

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTÉ DU GÉNIE ÉLECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etudes
de MASTER ACADÉMIQUE
Domaine : Sciences et technologies
Filière : Automatique
Spécialité : Automatique et Systèmes

Présenté par

Toufik MAAMRI
Said MOUSSA YAHIA

Thème

Commande par mode glissant basée sur un observateur à état étendu d'un moteur à courant continu

Mémoire soutenu publiquement le **25/06/2024** devant le jury composé de :

Mme Ouiza ADJEMOUT
MAA, UMMTO, Président

Mme Nadia DJEGHALI
Professeur, UMMTO, Encadrant

Mme Farida AL MANSBA
MAA, UMMTO, Examineur

Mme Fazia AMROUN
MAB, UMMTO, Examineur

Remerciements

On tient à remercier tout d'abord le bon Dieu le tout puissant qui nous a donné le courage et la volonté pour la réalisation de ce modeste travail.

On tient à exprimer toute notre reconnaissance à notre chère promotrice Madame Nadia DJEGHALI, Professeur à l'université de Mouloud MAMMERI de Tizi Ouzou, qui nous a accueillis durant tout ce travail.

On tient à remercier ainsi tous les membres de jury : Madame Farida AL MANSBA (MAA, UMMTO, Examineur), Madame Fazia AMROUN (MAB, UMMTO, Examineur) et Madame Ouiza ADJEMOUT (MAA, UMMTO, Président) d'avoir accepté d'évaluer notre travail.

Nos remerciements vont également à tous les enseignants de la Faculté du Génie Électrique et d'Informatique qui nous ont donné de nobles enseignements durant toutes nos années d'étude et en particulier ceux du département d'Automatique.

On termine cet avant propos en remerciant nos familles pour nous avoir encouragés, accompagnés et pour leur soutien inconditionnel.

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

Mes chers parents

Mes deux frères

Ma soeur

Tous mes cousins

Tous mes oncles et toute ma famille

Tous mes amis

Tous ceux qui m'aiment et que j'aime

Et que Dieu les protège

Toufik

Dédicaces

Je dédie ce mémoire

À mon père et à ma mère, pour leurs encouragements

À ma sœur et à mon frère

À toute ma famille

À tous mes amis.

Said

Résumé :

Dans ce travail, une commande par mode glissant basée sur un observateur à état étendu sera appliquée sur un moteur à courant continu en présence de perturbations. Dans le schéma de commande proposé, les incertitudes internes et les perturbations externes sont estimées par un observateur à mode glissant d'ordre 2 étape par étape à état étendu. Ensuite, une commande par mode glissant est conçue afin d'assurer le bon suivi de trajectoires désirées et le rejet de perturbations. Des simulations sous Matlab seront effectuées pour montrer l'efficacité du schéma de commande proposé.

Mots clés :

- Commande par mode glissant.
- Observateur étape par étape à état étendu.
- Observateur à mode glissant d'ordre 2.
- Commande ADRC.
- Moteur à courant continu.
- Excitation séparée.

Abstract :

In this work, a sliding mode control based on a extended state observer will be applied to a current motor continuous in the presence of disturbances. In the control diagram proposed, internal uncertainties and external disturbances are estimated by an extended-state step-by-step order 2 sliding mode observer. Then, a sliding mode control is designed to ensure proper monitoring of desired trajectories and rejection of disturbances. Simulations under Matlab will be carried out to show the effectiveness of the proposed control scheme.

Keywords :

- Control by sliding mode.
- Extended state step-by-step observer.
- Order 2 sliding mode observer.
- ADRC command.
- DC motor.
- Separate excitation.

Liste des abréviations et d'acronymes

- \mathfrak{R} : Ensemble des nombres réels.
 \mathfrak{R}^+ : Ensemble des nombres réels positifs.
 \mathfrak{R}^n : Espace vectoriel de dimension n .
 \mathfrak{R}^m : Espace vectoriel de dimension m .
 \mathfrak{R}^p : Espace vectoriel de dimension p .
 A : Matrice d'évolution (d'état).
 B : Matrice de commande.
 C : Matrice d'observation.
 n : Nombre de variables.
 m : Nombre d'entrées.
 p : Nombre de sorties.
 \dot{x} : Dérivée de x .
 \hat{x} : Estimé de x .
 \tilde{x} : Tilde de x .
 x_d : x désiré.
 B_d^\dagger : Pseudo inverse de B_d .
 $\|\cdot\|$: Norme.
 $|\cdot|$: Valeur absolue.
 $sign$: Fonction signe.
 L : Le gain de l'observateur.
 r : Le degré relatif.
 O : Matrice d'observabilité.
 M : Le grammien d'observabilité.
 ε : Erreur entre une valeur et sa référence.
 I_n : Matrice identité de dimension $n \times n$.
 T : Matrice de transformation.
 $S(x, t)$: La surface du glissement.
 u : La commande.
 u_{eq} : La commande équivalente.
 u_d : La commande discontinue.

Table des matières

1	Synthèse d'observateurs	3
1.1	Introduction	3
1.2	Rappels sur les observateurs	4
1.3	Principe d'observation	5
1.3.1	Observabilité des systèmes linéaires temps invariant	5
1.3.2	Critères d'observabilité pour les systèmes linéaires	6
1.3.3	L'observabilité des systèmes non linéaires	7
1.4	Synthèse d'observateurs des systèmes linéaires	8
1.4.1	Observateur asymptotique de Luenberger	8
1.4.2	Observateur à entrée inconnue	9
1.4.3	Le filtre de Kalman	12
1.4.4	Observateur adaptatif	12
1.4.5	Observateur à mode glissant (Sliding Mode Observer)	12
1.5	Synthèse d'observateurs des systèmes non linéaires	15
1.5.1	Observateur de Luenberger étendu	15
1.5.2	Filtre de Kalman-Bucy étendu (Extended Kalman Filter : EKF)	16
1.5.3	Observateur à grand gain (High Gain Observer)	16
1.5.4	Observateur adaptatif	18
1.5.5	Observateur à mode glissant	18
1.5.6	Observateur à état étendu	20
1.6	Conclusion	21
2	Commande par mode glissant	22
2.1	Introduction	22
2.2	L'objectif de la commande par mode glissant	22
2.2.1	Le régime de glissement idéal	23
2.2.2	Le régime de glissement réel	23
2.3	Concepts de base de la commande par mode glissant	24
2.3.1	Phase de convergence	24
2.3.2	Phase de glissement	24
2.3.3	Phase de régime permanent	25
2.4	Choix de la surface de glissement	25
2.5	Conditions d'existence et de convergence	27
2.5.1	Fonction discrète de commutation	27
2.5.2	Fonction de Lyapunov	27
2.6	Détermination de la loi de commande	28
2.6.1	Calcul de la commande équivalente	28
2.6.2	Calcul de la commande discontinue	29

2.7	Synthèse de la surface de glissement pour les systèmes linéaires	33
2.8	Propriété de robustesse	34
2.9	Phénomène de chattering	35
2.9.1	Solution de la couche limite	36
2.9.2	Solution par mode glissant d'ordre supérieur	37
2.9.3	Commande par mode glissant d'ordre 2	38
2.10	Conclusion	41
3	Application à la commande d'un moteur à courant continu	42
3.1	Introduction	42
3.2	Rappels sur la machine à courant continu	43
3.2.1	Constitution du moteur à courant continu	43
3.2.2	Principe de fonctionnement	46
3.2.3	La force contre électromotrice	47
3.2.4	Différents types du moteur à courant continu	47
3.2.5	Variation de la vitesse	50
3.2.6	Avantages et inconvénients	50
3.2.7	Bilan de la puissance	51
3.2.8	Rendement	52
3.2.9	Différentes utilisations du moteur à courant continu à excitation séparée	52
3.2.10	Equations électromécaniques du moteur à courant continu en régime dynamique (transitoire)	53
3.3	Commande par rejet actif des perturbations (Active Disturbance Rejection Control : ADRC)	54
3.4	Application d'ADRC à un moteur à courant continu	55
3.4.1	Synthèse de l'observateur à état étendu (Extended State Observer)	56
3.4.2	Conception du contrôleur à mode glissant	56
3.5	Résultats de simulation	60
3.6	Conclusion	72

Table des figures

1.1	Estimation d'état par un observateur	4
1.2	Commande par retour d'état reconstruit	4
1.3	Schéma bloc de l'observateur de Luenberger	8
1.4	Observateur à entrée inconnue	10
1.5	Etats et leurs estimés	15
2.1	Régime de glissement idéal	23
2.2	Régime de glissement réel	24
2.3	Mode de glissement en 3 phases	25
2.4	La commande équivalente	29
2.5	La commande discontinue	30
2.6	Structure de la commande par mode glissant avec la commande équivalente . . .	32
2.7	Structure de la commande par mode glissant par commutation au niveau de l'organe de commande	32
2.8	Phénomène de chattering	35
2.9	Fonction saturation.	36
2.10	Fonction sigmoïde.	37
2.11	Allure du régime glissant classique.	38
2.12	Allure du régime glissant pour les ordres supérieurs.	38
2.13	Convergence de l'algorithme du twisting dans le plan (S, \dot{S})	39
3.1	Fonctionnement de la machine à courant continu	43
3.2	Moteur à courant continu	43
3.3	Les éléments d'un moteur à courant continu	44
3.4	Vues éclatées d'un moteur à courant continu	44
3.5	Le stator	45
3.6	Le rotor	45
3.7	Dispositif collecteur/balais	46
3.8	Principe de fonctionnement d'un moteur à courant continu	47
3.9	Modèle d'un moteur à excitation séparée	48
3.10	La fréquence en fonction de la tension d'alimentation	49
3.11	Le couple en fonction du courant d'excitation	49
3.12	Entrée+système+sortie	50
3.13	Bilan de la puissance	51
3.14	TGV	52
3.15	Modèle dynamique d'un moteur à courant continu à excitation séparée	53
3.16	Schéma bloc du principe d'ADRC	55
3.17	Les variables d'état pour $x_{1d} = 100$	60
3.18	Les variables d'état pour $x_{1d} = 50$	61

3.19	(a), (b) Les erreurs d'estimation d'état, (c) : l'état étendu x_3 et son estimé pour $x_{1_d} = 100$	62
3.20	(a), (b) Les erreurs d'estimation d'état, (c) : l'état étendu x_3 et son estimé pour $x_{1_d} = 50$	63
3.21	La trajectoire de l'entrée de commande pour $x_{1_d} = 100$	64
3.22	La trajectoire de l'entrée de commande pour $x_{1_d} = 50$	65
3.23	Les variables d'état pour $x_{1_d} = 100$	66
3.24	Les variables d'état pour $x_{1_d} = 50$	67
3.25	(a), (b) Les erreurs d'estimation d'état, (c) : l'état étendu x_3 et son estimé pour $x_{1_d} = 100$	68
3.26	(a), (b) Les erreurs d'estimation d'état, (c) : l'état étendu x_3 et son estimé pour $x_{1_d} = 50$	69
3.27	La trajectoire de l'entrée de commande pour $x_{1_d} = 100$	70
3.28	La trajectoire de l'entrée de commande pour $x_{1_d} = 50$	71

Introduction générale

Les moteurs à courant continu (MCC) jouent un rôle crucial dans divers secteurs industriels en raison de leur simplicité, de leur efficacité et de leur capacité à offrir un contrôle précis de la vitesse et du couple. Depuis leur invention, les moteurs à courant continu ont été largement adaptés dans des applications telles que la robotique, les systèmes du transport électriques, les appareils électroménagers et les dispositifs médicaux. Leur popularité s'explique par leur facilité de contrôle, leur capacité à fonctionner sur une large plage de vitesses et leur robustesse dans des environnements industriels exigeants.

Cependant, en dépit de leurs nombreux avantages, les moteurs à courant continu sont confrontés à des défis. Les perturbations externes, les variations de charge, les fluctuations de température et les imprécisions dans les mesures peuvent considérablement altérer les performances et la stabilité de ces moteurs. Afin de relever ces défis, il est impératif de mettre en place des méthodes de commande avancées et de surveillance pour garantir une performance optimale et une fiabilité à long terme.

La connaissance des estimations des variables d'état du système étudié (MCC ici) revêt une importance cruciale dans la conception de ces méthodes de commande et de surveillance. Toutefois, dans la pratique, il est souvent difficile, voire impossible, de mesurer toutes les variables d'état du système. Cette difficulté peut être due à des limitations physiques, telles que l'indisponibilité de certains capteurs nécessaires ou la complexité de leur installation, ou à des considérations économiques, comme la volonté de minimiser le nombre de capteurs afin de réduire les coûts d'instrumentation. Pour pallier ces limitations, il est nécessaire de recourir à un système dynamique auxiliaire, appelé observateur, dont la fonction est d'estimer l'état du système.

En général, la synthèse de l'observateur repose sur l'utilisation des informations disponibles sur les systèmes réels, telles que le modèle dynamique du système, ses entrées et ses sorties mesurées. Les problèmes de synthèse de l'observateur pour les systèmes linéaires ont été résolus dans les années 1960-1970. Les observateurs les plus couramment utilisés pour ces systèmes sont l'observateur asymptotique de Luenberger dans le cas déterministe et le filtre optimal de Kalman-Bucy dans le cas stochastique. En outre, les observateurs à mode glissant sont également utilisés, bien qu'ils présentent une structure non linéaire [1].

Ce mémoire explore la combinaison de la commande par mode glissant et de l'observateur à état étendu pour le contrôle optimal des moteurs à courant continu. La commande par mode glissant est réputée pour sa robustesse face aux incertitudes et aux perturbations, tandis que l'observateur à état étendu permet une estimation précise des états internes du système et de l'état étendu qui représente les incertitudes internes et les perturbations externes qui affectent le système. Cette approche combinée vise à améliorer la performance globale et la robustesse

du système de commande des MCC.

La problématique centrale de ce mémoire est la suivante : comment intégrer efficacement la commande par mode glissant avec un observateur à état étendu pour améliorer la robustesse et la performance du contrôle des moteurs à courant continu à excitation indépendante, face aux perturbations et aux incertitudes des paramètres ?

Ainsi, l'objectif de notre travail est de développer et tester une stratégie de commande intégrant la commande par mode glissant et un observateur à état étendu pour un moteur à courant continu. Nous partons de l'hypothèse que l'intégration de la commande par mode glissant avec un observateur à état étendu apportera une amélioration significative en termes de robustesse et de précision face aux perturbations externes et aux variations paramétriques.

Plan du mémoire : Ce mémoire est structuré en trois chapitres principaux :

1. Synthèse des observateurs d'état : Ce chapitre passe en revue les différentes méthodes d'observation d'état, y compris les observateurs de Luenberger, les filtres de Kalman et les observateurs à état étendu. Chaque méthode est analysée en termes de précision, de robustesse et de complexité.

2. Commande par mode glissant : Ce chapitre explore les principes fondamentaux de la commande par mode glissant, ses avantages en termes de robustesse et ses défis pratiques. Des études de cas et des exemples illustratifs sont présentés pour montrer l'efficacité de cette méthode dans différents scénarios de contrôle.

3. Application à la commande d'un moteur à courant continu : Dans ce chapitre, nous intégrons les techniques de l'observateur à état étendu et de commande par mode glissant pour contrôler un moteur à courant continu. Des simulations détaillées seront présentées pour démontrer l'amélioration des performances et de la robustesse du système de commande proposé.

Chapitre 1

Synthèse d'observateurs

1.1 Introduction

En automatique classique et avancée, la connaissance de l'état du système étudié est nécessaire dans plusieurs applications. En effet, la conception des méthodes de commande notamment celles par retour d'état, la surveillance et le diagnostic de défauts nécessitent la connaissance des informations sur le système considéré.

Usuellement, les variables d'entrées de commande qui servent à piloter le système et les variables de sortie, qui sont directement accessibles à la mesure, constituent les informations connues et disponibles à l'utilisateur.

Cependant, dans de nombreuses situations, ces informations sont insuffisantes. Il est donc nécessaire de connaître les variables internes (variables d'état) qui décrivent de manière complète l'état du système [2].

Afin d'obtenir ces informations sur ces variables d'état, on peut imaginer ajouter des capteurs de mesure en plus de ceux utilisés pour mesurer les grandeurs de sorties. Cette solution triviale est fastidieuse pour plusieurs raisons ?

Alors que l'ajout de capteurs n'est pas toujours technologiquement possible (capteur inexistant, etc.) et même lorsque cela est possible, le coût supplémentaire engendré est très important. De plus, l'ajout de matériels sur un système complexifie sa modélisation et diminue beaucoup sa fiabilité. Le recours à une méthode d'obtention des estimées des variables d'état revêt donc une grande importance dans la surveillance et la commande des systèmes. L'une des approches d'élaboration des estimées utilise les observateurs d'état.

Un observateur d'état est un algorithme qui permet de reconstruire ou d'estimer en ligne les valeurs de l'état réel d'un procédé à partir de la seule connaissance des entrées et des sorties. L'observateur a une structure semblable à celle du modèle du système et possède un terme additif de correction permettant de corriger la déviation entre la trajectoire de l'observateur et celle du système réel.

L'observateur remplit donc le rôle des capteurs de variables d'état, implémenté sur un calculateur ; il devient alors un capteur logiciel.

Dans ce chapitre, nous définirons la théorie et les notions d'observabilité que ce soit dans le domaine linéaire ou non linéaire ainsi présenterons leurs méthodes de synthèse. La synthèse d'un observateur reste un problème de commande (stabiliser l'erreur d'estimation), d'autres stratégies issues de la théorie du contrôle peuvent aussi être associées (optimal, Lyapunov et Backstepping, H infini, neuro-floue, etc.). Mais dans notre mémoire ; on se basera sur l'observateur à mode glissant dans les deux contextes linéaires et surtout dans le contexte non linéaire.

1.2 Rappels sur les observateurs

La structure basique d'un observateur est représentée par la figure (1.1). Un observateur d'état est utilisé essentiellement dans les schémas de commande par retour d'état afin de mettre en œuvre des commandes dites par retour d'état reconstruit (désigné par le vocable "output feedback" ou retour de sortie à base d'observateur) comme le montre la figure (1.2).

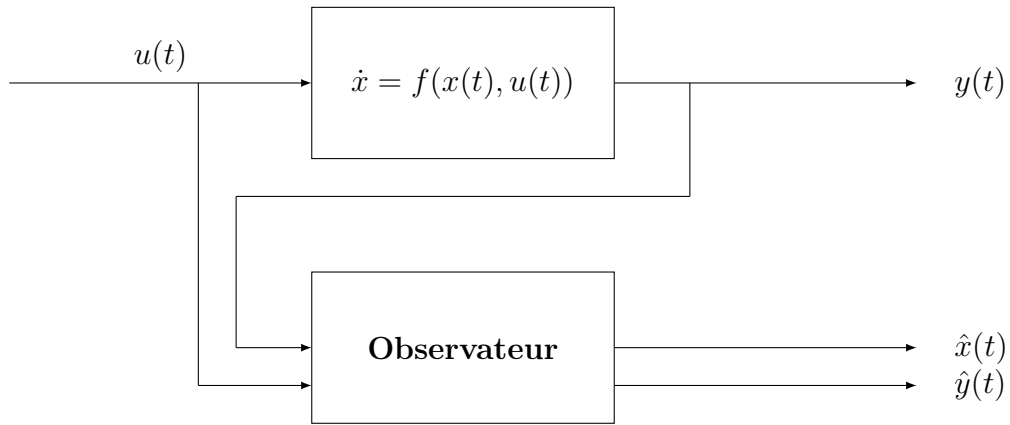


FIGURE 1.1 – Estimation d'état par un observateur

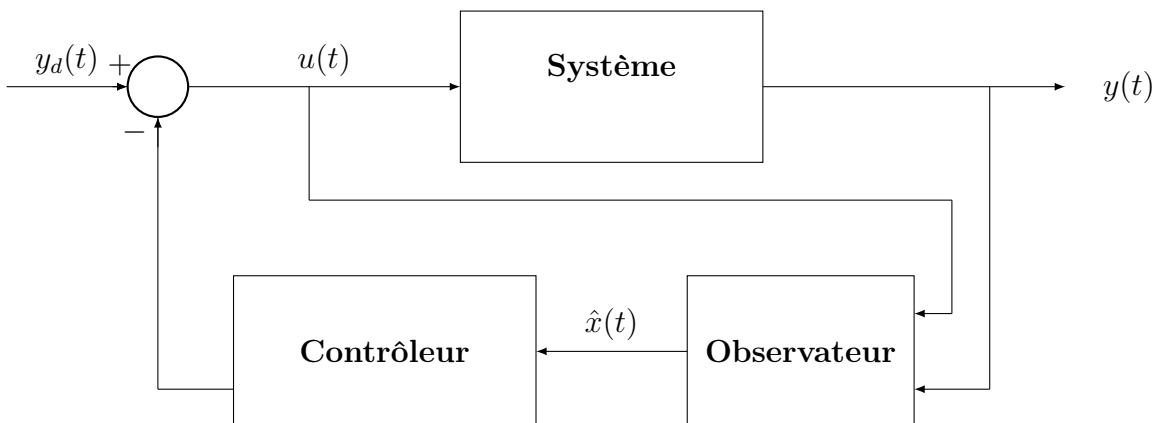


FIGURE 1.2 – Commande par retour d'état reconstruit

1.3 Principe d'observation

Soit le système dynamique décrit par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.1)$$

Où : $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état.

$u(t) \in \mathbb{R}^m$ représente le vecteur d'entrée du processus.

$y(t) \in \mathbb{R}^p$ représente le vecteur de sortie du processus.

f et h sont des fonctions non linéaires dans le cas général.

Un observateur est donc un outil d'estimation d'état qui permet la reconstruction des états du système à partir des signaux d'entrées et de sorties.

Soient $u(t)$ et $y(t)$ respectivement l'entrée et la sortie du processus réel. L'équation de l'observateur se définit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = h(\hat{x}(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.2)$$

L'objectif est que l'erreur d'estimation d'état tende vers zéro :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow \infty$$

Avant d'entamer la conception d'un observateur, il est nécessaire et indispensable de tester son observabilité en utilisant la condition du rang dans le cas linéaire.

Contrairement aux systèmes linéaires, l'observabilité des systèmes non linéaires dépend des entrées et des conditions initiales.

1.3.1 Observabilité des systèmes linéaires temps invariant

Considérons un système linéaire continu temps invariant décrit par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.x(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

Où : $x(t)$ est le vecteur d'état de dimension n , $u(t)$ est le vecteur d'entrée du processus de dimension m et $y(t)$ est le vecteur de sortie du processus de dimension p [5]. A , B et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées et supposons t_0 l'instant initial et $x_0 = x(t_0)$ la condition initiale.

Définition 1.1

Le système (1.3) est dit observable à l'instant t_0 s'il existe un temps finit $t_1 > t_0$ tel que pour tout état initial x_0 à l'instant initial t_0 ($x_0 = x(t_0)$); la connaissance de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $y(t)$, suffisent pour déterminer x_0 . Sinon, le système n'est pas observable.

Remarque 1.1

Si toutes les variables d'état sont observables, alors le système est dit complètement observable. Par contre si seulement n_0 ; ($n_0 < n$) sont observables alors le système est dit partiellement observable.

Les variables d'état observables génèrent un espace d'observabilité de dimension n_0 .

1.3.2 Critères d'observabilité pour les systèmes linéaires

Il existe plusieurs critères qui permettent de vérifier si le système (1.3) est observable ou non. L'un des plus utilisés est le critère de rang de Kalman. Notons que l'inconnue du problème est la condition initiale $x_0 = x(t_0)$ car, en effet, la connaissance du modèle (les matrices A, B et C étant connues), si la condition initiale est connue, alors on peut connaître l'état du processus à n'importe quel instant t par la relation suivante :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau \tag{1.4}$$

Théorème 1.1 (Critère du rang de Kalman) [6]

Le système (1.3) est observable si le rang de la matrice d'observabilité O de dimension $(pn \times n)$ définie par :

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

est égal à n .

Théorème 1.2 (Le gramien d'observabilité) [6]

Le système (1.3) est observable si le gramien d'observabilité qui est défini par :

$$M(t_0, t) = \int_{t_0}^t e^{A^T(t-t_0)} C^T C e^{A(t-t_0)} dt \tag{1.6}$$

est une matrice symétrique définie positive (inversible).

Un autre critère est celui de Hautus faisant intervenir les valeurs propres de la matrice A .

Théorème 1.3 (Critère de Hautus) [6]

Le système (1.3) est dit observable si et seulement si la condition de rang suivante :

$$rang \left(\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} \right) = n \tag{1.7}$$

est satisfaite pour toute valeur propre : λ_i ; $i = 1, 2, 3, \dots, n$ de la matrice A .

1.3.3 L'observabilité des systèmes non linéaires

L'observabilité des systèmes non linéaires, dépend des entrées et des conditions initiales. Contrairement aux systèmes linéaires ; pour les systèmes non linéaires, il existe différentes définitions d'observabilité.

On considère le système non linéaire décrit par le modèle d'état (1.1), réécrit ci-dessous [10] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.8)$$

Où : $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état.

$u(t) \in \mathbb{R}^m$ représente le vecteur d'entrée du processus.

$y(t) \in \mathbb{R}^p$ représente le vecteur de sortie du processus.

$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ sont des fonctions analytiques.

Définition 1.2 (Distinguabilité, Indistinguabilité)

Deux états initiaux x_1 et $x_2 \in \mathcal{X}$ tel que $x_1 \neq x_2$ sont dits distinguables dans \mathcal{X} si $\exists t \geq 0$ et toute entrée $u \in [0, t] \longrightarrow U$ telle que les trajectoires des sorties correspondantes $y_1(t, x_1, u(t))$ et $y_2(t, x_2, u(t))$ vérifient :

$$y_1(t, x_1, u(t)) \neq y_2(t, x_2, u(t))$$

Dans le cas contraire, deux états initiaux x_1 et $x_2 \in \mathcal{X}$ sont indistinguables si :

$$y_1(t, x_1, u(t)) = y_2(t, x_2, u(t))$$

Définition 1.3 (Observabilité et observabilité locale faible)

Un système est dit observable en $x_1 \in \mathcal{X}$ si tout autre état $x_2 \neq x_1$ est distinguable de x_1 dans \mathcal{X} . Un système est globalement observable s'il est distinguable en tout point de \mathcal{X} .

Un système est localement ou faiblement observable, s'il existe un voisinage de V pour tout \mathcal{X} tel que pour tout voisinage \tilde{V} de \mathcal{X} qui est contenu dans V , il n'existe aucun état indistinguable de \mathcal{X} en \tilde{V} où les trajectoires évoluent à l'intérieur de \tilde{V} .

Pratiquement, ces notions sont relativement difficiles à vérifier et souvent on fait recours à la linéarisation du système autour de son point d'équilibre.

Définition 1.4 (Observabilité au sens du rang)

Le système (1.8) est observable si la condition de rang suivante est satisfaite :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} dh(x, u) \\ dL_f h(x, u) \\ dL_f^2 h(x, u) \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h(x, u) \end{pmatrix} = n \quad (1.9)$$

Avec :

$$\begin{cases} dh(x, u) = \left[\frac{dh}{dx_1} \quad \frac{dh}{dx_2} \quad \dots \quad \frac{dh}{dx_n} \right] \\ L_f h(x, u) = \frac{dh}{dx} f(x, u) \end{cases} \quad (1.10)$$

1.4 Synthèse d'observateurs des systèmes linéaires

1.4.1 Observateur asymptotique de Luenberger

L'un des premiers observateurs introduits dans la littérature est l'observateur de Luenberger au début des années 1970. Cet observateur est décrit par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A.\hat{x}(t) + B.u(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C.\hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.11)$$

Où : $\hat{x}(t)$ est le vecteur d'état estimé de dimension n et $\hat{y}(t)$ est le vecteur de sortie estimé du processus de dimension p . La matrice L de dimension $(n \times p)$ est le gain de l'observateur que l'on doit déterminer (c'est le paramètre unique de conception de l'observateur) afin d'assurer que l'état estimé converge vers l'état réel du système. La condition initiale $\hat{x}_0 = \hat{x}(t_0)$ est choisie arbitrairement généralement nulle. Notons que comme la condition initiale du vecteur d'état réel est inconnue, il serait quasiment impossible de choisir x_0 égale à \hat{x}_0 .

Remarquons que dans le cas d'une seule sortie, le gain L est un vecteur colonne de dimension n .

