

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**  
**Université Mouloud MAMMERY, Tizi-Ouzou**



**Faculté de Génie Electrique et d'Informatique**  
**Département d'Automatique**

**Mémoire de Fin d'Etudes**

En vue de l'obtention du diplôme

*Master Académique en Automatique*

*Option : Commande des systèmes*

***Thème***

**Commande PI avec remise à zéro  
d'un échangeur de chaleur**

Proposé et dirigé par : Mr Ahmed MAIDI,

Présenté par :

**AKLI Safia**

**BENAMEUR Dyhia**

Soutenu le : / /2012

*Promotion 2012*

Ce travail a été préparé au Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production

# Remerciements

*Nous remercions le bon Dieu de nous avoir donné courage et volonté pour réaliser ce modeste travail et qui nous a éclairé les chemins par la lumière de son immense savoir.*

*Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à notre enseignant et promoteur Mr. MAJDI AHMED qui a cru en nous, qui nous a soutenu et orienté tout au long de notre travail. Il a suivi et veillé sur le bon déroulement du travail avec ses conseils et ses remarques constitutives, et surtout pour sa compréhension et son encouragement. Qu'il trouve ici l'expression de notre respect et de notre reconnaissance.*

*Nous remercions les membres de jury qui feront l'honneur de juger notre travail. Pour cela, ainsi que pour leurs remarques et conseils sur le mémoire, nous leurs exprimons notre profonde gratitude.*

*Nous sommes très reconnaissantes à tous les enseignants qui ont veillé au bon déroulement de notre formation le long de notre cursus, qu'ils trouvent ici l'expression de nos sentiments les plus respectueux.*

*Nous tenons à remercier nos familles et nos amis.*

# *Dédicaces*

*Je dédie à toute personne ayant contribué à la réalisation et réussite de ce modeste travail de près ou de loin, en particulier :*

- ♥ *Mon père et ma mère*
- ♥ *Mes sœurs : Siham et Naima*
  - ♥ *Mon frère Lounes*
  - ♥ *Mes grand-parents*
  - ♥ *Mes oncles et mes tantes*
  - ♥ *Mes cousins et cousines*
- ♥ *Mon cher binôme et amie Safia et toute sa famille*
- ♥ *Mes amies : Djamila, Samia, Saliha, Radia, Kahina...*
  - ♥ *Mes amis en particulier Hamza*
  - ♥ *M<sup>r</sup>. Maldi et sa respectueuse famille*
- ♥ *A toute la promotion Master2 de l'année 2012*
  
- ♥ *Que Dieu nous garde*



# Dédicaces

*Je dédie à toute personne ayant contribué à la réalisation et réussite de ce modeste travail de près ou de loin, en particulier à:*

- ♥ *Mon père et ma mère*
- ♥ *Mes sœurs : Nacéra, Dehbia, Fin-Finan, Lamia*
- ♥ *Mon petit frère Saïd-Ilyas*
- ♥ *Ma chère grand-mère*
- ♥ *Mon cher oncle maternel Ahcène ainsi qu'à toute sa famille*
- ♥ *Mes oncles paternels et mes cousins et cousines ainsi qu'à toutes leurs familles*
- ♥ *Mes tantes ainsi qu'à toutes leurs familles*
- ♥ *Mon cher binôme et amie Dyhia et toute sa famille*
- ♥ *Mes amies : Djamila, Samia, Radia, Kahina...*
- ♥ *Mes amis*
- ♥ *M<sup>r</sup>. Maidi et sa respectueuse famille*
- ♥ *A toute la promotion Master2 de l'année 2012*
  
- ♥ *Que Dieu nous garde*



## Liste des symboles

$\mathbf{Z}$  : Variable espace.

$t$  : Variable temps.

$T$  : Variable température.

$x(\mathbf{z}, t)$  : Variable d'état.

$SPR$  : Système à paramètres répartis.

$\Omega$  : Domaine spatial admissible.

$L$  : Longueur de l'échangeur de chaleur.

$\partial\Omega$  : Frontières de  $\Omega$  notées aussi  $\Gamma$ .

$\theta$  : Domaine temporel admissible.

$R$  : Ensemble des nombres réels.

$\mathbf{u}(\mathbf{z}, t)$  : Commande distribuée.

$\mathbf{y}(\mathbf{z}, t)$  : Sortie distribuée.

$A$  : Matrice d'évolution.

$B$  : Matrice de commande.

$x_0(\mathbf{z})$  : Condition initiale

$x_1(t)$  : Conditions aux limites.

$\nabla$  : Gradient.

$\nabla_0(t)$  et  $\nabla_1(t)$  : Gradients aux bords.

$m$  : Diffusion de chaleur (conductivité).

$\eta$  : Normale.

$EDP$  : Equation aux dérivées partielles.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  : Nombres reels.

$\mathbf{b}(\mathbf{z})$  : Représente la structure géométrique de l'ensemble des actionneurs.

$\mathbf{b}_i(\mathbf{z})$  : Caractérise la structure géométrique du système d'actionneurs de la zone  $i$ .

$\mathbf{u}_e(t)$  : Représente l'ensemble des signaux d'entrée à la commande.

$\mathbf{u}_{ei}(t)$  : Signal d'entrée relatif à la zone  $i$ .

$\Omega_i$  : Portion du domaine  $\Omega$ .

$\delta$  : Fonction de Dirac.

$\frac{\partial T}{\partial n}$  : Dérivée de la température le long de la normale.

$Q$  : Quantité de chaleur.

$\varphi$  : Flux de chaleur transmis par conduction (W).  
 $T_0$  : Température d'entrée du fluide dans le tube de l'échangeur.  
 $V$  : vitesse du fluide dans le tube de l'échangeur.  
 $[t, t + \Delta t]$  : Intervalles de temps infiniment petit.  
 $a$  : Coefficient de transfert de chaleur .  
 $\tau$  : Constante de temps.  
 $[z_i, z_{i+1}]$  :  $i^{\text{eme}}$  intervalle du domaine spatial.  
 $l$  : Nombre d'intervalles du domaine spatial.  
 $u^i(t)$  :  $i^{\text{eme}}$  entrée de commande relative au  $i^{\text{eme}}$  intervalle spatial.  
 $q^i(t)$  :  $i^{\text{eme}}$  sortie mesurée relative au  $i^{\text{eme}}$  intervalle spatial.  
 $f(x)$  : Fonction vectorielle lisse.  
 $g(x)$  : Fonction vectorielle lisse.  
 $h(x)$  : Fonction de sortie lisse.  
 $k, w, p$  : Vecteur de dimension approprié  
 $p(x)$  : Sortie mesurée.  
 $T_{st}$  : Température de vapeur (steam température).  
 $C_1, C_2$  : Matrices constantes de dimension  $n \times n$ ,  
 $\sigma$  : Degré relatif.  
 $L_f h(x)$  : Dérivée de Lie de  $h(x)$  par rapport à  $f(x)$  .  
 $y^d$  : Entrée référence.  
 $S(s)$  : Opérateur de Laplace.  
 $\rho$  : Densité du fluide.  
 $C_p$  : Capacité calorifique du liquide.  
 $A$  : Section du tube.  
 $A_s$  : Surface utilisée pour le transfert de chaleur par unité de longueur.  
 $\Delta z$  : Longueur d'un élément de l'enveloppe.  
 $T|_z$  : Température au point  $z$ .  
 $T|_{z+\Delta z}$  : Température au point  $z + \Delta z$ .  
 $N$  : Nombre de sections.  
 $n$  : Dimension du vecteur d'état.  
 $G(s)$  : Fonction de transfert du système du premier ordre.  
 $C(s)$  : Fonction de transfert du correcteur proportionnel intégral.

$k_c$  : Gain proportionnel du correcteur.

$\tau_i$  : Constante de temps intégrale du correcteur.

$\xi$  : Coefficient d'amortissement.

$\omega_n$  : Pulsation du système en (*rad/s*).

$v$  : Entrée externe.

