} \|\Gamma u_1(t) - \Gamma u_2(t)\| & \leq & M \displaystyle\int_0^t L(s)\|u_1(s) - u_2(s)\|ds \\ & \leq & M \displaystyle\int_0^{+\infty} L(s)\|u_1 - u_2\|_\infty ds. \\ & = & (M \displaystyle\int_0^{+\infty} L(s)ds)\|u_1 - u_2\|_\infty. \end{array}$$

D'où $\|\Gamma u_1(t) - \Gamma u_2(t)\|_\infty \leq (M \int_0^{+\infty} L(s)ds)\|u_1 - u_2\|_\infty$, Γ est alors une application continue.
D'autre part, considérons l'opérateur linéaire

$$\begin{array}{rcl} B : C_b([0, +\infty[, \mathbb{R}) & \longrightarrow & C_b([0, +\infty[, \mathbb{R}) \\ \alpha & \longmapsto & B\alpha \end{array}$$

où $(B\alpha)(t) = M \int_0^t L(s)\alpha(s)ds,\ \forall t \geq 0$.
B est un opérateur linéaire continu, en effet :

$$\|B\alpha\|_\infty \leq (M \int_0^{+\infty} L(s)ds)\|\alpha\|_\infty.$$

De plus B est compact. Pour le montrer, nous allons montrer que l'ensemble $\{B\alpha,\ \|\alpha\|_\infty \leq 1\}$ est relativement compact dans $C_b([0, +\infty[, \mathbb{R})$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $a > 0$ tel que $M \int_a^{+\infty} L(s)ds \leq \varepsilon$ (c'est possible car $\lim\limits_{a \longrightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} L(s)ds = 0$).
Pour $\alpha \in C_b([0, +\infty[, \mathbb{R})$ avec $\|\alpha\|_\infty \leq 1$, considérons les fonctions $\omega_1(\alpha)$ et $\omega_2(\alpha)$ définies comme suit :

$$\omega_1(\alpha)(t) = \begin{cases} M \int_0^t L(s)\alpha(s)ds,\ 0 \leq t \leq a \\ M \int_0^a L(s)\alpha(s)ds,\ t \geq a \end{cases}$$

$$\omega_2(\alpha)(t) = \begin{cases} 0,\ 0 \leq t \leq a \\ M \int_a^t L(s)\alpha(s)ds,\ t \geq a \end{cases}$$

Considérons l'ensemble $\mathbb{K}_\varepsilon = \{\omega_1(\alpha) : \|\alpha\|_\infty \leq 1\}$.
Les fonctions de l'ensemble $\mathbb{K}_\varepsilon$ sont toutes bornées par la valeur $M\int_0^a L(s)ds$ et sont toutes constantes à partir de a.
Montrons que $\mathbb{K}_\varepsilon$ est relativement compact dans $C_b([0,+\infty[,\mathbb{R})$.
Montrons d'abord que $\mathbb{K}_\varepsilon/[0,a]$ est relativement compact dans $C_b([0,a],\mathbb{R})$.

Soit $t_1,\ t_2 \in [0,a]$ avec $t_1 < t_2$

$$\begin{aligned}
|\omega_1(\alpha)_{/[0,a]}(t_1) - \omega_1(\alpha)_{/[0,a]}(t_2)| &= |M\int_{t_1}^{t_2} L(s)\alpha(s)ds| \\
&\leq M\int_{t_1}^{t_2} L(s)ds \\
&\leq ML(\mu)|t_2 - t_1| \text{ avec } t_1 < \mu < t_2 (\text{ théorème de la moyenne }).
\end{aligned}$$

On voit bien que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{K}_\varepsilon/[0,a]$ est équi-continue, plus encore il est uniformément équi-continue.
Puisque $\forall \varepsilon > 0; \exists \sigma > 0;$ tel que :

$$|t_2 - t_1| \leq \sigma \Rightarrow |w_1(\alpha)_{/[0,a]}(t_1) - w_1(\alpha)_{/[0,a]}(t_2)| \leq \varepsilon.$$

D'autre part, $\forall t \in [0,a]$

$$\mathbb{K}_\varepsilon/[0,a](t) \subseteq \left[-M\int_0^a L(s)ds, M\int_0^a L(s)ds\right],$$

qui est donc relativement compact dans $\mathbb{R}$.
Par le théorème **d'Arzela-Ascoli**, on déduit alors que $\mathbb{K}_\varepsilon/[0,a]$ est relativement compact dans $C_b([0,a],\mathbb{R})$.
Soit maintenant une suite (f_n) dans $\mathbb{K}_\varepsilon$.
$f_n/[0,a]$ est une suite dans $\mathbb{K}_\varepsilon/[0,a]$ qui est relativement compact dans $C_b([0,a],\mathbb{R})$. Donc de cette suite, on peut extraire une sous-suite convergente $f_{\varphi(n)}/[0,a]$, c-à-d $\exists f_*$ telle que

$$\sup_{[0,a]}|f_{\varphi(n)}/[0,a](t) - f_*(t)| \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Il est claire maintenant que la sous-suite $f_{\varphi(n)}$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} f_*(t) \text{ si } t \leq a \\ f_*(a) \text{ si } t \geq a. \end{cases}$$

Par suite, $\mathbb{K}_\varepsilon$ est relativement compact dans $C_b([0,+\infty[,\mathbb{R})$.
Maintenant, on remarque que

$$(B\alpha)(t) = w_1(\alpha)(t) + w_2(\alpha)(t) \text{ pour } t \geq 0.$$

On peut affirme alors que

$$\{(B\alpha), \|\alpha\|_\infty \leq 1\} \subseteq \mathbb{K}_\varepsilon + \{\beta : \beta \in C_b([0,+\infty[,\mathbb{R}), \|\beta\|_\infty \leq \varepsilon\}.$$

On aura alors d'après la Proposition 2.3.2 que $\{(B\alpha), \|\alpha\|_\infty \leq 1\}$ est relativement compact dans $C_b([0,+\infty[,\mathbb{R})$, d'où B est compact.

