

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou



Faculté de Génie Électrique et Informatique
Département d'Automatique

MEMOIRE DE MAGISTER

EN AUTOMATIQUE

Présenté par :

M.Omar TOUAMI

Ingénieur UMMTO

Thème

**Commande Impulsive des Systèmes Dynamiques :
Application au Réacteur Biologique**

Mémoire soutenu le 11 novembre 2015 devant le jury d'examen composé de :

Saïd DJENNOUNE	Professeur	UMMTO	Président
Ahmed MAIDI	Maître de Conférences A	UMMTO	Rapporteur
Hamid HAMICHE	Maître de Conférences A	UMMTO	Examineur
Abdelmalek KOUADRI	Maître de Conférences A	UMBB	Examineur
Mohand Achour TOUAT	Maître de Conférences B	UMMTO	Examineur

Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur MAIDI Ahmed, maître de conférences classe A à l'UMMTO pour m'avoir proposé le thème de ce mémoire et m'avoir dirigé, aidé et conseillé tout le long de notre travail.

Un grand merci à Monsieur HAMICHE Hamid, maître de conférences classe A à l'UMMTO, d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à exprimer mes profonds remerciements à Monsieur DJENNOUNE Saïd, Professeur à l'U.M.M.T.O, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Je présente l'expression de ma reconnaissance et mes remerciements à : Monsieur KOUADRI Abdelmalek, maître de conférences A, à l'U.M.B.Boumerdès, et Monsieur TOUAT Mohand Achour, maître de conférences B, à l'U.M.M.T.O, d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je n'oublierai pas de remercier tous les membres du Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production, de l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Notations

t	Variable désignant le temps.
S	Substrat.
Q_{in}	Débit d'entrée.
Q_{out}	Débit de sortie.
$x_i(t)$	Quantité à l'instant t contenant dans le compartiment i .
$k_{ij}x_i(t)$	Quantité allant du compartiment i vers le compartiment j .
$u_i(t)$	Quantité entrante au niveau du compartiment i .
k_{ie}	Constante de proportionnalité à partir du compartiment i vers l'extérieur.
n	Nombre d'états.
α, β	Constantes réels positifs.
μ_i	Constante de Michaelis-Menten.
k_i	Constante de Michaelis-Menten.
X_1	Fermentation du glucose.
X_2	La respiration du glucose.
X_3	La respiration de l'éthanol.
C_2	Oxyde de carbone.
x	Vecteur d'état.
E	Concentration en éthanol (g/l).
S	Concentration en glucose (g/l).
A	Acétate (g/l).
V	Volume de liquide dans le réacteur (l).

R_1, R_2, R_3	Vitesses de production de biomasse.
$R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9$	Vitesses de transition d'un état à un autre.
φ, ψ	Coefficients adimensionnels.
F_{in}	Le débit d'alimentation en glucose.
S_{in}	Concentration initial en glucose.
x_0	Valeur initiale.
Φ	Application.
Φ^{-1}	Application inverse.
$f(x)$	Fonction vectorielle.
$h(x)$	Fonction vectorielle.
$g(x)$	Fonction vectorielle.
$p(x)$	Fonction vectorielle.
$L_f h$	La dérivée de Lie de la fonction h suivant la direction de f .
$L_f^i h$	La i^{me} dérivée de Lie de la fonction h suivant la direction de f .
$[f, g]$	Le crochet de Lie de f et g .
∇	Le gradient.
F	Ensemble de champs de vecteurs.
u	Vecteur d'entrée.
y	Vecteur de sortie.
r	Degré relatif.
k	Entier.
$\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	La dérivée de Φ par rapport à x .
$z(t)$	Variable géométrique.
Ω	Domaine géométrique.
det	Le déterminant.
v	Commande externe.
K	Le vecteur de gain.
$c_0, \dots, c_{n-1}$	Des coefficients réels.
s	Variable de Laplace.

ξ, η	Les coordonnées normales.
PI	Régulateur à action proportionnelle intégrale.
K_c	Gain du régulateur PI.
τ_i	Constante de temps intégral du régulateur.
$y_d(t)$	Consigne désirée.
$e(t)$	L'erreur.
ω_0	Constante.
t_r	Temps de réponse.
$G_{bf}(s)$	Fonction de transfert en boucle fermée.
P	Matrice des pôles désirés.
$C(s)$	Fonction de transfert d'un correcteur linéaire.
$G(s)$	Fonction de transfert d'un système à commander.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail,
à ma femme Amina et mon fils Anes,
à mes très chers parents,
à mes frères Nabil et Hakim,
à mes sœurs Lynda et Fadhila,
à tous mes amis.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Modélisation par analyse compartimentale des systèmes biologique	7
1.1 Introduction	7
1.2 Présentation générale du bioprocédé	8
1.2.1 Bioréacteur	8
1.2.2 Modes opératoires d'un bioréacteur	9
1.3 Bilan de matière	10
1.4 Modélisation par l'analyse compartimentale	10
1.4.1 Généralités et définitions	11
1.4.2 Cas des systèmes compartimentaux linéaires	13
1.4.3 Cas des systèmes compartimentaux non linéaires	14
1.5 Modélisation du réacteur biologique	16
1.5.1 Principe de fonctionnement	16
1.5.2 Modèle dynamique du réacteur biologique	18
1.6 Conclusion	20
2 Linéarisation des systèmes dynamiques par retour d'état	23
2.1 Introduction	23
2.2 Géométrie différentielle	23
2.2.1 Difféomorphisme	24
2.2.2 Champ de vecteurs	24
2.2.3 Dérivée de Lie	24

2.2.4	Crochet de Lie	25
2.2.5	Théorème de Frobenius	25
2.3	Linéarisation des systèmes monovariabiles	26
2.3.1	Notion de degré relatif	26
2.3.2	Changement de coordonnées	28
2.3.3	Exemple d'application	31
2.4	Linéarisation entrée-état	32
2.4.1	Conditions pour une linéarisation entrée-état	35
2.4.2	Étapes à suivre pour une linéarisation entrée-état	36
2.4.3	Exemple d'application	36
2.5	Linéarisation entrée-sortie	39
2.5.1	Dynamique des zéros	40
2.5.2	Stabilité asymptotique et poursuite d'une trajectoire désirée	41
2.6	Synthèse d'un régulateur PI par bouclage	43
2.6.1	Définition de la grandeur externe v	43
2.6.2	Critères de performances de la précision dynamique	44
2.7	Exemple illustratif	46
2.8	Conclusion	51
3	Systèmes de commande à remise à zéro	55
3.1	Introduction	55
3.2	Systèmes de commande à remise à zéro	56
3.2.1	Remise à zéro d'un élément du premier ordre (FORE)	56
3.2.2	Intégrateur de Clegg	58
3.3	Description générale d'un système de commande à remise à zéro	59
3.4	Stabilité des systèmes à remise à zéro	62
3.4.1	Stabilité interne (Théorème de Lyapunov)	62
3.4.2	Stabilité au sens de Lyapunov (méthode directe)	63
3.5	Stabilité quadratique (Condition H_β)	64
3.5.1	Condition H_β	64

3.5.2	Exemple illustratif	65
3.6	Synthèse d'un correcteur PI avec remise à zéro	66
3.6.1	Synthèse dans le cas d'un système du premier ordre	67
3.6.2	Exemple d'application	69
3.7	Conclusion	71
4	Application sur un réacteur biologique	75
4.1	Introduction	75
4.2	Modèle dynamique d'un réacteur biologique	75
4.3	Synthèse de la loi de commande non linéaire	77
4.3.1	Calcul de degré relatif du système	77
4.3.2	Détermination de la loi de commande	78
4.4	Simulation et interprétation des résultats	80
4.4.1	Conditions de simulation	80
4.4.2	Interprétation des résultats	81
4.5	Test de poursuite et de perturbation	83
4.5.1	Test de poursuite de trajectoire	83
4.5.2	Test de perturbation	84
4.6	Amélioration des performances d'une commande géométrique	85
4.6.1	Synthèse d'un correcteur PI avec remise à zéro	85
4.6.2	Interprétation des résultats	87
4.7	Conclusion	88
	Conclusion générale	89
	Bibliographie	91

Table des figures

1.1	Principe de fonctionnement d'un bioréacteur.	9
1.2	Différents modes de fonctionnement d'un bioréacteur.	10
1.3	Différents échanges entre deux compartiments i et j	11
1.4	Système compartimental ouvert.	12
1.5	Système compartimental fermé non-autonome.	13
1.6	Système ouvert autonome.	14
1.7	Exemple avec des échanges de type Michaelis-Menten.	15
1.8	Fermenteur semi-continu.	17
1.9	Schéma réactionnel.	18
2.1	Description du système dans les nouvelles coordonnées.	30
2.2	Bouclage linéarisant.	33
2.3	Système linéarisé exactement par retour d'état statique.	33
2.4	Commande non linéaire avec placement de pôles pour $r = n$	35
2.5	Commande non linéaire avec placement de pôles pour $r < n$	42
2.6	Schéma bloc de la commande et du procédé	43
2.7	Correcteur PI sous forme d'état.	44
2.8	Poursuite de trajectoire de la référence y_d par la sortie x_1	49
2.9	Erreur de poursuite.	49
2.10	Signal de commande.	50
2.11	Etats x_1 et x_2	50
3.1	Schéma fonctionnel d'un correcteur avec remise à zéro.	56

3.2	Schéma fonctionnel d'un élément du premier ordre avec remise à zéro. . . .	57
3.3	Réponse indicielle y du système avec et sans remise à zéro	58
3.4	Commande avec et sans remise à zéro.	58
3.5	Intégrateur de Clegg.	59
3.6	Réponse d'un intégrateur linéaire et intégrateur de Clegg à une entrée sinusoïdale.	59
3.7	Schéma fonctionnel d'un système de commande de réinitialisation.	60
3.8	Structure d'un correcteur PI avec remise à zéro.	67
3.9	Correcteur PI avec remise à zéro appliqué à un système linéaire.	69
3.10	Réponse du système avec le correcteur PI classique et PI avec remise à zéro.	70
3.11	Signal de commande avec le correcteur PI classique et PI avec remise à zéro .	70
4.1	Commande linéarisante du réacteur biologique avec placement de pôles. . .	79
4.2	Concentration en glucose.	81
4.3	Concentration en éthanol.	82
4.4	Débit de glucose (variable de commande).	82
4.5	Volume du réacteur biologique.	83
4.6	Concentration en glucose.	83
4.7	Poursuite de consigne : concentration en glucose.	84
4.8	Concentration en glucose.	85
4.9	Réponse du système avec le correcteur PI classique et PI avec remise à zéro.	86
4.10	Commande.	87

Liste des tableaux

2.1	Dénominateurs des fonctions de transfert optimales pour le critère ITAE. . .	46
4.1	Indice de performance ITAE.	87

Introduction générale

La plupart des systèmes physiques sont caractérisés par un comportement dynamique fortement non linéaire [1]. Pour un système non-linéaire, le principe de superposition n'est pas vérifié. Les non linéarités posent souvent des problèmes pour l'analyse et la conception d'un système de commande assurant les performances imposées par le cahier de charges [2, 3, 4]. En effet, pour les systèmes non linéaires, il est très difficile de développer une théorie générale pour l'analyse de leurs propriétés fondamentales (commandabilité, observabilité et la stabilité) et leur étude et commande se font, généralement, par classes ou par cas. Une revue sur la théorie de commande de systèmes non linéaires est donnée dans [2].

Comparativement aux systèmes non linéaires, la théorie de commande des systèmes linéaires est très développée [5]. Pour cette classe de système, une théorie générale existe avec arsenal de méthodes d'analyse et de synthèse très puissantes. Le développement de la théorie des systèmes linéaires a incité la communauté automatique à chercher des voies possibles pour tirer profit de cette théorie et d'exploiter les différentes techniques dans le cas des systèmes non linéaires. Comparativement aux systèmes non linéaires, la théorie de commande des systèmes linéaires est très développée [5]. Pour cette classe de système, une théorie générale existe avec arsenal de méthodes d'analyse et de synthèse très puissantes. Le développement de la théorie des systèmes linéaires a incité la communauté automatique à chercher des voies possibles pour tirer profit de cette théorie et d'exploiter les différentes techniques dans le cas des systèmes non linéaires. Dans cette optique, deux approches sont possibles : la linéarisation locale [5] et la linéarisation exacte

La linéarisation locale [5] consiste à considérer un point de fonctionnement et de pro-

céder à la linéarisation du système non linéaire autour de ce point. L'objectif est d'avoir un modèle linéaire valable pour de petites variations autour du point de fonctionnement considéré [5]. Dans ce cas, les différentes techniques de la théorie des systèmes linéaires peuvent être appliquées à condition de fonctionner dans la plage de linéarité considérée.

La linéarisation exacte consiste à rechercher une transformation de coordonnées (un retour d'état ou de sortie) permettant de linéariser complètement le système sans restreindre à un point de fonctionnement particulier [1, 3, 4]. Dans ce cas, la théorie du système linéaire peut rendre de gros services pour améliorer les performances et la robustesse en boucle fermée [6].

De point de vue pratique, la linéarisation exacte est très intéressante comparative-ment à la linéarisation locale puisque l'hypothèse de petites variations n'est plus une contrainte. De plus, certains systèmes sont caractérisés par un déplacement de point de fonctionnement. Une synthèse intéressante sur la linéarisation exacte est donnée dans [4].

La linéarisation exacte permet de tirer profit de la théorie de commande des systèmes linéaires en définissant la grandeur externe par un correcteur robuste. Ainsi, les performances d'une linéarisation exacte peuvent être améliorées amplement en définissant la grandeur externe par un correcteur linéaire [6]. Ceci permet d'assurer la robustesse en boucle fermée.

Ces dernières années, des études réalisées sur la commande linéaire ont démontré que l'intégration d'un effet non linéaire dans une commande linéaire peut améliorer davantage les performances et surmonter certaines difficultés [7], par exemple la saturation de l'action intégrale, la présence de zéros instables (système à non minimums de phase) et des retards importants. Parmi les solutions proposées, on retrouve la commande à remise à zéro classée comme système impulsif [8, 9]. Dans un système impulsif, des variations pour l'état peuvent se manifester à des instants réguliers ou non [8, 9]. Cette variation engendre un effet non linéaire. Cette propriété a été exploitée pour concevoir un correcteur appelé avec remise à zéro [10, 11].

L'objectif de ce mémoire consiste à utiliser un correcteur avec remise à zéro pour définir la grandeur externe dans une stratégie de commande d'un système non linéaire par

linéarisation exacte. Comme exemple d'application, on considère un réacteur biologique utilisé pour la production de la levure de boulangerie dont le modèle est affine par rapport à la commande. Ce système est fortement non linéaire dont la commande est très difficile [5].

Le reste du mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré à la modélisation du réacteur biologique en utilisant l'analyse par compartiments. Ainsi, après avoir présenté certaines notions relatives aux bioprocédés, nous présentons brièvement l'approche de modélisation par analyse compartimentale. Cette approche est appliquée ensuite pour la modélisation du réacteur de production de levure de boulangerie.

Le deuxième chapitre aborde la linéarisation exacte d'une classe de systèmes non linéaires appelée systèmes affines par rapport à la commande. Le chapitre commence par la présentation de certains outils mathématiques, de la géométrie différentielle, utilisée dans la linéarisation exacte. La suite du chapitre expose, de manière détaillée, la procédure de linéarisation d'un système non linéaire et l'amélioration de ces performances en boucle fermée. La fin du chapitre présente un exemple illustratif avec des résultats de simulations.

Le troisième chapitre aborde un exemple d'un système impulsif. Il s'agit d'un correcteur linéaire avec remise à zéro. La première partie présente ce type de correcteur tout en démontrant par simulation son apport comparativement à un correcteur linéaire standard. La deuxième partie est consacrée à l'étude de la stabilité d'un système de commande avec remise à zéro. La fin du chapitre est consacrée à la conception d'un correcteur proportionnel-intégral (PI) avec remise à zéro.

Le dernier chapitre aborde la commande du réacteur biologique, modélisé au premier chapitre, par linéarisation exacte dont la grandeur externe est définie par un correcteur proportionnel intégral avec remise à zéro. Les performances en boucle fermée sont évaluées par simulation et les résultats sont comparés à ceux obtenus avec un correcteur PI standard.

Le mémoire se termine par une conclusion générale et de perspectives de continuité.

Chapitre I

Modélisation par analyse compartimentale d'un système biologique

Chapitre 1

Modélisation par analyse compartimentale des systèmes biologique

1.1 Introduction

Les équations décrivant l'évolution d'un système dynamique sont obtenues en appliquant les lois de la physique lorsque les paramètres du système sont relativement bien connus. Alternativement, en particulier lorsque l'on ne sait pas mettre le système en équation, on a recours à l'étude de la réponse du système à diverses excitations pour en construire un modèle par identification.

La méthode de modélisation par analyse compartimentale est très utilisée en biologie et en médecine. Plusieurs étapes sont nécessaires pour élaborer un modèle compartimentale. La première étape consiste à définir la substance à étudier et ses transformés dans les différents compartiments qui sont en fait des classes d'équivalence [12]. La seconde étape est de déterminer par l'observation les constantes de proportionnalité d'échange entre les compartiments, puis faire le bilan de masse (débit entrant – débit sortant) à l'aide d'un système différentiel linéaire. La dernière étape est de faire les approximations nécessaires pour simplifier la résolution numérique.

Les biologistes utilisent largement cette méthode pour l'analyse quantitative des flux métaboliques, de la diffusion des marqueurs et des médicaments en pharmacocinétique.

Dans ce présent chapitre, on présente d'une manière générale les principales fonctionnements des bioprocédés et on s'intéresse particulièrement à la modélisation d'une production de levure de boulangerie en utilisant l'analyse compartimentale.

1.2 Présentation générale du bioprocédé

Le principe de fonctionnement des bioprocédés peut être décrit comme suit : une population de micro-organismes (la biomasse formée de bactéries, levures, champignons, etc.) se développe en consommant certains nutriments (le substrat contenant principalement du carbone et de l'azote) sous des conditions environnementales favorables.

Ces procédés ont pour objectif la production de la biomasse ou de produits aussi divers que les protéines, les antibiotiques, l'alcool, les pesticides, etc. Ils peuvent également être utilisés à des fins de dépollution biologique, c'est-à-dire la dégradation de substances polluantes par la biomasse.

Les réactions biologiques font intervenir trois entités essentielles qu'il est important de distinguer :

- **Les biomasses** qui regroupent des micro-organismes qui ont la même fonction ou qui participent aux chaînes de dégradation.
- **Les substrats** qui sont les composants nutritifs qui sont dégradés par les micro-organismes.
- **Les produits** sont les composants résultants de la dégradation des substrats par les micro-organismes. A noter que lorsque plusieurs réactions s'enchaînent, le produit d'une réaction peut être considéré comme le substrat d'une autre [13].

1.2.1 Bioréacteur

Un bioréacteur, autrement appelé comme fermenteur, est un appareil dans lequel on multiplie des micro-organismes : levures, bactéries, etc. D'une manière générale, le bio-

réacteur est constitué d'une alimentation en substrat S à un débit Q_{in} , d'une extraction du milieu déjà traité à un débit Q_{out} et d'une sortie du gaz produit (Figure 1.1).

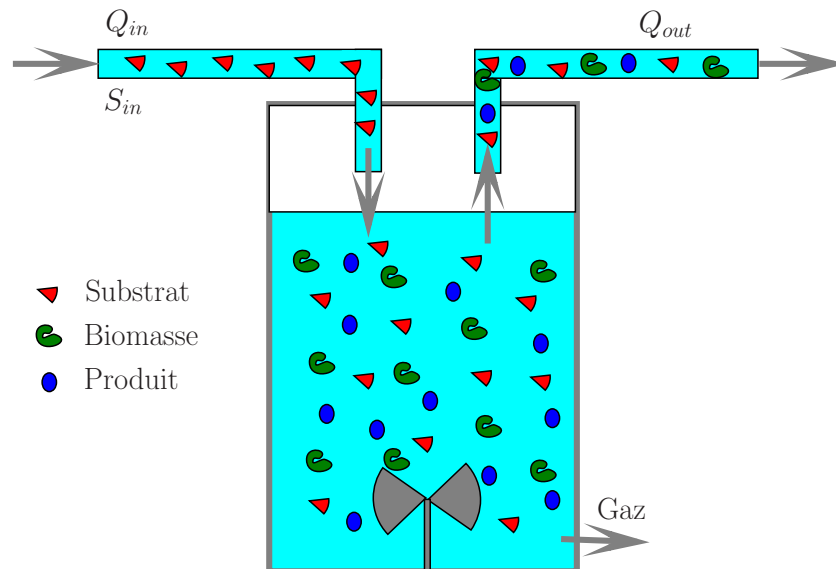


FIGURE 1.1: Principe de fonctionnement d'un bioréacteur.