## Table des figures

<b>Figure 1.1</b> Différents types de commandes d'un SPD .....	12
<b>Figure 1.2</b> Différents types d'observation d'un SPD .....	15
<b>Figure 2.1</b> Schéma du transfert de chaleur conductif .....	20
<b>Figure 2.2</b> Schéma du transfert de chaleur convectif .....	20
<b>Figure 2.3</b> Schéma du transfert de chaleur radiatif .....	21
<b>Figure 2.4</b> Echangeur thermique à double tube avec enveloppe chauffée à la vapeur.....	23
<b>Figure 2.5</b> Equilibre thermique d'un élément de l'enveloppe .....	24
<b>Figure 2.6</b> Evolution de la température de certains points de l'échangeur en boucle ouverte.	30
<b>Figure 3.1</b> stratégie de commande d'un SPD .....	35
<b>Figure 3.2</b> Schéma bloc de la commande et du procédé. ....	39
<b>Figure 3.3</b> Poursuite de consigne : évolution de la sortie commandée. . ....	41
<b>Figure 3.4</b> Poursuite de consigne : évolution de la variable de commande .....	42
<b>Figure 3.5</b> Rejet de perturbation : évolution de la sortie commandée .....	43
<b>Figure 3.6</b> Rejet de perturbation : évolution de la variable de commande .....	43
<b>Figure 4.1</b> Correcteur à remise à zéro appliqué à un système linéaire .....	46
<b>Figure 4.2</b> Sortie du système corrigé par le correcteur linéaire et sortie du système corrigé par le correcteur à remise à zéro .....	48
<b>Figure 4.3</b> Commande par le correcteur linéaire et correcteur à remise à zéro .....	48
<b>Figure 4.4</b> Structure d'un PI à remise à zéro .....	50
<b>Figure 4.5</b> Evolution de la sortie commandée de l'échangeur de chaleur avec le correcteur PI classique et avec un PI avec remise à zéro .....	53
<b>Figure 4.6</b> Evolution de la commande de l'échangeur de chaleur avec le correcteur PI classique et avec un PI avec remise à zéro .....	53

# Sommaire

<b>Introduction générale.....</b>	<b>1</b>
-----------------------------------	----------

## **Chapitre 1 : Généralités sur les systèmes à paramètres distribués**

1.1 Introduction .....	3
1.2 Définition d'un système à paramètres distribués .....	3
1.3 Description mathématique d'un système à paramètres distribués .....	3
1.4 Différents types de conditions aux limites .....	5
1.4.1 Conditions de Dirichlet.....	5
1.4.2 Conditions de Neumann.....	5
1.5 Equations différentielles aux dérivées partielles .....	6
1.6 Classification des systèmes répartis .....	7
1.7 Nature des entrées et sorties d'un système à paramètres distribués .....	8
1.8 Commandes d'un système à paramètres distribués .....	8
1.8.1 Commande distribuée .....	8
1.8.2 Commande par zone .....	9
1.8.3 Commande ponctuelle .....	9
1.8.4 Commande par balayage .....	10
1.8.5 Commande aux frontières .....	10
1.9 Observations d'un système à paramètres distribués .....	12
1.9.1 Observation distribuée .....	12
1.9.2 Observation ponctuelle .....	13
1.9.3 Observation par balayage .....	13
1.9.4 Observation par moyennage spatial .....	13
1.10 Conclusion .....	15

## **Chapitre 2 : Description et modélisation d'un échangeur de chaleur**

2.1 Introduction .....	17
2.1 Généralités sur les transferts de chaleur .....	17
2.2.1 Définitions .....	17

2.2.2	Champ de température .....	18
2.2.3	Gradient de température .....	18
2.2.4	Flux de chaleur .....	18
2.3	Différents modes de transfert de chaleur .....	19
2.4	Aperçu général sur les échangeurs thermiques .....	21
2.4.1	Définition .....	21
2.4.2	Principe général .....	22
2.5	Distribution des températures dans un échangeur .....	22
2.6	Différents types d'échangeurs à fluide .....	22
2.7	Modélisation d'un échangeur à double tube .....	23
2.7.1	Processus .....	23
2.7.2	Définition et hypothèses .....	24
2.8	Equilibre énergétique .....	25
2.9	Simulation du comportement dynamique de l'échangeur .....	27
2.10	Conclusion .....	29

### **Chapitre 3 : Commande géométrique non linéaire de l'échangeur de chaleur**

3.1	Introduction .....	31
3.2	Commande par retour d'état d'un système hyperbolique quasi linéaire .....	31
3.2.1	Système d'EDP hyperboliques de premier ordre .....	31
3.2.2	Développement de la procédure de commande .....	32
3.2.2.1	Formulation générale du problème .....	32
3.2.2.2	Application à l'échangeur thermique .....	35
3.3	Définition de la variable externe $v$ .....	39
3.4	Conclusion .....	44

### **Chapitre 4 : Amélioration des performances d'une commande géométrique par un PI à remise à zéro**

4.1	Introduction .....	45
4.2	Limitation d'un correcteur linéaire .....	45
4.3	Correcteur linéaire à remise à zéro .....	46
4.4	Synthèse d'un correcteur PI à remise à zéro .....	49

4.5 Synthèse dans le cas d'un système de premier ordre .....	50
4.6 Application à l'échangeur de chaleur.....	52
4.7 Conclusion .....	54
<b>Conclusion générale</b> .....	<b>55</b>

## **Bibliographie**

Les échangeurs de chaleur sont des systèmes dynamiques fréquemment rencontrés dans le milieu industriel. Les variables caractéristiques (entrées, sorties et états) d'un échangeur de chaleur ont caractérisées par une évolution spatio-temporelle. Par conséquent, leur comportement dynamique est décrit par une ou plusieurs équations différentielles partielles (EDP) selon les hypothèses simplificatrices de modélisation. Ces systèmes sont appelées systèmes à paramètres distribués ou répartis ou encore de dimension infinie.

Pour la commande des systèmes à paramètres distribués deux approches sont possibles. La première consiste à discrétiser le modèle décrit par des équations aux dérivées partielles, en utilisant par exemple les différences finies ou les éléments finies, dont l'objectif est de se ramener à un système à paramètres localisés, c'est-à-dire un système décrit par des équations aux dérivées ordinaires. Ce type de système est bien maîtrisé par la communauté des automaticiens. Cette approche souffre de plusieurs problèmes. En effet, par la discrétisation du système, les propriétés fondamentales (commandabilité, observabilité et stabilité) peuvent être affectées par le processus de discrétisation. De plus, en général, la discrétisation d'un système à paramètres distribués conduit à un système de grande dimension pour lequel il est très délicat de synthétiser un correcteur.

La deuxième approche consiste à utiliser directement le modèle donné sous forme d'équations aux dérivées partielles, ce qui permet de préserver les propriétés fondamentales du système. L'utilisation du modèle EDP améliore davantage les performances du système en boucle fermée. Néanmoins le traitement des EDP n'est pas une tâche facile.

Ces dernières années, la commande géométrique, basée sur la notion du degré relatif, a démontré son efficacité dans la commande des systèmes à paramètres distribués. Cette approche présente l'avantage de facilité de synthèse du correcteur en utilisant directement le modèle EDP. La commande géométrique conduit à un retour d'état permettant de réaliser une réduction du système EDP à un système à paramètres localisés linéaire, ce qui permet de tirer profit des techniques de commande linéaire robustes pour améliorer les performances en boucle fermée.

L'objectif de ce mémoire consiste à étudier une commande hybride qui est la combinaison de la commande géométrique et de la commande PI avec remise à zéro pour la commande de l'échangeur de chaleur.

Le reste du mémoire est structuré comme suit :

Le premier chapitre est consacré à des généralités sur les systèmes à paramètres distribués.

Dans le deuxième chapitre, on présente le fonctionnement et la modélisation de l'échangeur de chaleur étudié dans ce mémoire.

Le troisième chapitre est réservé à la commande géométrique des systèmes paraboliques en particulier la commande de l'échangeur de chaleur.