Maintenant, la dernière étape du théorème consiste à calculer le rayon spectral de B, pour appliquer en suite le Théorème 2.3.4 pour conclure en l'existence et l'unicité d'un point fixe u pour l'application continue Γ, qui serait donc la solution "mild" S-asymptotiquement ω-périodique du Problème (2.1).

$$\rho(B) = \text{ le rayon spectral de } B = \max_{\lambda \in \sigma(B)} |\lambda|.$$

Spactre de $B = \sigma(B) = \{\lambda \in C$ tel que $B - \lambda I$ n'est pas bijectif $\}$.
Comme B est un opérateur compact.
On a : $\sigma(B) = \sigma_p(B) \cup \{0\}$,
où $\sigma_p(B)$ est le spactre ponctuelle de B.
$\sigma_p(B) = \{\lambda \in C$ tel que $B - \lambda I$ n'est pas injectif $\}$.
Ici on peut montrer que pour tout $\lambda \neq 0$, on aura

$$B - \lambda I \text{ est injectif,}$$

c-à–d, si $\lambda \neq 0$ alors λ n'est pas dans $\sigma_p(B)$.
Pour se faire, on va montrer que la seule solution de l'équation $B - \lambda I = 0$ est l'application identiquement nulle.
En effet : Soit $\alpha \in C_b([0, +\infty[, \mathbb{R})$ une solution de l'équation $B - \lambda I = 0$.
C-à-d :

$$\begin{aligned}
B\alpha - \lambda\alpha &= 0 \\
\Rightarrow (B\alpha - \lambda\alpha)(t) = 0 \;\; \forall t \geq 0 \\
\Rightarrow M \int_0^t L(s)\alpha(s)ds - \lambda\alpha(t) = 0 \star \\
\Rightarrow M \int_0^t L(s)\alpha(s)ds = \lambda\alpha(t) \\
\Rightarrow \lambda\alpha'(t) = ML(t)\alpha(t) \\
\Rightarrow \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = \frac{M}{\lambda}L(t).
\end{aligned}$$

C'est une équation differentielle dont la solution est

$$\alpha(t) = C \exp(\frac{M}{\lambda} \int L(t)dt).$$

Maintenant de $\star$ on voit $\alpha(0) = 0,$ et donc $C = 0$.
Ce qui veut dire que la seule solution de l'équation $B - \lambda I = 0$ est l'application identiquement nulle.
Finalement $\sigma(B) = \{0\}$, et donc le rayon spectral de B est egal à 0 ($\rho(B) = 0$).
Soit maintenant l'opérateur linéaire :

$$\begin{aligned}
m : C_b([0, +\infty[, X) \quad &\longrightarrow \quad C_b([0, +\infty[, \mathbb{R}) \\
u \longmapsto \quad & m(u)
\end{aligned}$$

où $m(u)(t) = \sup\limits_{0 \leq s \leq t} \|u(s)\|$.
Soient $y_1,\ y_2 \in SAP_\omega(X)$. Montrons que $m(\Gamma y_1 - \Gamma y_2) \leq Bm(y_1 - y_2)$.

On a :

$$\begin{aligned} m(\Gamma y_1 - \Gamma y_2)(t) &= \sup_{0\le s\le t} \|\Gamma y_1(s) - \Gamma y_2(s)\| \\ &\le \sup_{0\le s\le t} M \int_0^s L(\xi)\|y_1(\xi) - y_2(\xi)\|d\xi \\ &\le M \int_0^t L(\xi)\|y_1(\xi) - y_2(\xi)\|d\xi \\ &\le M \int_0^t L(\xi) \sup_{0\le \xi\le t} \|y_1(\xi) - y_2(\xi)\|d\xi \\ &= Bm(y_1 - y_2)(t). \end{aligned}$$

D'autre part on a clairement $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \Rightarrow B\alpha_1 \le B\alpha_2$.
Finalement les conditions du Théorème 2.3.4 sont vérifiées, d'où la conclusion.

■

• **Deuxième résultat d'existence d'une solution "mild" S-asymptotiquement ω-périodique**

Définition 2.1.4. Une fonction continue $G : [0, +\infty[\times X \longrightarrow X$ est dite uniformément S-asymptotiquement ω-périodique sur les ensembles bornés si : pour chaque ensemble borné $\mathbb{K} \subset X$, l'ensemble $\{G(t, x) : t \ge 0,\ x \in \mathbb{K}\}$ est borné et $\lim_{t\to+\infty} \|G(t, x) - G(t + w, x)\| = 0$ uniformément par rapport à $x \in \mathbb{K}$.

Définition 2.1.5. Une fonction continue $G : [0, +\infty[\times X \longrightarrow X$ est dite asymptotiquement uniformément continue sur les ensembles bornés si :
pour tout $\varepsilon > 0$, et pour chaque ensemble borné $\mathbb{K} \subset X$, il existe $L_{\varepsilon,k} > 0$ et $\delta_{\varepsilon,k} > 0$ tels que $\|G(t, x) - G(t, y)\| < \varepsilon$ pour tout $t > L_{\varepsilon,k}$ et $x,\ y \in \mathbb{K}$ avec $\|x - y\| < \delta_{\varepsilon,k}$.

Lemme 2.1.1. *Soit $G : [0, +\infty[\times X \longrightarrow X$ une fonction uniformément S-asymptotiquement ω-périodique et asymptotiquement uniformément continue sur les ensembles bornés, et soit $u : [0, +\infty[\longrightarrow X$ une fonction $SAP_\omega(X)$. Alors la fonction $v(t) = G(t, u(t))$ est également dans $SAP_\omega(X)$.*

Preuve. Soit $\mathbb{K} = R(u)$ l'image de la fonction u.
$R(u)$ est un ensemble borné (car u est bornée), et comme G est une fonction uniformément S-asymptotiquement ω-périodique sur les ensembles bornés, il s'en suit que v est une fonction bornée. De plus v est clairement continue puisque G et u sont des fonctions continues.
Soit $\varepsilon > 0$ fixé,
des Définition 2.1.4 et 2.1.5, il existe $\delta > 0$ et $L^1_\varepsilon > 0$ tel que

$$\max\{\|G(t+\omega, z) - G(t, z)\|,\ \|G(t, x) - G(t, y)\|\} \leq \varepsilon,$$

pour tout $t \geq L^1_\varepsilon,\ z \in R(u)$ et tout $x,\ y \in R(u)$ avec $\|x - y\| \leq \delta$.
D'autre part, comme $u(.)$ est S-asymptotiquement ω-périodique, alors il existe $L^2_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \geq L^2_\varepsilon,\ \|u(t+\omega) - u(t)\| \leq \delta$.
Ainsi, pour $t \geq \max\{L^1_\varepsilon, L^2_\varepsilon\}$

$$\begin{aligned}
\|v(t+\omega) - v(t)\| &= \|G(t+\omega, u(t+\omega)) - G(t, u(t))\| \\
&\leq \|G(t+\omega, u(t+\omega)) - G(t, u(t+\omega))\| + \|G(t, u(t+\omega)) - G(t, u(t))\| \\
&\leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui montrer que $\|v(t+\omega) - v(t)\| \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$, $v(.)$ est alors $SAP_\omega(X)$.
■

Dans la suite de ce chapitre, on suppose qu'il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\gamma > 0$ telles que

$$\|T(t)\| \leq M \exp(-\gamma t),\ \forall t \geq 0.$$

Avant d'énoncer le deuxième résultat d'existence, on introduit l'hypothèse suivante :
(H_G) : la fonction $G : [0, +\infty[\times X \longrightarrow X$ est continue et qu'il existe $L > 0$ tel que : $\|G(t, x) - G(t, y)\| \leq L\|x - y\|\ \forall t \geq 0,\ \forall x,\ y \in X$.