1.2.2 Modes opératoires d'un bioréacteur

En génie des procédés, la coutûme est de caractériser les procédés selon la manière dont ils sont alimentés. La Figure 1.2 montre les différents modes opératoires d'un bioréacteur [14].

-Mode discontinu ou Batch : le système est fermé, les bactéries et le substrat sont à l'intérieur du bioréacteur. La fermentation se déroule ensuite sans addition supplémentaire de milieu ($Q_{in} = Q_{out} = 0$) et le volume reste constant.

-Mode semi-continu ou Fed- Batch : la durée de tel mode est finie, mais dans ce cas le fermenteur est alimenté progressivement en substrat jusqu'à son volume maximal mais sans extraction du milieu ($Q_{in} \neq 0, Q_{out} = 0$). La biomasse ou l'un des produits sont récupérés à l'instant où la réaction terminée.

-Mode continu : à l'intérieur du réacteur, ce mode est caractérisé par un volume constant, puisque l'alimentation et l'extraction du milieu sont effectuées avec le même débit ($Q_{in} = Q_{out} \neq 0$).

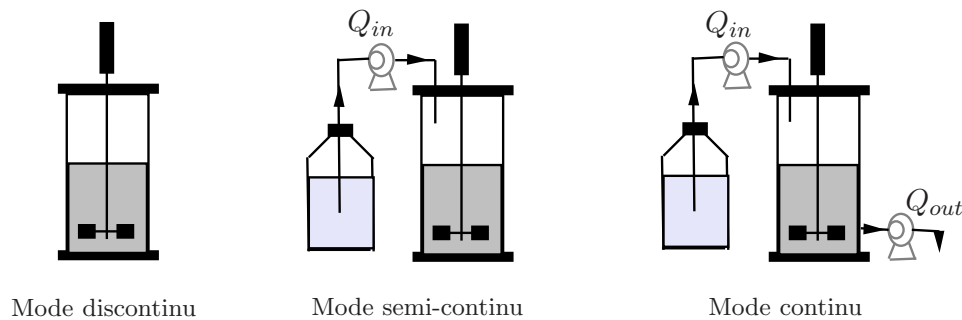


FIGURE 1.2: Différents modes de fonctionnement d'un bioréacteur.

1.3 Bilan de matière

Les modèles, formés d'un ensemble d'équations différentielles non linéaires, sont obtenus à partir des équations dynamiques de bilan de matière établi pour les variables (biomasse, substrat, produit etc.) dans un bioréacteur. L'équation générale d'évolution de chacun de ces éléments sur un intervalle de temps déterminé est régie par la relation suivante [15] :

$$\text{Variation de la quantité dans le bioréacteur} = (\text{quantité formée} + \text{quantité apportée}) - (\text{quantité dégradée} + \text{quantité soutirée})$$

1.4 Modélisation par l'analyse compartimentale

L'analyse compartimentale des systèmes biologiques est une technique de modélisation, elle conduit à des équations différentielles. On s'en sert pour suivre l'évolution, dans n'importe quel système au cours de temps, l'évolution de substances biochimiques et des concentrations.

Tout système biologique ou autre où seul le temps intervient peut-être modélisé par l'analyse compartimentale. Il suffit de poser convenablement les hypothèses d'échanges [16].

Pour obtenir les équations différentielles d'un modèle compartimental, il est nécessaire :

- de définir le nombre des compartiments,
- de quantifier les échanges entre les différents compartiments.

1.4.1 Généralités et définitions

Définitions 1-1 [16] : Les compartiments d'un système biologique sont des classes d'équivalence définies par des propriétés physiques. $\square$

Un compartiment est symbolisé, en général, par un disque, et une flèche entrante ou sortante de ce compartiment qui signifie qu'il y a échange dans le sens de la flèche.

Soient $x_i(t)$ et $k_{ij}x_i(t)$ respectivement la quantité à l'instant t , contenue dans le compartiment i , et la quantité allant du compartiment i vers le compartiment j par unité de temps.

La Figure 1.3 montre les différents échanges possible entre deux compartiments i et j . La constante positive k_{ij} s'appelle la constante de proportionnalité (constante de vitesse) ayant deux indices i et j .

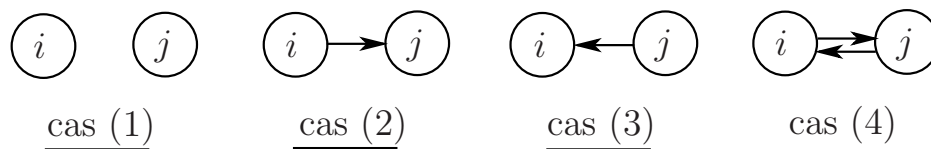


FIGURE 1.3: Différents échanges entre deux compartiments i et j .

- Le premier cas indique l'absence totale d'échange entre les deux compartiments i et j .
- Le second cas montre qu'il y a échange depuis le compartiment i vers le compartiment j .
- Le troisième cas montre qu'il y a échange depuis le compartiment j vers le compartiment i .
- Le quatrième cas montre qu'il y a échange dans les deux sens entre les deux compartiments i et j .

Pour d'écrire les principes de l'analyse compartimentale, il faut d'abord imposer les hypothèses sur la nature des échanges. On distingue deux types de systèmes :

-Système autonome : c'est-à-dire les échanges sont indépendants du temps.

-Système non-autonome : c'est-à-dire les échanges dépendent du temps.

Remarque 1-1 : Si le système a une liaison avec le milieu extérieur, le système dans ce cas est appelé système ouvert. S'il n'y a pas de liaison avec le milieu extérieur système est fermé. Notons bien qu'il existe d'autres types de liaisons lorsque le système est ouvert (Figure 1.4)

- une entrée au niveau de compartiment i sous la forme d'une fonction $u_i(t)$.
- une sortie vers l'extérieur du système à partir de compartiment i matérialisée par une flèche k_{ie} .

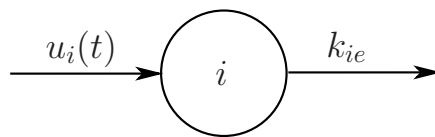


FIGURE 1.4: Système compartimental ouvert.

Exemple 1-1 : Prenant l'exemple d'un système fermé non-autonome (le cycle de l'eau sur la terre) qui contient trois compartiments possibles : l'eau liquide, l'eau solide (glace) et l'eau sous forme de gaz (vapeur), le schéma réactionnel de ce système est donné par la Figure 1.5 :

Sous l'influence des paramètres climatiques (par exemple la température), des échanges peuvent avoir lieu entre ces compartiments. Ces échanges sont temporels et varient selon les saisons. Par exemple, si la température passe en dessous de zéro, on obtient la transformation de l'eau de l'état liquide à l'état solide (glace). Ces échanges peuvent être quantifiés pour permettre l'écriture des équations du système compartimental.

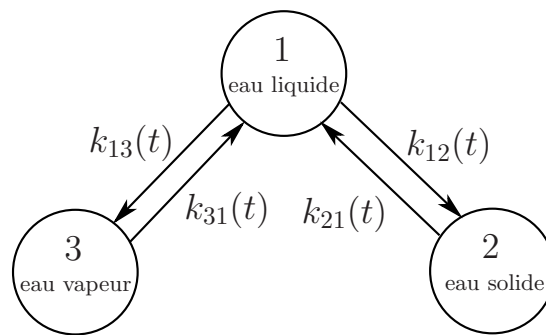


FIGURE 1.5: Système compartimental fermé non-autonome.

1.4.2 Cas des systèmes compartimentaux linéaires

Pour modéliser n'importe quel système compartimental, il suffit de faire un bilan de masse au niveau de chaque compartiment, et de quantifier les échanges entre compartiments. Dans le cas des systèmes linéaires, les échanges sont linéaires.

Définition 1-2 [16] : Soit un échange linéaire entre deux compartiment i et j . La quantité, par unité de temps, passant du compartiment i au compartiment j est proportionnelle à la quantité $x_i(t)$ contenant dans le compartiment de départ.

Définition 1-3 [16] : La variation instantanée de quantité au niveau du compartiment i , exprimée par la dérivée de la fonction $x_i(t)$, est égale à la somme des quantités entrantes dans i , par unité de temps, moins la somme des quantités sortant de i , par unité de temps. Mathématiquement, on l'exprime comme suit :

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1 \text{ et } j \neq i}^n k_{ji} x_j(t) - x_i(t) \sum_{j=1 \text{ et } j \neq i}^n k_{ij} \quad (1.1)$$

Exemple 1-2 : Considérons le système autonome non-homogène ouvert de la Figure 1.6 à trois compartiments $n = 3$, où chaque compartiment admettent une entrée et une sortie vers l'extérieur. Le système différentiel associé au système de la Figure 1.6 est donné comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= k_{21}x_2 + k_{31}x_3 + u_1(t) - (k_{12} + k_{13} + k_{1e})x_1 \\
\dot{x}_2 &= k_{12}x_1 + k_{32}x_3 + u_2(t) - (k_{21} + k_{23} + k_{2e})x_2 \\
\dot{x}_3 &= k_{13}x_1 + k_{23}x_2 + u_3(t) - (k_{31} + k_{32} + k_{3e})x_3
\end{aligned} \tag{1.2}$$

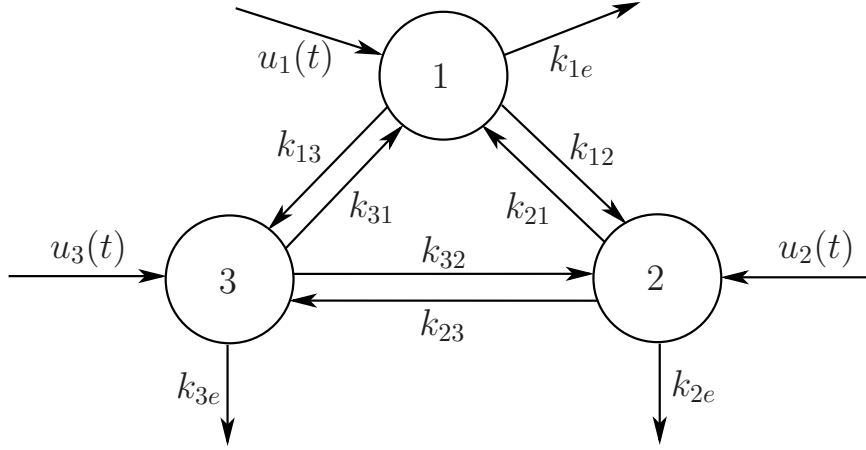


FIGURE 1.6: Système ouvert autonome.

1.4.3 Cas des systèmes compartimentaux non linéaires

Dans le cas où la proportionnalité des échanges n'est pas satisfaite, on doit considérer des non-linéarités.

Définition 1-4 [16][17] : Soit un échange non linéaire entre deux compartiments i et j . La quantité de matière, par unité de temps, passant du compartiment i au compartiment j est égale à $k_{ij}x_i^\alpha x_j^\beta$ où α et β sont des nombres réels positifs. $\square$

La variation de la quantité $x_i(t)$ dans le compartiment i pour un système fermée est donnée par :

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1 \text{ et } j \neq i}^n k_{ji}x_j^\alpha x_i^\beta - \sum_{j=1 \text{ et } j \neq i}^n k_{ij}x_i^\alpha x_j^\beta \tag{1.3}$$

Dans la réalité, on retrouve toujours les mêmes types de non linéarité qui sont de type Michaelis-Menten. L'échange de ce type entre deux compartiment i et j se traduit par une quantité passant du compartiment i au compartiment j égale à :

$$\frac{\mu_i x_i}{k_i + x_i} \quad (1.4)$$

où μ_i et k_i sont les constantes de Michaelis-Menten.

Exemple 1-3 : En appliquant le principe de conservation de la matière au système de la Figure 1.7, on obtient les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\mu_j x_j}{k_j + x_j} + u_i(t) - \left(\frac{\mu_i}{k_i + x_i} + k_{ie} \right) x_i \\ \dot{x}_j &= \frac{\mu_i x_i}{k_i + x_i} + u_j(t) - \left(\frac{\mu_j}{k_j + x_j} + k_{je} \right) x_j \end{aligned} \quad (1.5)$$

on constate que des non-linéarités de type homographique apparaissent dans le modèle.

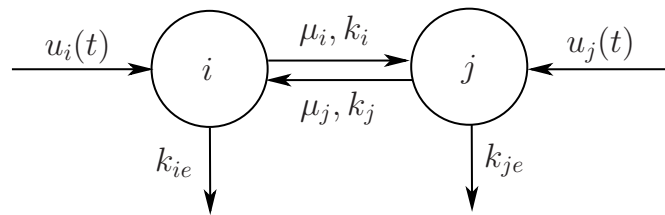


FIGURE 1.7: Exemple avec des échanges de type Michaelis-Menten.

1.5 Modélisation du réacteur biologique

Une réaction biologique est un ensemble de m réactions dans lesquelles interagissent n composants. L'ensemble de ces réactions est appelé le « réseau de réactions » ou le « réseau réactionnel ». Les composants sont essentiellement de trois types :

- Les différentes espèces de micro-organismes présentes,
- Les substrats pouvant être sous une forme liquide, solide ou gazeuse,
- Les produits pouvant être considérés comme des substrats si le réseau réactionnel fait apparaître des réactions en série. Le produit d'une réaction étant alors le substrat d'une autre [14].

1.5.1 Principe de fonctionnement

Une fermentation réelle se produit en fait en deux étapes [5]. La première étape est menée en mode discontinu, en boucle ouverte, et la levure consomme d'abord le glucose initialement présent, puis l'éthanol qu'elle a produit. Lorsque la concentration en glucose devient presque nulle, une alimentation en glucose est réalisée et la fermentation se déroule alors en mode semi-continu, c'est-à-dire en boucle fermée (Figure 1.8).

Le réacteur biologique considéré contient trois populations de levure [18]. Ils considèrent que chaque état physiologique est représenté par un type de population cellulaire avec la possibilité de passage d'un état à un autre selon les conditions physico-chimiques environnantes [18].

-Premier état X_1 : fermentation du glucose avec production simultanée d'éthanol et d'acétate, le schéma réactionnel est alors donné par :



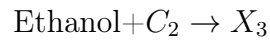
cette voie est active en cas de déficit d'oxygène ou en présence d'un excès de glucose.

- Deuxième état X_2 : respiration du glucose aux faibles teneurs de celui-ci (pas d'accumulation d'éthanol), le schéma réactionnel est alors donné par :



elle caractérise l'utilisation du glucose directement par le cycle de Krebs.

- Troisième état X_3 : consommation de l'éthanol (privilégiée par la présence de l'éthanol et absence de glucose), le schéma réactionnel de ce dernier est donné par :



La principale difficulté réside dans l'écriture des équations qui gouvernent la conversion entre les classes [19]. En réalité, les différentes classes ne sont pas distinctes et les cellules passent de façon continue d'une classe à l'autre.

Ce modèle permet de tenir compte de l'effet de Crabtree et surtout de prévoir un temps de latence entre le métabolisme qui consomme du glucose et le métabolisme qui consomme l'éthanol [21].

Le modèle proposé par Rajab et al comporte quelques lacunes. En effet, il ne fait pas intervenir l'oxygène dans ses différentes vitesses de réaction. Or la disponibilité en oxygène dissout est un paramètre clé dans l'explication des différentes vitesses de réactions. Certains auteurs ont montré cette limite du modèle et son incapacité à tenir compte des effets de l'aération pendant la fermentation [22]. Il ne tient pas en outre compte des différents effets d'inhibition.

Pour la conception d'une stratégie de commande, ce modèle est acceptable.

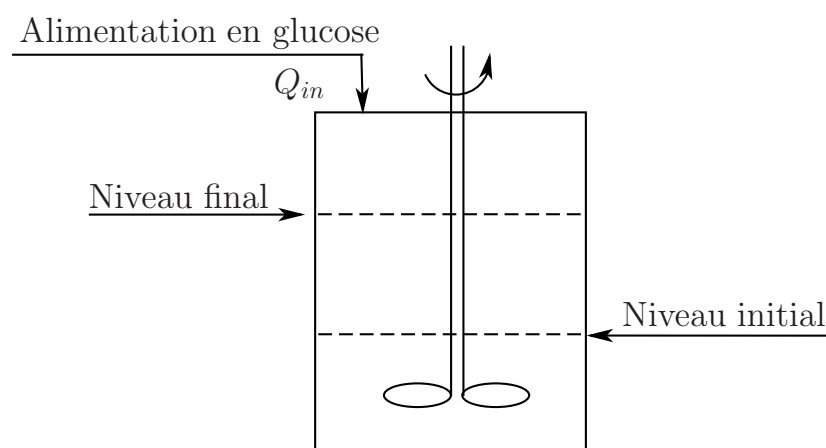


FIGURE 1.8: Fermenteur semi-continu.

1.5.2 Modèle dynamique du réacteur biologique

Le modèle décrit les trois phases de production de la biomasse (Figure 1.9) qui sont X_1 , X_2 et X_3 correspondent respectivement à la fermentation du glucose, à la respiration du glucose, et à la respiration de l'éthanol [5].

Les expressions cinétiques du modèle correspondent à une croissance aérobie en absence de limitation autre que celle du substrat. Le vecteur d'état x est de dimension 7. Il est formé des concentrations en éthanol E , en levures X_1, X_2 et X_3 , en glucose S et acétate A , et du volume V de liquide dans le réacteur.

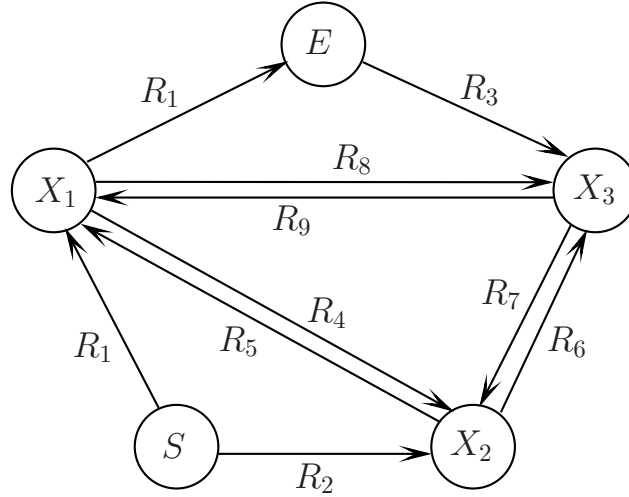


FIGURE 1.9: Schéma réactionnel.

En appliquant le principe de conservation de la masse au réacteur, on peut écrire le bilan suivant :

$$\begin{aligned}
 \dot{E} &= \frac{0,45}{0,14}R_1 - (1 - \psi)\frac{R_3}{0,55} - \frac{E}{V}Q_{in} \\
 \dot{X}_1 &= R_1 + R_5 + R_9 - R_4 - R_8 - \frac{X_1}{V}Q_{in} \\
 \dot{X}_2 &= R_2 + R_4 + R_7 - R_5 - R_6 - \frac{X_2}{V}Q_{in} \\
 \dot{X}_3 &= R_3 + R_8 + R_6 - R_9 - R_7 - \frac{X_3}{V}Q_{in} \\
 \dot{S} &= -\frac{R_1}{0,14} - \frac{R_2}{0,5} - \frac{S}{V}Q_{in} + \frac{S_{in}}{V}Q_{in} \\
 \dot{A} &= \frac{0,01}{0,14}R_1 - \psi\frac{R_3}{0,55} - \frac{A}{V}Q_{in} \\
 \dot{V} &= Q_{in}
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

R_1, R_2 et R_3 sont les vitesses de production de biomasse définies par [5] :

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{0,6X_1S}{(0,5+S)(1+\frac{A}{0,4})} \\ R_2 &= \frac{0,29X_2S}{0,04+S} \\ R_3 &= \frac{0,25X_3}{1+\frac{A}{0,2}} \left[\frac{E}{0,02+E} + \psi \frac{A}{0,02+A} \right] \end{aligned} \quad (1.7)$$

R_4, R_5, R_6, R_7, R_8 et R_9 sont les vitesses de transition d'un état à un autre définies par [5] :

$$\begin{aligned} R_4 &= 2X_1(1-\varphi) \\ R_5 &= 0,1X_2\varphi \\ R_6 &= \frac{0,4X_2E}{0,5+E} \\ R_7 &= \frac{2X_3S}{0,05+S} \\ R_8 &= \frac{0,2X_1E}{0,2+E}(1-\varphi) \\ R_9 &= \frac{0,5X_3S}{0,01+S} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Remarque 1-2 : les vitesses $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8$ et R_9 sont exprimées en g/(l.h), et les coefficients adimensionnels φ et ψ sont définis comme suit [5] :

$$\varphi = \frac{S^3}{0,1^3 + S^3} \quad (1.9)$$

et

$$\begin{aligned} \psi &= 1 \text{ si } E \leq 10^{-6} \text{ g/l} \\ \psi &= 0 \text{ si } E > 10^{-6} \text{ g/l} \end{aligned} \quad (1.10)$$

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, des généralités sur l'analyse compartimentale et des notions de base sur les procédés ont été présentées.