Dans le dernier chapitre, on présente le principe de la commande avec remise à zéro et une application d'un correcteur PI avec remise à zéro pour améliorer les performances de l'échangeur de chaleur.

Le mémoire se termine par une conclusion sur l'étude réalisée et qui trace quelques voies possibles à explorer dans ce domaine.

## 1.1 Introduction

Pour un système à paramètres distribués, les variables caractéristiques (commandes, sorties et états) varient en fonction du temps et de l'espace. Mathématiquement, les systèmes à paramètres distribués sont décrits par des équations aux dérivées partielles faisant intervenir des dérivées par rapport à la variable temps et à la variable espace.

Ce chapitre donne les notions de base utilisées le long de ce mémoire.

## 1.2 Définition d'un système à paramètres distribués

Un système à paramètres distribués ou répartis (SPR) est un système dont les variables ne sont pas homogènes sur son espace physique (c'est-à-dire les variables caractéristiques et/ou les paramètres sont non homogènes spatialement). Les variables d'état, d'entrée et/ou sortie ne dépendent donc pas seulement du temps, mais aussi de leurs coordonnées spatiales [4].

Mathématiquement les systèmes à paramètres distribués sont décrits par des équations aux dérivées partielles. Ce type de systèmes est de dimension infinie, c'est-à-dire que le nombre de variables caractérisant l'état du système est infini.

A chaque instant  $t$ , l'état du système est une fonction d'une variable d'espace  $z$ , on peut donc considérer cet état comme un élément d'espace fonctionnel qui n'est pas de dimension finie, d'où la terminologie de système dynamique en dimension infinie.

## 1.3 Description mathématique d'un système à paramètres distribués

Pour décrire le modèle mathématique d'un système à paramètres distribués, il faut d'abord définir :

- Un domaine spatial  $\Omega$  tel que :  $z \in \Omega$ , qui peut être ouvert ou borné de  $R$ ,

$\Omega = [0, L]$  et de frontière  $\partial\Omega = \{0, L\}$ .

- Un domaine temporel  $\theta$  tel que:  $t \in \theta$
- Une équation d'état :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = A(x(z, t)) + B(u(z, t)), \quad t \in \theta \text{ et } 0 < z < L \quad (1.1)$$

- Une équation de sortie sur  $\Omega \times \theta$  :

$$y(z, t) = C(x(z, t)) \quad (1.2)$$

Préciser :

- ✓ La condition initiale pour  $t = 0$

$$x(z, 0) = x_0 \quad (1.3)$$

- ✓ La condition aux bords ou frontières (limites) :

$$\mathcal{L}(x(z, t)) = u(z, t), \quad z \in \partial\Omega \quad (1.4)$$

Dans ce mémoire, on considère la classe des systèmes décrits par l'équation d'état (ou d'évolution), à l'intérieur du domaine  $\Omega \times \theta$  tel que  $z \in \Omega \subset R^p$  et un domaine temporel  $\theta$  tel que  $t \in \theta \subset R$  ((Voir équation(1.1)) et la condition initiale (voir équation(1.2))) et la condition aux limites établissant les relations entre l'état et la commande aux limites (si elle existe).

$$\mathcal{L}(x(z', t)) = u_{\Gamma}(z', t) \quad ; \quad z' \in \partial\Omega \quad (1.5)$$

où  $\partial\Omega$  est la frontière de  $\Omega$ , notée aussi  $\Gamma$ ,  $A$  et  $B$  sont des opérateurs matriciels ne comportant que des dérivées par rapport à  $z$  [1].

## 1.4 Différents types de conditions aux limites

Les conditions aux limites peuvent être de type :

### 1.4.1 Condition de Dirichlet

Si on prend le cas d'une barre métallique pour laquelle les extrémités sont maintenues à des températures données qu'on notera ici  $x_0(t)$ ,  $x_1(t)$ , on aura :

$$x(0, t) = x_0(t) \quad \text{et} \quad x(1, t) = x_1(t) \quad (1.6)$$

### 1.4.2 Condition de Neumann

Si le dispositif est tel que le flux de chaleur est donné aux bords, c'est le gradient de la température  $\nabla(T)$  qui est ainsi fixé, et les conditions aux limites sont alors :

$$\begin{aligned} -m \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \nabla_0(t), \\ m \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=1} &= \nabla_1(t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Mais pour soucis de commodité, on écrira :

$$m \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{\Gamma} = \nabla \quad (1.8)$$

où  $\Gamma$  représente la frontière du domaine de variation de  $z$  et  $m$  caractérise la diffusion de chaleur (la conductivité) et  $\eta$  la normale à ce domaine orienté vers l'intérieur.

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma} = - \frac{\partial T}{\partial z} \quad \text{en } z = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial T}{\partial z} \quad \text{en } z = 1 \quad (1.9)$$

Il en existe d'autres qui ont lieu sur l'intégralité de frontière  $\partial\Omega$ , dans le cas où  $z \in \partial\Omega$  on a  $u(z, t) \neq 0$ , alors les conditions aux limites sont non-homogènes, c'est-à-dire que la commande est appliquée aux frontières. Ce type de commande conduit généralement à une complexité du traitement mathématique des EDP, d'où la nécessité de transformer le système d'état avec conditions aux limites non homogènes, en un système avec conditions aux limites homogènes.

### 1.5 Equation différentielle aux dérivées partielles

Dans de nombreuses applications industrielles (réacteurs chimiques, propagation d'onde, diffusion de la chaleur, mécanique des fluides...), les variables caractéristiques du système dépendent fréquemment de coordonnées spatiales, d'où la nécessité de caractériser leur évolution par des modèles dynamiques à paramètres distribués.

Ceci fait intervenir des équations aux dérivées partielles (EDP), c'est-à-dire des équations mettant en jeu des dérivées partielles spatiales et temporelles des différentes variables caractéristiques du système [9].

Comme un système dynamique réel est généralement délimité physiquement dans l'espace, la description mathématique d'un système à paramètres distribués (SPD) doit être complétée par des conditions aux limites, qui représentent des contraintes physiques, et permettent la résolution des équations du modèle. Par conséquent, elles doivent être en nombre suffisant, dépendant de l'ordre des EDP par rapport à la variable d'espace.

Les EDP que l'on rencontre en pratique sont rarement d'ordre élevé en temps et en espace, le plus souvent d'ordre deux en espace et d'ordre un en temps.

On peut distinguer des EDP quasi-linéaires ou semi-linéaires. De plus, dans le cas où les coefficients sont fonction des variables spatiales et temporelles, le type de l'EDP peut changer selon le point de l'espace et le moment considéré.

## 1.6 Classification des systèmes répartis

Il existe trois classes de systèmes à paramètres distribués : de type hyperbolique, parabolique et elliptique, cette classification est plus difficile à établir dans le cas des EDP non linéaires.

La classification générale des SPD s'appuie sur l'EDP de deuxième ordre, par définition, l'ordre d'une EDP est l'ordre de la plus grande dérivée présente dans l'équation [3].

En général, les systèmes linéaires d'ordre deux, dont la solution  $x(z, t)$  est fonction de deux variables  $t$  et  $z$ , le modèle mathématique s'écrit :

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + 2 \alpha_2 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z \cdot \partial t} + \alpha_3 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} + [...] = 0 \quad (1.10)$$

Le terme entre crochet dépend de  $x(z, t)$ ,  $t$ ,  $z$  et des dérivées premières de  $x(z, t)$ .

L'équation est dite:

- Hyperbolique, si  $\alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_3 > 0$ ,
- Elliptique, si  $\alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_3 < 0$ ,
- Parabolique, si  $\alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_3 = 0$ .

Si les trois coefficients  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sont nuls, le type de l'équation dépend seulement des dérivées premières de  $x(z, t)$ , alors l'équation est hyperbolique et d'ordre un.

## 1.7 Nature des entrées et sorties d'un système à paramètres distribués

Pour préciser la nature interne ou externe d'un système à paramètres distribués, il faut spécifier en plus de l'équation d'état, la nature de l'entrée  $u$  et la sortie  $y$ , qui peut être distribuée ou localisée.