Théorème 2.1.3. *Supposons que la condition (H_G) est satisfaite, et que G uniformément S-asymptotiquement ω-périodique sur les ensembles bornés. Si $ML < \gamma$, alors il existe une unique solution "mild" S-asymptotiquement*

ω-périodique du Problème (2.1).

Preuve. Soit l'opérateur Γ définie sur l'espace $SAP_\omega(X)$ par :

$$\Gamma u(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)G(s,u(s))ds = T(t)x_0 + v(t).$$

Montrons que $\Gamma u \in SAP_\omega(X)$.
Soit $u \in SAP_\omega(X)$.
On a $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X, alors d'après le Corollaire 2.3.1 $T(t)x_0$ est continue.
D'autre part, $\forall t \geq 0,\ T(t)$ est un opérateur linéaire alors

$$\begin{aligned} \|T(t)x_0\| &\leq \|T(t)\|\|x_0\| \\ &\leq M\exp(-\gamma t)\|x_0\| \\ &\leq M\|x_0\|. \end{aligned}$$

D'où $T(t)x_0$ est une fonction bornée.
Maintenant, pour $\omega > 0$

$$\begin{aligned} \|T(t+\omega)x_0 - T(t)x_0\| &\leq \|T(t+\omega)x_0\| + \|T(t)x_0\|, \\ &\leq (\|T(t+\omega)\| + \|T(t)\|)\|x_0\|, \\ &\leq M\|x_0\|(\exp(-\gamma(t+\omega)) + \exp(-\gamma t)). \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $t \longrightarrow +\infty$, on aura :
$\lim\limits_{t\to+\infty} \|T(t+\omega)x_0 - T(t)x_0\| = 0$. D'où $T(.)x_0 \in SAP_\omega(X)$.
Il reste à montrer que $v(.) \in SAP_\omega(X)$.
v est clairement continue.
On a $u \in SAP_\omega(X)$ donc u est bornée, et comme G est uniformément S-asymptotiquement ω-périodique sur les ensembles bornés, on aura $G(.,u(.))$ est bornée.

Donc

$$\begin{aligned}
\|v(t)\| &= \| \int_0^t T(t-s)G(s,u(s))ds\|, \\
&\leq \int_0^t \|T(t-s)G(s,u(s))\|ds, \\
&\leq \int_0^t \|T(t-s)\|\|G(s,u(s))\|ds, \\
&\leq \|G(.,u(.))\|_\infty \int_0^t M\exp(-\gamma(t-s))ds, \\
&= \frac{M\|G(.,u(.))\|_\infty}{\gamma}(1-\exp(-\gamma t)), \\
&\leq \frac{M\|G(.,u(.))\|_\infty}{\gamma}.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que v est bornée, d'où $v \in C_b([0,+\infty[,X)$.
Maintenant, d'après l'hypothèse H_G on affirme que G est asymptotiquement uniformément continue sur les ensembles bornés.
Alors d'après le Lemme 2.1.1 $G(t,u(t)) \in SAP_\omega(X)$, et donc

$$\forall \varepsilon > 0; \exists L_\varepsilon > 0 : \forall t \geq L_\varepsilon; \|G(t+\omega, u(t+\omega)) - G(t,u(t))\| \leq \varepsilon.$$

Avec ces conditions, pour $t \geq L_\varepsilon$ on a :
$\|v(t+\omega) - v(t)\|$

$$\begin{aligned}
&= \| \int_0^{t+\omega} T(t+\omega-s)G(s,u(s))ds - \int_0^t T(t-s)G(s,u(s))ds\| \\
&= \| \int_0^{\omega} T(t+\omega-s)G(s,u(s))ds + \int_\omega^{t+\omega} T(t+\omega-s)G(s,u(s))ds - \int_0^t T(t-s)G(s,u(s))ds\| \\
&= \| \int_0^{\omega} T(t+\omega-s)G(s,u(s))ds + \int_0^{t} T(t-s)G(s+\omega,u(s+\omega))ds - \int_0^t T(t-s)G(s,u(s))ds\| \\
&= \| \int_0^{\omega} T(t+\omega-s)G(s,u(s))ds + \int_0^{L_\varepsilon} T(t-s)[G(s+\omega,u(s+\omega)) - G(s,u(s))]ds \\
&+ \int_{L_\varepsilon}^{t} T(t-s)[G(s+\omega,u(s+\omega)) - G(s,u(s))]ds\|
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl}
\leq & \displaystyle\int_0^{\omega} \|T(t+\omega-s)\|\|G(s,u(s))\|ds + \int_0^{L_\varepsilon} \|T(t-s)\|\|G(s+\omega,u(s+\omega)) - G(s,u(s))\|ds \\
+ & \displaystyle\int_{L_\varepsilon}^{t} \|T(t-s)\|\|G(s+\omega,u(s+\omega)) - G(s,u(s))\|ds \\
\leq & \displaystyle M\|G(.,u(.))\|_\infty \int_0^{\omega} \exp(-\gamma(t+\omega-s))ds + 2M\|G(.,u(.))\|_\infty \int_0^{L_\varepsilon} \exp(-\gamma(t-s))ds \\
+ & \displaystyle M\varepsilon \int_{L_\varepsilon}^{t} \exp(-\gamma(t-s))ds \\
= & \displaystyle \frac{M\|G(.,u(.))\|_\infty}{\gamma}(\exp(-\gamma t) - \exp(-\gamma(t+\omega))) + \frac{M\varepsilon}{\gamma}(1-\exp(-\gamma(t-L_\varepsilon)) \\
+ & \displaystyle \frac{2M\|G(.,u(.))\|_\infty}{\gamma}(\exp(-\gamma(t-L_\varepsilon) - \exp(-\gamma t)) \\
\leq & \displaystyle \frac{M\|G(.,u(.))\|_\infty}{\gamma}\exp(-\gamma t) + \frac{M\varepsilon}{\gamma} + \frac{2M\|G(.,u(.))\|_\infty}{\gamma}\exp(-\gamma(t-L_\varepsilon))
\end{array}$$