Les équations (1.11) peuvent se réécrire comme suit [8] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + B.u(t) + L.y(t) \\ \hat{y}(t) = C.\hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.12)$$

Le terme " $L.y(t)$ " est le signal de contrôle (de pilotage) de l'observateur. Ce terme est désigné comme l'injection de sortie. Cette injection est linéaire à action proportionnelle, l'utilisation d'une injection de contrôle linéaire conduit à une convergence de l'observateur asymptotique c'est-à-dire quand le temps (t) tend vers l'infini (∞). L'utilisation de lois d'injection de contrôle non linéaire (observateur non linéaire) ou bien avec un gain " $L(t)$ " temps variant permet d'avoir une convergence en temps fini voire même en temps pré-sélectionné à l'avance. Le schéma de simulation de l'observateur de Luenberger est illustré par la figure suivante :

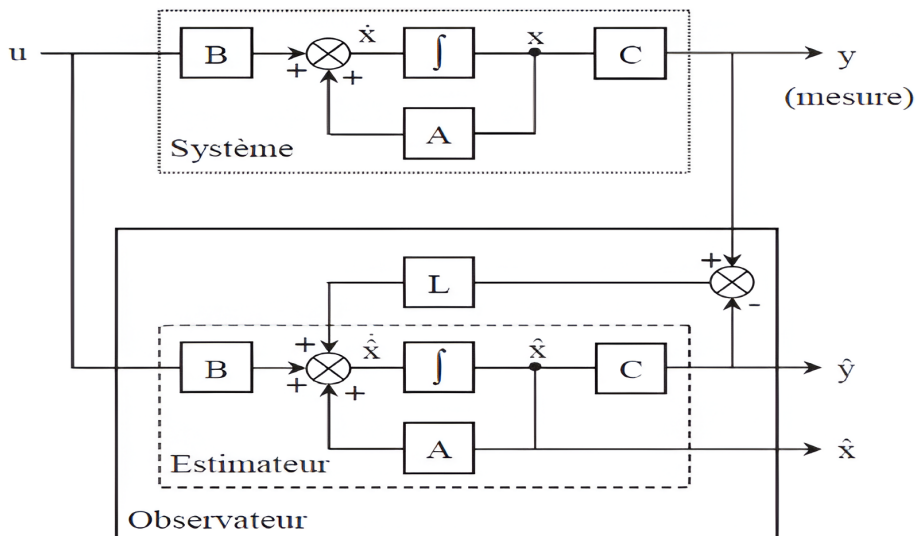


FIGURE 1.3 – Schéma bloc de l'observateur de Luenberger

Considérons les erreurs d'estimation ou d'observation sur l'état $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ et sur la sortie $e_y(t) = y(t) - \hat{y}(t)$.

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état est régie par l'équation suivante :

$$\dot{e}_x(t) = A.x(t) + B.u(t) - A.\hat{x}(t) - B.u(t) - LC(x(t) - \hat{x}(t)) \quad (1.13)$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \dot{e}_x(t) = (A - LC)e_x(t) \\ e_y(t) = C.e_x(t) \end{cases} \quad (1.14)$$

La solution à cette équation d'état est [8] :

$$\begin{cases} e_x(t) = e^{(A-LC)(t-t_0)}e_x(t_0) \\ e_y(t) = C.e^{(A-LC)(t-t_0)}e_x(t_0) \end{cases}$$

Où : $e_x(t_0) = x(t_0) - \hat{x}(t_0)$ est l'erreur d'estimation initiale pratiquement toujours différente de zéro. Il en vient que si la matrice $(A - LC)$ est une matrice hurwitzienne ou d'Hurwitz c'est-à-dire ayant des valeurs propres à parties réelles strictement négatives (stables) et plus à gauche que possible pour avoir une rapidité désirée mais pas de telle manière à détruire ou endommager les performances du système alors l'erreur d'estimation tend vers zéro quand t tend vers l'infini. L'observateur de Luenberger est donc un observateur asymptotique. Si le système est observable, il est toujours possible de déterminer le gain L de telle manière à ce que les valeurs propres de $(A - LC)$ soient égales à celles désirées, préalablement choisies.

La synthèse de l'observateur consiste donc à choisir les valeurs propres de $(A - LC)$ de manière judicieuse (stables, à parties réelles négatives et suffisamment rapides devant la dynamique du système) et de calculer L en résolvant le problème de placement de pôles.

Alors au final; on peut constater que l'observateur de Luenberger est caractérisé par sa convergence asymptotique, son injection linéaire à action proportionnelle (éventuellement avec action intégrale, PI ou multi-intégrale, MPI).

1.4.2 Observateur à entrée inconnue

Considérons le système suivant soumis à des perturbations externes décrit par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t) + B_d.d(t) \\ y(t) = C.x(t) \end{cases} \quad (1.15)$$

Les matrices constantes : A , B et C sont de dimensions $n \times n$, $n \times m$ et $p \times n$, respectivement. Le vecteur $d(t)$ est de dimension n_d (donc B_d est de dimension $n \times n_d$) représente les perturbations externes. L'idée est de concevoir un observateur tel que l'erreur d'estimation ne soit pas affectée par la perturbation externe $d(t)$.

L'observateur à entrée inconnue est formulé comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = N.z(t) + G.u(t) + L.y(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) + E.y(t) \\ \hat{y}(t) = C.\hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.16)$$

Les dimensions des matrices : N , G , L , et E sont respectivement : $n \times n$, $n \times m$, $n \times p$ et $n \times p$.

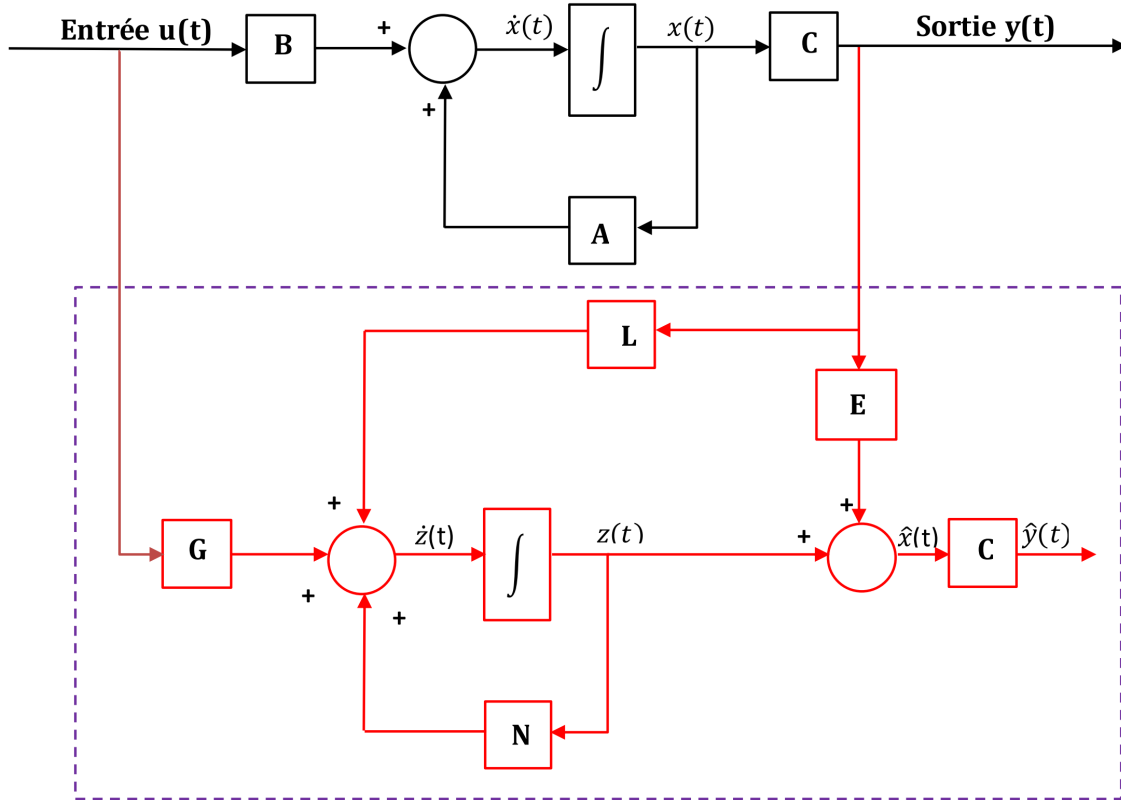


FIGURE 1.4 – Observateur à entrée inconnue

La dynamique de l'erreur d'estimation est régie par les équations suivantes [9] :

$$\begin{cases} \dot{e}_x(t) = N \cdot e_x(t) + [PA - NP - LC]x(t) + [PB - G]u(t) + PB_d \cdot d(t) \\ e_y(t) = C \cdot e_x(t) \end{cases} \quad (1.17)$$

Où : $P = I_n - EC$ (I_n est une matrice identité de dimension $n \times n$).

Si les relations suivantes :

$$\begin{cases} PA - NP - LC = 0 \\ PB - G = 0 \\ PB_d = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

sont satisfaites ; alors :

$$\begin{cases} \dot{e}_x(t) = N \cdot e_x(t) \\ e_y(t) = C \cdot e_x(t) \end{cases} \quad (1.19)$$

Nous concluons que l'erreur d'estimation est indépendante de la perturbation. Si on choisit la matrice N répondant à une dynamique stable et avec une rapidité désirée (choix des valeurs propres de N), alors $\dot{e}_x(t) = e^{N(t-t_0)}e_x(t_0)$ tend vers zéro quand t tend vers l'infini. La conception de cet observateur consiste à déterminer les matrices N , G , L et E de telle manière

que les relations (1.18) soient satisfaites avec N choisie comme une matrice d'Hurwitz. Afin de résoudre les relations (1.18), nous avons besoin des hypothèses suivantes que doit vérifier le système (1.15).

Hypothèse 1 : $\text{rang}(CB_d) = \text{rang}(B_d) = n$

Hypothèse 2 : Le couple (PA, C) soit observable.

La procédure de calcul se fait par les étapes suivantes :

Etape 1 : Calcul de E

En remplaçant $P = I_n - EC$, la troisième relation de (1.18) s'écrit :

$$ECB_d = B_d$$

Si l'hypothèse 1 est satisfaite alors la matrice non carrée CB_d est inversible à gauche. Notons CB^\dagger la pseudo-inverse à gauche au sens de Moore-Penrose de CB_d alors :

$$E = B_d(CB_d)^\dagger$$

La pseudo-inverse est donnée par :

$$(CB_d)^\dagger = [(CB_d)^T(CB_d)]^{-1}(CB_d)^T$$

Etape 2 : Calcul de P

$$P = I_n - EC$$

Etape 3 : Calcul de G

$$G = PB$$

Etape 4 : Calcul de N et L

La première relation de (1.18) peut s'écrire :

$$PA - (L - NE)C = N$$

Posons $\bar{A} = PA$ et $\bar{L} = L - NE$ alors $\bar{A} - \bar{L}C = N$.

On choisit la matrice N comme une matrice stable ayant les valeurs propres désirées. Si l'hypothèse 2 est vérifiée, c'est-à-dire le couple (\bar{A}, C) est observable, il est donc toujours possible de déterminer L en résolvant le problème de placement de pôles.

On aura donc :

$$L = \bar{L} + NE$$

Remarque 1.2

Si la matrice C est une matrice identité alors le gain L se calcule directement comme suit :

$$L = PA - NP$$

1.4.3 Le filtre de Kalman

Le filtre de Kalman-Bucy est un observateur optimal pour un système stochastique, il est utilisé pour estimer l'état d'un système dynamique à partir des mesures bruitées décrit par le modèle d'état suivant [7] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t) + v(t) \\ y(t) = C.x(t) + w(t) \end{cases} \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.20)$$

La théorie de l'observation de Kalman nécessite la résolution d'une équation de Riccati. Kalman utilise les propriétés statistiques des bruits v et w ainsi propose la structure de l'observateur suivant :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A.\hat{x}(t) + B.u(t) + L(y(t) - C.\hat{x}(t)); \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0 \quad (1.21)$$

En minimisant la matrice de covariance de l'erreur d'estimation P , on obtient l'expression du gain de l'observateur :

$$L = PC^T R^{-1}$$

Où : P est la solution de l'équation de Riccati suivante :

$$AP + PA - PC^T R^{-1}CP + LQL^T = 0$$

Sous certaines conditions, on peut montrer que la matrice P tend vers une limite et que le filtre est stable, ce qui permet éventuellement de conserver pour L sa valeur en régime permanent.

Donc sa convergence asymptotique avec prise en compte du bruit interne et le bruit de mesure.

1.4.4 Observateur adaptatif

Dans le domaine linéaire, la conception des observateurs adaptatifs est étudiée depuis les années 70. Ces observateurs intègrent l'erreur de sortie avec des adaptations des paramètres ou des observateurs, avec une convergence exponentielle basée sur la minimisation de critères spécifiques [16].

1.4.5 Observateur à mode glissant (Sliding Mode Observer)

Considérons le système linéaire suivant, où la paire (A, C) est supposée observable :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.x(t) \end{cases} \quad (1.22)$$

Où : $x(t)$ est le vecteur d'état de dimension n .

$u(t)$ est le vecteur d'entrée du processus de dimension m .

$y(t)$ est le vecteur de sortie du processus de dimension p .

A, B et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

La reconstruction des variables d'état est basée sur les sorties mesurées. Pour que ces dernières apparaissent directement comme des composantes du vecteur d'état, un changement de coordonnées sera effectué. La matrice de sortie sera réécrite comme suit [11] :

$$C = [C_1 \ C_2]$$

La matrice de transformation inversible T permet de réécrire respectivement les matrices de sorties, d'état et de commande dans les nouvelles coordonnées comme suit :

$$\tilde{C} = CT^{-1} = [0_{p \times (n-p)} \ I_p]$$

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$T = \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0_{(n-p) \times p} \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

En respectant les conditions suivantes :

$$C_1 \in \mathfrak{R}^{p \times (n-p)}, C_2 \in \mathfrak{R}^{p \times p} \text{ et } : C_2 \neq 0 \text{ (non nulle) .}$$

Le système (1.22) devient donc sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}y(t) + B_1u(t) \\ \dot{y}(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}y(t) + B_2u(t) \end{cases} \quad (1.23)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = T.x(t); \ x_1(t) \in \mathfrak{R}^{n-p}$$

L'observateur à mode glissant proposé pour ce type de système est défini par la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = A_{11}\hat{x}_1(t) + A_{12}\hat{y}(t) + B_1u(t) + LK.sign(\hat{y}(t) - y(t)) \\ \dot{\hat{y}}(t) = A_{21}\hat{x}_1(t) + A_{22}\hat{y}(t) + B_2u(t) - K.sign(\hat{y}(t) - y(t)) \end{cases} \quad (1.24)$$

Avec :

$$L \in \mathfrak{R}^{n-p}$$

est le gain de l'observateur et $K > 0$.

$\hat{y}(t)$ et $y(t)$ sont respectivement les sorties estimée et réelle .

Les erreurs d'estimation d'état et de sortie sont données par :

$$\begin{cases} e_{x_1}(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t) \\ e_y(t) = y(t) - \hat{y}(t) \end{cases} \quad (1.25)$$

À partir de (3.17), (3.18) et (3.19) la dynamique des erreurs d'estimation s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = A_{11}e_1(t) + A_{12}e_y(t) - LK.sign(\hat{y}(t) - y(t)) \\ \dot{e}_y(t) = A_{21}e_1(t) + A_{22}e_y(t) + K.sign(\hat{y}(t) - y(t)) \end{cases} \quad (1.26)$$

La paire (A_{11}, A_{12}) est observable car (A, C) est observable. Par conséquent le gain L peut être choisi de telle manière que les valeurs propres de la matrice $(A_{11} + LA_{21})$ soient à parties réelles strictement négatives avec une rapidité désirée.

Au final, la convergence de cet observateur est en temps fini. De plus, il est caractérisé par sa robustesse vis-à-vis des perturbations externes, des variations paramétriques et des incertitudes de modélisation.

Exemple 1.1 [8]

Considérons le système linéaire suivant représenté par les matrices d'état, de commande et de la sortie :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.x(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 1]$$

Ce système est observable, car :

$$rang \left(\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} \right) = 2$$

Considérons la matrice inversible :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec ce changement de coordonnées effectué, on obtient les matrices suivantes :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = [0 \ 1]$$

Les gains sont choisis comme suit : $L = 0,57$ et $K = 1$. Les résultats de simulation sont représentés par les figures suivantes :

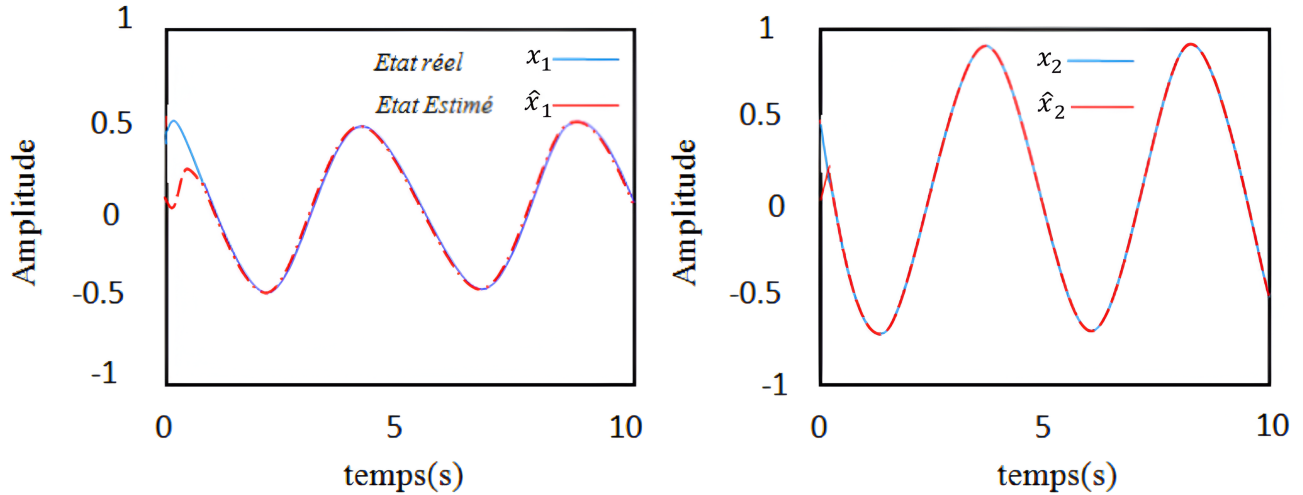


FIGURE 1.5 – Etats et leurs estimés

On remarque bien que les variables d'états estimées sont complètement confondues avec les variables d'états réelles après un temps fini très petit. Cela signifie que l'observateur choisi est efficace.

1.5 Synthèse d'observateurs des systèmes non linéaires

Jusqu'à maintenant, dans le domaine des systèmes non linéaires, la tâche d'observation d'état est plus complexe et délicate alors il n'existe aucune méthode universelle pour la conception d'observateurs. Les approches envisageables se divisent généralement en deux catégories : l'extension des algorithmes utilisés pour les systèmes linéaires et le développement d'algorithmes spécifiques aux systèmes non linéaires.

Depuis les travaux fondateurs de Luenberger, de nombreux chercheurs qui se sont intéressés au développement d'observateurs pour une grande variété de systèmes. La synthèse d'observateurs pour des systèmes non linéaires s'avère être plus difficile que pour les systèmes linéaires en raison de leur nature plus complexe.

En général, plusieurs approches sont envisagées pour la conception de ces observateurs.

1.5.1 Observateur de Luenberger étendu

La synthèse de l'observateur de Luenberger étendu pour les systèmes non linéaires nécessite la disponibilité d'un modèle linéaire, ce type d'observateur intervient au niveau du système

original avec un gain constant, qui est calculé par placement de pôles. Cependant, l'utilisation de cet observateur peut être compromise par les instabilités qui peuvent se révéler si l'on s'éloigne du point de fonctionnement. C'est pour cela que l'on doit s'assurer que l'état restera au voisinage de point d'équilibre avant tout.

L'observateur de Luenberger étendu peut intervenir aussi par un changement de coordonnées, avec un gain dépendant de l'état à estimer, cette méthode ne concerne qu'une classe restreinte de systèmes non linéaires [13].

En effet, beaucoup d'approches utilisant le changement de coordonnées nécessitent l'intégration d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles non linéaires, ce qui est délicat à réaliser.

Donc sa convergence est locale et le principe de séparation n'est pas vérifié.

1.5.2 Filtre de Kalman-Bucy étendu (Extended Kalman Filter : EKF)

Le filtre de Kalman étendu "FKE" est largement exploré dans le domaine d'estimation d'état pour les systèmes dynamiques non linéaires.

Cette méthode consiste à appliquer les équations du filtre de Kalman standard au modèle non linéaire, en le linéarisant à l'aide de la formule de Taylor au premier ordre. Cet observateur donne des résultats acceptables.

Le FKE a été utilisé avec succès dans divers types de processus non linéaires. Cependant, il est important de noter que les démonstrations de stabilité et de convergence établies pour les systèmes linéaires ne peuvent pas être généralisées d'une manière directe aux systèmes non linéaires (ils ne présentent pas de bonnes propriétés de convergence (convergence locale) et ne peuvent pas être étendus d'une manière générale en cas des systèmes non linéaires) [15].

Un autre inconvénient du filtre de Kalman étendu est que sa mise en œuvre exige beaucoup de calculs. D'ailleurs le principe de séparation n'est pas vérifié.

1.5.3 Observateur à grand gain (High Gain Observer)

Les techniques à grand gain peuvent être mises en œuvre sans nécessiter de transformation préalable du système d'origine. Dans ce cas, la conception de cet observateur se fait directement à partir de la structure initiale du système. Cette approche s'appuie sur la théorie de la stabilité de Lyapunov contrairement à l'observateur de Luenberger et au filtre de Kalman pour adapter les méthodes développées dans le cadre linéaire.

La méthode décrit et propose des conditions suffisantes de convergence de l'état estimé vers l'état réel du système pour une classe de systèmes non linéaires définie par le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A.x(t) + f(x(t), u(t)) \\ \hat{y}(t) = C.\hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.27)$$

La dynamique de l'état comporte une partie linéaire non commandée et une partie non linéaire commandée, vérifiant en général la condition de Lipschitz par rapport à x :

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq K_L \|x_1 - x_2\| \quad (1.28)$$

Avec : K_L est la constante de Lipchitz. L'observateur à grand gain possède la structure suivante :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + f(\hat{x}, u) + L(y - C\hat{x}) \quad (1.29)$$

L'appellation "à grand gain" est attribuée à la structure de l'observateur lorsque la fonction non linéaire possède une grande constante de Lipschitz. Dans ce cas, même une petite erreur entre l'état réel et l'état estimé peut entraîner une amplification significative. Par conséquent, le gain L de l'observateur doit être élevé pour compenser l'amplification de l'erreur.

La dynamique de l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est déduite des équations (1.27) et (1.29).

$$\dot{e} = (A - LC)e - f(x, u) + f(\hat{x}, u) \quad (1.30)$$

Il a été démontré que si le gain L est choisi de manière à satisfaire la condition suivante :

$$K_L < \frac{\lambda_{\min}(Q_L)}{\lambda_{\max}(P_L)} \quad (1.31)$$

Où : K_L est la constante de Lipchitz de $f(x, u)$, $\lambda_{\min}(Q_L)$ et $\lambda_{\max}(P_L)$ sont respectivement les valeurs propres minimale et maximale. Q_L est une matrice symétrique définie positive et P_L est une matrice définie positive, solution de l'équation de Lyapunov :

$$(A - LC)^T P_L + (A - LC) = -Q_L \quad (1.32)$$

Ainsi, le système de l'équation (1.29) représente un observateur asymptotique du système non linéaire de l'équation (1.27). La synthèse de cet observateur implique l'ajustement des matrices P_L , Q_L et L de manière à assurer l'égalité de l'équation (1.32). Ensuite, on vérifie si la condition de l'équation est respectée ou pas. Malgré l'intérêt de ce résultat, cette méthode n'est pas constructive, car elle ne fournit aucune indication sur la sélection d'un gain satisfaisant la condition de l'équation (1.30) [16].

Plusieurs auteurs ont étendu cette approche. Pour simplifier le problème, on peut remplacer la matrice Q_L par une matrice identité, ce qui revient à choisir un gain L satisfaisant la relation :

$$K_L < \frac{1}{\lambda_{\max}(P_L)} \quad (1.33)$$

Ces méthodes, connues sous le nom de techniques "à grand gain", sont largement documentées dans la littérature. Elles se concentrent principalement sur la validation, fournissant des conditions suffisantes pour garantir la convergence de l'état estimé vers l'état réel.

La structure de l'observateur non linéaire est une extension de la structure de Luenberger étendu.

Mais l'inconvénient de ce type d'observateur est sa sensibilité au bruit de mesure si le gain est choisi trop grand.

Alors sa convergence est exponentielle, son injection linéaire à action proportionnelle, robuste aux incertitudes de modélisation et le principe de séparation est vérifié mais sous certaines conditions.

1.5.4 Observateur adaptatif

Pour les modèles paramétriques, il peut être nécessaire d'estimer simultanément l'état du système et les paramètres inconnus. Cette tâche est abordée par un algorithme appelé observateur adaptatif.

Un observateur adaptatif est un algorithme récursif qui vise à estimer l'état d'un système dynamique, ses paramètres inconnus, ou les deux conjointement. Les recherches sur les observateurs adaptatifs ont été motivées par des applications en commande adaptative, et plus récemment en détection et diagnostic de pannes dans les systèmes dynamiques.

Pour les systèmes non linéaires, deux approches principales sont distinguées : la première concerne les systèmes non linéaires qui peuvent être associés intrinsèquement à une forme canonique, éventuellement après une transformation de coordonnées non linéaire et une injection de sortie. La deuxième approche concerne les systèmes ayant une forme plus ou moins générale.

De plus, des algorithmes sont proposés pour estimer asymptotiquement l'état malgré les paramètres inconnus, les observateurs adaptatifs basés sur l'existence d'une fonction de Lyapunov sont présentés pour des systèmes non linéaires possédant une forme générale affine par rapport aux paramètres inconnus.

1.5.5 Observateur à mode glissant

Dans les approches précédentes, le modèle dynamique du système était considéré comme parfaitement connu. Cependant, dans ce cas, nous cherchons à développer une certaine robustesse face aux incertitudes et aux variations paramétriques.

- **Observateur à mode glissant étape par étape d'ordre 1**

Considérons le système non linéaire sous la forme triangulaire suivante [6] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + g_1(x_1(t), u(t)) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) + g_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) + g_{n-1}(x_1(t), \dots, x_{n-1}(t), u(t)) \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) + g_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (1.34)$$

Où : $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du système. Les fonctions f_n et g_i , $i = 1, \dots, n$ sont des fonctions scalaires et non linéaires. La structure de l'observateur à mode glissant étape par étape d'ordre 1 est la

suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) + g_1(x_1(t), u(t)) + \lambda_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_3(t) + g_2(x_1(t), \tilde{x}_2(t), u(t)) + E_1 \lambda_2 \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1}(t) = \hat{x}_n(t) + g_{n-1}(x_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, x_{n-1}(t), u(t)) + E_{n-2} \lambda_{n-1} \text{sign}(\tilde{x}_{n-1} - \hat{x}_{n-1}) \\ \dot{\hat{x}}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t)) + g_n(x_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t), u(t)) + E_{n-1} \lambda_n \text{sign}(\tilde{x}_n - \hat{x}_n) \\ \hat{y}(t) = \hat{x}_1(t) \end{cases} \quad (1.35)$$

Où les variables $\tilde{x}_i(t)$ sont données par :

$$\tilde{x}_i(t) = \hat{x}_i(t) + E_{i-1} \lambda_{i-1} \text{sign}(\tilde{x}_{i-1} - \hat{x}_{i-1}) \quad \text{pour } i = 2, \dots, n$$

Avec :

$$E_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{x}_j(t) - \hat{x}_j(t) = 0, \quad \forall j \leq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La convergence des erreurs d'observation en temps fini n'est garantie que si le système possède des entrées bornées et des états bornés pour une durée limitée. Sous cette condition, les λ_i peuvent être sélectionnés de manière à ce que les états de l'observateur $\hat{x}_i(t)$ convergent en un temps fini vers les états réels $x_i(t)$ du système. Cependant, les observateurs d'ordre 1 présentent un inconvénient majeur : ils induisent un phénomène de réticence (broutement ou bien chattering en anglais).

Pour remédier à ce problème, diverses approches peuvent être envisagées. On peut substituer la fonction discontinue "sign" par d'autres fonctions telles que les fonctions sigmoïdes (comme l'arc-tangente ou la tangente hyperbolique), ou encore insérer un filtre passe-bas. Néanmoins, l'ajout d'un filtre ne garantit pas nécessairement la convergence en temps fini. Dans ce contexte, il est souvent recommandé de recourir à des observateurs d'ordre supérieur.