Dans le cas où l'entrée  $u$  ou la sortie  $y$  est de nature distribuée, le modèle résultant ne sera pas commode à manipuler, car physiquement, il n'est pas possible de calculer la température en tout point  $z$ , alors on prend un nombre fini de points à partir duquel on considère la commande et la sortie comme ponctuelles.

Mais le fait d'avoir des entrées-sorties de dimension finie, n'implique pas nécessairement qu'on a affaire à un système de dimension finie.

## 1.8 Commandes d'un système à paramètres distribués

Pour les objectifs de commande (ou de simulation) d'un SPD, la nature des commandes doit être spécifiée, on distingue plusieurs classes [5] :

### 1.8.1 Commande distribuée

La loi de commande est distribuée en deux fonctions, la première est fonction de la variable espace  $z$ , qui caractérise la structure géométrique du système d'actionneur, la deuxième est fonction du temps, et représente généralement le signal d'entrée (consigne).

Cette décomposition permet de simplifier les calculs pour la détermination de la loi de commande. Dans ce cas  $u(z, t)$  est définie sur  $\Omega \times \theta$ , et donnée comme suit :

$$u(z, t) = b(z) u_e(t) \tag{1.11}$$

où  $b(z)$  représente la structure géométrique de l'ensemble des actionneurs,  $u_e(t)$  représente l'ensemble des signaux d'entrée à la commande.

### 1.8.2 Commande par zone

Le domaine de variation ou spatial est décomposé en sections ou en zones. La commande agit sur les différents systèmes comme s'il s'agissait de systèmes indépendants, ceci engendre alors un ensemble de lois de commande.

Une zone  $\Omega_i$  représente une portion du domaine spatial  $\Omega$ , une commande par zone est définie sur un sous ensemble de  $\Omega_i \times \theta$ , si la commande est appliquée sur  $l$  zones, la commande s'écrit comme suit :

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^l b_i(z) u_{ei}(t) \quad (1.12)$$

Où  $b_i(z)$  caractérise la structure géométrique du système d'actionneurs et  $u_{ei}(t)$  est le signal d'entrée relatif à la zone  $i$ .

### 1.8.3 Commande ponctuelle

Cette commande est un cas particulier de la commande par zone qui se réduit dans ce cas à un simple point, la fonction  $b_i(z)$  est remplacée par la fonction de Dirac :

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^l u_{ei}(t) \delta(z - z_i) \quad (1.13)$$

$\delta$  est la fonction de Dirac.

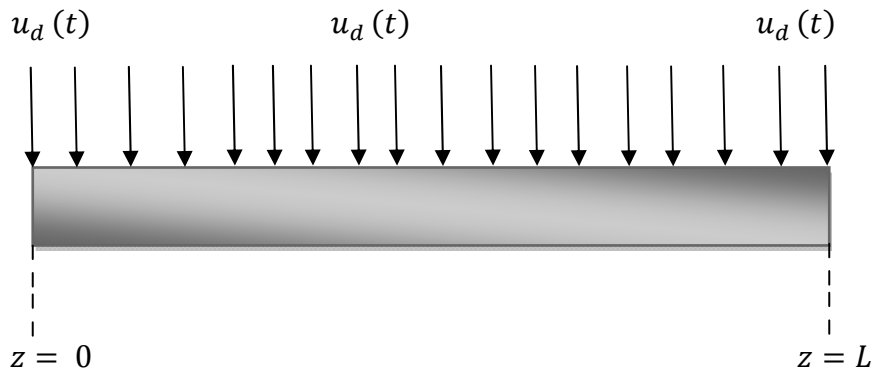
### 1.8.4 Commande par balayage

Les zones ou les points d'action de la commande sont mobiles dans le domaine  $\Omega$ .

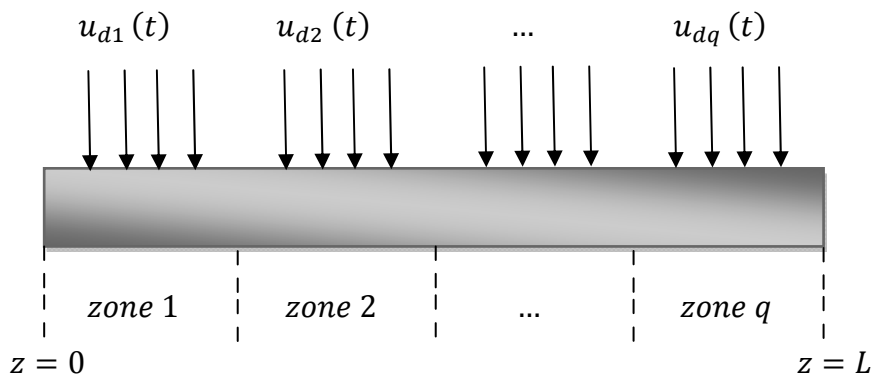
### 1.8.5 Commande aux frontières

Les limites sont définies sur l'ensemble  $\Gamma$ , cette commande peut être par zones, ponctuelles, fixes ou à balayage dans le cas où  $\Omega \subset R^2$  ou  $R^3$ .

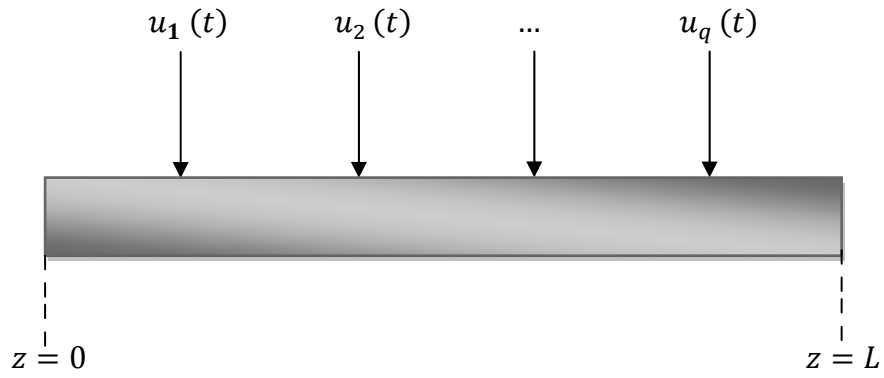
Les différentes commandes sont illustrées par les figures suivantes :