Ce qui permet de déduire que $\lim\limits_{t\to+\infty} \|v(t+\omega) - v(t)\| = 0$, donc $v(.)$ est $SAP_\omega(X)$. Ceci complète la preuve que $\Gamma u \in SAP_\omega(X)$.
Maintenant, pour $u_1,\ u_2 \in SAP_\omega(X)$

$$\begin{array}{rcl}
\|\Gamma u_1(t) - \Gamma u_2(t)\| & = & \displaystyle \|\int_0^t T(t-s)G(s,u_1(s))ds - \int_0^t T(t-s)G(s,u_2(s))ds\|, \\
& = & \displaystyle \|\int_0^t T(t-s)[G(s,u_1(s)) - G(s,u_2(s))]ds\|, \\
& \leq & \displaystyle \int_0^t \|T(t-s)\|\|G(s,u_1(s)) - G(s,u_2(s))\|ds, \\
& \leq & \displaystyle \int_0^t M\exp(-\gamma(t-s))L\|u_1(s) - u_2(s)\|ds, \\
& \leq & \displaystyle \frac{ML}{\gamma}\sup_{0\leq s\leq t}\|u_1(s) - u_2(s)\|(1-\exp(-\gamma t)), \\
& \leq & \displaystyle \frac{ML}{\gamma}\sup_{0\leq s\leq t}\|u_1(s) - u_2(s)\|.
\end{array}$$

On a $ML < \gamma \Rightarrow \frac{ML}{\gamma} < 1$.
Soit $k = \frac{ML}{\gamma} < 1$, d'où

$$\|\Gamma u_1(t) - \Gamma u_2(t)\| \leq k \sup_{0\leq s\leq t}\|u_1(s) - u_2(s)\|.$$

Ce qui montre que Γ est k-lipschitzienne avec $k < 1$, donc Γ est une contraction.
Finalement, on a $SAP_w(X)$ est un espace complet, Γ est une contraction de $SAP_\omega(X)$ dans $SAP_\omega(X)$. Alors d'après le principe de contraction de Banach, Γ possède un unique point fixe u qui serait donc la solution "mild" S-asymptotiquement ω-périodique du Problème (2.1).
■

2.2 Résultat d'existence d'une solution "mild" asymptotiquement ω-périodique d'un problème de Cauchy non homogène

Proposition 2.2.1. *Supposons que la condition (H_G) est satisfaite, et que $G(.,0)$ est une fonction bornée et*

$$\lim_{t \to +\infty} \|G(t,x) - G(t+n\omega, x)\| = 0,$$

uniformément par rapport à $x \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$, pour chaque sous ensemble borné $\mathbb{K}$ de X. Si $ML < \gamma$, alors il existe une unique solution "mild" asymptotiquement ω-périodique du Problème (2.1).

Preuve. Considérons l'espace

$$S(X) = \{u \in C_b([0,+\infty[, X) \text{ tel que } \lim_{t\to+\infty} \|u(t+n\omega) - u(t)\| = 0 \text{ uniformement par rapport à } n \in \mathbb{N}\}.$$

$S(X)$ est un sous espace fermé de $C_b([0,+\infty[, X)$.
En effet : Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $S(X)$ qui converge vers f quand $k \longrightarrow +\infty$.
Pour $\varepsilon \geq 0$, il existe K_0 tel que $\sup_{0\leq t\leq +\infty} \|f_k(t) - f(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall k \geq k_0$.
Par la définition des fonctions de $S(X)$, on sait qu'il existe t_0 tel que $\forall t \geq t_0$, on a $\|f_{k_0}(t+n\omega) - f_{k_0}(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On a alors

$$\begin{aligned}\|f(t+n\omega)-f(t)\| &\leq \|f(t+n\omega)-f_{k_0}(t+n\omega)\|+\|f_{k_0}(t+n\omega)-f_{k_0}(t)\|\\ &+ \|f_{k_0}(t)-f(t)\|.\\ &\leq \varepsilon \text{ dès que } t\geq t_0,\ \forall n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Ce qui permet de déduire que $\lim\limits_{t\to+\infty}\|f(t+n\omega)-f(t)\|=0$ uniformément par rapport à $n\in\mathbb{N}$.
De plus, on a $f\in C_b([0,+\infty[,X)$ (car f la limite uniforme de f_k).
Ce qui montre que $f\in S(X)$, d'où l'espace $S(X)$ est fermé.
Par suite, d'après l'hypothèse H_G on affirme que G est asymptotiquement uniformément continue sur les ensembles bornés.
Maintenant soit $u\in S(X)$, montrons que $h(t)=G(t,u(t))\in S(X)$.
Du fait que l'image $R(u)$ de u est bornée et $G(t,0)$ est une fonction bornée ; on déduit que h est bornée.
D'autre part, comme $\lim\limits_{t\to+\infty}\|G(t+n\omega,z)-G(t,z)\|=0$ uniformément par rapport à $z\in R(u)$ et $n\in\mathbb{N}$ et G est asymptotiquement uniformément continue sur les ensembles bornés. Alors pour tout $\varepsilon>0;\exists L_\varepsilon^1>0$ et $\sigma>0$ tels que :

$$\max\{\|G(t+n\omega,z)-G(t,z)\|,\ \|G(t,x)-G(t,y)\|\}\leq\varepsilon,$$

$\forall t\geq L_\varepsilon^1,\ z\in R(u)$ et pour tout $x,\ y\in R(u)$ avec $\|x-y\|\leq\sigma,$ uniformément sur $n\in\mathbb{N}$.
De plus, comme $u\in S(X)$, il existe alors $L_\varepsilon^2>0$ tel que pour tout $t\geq L_\varepsilon^2;\ \|u(t+n\omega)-u(t)\|\leq\sigma$ uniformément sur $n\in\mathbb{N}$.
Donc, pour $t\geq\max\{L_\varepsilon^1,L_\varepsilon^2\}=L_\varepsilon$

$$\begin{aligned}\|h(t+n\omega)-h(t)\| &= \|G(t+n\omega,u(t+n\omega))-G(t,u(t))\|\\ &\leq \|G(t+n\omega,u(t+n\omega))-G(t,u(t+n\omega))\|\\ &+ \|G(t,u(t+n\omega))-G(t,u(t))\|\\ &\leq 2\varepsilon,\ \forall n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

On en déduit donc que $G(t, u(t)) \in S(X)$.
Maintenant, considérons l'opérateur Γ définie sur l'espace $S(X)$ par :

$$\Gamma u(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)G(s, u(s))ds = T(t)x_0 + v(t).$$

Montrons que $\Gamma u \in S(X)$.
On a $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X, alors d'après le Corollaire 2.3.1 $T(t)x_0$ est continue.
D'autre part, $\forall t \geq 0$, $T(t)$ est un opérateur linéaire alors

$$\begin{aligned} \|T(t)x_0\| &\leq \|T(t)\|\|x_0\| \\ &\leq M\exp(-\gamma t)\|x_0\| \\ &\leq M\|x_0\|. \end{aligned}$$