• Observateur à mode glissant d'ordre 2

Soit le système non linéaire d'ordre n décrit par la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n = f(x, t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (1.36)$$

Avec : $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$

Son observateur à mode glissant d'ordre 2 est formulé de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \tilde{x}_2 + \lambda_1 |x_1 - \hat{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \alpha_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = E_1[\tilde{x}_3 + \lambda_2 |\tilde{x}_2 - \hat{x}_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2)] \\ \dot{\hat{x}}_3 = E_1[\alpha_2 \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2)] \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n = E_{n-2}[\alpha_{n-1} \text{sign}(\tilde{x}_{n-1} - \hat{x}_{n-1})] \\ \dot{\hat{x}}_n = E_{n-1}[\tilde{f} + \lambda_n |\tilde{x}_n - \hat{x}_n|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_n - \hat{x}_n)] \\ \dot{\tilde{f}} = E_{n-1}[\alpha_n \text{sign}(\tilde{x}_n - \hat{x}_n)] \end{cases} \quad (1.37)$$

Où les variables $\tilde{x}_i(t)$ et les paramètres E_i sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i(t) &= \hat{x}_i(t) + E_{i-1} \lambda_{i-1} \text{sign}(\tilde{x}_{i-1} - \hat{x}_{i-1}), \quad i = 2, \dots, n \\ E_i &= \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{x}_j(t) - \hat{x}_j(t) = 0, \quad \forall j \leq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.38)$$

On définit les erreurs d'observation $e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$ pour $i = 1, \dots, n$. Les gains de l'observateur λ_i et α_i sont des scalaires positifs à déterminer.

1.5.6 Observateur à état étendu

Soit le système d'ordre n décrit par le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) + b.u(t) + d(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (1.39)$$

Où : $d(t)$ représente les perturbations externes. La somme " $f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) + d(t)$ " est considérée comme la perturbation globale. Le système (1.39) peut s'écrire de cette façon [26] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = x_{n+1}(t) + b.u(t) \\ \dot{x}_{n+1}(t) = h(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (1.40)$$

Où : $x_{n+1}(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) + d(t)$ est l'état étendu et h sa dérivée. La variable d'état supplémentaire x_{n+1} représente donc ce que l'on appelle depuis le début la perturbation

globale. L'observateur de J. Han associé au système (1.40) est donné par les relations suivantes [26] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) - g_1(\hat{x}_1(t) - y(t)) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_3(t) - g_2(\hat{x}_1(t) - y(t)) \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n(t) = \hat{x}_{n+1}(t) - g_n(\hat{x}_1(t) - y(t)) + b.u(t) \\ \dot{\hat{x}}_{n+1}(t) = -g_{n+1}(\hat{x}_1(t) - y(t)) \end{array} \right. \quad (1.41)$$

L'estimateur est donc de dimension $(n + 1)$, pour estimer non seulement l'état complet du système $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ mais aussi l'état étendu " $x_{n+1}(t)$ " qui représente la dynamique incertaine plus les perturbations externes, d'où le terme de "l'observateur à état étendu" (Extended State Observer : ESO).

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques notions fondamentales de l'observabilité. Ensuite, nous avons défini l'observabilité des systèmes dynamiques, en expliquant que cette dernière repose sur l'utilisation du critère de rang lorsqu'il s'agit d'un système linéaire. Mais dans l'autre cas (système non linéaire), l'observabilité est dépendante totalement des entrées du système et de ses conditions initiales et on a donné quelques définitions pour les tester s'il sont observables ou non. Nous avons également mis en évidence la synthèse des observateurs linéaires et non linéaires en citant les différentes approches disponibles dans la littérature et dans chaque cas, nous avons introduit les observateurs à modes glissants, qui sont caractérisés par leur robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques, des perturbations externes et une convergence en temps fini alors leur commande à n'importe quel ordre est de structure variable pouvant commuter entre deux valeurs suivant une logique de commutation bien choisie comme une fonction linéaire bien spécifique. Autrement dit, que son but sert à contraindre asymptotiquement l'état du système à partir d'une condition initiale vers l'origine d'espace d'état (l'état de référence) quand le temps tend vers l'infini et d'y demeurer malgré les perturbations externes et les incertitudes du modèle.

Chapitre 2

Commande par mode glissant

2.1 Introduction

La commande par mode de glissement fait partie de la famille des contrôleurs de mode de fonctionnement particulier des systèmes à structure variable (variable structure system dans la littérature anglo-saxonne), c'est-à-dire des commandes commutant entre plusieurs lois de commande différentes.

L'importance de la commande par mode glissant réside dans : la grande précision, la réponse dynamique rapide, la stabilité, la simplicité de la conception et d'implantation et bien sûr sa robustesse par rapport aux incertitudes, aux variations des paramètres internes, aux erreurs de modélisation et aux perturbations externes. Alors elle est exploitée dans plusieurs domaines tels que la robotique, la commande des machines électriques et l'électronique de puissance.

L'objectif de la commande par mode glissant, à l'aide d'une commande discontinue, est de contraindre le système à évoluer et demeurer en temps fini sur une surface de glissement où le comportement résultant correspond aux dynamiques souhaitées.

Dans ce chapitre nous détaillerons la structure de la commande par mode glissant suite à sa grande importance ainsi son inconvénient majeur qui est le phénomène de chattering et ses solutions suggérées.

2.2 L'objectif de la commande par mode glissant

Son objectif se résume en deux points essentiels [17] :

- 1) Atteindre une surface $S(x, t) = 0$, telle que toutes les trajectoires du système obéissent à un comportement désiré de poursuite, de régulation et de stabilité.
- 2) Déterminer une loi de commande $u(x, t)$, qui est capable d'attirer toutes les trajectoires d'état vers la surface de glissement et les maintenir sur cette dernière.

Les avantages de la commande par mode glissant sont importants et multiples à savoir la haute précision, la bonne stabilité, la simplicité d'élaboration, etc.

Le comportement dynamique résultant, appelé régime glissant idéal, est complètement déterminé par les paramètres et les équations définissant la surface.

L'avantage d'obtenir ce comportement est la réduction de l'ordre du système et le régime de glissement.

2.2.1 Le régime de glissement idéal

En théorie, l'organe de commutation est supposé idéal et insensible aux bruits, la fréquence de commutation est infinie, et la trajectoire en régime glissant décrit parfaitement l'équation $S(x, t) = 0$ d'où le régime de glissement idéal.

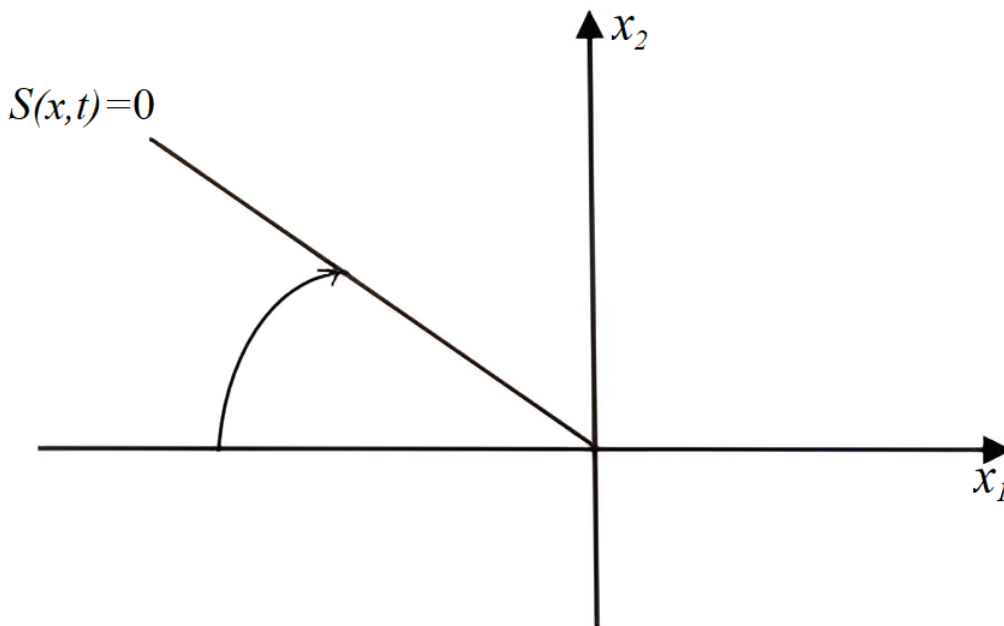


FIGURE 2.1 – Régime de glissement idéal

2.2.2 Le régime de glissement réel

En pratique, l'organe de commutation est réalisé à partir d'un relais qui présente des imperfections comme les retards de commutation, dans ce cas, la trajectoire de phase du régime glissant reste au voisinage de la surface de commutation donnant naissance à des oscillations indésirables qui entravent la précision du système ainsi que sa stabilité.

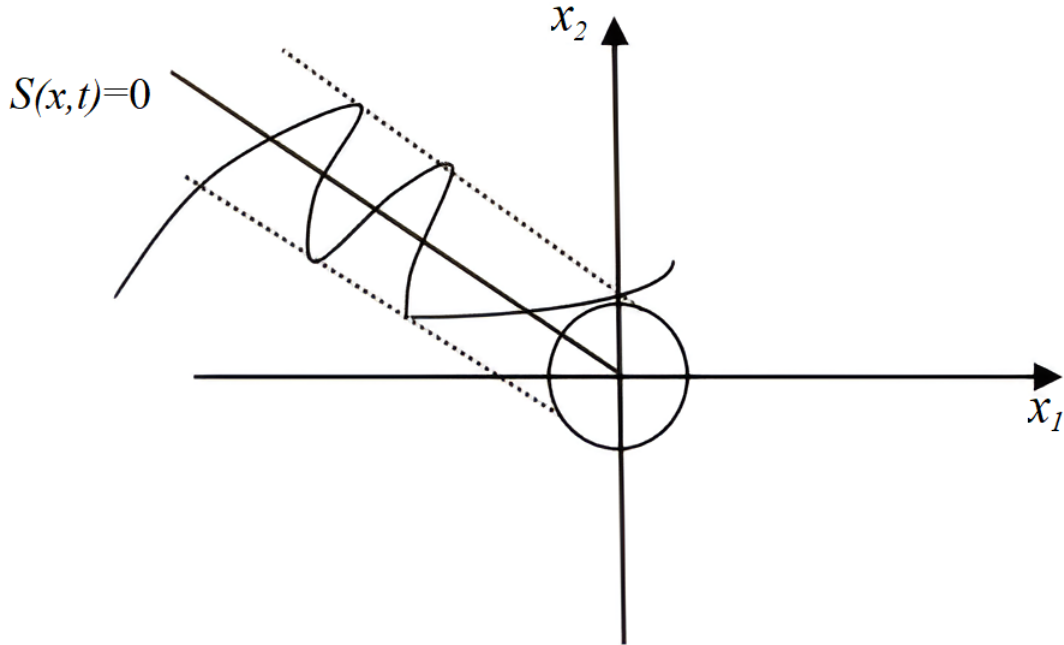


FIGURE 2.2 – Régime de glissement réel

2.3 Concepts de base de la commande par mode glissant

La synthèse d'une loi de commande par mode glissant consiste à déterminer :

- Une surface de glissement en fonction des objectifs de commande et des propriétés statiques et dynamiques désirées pour le système bouclé.
- Une loi de commande discontinue de manière à contraindre les trajectoires d'état du système à atteindre la surface de glissement en un temps fini puis y demeurer en dépit des incertitudes et des perturbations.

Le comportement du système se décrit par trois phases :

2.3.1 Phase de convergence

Pendant laquelle la trajectoire d'état du système partant d'une condition initiale quelconque et converge vers la surface de glissement. Durant cette phase, le système reste sensible aux incertitudes.

2.3.2 Phase de glissement

Durant laquelle la trajectoire d'état a atteint la surface de glissement ($S(x, t) = 0$) et tend vers l'origine de plan de phase. Le comportement du système est entièrement déterminé par la surface de glissement. Dans ce cas ; le système devient insensible à certaines perturbations et sa dynamique est dite plongée dans l'état d'un système réduit et libre.

2.3.3 Phase de régime permanent

Ce mode est ajouté pour l'étude de la réponse du système autour de son point d'équilibre (origine de plan de phase), il est distingué par la qualité et les performances de la commande [14].

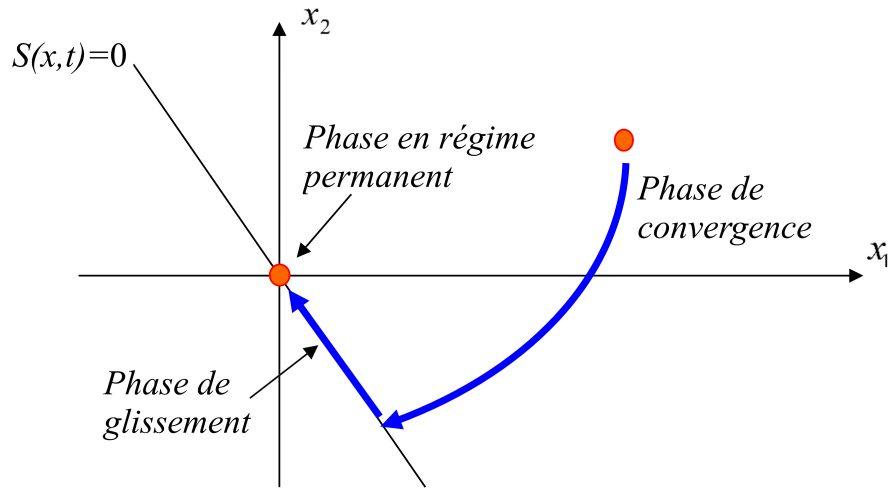


FIGURE 2.3 – Mode de glissement en 3 phases

2.4 Choix de la surface de glissement

Considérons le système non linéaire affine en la commande sous la forme canonique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n = f(x(t)) + g(x(t)).u(t) \text{ avec } g(x(t)) \neq 0 \\ y(t) = x_1(t) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Soit $S(x, t) : R^n \times R^+ \rightarrow R$ une fonction suffisamment différentiable est considérée comme une sortie fictive du système (2.1), telle que son annulation permet de satisfaire l'objectif de la commande. La fonction $S(x, t)$ est appelée variable de glissement ou de commutation (le temps peut figurer explicitement dans $y(t)$).

Le choix de la surface de glissement est assez libre (linéaire ou non linéaire). Elle est souvent une combinaison linéaire des variables d'état. Une forme de surface qui assure la convergence

d'une variable d'état x vers sa valeur désirée x_d est donnée par :

$$S(x, t) = \sum_{i=1}^n C_i (x_i - x_{i_d}) \quad (2.2)$$

Avec :

x_i est la composante de la variable d'état.

x_{i_d} est la composante de l'état désiré.

La dynamique de la convergence d'erreur est assurée par le choix des coefficients C_i .

Une condition nécessaire pour l'établissement d'un régime glissant d'ordre 1 est que la surface de glissement S ait un degré relatif égal à 1 par rapport à la commande u .

La surface de glissement la plus simple est un hyperplan passant par l'origine de l'espace d'état de l'erreur, autrement dit, une surface linéaire en chacune des variables d'état.

Considérons la surface de glissement linéaire dans l'espace d'état de l'erreur d'asservissement $(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dots, \varepsilon^{(n-1)})$:

$$S(x, t) = \varepsilon^{(n-1)} + \lambda_{n-2}\varepsilon^{(n-2)} + \dots + \lambda_1\dot{\varepsilon} + \lambda_0\varepsilon \quad (2.3)$$

Les coefficients λ_i ; $i = 0, 1, \dots, n-2$ sont choisis tel que le polynôme caractéristique $P(s) = S^{n-1} + \lambda_{n-2}S^{n-2} + \dots + \lambda_1S + \lambda_0$ soit un polynôme d'Hurwitz. De plus $S(x, t)$ satisfait la condition sur le degré relatif, si la commande u apparaît dans l'expression de sa première dérivée par rapport au temps. Dans ce cas, la commande est dite, commande par mode glissant d'ordre 1.

$$\dot{S}(x, t) = f(x) + g(x)u - y_r^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i \varepsilon^{(i+1)} \quad (2.4)$$

Ainsi lorsque la variable de glissement est forcée à zéro $S(x, t) = 0$. L'équation différentielle associée est :

$$\varepsilon^{(n-1)} + \lambda_{n-2}\varepsilon^{(n-2)} + \dots + \lambda_1\dot{\varepsilon} + \lambda_0\varepsilon = 0$$

Alors le système réduit suivant de dimension $(n-1)$ est stable.

$$\varepsilon^{(n-1)} = -\lambda_{n-2}\varepsilon^{(n-2)} - \dots - \lambda_1\dot{\varepsilon} - \lambda_0\varepsilon \quad (2.5)$$

Par conséquent, l'erreur de poursuite ε et ses $(n-1)$ dérivées convergent asymptotiquement vers zéro, avec une dynamique imposée par les coefficients λ_i . Cette dynamique peut être réglée par une méthode de placement de pôles appropriée.

Quand $S(x, t) = 0$, la trajectoire d'état du système évolue sur la surface de glissement, le système se trouve en régime glissant, sa dynamique est décrite par le système réduit.

Le comportement du système bouclé est insensible aux incertitudes internes et aux perturbations externes, il est entièrement déterminé par le choix de la surface de glissement.

Une autre forme de surface est celle de J. J. Slotine définie en fonction d'ordre du système [28] :

$$S(x, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \varepsilon \quad (2.6)$$

Avec :

λ est une constante positive, autrement dit, la pente de la surface de glissement.

n est le degré relatif du système.

ε est l'erreur de poursuite définie par :

$$\varepsilon = x - x_d$$

Le polynôme caractéristique de cette surface doit avoir des pôles réels négatifs multiples. Cette surface est la plus pratique parce qu'elle a moins de paramètres à synthétiser.

Une fois la surface de glissement choisie, la seconde étape consiste à choisir une loi de commande qui assure la convergence asymptotique de $S(x, t)$ vers zéro en temps fini, en dépit des incertitudes et des perturbations [17].

Remarque 2.1

Une autre forme permettant une meilleure précision en régime permanent, en introduisant une action intégrale dans la variable de glissement. Par exemple, pour un second ordre, on obtient :

$$S(x, t) = \dot{\varepsilon} + \lambda_1 \varepsilon + \lambda_0 \int \varepsilon dt \quad (2.7)$$

2.5 Conditions d'existence et de convergence

Les conditions d'existence et de convergence sont les critères qui permettent aux différentes dynamiques de converger vers la surface de glissement est d'y rester indépendamment des perturbations. Il existe deux considérations pour assurer cette convergence :

2.5.1 Fonction discrète de commutation

C'est la première condition de convergence. Cette approche est la plus ancienne, elle est proposée et étudiée par Emilyanov et Utkin. Il s'agit de donner à la surface une dynamique convergente vers zéro en respectant cette condition,

$$\begin{cases} \dot{S}(x, t) > 0 \text{ si } S(x, t) < 0 \\ \dot{S}(x, t) < 0 \text{ si } S(x, t) > 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Cette dernière peut se formuler comme suit :

$$S(x, t) \cdot \dot{S}(x, t) < 0 \quad (2.9)$$

2.5.2 Fonction de Lyapunov

La fonction de Lyapunov est une fonction scalaire positive, $V(x) > 0$ pour les variables d'état du système. Elle est utilisée pour estimer les performances de la commande pour l'étude de la robustesse, elle garantit la stabilité du système non linéaire et l'attraction de la variable à contrôler vers sa valeur de référence, elle est de la forme suivante :

$$V(x) = \frac{1}{2} S^2(x, t) \quad (2.10)$$

Sa dérivée est la suivante :

$$\dot{V}(x) = S(x, t) \cdot \dot{S}(x, t) \quad (2.11)$$

La condition qui garantit la convergence de l'état vers la surface de glissement veut dire que la fonction $V(x)$ puisse décroître ; il suffit d'assurer que sa dérivée soit négative d'où la condition de convergence exprimée par l'équation suivante :

$$\dot{V}(x) = S(x, t) \cdot \dot{S}(x, t) < 0$$

La loi de la commande $u(x, t)$ doit faire décroître cette fonction ($\dot{V}(x) < 0$).

L'idée est de choisir une fonction scalaire $S(x, t)$, pour garantir l'attraction de la variable à contrôler vers sa valeur de référence, et concevoir une commande $u(x, t)$ tel que le carré de la surface correspond à une fonction de Lyapunov.

2.6 Détermination de la loi de commande

Une fois la surface de glissement est choisie et les critères de convergence sont vérifiés. Il ne nous reste que de construire une loi de commande pour satisfaire la condition du mode de glissement $S(x, t) = 0$. La loi de commande est composée du terme continu u_{eq} et du terme discontinu u_d [19].

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_d(t) \quad (2.12)$$

Où : $u_{eq}(t)$ est la commande équivalente (physiquement la commande $u_{eq}(t)$ représente la valeur moyenne de la commande globale $u(t)$), c'est la commande continue (basse fréquence) qui maintient la trajectoire de l'état sur la surface de glissement $S(x, t) = 0$. Autrement dit, la commande équivalente est obtenue quand le système est exactement sur la surface de glissement.

Avec la commande équivalente $u_{eq}(t)$, le comportement du système dépend uniquement du choix de la surface de glissement.

$u_d(t)$ est la commande utile pour éliminer les effets d'imprécision du modèle et les perturbations extérieures. Elle est déterminée pour garantir l'attraction de la variable à commander vers la surface de glissement et satisfaire la condition de convergence, autrement dit, c'est la commande qui assure la convergence de l'état du système vers la surface de glissement et elle permet de rejeter toutes les incertitudes et les perturbations.

2.6.1 Calcul de la commande équivalente

Considérons un système non linéaire affine en la commande, ce qui veut dire un système qui est décrit par l'équation différentielle suivante [27] :

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + g(x, t) \cdot u(t) \quad (2.13)$$

Où : $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathfrak{R}^n$ représente le vecteur d'état, $u \in \mathfrak{R}^m$ représente l'entrée de commande qui est éventuellement une fonction discontinue.

$f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonction non linéaires suffisamment différentiables, définies sur \mathfrak{R}^n .

Soit S une fonction continue ; $S(x, t) : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^+ \longrightarrow \mathfrak{R}$.

$$x \in \mathfrak{R}^n : S(x, t) = 0 \quad (2.14)$$

Lorsque le système est en régime glissant, la trajectoire restera sur la surface de commutation. Cela peut être exprimé par :

$$S(x, t) = 0 \text{ et } \dot{S}(x, t) = 0 \quad (2.15)$$

La condition (2.15) est appelée condition d'invariance de la surface de glissement.

$$\dot{S}(x, t) = 0 \longrightarrow \frac{dS}{dx} (f(x, t) + g(x, t) \cdot u_{eq}(t)) = 0$$

$u_{eq}(t)$; est associée au système nominal. Supposons que : $\frac{dS}{dx}g(x) \neq 0$,
Alors la commande équivalente est donnée par :

$$u_{eq} = - \left(\frac{dS}{dx}g(x) \right)^{-1} \frac{dS}{dx}f(x) \quad (2.16)$$

L'expression du régime glissant idéal est obtenue en portant l'expression de u_{eq} dans (2.13) :

$$\dot{x} = f(x) - g(x) \left(\frac{dS}{dx}g(x) \right)^{-1} \frac{dS}{dx}f(x) \quad (2.17)$$

$\frac{dS}{dx}$ étant non nul sur \mathfrak{R}^n , cela conduit à exprimer m états en fonction de $(n - m)$ autres. Ainsi, en régime glissant, les dynamiques du systèmes évoluent sur un espace d'état réduit de dimension $(n - m)$. On aura donc m valeurs propres nulles et $(n - m)$ valeurs propres non nulles.

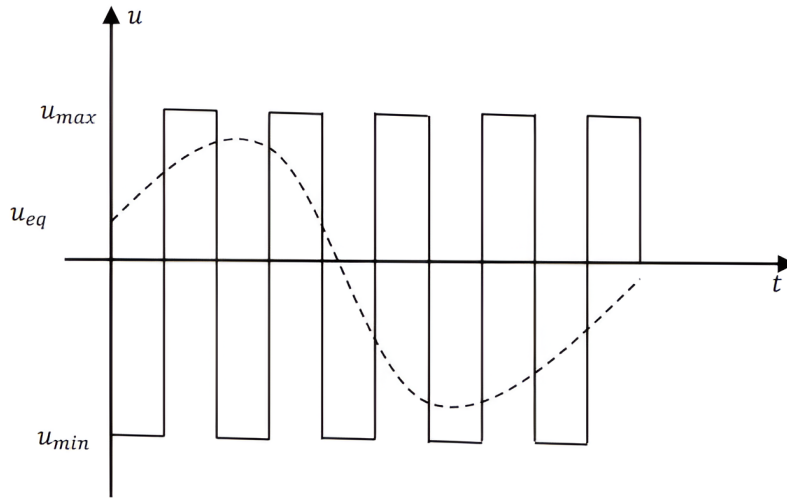


FIGURE 2.4 – La commande équivalente

2.6.2 Calcul de la commande discontinue

La loi de commande doit rendre la surface de glissement $S(x, t) = 0$ attractive et assure ainsi l'apparition du mode glissant. Elle doit assurer la condition de stabilité de $S(x, t) = 0$. Pour évaluer la stabilité, on considère la fonction de Lyapunov suivante : $V(S) = \frac{1}{2} S^2$
Une condition nécessaire et suffisante, appelée condition d'attractivité, pour que la surface de glissement converge asymptotiquement vers zéro :

$$\dot{V}(S) = S\dot{S} < 0$$

Pour assurer une convergence de S vers zéro en un temps fini, on utilise une condition plus restrictive dite de η -attractivité et donnée par :

$$\dot{V}(S) = S\dot{S} \leq -\eta|S|; \quad \eta > 0 \quad (2.18)$$

Cela revient pour $S \neq 0$,

$$\dot{S} \leq -\eta \cdot \text{sign}(S) \quad (2.19)$$

Avec la fonction signe est donnée par :

$$\text{sign}(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S > 0 \\ 0 & \text{si } S = 0 \\ -1 & \text{si } S < 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

La commande discontinue élimine les effets d'imprécision et de perturbations extérieures. Plusieurs formes ont été proposées pour cette commande, la forme la plus simple qui est généralement utilisée est [27] :

$$u_d = -\eta \cdot \text{sign}(S) \quad (2.21)$$

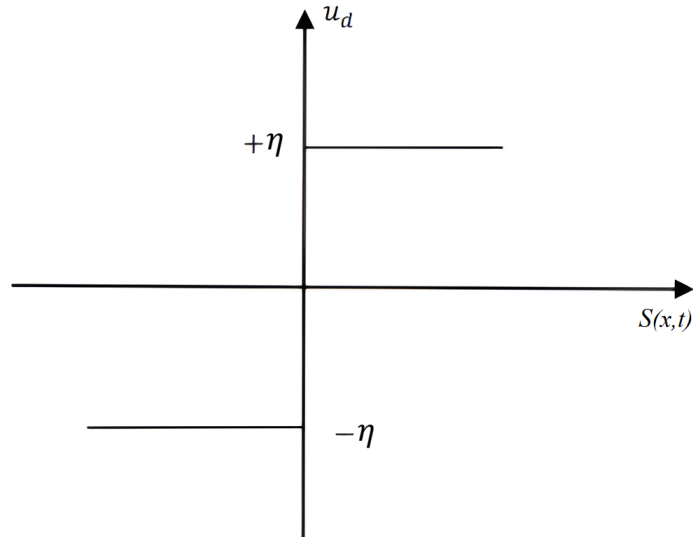


FIGURE 2.5 – La commande discontinue

Par intégration de l'équation (2.19),

$$\text{Si, } S_0 > 0 \longrightarrow S(t) \leq -\eta t + S_0.$$

Donc S converge vers zéro en un temps de convergence t_c inférieur à $\frac{|S_0|}{\eta}$.

La dynamique de la surface de glissement permettant d'assurer la condition d'attractivité est spécifiée par la loi d'arrivée ou la loi d'atteinte :

• **Loi d'arrivée avec une vitesse constante**

$$\dot{S} = -k.sign(S); k > 0 \quad (2.22)$$

Cette loi force la trajectoire d'état à atteindre la surface de glissement à vitesse constante qui dépend de la valeur de k . Plus k est grand, plus le temps d'attractivité est rapide, mais augmente les oscillations une fois la surface de glissement est atteinte. Le mérite de la loi (2.22) est sa simplicité [17].