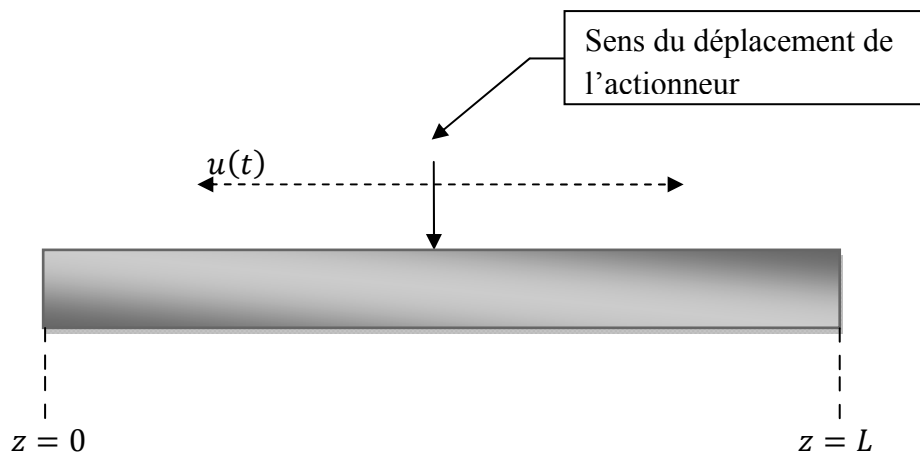
**Commande distribuée**



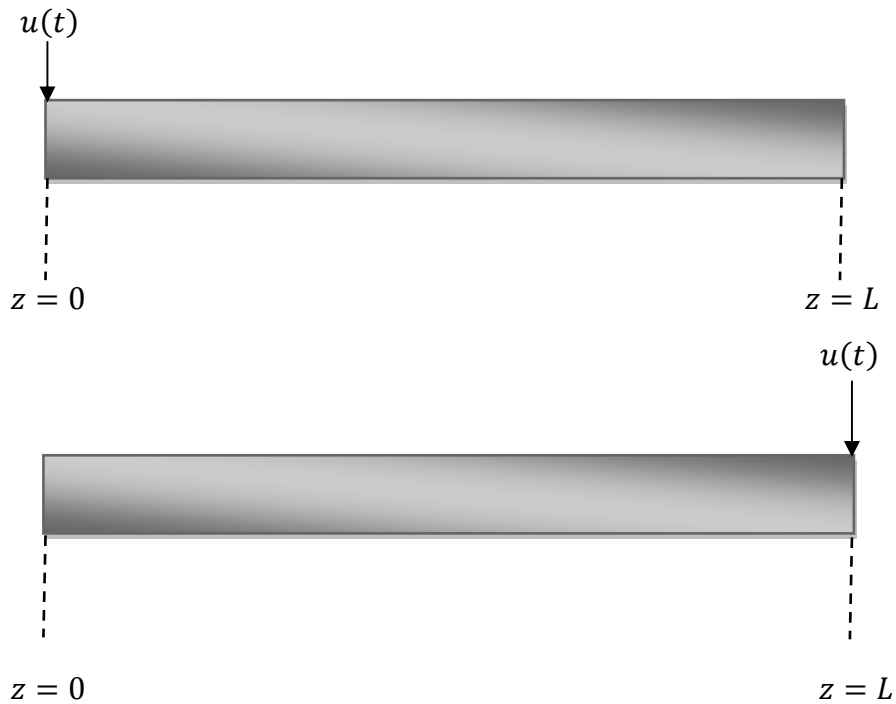
**Commande par zones**



**Commande ponctuelle**



**Commande par balayage**



### Commande aux frontières

**Figure 1.1** Différents types de commandes d'un SPD

## 1.9 Observations d'un système à paramètres distribués

Le vecteur de sortie du système coïncide en général avec l'ensemble des observations, et se traduit souvent de transformations linéaires sur le vecteur d'état, on distingue [5] :

### 1.9.1 Observation distribuée

Sur  $\Omega \times \theta$ , le vecteur de sortie  $y(z, t)$  peut être écrit sous la forme simplifiée suivante:

$$y(z, t) = C(z, t)x(z, t) \quad (1.14)$$

où  $C(z)$  caractérise la structure géométrique des systèmes d'observation et  $x(z, t)$  représente le vecteur d'état du système [1].

### 1.9.2 Observation ponctuelle

Elle nécessite de prendre quelques points particuliers  $z_i$  sur l'espace  $\Omega$ , sur lesquels on définit la sortie pour chacun de ces points comme suit :

$$y(x, t) = \int_{\Omega} x(z - z_i) \delta(z - z_i) dz = x(z_i, t) \quad (1.15)$$

### 1.9.3 Observation par balayage

Les points d'observation (système de capteur) sont mobiles dans  $\Omega$ .

### 1.9.4 Observation par moyennage spatial

Elle est définie par l'intégrale suivante :

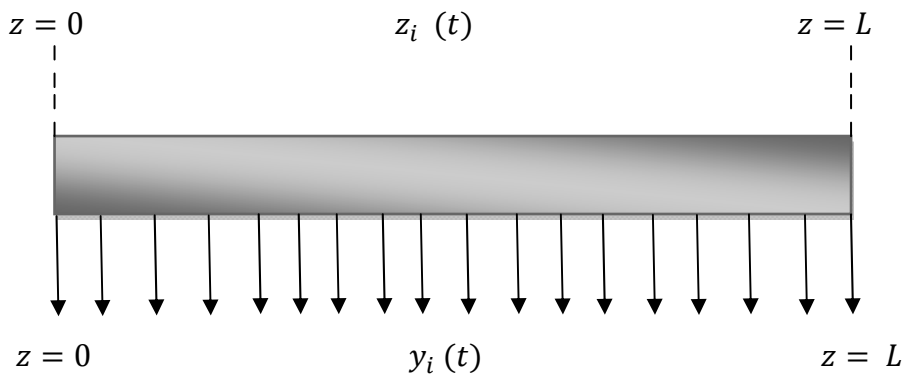
$$y(t) = \int_{\Omega} C(z) x(z, t) dz \quad (1.16)$$

Avec  $C(z)$  caractérise la structure géométrique de l'ensemble des capteurs.

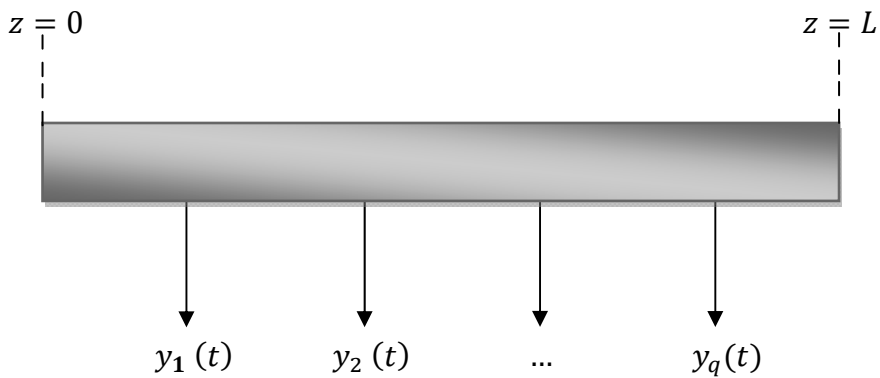
Les différentes observations sont illustrées par la figure suivante :

### 1.9.5 Observation aux frontières

Les limites sont définies sur l'ensemble  $\Gamma$  où l'observation est appliquée.



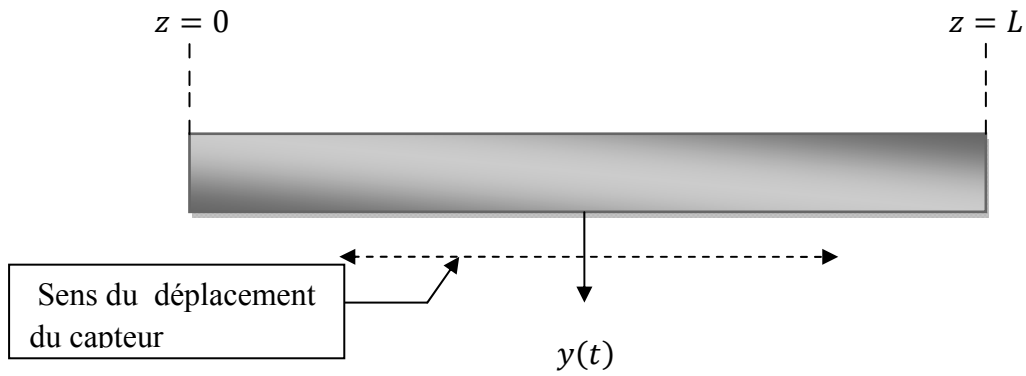
**Observation distribuée**



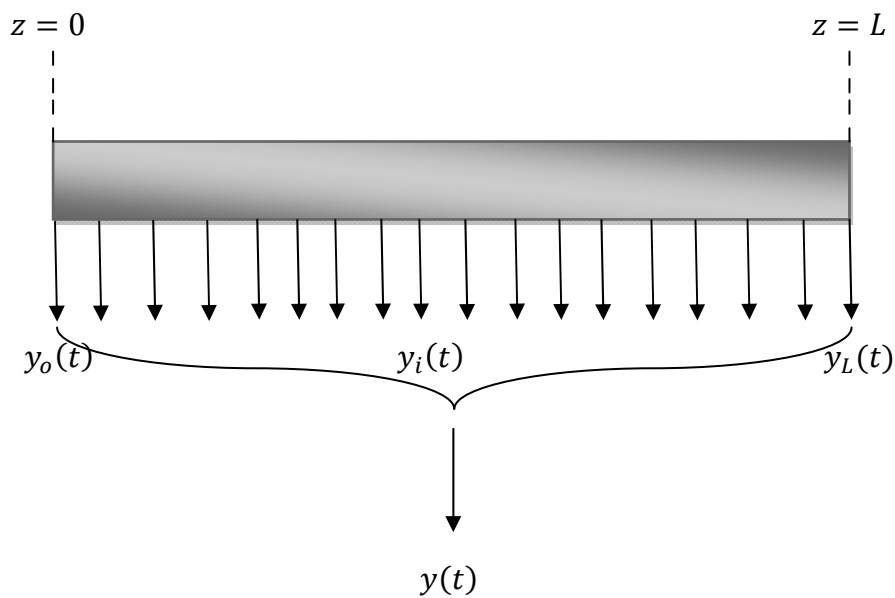
**Observation ponctuelle**



**Observation aux frontières**



### Observation par balayage



### Observation par balayage spatial

**Figure 1.2** Différents types d'observation d'un SPD

## 1.10 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à des généralités sur des SPD. L'objectif a été de passer en revue les différentes notions utilisées le long de ce travail.