D'où $T(t)x_0$ est une fonction bornée.
Maintenant, pour $\omega > 0$

$$\begin{aligned} \|T(t+n\omega)x_0 - T(t)x_0\| &\leq \|T(t+n\omega)x_0\| + \|T(t)x_0\|, \\ &\leq (\|T(t+n\omega)\| + \|T(t)\|)\|x_0\|, \\ &\leq M\|x_0\|(\exp(-\gamma(t+n\omega)) + \exp(-\gamma t)). \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $t \longrightarrow +\infty$, on aura :
$\lim\limits_{t\to+\infty} \|T(t+n\omega)x_0 - T(t)x_0\| = 0$ uniformément par rapport à n, donc $T(.)x_0 \in S(X)$.
Il reste à montrer que $v(.) \in S(X)$.
$v(.)$ est clairement continue.
On a

$$\begin{aligned} \|v(t)\| &= \|\int_0^t T(t-s)G(s, u(s))ds\|, \\ &\leq \int_0^t \|T(t-s)G(s, u(s))\|ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \|T(t-s)\|\|G(s,u(s))\|ds,\\
&\leq \|G(.,u(.))\|_\infty \int_0^t M\exp(-\gamma(t-s))ds,\\
&= \frac{M\|G(.,u(.))\|_\infty}{\gamma}(1-\exp(-\gamma t)),\\
&\leq \frac{M\|G(.,u(.))\|_\infty}{\gamma}.
\end{aligned}$$

Ce qui montrer que v est bornée, d'où $v \in C_b([0,+\infty[,X)$.
Soit $t \geq L_\varepsilon,$ et $n \in \mathbb{N}$
$\|v(t+n\omega)-v(t)\|$

$$\begin{aligned}
&= \| \int_0^{t+n\omega} T(t+n\omega-s)G(s,u(s))ds - \int_0^t T(t-s)G(s,u(s))ds\|,\\
&= \| \int_0^{n\omega} T(t+n\omega-s)G(s,u(s))ds + \int_{n\omega}^{t+n\omega} T(t+n\omega-s)G(s,u(s))ds,\\
&- \int_0^t T(t-s)G(s,u(s))ds\|,\\
&= \| \int_0^{n\omega} T(t+n\omega-s)G(s,u(s))ds + \int_0^t T(t-s)G(s+n\omega,u(s+n\omega))ds,\\
&- \int_0^t T(t-s)G(s,u(s))ds\|,\\
&= \| \int_0^{n\omega} T(t+n\omega-s)G(s,u(s))ds + \int_0^{L_\varepsilon} T(t-s)[G(s+n\omega,u(s+\omega))-G(s,u(s))]ds,\\
&+ \int_{L_\varepsilon}^t T(t-s)[G(s+n\omega,u(s+n\omega))-G(s,u(s))]ds\|,\\
&\leq \int_0^{n\omega} \|T(t+n\omega-s)\|\|G(s,u(s))\|ds + \int_0^{L_\varepsilon} \|T(t-s)\|\|G(s+n\omega,u(s+n\omega))-G(s,u(s))\|ds,\\
&+ \int_{L_\varepsilon}^t \|T(t-s)\|\|G(s+n\omega,u(s+n\omega))-G(s,u(s))\|ds,\\
&\leq M\|G(.,u(.))\|_\infty \int_0^{n\omega} \exp(-\gamma(t+n\omega-s))ds + 2M\|G(.,u(.))\|_\infty \int_0^{L_\varepsilon} \exp(-\gamma(t-s))ds,\\
&+ 2M\varepsilon \int_{L_\varepsilon}^t \exp(-\gamma(t-s))ds,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{M\|G(.,u(.))\|_\infty}{\gamma}(\exp(-\gamma t) - \exp(-\gamma(t+n\omega))) + \frac{2M\varepsilon}{\gamma}(1-\exp(-\gamma(t-L_\varepsilon)),\\
&+ \frac{2M\|G(.,u(.))\|_\infty}{\gamma}(\exp(-\gamma(t-L_\varepsilon) - \exp(-\gamma t)),\\
&\leq \frac{M\|G(.,u(.))\|_\infty}{\gamma}\exp(-\gamma t) + \frac{2M\varepsilon}{\gamma} + \frac{2M\|G(.,u(.))\|_\infty}{\gamma}\exp(-\gamma(t-L_\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Ce qui permet de déduire que $\lim\limits_{t\to+\infty}\|v(t+n\omega) - v(t)\| = 0$, uniformément par rapport à n, donc $v \in S(X)$. Ceci complète la preuve que $\Gamma u \in S(X)$.
Maintenant, pour $u_1,\ u_2 \in S(X)$

$$\|\Gamma u_1(t) - \Gamma u_2(t)\| \leq \frac{ML}{\gamma}\sup_{0\leq s\leq t}\|u_1(s) - u_2(s)\|.$$

On a $ML < \gamma \Rightarrow \frac{ML}{\gamma} < 1$.
Soit $k = \frac{ML}{\gamma} < 1$, d'où

$$\|\Gamma u_1(t) - \Gamma u_2(t)\| \leq k\sup_{0\leq s\leq t}\|u_1(s) - u_2(s)\|.$$

Ce qui montre que Γ est k-lipschitzienne avec $k < 1$, et donc Γ est une contraction.
De plus, on a $S(X)$ est un sous espace fermé de $C_b([0,+\infty[,X)$. Comme $C_b([0,+\infty[,X)$ est un espace de Banach, alors $S(X)$ est aussi de Banach.
Finalement, on a $S(X)$ est un espace complet, Γ est une contraction de $S(X)$ dans $S(X)$. Alors d'après le principe de contraction de Banach, Γ possède un unique point fixe u.
Comme $u \in S(X)$ donc $u \in C_b([0,+\infty[,X)$, et $\lim\limits_{t\to+\infty}\|u(t+n\omega) - u(t)\| = 0$ uniformement pour $n \in \mathbb{N}$. Alors d'après le Corollaire 1.2.1 u est asymptotiquement ω-périodique. Donc sous les conditions de la propositon 2.2.1, le Problème (2.1) admet une unique solution "mild" asymptotiquement ω-périodique.