La modélisation des systèmes biologiques est une tâche extrêmement délicate car, contrairement à la physique, il n'existe pas de lois admises et reconnues caractérisant l'évolution des micro-organismes. Néanmoins, ces systèmes, au même titre que tous les systèmes physiques, doivent respecter des règles telles que la conservation de la matière.

La fin du chapitre a été consacrée à la modélisation d'un réacteur biologique.

Chapitre II

Linéarisation des systèmes dynamiques par retour d'état

Chapitre 2

Linéarisation des systèmes dynamiques par retour d'état

2.1 Introduction

La théorie de la commande des systèmes linéaires est beaucoup plus développée que celle des systèmes non linéaires, mais les progrès réalisés dans le domaine non linéaire font que le concepteur d'un système de commande dispose actuellement d'un certain nombre d'outils efficaces, à condition qu'il possède lui-même un modèle de connaissance non linéaire de son procédé.

Notre travail principal consiste à appliquer les théories de la commande non linéaire au réacteur biologique dont le modèle est de nature fortement non linéaire [5]. Il s'agit de transformer algébriquement la dynamique d'un système non linéaire en une dynamique partiellement ou totalement linéaire par une transformation agissant sur les états, ce qui diffère totalement de l'approximation linéaire d'une dynamique par calcul du jacobien.

2.2 Géométrie différentielle

La géométrie différentielle est une discipline mathématique récente. Elle permet de faire de l'analyse sur des surfaces ou objets géométriques généraux.

Dans cette section, nous rappelons certain nombre d'outils "analytiques" qui permettent de travailler localement sur les variétés. Il s'agit de variétés sur lesquelles il est possible d'effectuer les opérations du calcul différentiel et intégral.

2.2.1 Difféomorphisme

Définition 2-1 [23] : Soit x_0 un point d'opération et $\Omega_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de x_0 . L'application $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, définie dans la région Ω_{x_0} , est appelée difféomorphisme local si elle est différentiable et son inverse Φ^{-1} existe et est différentiable. De plus, si $\Omega_{x_0} = \mathbb{R}^n$, alors $\Phi(x)$ est un difféomorphisme global.

2.2.2 Champ de vecteurs

Définition 2-2 : Un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^n$ est une fonction dérivable définie comme suit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1)$$

2.2.3 Dérivée de Lie

Définition 2-3 [23] : Soit $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, une application différentiable et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, un champ de vecteurs définie dans $\mathbb{R}^n$. L'application scalaire représentée par la dérivée de h le long du champ f et définie par :

$$L_f h = \nabla h f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i(x) \quad (2.2)$$

avec

$$L_f^i h = L_f(L_f^{i-1} h), \quad L_f^1 h = L_f h, \quad L_f^0 h = h. \quad (2.3)$$

2.2.4 Crochet de Lie

Définition 2-4 [23] : Soit f et g deux champs de vecteurs. Le crochet de Lie de f et g est un champ de vecteur défini par :

$$[f, g] = \nabla_g f - \nabla_f g = ad_f g \quad (2.4)$$

où ∇_g et ∇_f représentent respectivement les gradients de g et f par rapport à x on définit aussi,

$$ad_f^0 \dots ad_f^i g = [f, ad_f^{i-1} g] \text{ pour } i = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Les crochets de Lie ont les propriétés suivantes

– **Distributivité :**

$$[\alpha f_1 + \beta f_2, g] = \alpha[f_1, g] + \beta[f_2, g] \quad (2.6)$$

$$[f, \alpha g_1 + \beta g_2] = \alpha[f, g_1] + \beta[f, g_2] \quad (2.7)$$

– **Anti-commutativité :**

$$[f, g] = -[g, f] \quad (2.8)$$

– **Identité de Jacobi :**

$$[f, [g, p]] + [g, [p, f]] + [p, [f, g]] = 0 \quad (2.9)$$

2.2.5 Théorème de Frobenius

Définition 2-5 [23] : Soit $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ un ensemble de champs de vecteurs linéairement indépendants défini dans $\mathbb{R}^n$. F est complètement intégrable si et seulement s'il existe $(n - m)$ fonctions scalaires $h_1, h_2, \dots, h_{n-m}$ qui satisfont les équations différentielles partielles définies par

$$\nabla h_i f_j(x) = 0 \quad \forall x \text{ avec } 1 \leq i \leq n - m \text{ et } 1 \leq j \leq m. \quad (2.10)$$

Définition 2-6 [23] : L'ensemble de champs de vecteurs linéairement indépendants F est involutif si et seulement s'il existe des fonctions $\alpha_{ijk} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$[f_i, f_j](x) = \sum_{k=1}^m \alpha_{ijk}(x) f_k(x) \quad \forall x \text{ et } \forall i, j \quad (2.11)$$

Théorème 2-1 [23] : Soit F un ensemble de champs de vecteurs linéairement indépendants. F est complètement intégrable si et seulement s'il est involutif.

2.3 Linéarisation des systèmes monovariabiles

En analysant l'état de l'art, sur les systèmes de commande non linéaire, on peut conclure que les équations différentielles, reliant les entrées aux variables d'état d'une large classe de systèmes non linéaires, peuvent être rendues linéaires via une transformation de coordonnées et un retour d'état. Dans notre étude, nous considérons une classe de systèmes non linéaires affines par rapport à l'entrée de commande.

Pour faciliter la description de la méthode, nous considérons, le cas d'un système non linéaire monovariabiles, affine par rapport à l'entrée, ayant la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x) + g(x)u(t) \\ y(t) &= h(x)\end{aligned}\tag{2.12}$$

où

- t : variable désignant le temps ;
- n : dimension de l'espace d'état ;
- $x \in \mathbb{R}^n$: le vecteur des variables d'état ;
- $u \in \mathbb{R}^m$: le vecteur d'entrée ;
- $y \in \mathbb{R}^m$: le vecteur de sortie ;
- $x_0 \in \mathbb{R}^n$: un vecteur contenant les valeurs initiales des variables d'état ;
- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$: sont des fonctions non linéaires de classe C^∞ .

2.3.1 Notion de degré relatif

Définition 2-7 [24] : Considérons le système non linéaire monovariabiles affine par rapport à l'entrée décrit par les équations d'état (2.12). Le degré relatif, ou indice caractéristique, du système (2.12) sur un domaine U est le plus petit entier r pour le quel :

$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \text{ dans } U\tag{2.13}$$

Le système non linéaire (2.12) admet donc un degré relatif r égal à :

$$\begin{aligned}
 r &= 1 \text{ si } L_g h(x) \neq 0 \\
 r &= 2 \text{ si } L_g L_f h(x) \neq 0 \text{ et } L_g h(x) = 0 \\
 r &= 3 \text{ si } L_g L_f h(x) = L_g h(x) = 0 \text{ et } L_g L_f^2 h(x) \neq 0 \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Remarque 2-1 : Il existe des points où le degré relatif n'est pas défini et cela quand la première fonction de la séquence :

$$L_g h(x), L_g L_f h(x), \dots, L_g L_f^{r-2} h(x) \tag{2.15}$$

est différente de zéro au voisinage d'un point x_0 (avec x_0 point d'équilibre du système), est égale à zéro au point $x = x_0$.

Remarque 2-2 : Comme pour les systèmes linéaires, le degré relatif d'un système non linéaire est toujours inférieur ou égal à l'ordre du système $r \leq n$, sinon le système n'est pas commandable.

Interprétation de la notion du degré relatif : Comme dans le cas linéaire, l'interprétation du degré relatif r peut être obtenue à partir des dérivées temporelles de la sortie. Le calcul des dérivées temporelles successives de la sortie y donne :

$$\begin{aligned}
 y^{(1)} &= L_f h(x) + L_g h(x)u \\
 &= L_f h(x) && \text{si } 1 < r \\
 &\vdots && \\
 y^{(k)} &= L_f^k h(x) + L_g L_f^{k-1} h(x)u && \text{si } k < r \\
 y^{(r)} &= L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x)u && \text{car } L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Par conséquent, le degré relatif est égal au nombre de fois qu'on doit dériver la sortie pour faire apparaître explicitement l'entrée u .

Si $L_g L_f^k h(x) = 0$, pour tout x au voisinage de x_0 et $k \geq 0$, le degré relatif ne peut pas être défini dans le voisinage de x_0 et la sortie n'est pas affectée par l'entrée u , donc la fonction $y(t)$ ne dépend que de l'état initial et non de l'entrée.

2.3.2 Changement de coordonnées

Soit une fonction Φ définie sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$. $\Phi(x)$ définit un difféomorphisme local sur un sous-domaine Ω_0 de Ω , si et seulement si la matrice jacobienne $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ est non singulière en x_0 appartenant à Ω .

Un difféomorphisme permet de transformer un système non linéaire en un autre système non linéaire défini en fonction de nouveaux états.

La première étape dans la linéarisation exacte est la transformation de coordonnées. Soit un système non linéaire monovariable (2.12) de degré relatif r au point x_0 , posant :

$$\begin{aligned}\Phi_1(x) &= h(x) \\ \Phi_2(x) &= L_f h(x) \\ &\vdots \\ \Phi_r(x) &= L_f^{r-1} h(x)\end{aligned}\tag{2.17}$$

Si $r < n$, on peut trouver $(n - r)$ fonctions $\Phi_{r+1}(x), \dots, \Phi_n(x)$ telle que l'application :

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \end{pmatrix}\tag{2.18}$$

ait sa matrice jacobienne, non singulière au point x_0 , et constitue donc un changement de coordonnées locales au voisinage de x_0 .

Les valeurs des $n - r$ autres fonctions au point x_0 peuvent être choisies arbitrairement. Toute fois, il est possible de choisir $\Phi_{r+1}(x), \dots, \Phi_n(x)$ de telle sorte que :

$$L_g \Phi_i(x) = 0 \text{ pour tout } r + 1 \leq i \leq n \text{ et pour tout } x \text{ dans } \Omega\tag{2.19}$$

Le système non linéaire monovariable (2.12) peut être décrit dans les nouvelles coor-

données $z_i = \Phi_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) à partir des relations (2.18), ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 \frac{dz_1}{dt} &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = L_f h(x(t)) = \Phi_2(x(t)) = z_2(t) \\
 \frac{dz_2}{dt} &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial L_f h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = L_f^2 h(x(t)) = \Phi_3(x(t)) = z_3(t) \\
 &\vdots \\
 \frac{dz_{r-1}}{dt} &= \frac{\partial \Phi_{r-1}}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial L_f^{r-2} h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = L_f^{r-1} h(x(t)) = \Phi_r(x(t)) = z_r(t) \\
 \frac{dz_r}{dt} &= \frac{\partial \Phi_r}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial L_f^{r-1} h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = L_f^r h(x(t)) + L_g L_f^{r-1} h(x(t)) u(t)
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

en utilisant la relation $x(t) = \Phi^{-1}(z(t))$, l'expression de $\dot{z}_r(t)$ sera écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
 \frac{dz_r}{dt} &= L_f^r h(\Phi^{-1}(z(t))) + L_g L_f^{r-1} h(\Phi^{-1}(z(t))) u(t) \\
 &= b(z(t)) + a(z(t)) u(t)
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

avec :

$$a(z(t)) = L_g L_f^{r-1} h(\Phi^{-1}(z(t))) \quad ; \quad b(z(t)) = L_f^r h(\Phi^{-1}(z(t))) \tag{2.22}$$

Notons que, par définition du degré relatif en $z_0 = \Phi(x_0)$, on a $a(z_0) \neq 0$.

Puisque les fonctions $\Phi_{r+1}(x), \dots, \Phi_n(x)$ sont choisis de telle sorte que $L_g \Phi_i(x) = 0$ pour tout $r+1 \leq i \leq n$, alors les $n-r$ dernières fonctions s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \frac{dz_i}{dt} &= \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} (f(x(t)) + g(x(t)) u(t)) \quad ; \quad r+1 \leq i \leq n \\
 &= L_f \Phi_i(x(t)) + L_g \Phi_i(x(t)) u(t) = L_f \Phi_i(x(t)) \\
 &= L_f \Phi_i(\Phi^{-1}(z(t)))
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Posons :

$$q_i(z(t)) = L_f \Phi_i(\Phi^{-1}(z(t))) \quad ; \quad r+1 \leq i \leq n \tag{2.24}$$

En résumé, après transformation, nous obtenons la forme normale suivante :

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{r-1} &= z_r \\
 \dot{z}_r &= b(z) + a(z)u(t) \\
 \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_n &= q_n(z)
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

L'équation de la sortie du système est liée aux nouvelles variables d'état comme suit :

$$y = h(x) = z_1 \tag{2.26}$$

On peut symboliser ce résultat sur le diagramme de bloc (Figure 2.1) en faisant figurer la chaîne des r intégrateurs nécessaires pour passer de la variable de commande à la sortie.

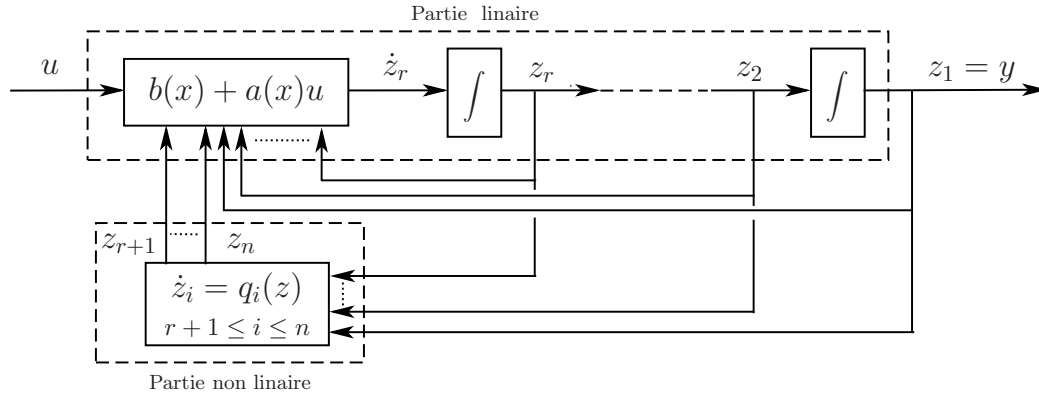


FIGURE 2.1: Description du système dans les nouvelles coordonnées.

2.3.3 Exemple d'application

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{pmatrix} u \quad , \quad y = x_3$$

-Degré relaif Soit r le degré relatif du système, il s'obtient comme suit :

$$L_g h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial (L_f h(x))}{\partial x} g(x) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} = e^{x_2} - e^{x_2} = 0$$

$$L_g L_f^2 h(x) = \frac{\partial (L_f^2 h(x))}{\partial x} g(x) = \begin{bmatrix} -1 & -2x_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} = -(1 + 2x_2)e^{x_2}$$

si $1 + 2x_2 \neq 0 \Rightarrow x_2 \neq \frac{-1}{2} \Rightarrow L_g L_f^2 h(x) \neq 0$, alors le système possède un degré relatif $r = 3$.

-Changement de coordonnées On considère le changement de coordonnées suivant :

$$z_1 = \Phi_1 = h(x) = x_3$$

$$z_2 = \Phi_2 = L_f h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \cdot f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} = x_1 - x_2$$

$$z_3 = \Phi_3 = L_f^2 h(x) = L_f(L_f h(x)) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} = -(x_1 + x_2^2)$$

Les fonctions $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ et $\Phi_3(x)$ définissent une transformation $z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 - x_2 \\ -x_1 - x_2^2 \end{bmatrix}$

d'où la matrice Jacobienne $\nabla\Phi(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2x_2 & 0 \end{bmatrix}$ et le déterminant de $\nabla\Phi(x)$ est

égale à $-2x_2 - 1$.

$\Phi(x)$ est difféomorphisme si : $\det \nabla\Phi(x) \neq 0 \Rightarrow x_2 \neq \frac{-1}{2}$
alors $\Phi(x)$ est une matrice non singulière pour tout $x_2 \neq \frac{-1}{2}$

dans les nouvelles coordonnées le système s'écrit par :

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = z_3$$

$$\dot{z}_3 = -2x_2(x_1 + x_2^2) - (1 + 2x_2)e^{x_2}u$$

2.4 Linéarisation entrée-état

Dans cette section, nous présentons la linéarisation entrée-état pour les systèmes non linéaires à une seule entrée avec une sortie indéfinie représentée par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u(t) \quad (2.27)$$

La méthode de la linéarisation au sens entrée-état est de trouver une transformation de coordonnées $z = \Phi(x)$ (difféomorphisme) et une transformation non linéaire de la commande de la forme

$$v = b(x) + a(x)u \quad (2.28)$$

de façon à obtenir des relations linéaire entre le nouvel état z et la nouvelle entrée externe v calculée à partir de la dynamique désirée du système. Le système linéaire obtenu est :

$$\dot{z} = Az + Bv \quad (2.29)$$

où la paire (A, B) est commandable. Le nouvel état z et la loi de commande non linéaire v s'appellent respectivement l'état linéarisant et la commande linéarisante du système.

Par rapport à l'état x , la loi de commande (Figure 2.2) est donnée comme suit :

$$u(t) = -\frac{b(x)}{a(x)} + \frac{v}{a(x)} = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (2.30)$$

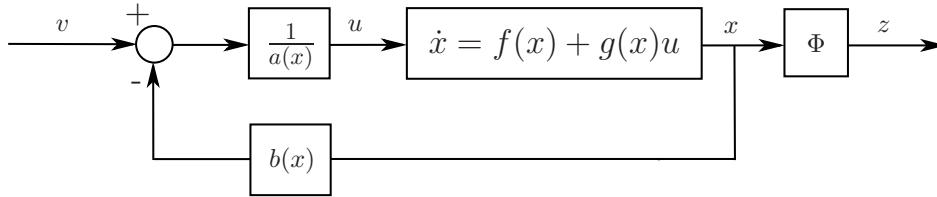


FIGURE 2.2: Bouclage linéarisant.

Si le degré relatif du système (2.27) égal à la dimension du vecteur d'état, en un point x_0 , nous obtenons la forme normale suivante :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= b(z) + a(z)u(t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

avec $a(z_0) \neq 0$ d'après la définition du degré relatif.

Le système linéaire obtenu est une succession de n intégrateurs en cascade.



FIGURE 2.3: Système linéarisé exactement par retour d'état statique.