Dans le domaine de la commande des SPD, l'étude du type des EDP modélisant le SPD constitue le point de départ pour toute conception du correcteur. Dans la suite, on s'intéresse juste aux systèmes à paramètres distribués hyperboliques. Un des exemples des systèmes hyperboliques utilisé dans l'industrie est l'échangeur de chaleur. La description et la modélisation de ce système fera l'objet du chapitre suivant.

## 2.1 Introduction

Les échangeurs de chaleur occupent une place très importante dans l'industrie. Ils sont utilisés pour refroidir ou chauffer des fluides en se basant sur des principes de la thermique.

Ce procédé est adopté en particulier pour des questions de sécurité et d'efficacité.

L'évolution des températures dans un échangeur de chaleur sont décrites par des équations aux dérivées partielles. Ces équations modélisent les phénomènes de diffusion et/ou de convection.

Dans ce chapitre, on présente un échangeur de chaleur à double tube à contre courant, on s'intéresse particulièrement à la modélisation et simulation du comportement dynamique en boucle ouverte.

## 2.2 Généralités sur les transferts de chaleur

La thermodynamique permet de prévoir la quantité totale d'énergie qu'un système doit échanger avec l'extérieur pour passer d'un état d'équilibre à un autre. La thermique (ou la thermocinétique) se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final.

### 2.2.1 Définitions

- **La température** : c'est la manifestation mesurable de la chaleur stockée, on dit aussi que la température est liée à la moyenne d'énergie cinétique due au mouvement des atomes et molécules du corps.

- **La chaleur** : c'est une forme d'énergie, lorsqu'on l'introduit dans le corps, la température de ce dernier augmente. Dans le cas d'un changement de phase, une partie de

cette énergie est utilisée pour satisfaire les besoins thermiques du corps liés aux phénomènes de transfert (fusion, évaporation, etc....).

### 2.2.2 Champ de température

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température, c'est-à-dire  $T = f(x, y, z, t)$ , la valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé « champ de température », on distingue deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou transitoire.

### 2.2.3 Gradient de température

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de la température, par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température :

$$\nabla T = \eta \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.1)$$

avec  $\eta$  est le vecteur unitaire de la normale, et  $\frac{\partial T}{\partial n}$  est la dérivée de la température le long de la normale.

### 2.2.4 Flux de chaleur

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface, isotherme, est appelée densité de flux de chaleur :

$$\Phi = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt} \quad (2.2)$$

où  $S$  est l'aire de la surface en  $m^2$ . On appelle flux de la chaleur, la quantité de chaleur transmise sur la surface  $S$  par unité de temps :

$$\varphi = \frac{dQ}{dt} \quad (2.3)$$

### 2.3 Différents modes de transfert de chaleur

L'échange de chaleur qui se produit entre deux corps qui sont à des températures différentes, peut se faire selon trois modes :

**1) Conduction :** (**Figure 2.1**) la chaleur se propage de proche en proche à travers la matière, sans qu'il n'y ait de transfert de cette dernière. La conduction assure un bon transfert de chaleur à travers les solides. C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules, et une transmission par les électrons libres.

$$\varphi = -\lambda S \nabla T \quad (2.4)$$

où sous la forme algébrique :

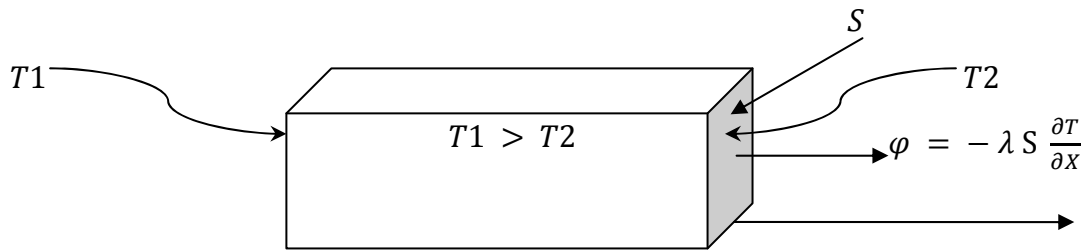
$$\varphi = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial X} \quad (2.5)$$

avec  $\varphi$  Flux de chaleur transmis par conduction (W),

$\lambda$  Conductivité thermique du milieu ( $W m^{-1} \text{ } ^\circ C^{-1}$ ),

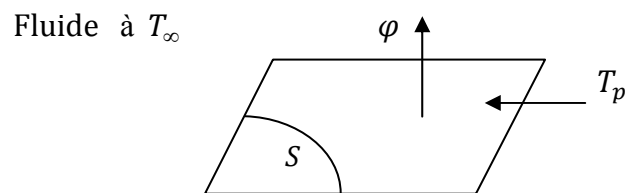
$X$  Variable d'espace dans la direction du flux ( $m$ ),

$S$  Aire de la section de passage du flux de chaleur ( $m^2$ ).



**Figure 2.1** Schéma du transfert de chaleur conductif.

**2) Convection :** (**Figure 2.2**) dans un fluide les différences de températures produisent des différences de densités pouvant amener à des mouvements de la matière dits mouvements de convection, la convection se produit lorsqu'un liquide ou un gaz est en contact avec une source plus chaude ; il se produit alors un mouvement d'ensemble des molécules du fluide transportant la chaleur vers les zones plus froides.



**Figure 2.2** Schéma du transfert de chaleur convectif.

Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton :

$$\varphi = h S (T_p - T_\infty) \quad (2.6)$$

où  $\varphi$  Flux de chaleur transmis par convection en (W)

$h$  Coefficient de transfert de chaleur par convection en ( $W m^2 \text{ } ^\circ C^{-1}$ ),

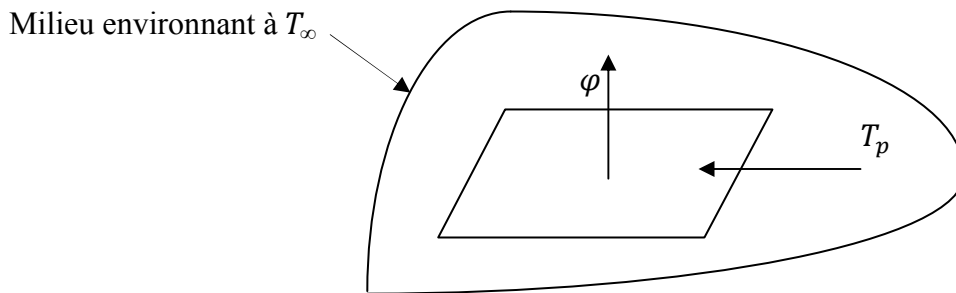
$T_p$  Température de surface du solide en ( $^\circ C$ ),

$T_\infty$  Température du fluide loin de la surface du solide en ( $^\circ C$ ),

$S$  Aire de la surface de contact solide / fluide en ( $m^2$ ).