■

2.3 Application aux équations aux dérivées partielles

Nous terminons ce chapitre, par discuter de l'existence d'une solution "mild" S-asymptotiquement ω-périodique du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,\xi) = & \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}u(t,\xi) + a(t)f(u(t,\xi)), \quad t \geq 0, \quad \xi \in [0,\pi], \\ u(t,0) = & u(t,\pi) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(0,\xi) = & x(\xi), \quad \xi \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{2.2}$$

Où $x : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R},\ a : [0,+\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions appropriées.
Pour étudier ce système sous la forme (2.1), on considère l'espace
$X = L^2([0,\pi])$ et l'opérateur

$$\begin{aligned} A : D(A) \subset X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto Ax = x'' \end{aligned}$$

où

$$D(A) = \{x \in X :\ x'' \in X,\ x(0) = x(\pi) = 0\}.$$

On aura donc le système suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + a(t)f(u(t)), \quad t \geq 0, \\ u(0) = x \in L^2([0,\pi]). \end{cases}$$

L'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X (voir [13]).
La solution du problème homogène (qui represente en fait l'équation de la chaleur avec condition de Dirichlet au bord)

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), \quad t \geq 0, \\ u(0) = x, \end{cases}$$

est donnée par

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-n^2 t) < x, z_n > z_n, \ \forall x \in L^2([0,\pi]).$$

Où $z_n = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \sin(n\xi)$, $\{-n^2, \ n \in \mathbb{N}^*\}$ sont les valeurs propres de l'opérateur A et z_n sont les fonctions propres associées (voir[1]).
On a donc

$$T(t)x = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-n^2 t) < x, z_n > z_n.$$

De cette écriture, du fait que $\{z_n, \ n \in \mathbb{N}^*\}$ est une base hilbertienne de $L^2([0,\pi])$, par l'égalité de Parseval, on a :

$$\begin{aligned} \|T(t)x\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} |\exp(-n^2 t)|^2 | < x, z_n > |^2, \\ &\leq [\sup_{n\geq 1} |\exp(-n^2 t)|]^2 \sum_{n=1}^{+\infty} | < x, z_n > |^2, \\ &= (\exp(-t))^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\|T(t)\| \leq \exp(-t), \ \forall t \geq 0.$$

On est prêt maintenant à énoncer la proposition suivante :

Proposition 2.3.1. *Supposons que* $a(.)$ *est une fonction* S*-asymptotiquement* ω*-péroidique et qu'il existe* $L_f > 0$ *telle que*

$$|f(x) - f(y)| \leq L_f |x - y|, \ \forall x, \ y \in \mathbb{R}.$$

Si $\|a\|_\infty L_f < 1$, *alors il existe une unique solution "mild"* S*-asymptotiquement* ω*-péroidique du Problème (2.2). Si de plus* $\lim\limits_{t\to+\infty}(a(t+n\omega) - a(t)) = 0$ *uniformément par rapport à* $n \in \mathbb{N}$, *alors* $u(.)$ *est une solution "mild" asymptotiquement* ω*-périodique.*

Preuve. Soit

$$\begin{array}{rcl} G : [0,+\infty[\times L^2([0,\pi]) & \longrightarrow & L^2([0,\pi]) \\ (t,x) & \longmapsto & G(t,x) = a(t)f(x) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} x : [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \xi & \longmapsto & x(\xi). \end{array}$$

On a G est clairement continue.
Pour tout $x,\ y \in L^2([0,\pi])$ et $t \geq 0$,

$$\begin{array}{rcl} \|G(t,x)-G(t,y)\| & = & \|a(t)f(x)-a(t)f(y)\|, \\ & \leq & \|a\|_\infty \|f(x)-f(y)\|_{L^2([0,\pi])}, \\ & = & \|a\|_\infty (\int_0^\pi |f(x)(\xi)-f(y)(\xi)|^2 d\xi)^{\frac{1}{2}}, \\ & \leq & \|a\|_\infty (\int_0^\pi L_f^2 |(x)(\xi)-(y)(\xi)|^2 d\xi)^{\frac{1}{2}}, \\ & = & \|a\|_\infty L_f (\int_0^\pi |(x)(\xi)-(y)(\xi)|^2 d\xi)^{\frac{1}{2}}, \\ & = & \|a\|_\infty L_f \|x-y\|_{L^2([0,\pi])}. \end{array}$$

Ainsi, la fonction $G : [0,+\infty[\times L^2([0,\pi] \longrightarrow L^2([0,\pi])$ est continue et qu'il existe $L = \|a\|_\infty L_f > 0$ tel que

$$\|G(t,x)-G(t,y)\| \leq L\|x-y\| \ \ \forall x,\ y \in L^2([0,\pi]),\ \ t \geq 0.$$

D'autre part, on a G est uniformément S-asymptotiquement ω-périodique sur les ensembles bornés.
En effet : Soit $\mathbb{K}$ un ensemble borné de $L^2([0,\pi])$, et soit $x \in \mathbb{K}$.
On a

$$\|G(t,x)\| = \|a(t)f(x)\| \ \leq \ \|a(t)f(x)-a(t)f(0)\| + \|a(t)f(0)\|,$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\int_0^\pi |a(t)f(x)(\xi) - a(t)f(0)(\xi)|^2 d\xi)^{\frac{1}{2}} + \|a\|_\infty \|f(0)\|,\\
&= (\int_0^\pi |a(t)|^2 |f(x)(\xi) - f(0)(\xi)|^2 d\xi)^{\frac{1}{2}} + \|a\|_\infty \|f(0)\|,\\
&\leq \|a\|_\infty (\int_0^\pi L_f^2 |(x)(\xi) - (0)(\xi)|^2 d\xi)^{\frac{1}{2}} + \|a\|_\infty \|f(0)\|,\\
&= \|a\|_\infty L_f (\int_0^\pi |(x)(\xi)|^2 d\xi)^{\frac{1}{2}} + \|a\|_\infty \|f(0)\|,\\
&= \|a\|_\infty L_f \|x\|_{L^2([0,\pi])} + \|a\|_\infty \|f(0)\|,\\
&\leq \|a\|_\infty L_f M + \|a\|_\infty \|f(0)\|.
\end{aligned}$$

D'où l'ensemble $\{G(t,x) :\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{K}\}$ est borné.
Maintenant, pour $x \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
\|G(t+\omega,x) - G(t,x)\| &= \|a(t+\omega)f(x) - a(t)f(x)\|,\\
&= |a(t+\omega) - a(t)| \|f(x)\|,\\
&\leq N|a(t+\omega) - a(t)| \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty \text{ uniformément pour } x \in \mathbb{K}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{t\to+\infty} \|G(t+\omega,x) - G(t,x)\| = 0 \text{ uniformément pour } x \in \mathbb{K}.$$

On en déduit alors que G est uniformément S-asymptotiquement ω-périodique sur les ensembles bornés.
On a encore $\|a\|_\infty L_f < 1$, ce qui montre alors que toute les hypothèses du Théorème 2.1.3 sont satisfaites, d'où l'existence et l'unicité d'une solution "mild" S-asymptotiquement ω-périodique du problème (2.2).
Maintenant, pour $t \geq 0$

$$\|G(t,0)\| = \|a(t)f(0)\| \leq \|a\|_\infty \|f(0)\|,$$

d'où $G(.,0)$ est une fonction bornée.
De plus, pour $x \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|G(t,x) - G(t+n\omega,x)\| &= \|a(t)f(x) - a(t+n\omega)f(x)\|, \\ &= |a(t+n\omega) - a(t)|\|f(x)\|, \\ &\leq N|a(t+n\omega) - a(t)| \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty \text{ uniformément pour } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{t\to+\infty} \|G(t,x) - G(t+n\omega,x)\| = 0 \text{ uniformément pour } x \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{N}.$$

On déduit alors d'après la Proposition 2.2.1 qu'il existe une unique solution "mild" asymptotiquement ω-périodique du Problème (2.2).
■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié les fonctions S-asymptotiquement ω-périodiques à valeurs dans un espace de Banach ainsi que leurs propriétés essentielles.