Par le retour d'état suivant :

$$u(t) = -\frac{b(z)}{a(z)} + \frac{v}{a(z)} \quad (2.32)$$

on obtient le système linéaire en boucle fermée suivant :

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{n-1} &= z_n \\
 \dot{z}_n &= v
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

qu'on peut exprimer sous la forme canonique de Brunovsky :

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \tag{2.34}$$

Remarque 2-3 : Si on utilise un retour d'état et en suite un changement de coordonnées, on obtient la loi de commande suivante :

$$u(t) = -\frac{b(\Phi(x))}{a(\Phi(x))} + \frac{v}{a(\Phi(x))} = \frac{-L_f^n h(x) + v}{L_g L_f^{n-1} h(x)} \tag{2.35}$$

Remarque 2-4 : Le vecteur d'état étant supposé connu, le signal de commande du système (autrement dit l'écart) doit être construit en soustrayant au signal de consigne un signal qui dépend du vecteur d'état. Ce vecteur d'état étant composé de n signaux $z_1, z_2, \dots, z_n$, on le multiplie par un vecteur ligne K , appelé vecteur de gain, pour pouvoir effectuer cette soustraction, donc il est possible de réaliser un placement de pôles où de satisfaire un critère d'optimalité en imposant un bouclage de la forme (Figure 2.4) :

$$v_2 = Kz \tag{2.36}$$

avec le vecteur de gain :

$$K = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

donc on obtient un retour d'état non linéaire par rapport à x , c'est-à-dire :

$$v_2 = c_0 h(x) + c_1 L_f h(x) + \cdots + c_{n-1} L_f^{n-1} h(x) \tag{2.38}$$

et la loi de commande par retour d'état dans ce cas est :

$$u(t) = \frac{-L_f^n h(x) + \dot{z}_n}{L_g L_f^{n-1} h(x)} = \frac{-L_f^n h(x) + v - \sum_{i=0}^{n-1} c_i L_f^i h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)} \quad (2.39)$$

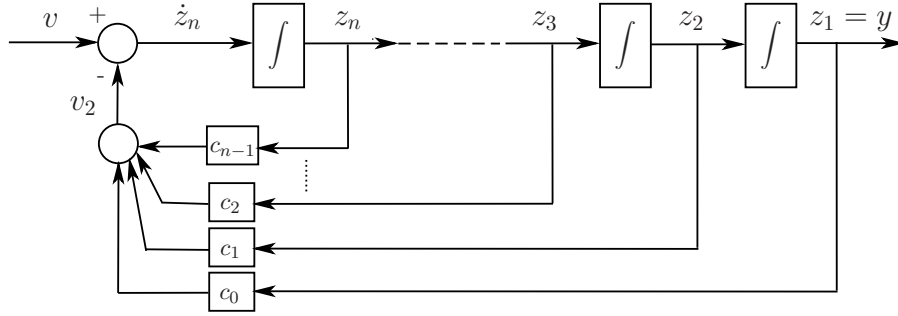


FIGURE 2.4: Commande non linéaire avec placement de pôles pour $r = n$.

Le polynôme caractéristique de la fonction de transfert $\frac{Y(s)}{V(s)}$ est le suivant :

$$c_0 + c_1 s + \dots + c_{n-1} s^{n-1} + s^n \quad (2.40)$$

dont les coefficients peuvent être choisis de manière à réaliser un placement de pôles adéquat.

2.4.1 Conditions pour une linéarisation entrée-état

Théorème 2-2 [25, 26] : Le système (2.12) est complètement linéarisable entrée-état si et seulement s'il existe une région $\Omega \in \mathbb{R}$ contenant le point considéré x_0 tel que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) Les champs de vecteurs $g(x_0), ad_f g(x_0), \dots, ad_f^{m-1} g(x_0)$ sont linéairement indépendants c'est-à-dire : $\text{rang} [g(x_0), ad_f g(x_0), \dots, ad_f^{m-1} g(x_0)] = n$
- (ii) La distribution $\Delta = \text{span} \{g, ad_f g, \dots, ad_f^{m-2} g\}$ est involutive dans Ω .

Remarque 2-5 :

- La première condition traduit la commandabilité du système non linéaire. En linéaire, cette matrice est la matrice de commandabilité : $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$

- La deuxième condition assure l'existence de la sortie fictive $\lambda(x)$ donnant un degré relatif égal à n .

2.4.2 Étapes à suivre pour une linéarisation entrée-état

La linéarisation exacte entrée-état est réalisée en quatre étapes :

1. Construire les champs de vecteurs $g(x_0), ad_f g(x_0), \dots, ad_f^{n-1} g(x_0)$.
2. Vérifier les conditions de commandabilité et d'involutivité
3. Déterminer une fonction $\lambda(x)$ qui vérifie les conditions :

$$\begin{aligned} L_g L_f^k \lambda(x_0) &= 0 \quad , \quad k = 0, 1, \dots, n-2 \\ L_g L_f^{n-1} \lambda(x_0) &\neq 0 \end{aligned}$$

4. Calculer le changement de coordonnées :

$$\Phi(x) = [\lambda(x), L_f \lambda(x), \dots, L_f^{n-1} \lambda(x)]$$

ainsi que la transformation de la commande définie par $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ avec :

$$\alpha(x) = \frac{-L_f^n \lambda(x)}{L_g L_f^{n-1} \lambda(x)} \quad , \quad \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} \lambda(x)} \quad (2.41)$$

Nous allons illustrer maintenant ces différentes étapes de linéarisation exacte entrée-état par un simple exemple.

2.4.3 Exemple d'application

Un bras manipulateur est décrit par le modèle ci-dessous

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -a \sin(x_1) - b(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ c(x_1 - x_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} u$$

avec a, b, c et d sont des constantes strictement positives.

Pour vérifier si ce système peut être transformé en un système linéaire commandable par un moyen d'un retour d'état et par une transformation de coordonnées, nous allons suivre les étapes suivantes :

1ère étape : Calculons les fonctions $g(x), ad_f g(x), ad_f^2 g(x), ad_f^3 g(x)$

Le crochet de Lie, $ad_f g(x)$, des deux champs de vecteurs f et g est donné par

$$ad_f g(x) = [f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le crochet de Lie, $ad_f^2 g(x)$, des deux champs de vecteurs f et $ad_f g(x)$ est donné par

$$ad_f^2 g(x) = [f, ad_f g(x)] = \frac{\partial(ad_f g(x))}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x}(ad_f g(x)) = \begin{bmatrix} 0 \\ bd \\ 0 \\ -cd \end{bmatrix}$$

Le crochet de Lie, $ad_f^3 g(x)$, des deux champs de vecteurs f et $ad_f^2 g(x)$ est donné par

$$ad_f^3 g(x) = [f, ad_f^2 g(x)] = \frac{\partial(ad_f^2 g(x))}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x}(ad_f^2 g(x)) = \begin{bmatrix} -bd \\ 0 \\ cd \\ 0 \end{bmatrix}$$

2ème étape : Vérifions les conditions de commandabilité et d'involutivité

- Les vecteurs $g(x), ad_f g(x), ad_f^2 g(x), ad_f^3 g(x)$ sont tous constants indépendants de x

donc la matrice $[g(x), ad_f g(x), ad_f^2 g(x), ad_f^3 g(x)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -bd \\ 0 & 0 & bd & 0 \\ 0 & -d & 0 & cd \\ d & 0 & -cd & 0 \end{bmatrix}$ est de rang

égale à 4,

c'est-à-dire les quatre vecteurs sont linéairement indépendants, donc la première condition

(i) de commandabilité est satisfaite.

- Les vecteurs $g(x), ad_f g(x), ad_f^2 g(x)$ sont constants, tous les crochets de Lie formés par ces trois vecteurs sont nuls, en effet :

$$[g(x), ad_f g(x)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [g(x), ad_f^2 g(x)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [ad_f g(x), ad_f^2 g(x)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d'où la distribution $\Delta = \text{span} \{g, ad_f g, ad_f^2 g\}$ est involutive, donc la deuxième condition (ii) d'involutivité est satisfaite.

Les deux conditions sont satisfaites, le système est donc linéarisable (entrée-état).

3ème étape : Cherchons la fonction $\lambda(x)$.

Il suffit de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$L_g \lambda(x) = L_g L_f \lambda(x) = L_g L_f^2 \lambda(x) = L_g L_f^3 \lambda(x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x} [g(x), ad_f g(x), ad_f^2 g(x)] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & bd \\ 0 & -d & 0 \\ d & 0 & -cd \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda(x) = x_1$$

$\lambda(x)$ est la sortie fictive qui remplit les conditions de linéarisation complète, c'est-à-dire le degré relatif du système soit égale à 4.

4ème étape : Changement de coordonnées.

$$\begin{aligned} z_1 &= \Phi_1 = \lambda(x) = x_1 \\ z_2 &= \Phi_2 = L_f \lambda(x) = x_2 \\ z_3 &= \Phi_3 = L_f^2 \lambda(x) = -a \sin x_1 - b(x_1 - x_3) \\ z_4 &= \Phi_4 = L_f^3 \lambda(x) = -(a \cos x_1 + b)x_2 + b x_4 \end{aligned}$$

Le système se met sous la forme normale suivante :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= -(a \cos z_1 + b + c)z_3 + a(z_2^2 - c) \sin z_1 + b u \end{aligned}$$

et la commande est définie par

$$u = -\frac{-(a \cos z_1 + b + c)z_3 + a(z_2^2 - c) \sin z_1}{bd} + \frac{1}{bd} v$$

2.5 Linéarisation entrée-sortie

L'application de la commande par linéarisation entrée-sortie, pour le système (2.12), consiste à établir une relation différentielle linéaire entre le vecteur de sortie du système y et un nouveau vecteur d'entrée v .

Dans le cas où le degré relatif r est inférieur à la dimension du système n , le système résultant est décomposé en deux sous-systèmes, l'un linéaire de dimension r et l'autre non linéaire de dimension $n - r$.

En utilisant le changement de coordonnées $\Phi(x_0)$, il est possible de transformer le système sous la forme normale (2.34), de poser $v = \dot{z}_r$, et le système devient

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{r-1} &= z_r \\
 \dot{z}_r &= v = b(z) + a(z)u(t) \\
 \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_n &= q_n(z) \\
 y &= h(x) = z_1
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

avec :

$$b(z) = L_f^r h(x) \quad ; \quad a(z) = L_g L_f^{r-1} h(x) \tag{2.43}$$

Alors la loi de commande est donnée par :

$$u(t) = -\frac{b(z)}{a(z)} + \frac{v}{a(z)} \tag{2.44}$$

On peut noter que le système résultant est partiellement linéaire, et la sortie est influencée par l'entrée externe v seulement à travers une chaîne de r intégrateurs (Figure 2.3) liée aux nouveaux états $z_1, z_2, \dots, z_r$:

$$y^{(r)}(t) = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u(t) = v \tag{2.45}$$

On peut noter aussi, que les nouveaux états $z_{r+1}, z_{r+2}, \dots, z_n$ qui constituent la partie non linéaire du système n'influencent pas la sortie y .

Remarque 2-6 : La nouvelle entrée externe v du système calculée permet de stabiliser la sortie y ou de forcer la sortie à suivre une certaine trajectoire désirer $y_d(t)$.

2.5.1 Dynamique des zéros

Dans le cas où le degré relatif $r < n$, la linéarisation est dite partielle, on obtint la forme normale (2.12).

Sachant que la sortie y ainsi que ses $r - 1$ dérivées successives est linéairement liée avec la nouvelle entrée v . Il y a $n - r$ variables du système qui forment la dynamique interne (cachée) rendue inobservable par la linéarisation, pour cela en séparant le système en deux parties, la première linéaire de dimension r et la deuxième non linéaire de dimension $n - r$, soit :

$$\xi = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(r-1)} \end{pmatrix} ; \quad \eta = \begin{pmatrix} z_{r+1} \\ z_{r+2} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

le système (2.12) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u(t) \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (2.47)$$

où ξ et η sont les coordonnées normales du système.

Il s'agit maintenant de vérifier la stabilité de la dynamique interne qui est définie par l'équation $\dot{\eta} = q(\xi, \eta)$. Généralement cette dynamique dépend de ξ .

Pour obtenir une dynamique nulle, il faut choisir une loi de commande $u(t)$ qui annule le vecteur ξ , alors :

$$\xi = 0 \iff \dot{z}_1 = \dot{z}_2 = \dots = \dot{z}_r = 0 \quad (2.48)$$

l'expression de la commande qui impose une sortie nulle au voisinage de x_0 est donnée par

$$u(t) = -\frac{b(0, \eta(t))}{a(0, \eta(t))} \quad (2.49)$$

la forme normale du système devient alors

$$\begin{aligned} \xi &= 0 \\ \dot{\eta} &= q(0, \eta) \end{aligned} \quad (2.50)$$

La dynamique du système (2.50) représente la dynamique des zéros ou dynamique des zéros non forcés ; elle décrit le comportement interne du système.

2.5.2 Stabilité asymptotique et poursuite d'une trajectoire désirée

La stabilité de la dynamique des zéros est une condition nécessaire et non suffisante pour la stabilité du système en boucle fermée.

Définition 2-8 : Le système non linéaire (2.12) est à phase minimale si sa dynamique des zéros est asymptotiquement stable.

Pour le problème de la stabilité, la loi de commande v est définie par :

$$v = -c_0 y - c_1 \dot{y} - \dots - c_{r-2} y^{(r-2)} - c_{r-1} y^{(r-1)} \quad (2.51)$$

où $c_0, c_1, \dots, c_{r-2}, c_{r-1}$ sont des coefficients réels calculés pour que les racines du polynôme de Hurwitz défini par

$$P(s) = c_0 + c_1 s + \dots + c_{r-1} s^{r-1} + s^r \quad (2.52)$$

soient strictement à gauche de l'axe des imaginaires du plan complexe.

La loi de commande linéarisant par retour d'état est :

$$u(t) = \frac{-b(\xi, \eta) - \sum_{i=0}^{i=r-1} c_i z_{i+1}}{a(\xi, \eta)} = \frac{-L_f^r h(x) - \sum_{i=0}^{i=r-1} c_i L_f^i h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \quad (2.53)$$

le système en boucle fermée est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A\xi \\ \dot{\eta} &= q(0, \eta)\end{aligned}\tag{2.54}$$

où la matrice compagne de commandabilité A est donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \cdots & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \cdots & \cdots & -c_{r-1} \end{bmatrix}\tag{2.55}$$

Dans le cas de la poursuite d'une trajectoire désirée y_d , les lois de commande v et u sont définies par

$$v = -c_0 e - c_1 \dot{e} - \dots - c_{r-2} e^{(r-2)} - c_{r-1} e^{(r-1)}\tag{2.56}$$

et

$$u(t) = \frac{-L_f^r y + y_d^{(r)} - c_0 e - c_1 \dot{e} - \dots - c_{r-2} e^{(r-2)} - c_{r-1} e^{(r-1)}}{L_g L_f^{r-1} y}\tag{2.57}$$

permettant ainsi d'avoir : $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ avec $e(t) = y(t) - y_d(t)$.

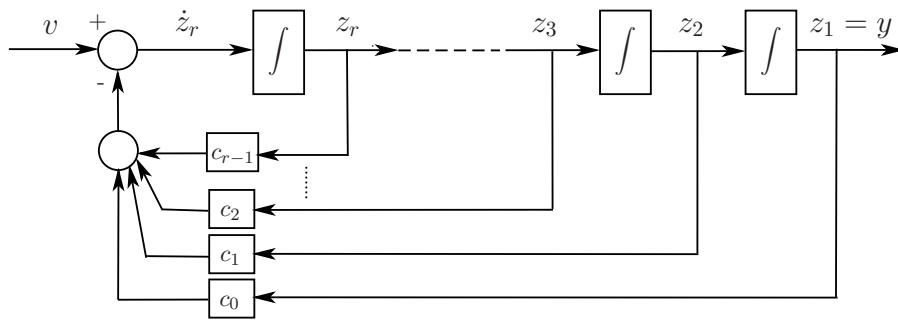


FIGURE 2.5: Commande non linéaire avec placement de pôles pour $r < n$.

Si on tient compte d'une entrée externe v qui permet de garantir la stabilité du système linéaire résultant, la loi de commande est donnée par [3],

$$u(t) = \frac{v - L_f^r h(x) + y_d^{(r)} - \sum_{i=0}^{r-1} c_i (L_f^i h(x) - y_d^{(i)})}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \quad (2.58)$$

2.6 Synthèse d'un régulateur PI par bouclage

Les systèmes en général peuvent présenter des défauts comme, l'instabilité, précision insuffisante, le temps de réponse trop lent, un dépassement trop important. Il est donc souvent nécessaire d'intégrer dans le système bouclé un correcteur dont l'objectif est d'améliorer ces performances.

2.6.1 Définition de la grandeur externe v

La loi de commande (2.58) a pour objectif de garantir une poursuite de consigne avec précision si on ne tient pas compte des incertitudes. En présence de ces dernières, les performances de la loi de commande diminuent.

Afin d'annuler l'erreur statique due aux erreurs de modélisation et aux perturbations non mesurées, on définit la grandeur externe v par un correcteur PI classique. La Figure 2.6 montre la stratégie de commande.

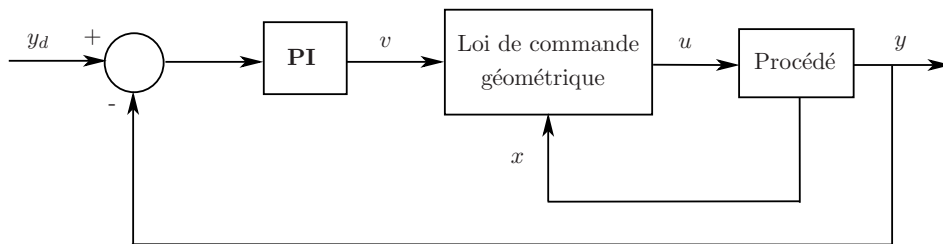


FIGURE 2.6: Schéma bloc de la commande et du procédé .

Par exemple la grandeur externe v peut être définie par un correcteur PI alors :

$$v(t) = K_c \left[(y_d(t) - y(t)) + \frac{1}{\tau_i} \int_0^t (y_d(\tau) - y(\tau)) d\tau \right] \quad (2.59)$$

où K_c et τ_i sont respectivement le gain proportionnel et la constante de temps intégrale, y_d est la consigne et y est la sortie à commander. La fonction de transfert du correcteur est donnée par :

$$\frac{V(s)}{Y_d(s) - Y(s)} = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \quad (2.60)$$

Le schéma de la Figure 2.7 montre la relation qui existe entre l'entrée du PI et sa sortie alors :

$$\dot{x} = \frac{K_c}{\tau_i} (y_d - y) \quad (2.61)$$

Ainsi, en ajoutant ces équations au modèle du système linéarisé, on obtient le système en boucle fermée.

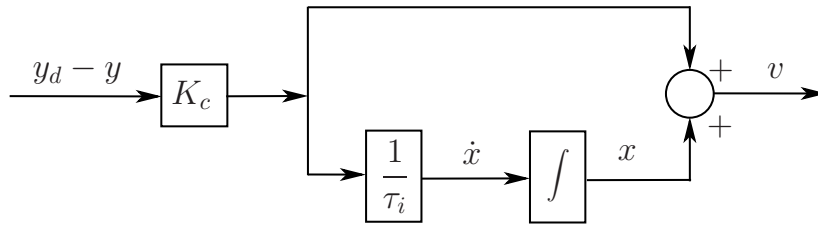


FIGURE 2.7: Correcteur PI sous forme d'état.

2.6.2 Critères de performances de la précision dynamique

Pour avoir une bonne précision dynamique d'un système à une entrée échelon, il faut que le régime transitoire soit caractérisé par faible dépassement et un temps de réponse faible. Pour cela, les paramètres d'un régulateur sont choisis de manière à minimiser l'erreur dynamique $e(t) = y(t) - y_d(t)$, donc on doit minimiser l'un des critères suivants [27] :

- **Critère Integral of Absolute Error (IAE) :** L'intégrale de la valeur absolue de l'erreur est donnée par

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (2.62)$$

Ce critère exprime la surface générée par la différence entre la valeur de consigne et la valeur réelle, et l'intérêt de cet indice de performance pour supprimer les petites erreurs.

- **Critère Integral of Square Error (ISE)** : L'intégrale du carré de l'erreur est donnée par

$$ISE = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (2.63)$$

l'intérêt de cet indice de performance est pour corriger les systèmes dont le régime transitoire dure trop longtemps, et tient beaucoup moins compte des dépassements inférieurs à 1.

- **Critère Integral Time multiplied by Absolute Error (ITAE)** : L'intégrale de la valeur absolue de l'erreur pondérée par le temps est donnée par

$$ITAE = \int_0^{\infty} t|e(t)| dt \quad (2.64)$$

L'introduction du paramètre temps, va corriger les systèmes à réponse très oscillatoire.