**3) Rayonnement :** (**Figure 2.3**) les corps émettant de l'énergie par leur surface sous forme des radiations, c'est un moyen qui n'a pas besoin de support matériel, on le rencontre

dans le vide, tous les corps transparents permettant ainsi à la chaleur de se propager. Alors, le rayonnement ne nécessite ni contact, ni présence d'aucune matière entre les deux corps.



**Figure 2.3** Schéma du transfert de chaleur radiatif.

$$\varphi = \sigma \varepsilon_{\infty} S (T_p^4 - T_{\infty}^4) \quad (2.7)$$

où  $\varphi$  Flux de chaleur transmis par rayonnement en (W),

$\sigma$  Constante de Stefan =  $5.67 \cdot 10^{-8}$  ( $W m^{-2} K^{-4}$ ),

$\varepsilon_{\infty}$  Facteur d'émission de la surface en (K),

$T_p$  Température de la surface en (K),

$T_{\infty}$  Température du milieu environnant la surface en (K),

$S$  Aire de la surface en ( $m^2$ ).

## 2.4 Aperçu général sur les échangeurs thermiques

### 2.4.1 Définition

Un échangeur de chaleur est un dispositif permettant de transférer de l'énergie thermique d'un fluide vers un autre sans les mélanger (c'est-à-dire transmettre de la chaleur d'un fluide gaz ou liquide à un autre). Dans les échanges, les deux fluides sont séparés par une paroi à travers laquelle les échanges se font par convection [10].

### 2.4.2 Principe général

En général, le principe consiste à faire circuler deux fluides à travers des conduites qui les mettent en contact thermique. De manière générale, les deux fluides sont mis en contact thermique à travers une paroi, qui est le plus souvent métallique, ce qui favorise les échanges de chaleur.

Le principal problème consiste à définir une surface d'échange suffisante entre les deux fluides, pour transférer la quantité de chaleur nécessaire dans une configuration donnée.

La quantité de chaleur transférée dépend de la surface d'échange, mais aussi de nombreux autres paramètres, le flux de chaleur va dépendre aussi :

- des températures d'entrée,
- des coefficients d'échange par convection,
- des caractéristiques thermiques des fluides (chaleur spécifique, conductivité thermique).

### 2.5 Distribution des températures dans un échangeur

Les températures des fluides évoluent pendant leur traversée longitudinale de l'échangeur, à moins que l'un des fluides ne subisse un changement de phase, où sa température reste constante.

Dans un échangeur à contre courant, la température de sortie du fluide le «plus froid» peut être supérieure à celle du fluide le «plus chaud», cette disposition est l'une des caractéristiques la plus favorable d'un échangeur thermique [13].

### 2.6 Différents types d'échangeurs à fluide

Le modèle le plus simple d'échangeurs est constitué de deux tubes coaxiaux. L'un des fluides s'écoule dans le tube central, et l'autre dans l'espace annulaire (enveloppe). Les

deux fluides peuvent circuler dans le même sens ou en sens contraire. Selon le sens d'écoulement des deux fluides dans l'échangeur, on distingue :

1) **Echangeurs à courant parallèle (concourant)** : les deux fluides s'écoulent parallèlement et dans le même sens.

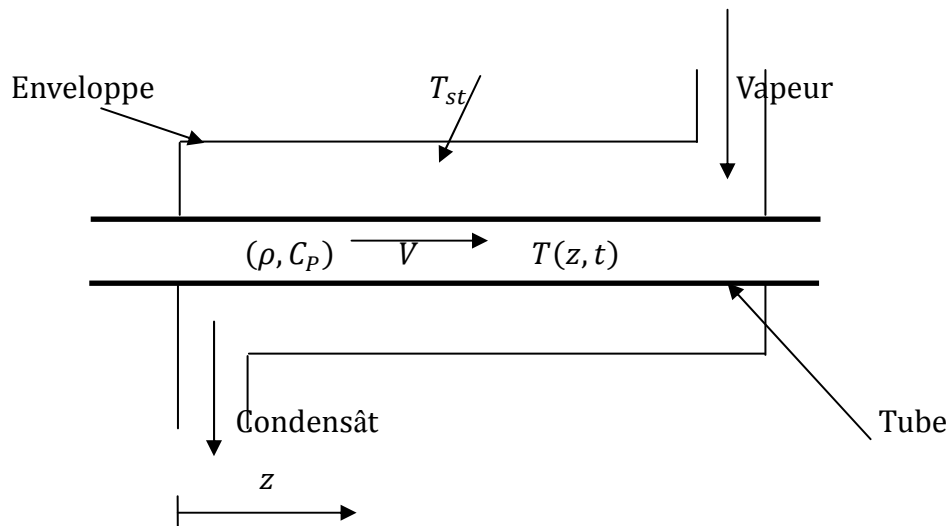
2) **Echangeurs à contre courant** : l'écoulement se fait en sens contraire.

## 2.7 Modélisation d'un échangeur à double tube

### 2.7.1 Processus

Un fluide à densité constante  $\rho$  et à capacité  $C_p$  coule dans le tube d'un échangeur thermique à double tube, avec une vitesse  $V$  comme le montre la **Figure 2.4**, il entre à une température  $T_0$  ensuite, il s'échauffe dans le tube par la condensation de la vapeur.

Le tube a une section uniforme  $A$  et la surface utilisée pour le transfert de chaleur par unité de longueur  $A_s$  [11].



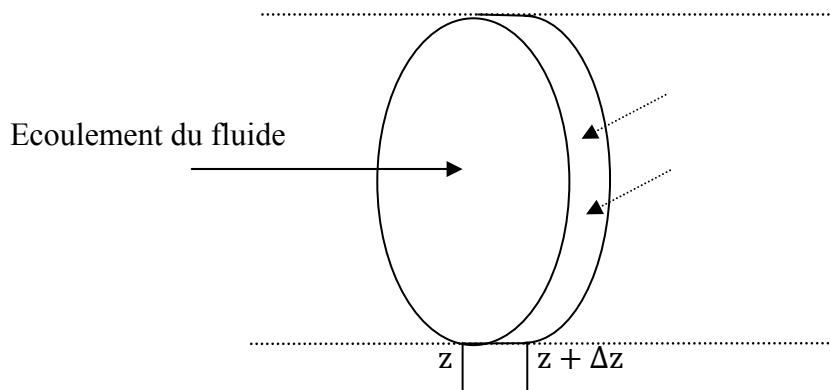
**Figure 2.4** Echangeur thermique à double tube avec enveloppe chauffée à la vapeur.

La température du fluide varie avec le temps à n'importe quel point, c'est-à-dire le long de toute la longueur de l'échangeur thermique. Ainsi, la température du fluide est fonction, à la fois de la position et du temps.

### 2.7.2 Définition et hypothèses

On désire développer un modèle théorique qui va décrire la variation de la température du fluide du couple temps-position.

Pour se faire, on considère des changements qui interviennent durant des intervalles de temps infiniment petits  $[t, t + \Delta t]$ , dans l'espace contenu dans une section d'anneau élémentaire, comme il est montré par la **Figure 2.5**, dont les frontières sont  $z$  et  $z + \Delta z$ .



**Figure 2.5.** Equilibre thermique d'un élément élémentaire de l'enveloppe.

Les hypothèses suivantes sont utilisées conjointement avec cette description microscopique du processus :

1. Le matériau de l'élément est à température uniforme  $T$ , mais la température aux frontières de l'élément sont  $T|_z$  et  $T|_{z+\Delta z}$ .
2. Le fluide s'écoule avec un profil de vitesse unidirectionnelle, ce qui nous permet de négliger les variations de température dans la direction radiale.

3. Les propriétés physiques du fluide sont supposées constantes, même chose pour la section de l'échangeur, qui est supposée constante.

4. Les dynamiques de l'échangeur et du tube sont supposées assez petites pour être négligeables ; par conséquent, quelque soit l'accumulation d'énergie dans l'élément de l'anneau, elle est due entièrement au fluide l'occupant, et non pas aux parois de l'échangeur thermique.