Nous avons plus précisément présenté et développé l'article [10], dans lequel les auteurs ont pu montrer l'existence et l'unicité d'une solution "mild" S-asymptotiquement ω-péroidique du problème de Cauchy abstrait de premier ordre sous certaines conditions, parmi elles :
•$(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement S-asymptotiquement ω périodique.
•$(T(t))_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe exponentiellement stable, i.e, il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\gamma > 0$ telles que

$$\|T(t)\| \leq M \exp(-\gamma t), \ \forall t \geq 0.$$

La théorie de fonctions S-asymptotiquement ω-péroidiques est "relativement nouvelle", et donc beaucoup de questions sont encore posées. Nous estimons donc que c'est un domaine intéressant à explorer.
Nous espérons que ce travail puisse servir aux étudiants qui veulent s'initier à ce domaine.

Annexe

Définition 2.3.1. Un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est dit **relativement dense dans** $\mathbb{R}$ s'il existe un nombre réel $\ell > 0$ pour lequel tout intervalle de longueur ℓ rencontre A, i.e,

$$\exists \ell > 0, \forall a \in \mathbb{R} : [a, a+\ell] \cap A \neq \emptyset.$$

Définition 2.3.2. Un sous ensemble S de X est dit **relativement compact** si son adhérence $\overline{S}$ est compact.

Définition 2.3.3. Un sous ensemble S de X est dit **relativement compact** si de toute suite de S , on peut exteaire une sous suite qui converge dans X.

Définition 2.3.4. Un ensemble $F \subset C(\mathbb{R}, X)$, est dit uniformément equicontinue si :
$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta(\varepsilon) = \delta$ avec $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| < \varepsilon, \forall f \in F.$

Théorème 2.3.1. ***(Arzela-Ascoli [17])*** *Soit $A \subset C([0,b], \mathbb{R}^n)$, A est relativement compact si :*
1. *A est bornée, i.e, qu'il existe $M > 0$:*

$$\|y(t)\| \leq M, \forall t \in [0,b] \text{ et } y \in A.$$

2. *A est uniformément equi-continue, i.e,*

$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall t_1, t_2 \in [0, b]; |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|y(t_1) - y(t_2)\| < \varepsilon, \forall y \in A.$

Proposition 2.3.2. ***(voir [5])*** *Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach, et soit $\mathbb{K} \subseteq X$ un sous-ensemble. Alors $\mathbb{K}$ est relativement compact dans X si et seulement si $\forall \varepsilon > 0; \exists \mathbb{K}_\varepsilon$ relativement compact dans X, telle que*

$$\mathbb{K} \subseteq K_\varepsilon + \{\beta : \beta \in X, \|\beta\|_\infty \leq \varepsilon\}.$$

Définition 2.3.5. (**Opérateurs compacts**) Soient E et F deux espace de Banach ; une application linéaire continue $T \in L(E, F)$ est dite **compacte** si l'image $T(\overline{B_E})$ par l'application T de la boule unité fermée $\overline{B_E}$ de l'espace E est relativement compacte dans F.

Théorème 2.3.2. ***(Banach-steinhauss)voir[1]*** *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires continus de E dans F. On suppose que*

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < \infty, \forall x \in E.$$

Alors

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{L(E,F)} < \infty$$

où $L(E, F)$ l'espace d'opérateurs linéaires continus de E dans F muni de la norme

$$\begin{aligned} \|T\|_{L(E,F)} &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|_E \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{x=1} \|T(x)\|_E. \end{aligned}$$

Définition 2.3.6. (Application contractente)

Soit E un espace de Banach. Une application $f : E \longrightarrow E$ est dite contractente (ou contraction) s'il existe $k \in]0,1[$ telle que :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|, \text{ pour tous } x,\ y \in E.$$

Autrement dit, si f est lipschitzienne dont la constante de lipschitz est strictement inférieure à 1.

Théorème du points fixes

Théorème 2.3.3. ***(Principe de contraction de Banach)[8]*** *Soit E un espace métrique complet et soit $f : E \longrightarrow E$ une application contractente. Alors f posséde un point fixe unique.*

Considérons deux espaces de Banach Y et Z, de norme $\|.\|_Y$ et $\|.\|_Z$, respectivement. On suppose l'existence d'un ordre $\leq$ dans Z et l'existence d'une application $m : Y \longrightarrow Z$ tels que les conditions suivantes sont vérifiées : **(i)** $\forall y \in Y\ 0 \leq m(y)$,
(ii) $0 \leq z_1 \leq z_2 \Rightarrow \|z_1\|_Z \leq \|z_2\|_Z$,
(iii) il existe $C_1,\ C_2 > 0$ tels que :

$$\begin{aligned} \|y\|_Y &\leq C_1\|m(y)\|_Z \\ \|m(y)\|_Z &\leq C_2\|y\|_Y \end{aligned}$$

$\forall y \in Y$.

Théorème 2.3.4. ***(théorème 1 [9])*** *Soient Y, Z deux espaces de Banach. Soit S un sous ensemble non vide est fermé de Y et $A : S \longrightarrow S$ un opérateur continu. S'il existe un opérateur linéaire borné $B : Z \longrightarrow Z$ tel que :*
(a) *le rayon spectral $r(B) < 1$,*
(b) *si $0 \leq Z_1 \leq Z_2$ alors $BZ_1 \leq BZ_2$,*
(c) *pour tous $y_1, y_2 \in S, m(Ay_1 - Ay_2) \leq Bm(y_1 - y_2)$ avec m un opérateur de Y dans Z.*
Alors *A à un unique point fixe.*

C_0-semi-groupes

Définition 2.3.7. (voir [14]) On appelle un **semi-groupe fortement continu** d'opérateurs linéaires bornés sur X une famille $(T(t))_{t\geq 0}$ vérifiants les propriétés suivantes :
(i) $T(0) = I$ (où I est l'opérateur identité de X)
(ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \; \forall s, \; t \geq 0.$
(iii) $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \|T(t)x - x\| = 0 \;\; \forall x \in X.$
Un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur X est aussi appelé **C_0-semi-groupe sur** X.