• **Loi d'arrivée avec une vitesse constante et à action proportionnelle**

$$\dot{S} = -qS - k.sign(S); k > 0 \text{ et } q > 0 \quad (2.23)$$

L'addition du terme proportionnelle " $-qS$ ", fait que la trajectoire d'état est forcée de s'approcher de la surface de glissement plus vite lorsque S est grande. Plus k est grand, plus le temps d'attractivité est rapide; tandis qu'une petite valeur de q réduit les oscillations.

• **Loi d'arrivée avec une puissante vitesse**

$$\dot{S} = -k |S|^\alpha sign(S); k > 0 \text{ et } 0 < \alpha < 1 \quad (2.24)$$

Cette loi d'arrivée augmente la vitesse quand l'état du système est loin de la surface de commutation, et la réduit lorsque l'état est près d'elle.

La commande par régime glissant dans le cas de la loi d'arrivée à vitesse puissante est donnée par :

$$u = \frac{1}{g(x)}(-f(x) + y_r^{(n)} - \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i \varepsilon^{(i+1)} - k.sign(S))$$

Cette commande est composée de deux termes :

$$u = u_{eq} + u_d$$

La commande u_{eq} est donnée par :

$$u_{eq} = \frac{1}{g(x)} \left(-f(x) + y_r^{(n)} - \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i \varepsilon^{(i+1)} \right)$$

La commande discontinue u_d est donnée par :

$$u_d = \frac{-k}{g(x)} sign(S)$$

La commande discontinue peut être choisie de la forme :

$$u_d = -K.sign(S); K > 0$$

Le gain K de la commande discontinue doit être dimensionné de manière à rejeter les incertitudes et les perturbations. Pour avoir \dot{V} définie négative $\forall S \neq 0$, il suffit de choisir $K > \max \left(\left| \frac{k}{g(x)} \right| \right)$, en choisissant K en fonction de x [17].

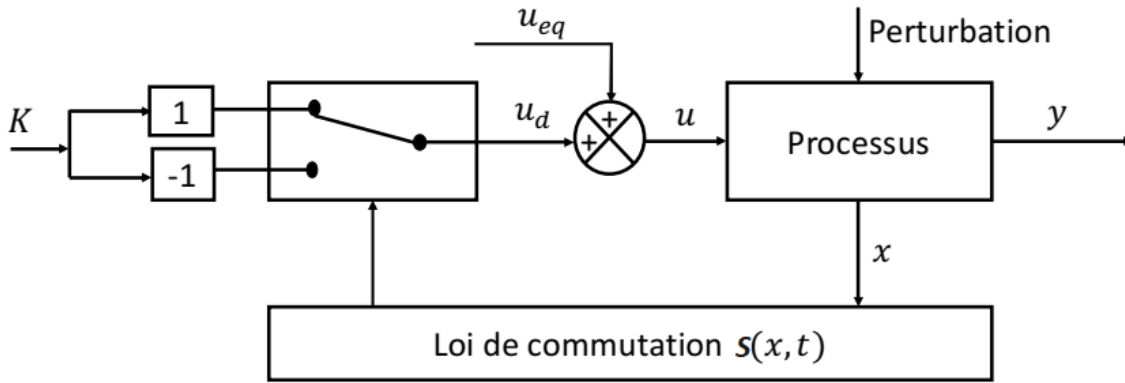


FIGURE 2.6 – Structure de la commande par mode glissant avec la commande équivalente

On peut trouver une autre structure plus simple de la commande par mode glissant, où la commutation a lieu au niveau de l'organe de commande :

$$u = -u_M \text{sign}(S); u_M > 0$$

Avec l'amplitude u_M de la commande choisie de manière à être suffisamment grande pour compenser les incertitudes et les perturbations.

Elle correspond au fonctionnement tout ou rien des interrupteurs de puissance. L'organe de commande est beaucoup plus sollicité par rapport à la structure avec commande équivalente. Il semble en effet naturel d'ajouter la commande équivalente pour pré-positionner le système dans un état désiré permanent et stable et de jouer ensuite sur le terme de commutation pour assurer la convergence vers cet état et pour y rester ensuite [17].

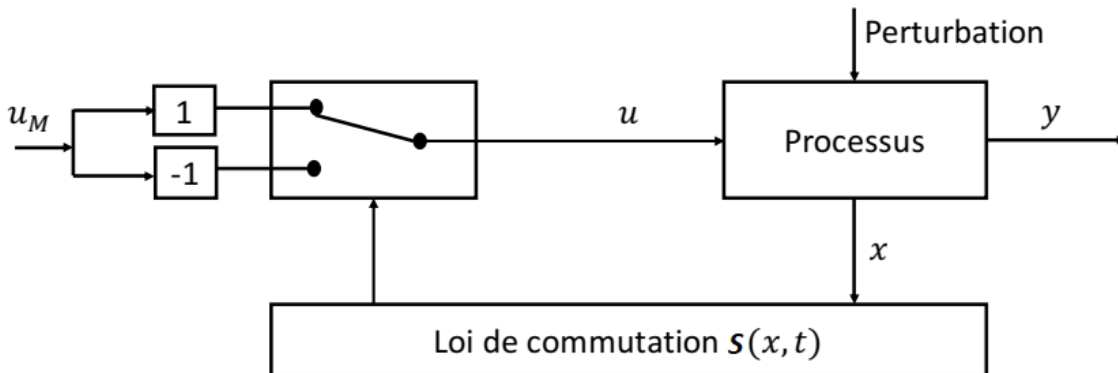


FIGURE 2.7 – Structure de la commande par mode glissant par commutation au niveau de l'organe de commande

2.7 Synthèse de la surface de glissement pour les systèmes linéaires

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.x(t) \end{cases} \quad (2.25)$$

La surface de glissement est donnée par :

$$S(x) = \gamma x \quad (2.26)$$

Le mode glissant idéal existe, s'il existe un temps fini t_s , tels que :

$$\begin{aligned} \gamma x &= 0 \\ \gamma \dot{x} &= 0 \\ t &\geq t_s \end{aligned}$$

Où : $\gamma \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ est une matrice à déterminer. Pour simplifier la détermination, il faut mettre le système sous la forme canonique particulière.

Soit T une matrice de transformation orthogonale de dimension $n \times n$, telle que :

$$TB = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Où : $B_2 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ est une matrice inversible. Soit la transformation $z = Tx$, alors le système (2.25) est transformé en une forme régulière suivante :

$$\dot{z}(t) = TAT^T z(t) + TB.u(t) \quad (2.28)$$

Supposons que : $z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$, $z_1(t) \in \mathfrak{R}^{n-m}$ et $z_2(t) \in \mathfrak{R}^m$.

Alors :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11}z_1(t) + A_{12}z_2(t) \\ \dot{z}_2 = A_{21}z_1(t) + A_{22}z_2(t) + B_2.u(t) \end{cases} \quad (2.29)$$

Où :

$$TAT^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

La surface de glissement devient alors :

$$\gamma_1.z_1(t) + \gamma_2.z_2(t) = 0 \quad (2.30)$$

Où : $\gamma T^T = [\gamma_1 \ \gamma_2]$ d'où :

$$z_2(t) = F.z_1(t) \text{ avec : } F = -\gamma_2^{-1}\gamma_1 \quad (2.31)$$

Donc le mode glissant idéal est gouverné par :

$$\dot{z}_1(t) = (A_{11} + A_{12}F)z_1(t) \quad (2.32)$$

Une fois que la matrice F est déterminée, on peut calculer la matrice γ , et souvent on prend : $\gamma_2 = I$ et $\gamma_1 = F$ donc $\gamma = [F \ I]T$.

2.8 Propriété de robustesse

Considérons un système non linéaire canonique soumis à des incertitudes paramétriques et des perturbations bornées par des fonctions connues :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = (f_N(x(t)) + \Delta f(x(t))) + (g_N(x(t)) + \Delta g(x(t))).u(t) + d(t); \quad g_N(x(t)) \neq 0 \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (2.33)$$

La perturbation $d(t)$ agit sur le système au même niveau que la commande.

La perturbation, les incertitudes et la commande sont bornées par :

$$|d(t)| < d_0, |\Delta f(t)| < f_0, |\Delta g(x)| < g_0 \text{ et } |u(t)| < u_0$$

$f_N(x)$ et $g_N(x)$ constituent respectivement les valeurs nominales de $f(x)$ et $g(x)$.

Pour établir la commande, il faut que la condition d'attractivité : $\dot{V} = S\dot{S} < 0$ soit garantie [17]. La dynamique de la surface est obtenue comme suit :

$$\dot{S}(x, t) = f_N(x) + g_N(x)u - y_r^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i \varepsilon^{(i+1)} + (\Delta f(x) + \Delta g(x)u + d(t)) \quad (2.34)$$

La loi de commande qui garantit la condition de stabilité et aussi la prise en compte des incertitudes est :

$$u = \frac{1}{g_N(x)} \left(-f_N(x) + y_r^{(n)} - \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i \varepsilon^{(i+1)} - k.sign(S) \right) \quad (2.35)$$

Le gain k suffisamment grand est déterminé pour compenser les incertitudes et les perturbations.

$$V = \frac{1}{2}S^2, \quad \dot{V} = S\dot{S}$$

En remplaçant l'expression de la commande, la condition de stabilité devient :

$$\dot{V} = S(-k.sign(S) + \Delta f(x) + \Delta g(x)u + d(t))$$

C'est-à-dire :

$$\dot{V} = -kS.sign(S) + S(\Delta f(x) + \Delta g(x)u + d(t)) \quad (2.36)$$

On obtient :

$$\dot{V} < |S|(-k + f_0 + g_0 u_0 + d_0) \quad (2.37)$$

Pour satisfaire la condition $\dot{V} = S\dot{S} < 0$; il suffit de choisir :

$$k > f_0 + g_0 u_0 + d_0 \quad (2.38)$$

2.9 Phénomène de chattering

La partie discontinue de la commande par mode glissant commute d'une valeur à une autre suivant le signe de la fonction de commutation à une fréquence infinie. Cependant, pour une utilisation pratique, la fréquence de commutation des organes de commande est limitée (la commutation se fait pendant un temps de commutation plus la constante de temps des actionneurs). La discontinuité dans la commande engendre des oscillations hautes fréquences de la trajectoire du système autour de la surface de glissement, ce phénomène est connu sous le nom de chattering [20].

Ce phénomène a pour effet de retarder l'application de la commande permettant de ramener l'état du système sur la surface de glissement à partir du moment où il l'a quittée, c'est l'un des problèmes de la commande par mode glissant.

Le phénomène de chattering peut exciter les dynamiques hautes fréquences non modélisées et peut dégrader les performances du système et même conduire à l'instabilité. De plus ce phénomène indésirable peut endommager les actionneurs et peut provoquer une détérioration prématurée des systèmes mécaniques et une élévation de température dans les systèmes électriques.

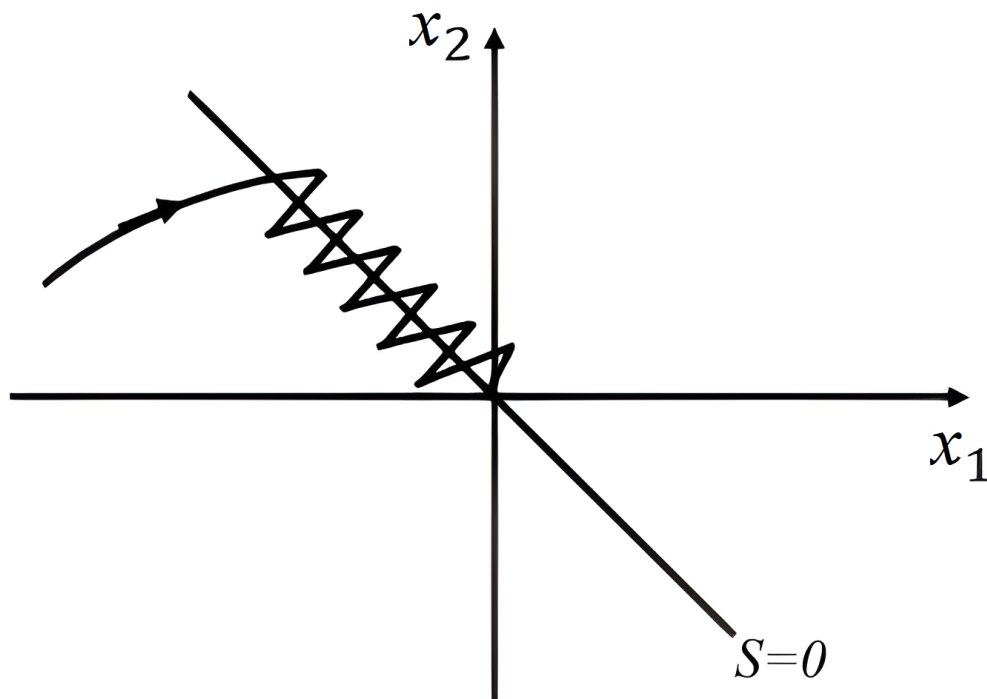


FIGURE 2.8 – Phénomène de chattering

Plusieurs solutions ont été proposées pour réduire ou éliminer ce phénomène ;

2.9.1 Solution de la couche limite

Cette solution, connue aussi sous le nom de "Boundary layer solution", consiste à remplacer la fonction signe par une approximation continue, à gain élevé dans un voisinage de la surface. Dans ce cas le régime glissant n'est plus dans S , mais au voisinage de S , le système est dit en régime pseudo-glissant. Parmi les fonctions utilisées nous citons la fonction de saturation :

$$sat\left(\frac{S}{\delta}\right) = \begin{cases} sign(S) & si |S| > \delta \\ \frac{S}{\delta} & si |S| \leq \delta \end{cases} \quad (2.39)$$

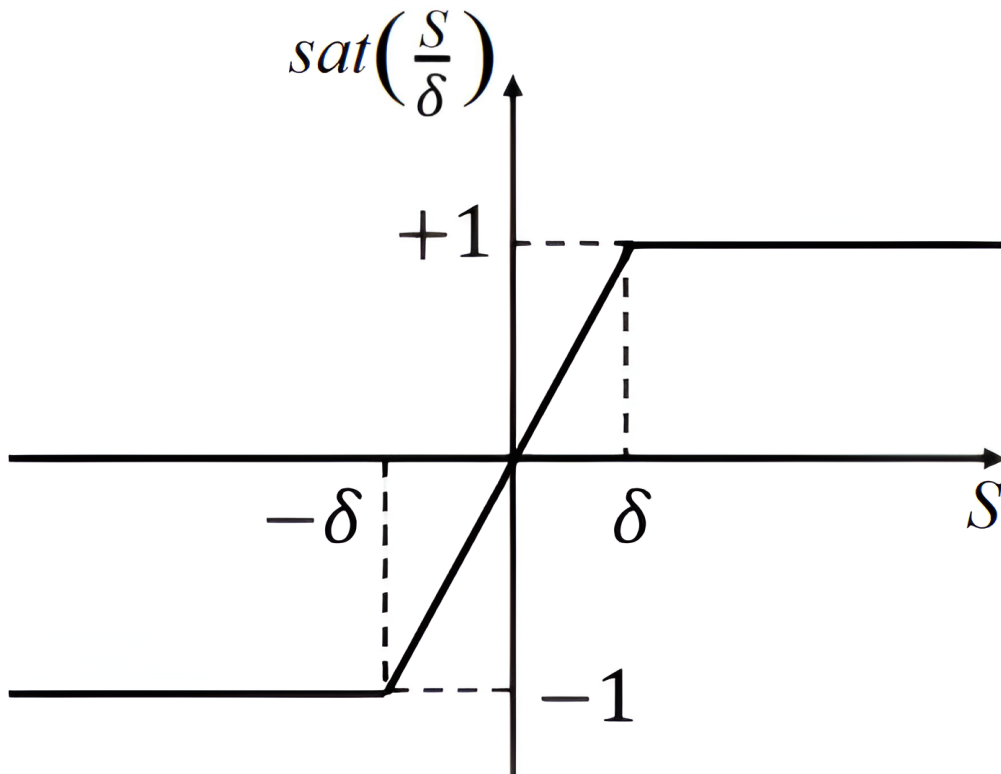


FIGURE 2.9 – Fonction saturation.

δ est la largeur du seuil de la fonction de saturation. D'autres fonctions existent telles que les fonctions "sigmoïdes" plus lisses : pseudo-signe $\frac{S}{|S|+\delta}$; $artan\left(\frac{2}{\pi}\right) arctan\left(\frac{S}{\delta}\right)$; tangente hyperbolique $tanh\left(\frac{S}{\delta}\right)$ [17].

Ces fonctions réduisent la robustesse de la commande, elles sont paramétrées par une constante positive δ réglée pour avoir un bon compromis entre la réduction du chattering et conservation de la robustesse. Plus δ est petit, plus l'approximation tend vers la fonction signe et donc meilleure et robuste, au détriment de la réduction du chattering.

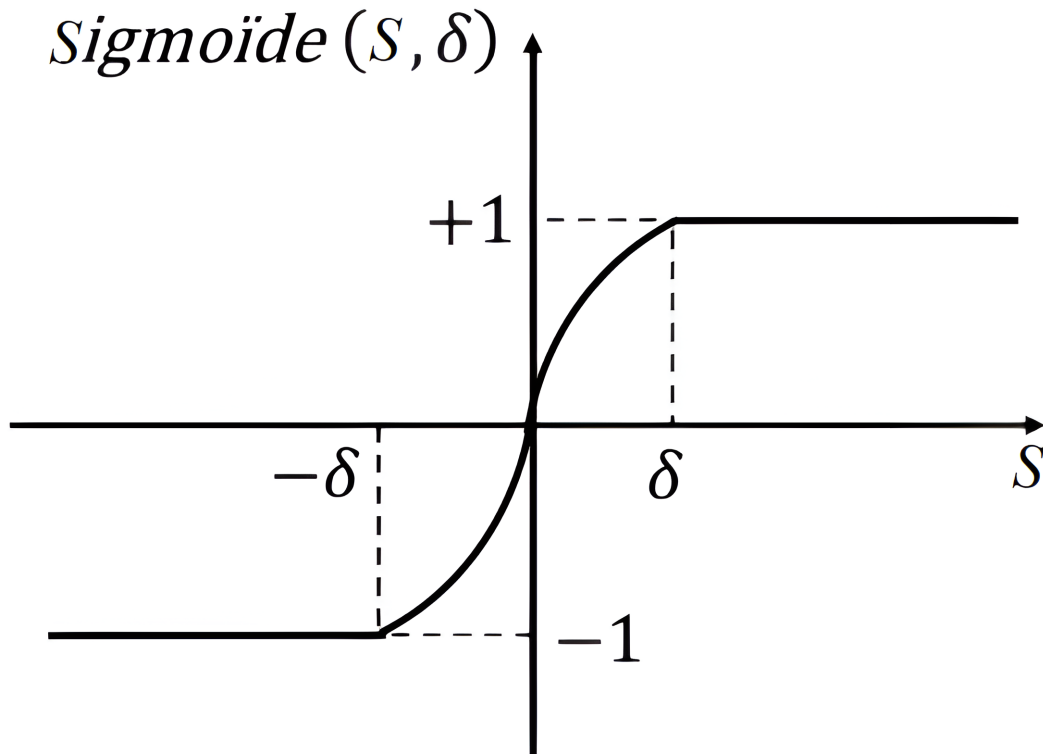


FIGURE 2.10 – Fonction sigmoïde.

2.9.2 Solution par mode glissant d'ordre supérieur

Le mode glissant d'ordre supérieur consiste à éliminer les discontinuités de la commande pour pallier au problème du chattering tout en gardant les propriétés de convergence en temps fini et de robustesse de la commande par mode glissant classique. Initiée par Levantovsky, Emelyanov et Korovin, la commande par mode glissant d'ordre supérieur ($r \geq 2$) utilise les dérivées supérieures de la surface de commutation ($S, \dot{S}, \ddot{S}, \dots, S^{(r-1)}$). Cette approche offre une solution pour atténuer, voire éliminer, les effets de chattering, tout en préservant la robustesse caractéristique des commandes par modes glissants traditionnelles et leur capacité à converger en temps fini. Le terme discontinu n'est plus directement présent dans la commande résultante, mais plutôt dans l'une de ses dérivées supérieures, ce qui contribue à réduire le phénomène de chattering.

Les figures suivantes présentent l'application de la commande par mode glissant d'ordre supérieur à un système, la surface de glissement est atteinte de manière plus lisse que la commande classique [22].

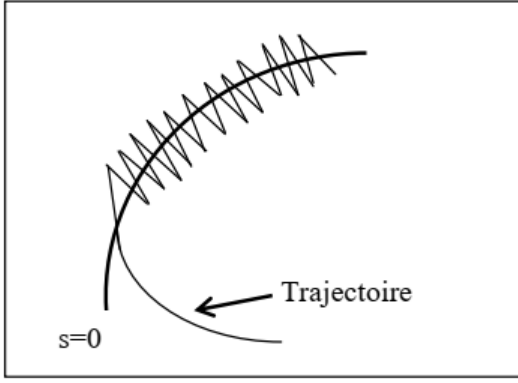


FIGURE 2.11 – Allure du régime glissant classique.

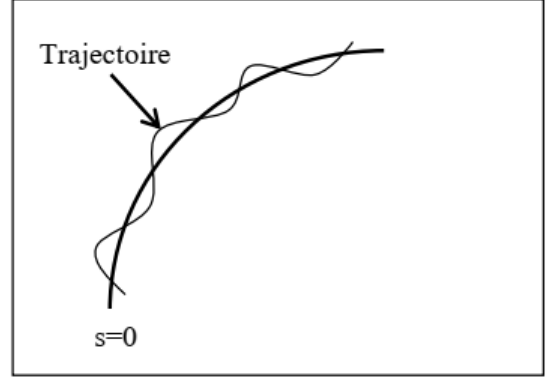


FIGURE 2.12 – Allure du régime glissant pour les ordres supérieurs.

Remarque 2.2

Une méthode assez répandue consiste à étendre le système (augmenter son ordre et son degré relatif) en rajoutant un intégrateur devant la commande réelle u qui devient une variable d'état du système, la nouvelle commande discontinue synthétisée étant $\bar{u} = \dot{u}$ lorsque l'on fait le calcul de la commande du système $u = \int \bar{u} dt$, elle devient continue limitant ainsi le phénomène du chattering.

2.9.3 Commande par mode glissant d'ordre 2

Le but principal de cette technique est de générer un régime glissant d'ordre 2 sur une surface définie S et la convergence de $S = \frac{dS}{dt} = 0$ en un temps fini [23].

Pour définir les algorithmes de commande par mode glissant d'ordre 2, on considère le système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (2.40)$$

Afin de générer un régime glissant d'ordre 2 sur une surface choisie S , il faut maintenir S ainsi que sa dérivée \dot{S} à zéro dans un temps fini ($S = \dot{S} = 0$). La dérivée de S est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}S(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}S(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}S(x, t) \cdot \dot{x}(t) \\ \dot{S}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}S(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}S(x, t) \cdot f(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (2.41)$$

Ensuite la dérivée seconde de S est donnée sous forme compacte comme suit [23] :

$$\ddot{S} = \rho(x(t), t) + X(x(t), t) \cdot f(x(t), t)v \quad (2.42)$$

Avec :

$$\begin{cases} \rho(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\dot{S}(x, u, t) + \frac{\partial \dot{S}}{\partial x}\dot{S}(x, u, t) \cdot f(x, u, t) \\ X(x, u, t) = \frac{\partial}{\partial u}\dot{S}(x, u, t) \end{cases} \quad (2.43)$$

Le problème qui se pose revient à la stabilisation en temps fini du système auxiliaire du second ordre modélisé par l'équation (2.40), où v représente l'entrée du système (u) si le degré

relatif égal à 2 ou sa dérivée (\dot{i}) par rapport au temps si le degré relatif égal à 1.

Dans la littérature, plusieurs algorithmes modes glissants d'ordre 2 ont été introduits. Parmi eux, on cite :

- 1) Algorithme du twisting,
- 2) Algorithme du Super twisting,
- 3) Algorithme du prescribed convergence law (Algorithme avec une loi de convergence prédéfinie).

Algorithme du twisting

Pour parvenir à une commutation en temps fini vers l'origine du plan de phase, on utilise la méthode de commutation de l'amplitude entre deux valeurs. L'algorithme garantit sa convergence à travers une progression géométrique qui se manifeste par un mouvement en spirale autour de l'origine, illustré par la figure (2.13). Ces mouvements ont une amplitude décroissante et la commutation se produit à chaque changement de quadrant [24].

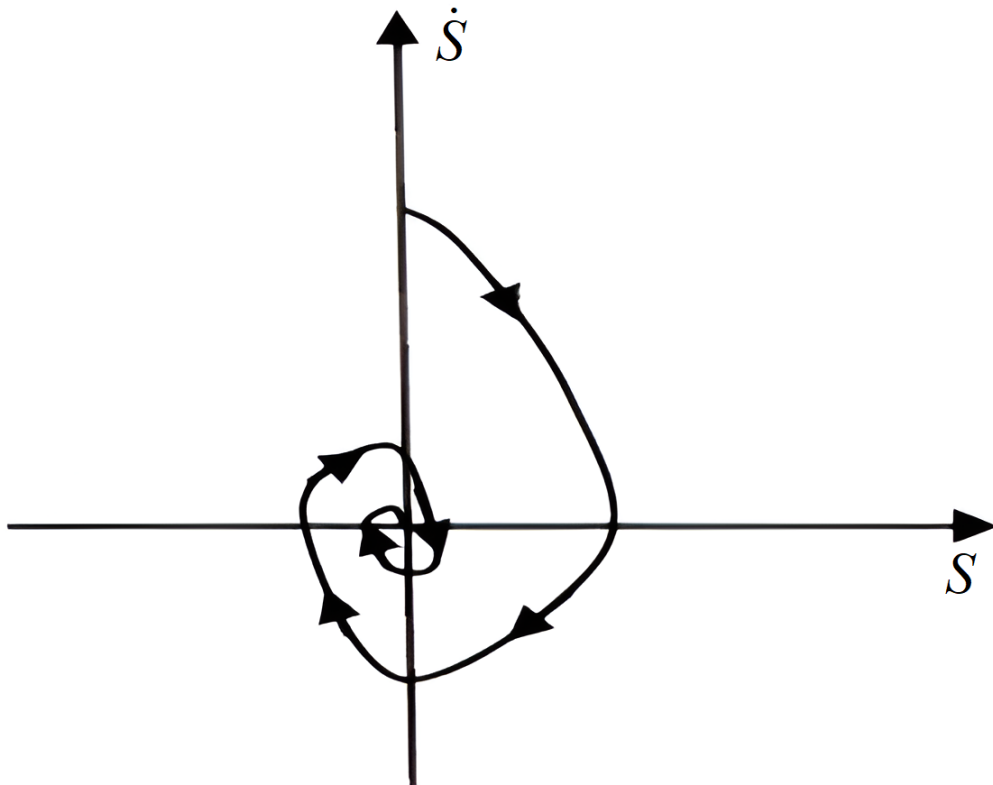


FIGURE 2.13 – Convergence de l'algorithme du twisting dans le plan (S, \dot{S})

La loi de commande est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.1 [24]

Considérons le système d'équation (2.40) et la surface de glissement S , la loi de commande :

$$u_{tw} = \begin{cases} -\alpha_m \text{sign}(S) & \text{si } S\dot{S} \leq 0 \\ -\alpha_M \text{sign}(S) & \text{si } S\dot{S} > 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

est un algorithme de commande par mode glissant d'ordre 2 par rapport à S où α_m et α_M vérifiant :

$$u_{tw} = \begin{cases} \alpha_m > 4 \frac{K_M}{S_0} \\ -\alpha_M > \frac{C_0}{K_m} \\ K_m \alpha_M - C_0 > K_M \alpha_m + C_0 \end{cases} \quad (2.45)$$

Il existe des constantes positives $S_0, K_m, K_M, \text{ et } C_0$ telles que les propriétés de convergence en temps fini :

$$|S(x, t) < S_0|$$

Alors :

$$0 < k_m \leq \frac{\partial \dot{S}(x, t)}{\partial u} \leq K_M, \\ \left| \frac{\partial}{\partial t} \dot{S}(x, u, t) + \frac{\partial S}{\partial x} \dot{S}(x, u, t) f(x, u, t) \right| < C_0$$

Algorithme de super twisting

Cet algorithme a été développé pour l'asservissement des systèmes à degré relatif égal à 1 par rapport à la surface de glissement. Cette loi de commande a été proposée par Emelyanov en 1990. Elle a été étudiée par Levant dans son journal de contrôle "Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control". Le super twisting n'utilise pas d'informations sur \dot{S} ceci peut être vu comme un avantage. Il est composé de deux parties, une partie continue $u_1(t)$ et une partie discontinue $u_2(t)$ tel que $u_{st} = u_1(t) + u_2(t)$ [16].

$$\dot{u}_1 = \begin{cases} -u & \text{si } |u| > 1 \\ -\alpha \cdot \text{sign}(S) & \text{si } |u| \leq 1 \end{cases} \quad (2.46)$$

$$\dot{u}_2 = \begin{cases} -\lambda_a |S_0|^\vartheta \text{sign}(S) & \text{si } |S| > S_0 \\ -\lambda_a |S|^\vartheta \text{sign}(S) & \text{si } |S| \leq S_0 \end{cases} \quad (2.47)$$

Avec : $0 < \vartheta < 0.5$

La condition suffisante pour engendrer la convergence en temps fini est :

$$\begin{cases} \alpha > \frac{C_0}{K_m} \\ \lambda_a^2 \geq \frac{4C_0}{K_m^2} \frac{K_M(\alpha+C_0)}{K_m(\alpha-C_0)} \end{cases}$$

Exemple 2.1 : Commande par mode glissant d'ordre 3

Considérons le système non linéaire [17] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_1x_1 + a_2x_3 \\ \dot{x}_3 = a_3x_2x_3 + bx_3u \\ y = x_1 \end{cases}$$

On dérive par rapport au temps la sortie ;

$$\begin{cases} \dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{y} = \dot{x}_2 = a_1x_1 + a_2x_3 \\ y^{(3)} = a_1x_2 + a_2a_3x_2x_3 + a_2bx_3u = \Delta_0(x) + \Delta(x)u \end{cases}$$

Avec : $a_1x_2 + a_2a_3x_2x_3 = \Delta_0(x)$ et $a_2bx_3 = \Delta(x)$

Le degré relatif de la sortie du système est : $r=3$. Le choix de la surface de glissement est alors en fonction du degré relatif r de la sortie et de l'erreur de poursuite $\varepsilon = y - y_{ref}$.

$$S = \varepsilon^{(r-1)} + \dots + \lambda_1\dot{\varepsilon} + \lambda_0\varepsilon = \ddot{\varepsilon} + \lambda_1\dot{\varepsilon} + \lambda_0\varepsilon$$

Les coefficients λ_0 et λ_1 sont choisis tel que $P(s) = s^2 + \lambda_1s + \lambda_0$, soit un polynôme d'Hurwitz. La dynamique de la surface de glissement qui assure la condition d'attractivité est choisie comme :

$$\dot{S} = -k.sign(S); k > 0$$

La loi de commande est donnée par :

$$u = \frac{1}{\Delta(x)}(-\Delta_0(x) + y_{ref}^{(3)} - \lambda_1\ddot{\varepsilon} - \lambda_0\dot{\varepsilon} - k.sign(S))$$

2.10 Conclusion

Dans ce deuxième chapitre, on a exposé les concepts de base de la commande par mode glissant et cité son avantage qui est principalement le bon suivi des trajectoires désirées et le rejet des perturbations.