- **Critère Integral Time multiplied by Square Error (ITSE)** : L'intégrale du carré de l'erreur pondérée par le temps est donnée par

$$ITSE = \int_0^{\infty} te^2(t) dt \quad (2.65)$$

Ce critère met peu l'accent sur les erreurs initiales et pénalise fortement les erreurs se produisant vers la fin de la réponse transitoire à une entrée échelon.

Remarque 2-7 : Les bornes de l'intégrale de l'erreur dépendent de la valeur de l'erreur statique quand t tend vers l'infini, c'est-à-dire :

- si $\lim \varepsilon(t) = 0$, on intègre de 0 à l'infini,
- si $\lim \varepsilon(t) \neq 0$, on intègre de 0 à $2t_r$ sinon l'intégrale est infinie.

Les fonctions de transfert optimales en boucle fermée par rapport au critère ITAE sont données dans le Tableau 2.1, par contre la valeur de ω_0 dépend de la dynamique désirée pour le système.

	Num de la fonction de transfert $G_{bf}(s)$	Dén de la fonction de transfert $G_{bf}(s)$ optimale pour ITAE
Système à erreur de position nulle	ω_0^2	$s + \omega_0$ $s^2 + 1,4\omega_0 s + \omega_0^2$ $s^3 + 1,75\omega_0 s^2 + 2,15\omega_0 s + \omega_0^3$
Système à erreur de vitesse nulle	$a_1 s + \omega_0^2$	$s^2 + 3,2\omega_0 s + \omega_0^2$ $s^3 + 1,75\omega_0 s^2 + 3,25\omega_0 s + \omega_0^3$
Système à erreur d'accélération nulle	$a_2 s^2 + a_1 s + \omega_0^2$	$s^3 + 2,97\omega_0 s^2 + 4,94\omega_0 s + \omega_0^3$

TABLE 2.1: Dénominateurs des fonctions de transfert optimales pour le critère ITAE.

2.7 Exemple illustratif

Soit le système non linéaire de dimension 3, il est donné par

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_3 - x_2^3 \\ -ax_2 \\ x_1^2 - ax_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \text{et} \quad y = x_1 \quad (2.66)$$

L'objectif est la poursuite de trajectoire, d'un signal de référence $y_d(t) = 4$, par la sortie $y(t)$. Par conséquent, faire converger la sortie vers la référence équivaut à faire converger l'erreur vers zéro.

- **Degré relatif et dynamique des zéros** Soit r le degré relatif du système (2.66), il s'obtient comme suit :

$$L_g h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \cdot g(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial (L_f h(x))}{\partial x} \cdot g(x) = \begin{bmatrix} 0 & -3x_2^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3x_2^2 + 1 \neq 0$$

alors le système possède un degré relatif $r = 2$. Par conséquent, une dynamique des zéros de dimension 1 existe et vérifie la condition :

$$L_g \eta(x) = 0 \implies \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot g(x) = 0 \implies \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta}{\partial x_2} & \frac{\partial \eta}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \implies -\frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \frac{\partial \eta}{\partial x_3} = 0$$

et en prend comme solution $\eta(x) = x_2 + x_3$

- **Stabilité de la dynamique interne** : la dynamique interne du système elle est définie par l'équation $\dot{\eta} = -a\eta(x) + x_1^2$ et pour une dynamique nulle, on obtient l'équation $\dot{\eta} = -a\eta(x)$, et on distingue deux cas possible :

- si $a > 0$ alors la dynamique des zéros est stable,
- si $a \leq 0$ alors la dynamique des zéros est instable.

- **Changement de coordonnées et nouveau système non linéaire** Soit ξ un nouveau vecteur tel que :

$$\xi = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

ce qui donne le système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= x_1^2 - ax_3 + 3ax_2^3 + (1 + 3x_2^2)u \\ \dot{\eta} &= -a\eta(x) + x_1^2 \end{aligned} \quad (2.68)$$

- **Application de la loi de commande linéarisante et placement de pôles** En appliquant la loi de commande suivante

$$u(t) = -\frac{L_f^2 h(x)}{L_g L_f h(x)} + \frac{v}{L_g L_f h(x)} \quad (2.69)$$

alors, on obtient le système linéaire :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.70)$$

qui est commandable et observable.

Soit P la matrice des pôles désirés telle que :

$$P = \begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Alors, la matrice de gain K est donnée par :

$$K = \begin{bmatrix} 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, la loi de commande stabilisante est :

$$v = - \begin{bmatrix} 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

est appliquée au système (2.54). D'où le système linéaire est stable :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

la loi de commande qui assure correctement une poursuite est donné par :

$$u(t) = \frac{-L_f^2 y(t) + y_d^{(2)} - c_0 e(t) - c_1 \dot{e}}{L_g L_f y(t)}$$

-Quelques résultats de simulation pour a positif

D'après les résultats obtenus pour la valeur de a égale à 3, nous pouvons voir sur la Figure 2.8 que la poursuite de trajectoire est assurée puisque l'erreur converge vers zéro Figure 2.9. Le signal de commande est donné par la Figure 2.10 et les évolutions des autres états par la Figure 2.11.

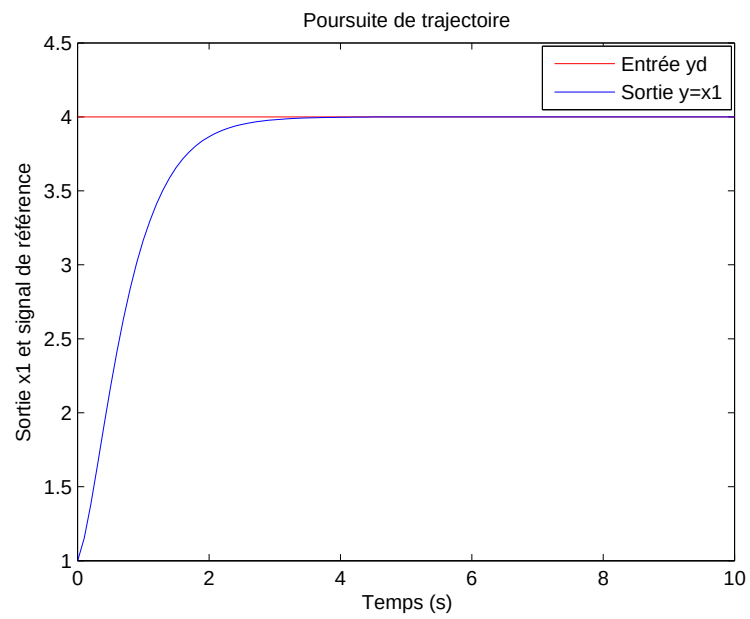
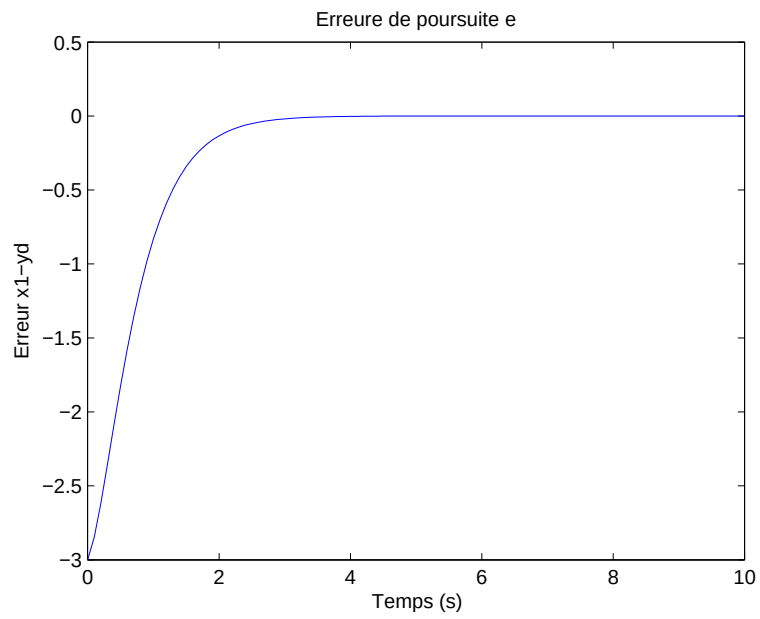
FIGURE 2.8: Poursuite de trajectoire de la référence y_d par la sortie $x1$.

FIGURE 2.9: Erreur de poursuite.

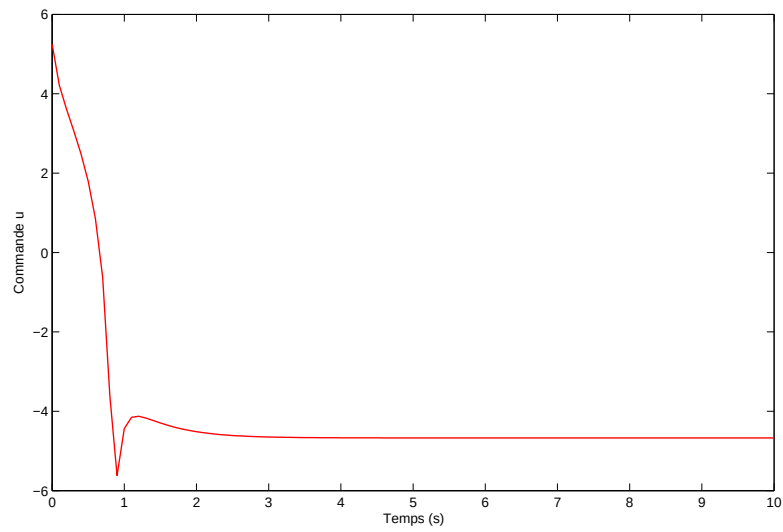
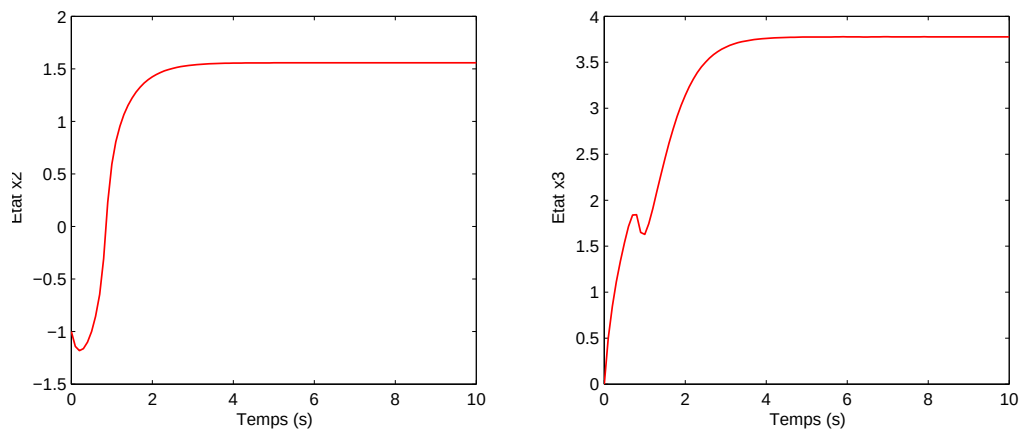


FIGURE 2.10: Signal de commande.

FIGURE 2.11: Etats x_1 et x_2 .

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté, les techniques de linéarisation entrée-état et entrée-sortie, par retour d'état, qui s'appliquent à une certaine classe bien particulière de système non linéaire possédant la propriété d'affinité par rapport à l'entrée.

Chaque type de système non linéaire peut être totalement (ou partiellement) linéarisé par retour d'état. Les exigences pratiques font que la linéarisation n'est pas une fin en soi, car elle fait appel à d'autres techniques de commande qui permettent d'atteindre les objectifs tracés.

Parmi ces techniques, on retrouve la commande à remise à zéro apparue récemment. Cette commande linéaire possède un effet non linéaire permet d'améliorer davantage les performances en boucle fermée, cette technique fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre III

Systèmes de commande à remise à zéro

Chapitre 3

Systèmes de commande à remise à zéro

3.1 Introduction

Les contrôleurs dotés d'un mécanisme de remise à zéro sont une classe de systèmes hybrides dont la valeur de tout ou partie des états peut être instantanément modifiée sous certaines conditions. Cette interaction entre dynamique temps continu et temps discret de ces contrôleurs permet souvent de dépasser les limites des contrôleurs discrets ou continus [29, 30].

Les correcteurs linéaires les plus répandus sont de type proportionnel, intégral, dérivé (PID). Mais leurs applications aux systèmes linéaires contenant des retards importants, des pôles et des zéros instables, des intégrateurs et des systèmes d'ordre élevé, sont limitées aux termes de performances [7].

Le but de ce chapitre est de présenter un autre type de correcteur linéaire caractérisé par une remise à zéro de la commande, afin d'améliorer les performances d'un système et le commander correctement. Nous introduisons dans un premier temps, quelques notions générales sur les systèmes de commande avec remise à zéro, puis on s'intéresse à la synthèse d'un correcteur PI avec remise à zéro.

3.2 Systèmes de commande à remise à zéro

Dans cette section, nous allons voir deux types de correcteurs non linéaires, le premier est un correcteur du premier ordre (FORE) et le seconde appelé intégrateur de Clegg.

3.2.1 Remise à zéro d'un élément du premier ordre (FORE)

Un correcteur linéaire du premier ordre avec condition de remise à zéro est un système dynamique doté d'un mécanisme de remise à zéro [31]. Cette condition de remise à zéro est précisément le passage de l'entrée du régulateur par zéro, mais d'autre choix sont possibles. On représente généralement un correcteur avec remise à zéro par une boîte cassée. Le schéma fonctionnel pour ce type de correcteur est donné par la Figure 3.1.

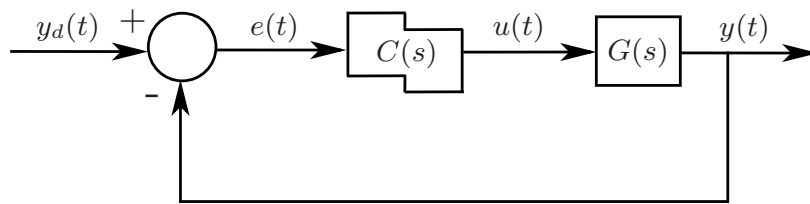


FIGURE 3.1: Schéma fonctionnel d'un correcteur avec remise à zéro.

Pour illustrer le principe de la réinitialisation, considérons un correcteur linéaire $C(s)$ donné par sa fonction de transfert suivante :

$$C(s) = \frac{k}{s + c_0} \quad (3.1)$$

La dynamique linéaire de ce correcteur est donnée par :

$$\dot{u}(t) = -c_0 u(t) + k e(t) \quad (3.2)$$

En ajoutant le mécanisme de remise à zéro à un correcteur linéaire $C(s)$, un nouveau correcteur est obtenu appelé correcteur avec remise à zéro. Considérons que la condition de remise à zéro est le passage par zéro de l'erreur, c'est-à-dire $e(t) = 0$, par conséquent la sortie du correcteur (la commande $u(t)$) devient égale à zéro pour $e(t) = 0$. Nous pouvons

décrire ce correcteur par l'équation différentielle impulsive suivante[31] :

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= -c_0 u(t) + k e(t) & \text{quand } e(t) \neq 0 \\ u(t^+) &= 0 & \text{quand } e(t) = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Le système (3.3) peut être représenté par le schéma fonctionnel de la Figure 3.2.

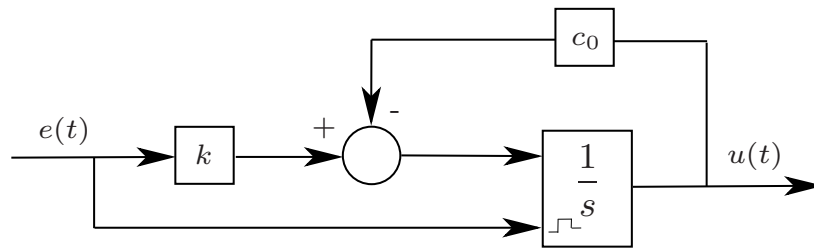


FIGURE 3.2: Schéma fonctionnel d'un élément du premier ordre avec remise à zéro.

On distingue deux types de dynamiques, l'une est continue quand $e(t) \neq 0$ et la seconde discrète ou impulsif quand $e(t_k) = 0$ avec $t_k(1, 2, \dots)$ les instants où l'erreur passe par zéro.

Prenant par exemple le système intégrateur suivant :

$$G(s) = \frac{s + 1}{s(s + 0,2)} \quad (3.4)$$

commandé par le correcteur linéaire sans remise à zéro suivant :

$$C(s) = \frac{1}{s + 1} \quad (3.5)$$

On considère le même correcteur mais avec un mécanisme de remise à zéro lorsque l'erreur de poursuite est nulle, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= -u(t) + e(t) & \text{quand } e(t) \neq 0 \\ u(t^+) &= 0 & \text{quand } e(t) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Pour le premier cas, la sortie $y(t)$ obtenue pour une entrée échelon unitaire est oscillante avec un dépassement important (Figure 3.3). L'introduction de la remise à zéro a permis de réduire le dépassement, le temps de réponse et les oscillations sont amortis très rapidement.

Pour le signal de commande (Figure 3.4), on constate que l'amplitude est très importante dans le cas d'un correcteur linéaire de base avec un comportement oscillant.

Dans le cas du correcteur avec remise à zéro, l'amplitude est faible et la commande se stabilise rapidement.

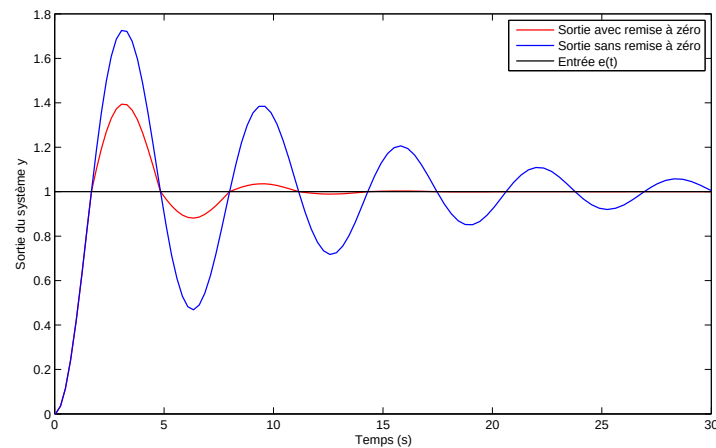


FIGURE 3.3: Réponse indicielle y du système avec et sans remise à zéro .

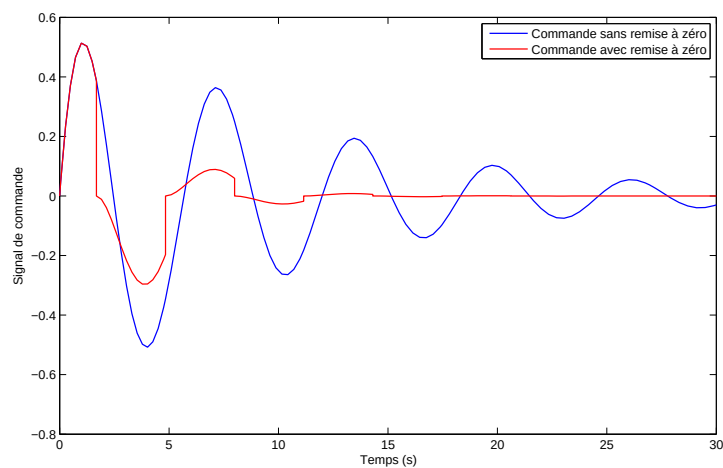


FIGURE 3.4: Commande avec et sans remise à zéro.

3.2.2 Intégrateur de Clegg

Pour améliorer les performances et la robustesse des systèmes dynamiques, l'ajout des intégrateurs linéaires est souvent nécessaire pour éliminer les erreurs en régime permanent. Mais l'utilisation des intégrateurs peut causer des problèmes de stabilité, puisque chaque intégrateur linéaire introduit un déphasage de 90 degrés.

Afin, d'éviter ce problème, JC Clegg [32] a proposé un autre intégrateur qui a pris son nom (intégrateur de Clegg). Cet intégrateur se remis à zéro quand l'entrée devient zéro (Figure 3.5) :

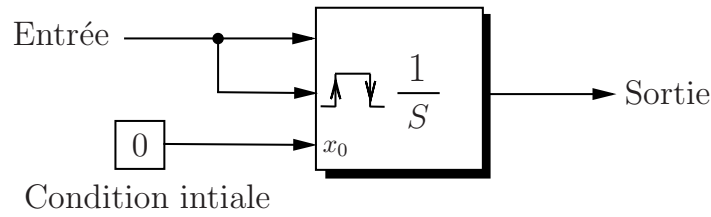


FIGURE 3.5: Intégrateur de Clegg.