Définition 2.3.8. (voir[14]) On appelle générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ un opérateur A défini sur l'ensemble :

$$D(A) = \{x \in X : \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X\}$$

par

$$Ax = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{dT(t)x}{dt}|_{t=0}, \; \forall x \in D(A).$$

Théorème 2.3.5. *(voir[14]) Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X. Alors il existe deux constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telles que :*

$$\|T(t)\| \leq M \exp(wt), \; \forall t \geq 0.$$

Corollaire 2.3.1. *(voir[14]) Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X. Alors pour tout $x \in X$, la fonction $t \longmapsto T(t)x$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.*

Définition 2.3.9. ([10]) Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X.
1. $(T(t))_{t\geq 0}$ est dit uniformément borné sur X, s'il existe $M \geq 1$ tel que

$$\|T(t)\| \leq M, \; \forall t \geq 0.$$

2. $(T(t))_{t\geq 0}$ est dit fortement stable si :

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} T(t)x = 0, \forall x \in X.$$

3. $(T(t))_{t\geq 0}$ est dit uniformément stable si :

$$\lim_{t\longrightarrow +\infty} \|T(t)\| = 0.$$

Egalité de Parseval

Définition 2.3.10. Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $< . >$. On applle base Hilbertienne une suite (e_n) d'éléments de H tels que :
(i) $\|e_n\| = 1, \forall n, \; < e_n, e_m >= 0 \; \forall m, \; n, \; m \neq n.$
(ii)L'espace vectoriel engendré par les (e_n) est dense dans H.

Théorème 2.3.6. *Soit $\{e_n\}$ une base Hilbertienne, alors tout $u \in H$ s'écrit $u = \sum_{n=1}^{+\infty} < u, e_n > e_n$. De plus*

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \| < u, e_n > \|^2 \text{ égalité de Parseval .}$$

Inversement étant donnée une suite $\{\alpha_n\} \in \ell^2$, alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n$ converge vers un élément noté u et on a $< u, e_n >= \alpha_n$ et $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2$.

Intégrale de Bochner

Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, de mesure μ finie, et X un espace de Banach.

Définition 2.3.11. Une fonction $f : \Omega \longrightarrow X$ est dite simple s'il existe $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ et $B_1, B_2, ..., B_n \in \Sigma$ avec $\cup B_i = \Omega$ et $B_i \cap B_j = \emptyset \; i \neq j$ tels que $f = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \chi B_i$.

Définition 2.3.12. Une fonction $f : \Omega \longrightarrow X$ est dite μ-mesurable s'il existe une suite de fonction simple $(f_n)_n$ avec $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_X = 0 \; \mu.p.p$ sur Ω.

La proposition suivante nous donne une caractérisation des fonctions μ-mesurable.

Proposition 2.3.3. *$f : \Omega \longrightarrow X$ est μ-mesurable si et seulement si $\exists g$ mesurable telle que $f - g = 0 \; \mu.p.p$, et $\exists N \in \Sigma$, avec $\mu(N) = 0$ telle que $f(\Omega/N)$ est separable.*

Définition 2.3.13. Une fonction $f : \Omega \longrightarrow X$ μ-mesurable est dite Bochner intégrable s'il existe une suite de fonctions simples (f_n) telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \|f_n - f\|_X d\mu = 0.$$

Dans ce cas, $\int_{\Omega} f d\mu$ est définie par

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

Où $\int_{\Omega} f_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(B_i)$

On a la caractérisation suivante des fonctions Bochner intégrable :

Théorème 2.3.7. *Une fonction f μ-mesurable est Bochner intégrable si et seulement si $\int_{\Omega} \|f\|_X d\mu < +\infty$, et on a $\| \int_{\Omega} f d\mu\| \leq \int_{\Omega} \|f\| d\mu$.*

L'intégrale de Bochner vérifie les propriétés classiques de l'intégrale comme la linéarité, la relation de chasles,..., ect. Pour plus de détaille voir ([7]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Brezis. Analyse fonctionnelle. Théorie et applications, Masson (1983).

[2] D. Brindle, G. M. N'Guérékata, Existence Results of S-asymptotically τ-périodic mild solutions to some Integrodifferential Equations, PanAmerican. Math. J. 29(2019) 63-74.

[3] C. Corduneanu, Almost Periodic Functions, second ed. Chelsea, New York, 1989.

[4] C. Cuevas, J. C. De Souzon, S-asymptotically ω-périodic solution of semilinear fractional integro-differential equation, App. Math. Letters 22(2009) 865-870.

[5] J. Diestel, Sequences and Series in Banach spaces spninger-Verlag 1984.

[6] W. Dimbour, G. Mophon, G. M. N'Guérékata, S-asymptotically ω-périodic solution for partial differential equation with finite delay. Electron. J. Differ. Equa. (2011)1-12.

[7] J. Diestel, J. J. Uhl, Jr. VectoMeasures, Americalsosiety, 1977.

[8] M. FRIGON AND A. GRANAS. Resultat de type Leray-schauder pour des contractions sur des espaces de Féchet, Ann. sci. Math, Québec, 22(1998), no. 2, 161-168.

[9] H. R. Henriquez, Approximation of abstract functional differential equations with unbounded delay, Indian J. Pure Appl. Math. 27(4) (1996) 357-386.

[10] H. R. Henriquez, M. Pierri and P. Tabos, On s-asymptotically w-periodic functions on Banach spaces and applications, J. Math, Anal. Appl. 343 (2008) 1119-1130.

[11] Haiyin Gao, Ke Wang, Fengying Wei, Xiaohua Ding, Massera-type theorem and asymptotically periodic logistic equations, Nonlinear Anal. Real World Appl. 7 (2006) 1268-1283.

[12] B. M. Levitan, V. V. Zhikov, Almost Periodic Functions and Differential Equations, Cambridge Univ. Press, 1982.

[13] Lunardi A. Analytic semigreups and optimal regularity in parabolic problems. PNLED, vol. 16. Basel : Birkhauser Verlag ; 1995 ;1-424.

[14] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.

[15] W. M. Ruess, W. H. Summers. Asymptotic almost periodicity and montions of semigroups of operators, Linear Algebra Appl. 84 (1986) 335-351.

[16] S. Zaidman, Almost Periodic Functions in Abstract Spaces, Res. Notes Math, vol. 126, Pitman, Boston, MA, 1985.

[17] E. Zeidler, Non linear Fonctionnal Analysis of Epidemics, world scientific Publishing, co. ptc. Ltd. 2009.