On a même vérifié sa robustesse mais par la suite, on a rencontré le phénomène de broutement qui est indésirable dans l'automatique ; raison pour laquelle, on s'est approfondi dans des différentes suggestions pour l'éliminer ou bien l'amoindrir et on a été convaincu que lors de la résolution de ce dernier ; il faut s'attendre à une petite dégradation des performances qui est négligeable devant ses qualités et on a clôturé ce chapitre par un exemple.

Enfin, on peut constater que la commande par mode glissant reste robuste vis-à-vis des incertitudes, des erreurs de modélisation et des perturbations externes que ce soit leurs type donc elle est très avantageuse surtout si en regardant bien sa simplicité de conception et d'implémentation.

Chapitre 3

Application à la commande d'un moteur à courant continu

3.1 Introduction

En général, de nombreux systèmes réels notamment les machines électriques présentent en plus des perturbations extérieures (variation de charge manipulée), des non linéarités (exemple : frictions, hystérésis) et des variations paramétriques.

Les lois de commande qui utilisent les régulateurs de type Proportionnel Intégral Dérivée (PID) donnent de bons résultats dans le cas des systèmes linéaires à paramètres connus, mais pour des systèmes portant des incertitudes, ces lois de commande classique peuvent être insuffisantes car elles ne sont pas robustes lorsque les exigences sur la vitesse et autres caractéristiques dynamiques du système sont strictes. On doit alors faire appel à des lois de commande insensibles aux variations de paramètres, aux perturbations et aux non linéarités [33].

L'utilisation des algorithmes robustes (vis-à-vis de ces non linéarités, des erreurs de modélisation et des perturbations) est donc souhaitable aussi bien en régulation qu'en poursuite de trajectoire. Une solution réside dans l'utilisation des méthodes de commande basées sur l'estimation des incertitudes à l'aide d'observateurs. Les méthodes de commande impliquant le recours à des observateurs pour estimer et compenser les incertitudes en temps réel sont largement utilisées car elles permettent d'améliorer la robustesse vis-à-vis des incertitudes et assurer une bonne convergence des variables d'états. Cette technique de commande est appelée "Commande par rejet actif de perturbations" (Active Disturbance Rejection Control : ADRC) qui a été proposée par "Jingquin Han".

L'étude présentée dans ce chapitre concerne les algorithmes de commande à régime glissant avec l'approche ADRC appliqués au moteur à courant continu (MCC) pour le contrôle en vitesse. Nous présenterons dans un premier temps quelques éléments de la théorie de la structure du moteur à courant continu dont sa définition, sa constitution, son principe de fonctionnement ainsi sa modélisation, etc, puis les étapes à suivre pour concevoir sa commande et on finira par des simulations de commandes sous Matlab pour vérifier les résultats (apercevoir la robustesse et le rejet actif des perturbations).

3.2 Rappels sur la machine à courant continu

Les machines à courant continu sont des convertisseurs électromécaniques d'énergie : Soit ils convertissent l'énergie électrique absorbée en énergie mécanique lorsqu'ils sont capables de fournir une puissance mécanique suffisante pour démarrer puis entraîner une charge en mouvement. On dit alors qu'ils ont un fonctionnement en moteur. Soit ils convertissent l'énergie mécanique reçue en énergie électrique lorsqu'ils subissent l'action d'une charge entraînant. On dit alors qu'ils ont un fonctionnement en génératrice [29].

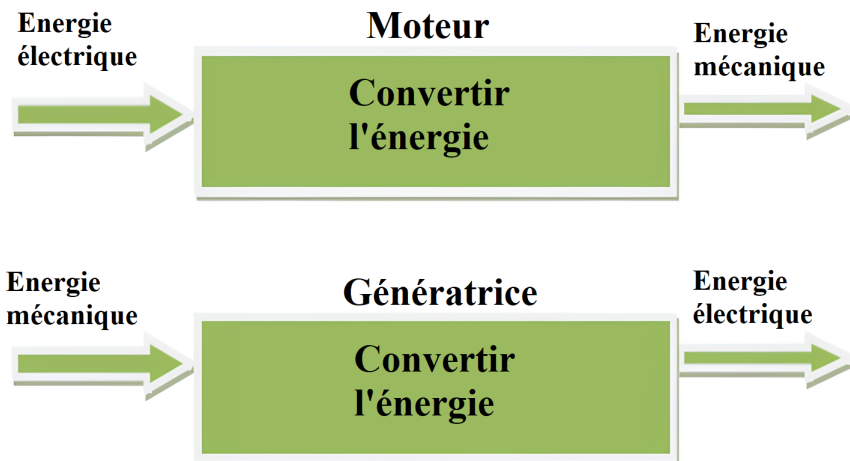


FIGURE 3.1 – Fonctionnement de la machine à courant continu

3.2.1 Constitution du moteur à courant continu

Le moteur à courant continu est constitué essentiellement de trois parties [30] :

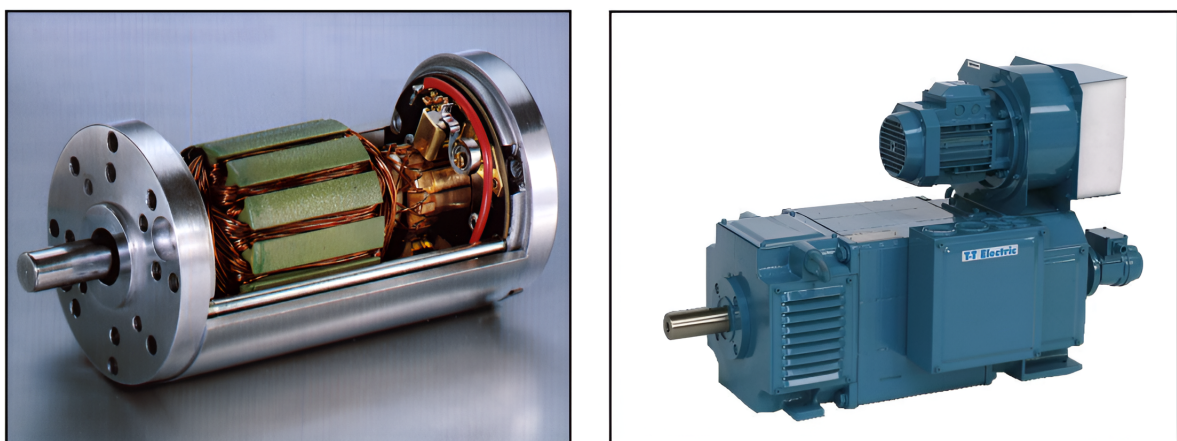


FIGURE 3.2 – Moteur à courant continu

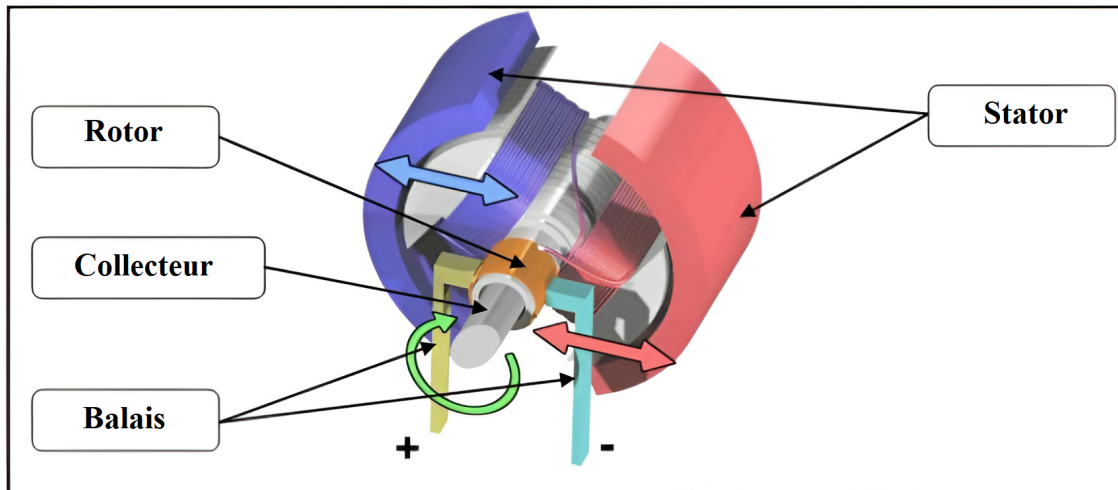


FIGURE 3.3 – Les éléments d'un moteur à courant continu

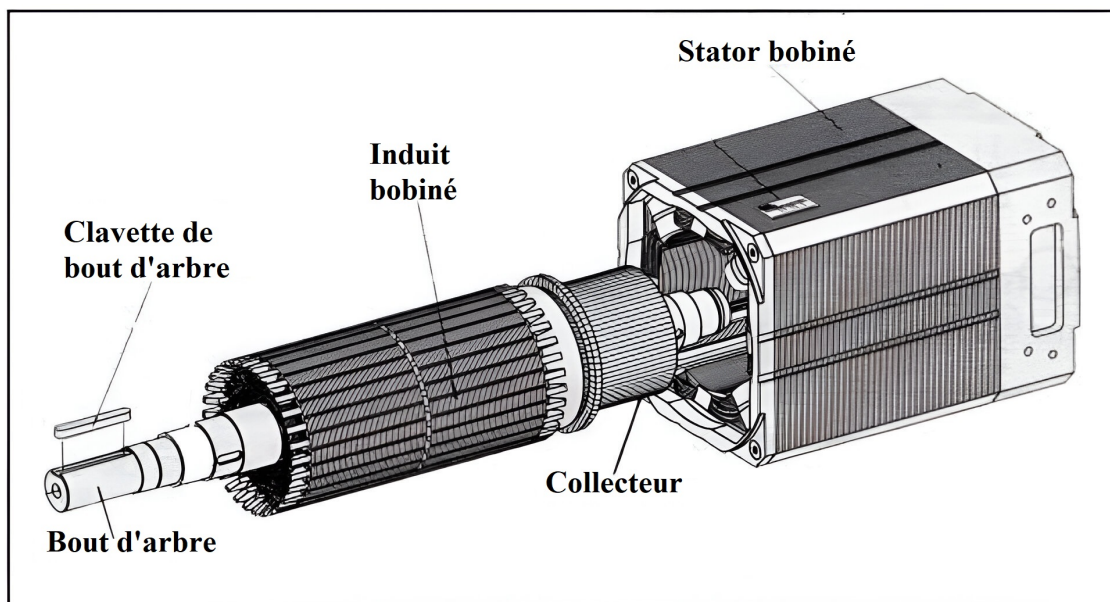


FIGURE 3.4 – Vues éclatées d'un moteur à courant continu

Le stator (Inducteur)

C'est la partie fixe du moteur. Il est constitué d'un aimant permanent ou d'un électroaimant alimenté par le courant continu d'excitation $i_e(t)$. Il est représenté par la figure ci-dessous.

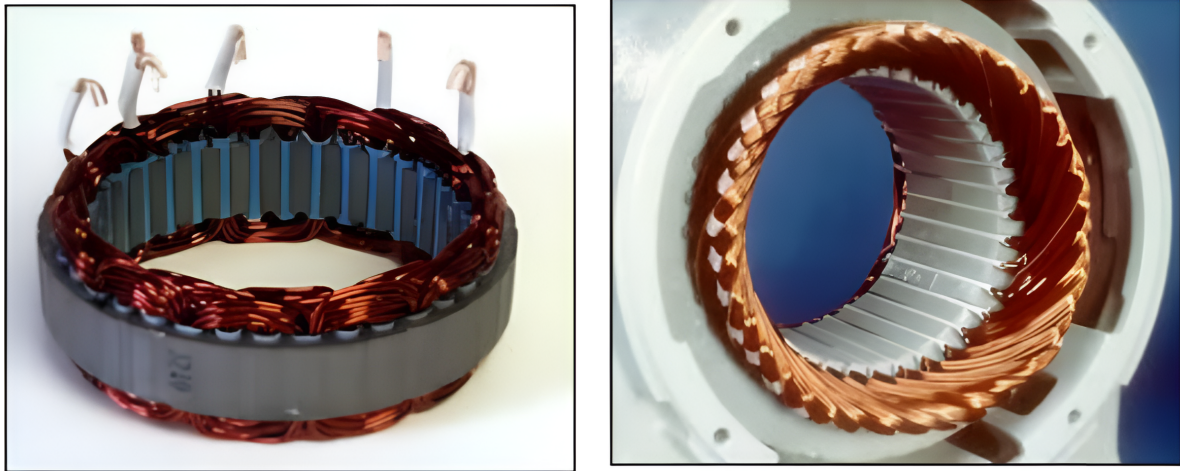


FIGURE 3.5 – Le stator

Rotor (Induit)

Il est constitué d'encoches dans lesquelles est enroulé un bobinage de N conducteurs alimentés en courant continu $i(t)$ via le collecteur. Il est représenté par la figure ci-dessous.

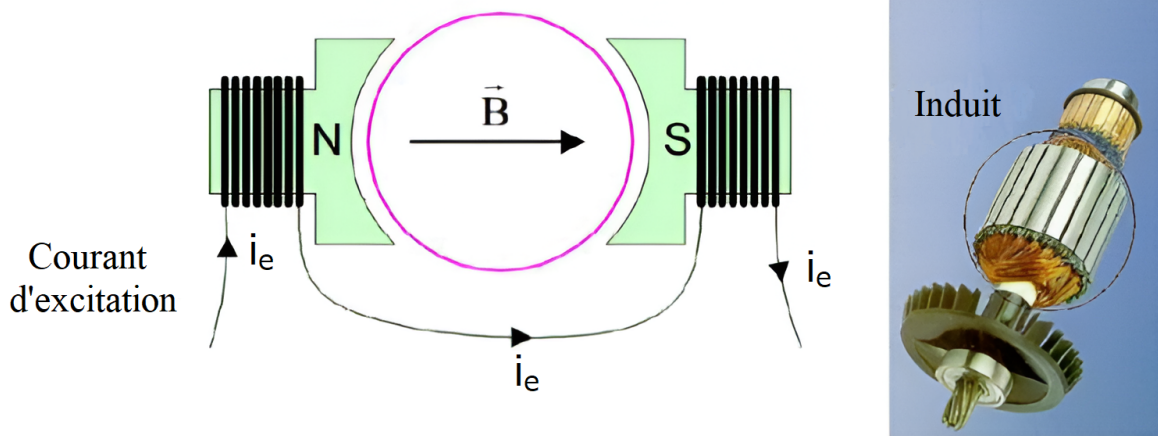


FIGURE 3.6 – Le rotor

Le collecteur et les balais

Le collecteur est un ensemble de lames de cuivre où sont reliées les extrémités du bobinage de l'induit et les balais (charbons) sont situés au stator et frottent sur le collecteur en rotation. Le collecteur et les balais sont représentés par la figure ci-dessous.

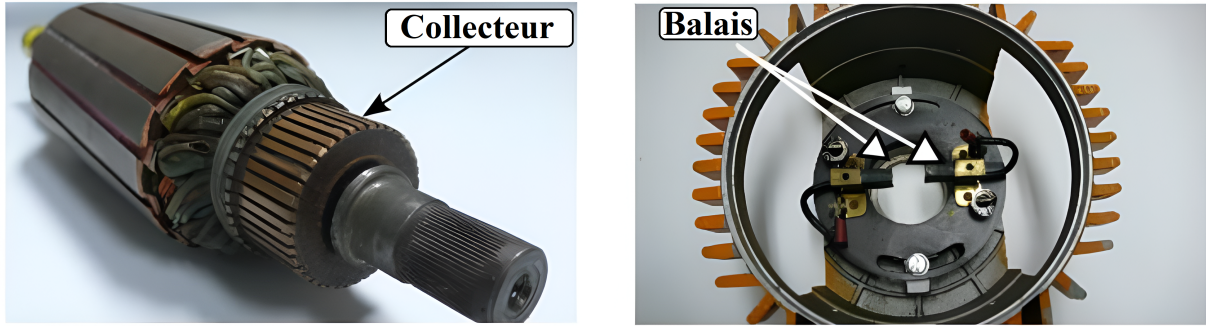


FIGURE 3.7 – Dispositif collecteur/balais

3.2.2 Principe de fonctionnement

Le fonctionnement d'un moteur à courant continu est basé sur le principe des forces de Laplace ;

Un conducteur de longueur Z , placé dans un champ magnétique et parcouru par un courant, est soumis à une force électromagnétique.

Le champ créé par l'inducteur agit sur les conducteurs de l'induit : Chacun de ces (N) conducteurs de longueur Z placé dans le champ \vec{B} et parcouru par un courant $i(t)$ est le siège d'une force électromagnétique perpendiculaire au conducteur [29].

$$F(t) = B.i(t).Z.\sin(\beta) \quad (3.1)$$

Avec : β est l'angle entre la force et le courant et B la norme du \vec{B} .

Ces forces de Laplace exercent un couple proportionnel à l'intensité $i(t)$ et au flux $\phi(t)$ sur le rotor. Le moteur se met à tourner à une vitesse proportionnelle à la tension d'alimentation $u(t)$ et inversement proportionnelle au flux $\phi(t)$.

Au passage de tout conducteur de l'induit sur la ligne neutre, le courant qui le traverse change de sens grâce au collecteur. Le moteur garde le même sens de rotation.

Pour inverser le sens de rotation, il suffit d'inverser le sens du champ produit par l'inducteur par rapport au sens du courant circulant dans l'induit ; soit par inversement de la polarité de la tension d'alimentation de l'induit, soit par inversement de la polarité d'alimentation du circuit d'excitation.

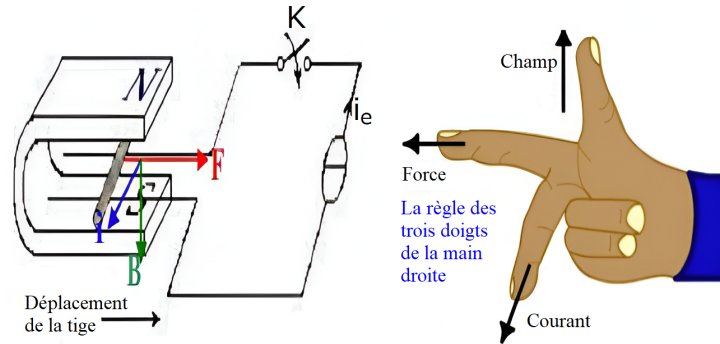


FIGURE 3.8 – Principe de fonctionnement d'un moteur à courant continu

3.2.3 La force contre électromotrice

Elle est donnée par la relation d'électrotechnique (3.2) [30].

La force électromotrice $e(t)$ est la tension produite par le rotor lors de sa rotation dans le flux magnétique produit par le stator. Elle dépend des éléments de la construction du moteur.

$$e(t) = \frac{P}{a} N n \cdot \phi(t) \quad (3.2)$$

P : nombre de paires de pôles du moteur.

N : nombre de conducteurs actifs de la périphérie de l'induit.

a : nombre de paires de voies de l'enroulement entre les deux balais.

n : fréquence de rotation de l'induit [$tr.s^{-1}$].

$\phi(t)$: flux sous un pôle de la machine [*Webers*].

Finalement :

$$e(t) = H \cdot \omega(t) \cdot \phi(t) \quad (3.3)$$

Avec :

$$H = \frac{P}{2\pi a} N$$

$\omega(t)$ la vitesse de rotation du moteur [$rad.s^{-1}$].

3.2.4 Différents types du moteur à courant continu

On distingue deux types de moteurs à courant continu ; qui sont les moteurs à inducteur à aimant permanent et les moteurs à inducteur bobiné. Ce dernier type possède 4 sortes de différents autres moteurs qui sont classés selon leur façon d'excitation exploitée.

On distingue : le moteur à excitation série, le moteur à excitation schunt (parallèle), le moteur à excitation composée (compound) et le moteur à excitation séparée (indépendante). Ce dernier est celui que nous utiliserons dans notre mémoire [31].

Dans un moteur à excitation indépendante ; le circuit d'excitation est séparé du circuit d'induit. Si l'inducteur est un aimant permanent, le flux ϕ est constant mais si l'inducteur est

un électroaimant alimenté par une source de tension continue réglable, le flux $\phi(t)$ ne dépend que du courant dans l'inducteur appelé courant d'excitation $i_e(t)$. Le courant crée un champ et une quantité de ce dernier à travers une spire donne un flux. Si la tension u est constante, le courant d'excitation i_e est constant et le flux ϕ est constant.

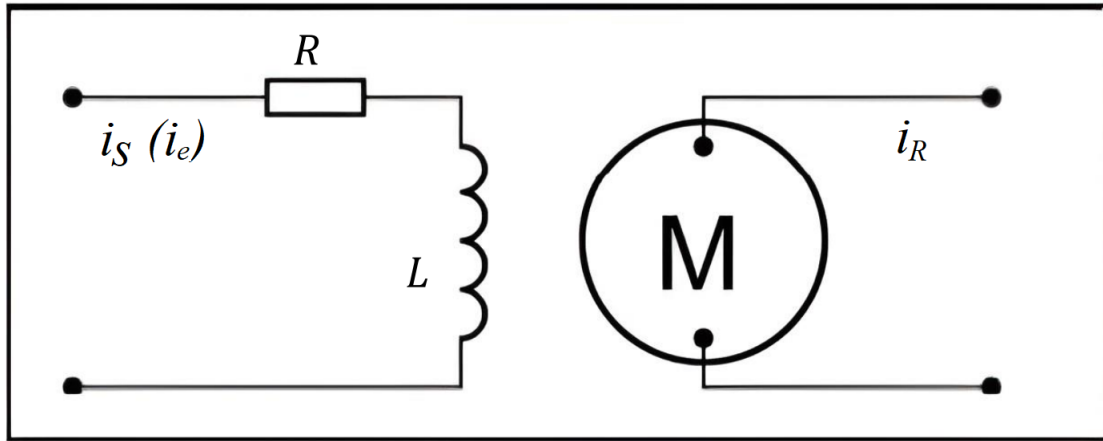


FIGURE 3.9 – Modèle d'un moteur à excitation séparée

Dans ces conditions, la force contre électromotrice $e(t)$ ne dépend que de la fréquence $n(t)$ de rotation. Donc la fréquence n est proportionnelle à la tension d'alimentation du moteur $u(t)$.

Compte tenu de la conservation de la puissance d'une machine (en négligeant les pertes), la puissance électrique absorbée est :

$$P_a = u(t).i_e(t) \quad (3.4)$$

La puissance mécanique fournie est :

$$P_u = C_u.\omega(t) = C_u 2\pi n \quad (3.5)$$

Si $u(t)$ est proportionnelle à n cela signifie que C_u est proportionnel à $i(t)$. Donc le couple utile C_u est proportionnel à l'intensité du courant d'alimentation du moteur.

Pour un moteur à excitation séparée, le flux ϕ est constant donc la fréquence de rotation n est proportionnelle à la tension d'alimentation u :

$$n(t) = \frac{e(t)}{H\phi} = \frac{u(t) - R.i(t)}{H\phi} \quad (3.6)$$

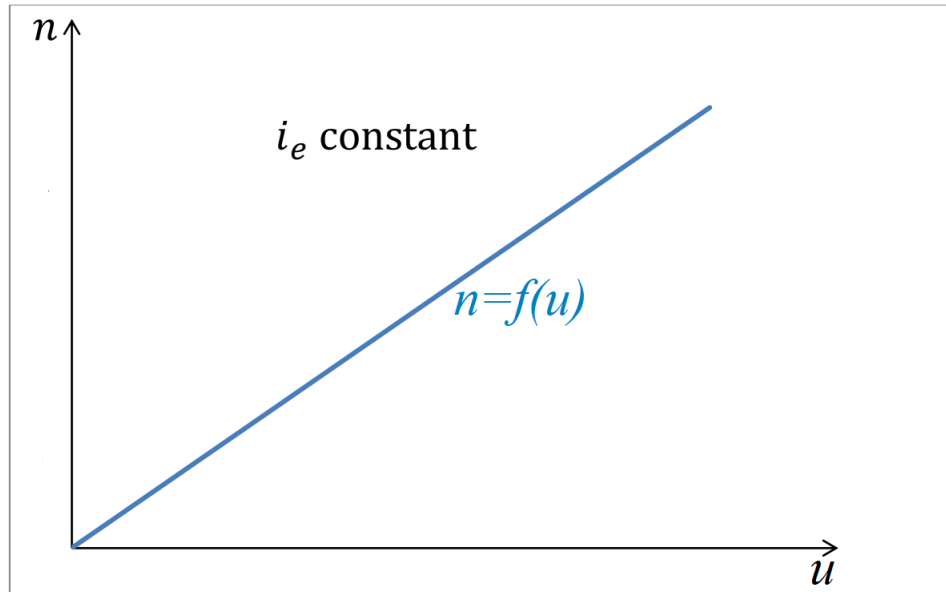


FIGURE 3.10 – La fréquence en fonction de la tension d'alimentation

Le couple $C_u(t)$ est proportionnel à l'intensité du courant d'alimentation $i_e(t)$.

$$C_u = \frac{e(t) \cdot i_e(t)}{\omega} = \frac{H\phi}{2\pi} i_e(t) = H' i_e(t) \quad (3.7)$$

Avec : $H' = \frac{H\phi}{2\pi}$.