L'intégrateur de Clegg est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= e(t) \quad \text{quand } e(t) \neq 0 \\ y(t^+) &= 0 \quad \text{quand } e(t) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Le comportement de la sortie de cet intégrateur pour une entrée sinusoïdale $e(t) = \sin(t)$ est représenté sur la Figure 3.6.

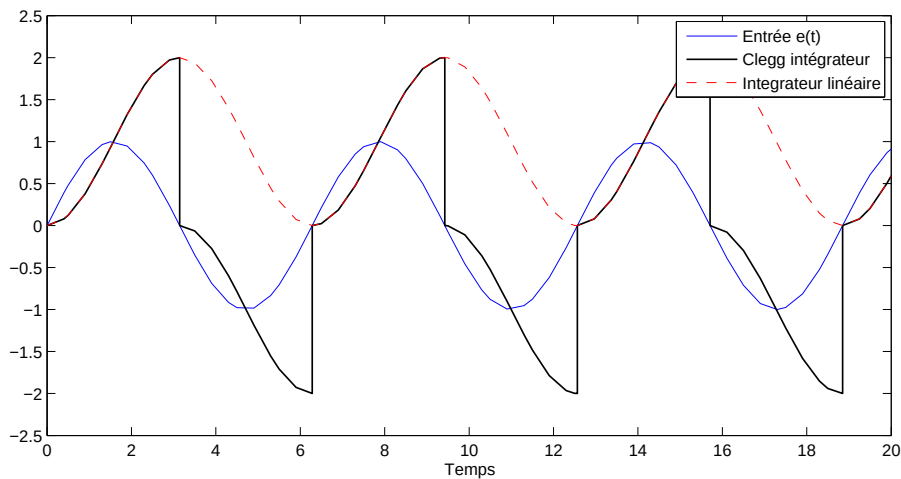


FIGURE 3.6: Réponse d'un intégrateur linéaire et intégrateur de Clegg à une entrée sinusoïdale.

3.3 Description générale d'un système de commande à remise à zéro

Le système de commande à remise à zéro est représenté sur la Figure 3.7. Le dispositif de réinitialisation C est décrit par le système d'équation différentielle impulsive (IDE)

suivante [33] :

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c e(t) \quad \text{quand } e(t) \neq 0 \\ x_c(t^+) &= A_\ell x_c(t) \quad \text{quand } e(t) = 0 \\ u(t) &= C_c x_c(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$A_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $B_c \in \mathbb{R}^{n_c \times 1}$, $C_c \in \mathbb{R}^{1 \times n_c}$ et la matrice $A_\ell = \begin{bmatrix} I_{n_{\bar{e}}} & 0 \\ 0 & 0_{n_e} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$

sélectionne les états à initialiser.

où $x_c(t)$, $e(t)$ et $u(t)$ sont respectivement vecteur d'état, l'entrée et la sortie du correcteur.

La première et la troisième équation quand $e(t) \neq 0$ définissent la dynamique linéaire du système dont la fonction de transfert est :

$$C(s) = C_c(sI - A_c)^{-1} B_c \quad (3.9)$$

et la dynamique impulsive est déclenchée quand $e(t) = 0$.

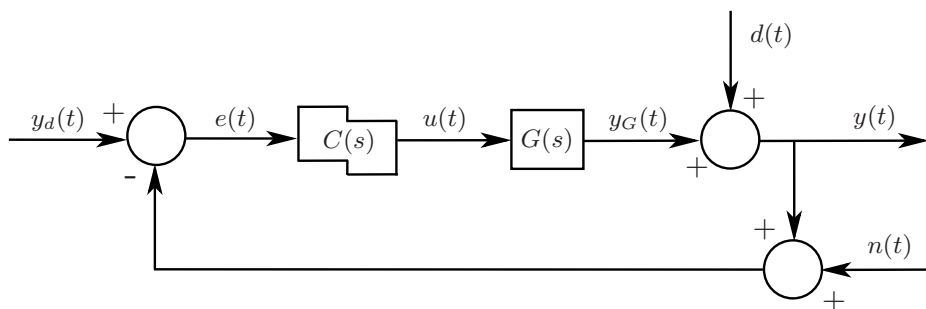


FIGURE 3.7: Schéma fonctionnel d'un système de commande de réinitialisation.

Remarque 3-1 : La dimension du correcteur avec remise à zéro est donnée par :

$$n_c = n_e + n_{\bar{e}} \quad (3.10)$$

avec n_e représente le nombre des états du correcteur $C(s)$ qui sont remis à zéro, et $n_{\bar{e}}$ nombre d'états qui ne sont pas remis à zéro.

Le système G à commander par le correcteur est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_G(t) &= A_G x_G(t) + B_G u(t) \\ y_G(t) &= C_G x_G(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

avec $A_G \in \mathbb{R}^{n_G \times n_G}$, $B_G \in \mathbb{R}^{n_G \times 1}$ et $C_G \in \mathbb{R}^{1 \times n_G}$.

Le modèle dans l'espace d'état en boucle fermée du système (Figure 3.7) est donné par IDE :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{bf}x(t) + B_{bf}\omega(t) \quad \text{quand } x(t) \notin M(t) \\ x(t^+) &= A_R x(t) \quad \text{quand } x(t) \in M(t) \\ y(t) &= C_{bf}x(t) + d(t) \\ e(t) &= \omega(t) - C_{bf}x(t) \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} \text{avec : } x &= \begin{bmatrix} x_G \\ x_c \end{bmatrix}, \quad A_{bf} = \begin{bmatrix} A_G & B_G C_c \\ -B_c C_G & A_c \end{bmatrix}, \quad B_{bf} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix}, \quad C_{bf} = \begin{bmatrix} C_G & 0 \end{bmatrix}, \\ A_R &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A_\ell \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La première équation différentielle décrit le mode continu, la deuxième équation définit les actions de remise à zéro et la troisième équation donne la sortie du système. Le signal exogène $\omega(t)$ est défini comme suit :

$$\omega(t) = y_d(t) - n(t) - d(t) \tag{3.13}$$

La surface de réinitialisation M est l'ensemble des états pour lesquels $e(t) = 0$, plus précisément :

$$M = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_G+n_c} : e(t) = 0, (I - A_R)\xi \neq 0\} \tag{3.14}$$

si $x(t_*) \in M(t_*)$, alors $x(t_*)$ est appelé état de réinitialisation et t_* le temps de remise à zéro.

D'après l'équation(3.14) : $x(t_*) \in M(t_*) \implies x(t_*^+) \notin M(t_*^+)$.

Les intervalles de remise à zéro τ_i sont définis comme :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= t_1; \\ \tau_{i+1} &= t_{i+1} - t_i, i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

En absence de la remise à zéro, c'est-à-dire, lorsque $A_R = I$, le système en boucle fermée résultant $C_{bf}(sI - A_{bf})^{-1}B_{bf}$ est appelé système linéaire de base.

Remarque 3-2 : Si certains états sont affectés par la réinitialisation, alors la matrice de réinitialisation A_R prend la forme :

$$A_R = \text{diag}(\underbrace{1 \dots 1}_{n_G}, \underbrace{0 \dots 0}_{n_c}) \quad (3.15)$$

où n_G nombre d'états du système G et n_c nombre d'états du contrôleur avec remise à zéro C , et $n = n_G + n_c$ est la dimension totale du système.

- si $n = n_G$, nous avons un correcteur linéaire.
- si $n = n_c$, la réinitialisation est dite complète et $x(t_k^+) = 0 \in \mathbb{R}^n$.
- si $0 < n_c < n$, la réinitialisation est dite partielle.

3.4 Stabilité des systèmes à remise à zéro

On définit deux types de stabilité, stabilité externe et stabilité interne.

- la stabilité externe : on considère uniquement la relation entrée-sortie en faisant abstraction de l'état interne du système on suppose $x(0) = 0$.
- la stabilité interne : consiste à analyser les solutions des équations d'état dues aux conditions initiales, pour simplifier, on suppose que $x(0) = 0$.

Dans ce qui suit on s'intéresse à la stabilité interne, en utilisant le théorème de Lyapunov.

3.4.1 Stabilité interne (Théorème de Lyapunov)

Il existe deux méthodes de Lyapunov :

- Méthode indirecte (1ère méthode de Lyapunov) basée sur la linéarisation (jacobienne) autour du point d'équilibre.
- Méthode directe (2ème méthode de Lyapunov) exploite directement le modèle non linéaire.

Définition 3-1 (Fonction définie positive) : Une fonction scalaire $V(x)$ continue et différentiable (par rapport à x) est dite définie positive, dans une région Ω , autour de l'origine si :

$$(1) V(0) = 0,$$

(2) $V(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$, $x \neq 0$.

si (2) est remplacé par $V(x) \geq 0$, alors la fonction est dite définie semi-positive.

Définition 3-2 (Fonction quadratique définie positive) : La fonction quadratique $V(x) = x^T P x$, où $P_{n \times n}$ est une matrice réelle symétrique, est dite définie positive si toutes les valeurs propres de la matrice $P_{n \times n}$ sont strictement positives.

3.4.2 Stabilité au sens de Lyapunov (méthode directe)

La stabilité au sens de Lyapunov est une traduction mathématique d'une constatation élémentaire : si l'énergie totale d'un système se dissipe (c'est-à-dire décroît avec le temps) alors le système (qu'il soit linéaire ou non, stationnaire ou non) tend vers un état d'équilibre (il est stable). La méthode directe cherche donc à générer une fonction scalaire de type énergétique qui admet une dérivée temporelle négative.

Théorème 3.1 [35] (Stabilité locale) : L'état d'équilibre $x_e = 0$ est stable s'il existe une fonction continuellement dérivable $V(x)$ telle que :

$$(1) V(0) = 0,$$

$$(2) V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0, x \in \Omega$$

$$(3) \dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0, x \in \Omega$$

où $\dot{V}$ est la dérivée de V par rapport au temps et Ω est une région autour de 0. Si de plus (3) est remplacée par $\dot{V} < 0$ alors l'état d'équilibre est asymptotiquement stable.

La fonction $V(x)$ est appelée fonction de Lyapunov.

Ce théorème est une condition suffisante de stabilité mais ne permet pas de guider l'utilisateur dans le choix de la fonction de Lyapunov, et ne permet pas de conclure si cette fonction n'est pas disponible. Une fonction de Lyapunov est une fonction définie positive dont on teste la décroissance autour du point d'équilibre. Le développement de méthode permette de construire une fonction de Lyapunov, pour un système donné, a fait l'objet de plusieurs études ces dernières décennies. Les formes quadratiques sont les plus utilisées.

Théorème 3.2 [35] (Stabilité globale) L'état d'équilibre x_e est globalement asymptotiquement stable s'il existe une fonction continuellement dérivable $V(x)$ telle que :

- (1) $V(0) = 0$,
- (2) $V(x) > 0 \forall x \neq 0$,
- (3) $\dot{V}(x) < 0 \forall x \neq 0$,
- (4) $\dot{V} \rightarrow -\infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$.

3.5 Stabilité quadratique (Condition H_β)

Dans cette section, nous étudions la stabilité interne du système (3.12) tout en donnant la condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique (stabilité quadratique).

3.5.1 Condition H_β

Considérons le système autonome décrit par l'équation différentielle impulsive suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{bf}x(t) \quad \text{quand } x(t) \notin M \\ x(t^+) &= A_R x(t) \quad \text{quand } x(t) \in M \end{aligned} \quad (3.16)$$

avec :

$$M = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_p+n_c} : C_{bf}\xi = 0, (I - A_R)\xi \neq 0\} \quad (3.17)$$

Théorème 3-1 [33] Soit $V : \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable définie positive telle que :

$$\dot{V}(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T A_{bf}x(t) < 0, x \neq 0 \quad (3.18)$$

et

$$\Delta V(x) = V(A_R x) - V(x) \leq 0, x \in M \quad (3.19)$$

le système de commande à remise à zéro (3.16) est asymptotiquement stable.

Dans la suite, nous nous intéressons à la fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^T P x$.

Si les conditions (3.18) et (3.19) sont satisfaites, alors le système de commande à remise à zéro est quadratiquement stable.

Définition 3-3 [33] Le système de commande à remise à zéro (3.16) doit satisfaire à la condition H_β s'il existe un $\beta \in \mathbb{R}^{n_e}$ tel que la partie réelle de la fonction suivante :

$$H_\beta(s) = \begin{bmatrix} \beta C_p & 0_{n_{\bar{e}}} & I_{n_e} \end{bmatrix} (sI - A_{bf})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0_{n_{\bar{e}}}^T \\ I_{n_e} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

est strictement positif. I_{n_e} est une matrice identité de taille $n_e \times n_e$ et $I_{n_{\bar{e}}}$ désigne une matrice de zéros de taille $n_e \times n_{\bar{e}}$.

Définition 3-4 [33] Le système (3.16) de commande de remise à zéro est dit quadratiquement stable s'il existe une matrice symétrique définie positive P de telle sorte que $V(x) = x^T P x$ satisfait les conditions (3.18) et (3.19).

Théorème 3-2 [33] Le système de remise à zéro (3.16) est quadratiquement stable s'il satisfait la condition H_β .

3.5.2 Exemple illustratif

Considérons le système de commande à remise à zéro (3.16) avec $C(s) = \frac{1}{s+1}$ et $P(s) = \frac{1}{s}$. On déduit les matrices suivantes :

$$A_c = -1, \quad B_c = 1, \quad C_c = 1, \quad A_\ell = 0 \quad (3.21)$$

et

$$A_G = 0, \quad B_G = 1, \quad C_G = 1 \quad (3.22)$$

Le système en boucle fermée est donné par :

$$A_{bf} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_{bf} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{bf} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Pour vérifier la condition H_β , d'après (3.20), on a :

$$H_\beta(s) = \begin{bmatrix} \beta & 1 \end{bmatrix} (sI - A_{C\ell})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s + \beta}{s^2 + s + 1} \quad (3.24)$$

dont la réponse en fréquence est

$$H_\beta(j\omega) = \frac{\beta(1 - \omega^2) + \omega^2}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2} + j \frac{\omega(1 - \omega^2) - \beta\omega}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2} \quad (3.25)$$

On remarque que pour tout $\beta \in [0, 1]$, la partie réelle de la fonction de transfert $H_\beta(j\omega)$ est positive pour toutes les valeurs de $\omega > 0$, alors le système en boucle fermée est quadratiquement stable.

3.6 Synthèse d'un correcteur PI avec remise à zéro

Le correcteur PI avec remise à zéro est défini en ajoutant en parallèle un intégrateur de Clegg (CI) à un correcteur PI [7]. Dans ce cas, la structure d'un correcteur PI avec remise à zéro est donnée par la Figure 3.8 où l'entrée $e(t)$ est le signal d'erreur, $v(t)$ est le signal de commande, K_p est le gain proportionnel, τ_i est la constante intégrale. On constate que ce type de correcteur à trois termes principaux : un terme proportionnel P , un terme intégral I et un terme intégrateur de Clegg (CI).

Le principal avantage de l'utilisation du terme intégrateur de Clegg [32] est l'amélioration de la réponse en régime transitoire.

Le nouveau paramètre P_{RAZ} est une constante sans dimension appelée rapport de remise à zéro avec $P_{RAZ} \in [0, 1]$. On remarque que le correcteur PI linéaire classique sans remise à zéro est obtenu en prenant $P_{RAZ} = 0$, dans le cas où $P_{RAZ} = 1$ la remise à zéro est obtenue, par conséquent, le choix du paramètre P_{RAZ} dépend du système à commander.

Ce paramètre permet d'améliorer les performances du système en boucle fermée.

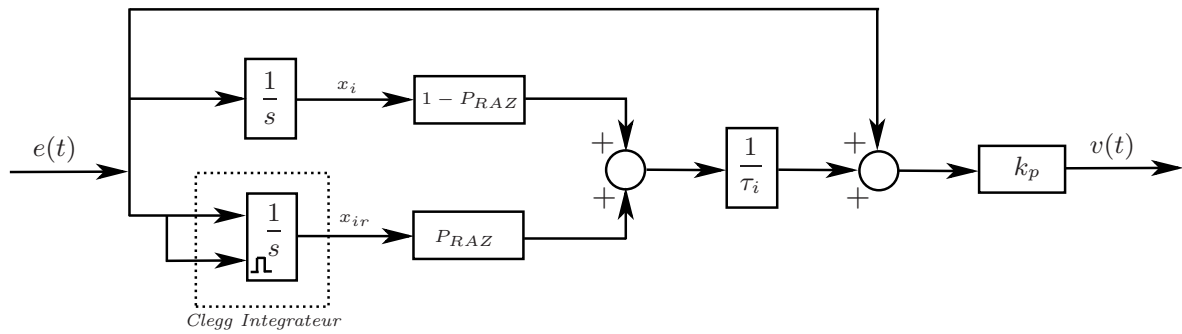


FIGURE 3.8: Structure d'un correcteur PI avec remise à zéro.

3.6.1 Synthèse dans le cas d'un système du premier ordre

Dans cette section, on s'intéresse au réglage d'un correcteur PI avec remise à zéro d'un système du premier ordre. L'objectif principal est d'exploiter l'action de remise à zéro en utilisant le paramètre de réinitialisation P_{RAZ} afin d'obtenir une amélioration significative en termes de performances en boucle fermée.

La représentation d'état du correcteur PI avec remise à zéro est donnée par l'équation différentielle impulsive :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_i(t) \\ \dot{x}_{ir}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(t) \\ x_{ir}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e(t) \quad \text{quand } e(t) \neq 0 \\
 x_r(t^+) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(t) \\ x_{ir}(t) \end{bmatrix} \quad \text{quand } e(t) = 0 \\
 v &= \frac{K_p}{\tau_i} \begin{bmatrix} 1 - P_{RAZ} & P_{RAZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(t) \\ x_{ir}(t) \end{bmatrix} + K_p e(t)
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d'où : } A_c &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_c = \begin{bmatrix} 1 - P_{RAZ} & P_{RAZ} \end{bmatrix}, \quad D_c = K_p \text{ et} \\
 A_\ell &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Considérons le système représenté sur la Figure 3.9, où correcteur avec remise à zéro $C(s)$ est un correcteur PI, et le système à commander $G(s) = \frac{K}{1 + \tau s}$ est décrit par le

modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_G(t) &= -\frac{1}{\tau}x_G(t) + \frac{K}{\tau}v(t), \quad x_{G0} = x_G(t_0) \\ y(t) &= x_G(t)\end{aligned}\tag{3.27}$$

où x_G est l'état du système G , la constante de temps τ et le gain K sont des scalaires.

Le système autonome non forcé en boucle fermée (BF) est donnée par $e(t) = -y(t)$, et l'état du système de dimension $n = n_G + n_C$ est

$$x = \begin{bmatrix} x_G \\ x_i \\ x_{ir} \end{bmatrix}\tag{3.28}$$

alors le système en BF est donnée par

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_{bf}x(t) \quad \text{quand } x(t) \notin M(t) \\ x(t^+) &= A_Rx(t) \quad \text{quand } x(t) \in M(t) \\ y(t) &= C_{bf}x(t)\end{aligned}\tag{3.29}$$

avec

$$A_{bf} = \begin{bmatrix} -\frac{1+K_cK}{\tau} & \frac{K_cK}{\tau\tau_i}(1-P_{RAZ}) & \frac{K_cK}{\tau\tau_i}P_{RAZ} \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\tag{3.30}$$

$$A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\tag{3.31}$$

$$C_{bf} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\tag{3.32}$$

et la solution du système (3.29) est donnée par :

$$x(t) = e^{A_{bf}(t-t_k)}x(t_k) \quad \text{pour } t \in (t_k, t_{k+1}]\tag{3.33}$$

et la sortie $y(t)$ dans l'intervalle $(t_k, t_{k+1}]$ est donnée par

$$y(t) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} e^{-\alpha(t-t_k)} \sin(\beta(t-t_k))(1-P_{RAZ})x_{ik},\tag{3.34}$$

avec les quantités α et β sont donnée par

$$\alpha = \frac{1 + K_c K}{2\tau} \quad (3.35)$$

et

$$\beta = \sqrt{\left| \alpha^2 - \frac{K_c K}{\tau \tau_i} \right|} \quad (3.36)$$

et le paramètre de remise à zéro P_{RAZ} est donnée comme suit

$$P_{RAZ} = \frac{e^{-\frac{\alpha\pi}{\beta}}}{1 + e^{-\frac{\alpha\pi}{\beta}}} \quad (3.37)$$

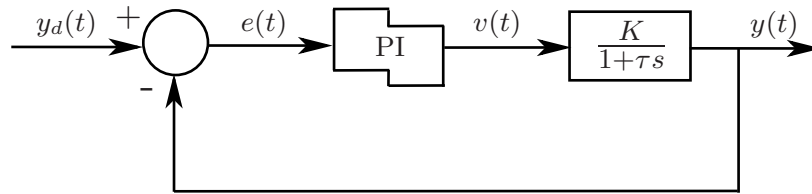


FIGURE 3.9: Correcteur PI avec remise à zéro appliqué à un système linéaire.