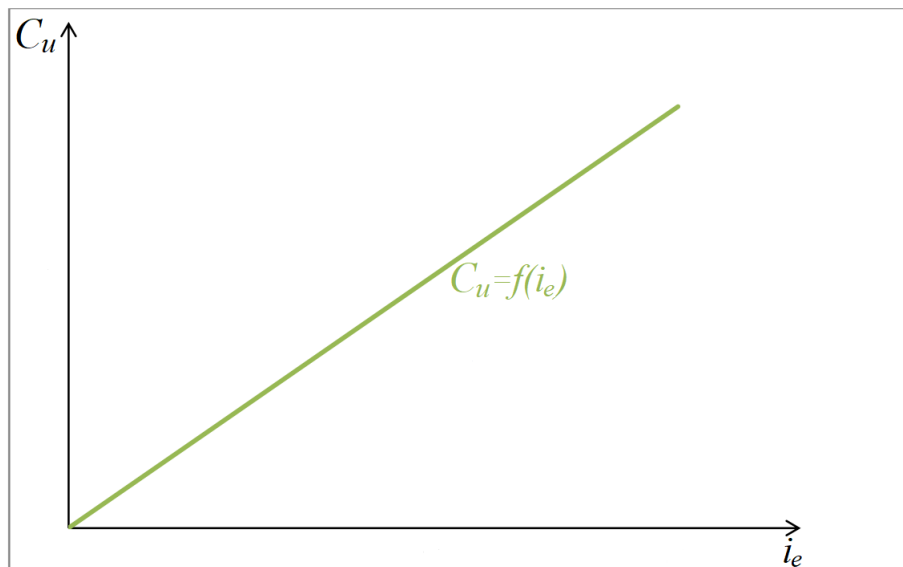


FIGURE 3.11 – Le couple en fonction du courant d'excitation

3.2.5 Variation de la vitesse

Pour faire varier la vitesse d'un moteur à courant continu, on peut agir sur la tension aux bornes de l'induit. Cette dernière est directement proportionnelle à la vitesse de rotation. La puissance varie mais le couple reste constant. On dit alors que l'on fait de la variation de vitesse à couple constant.



FIGURE 3.12 – Entrée+ système+ sortie

3.2.6 Avantages et inconvénients

Avantages

L'avantage principal des moteurs à courant continu réside dans leur adaptation simple aux moyens permettant de régler ou de faire varier leur vitesse, leur couple et leur sens de rotation : les variateurs de vitesse, voire leur raccordement direct à la source d'énergie : batteries d'accumulateur, piles, etc. Ils ne nécessitent pas d'électronique pour les piloter et peuvent être branchés directement sur une alimentation, des batteries, un variateur de vitesse ou une carte de positionnement associée à un signal de recopie.

- La variation de fréquence de rotation est simple à réaliser.
- Alimentation aisée dans les systèmes transportant leur réserve d'énergie (autonome) : pile ou batterie.
- Possibilité d'entraîner de très fortes inerties.
- Forte constante de temps mécanique.
- Forte capacité à entraîner des surcharges élevées imprévisibles ralentissant le moteur : puisque son courant est proportionnel au couple, le moteur à courant continu peut franchir des pointes du couple ainsi éviter les phénomènes de décrochage.

Inconvénients

La commutation du moteur à balais nécessite la mise en œuvre d'un ensemble de pièces mécaniques pour faire la liaison par frottement entre les charbons et le collecteur. Il en découle que :

- Plus la vitesse de rotation est élevée, plus la pression des balais doit augmenter pour rester en contact avec le collecteur donc plus le frottement est important ; aux vitesses élevées, les balais doivent donc être remplacés très régulièrement.
- Le collecteur imposant des ruptures de contact provoque des arcs, qui usent rapidement le commutateur et génèrent des parasites dans le circuit d'alimentation ainsi que par rayonnement électromagnétique (réduit dans le cas des moteurs maxon par le système CLL (long life capacitor)).

La température est limitée au niveau du collecteur par l'alliage utilisé pour braser les conducteurs du rotor aux lames du collecteur. Un alliage à base d'argent doit être utilisé lorsque la température de fonctionnement dépasse la température de fusion d'alliage classique à base d'étain.

Pour des fonctionnements en moteur de petite puissance, ce problème peut être résolu grâce à la technologie du moteur à courant continu sans balai communément appelé moteur brushless. Un dispositif d'électronique de puissance remplace l'ensemble balai/collecteur. La position du rotor est détectée par des capteurs à effet Hall et le courant est commuté par des transistors à effet de champ [30].

3.2.7 Bilan de la puissance

On peut représenter le bilan des puissances mises en jeu dans un moteur à courant continu en fonctionnement nominal par une flèche qui rétrécit au fur et à mesure que la puissance diminue.

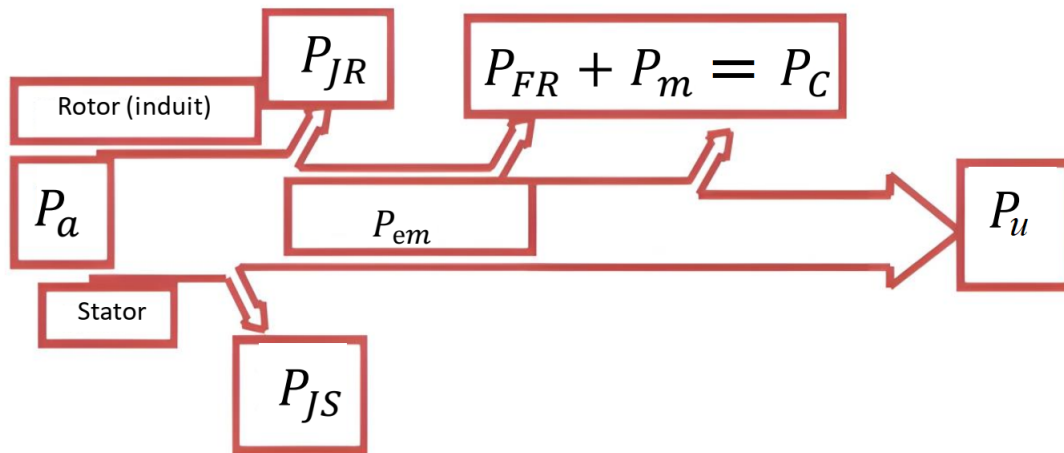


FIGURE 3.13 – Bilan de la puissance

- P_a : Puissance absorbée.
 P_u : Puissance utile.
 P_{em} : Puissance électromagnétique.
 P_{JS} : Pertes par effet Joule dans le stator.
 P_{JR} : Pertes par effet Joule dans le rotor.
 P_J : Pertes Joule ($P_{JS} + P_{JR}$).
 P_{FR} : Pertes fer.

P_m : Pertes mécaniques.

P_c : Pertes fer + pertes mécaniques, autrement dit, pertes constantes.

3.2.8 Rendement

Les moteurs à courant continu consomment une partie d'énergie absorbée pour leur fonctionnement. L'énergie mécanique fournie (utile) sera toujours plus petite que l'énergie électrique absorbée. Le rapport entre l'énergie fournie et l'énergie absorbée ; on l'appelle le rendement.

$$n = \frac{P_u}{P_a} = \frac{P_u}{P_u + P_J + P_c} \quad (3.8)$$

3.2.9 Différentes utilisations du moteur à courant continu à excitation séparée

La première génération de trains aux grandes vitesses "TGV" (1978–1988) fonctionnait avec des moteurs à courant continu. Les trains étaient (et sont toujours) équipés de deux motrices (locomotives) : la motrice avant tire le train pendant que la motrice arrière le pousse.

On suppose que le train accélère jusqu'à sa vitesse de croisière, puis décélère pour s'arrêter en gare. Ensuite, il repart dans l'autre sens en suivant le profil inverse. On suppose que l'aller correspond au sens positif de rotation des moteurs. On suppose également qu'en vitesse de croisière, les frottements de l'air obligent à exercer un couple moteur constant.



FIGURE 3.14 – TGV

Le moteur à excitation séparée est particulièrement adapté aux entraînements de machines nécessitant des vitesses réglables (action sur la tension) et présentant un couple important en basse vitesse (machines-outils) et on distingue [29] :

- Démarreur (automobile, etc.).
- Moteur de traction (locomotive, métro, etc.).
- Appareils de levage.
- Ventilateurs, pompes centrifuges, compresseurs, pompes à piston.
- Machines-outils à couple variable ou à mouvement alternatif (étaux-limeurs, raboteuses).

3.2.10 Equations électromécaniques du moteur à courant continu en régime dynamique (transitoire)

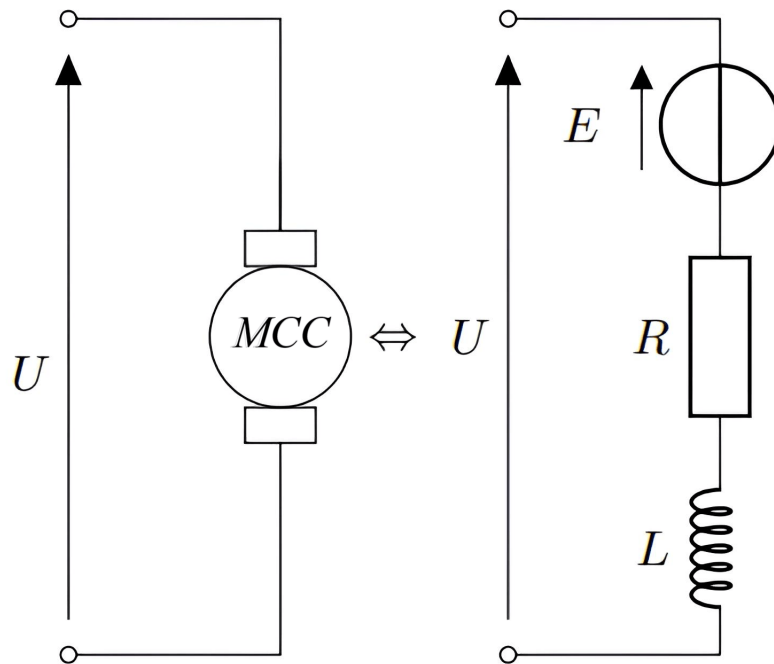


FIGURE 3.15 – Modèle dynamique d'un moteur à courant continu à excitation séparée

On a donc deux relations de proportionnalité entre la force électromotrice $e(t)$ et la vitesse du rotor $\omega(t)$ [32].

$$e(t) = K_e \cdot \omega(t) \quad (3.9)$$

Un moment du couple électromagnétique directement proportionnel au courant d'induit :

$$C_m = K_m \cdot i(t) \quad (3.10)$$

Equation électrique

La tension d'induit (en convention récepteur)

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad (3.11)$$

Equation mécanique

Le principe fondamental de la dynamique nous permet d'écrire :

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = C_u - C_r \quad (3.12)$$

Avec :

$$C_u = C_m - C_p$$

On suppose que le moment du couple de perte est de la forme :

$$C_p = f.\omega(t) \quad (3.13)$$

Donc :

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = C_m - f.\omega(t) - C_r \quad (3.14)$$

$u(t)$ est la tension appliquée aux bornes du moteur [V].

$e(t)$ est la force électromotrice [V].

$i(t)$ est le courant [A].

$C_m(t)$ est le couple moteur [Nm].

$C_r(t)$ est le couple résistant [Nm].

$\omega(t)$ est la vitesse de rotation du moteur [$rad.s^{-1}$].

R est la résistance des armatures du moteur [Ω].

L est l'inductance des armatures du moteur [H].

J est l'inertie du moteur [$kg.m^2$].

f est le coefficient de frottement [Nm.s].

K_m est la constante du couple moteur [NmA^{-1}].

K_e est la constante de force électromotrice [$Vs.rad^{-1}$].

3.3 Commande par rejet actif des perturbations (Active Disturbance Rejection Control : ADRC)

La commande par rejet actif des perturbations est une stratégie de commande robuste très attrayante pour les systèmes incertains non linéaires, elle a été développée par J. Han [26].

Dans le schéma d'ADRC, la perturbation globale, comprenant à la fois les incertitudes paramétriques et les perturbations externes ; est considérée comme un état étendu alors un observateur à état étendu (Extended State Observer : ESO) a été conçu pour l'estimer. Ensuite, l'estimé de la perturbation globale sera injecté dans la loi de commande afin de la compenser. Le principal avantage d'ADRC est qu'il peut faire face à diverses incertitudes.

L'ADRC ou un contrôleur basé sur un observateur à état étendu a été largement appliqué pour la commande des systèmes automatiques.

Dans ce qui suit, on utilise l'ADRC en rassemblant un observateur à mode glissant d'ordre 2 étape par étape à état étendu et une commande par mode de glissement. D'abord un observateur à mode glissant d'ordre 2 étape par étape à état étendu sera conçu pour estimer tous les états y compris l'état étendu. Ensuite, une commande par mode de glissement sera conçue en supposant que tous les états dont l'état étendu sont parfaitement connus. Finalement, la stabilité du système sous la commande par rejet actif de la perturbation sera analysée.

3.4 Application d'ADRC à un moteur à courant continu

Afin d'illustrer l'efficacité du schéma de commande proposé, nous l'appliquons à la commande d'un moteur à courant continu à excitation séparée dont la dynamique est supposée inconnue et en considérant aussi la présence des perturbations externes.

Après avoir développé les équations électromécaniques du moteur à courant continu en régime dynamique, on aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2}{dt^2}\omega(t) = -\frac{(Rf) + (K_m K_e)}{LJ}\omega(t) - \frac{(RJ) + (Lf)}{LJ}\frac{d}{dt}\omega(t) + \frac{K_m}{LJ}u(t) - \frac{R}{LJ}C_r(t) - \frac{1}{J}\frac{d}{dt}C_r(t) \quad (3.15)$$

À partir de (3.15), en posant : $x_1 = \omega$ et $x_2 = \frac{d\omega}{dt}$, on obtient la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f(x_1, x_2, t) + d(t) + b.u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (3.16)$$

La fonction $f(x_1, x_2, t)$ représente les incertitudes internes du système. $d(t)$ représente la perturbation externe. La somme $d_g = f(x_1, x_2, t) + d(t)$ est considérée comme la perturbation globale, autrement dit, l'état étendu (x_3) de notre système. Le but de cet observateur est d'estimer à la fois toutes les variables d'état x_1, x_2 et l'état étendu x_3 . $h(t)$ est la dérivée de ce dernier.

Avec :

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, t) = -\frac{(Rf)+(K_m K_e)}{LJ}x_1(t) - \frac{(RJ)+(Lf)}{LJ}x_2(t) \\ d(t) = -\frac{R}{LJ}C_r(t) - \frac{1}{J}\frac{d}{dt}C_r(t) \\ b = \frac{K_m}{LJ} \end{cases} \quad (3.17)$$

Alors le système (3.16) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 + b.u(t) \\ \frac{dx_3}{dt} = h(x_1, x_2, t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (3.18)$$

Où : $x(t) = [x_1 \ x_2]^T \in \mathfrak{R}^2$ représente le vecteur d'état. Le vecteur des conditions initiales est $x(0) = x_0 = [x_{1_0} \ x_{2_0}]^T$. Le schéma bloc du principe d'ADRC est illustré dans la figure (3.16).

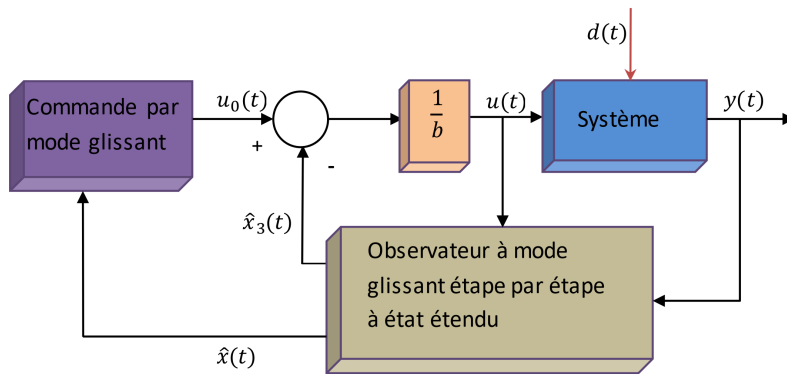


FIGURE 3.16 – Schéma bloc du principe d'ADRC

3.4.1 Synthèse de l'observateur à état étendu (Extended State Observer)

Le but est de construire un observateur étape par étape à état étendu à mode glissant d'ordre 2 pour notre système non linéaire incertain décrit par la forme canonique d'observation (3.18).

L'observateur étape par étape à état étendu à mode glissant d'ordre 2 est conçu comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \tilde{x}_2 + \lambda_1 |x_1 - \hat{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \alpha_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = E_1 [\tilde{x}_3 + \lambda_2 |\tilde{x}_2 - \hat{x}_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) + b.u(t)] \\ \dot{\hat{x}}_3 = E_1 [\alpha_2 \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2)] \\ \hat{x}_3 = \tilde{x}_3 \end{cases} \quad (3.19)$$

Où : la fonction de commutation E_1 , est définie comme suit : $E_1 = 1$ si $x_1 - \hat{x}_1 = 0$ sinon $E_1 = 0$.

Soient : $e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$; les erreurs d'estimation. Leurs dynamiques sont données par (3.20).

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} e_1(t) = e_2(t) - \lambda_1 |\sigma_1(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_1(t)) \\ \frac{d}{dt} e_2(t) = x_3(t) - E_1 [\tilde{x}_3 + \lambda_2 |\sigma_2(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_2(t))] + b(1 - E_1)u(t) \\ \frac{d}{dt} e_3(t) = h(t) - E_1 [\alpha_2 \text{sign}(\sigma_2(t))] \end{cases} \quad (3.20)$$

Où : $\sigma_i(t) = \tilde{x}_i(t) - \hat{x}_i(t)$, $i = 1, 2$ représentent les surfaces de glissement ($x_1 = \tilde{x}_1$).

3.4.2 Conception du contrôleur à mode glissant

Dans cette partie, on considère la conception de la commande par mode de glissement sans ESO (Extended State Observer). Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_1(t) = x_2(t) \\ \frac{d}{dt} x_2(t) = x_3(t) + b.u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (3.21)$$

Où : x_3 est l'état étendu qui représente la perturbation globale du système.

Dans cette section, on suppose que x_1 , x_2 et x_3 sont parfaitement connus. Soit x_d le vecteur d'état désiré défini comme suit :

$$x_d = \begin{bmatrix} x_{1d} \\ x_{2d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1d} \\ \frac{d}{dt} x_{1d} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Soit : $\varepsilon = x - x_d = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2]^T$ le vecteur des erreurs de poursuite, alors la dynamique des erreurs de poursuite est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) \\ \frac{d}{dt} \varepsilon_2(t) = x_3(t) + b.u(t) - \frac{d^2}{dt^2} x_{1d} \\ \varepsilon_y(t) = \varepsilon_1(t) = y(t) - x_{1d} \end{cases} \quad (3.23)$$

La loi de commande est choisie comme suit :

$$u(t) = \frac{-x_3 + u_0}{b} \quad (3.24)$$

Où : u_0 est la commande par mode glissant.

En remplaçant la loi de commande (3.24) dans (3.23), nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) \\ \frac{d}{dt}\varepsilon_2(t) = u_0(t) - \frac{d^2}{dt^2}x_{1d} \\ \varepsilon_y(t) = \varepsilon_1(t) \end{cases} \quad (3.25)$$

Le système (3.25) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varepsilon(t) = A.\varepsilon(t) + B.u_0(t) - B\frac{d^2}{dt^2}x_{1d} \\ \varepsilon_y(t) = C.\varepsilon(t) \end{cases} \quad (3.26)$$

Où :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0]$$

Remarque 3.1

Le système (3.26) est sous la forme de Brunowski.

Considérons le système (3.26) et définissons la surface de glissement comme suit :

$$\sigma = S\varepsilon = S_1\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (3.27)$$

Où : $S = [S_1 \quad 1] \in \mathfrak{R}^{1 \times 2}$.

S_1 est choisi de telle sorte que la racine λ du polynôme suivant :

$$\Delta(\lambda) = S_1 + \lambda \quad (3.28)$$

soit à partie réelle strictement négative.

$$Re(\lambda) < 0 \quad (3.29)$$

Soit :

$$u_0 = u_{0eq} - (SB)^{-1}K\sigma - (SB)^{-1}L \cdot sign(\sigma) \quad (3.30)$$

Où : u_{0eq} est la commande équivalente conçue en fixant $\frac{d}{dt}\sigma = 0$. K et L sont des paramètres positifs.

La dérivée de σ est :

$$\frac{d}{dt}\sigma = S\frac{d}{dt}\varepsilon = S \left(A\varepsilon + B.u_0(t) - B\frac{d^2}{dt^2}x_{1d} \right) \quad (3.31)$$

D'après $\frac{d}{dt}\sigma = 0$, il s'ensuit que :

$$u_{0eq} = -(SB)^{-1}SA\varepsilon + \frac{d^2}{dt^2}x_{1d} \quad (3.32)$$

La loi de commande globale est :

$$u_0 = -(SB)^{-1}SA\varepsilon + \frac{d^2}{dt^2}x_{1d} - (SB)^{-1}K\sigma - (SB)^{-1}L \cdot sign(\sigma) \quad (3.33)$$

Etude de la convergence des erreurs de poursuite

En remplaçant u_0 dans (3.31), on obtient :

$$\frac{d}{dt}\sigma = -K\sigma - L \cdot \text{sign}(\sigma) \quad (3.34)$$

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (3.35)$$

Ensuite :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}V = \sigma \frac{d}{dt}\sigma = -K\sigma^2 - L\sigma \cdot \text{sign}(\sigma) \leq -L|\sigma| \leq 0 \\ \frac{d}{dt}V \leq -L\sqrt{V} \end{cases} \quad (3.36)$$

À partir de (3.36), on déduit que σ converge vers zéro en un temps fini.

Puisque $\sigma \rightarrow 0$, à partir de (3.27), on obtient :

$$\varepsilon_2 = -S_1\varepsilon_1 \quad (3.37)$$

En tenant compte des équations (3.25) et (3.37), on peut écrire :

$$\frac{d}{dt}\varepsilon_1(t) = -S_1\varepsilon_1 \quad (3.38)$$

Il s'ensuit que si la racine du polynôme (3.28) satisfait la condition (3.29), alors le système (3.38) est asymptotiquement stable. Cela signifie que l'erreur de poursuite ε_1 converge asymptotiquement vers zéro et à partir de (3.37), on conclut que ε_2 tend aussi asymptotiquement vers zéro. Cela signifie que les variables d'état suivent leurs références désirées.

Analyse de la stabilité du système bouclé (Commande + Observateur)

La stabilité du système (3.23) sous la loi de commande (3.24) utilisant l'état et l'état étendu estimés est analysée ici. Considérons le système (3.23). En remplaçant les variables d'état par leurs estimées dans la loi de commande (3.24), on obtient :

$$u(t) = \frac{-\hat{x}_3 + \hat{u}_0}{b} \quad (3.39)$$

Avec :

$$\hat{u}_0 = -(SB)^{-1}SA\hat{\varepsilon} + \frac{d^2}{dt^2}x_{1d} - (SB)^{-1}K\hat{\sigma} - (SB)^{-1}L \cdot \text{sign}(\hat{\sigma}) \quad (3.40)$$

Où : $\hat{\sigma} = S\hat{\varepsilon}$ et $\hat{\varepsilon} = \hat{x} - x_d$. En remplaçant la loi de commande (3.39) dans le système (3.23), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) \\ \frac{d}{dt}\varepsilon_2(t) = \hat{u}_0(t) + e_3(t) - \frac{d^2}{dt^2}x_{1d} \\ \varepsilon_y(t) = \varepsilon_1(t) \end{cases} \quad (3.41)$$

Où : $e_3 = x_3 - \hat{x}_3$ est l'erreur d'estimation de l'état étendu. De ce qui précède, le système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varepsilon(t) = A.\varepsilon(t) + B.\hat{u}_0(t) + B.e_3(t) - B\frac{d^2}{dt^2}x_{1d} \\ \varepsilon_y(t) = C.\varepsilon(t) \end{cases} \quad (3.42)$$

La dérivée de la surface de glissement (3.27) est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = S\frac{d}{dt}\varepsilon = S(A.\varepsilon(t) + B.\hat{u}_0(t) + B.e_3(t) - B\frac{d^2}{dt^2}x_{1d}) \quad (3.43)$$

En remplaçant la loi de commande $\hat{u}_0(t)$ dans (3.43), on obtient :

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = -K.\hat{\sigma}(t) - L.\text{sign}(\hat{\sigma}) + SA.e(t) + SB.e_3(t) \quad (3.44)$$

Où : $e = x - \hat{x}$

Avec : $\hat{\sigma} = \sigma - Se$, l'équation (3.44) devient :

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = -K.\sigma(t) - L.\text{sign}(\hat{\sigma}) + SA.e(t) + KS.e(t) + SB.e_3(t) \quad (3.45)$$

Soit : $g(e, e_3) = SAe + KSe + SBe_3$, alors (3.45) peut s'écrire comme suit :

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = -K.\sigma(t) - L.\text{sign}(\hat{\sigma}) + g(e, e_3) \quad (3.46)$$

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (3.47)$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V &= \sigma\frac{d}{dt}\sigma = -K\sigma^2 - L.\text{sign}(\hat{\sigma})\sigma + \sigma g(e, e_3) \leq K\sigma^2 + L|\sigma| + \sigma g(e, e_3) \leq \\ &-K\sigma^2 + \frac{1}{2}(L^2 + \sigma^2) + \frac{1}{2}(\sigma^2 + g(e, e_3)^2) \\ &\leq -(K-1)\sigma^2 + 0.5(L^2 + g_{max}^2) \leq -\rho.V(t) + c \end{aligned} \quad (3.48)$$

Où : $\rho = K - 1 > 0$, $c = 0.5(L^2 + g_{max}^2)$.

À partir de (3.48), on déduit qu'il existe un instant $t_1 > 0$, tel que pour tout instant $t \in [t_1, \infty[$, $V(t)$ est bornée, c'est-à-dire $\|V(t)\| \leq \frac{2c}{\rho}$. Cela signifie :

$$\|\sigma(t)\| = \frac{1}{2}\|\sigma\|^2 \leq \frac{2c}{\rho} \quad (3.49)$$

À partir de (3.49), on déduit que :

$$\|\sigma\| \leq \sqrt{\frac{4c}{\rho}} \quad (3.50)$$

Ainsi, à partir de (3.50), on conclut que la surface de glissement σ est bornée et proche de zéro par un choix approprié des paramètres K et L . Puisque $\sigma = C\varepsilon$, alors les trajectoires $\varepsilon(t)$ du système (3.42) sont aussi bornées, c'est-à-dire,

$$\|\varepsilon\| \leq \frac{M}{\|C\|} \quad (3.51)$$

Où : $M = \sqrt{\frac{4c}{\rho}}$. De plus, à $t = t_s$; l'observateur converge, c'est-à-dire, que les erreurs d'estimation e_1 , e_2 et e_3 convergent vers zéro en un temps fini t_s ($e = [e_1 \ e_2]^T$). Il s'ensuit que le terme $g(e_1, e_2, e_3)$ devient nul pour tout $t \geq t_s$, alors la dérivée de σ donnée par (3.46) devient égale à celle sans observateur donnée par l'équation (3.34) comme suit :

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = -K.\sigma(t) - L.\text{sign}(\sigma) \quad (3.52)$$

Cela signifie que dès que l'observateur converge en un temps fini t_s , la situation devient la même que celle de la commande sans observateur présentée dans la partie 3.4.2.

3.5 Résultats de simulation

Les paramètres de l'observateur sont choisis comme suit : $\lambda_1 = 10$, $\alpha_1 = 10$, $\lambda_2 = 2000$ et $\alpha_2 = 1000$ (des paramètres positifs).

Les conditions initiales de notre application et de l'observateur sont choisies comme suit : $x_{10} = 3$, $x_{20} = 0$, $\hat{x}_{10} = 0$, $\hat{x}_{20} = 0$, $\hat{x}_{30} = 0$, $\tilde{x}_{20} = 0$ et $\tilde{x}_{30} = 0$.

Le paramètre S_1 de la surface de glissement dans notre application est choisi égal à 20.

$$K = 10 \text{ et } L = 10.$$

Premier cas : $C_r = 0$ pour $x_{1d} = 100$ et $x_{1d} = 50$

Les figures (3.17) et (3.18) montrent les trajectoires d'état obtenues par le schéma de commande proposé pour $x_{1d} = 100$ et $x_{1d} = 50$, respectivement. On constate que les références sont bien suivies. En effet, les variables d'état suivent correctement toutes leurs références désirées.

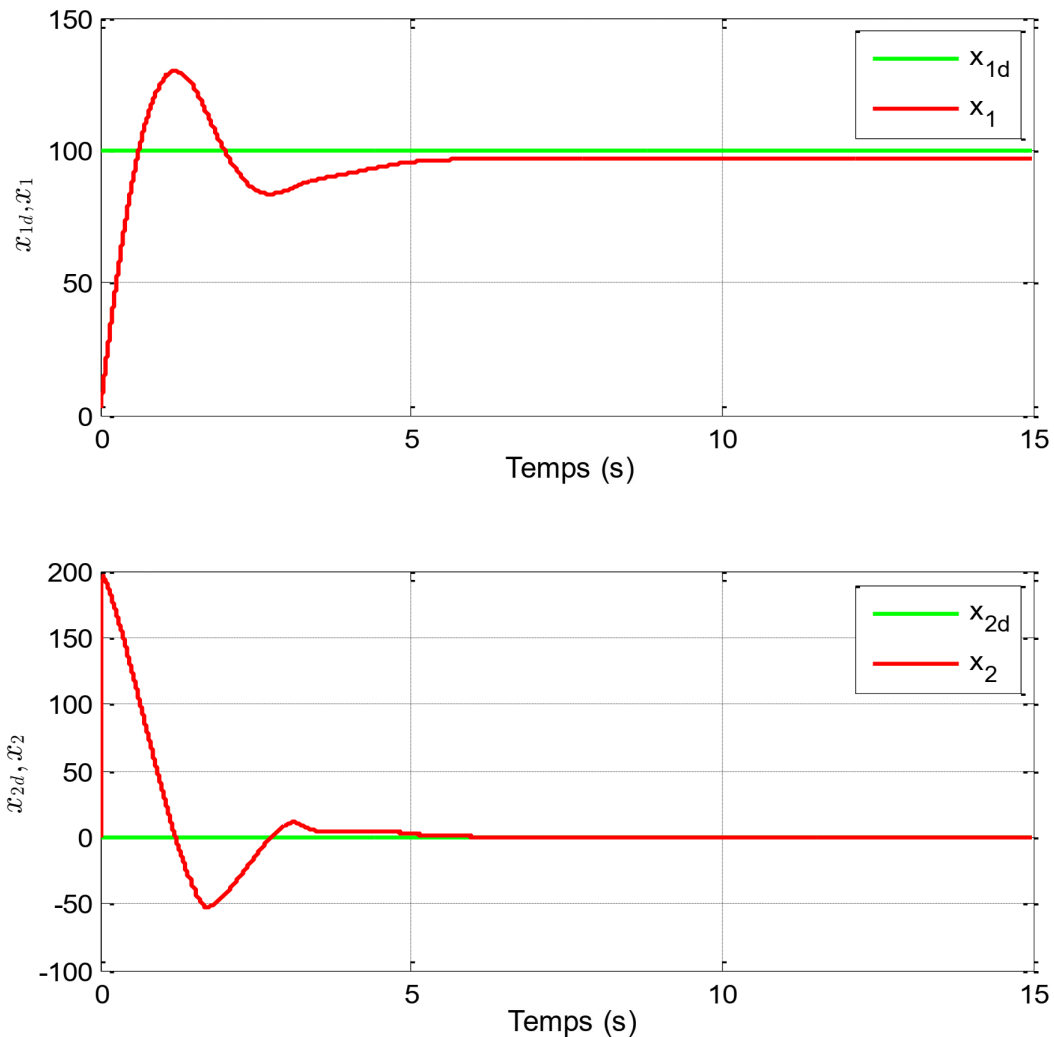


FIGURE 3.17 – Les variables d'état pour $x_{1d} = 100$

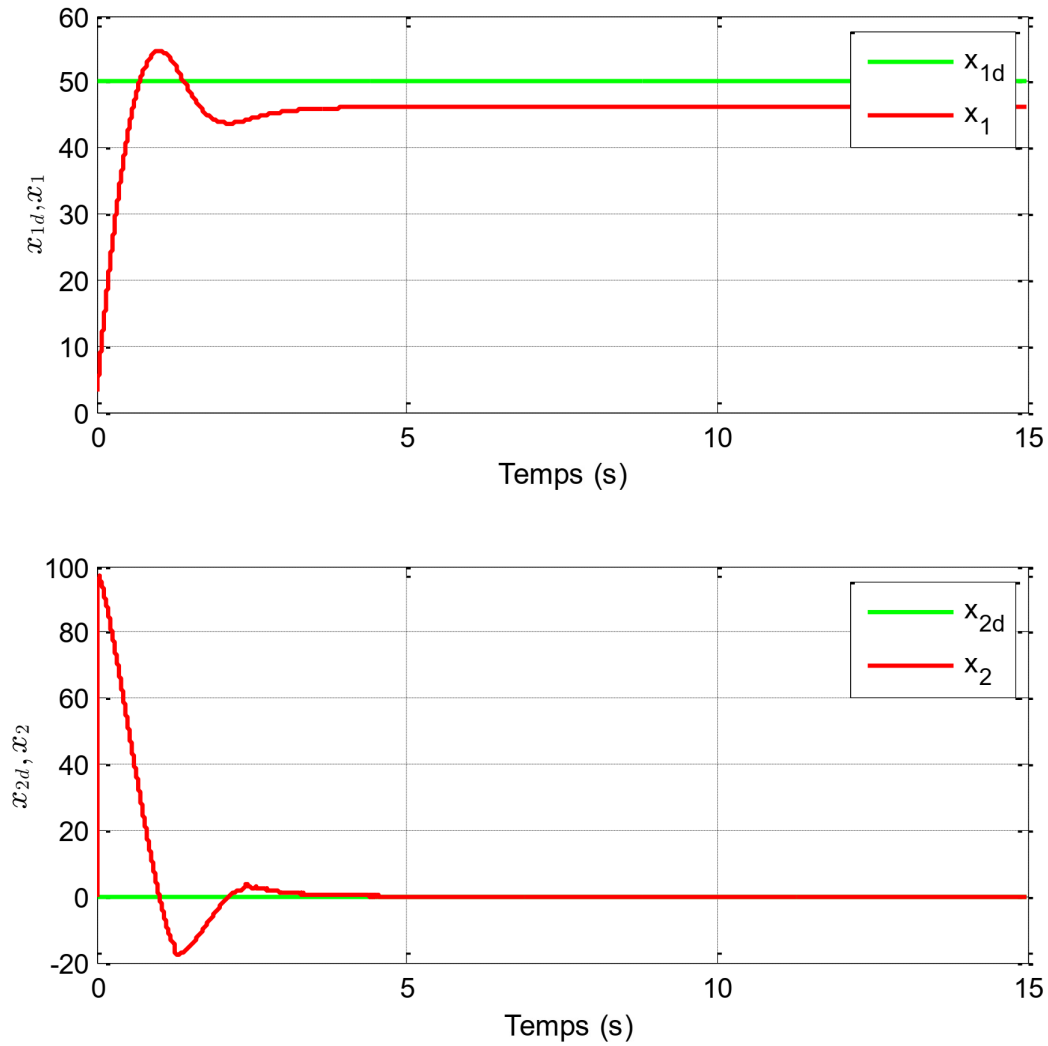


FIGURE 3.18 – Les variables d'état pour $x_{1d} = 50$

Les figures (3.19) et (3.20) montrent les erreurs d'estimation des états et de la valeur de la perturbation globale donnée par l'observateur (3.19) en la comparant avec sa vraie valeur pour $x_{1d} = 100$ et $x_{1d} = 50$, respectivement. On remarque que l'observateur donne une bonne estimation des variables d'état et de l'état étendu. En effet, on aperçoit que l'erreur d'estimation converge vers zéro et l'état étendu converge vers sa vraie valeur.

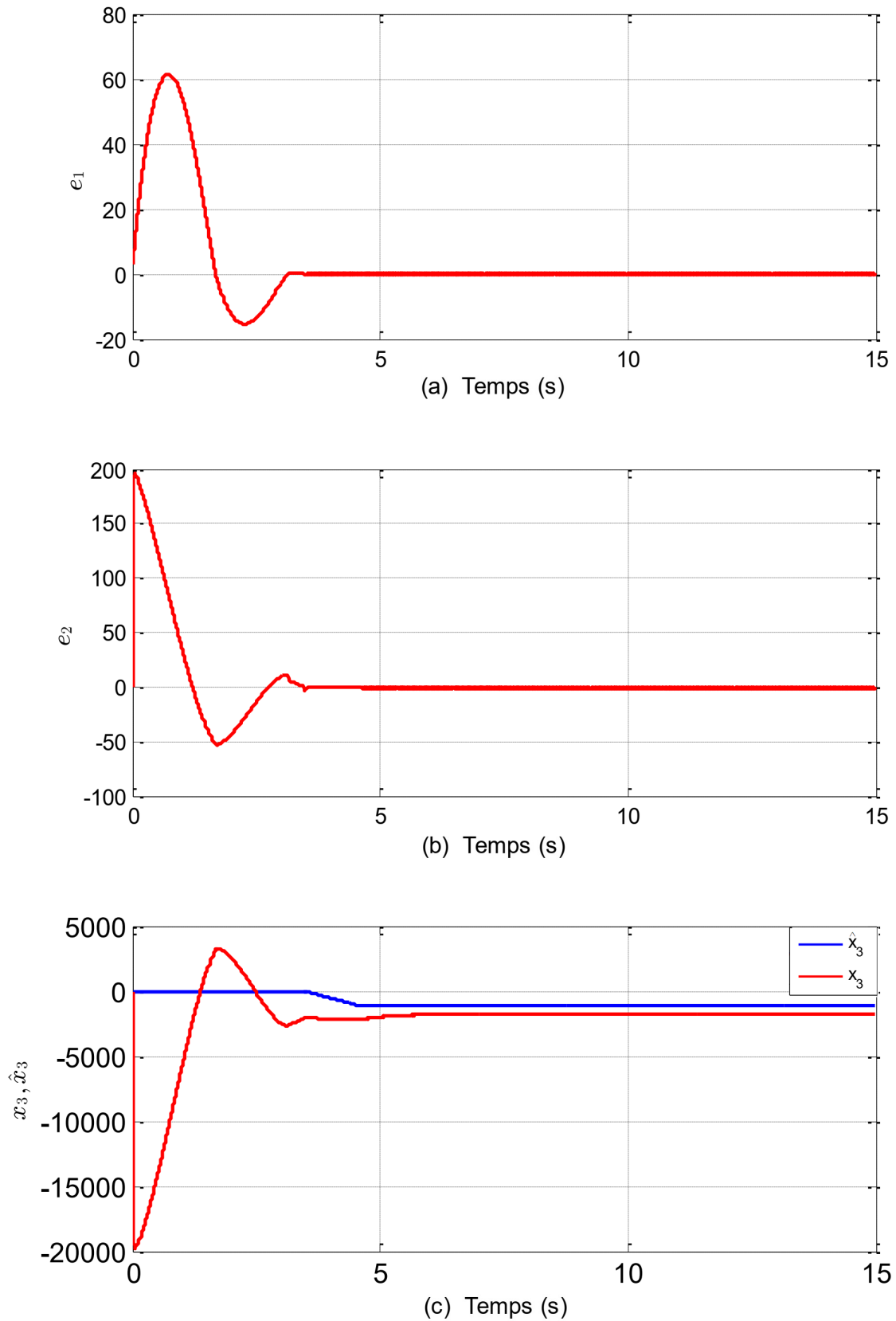


FIGURE 3.19 – (a), (b) Les erreurs d'estimation d'état, (c) : l'état étendu x_3 et son estimé pour $x_{1d} = 100$

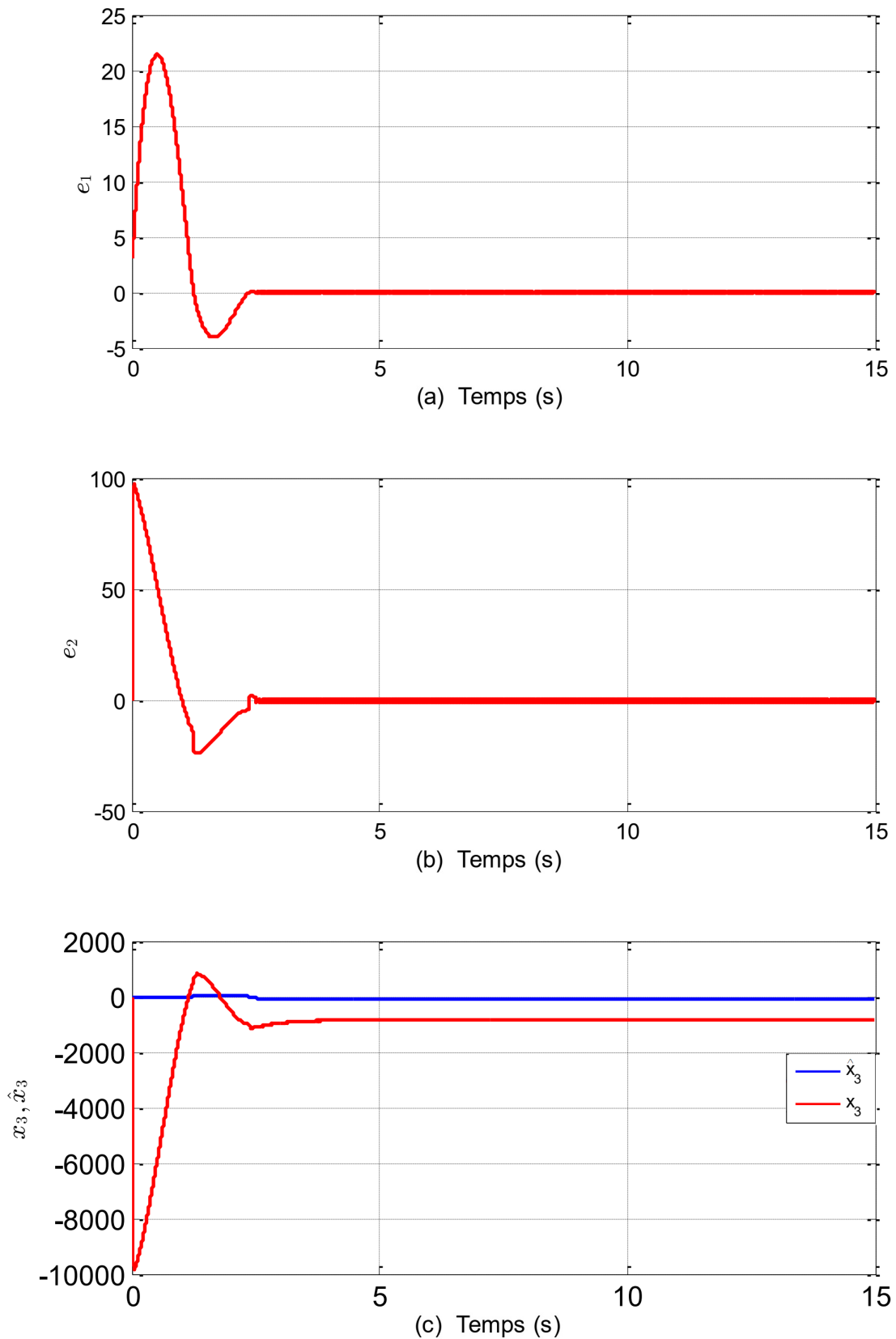


FIGURE 3.20 – (a), (b) Les erreurs d'estimation d'état, (c) : l'état étendu x_3 et son estimé pour $x_{1d} = 50$

Les entrées de commande pour $x_{1d} = 100$ et $x_{1d} = 50$, respectivement sont illustrées dans les figures (3.21) et (3.22). Donc on constate que le signal de commande ne contient pas le phénomène de chattering. Cela est dû au fait que la valeur du gain de la commande discontinue est petite. Autrement dit, un autre avantage de la commande proposée est la réduction ou l'élimination du phénomène de chattering qui peut endommager le système.

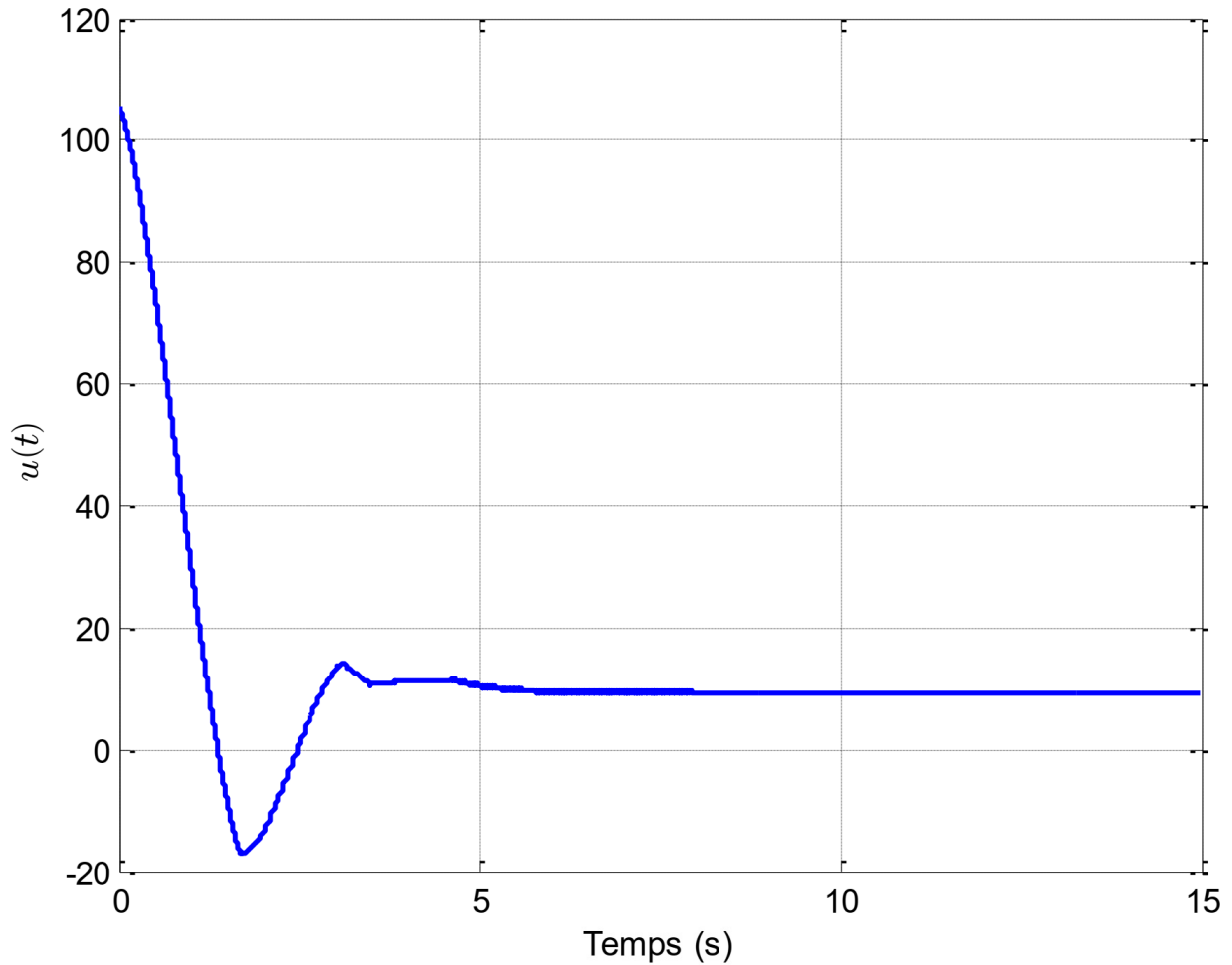


FIGURE 3.21 – La trajectoire de l'entrée de commande pour $x_{1d} = 100$

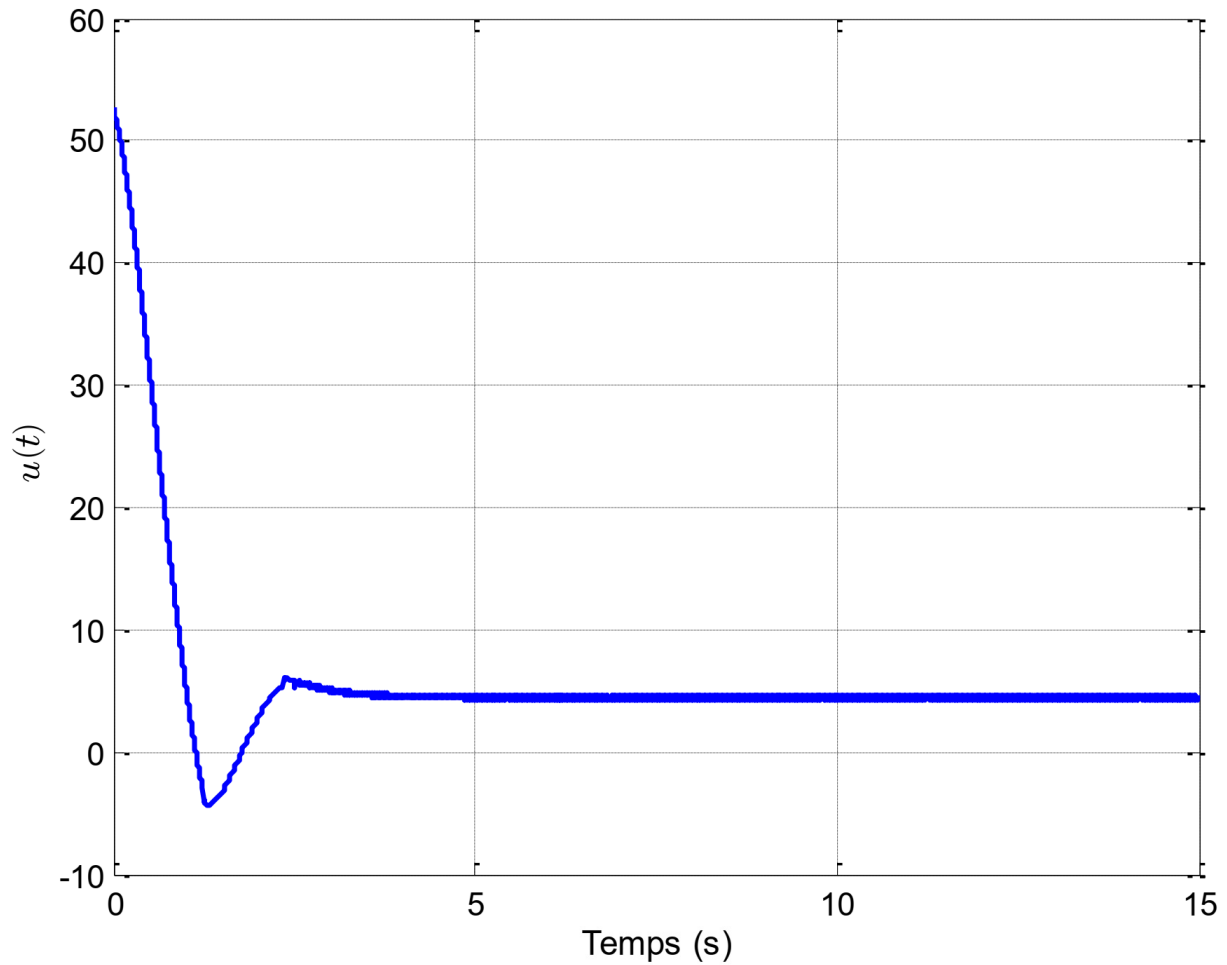


FIGURE 3.22 – La trajectoire de l'entrée de commande pour $x_{1_d} = 50$

Deuxième cas : $C_r = 2$ pour $x_{1_d} = 100$ et $x_{1_d} = 50$

Les figures (3.23) et (3.24) montrent les trajectoires d'état obtenues par le schéma de commande proposé pour $x_{1_d} = 100$ et $x_{1_d} = 50$, respectivement. On voit que les références sont suivies comme dans le cas où $C_r = 0$; c'est juste que le temps de réponse est un peu plus grand.

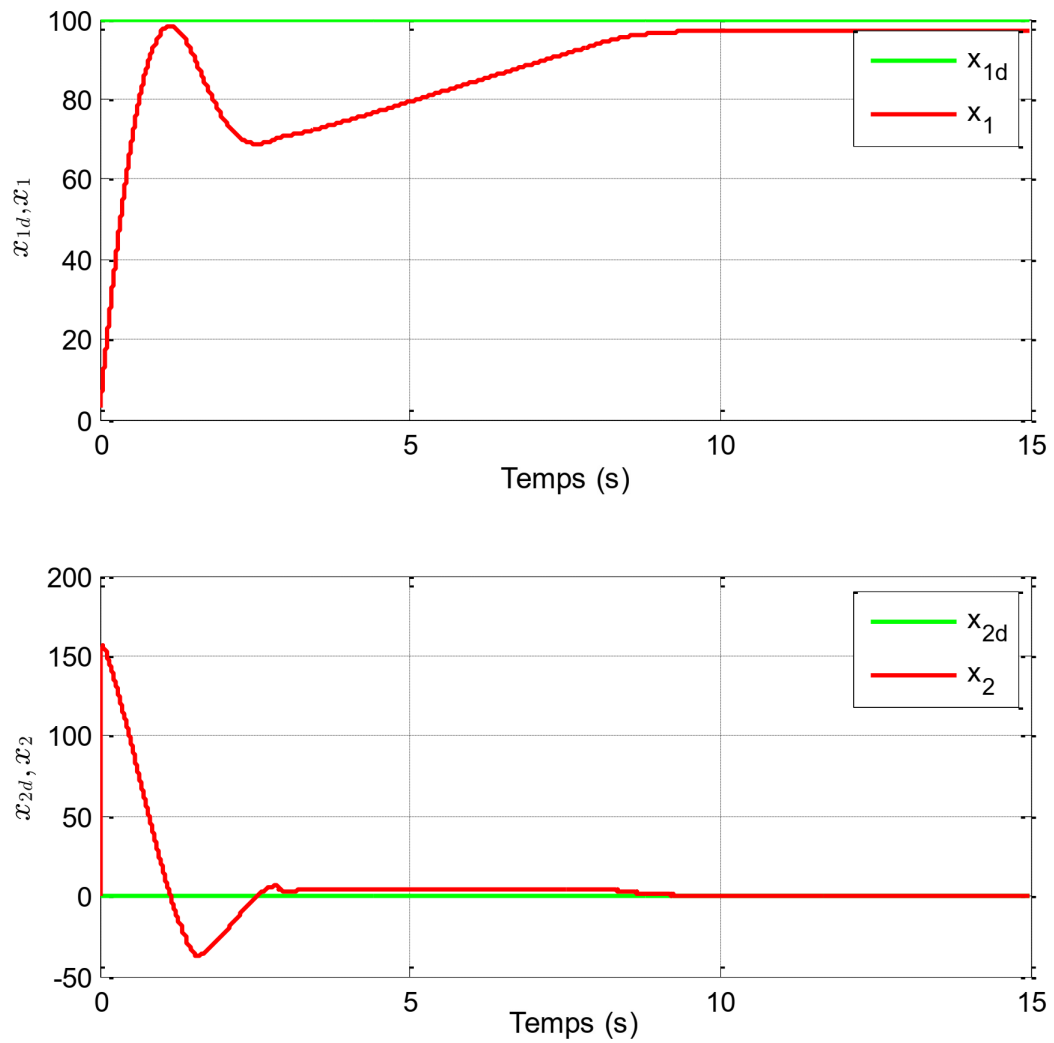


FIGURE 3.23 – Les variables d'état pour $x_{1d} = 100$

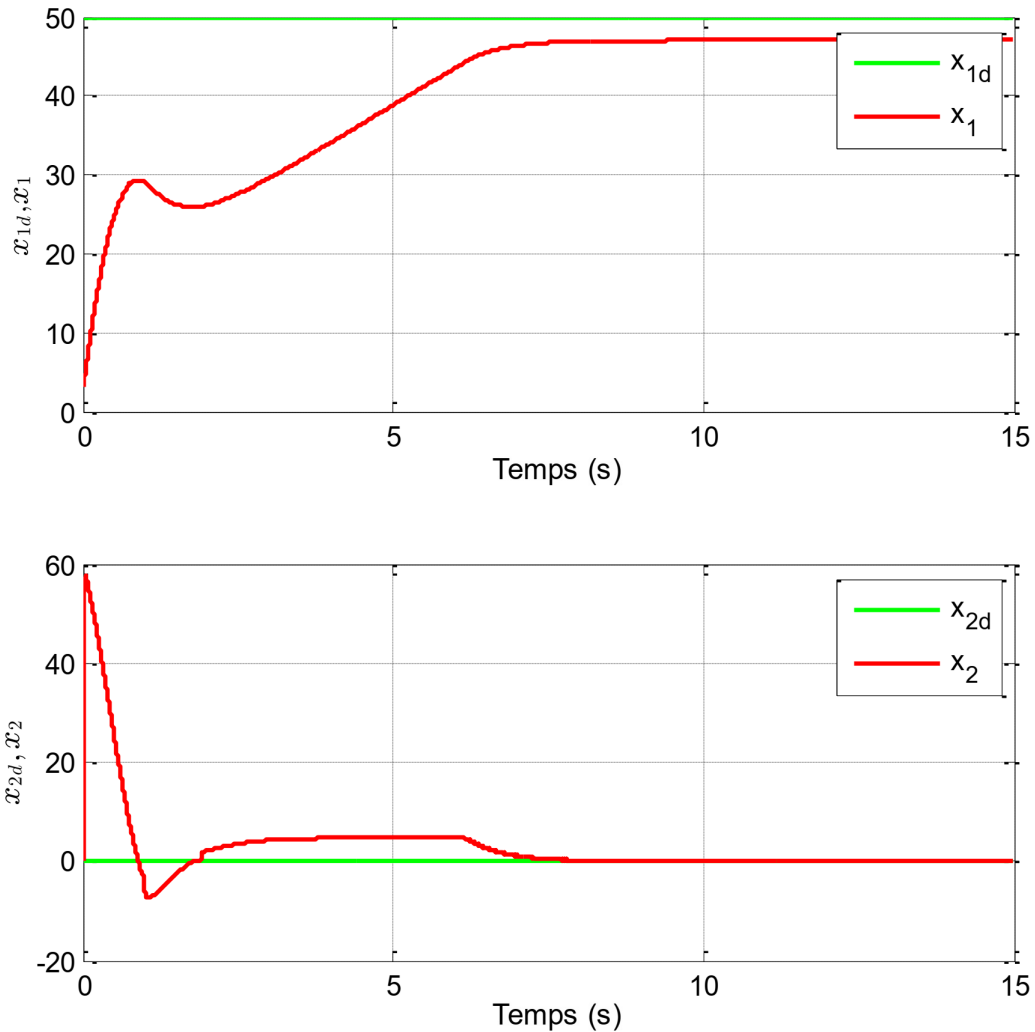


FIGURE 3.24 – Les variables d'état pour $x_{1d} = 50$

Les figures (3.25) et (3.26) montrent les erreurs d'estimation des états et de la valeur de la perturbation globale donnée par l'observateur (3.19) en la comparant avec sa vraie valeur pour $x_{1d} = 100$ et $x_{1d} = 50$, respectivement. On constate que l'observateur donne une bonne estimation des variables d'état et de l'état étendu mais avec un temps de réponse un peu plus élevé par rapport au cas où le couple résistant est nul.