3.6.2 Exemple d'application

Considérons un système dynamique du premier ordre donné par la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\frac{1}{2}x_G(t) + \frac{3}{2}v(t) \\ y(t) &= x_G(t) \end{aligned} \quad (3.38)$$

- Les paramètres du correcteur linéaire qui donnent une réponse rapide avec un dépassement important sont $K_c = 2$ et $\tau_i = 0,15s$.

- Les quantités α et β sont calculées en utilisant les relations (3.35) et (3.36), donc $\alpha = 1,77$ et $\beta = 4,12$.

- En utilisant l'équation (3.37), le paramètre de remise à zéro est $P_{RAZ} = 0,21$.

Les résultats de simulation, sont donnés par les Figures 3.10 et 3.11.

La Figure 3.10 montre que les réponses pour le PI classique et le PI avec remise à zéro sont identiques au premier instant de remise à zéro, et l'effet du PI avec de remise à zéro

a réduit le premier dépassement et rend le système rapide contrairement au correcteur PI classique qui donne une sortie oscillante et lente.

À l'instant $t = 6s$, on applique une perturbation (Figure 3.11). On remarque que le correcteur PI classique assure le rejet de la perturbation mais avec un temps lent, par conséquent le rejet de perturbation est plus rapide avec le correcteur PI avec remise à zéro.

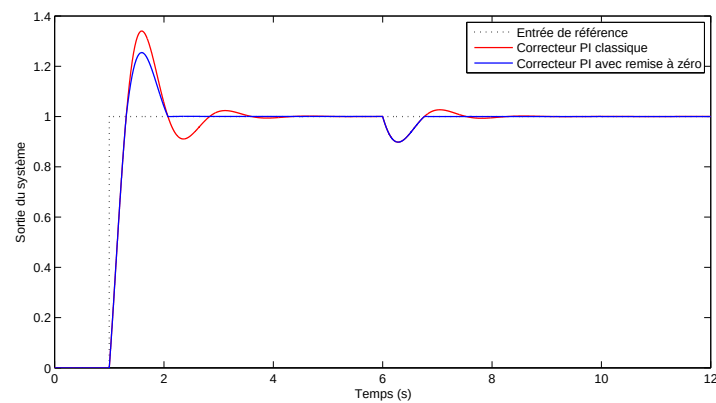


FIGURE 3.10: Réponse du système avec le correcteur PI classique et PI avec remise à zéro.

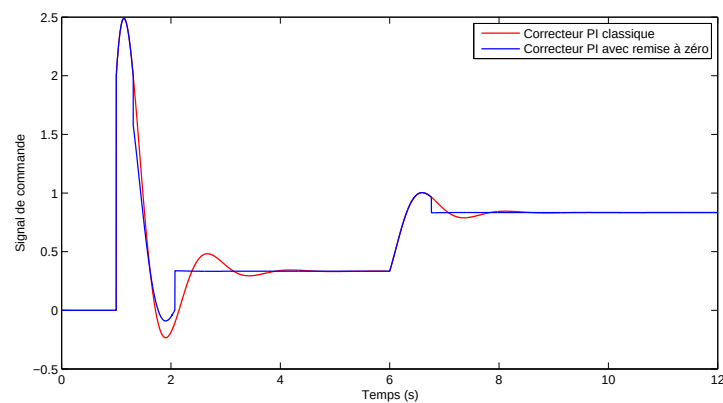


FIGURE 3.11: Signal de commande avec le correcteur PI classique et PI avec remise à zéro

3.7 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la description des correcteurs avec remise à zéro. L'intégration d'un correcteur classique PI, doté d'un mécanisme de remise à zéro avec le système en boucle fermée a pour objectif de surmonter les limitations des correcteurs linéaires de bases et d'assurer de bonnes performances pour le système en boucle fermée.

La stabilité quadratique joue un rôle important dans les systèmes de commande avec remise à zéro. Pour les systèmes linéaires, la stabilité quadratique est testée par l'intermédiaire de fonction de Lyapunov.

Pour les systèmes avec remise à zéro, la stabilité est testée en utilisant la condition H_β .

Pour illustrer les avantages de la commande avec remise à zéro, une application portant sur un réacteur biologique qui sert à la production de la levure de boulangerie, fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre IV

Application sur un réacteur biologique

Chapitre 4

Application sur un réacteur biologique

4.1 Introduction

Les réacteurs biologiques fonctionnent généralement en mode discontinu ou semi-continu [5]. Ils ne peuvent avoir leur comportement décrit que par des modèles cinétiques complexes susceptibles de les représenter dans une large plage de fonctionnement.

Afin de prendre en compte le caractère non linéaire et non stationnaire des bioprocédés, une commande non linéaire basée sur la géométrie différentielle et la linéarisation globale du comportement entrée-sortie semble appropriée [5].

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la synthèse d'une loi de commande géométrique pour le réacteur biologique dont le modèle est de nature fortement non linéaire. Dans le but de mettre les performances de cette loi de commande, des tests de simulation sont effectués et concernent principalement le problème de poursuite. Par la suite l'intégration d'un correcteur PI doté d'un mécanisme de remise à zéro pour définir la variable externe permet d'améliorer les performances du système.

4.2 Modèle dynamique d'un réacteur biologique

L'objectif principal de cette partie est l'étude de l'application de la commande non linéaire géométrique à un réacteur biologique pour la production de levure de boulangerie. Le modèle mathématique du réacteur est nécessaire pour l'application de la commande

géométrique, pour cela on utilise un modèle physiologique pour la croissance de la levure.

Le modèle dynamique (1.6) du réacteur biologique est présenté par le système non linéaire, dans l'espace d'état, affine par rapport à la commande, suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x) + g(x)u(t) \\ y(t) &= h(x)\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_7 \end{pmatrix} ; \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_7(x) \end{pmatrix} ; \quad g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_7(x) \end{pmatrix}\tag{4.2}$$

avec le vecteur d'état est défini comme suit :

$$x = \left[x_1 = E; \quad x_2 = X_1; \quad x_3 = X_2; \quad x_4 = X_3; \quad x_5 = S; \quad x_6 = A; \quad x_7 = V \right]^T\tag{4.3}$$

et le champ de vecteur de la dynamique $f(x)$ et donné par :

$$f(x) = \begin{pmatrix} \frac{0,45}{0,14}R_1 - (1-\psi)\frac{R_3}{0,55} \\ R_1 + R_5 + R_9 - R_4 - R_8 \\ R_2 + R_4 + R_7 - R_5 - R_6 \\ R_3 + R_8 + R_6 - R_9 - R_7 \\ -\frac{R_1}{0,14} - \frac{R_2}{0,5} \\ \frac{0,01}{0,14}R_1 - \psi\frac{R_3}{0,55} \\ 0 \end{pmatrix}\tag{4.4}$$

et le champ de vecteur de la commande $g(x)$ et donné par :

$$g(x) = \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{x_7} \\ -\frac{x_2}{x_7} \\ -\frac{x_3}{x_7} \\ -\frac{x_4}{x_7} \\ -\frac{x_5}{S_{in} - x_5} \\ -\frac{x_6}{x_7} \\ 1 \end{pmatrix}\tag{4.5}$$

et le champ de vecteur de la sortie $h(x)$ et donné par :

$$h(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

La grandeur de commande est le débit d'alimentation en glucose $u = F_{in}$, la sortie est la concentration en glucose dans le fermenteur $y = S$.

4.3 Synthèse de la loi de commande non linéaire

4.3.1 Calcul de degré relatif du système

Pour obtenir la loi de commande du système non linéaire, il faut d'abord déterminer le degré relatif de ce système est défini par la relation (2.13).

La dérivée de Lie de $h(x)$ dans la direction du champ de vecteur h est :

$$L_g h(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_5}{\partial x_1} & \frac{\partial x_5}{\partial x_2} & \frac{\partial x_5}{\partial x_3} & \frac{\partial x_5}{\partial x_4} & \frac{\partial x_5}{\partial x_5} & \frac{\partial x_5}{\partial x_6} & \frac{\partial x_5}{\partial x_7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{x_7} \\ \frac{x_2}{x_7} \\ -\frac{x_3}{x_7} \\ \frac{x_4}{x_7} \\ -\frac{x_5}{x_7} \\ \frac{S_{in} - x_5}{x_7} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{S_{in} - x_5}{x_7} \quad (4.7)$$

Cette dérivée est toujours non nulle, puisque la concentration du glucose $x_5 = S$ évolue en fonction du temps à partir de la condition initiale S_{in} . Le degré relatif de la sortie $h(x) = x_5$ du système non linéaire (1.6) est donc égal à 1.

4.3.2 Détermination de la loi de commande

Pour un système de degré relatif égal à 1, la forme générale de la loi de retour d'état qui linéarise le comportement entrée v -sortie y du système en boucle fermée [3] est de la forme :

$$u = \frac{\dot{z}_1 - L_f h(x)}{L_g h(x)} \quad (4.8)$$

Ainsi, on réalise un placement de pôles en introduisant un bouclage (Figure 4.1), et d'après l'équation (2.53) la loi de commande est :

$$u = \frac{v - c_0 h(x) - L_f h(x)}{L_g h(x)} \quad (4.9)$$

où c_0 est un paramètre scalaire constant.

avec :

$$L_g h(x) = \frac{S_{in} - x_5}{x_7} \quad (4.10)$$

et

$$L_f h(x) = \frac{-R_1}{0,14} - \frac{-R_2}{0,5} \quad (4.11)$$

Cette loi de commande est sous la forme

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (4.12)$$

avec

$$\alpha(x) = \left(\frac{R_1}{0,14} + \frac{R_2}{0,5} - c_0 x_5 \right) \frac{x_7}{S_{in} - x_5} \text{ et } \beta(x) = \frac{x_7}{S_{in} - x_5} \quad (4.13)$$

Afin d'éliminer l'erreur statique éventuelle due aux erreurs de modélisation et aux perturbations non mesurées, on définit l'entrée externe v comme la sortie d'un régulateur proportionnel-intégral (Figure 4.1)

En introduisant la loi de commande (4.12) dans le système original, on obtient pour le transfert v et y , une dynamique d'un système linéaire du premier ordre caractérisé par la fonction de transfert suivante :

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{1}{s + c_0} \quad (4.14)$$

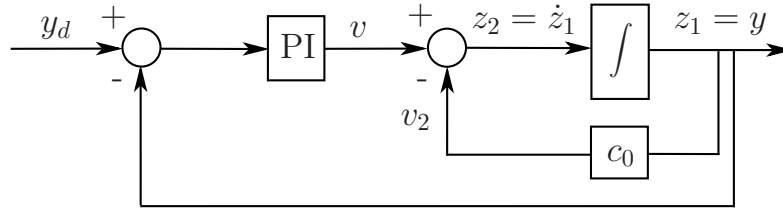


FIGURE 4.1: Commande linéarisante du réacteur biologique avec placement de pôles.

et la fonction de transfert du régulateur PI est donnée par l'équation (2.60), et la fonction de transfert du système en boucle fermée (Figure 4.1) est donnée par :

$$\frac{Y(s)}{Y_d(s)} = \frac{K_c \left(s + \frac{1}{\tau_i} \right)}{s^2 + (c_0 + K_c) s + \frac{K_c}{\tau_i}} \quad (4.15)$$

Les paramètres scalaires c_0 , K_c et τ_i sont choisis de manière à approcher un polynôme minimisant un critère ITAE (2.64), on vérifie que les pôles sont à parties réelles négatives afin d'assurer la stabilité de la boucle fermée. L'équation caractéristique en boucle fermée est :

$$s^2 + (c_0 + K_c) s + \frac{K_c}{\tau_i} = 0 \quad (4.16)$$

Le dénominateur des fonctions de transfert optimales pour le critère ITAE est :

$$s^2 + 3,2\omega_0 s + \omega_0^2 \quad (4.17)$$

par identification de la relation (4.16) avec la relation (4.17), on obtient :

$$\begin{aligned} c_0 + K_c &= 3,2\omega_0 \\ \frac{K_c}{\tau_i} &= \omega_0^2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

les valeurs de K_c et τ_i du correcteur PI sont choisies d'une manière avoir une réponse rapide et un dépassement faible, alors on prend :

$$\omega_0 = 3,13 \text{ rad/s}$$

$$\tau = 0,17 \text{ h}$$

$$y_d = 0,07 \text{ g/l}$$

ce qui donne :

$$K_c = 0,7$$

$$\tau_i = 0,42$$

Le schéma de la Figure 2.7 montre la relation qui existe entre l'entrée du PI et sa sortie est :

$$\dot{x}_8 = \frac{K_c}{\tau_i}(y_d - x_5) \quad (4.19)$$

Après avoir remplacé les valeurs de K_c et τ_i , on trouve :

$$\dot{x}_8 = 0,29 - 4,12x_5 \quad (4.20)$$

et l'entrée auxiliaire v :

$$v = x_8 - 0,7x_5 + 0,05 \quad (4.21)$$

Ainsi, en ajoutant ces équations au modèle du réacteur biologique linéarisé, on obtient le système en boucle fermée.

4.4 Simulation et interprétation des résultats

4.4.1 Conditions de simulation

La fermentation est réalisée dans un réacteur qui fonctionne en mode semi-continu, alimenté en glucose à la concentration S_{in} de 300 g/l (Figure 1.8).

Les conditions initiales considérées sont :

- concentration initiale en éthanol : $x_1 = 0,0$ g/l
- concentration initiale en levure (états physiologiques) : $(x_2, x_3, x_4) = (3,0$ g/l, $0,0$ g/l, $0,0$ g/l)
- concentration initiale en glucose : $x_5 = 0,0$ g/l
- concentration initiale en acétate : $x_6 = 0,0$ g/l
- volume initial : $x_7 = 10$ l
- l'état initiale du correcteur PI : $x_8 = 0$.

Le volume maximal du réacteur est égal à 20 l. Le débit maximal d'alimentation admissible est 5 l/h.

Dans le cas de la production semi-continue de levures, la consigne imposée est une concentration en glucose égale à $S_c = 0,07$ g/l.

4.4.2 Interprétation des résultats

La concentration en glucose, est donnée par la Figure 4.2, part de 0 g/l et augmente jusqu'à atteindre sa consigne.

La concentration en éthanol (Figure 4.3) part de 0 g/l et passe par un maximum d'environ 0,03 g/l avant de se stabiliser à environ 0,04 g/l correspondant à la transformation stochiométrique de glucose en éthanol. Ce fait est favorable à une bonne productivité en levure.

L'évolution du débit d'alimentation en glucose, variable de commande, est donnée par la Figure 4.4. Le débit évolue de manière douce et régulière. Une caractéristique remarquable est l'allure exponentielle du profil de commande qui témoigne du comportement fortement non linéaire de ce système et rend très difficile la mise en œuvre d'une commande linéaire classique. Le débit est resté largement inférieur à sa valeur maximale autorisée (30 l/h). L'évolution du volume de liquide (Figure 4.5) suit bien sûr celle du débit d'alimentation. La contrainte de volume maximal n'est pas atteinte au bout de 35h.

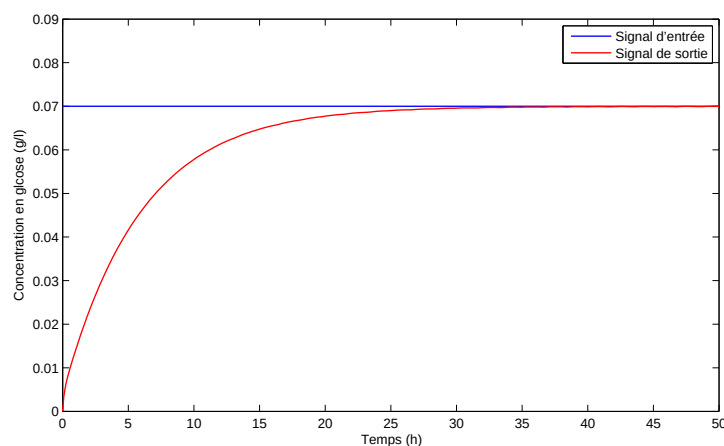


FIGURE 4.2: Concentration en glucose.

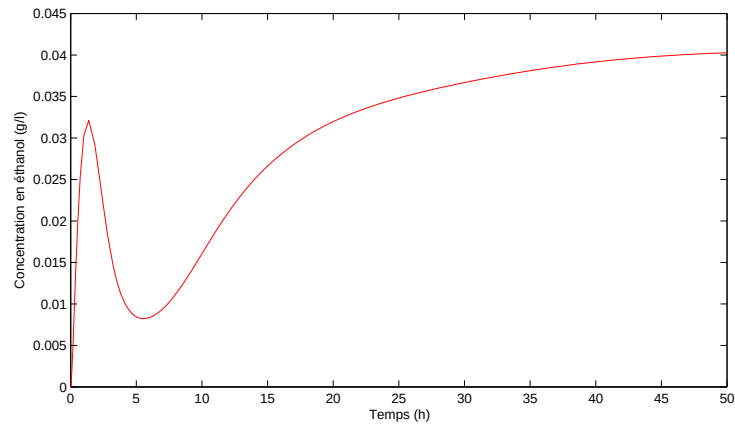


FIGURE 4.3: Concentration en éthanol.

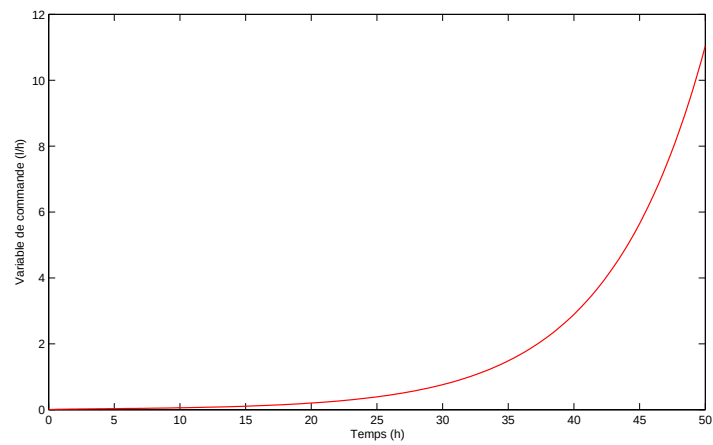


FIGURE 4.4: Débit de glucose (variable de commande).

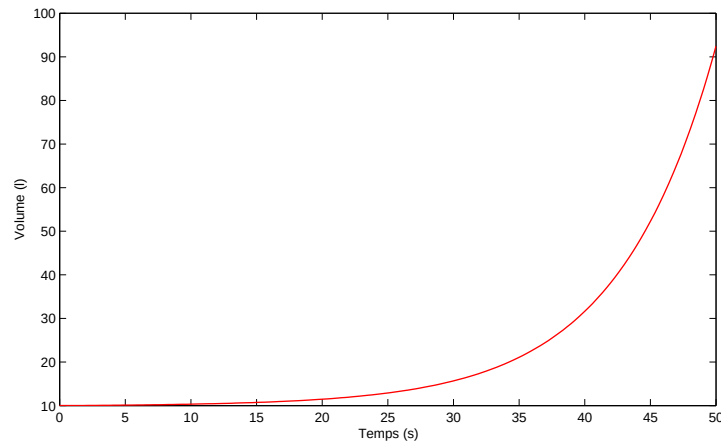


FIGURE 4.5: Volume du réacteur biologique.