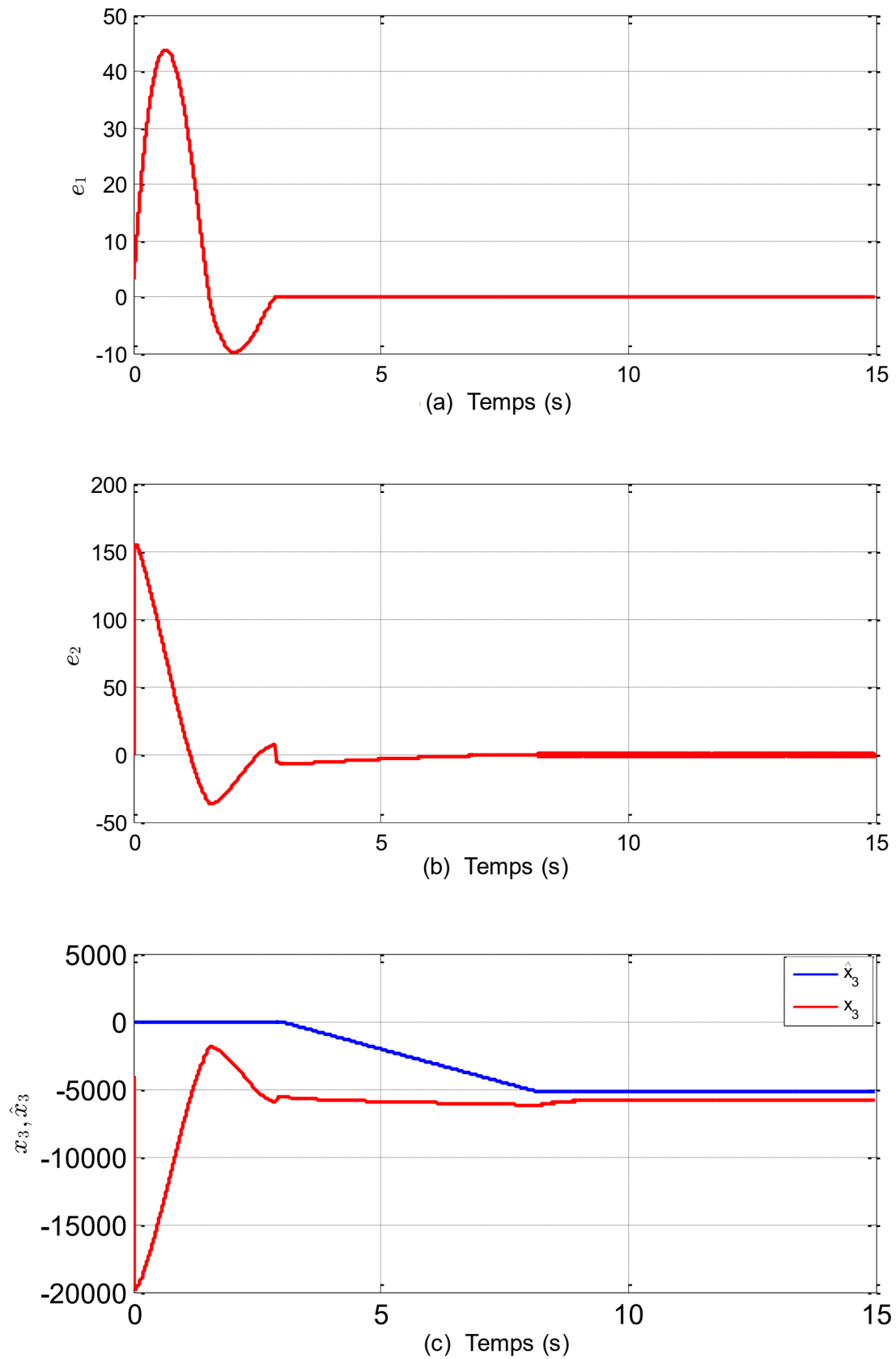


FIGURE 3.25 – (a), (b) Les erreurs d'estimation d'état, (c) : l'état étendu x_3 et son estimé pour $x_{1d} = 100$

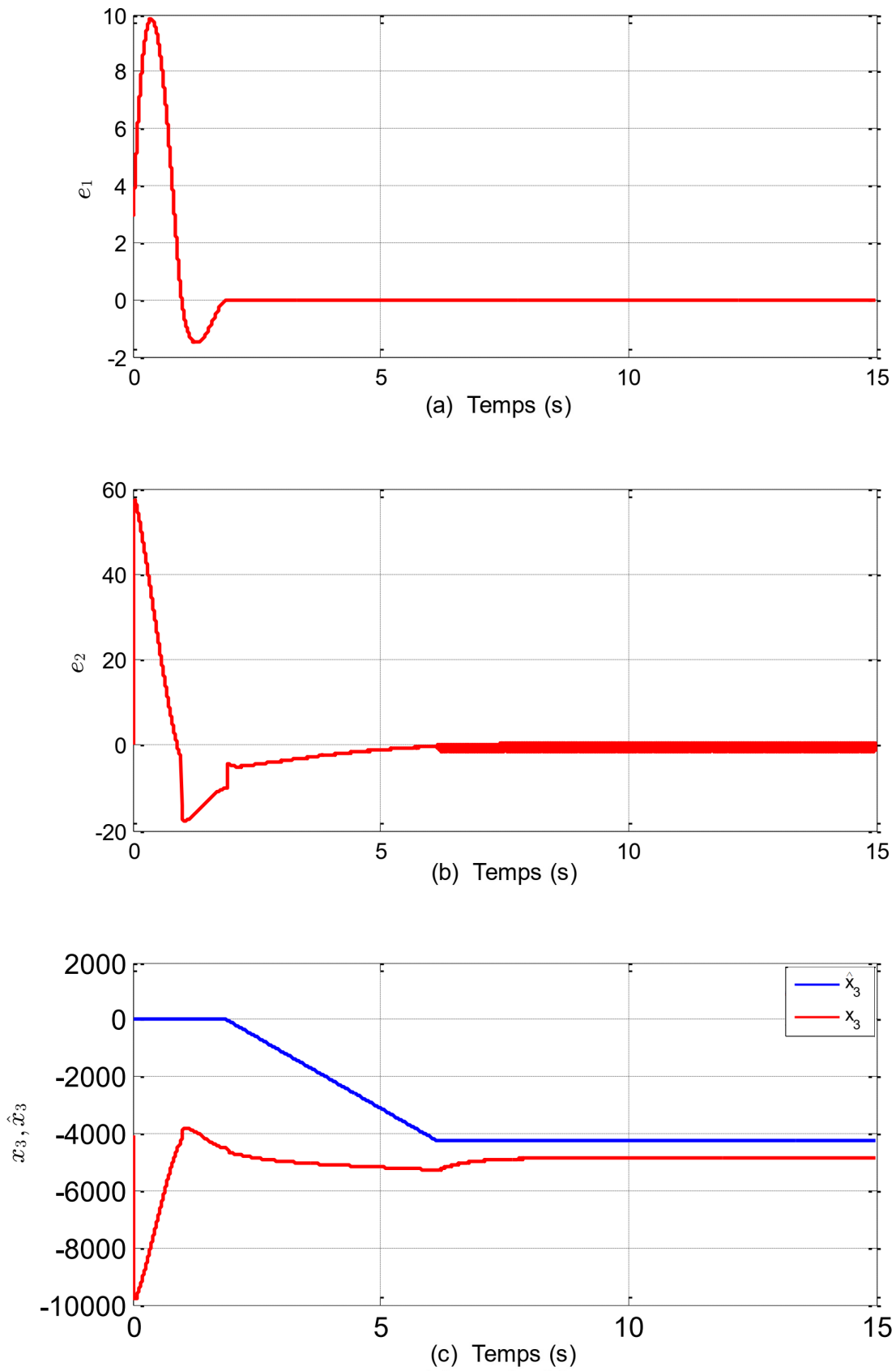


FIGURE 3.26 – (a), (b) Les erreurs d'estimation d'état, (c) : l'état étendu x_3 et son estimé pour $x_{1d} = 50$

Les entrées de commande pour $x_{1d} = 100$ et $x_{1d} = 50$, respectivement sont illustrées dans les figures (3.27) et (3.28). Donc on constate que le signal de commande ne contient pas le phénomène de chattering; c'est juste que le temps de réponse est un peu plus long en comparant au premier cas.

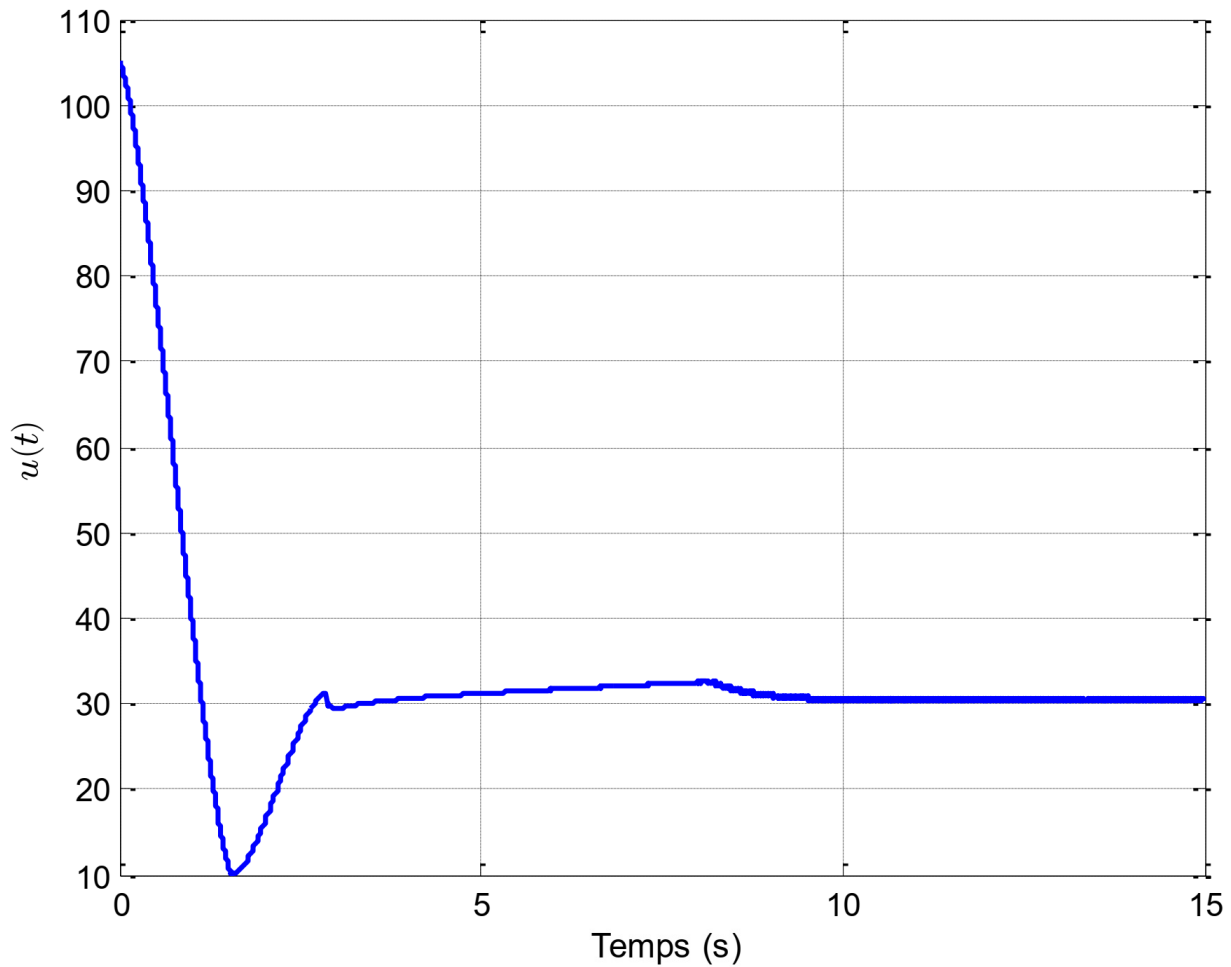


FIGURE 3.27 – La trajectoire de l'entrée de commande pour $x_{1d} = 100$

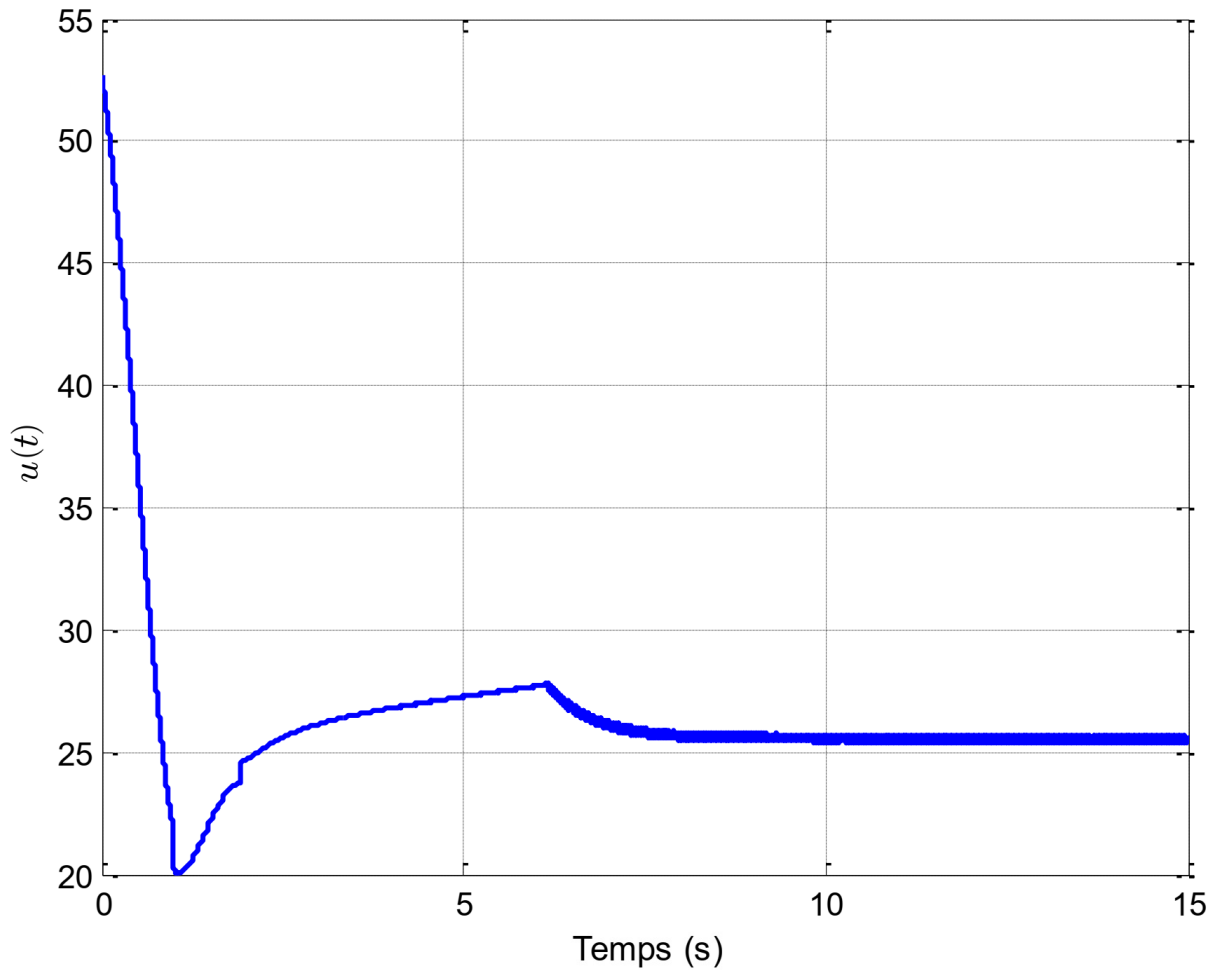


FIGURE 3.28 – La trajectoire de l'entrée de commande pour $x_{1d} = 50$

On conclut que la commande par rejet actif de perturbations proposée "ADRC" assure le bon suivi de trajectoires. En effet, les variables d'état suivent correctement toutes les références désirées.

En revanche, l'observateur à état étendu utilisé, fournit avec précision les estimés des états et de l'état entendu.

Un autre avantage de cette commande est qu'elle réduit le phénomène de chattering causé par l'utilisation de la fonction "sign" dans la commande par mode de glissement. L'association de la commande par mode glissant avec un observateur étape par étape à état étendu à mode glissant d'ordre 2 permet de diminuer la valeur du gain de la fonction "sign" qui cause le phénomène du chattering. Au final le chattering est réduit ou éliminé.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné quelques rappels fondamentaux du moteur à courant continu tels que sa définition, sa constitution, son principe de fonctionnement, la force contre électromotrice, ses différents types (d'ailleurs dans notre mémoire on a exploité le moteur à excitation séparée), la variation de vitesse, ses avantages, ses inconvénients, son bilan de puissance dont on a pris la notion du rendement, ses différents domaines d'utilisation ainsi sa modélisation et juste après cette dernière nous avons adopté l'observateur à mode glissant d'ordre 2 étape par étape à état étendu en introduisant les équations électromécaniques du notre moteur ; on a reconnu son état étendu ou ce que l'on appelle l'incertitude globale qui combine les erreurs de modélisation et les perturbations externes.

Ensuite on a associé cet observateur à état étendu avec la commande par mode glissant suite à sa robustesse et on s'est amené à la commande "ADRC" qui a pour but de rejeter les perturbations et compenser les incertitudes en démontrant théoriquement sa convergence et son bon suivi des références . Ensuite, on a validé nos résultats par des simulations sous Matlab en utilisant notre système qui est le moteur à courant continu à excitation séparée.

Les résultats de simulation ont assuré l'efficacité de la commande "ADRC". En effet, on a aperçu la convergence en temps fini de l'observateur étape par étape à état étendu à mode glissant d'ordre 2, on a aussi remarqué que les trajectoires du système suivent leurs références désirées ce qui traduit la notion du rejet actif des perturbations et la compensation des incertitudes ainsi on a aperçu l'élimination du phénomène du chattering.

Conclusion générale

L'objectif principal de notre mémoire est la synthèse d'une commande basée sur un observateur à état étendu afin de compenser les incertitudes internes du système et ses perturbations externes. Cette commande est dite "ADRC" (Active Disturbance Rejection Control : Commande par rejet actif des perturbations). La commande ADRC est appliquée à un moteur à courant continu à excitation séparée ; en utilisant un observateur étape par étape à état étendu à mode glissant d'ordre 2 et un contrôleur par mode de glissement. Pour ce faire ;

On s'est organisé de donner d'abord la synthèse de quelques observateurs les plus répandus dont les observateurs linéaires ainsi ceux non linéaires de telle manière à expliquer les différentes approches utilisées dans la littérature et on s'est basé sur les observateurs à modes glissants suite à leur robustesse et leur facilité d'implémentation ceux qui les rendent très demandés surtout ces dernières années et tout ce qui a été précédé, a été détaillé dans le premier chapitre.

Dans le deuxième chapitre, nous avons relaté minutieusement tous les détails de la commande par mode de glissement tels que sa théorie, le choix de la surface de glissement, conditions d'existence et de convergence, la détermination de la loi de commande puis on a expliqué la synthèse de la surface de glissement et on a vérifié sa robustesse vis-à-vis des incertitudes internes et des perturbations externes ainsi on a parlé du problème de chattering ; le plus souvent rencontré qui se considère comme l'inconvénient majeur de cette technique. Alors on a mis en évidence les différentes solutions pour le résoudre telles que la solution de la couche limite, la solution par mode glissant d'ordre supérieur et la commande par mode glissant d'ordre 2 en utilisant les algorithmes de twisting ou super twisting dans le but d'éliminer ce phénomène et dans les mauvais cas de le réduire.

Le troisième chapitre a été consacré pour l'étude du moteur à courant continu qui a été notre système ; concernant le choix du moteur, on a choisi un moteur à courant continu à excitation séparée, car il est le plus utilisé dans l'automatique et la robotique, pour ses dimensions et sa non-influence de la charge sur sa vitesse (vitesse est relativement constante quelque soit la charge), ainsi sa simplicité de polarisation. Alors, après avoir fait sa description et sa modélisation, on a utilisé un observateur étape par étape à état étendu à mode glissant d'ordre 2 en précisant bien tous les états du moteur d'où l'état étendu qui est tout simplement une combinaison des incertitudes internes et des perturbations extérieures ou bien ce que l'on a appelé dans notre mémoire "la perturbation globale". Puis, on a donné la structure de la commande ADRC utilisant la commande par mode glissant, où les estimés des états et de la perturbation globale seront injectés afin de la rejeter. Ce qui implique une convergence idéale de tous les états en prenant en considération l'état étendu et le bon suivi de trajectoires désirées.

Lors de la simulation, on a changé beaucoup de paramètres pour bien vérifier l'utilité de cette technique "ADRC" qui est très utilisée généralement dans la commande des systèmes

non linéaires qui contiennent des incertitudes paramétriques et des perturbations externes (systèmes incertains) ; les résultats ont été très satisfaisants, autrement dit, une estimation idéale de tous les états y compris l'état étendu, un bon suivi de trajectoires sans oublier l'élimination du phénomène du chattering du au terme discontinu.

Les perspectives que nous pouvons lancer au terme de ce travail sont :

- Application des observateurs à mode glissant d'ordre 2 étape par étape à état étendu à un moteur réel.
- Application aux systèmes chaotiques.
- Application des autres types de commande et faire une étude comparative.

Bibliographie

- [1] A. Duboisset, "Les moteurs électriques en pratique : Modélisation, commande et maintenance", Paris : Dunod, 2012.
- [2] M. C. S. Alaoui, "Commande et observateur par modes glissants d'un système de pompage et d'un bras manipulateur", thèse de doctorat, Université Sidi Mohammed Ben Abdellah, Maroc, 2009.
- [3] S. Benmoussa, "Introduction à la conception d'un système de diagnostic : méthodes à base de modèle", Université Badji Mokhtar Annaba, octobre 2016.
- [4] G. Grellet, G. Clerc, "Actionneurs électriques", Editions eyrolles, 1997.
- [5] J. O'Reilly, "Observers for linear systems", Richard Bellman, Mathematics in science and engineering (New York), 1983.
- [6] A. Hamoudi, "Contribution à la conception d'observateurs non linéaires pour la synchronisation des systèmes chaotiques sous contraintes de communication", thèse de doctorat, Département Automatique, FGEI, UMMTO, 2022.
- [7] N. Djeghali, "Observation, diagnostic et commande de la machine asynchrone", thèse de doctorat, Département Automatique, FGEI, UMMTO, 2013.
- [8] B. Nait Slimani, "Synthèse d'observateurs : Application au diagnostic de défauts", mémoire de magister, Université de Tizi ouzou, 2013.
- [9] E. Montassar, "Observation et commande des systèmes linéaires dans les domaines temporel et fréquentiel", thèse de doctorat, Université Henri Poincaré - Nancy I ; Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir, 2011.
- [10] A. J. Fossad, D. Normand-Cyrot, "Non linear systems" Masson, Paris, 1993.
- [11] H. Bouchareb, "Observateur non linéaire à mode glissant", Département d'Electronique, Faculté de Technologie, UFAS , 2013.
- [12] G. Welch, G. Bishop, "An introduction to the Kalman filter", Technical Report, University of North Carolina at Chapel Hill 2006.
- [13] D. Luenberger, "An introduction to observers", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 16, N° 6, pp. 596-602, 1971.
- [14] A. Gonzalez, A. Torralba, E. Galvan, and L. G. Franquelo, Speed Control of Induction Motors Using a Novel Fuzzy Sliding-Mode Structure, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 10, no. 3, 2002.
- [15] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering", Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering, Vol. 82. Pp. 35-45, 1960.
- [16] H. Talhaoui, "Contrôle par mode glissant : Observation et estimation paramétrique d'une machine à induction avec défauts", thèse de doctorat, Université Mohamed Khider – Biskra, 2016.

- [17] M. Guisser, "Commande et Observateurs d'état des systèmes non linéaires", Université Hassan 1er Faculté des Sciences et Techniques – Settât, FST de Settât, 2018.
- [18] H. Buhler, "Réglage par mode de glissement", Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, Suisse, 1986.
- [19] T. Zaharieva, "Les algorithmes de commande à structure variable appliqués à un moteur synchrone auto piloté pour le contrôle en vitesse et en position", thèse de doctorat, Université de L'INSA de Toulouse, 1998.
- [20] V. Bregeault, "Quelques contributions à la théorie de la commande par modes glissants", thèse de doctorat, Ecole centrale de Nantes, 2010.
- [21] P. Borne, G. D. Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella, I. Zambettakis, "Modélisation et identification des processus tome 1", Editions Technip, 1992.
- [22] H. Benderradji, "Contribution à la commande robuste de la machine à induction", thèse de doctorat, Université de Batna, 2013.
- [23] H. Buhler, "Réglage par mode de glissement", traité d'électricité, 1ère édition, presses, 1991.
- [24] A. Levant, "Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control", International Journal of Control, Vol. 58, N° 6, 1993.
- [25] M. Ghanes, "Observation et commande de la machine asynchrone sans capteur mécanique", thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2005.
- [26] J. Han, "Auto-disturbances-rejection controller and its applications", control and decision, pages : 19-23, 1998.
- [27] A. Si Ammour, "Contribution à la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire", Département Automatique, FGEI, UMMTO, 2011.
- [28] J. J. Slotine, W. Li, "Applied Nonlinear Control, Prentice Hall", 1991.
- [29] C. E. Bekkouche, "Etude et simulation d'un variateur de vitesse et commande d'un moteur à courant continu", Mémoire de Master, Université Kasdi Merbah Ouargla, 2016.
- [30] R. Mérat, R. Moreau, "Physique Appliquée terminale électrotechnique", collection-édition Nathan technique 1994.
- [31] H. Ney, "Electrosystème première STI", édition Nathan technique, 1996.
- [32] P. Borne, "Modélisation et identification des processus", Tome 2, Technip, Paris, 1992.
- [33] F. Benchabane, "Commande en position et en vitesse par mode de glissement d'un moteur synchrone triphasé à aimants permanents avec minimisation du chattering", mémoire de magistère en Electrotechnique, Université Mohammed Khider De Biskra, Algérie, 2005.