4.5 Test de poursuite et de perturbation

4.5.1 Test de poursuite de trajectoire

Pour évaluer les performances de la loi de commande, on réalise un test de poursuite, pour cela, on choisit pour t allant de 0h jusqu'à 100h une consigne de 0.07 g/l et pour t allant de 100h jusqu'à 200h une valeur de 0.04 g/l. On remarque bien que la sortie (concentration en glucose) suit correctement la trajectoire de référence imposée.

L'évolution de la sortie est donnée par la Figure 4.6.

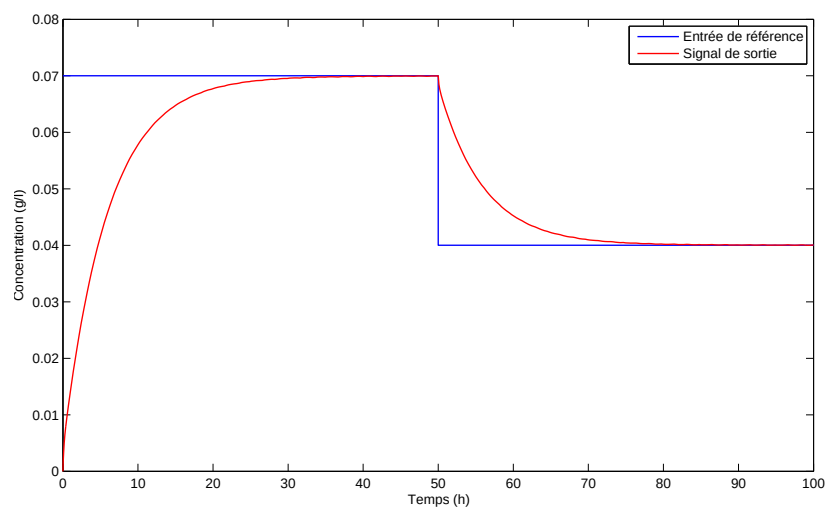


FIGURE 4.6: Concentration en glucose.

4.5.2 Test de perturbation

Le deuxième teste effectué concerne le rejet de perturbation, pour cela, on a choisi pour t allant de 0h jusqu'à 50h une alimentation en glucose égale à 300 g/l et pour t allant de 50h jusqu'à 100h une alimentation égale à 50 g/l.

Les résultats obtenus sont donnés par les Figure 4.7 et Figure 4.8. On constate que la stratégie de commande présentée assure un rejet de perturbation et l'évolution de la grandeur de commande reste toujours acceptable.

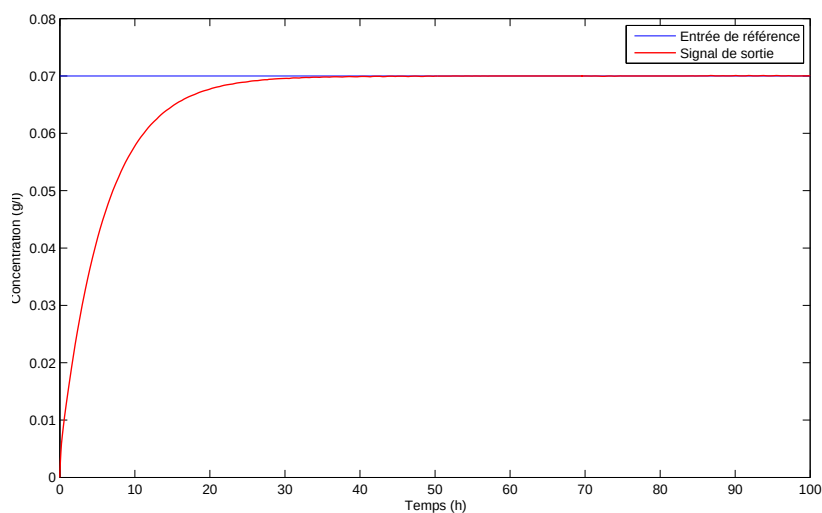


FIGURE 4.7: Poursuite de consigne : concentration en glucose.

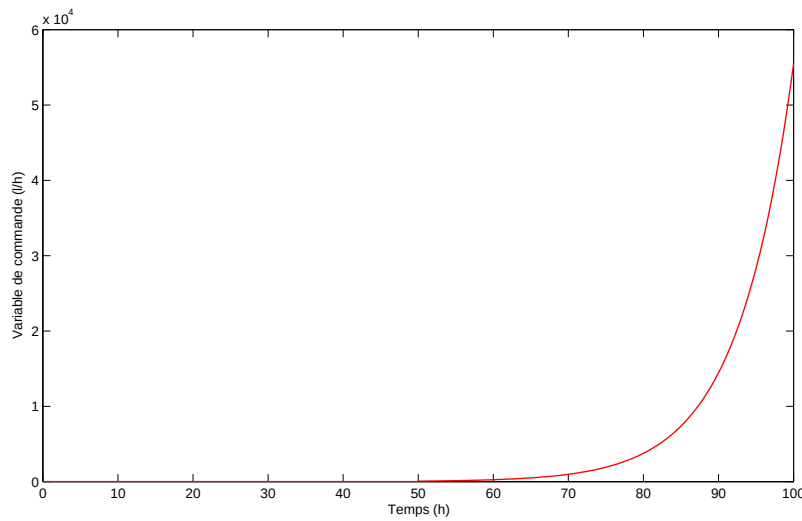


FIGURE 4.8: Concentration en glucose.

4.6 Amélioration des performances d'une commande géométrique

Dans cette section, l'objectif est d'améliorer les performances du système de commande du réacteur biologique. Dans cette optique, on propose de définir la variable externe v par un correcteur PI avec remise à zéro.

4.6.1 Synthèse d'un correcteur PI avec remise à zéro

La fonction de transfert en boucle fermée (entrée externe v - sortie commandée y) est obtenue en utilisant un retour d'état synthétisé par la notion du degré relative.

On distingue trois étapes importantes pour la synthèse d'un correcteur PI avec remise à zéro d'un système de premier ordre :

- Étape 1 : synthèse d'un correcteur linéaire PI en déterminant les paramètres K_c et τ_i .
- Étape 2 : calculer les quantités α et β en utilisant les formules (3.35) et (3.36).
- Étape 3 : calculer le paramètre de remise à zéro P_{RAZ} en utilisant la formule (3.37).

La dynamique du premier ordre désirée pour le réacteur biologique est spécifiée par les paramètres suivants :

gain statique $K = \frac{1}{c_0} = 0.17$ et la constante de temps désirée $\tau = \frac{1}{c_0} = 0.17$.

Rappelons que les paramètres du correcteur linéaire trouvés dans le chapitre précédent sont $K_c = 0,7$ et $\tau_i = 0,42h$.

Les quantités α et β calculées en utilisant les formules (3.35) et (3.36), sont $\alpha = 5,0061764$ et $\beta = 3,902364$.

En utilisant l'équation (3.37), le paramètre de remise à zéro est $P_{RAZ} = 0,017672$.

Les résultats de simulation obtenus dans le cas de la poursuite sont donnés par les Figures 4.9 et 4.10.

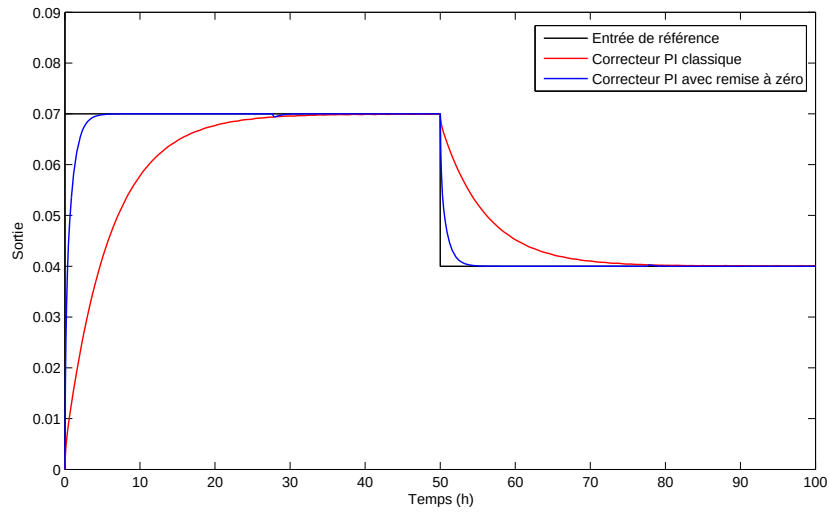


FIGURE 4.9: Réponse du système avec le correcteur PI classique et PI avec remise à zéro.

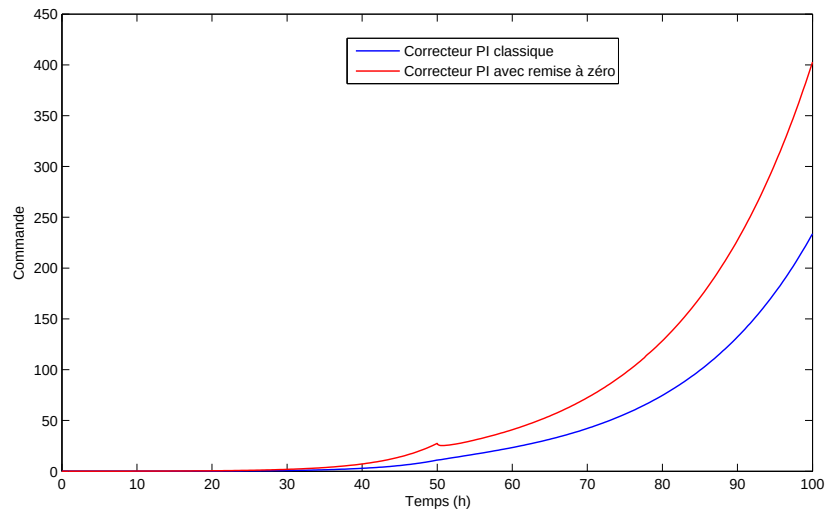


FIGURE 4.10: Commande.

4.6.2 Interprétation des résultats

Pour évaluer les performances du correcteur PI avec remise à zéro, on choisit à l'instant $t = 0$ pour la concentration en glucose du réacteur biologique une consigne de 0.07 g/l, puis à l'instant $t = 50$, on diminue la concentration du glucose jusqu'à avoir une valeur de 0.04 g/l. On remarque bien que la sortie (concentration en glucose) suit la trajectoire de référence imposée avec les deux correcteurs (Figure 4.9), mais la réponse est rapide dans le cas du correcteur avec remise à zéro. Ce constat est confirmé par le tableau 4.1. Dans ce tableau, on a comparé les performances en utilisant l'indice de performance ITAE.

	Indice de performance ITAE	
	cas de perturbation	cas de poursuite
Correcteur PI classique	0,0928	0,0932
Correcteur PI avec remise à zéro	0,0587	0,0619

TABLE 4.1: Indice de performance ITAE.

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, la commande géométrique d'un réacteur biologique a été présentée. On a démontré qu'en utilisant un retour d'état, synthétisé en se basant sur la notion du degré relatif, une dynamique de premier ordre peut être obtenue en boucle fermée entre une grandeur externe et la sortie commandée. Pour faire face aux incertitudes, la grandeur externe a été définie par un correcteur de type PI classique et par un correcteur PI avec remise à zéro.

Les performances du système en boucle fermée ont été évaluées par simulation en considérant le problème de poursuite. Les résultats de simulation obtenus montrent que la stratégie de commande assure des bonnes performances. En effet, la consigne est correctement suivie. L'évolution de la commande est acceptable et de nature douce.

Les résultats obtenus montrent clairement que la définition de la grandeur externe par un correcteur PI avec remise à zéro peut améliorer les résultats.

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la commande des systèmes non linéaires affines par rapport à la variable de commande. L'objectif consiste à intégrer une commande avec remise à zéro, pour définir la grandeur externe, dans une stratégie de commande basée sur la linéarisation exacte. Les performances de la stratégie de commande ont été évaluées par simulation dans le cas d'un réacteur biologique utilisée pour la production de la levure de boulangerie.

En se référant à la littérature, il ressort que la technique de la linéarisation exacte constitue une des voies la plus indiquée pour tirer profit de la théorie de commande des systèmes linéaires dans le cas des systèmes non linéaires, particulièrement les systèmes affines par rapport à la variable de commande.

D'un autre côté, l'introduction d'un effet non linéaire dans un correcteur linéaire peut améliorer davantage les performances de commande en boucle fermée. Parmi les correcteurs ayant démontré leur capacité, on retrouve le correcteur avec remise à zéro. Ce correcteur est caractérisé par une dynamique d'un système impulsif.

À partir de ce constat, on a proposé dans ce mémoire d'utiliser un correcteur avec remise à zéro pour définir la variable externe d'une loi de commande obtenue par linéarisation exacte. Cette stratégie de commande a été appliquée avec succès pour la commande d'un bioréacteur.

Ainsi, après avoir modélisé le bioréacteur en utilisant l'analyse compartimentale, nous avons fait une synthèse sur les principaux résultats de la commande géométrique utilisés le long du mémoire. Puis, nous avons présenté le principe d'un correcteur avec remise à zéro (impulsif) tout en axant l'étude sur le cas d'un PI avec remise à zéro. Ce correcteur

a été intégré, par la suite, dans une stratégie de commande par linéarisation exacte pour définir la variable externe.

À la lumière de l'étude réalisée, on peut conclure que le correcteur avec remise à zéro permet d'améliorer les performances en boucle fermée en assurant des réponses rapides et bien amorties avec des commandes moins énergiques. La linéarisation exacte permet d'utiliser des correcteurs linéaires pour robustifier la boucle fermée.

Ces avantages ont été démontrés dans le cas de la commande du bioréacteur de production de levure de boulangerie. Ce système affine par rapport à la commande est caractérisé par un modèle complexe avec un comportement dynamique fortement non linéaire.

Ainsi, la linéarisation exacte a permis de surmonter les fortes non-linéarités en le réduisant à une dynamique observable (externe) d'un système de premier ordre linéaire. Pour améliorer les performances, la variable externe a été définie par un correcteur PI avec remise à zéro. Cette stratégie a permis d'améliorer la rapidité en boucle fermée.

L'étude des systèmes de commande impulsifs constitue un axe de recherche très récent. Par conséquent, plusieurs pistes nécessitent d'être explorées. Parmi ces dernières, la stabilité et le réglage des correcteurs impulsifs sont deux thèmes de recherche intéressants. Aussi, la proposition des structures de commande basée sur des correcteurs impulsifs constitue une des voies la plus prometteuse.

Bibliographie

- [1] K. M. Hangos, J. Bokor and G. Szederkényi. *Analysis and Control of Nonlinear Process Systems*. Springer-Verlag, London, 2014.
- [2] S. C. Beeler, H. T. Tran and H. T. Banks. Feedback Control Methodologies for Nonlinear Systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 107, No. 1, pp. 1–33, 2000.
- [3] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 1995.
- [4] C. Kravaris and J. C. Kantor. Geometric methods for nonlinear process control. 1. Background. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, Vol. 29, pp. 2295–2310, 1990.
- [5] J. P. Corriou. *Commande des Procédés*. Lavoisier, Tec et Doc, Paris, 2003.
- [6] C. Kravaris and J. C. Kantor. Geometric methods for nonlinear process control 2. Controller synthesis. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, Vol. 29 :231–02323, 1990.
- [7] A. Baños and A. Barreiro. *Reset Control Systems*. Springer-Verlag, London, 2012.
- [8] V. Lakshmikantham, D.D. Bainov and P.S. Simeonov. *Theory of Impulsive Differential Equations*. World Scientific, Singapore, 1989.
- [9] T. Yang. *Impulsive Control Theory*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 272. Springer, Berlin, 2001.
- [10] O. Beker, C.V. Hollot, Y. Chait and H. Han, H. Fundamental properties of reset control systems. *Automatica*, Vol. 40, pp. 905–915, 2004.

-
- [11] A. Vidal and A. Baños. Reset compensation for temperature control : experimental applications on heat exchangers. *Chemical Engineering Journal*, Vol. 159, pp. 170–181, 2010.
- [12] W. D. Wallis. *A Beginner's Guide to Finite Mathematics*. Birkhäuser, 2004.
- [13] H. Jérôme. *Contribution à l'analyse et au contrôle des systèmes biologiques : applications bioprocédés de dépollution*. Université Claude Bernard (Lyon I), 2004.
- [14] M. Djalel Eddine Mazouni. *Modélisation et Commande en Temps Minimum des Réacteurs Biologiques Séquentiels Discontinus*. Thèse de doctorat en automatique, École Polytechnique d'Alger, 2006.
- [15] M. Mahar. *Modélisation et Élaboration d'algorithme d'estimation et de commande : Application à un bioprocédé*. Thèse de doctorat, LAAS Toulouse, 1995.
- [16] Y. Cherruault. *Biomathématiques*. Collection : Que sais-je? , Presses Universitaires de France, 1983.
- [17] Y. Cherruault. *Mathematical modelling in biomedicine. Optimal Control of Biomedical Systeme*. D. Reidel Publishing, Company, 1986.
- [18] A. Rajeb, J.M. Engasser, P. Germain et A. Miclo. A physiological model of yeast aerobic growth. *Third Eropean congress on Biotechnology München*, pp. 43-48, Germany, 1984.
- [19] J. Nielsen et J. Villadsen. *Bioreaction Engineering Principles*. NewYork : Plenum Press, 1994.
- [20] S. Papastratos. *Modélésation, Simulation Dynamique et Optimisation d'un Procédé de Fermentaion Ethanolique basé sur un bioréacteur à Membrane (Saccharomyces cerevisiae)*. Thèse doctorat, Ecole Centrale Paris, 1989.
- [21] P. Dantgny. Modeling of the aerobic growth of *Saccharomyces cerevisiae* on mixtures of glucose and ethanol in continous culture. *J. Biotechnol.* Vol. 43, pp. 213-220, 1995.
- [22] Pg. Dantigny. *Cinétique, modélisation de la croissance de Saccharomyces cerevisiae, Commande non linéaire de type L/A d'un procédé semi-continu*. Thèse de doctorat, INPL, Nancy, France, 1989.

- [23] I.J. Slotine et L. Weiping. *Appied nonlinear control*. Prentice-Hall, New Jersey, 1991.
- [24] R. Hirschorn. Invertibility of nonlinear control systems. *SIAM.J.Control Optim.* Vol. 17, pp. 289-295, 1979.
- [25] R. Su. On the linear equivalents of non linear systems. *Syst. Control Lett.* Vol. 2, pp. 48-52, 1982.
- [26] L.R. Hunt, R. Su, and G. Meyer. Global transformations of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 28, pp. 24-31, 1983.
- [27] M. Villain. *Systèmes Asservis Linéaire*, tome 2, Éditions ellipses, 1997.
- [28] D. Graham et R. C. Lathrop. The synthesis of optimum response : Criteria and standard forms. *AIEE Transaction* Vol. Part II 72, pp. 273-288, 1953
- [29] H. Hu, Y. Zheng, Y. Chait, and C.V. Hollot. On the Zero-Input Stability of Control Systems Having Clegg Integrators. *Proceedings of the 1997 American Control Conference, Albuquerque, NM*, pp. 408–410, June 1997.
- [30] O. Beker, C.V. Hollot, and Y. Chait. Plant with Integrator : An Example of Reset Control Overcoming Limitations of Linear Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 46, No. 11, pp. 1797-1799, 2001.
- [31] I. Horowitz and P. Rosenbaum. NonLinear Design for Cost of Feedback Reduction in Systems with Large Parameter Uncertainty. *International Journal of Control*, Vol. 24, No. 6, pp. 977-1001, 1975.
- [32] J.C. Clegg. A Nonlinear Integrator for Servomechanisms. *Transactions A.I.E.E.*, Vol. Part II, No. 77, pp. 41-42, 1958.
- [33] O. Beker, C.V. Hollot, Y. Chait, H. Han. Fundamental Properties of Reset Control Systems. *Automatica*, Vol. 40, No. 6, pp. 905-915, 2004.
- [34] D.D. Bainov and P.S. Simeonov, Systems with Impulse Effect. *Stability, Theory and Application*. Halsted Press, 1989.
- [35] C.V. Hollot, O. Beker, Y. Chait, and Q. Chen. Perspectives in robust control. *On Establishing Classic Performance Measures for Reset Control Systems*, Vol. 268, pp. 123-147, 2007.