5. La vapeur à l'intérieur de l'enveloppe est à une température constante  $T_{cst}$  et le transfert de chaleur à travers la paroi du tube va suivre le principe de Newton [11].

## 2.8 Equilibre énergétique (Théorème d'Euler)

La quantité de l'énergie entrant à  $z$  avec écoulement du fluide dans l'intervalle du temps  $[t, t + \Delta t]$  est :

$$\rho A V C_p \Delta t (T - T^*) \Big|_z \quad (2.8)$$

La quantité de l'énergie sortant de  $z + \Delta z$  avec écoulement du fluide dans l'intervalle du temps  $[t, t + \Delta t]$  est :

$$\rho A V C_p \Delta t (T - T^*) \Big|_{z+\Delta z} \quad (2.9)$$

La quantité de l'énergie à travers la paroi de l'échangeur thermique dans l'intervalle du temps  $[t, t + \Delta t]$  est :

$$h A_s \Delta z \Delta t (T_{st} - T) \quad (2.10)$$

Notons que la surface totale du transfert thermique dans cet anneau élémentaire est  $A_s \Delta z$ . La quantité d'énergie accumulée dans l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$  est :

$$\rho A V C_p \Delta z (T \Big|_{t+\Delta t} - T \Big|_t) \quad (2.11)$$

Pour qu'il y ait équilibre énergétique, il faut que la quantité totale d'énergie accumulée, dans l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$ , soit égale à la quantité totale arrivant à l'élément, moins celle le quittant dans le même intervalle de temps. Mathématiquement l'équilibre s'écrit comme suit :

$$\rho A V C_p \Delta z (T|_{t+\Delta t} - T|_t) = \rho A V C_p \Delta t (T - T^*)|_z - \rho A V C_p \Delta t (T - T^*)|_{z+\Delta z} + h A_s \Delta z \Delta t (T_{st} - T) \quad (2.12)$$

En divisant par  $\rho A C_p V \Delta t \Delta z$  on aura :

$$\frac{T|_{t+\Delta t} - T|_t}{\Delta t} = \left( \frac{V T|_z - V T|_{z+\Delta z}}{\Delta z} \right) + \frac{h A_s}{\rho A C_p} (T_{st} - T) \quad (2.13)$$

En prenant les limites de  $\Delta z$  et de  $\Delta t$  tendant vers zéro, et en rappelant la définition de la dérivée partielle d'une fonction, l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} + V \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} = a [T_{st} - T] \quad (2.14)$$

avec :

$$a = \frac{h A_s}{\rho A C_p} \quad (2.15)$$

L'équation une équation aux dérivées partielles linéaire hyperbolique de premier ordre [11].

On note quelques points importants sur le modèle ci-dessus [13] :

1. Dans l'équation(2.14), le système est à deux paramètres  $a$  et  $V$ . En principe, la vitesse du fluide est connue, alors on a seulement besoin d'estimer le paramètre  $a$ , avant que le modèle ne soit utilisé, pour prédire les profils de température dans l'échangeur thermique.

2. Si les variations de température dans l'enveloppe sont importantes, une procédure similaire est basée sur un élément microscopique de l'enveloppe, peut être utilisée pour

obtenir les équations nécessaires, et si la dynamique de la paroi est prise en compte, alors l'équilibre énergétique doit s'écrire aussi bien pour le tube et pour l'enveloppe. En somme, on aura donc quatre équations :

- le profil de température dans le tube,
- le profil de température dans l'enveloppe,
- la représentation de la paroi séparant le tube et l'enveloppe.

3. Les modèles des systèmes à paramètres distribués sont habituellement incomplets, si on ne spécifie pas les conditions aux limites. Dans le cas où l'EDP est de premier ordre par rapport à la condition spatiale  $z$ , le modèle requiert une condition initiale (pour la dérivée par rapport au temps), et une condition aux limites (pour la dérivée par rapport à  $z$ ).

La condition aux limites est spécifiée à  $z = 0$ , puisque la température du fluide à l'entrée de l'échangeur est connue, par conséquent :

à  $z = 0$

$$T(0, t) = T_0(t) \quad (2.16)$$

La condition initiale est un profile de température de démarrage :

à  $t = 0$

$$T(z, 0) = T^*(z) \quad (2.17)$$

## 2.9 Simulation du comportement dynamique de l'échangeur

Pour la simulation du comportement dynamique de l'échangeur de chaleur, on va discrétiser le modèle EDP en utilisant la méthode des différences finies. L'objectif est de se ramener à un système à paramètres localisés.

- **Discrétisation du modèle**

La discrétisation est la partition d'un ou plusieurs domaines en parties bien égales, en utilisant des méthodes de calcul de subdivision, afin de simplifier les équations complexes qui décrivent la dynamique du système.

Le système est de premier ordre. Considérons la discrétisation spatiale du modèle. Décomposons le domaine d'espace  $[0,1]$  en  $N$  intervalles égaux correspondant à un pas de discrétisation  $\Delta z = \frac{1}{N}$ .

$$\left. \frac{\partial x}{\partial z} \right|_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta z} \quad (2.18)$$

d'où l'équation différentielle :

$$\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_n = -\left(\frac{V}{\Delta z} + a\right) x_n + \frac{V}{\Delta z} x_{n-1} + au \quad (2.19)$$

avec la condition initiale :

$$x(z, 0) = 25$$

et les conditions aux limites :

$$x_0(t) = x(0, t) = 25$$

$$x_n(t) = x(1, t) = x_1(t)$$

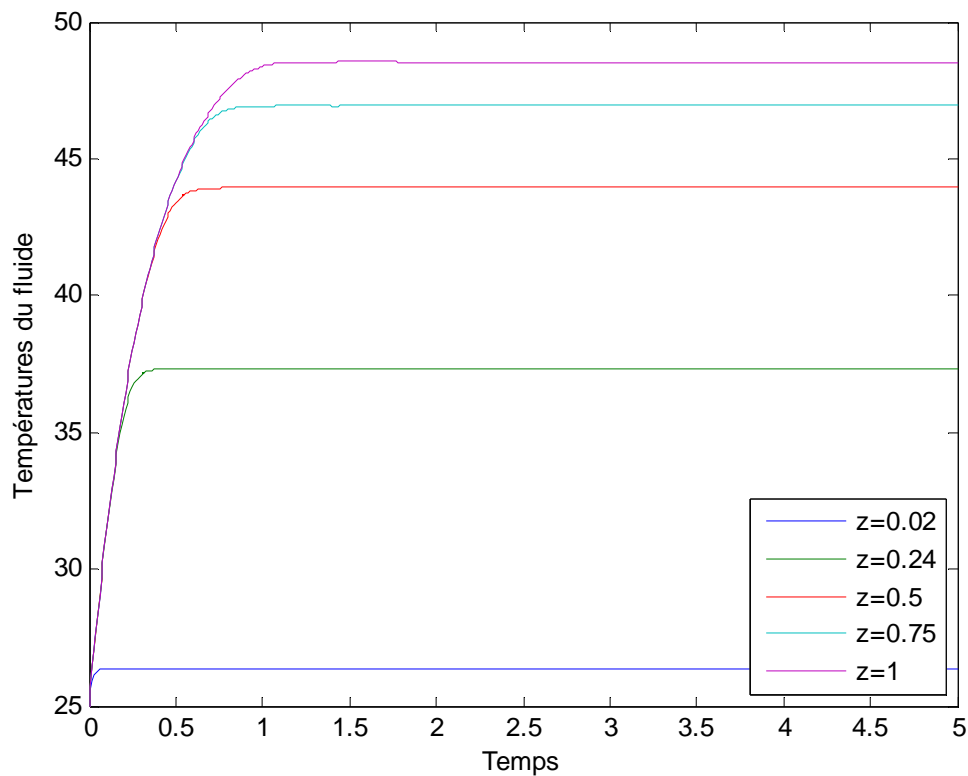
On obtient donc le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -\left(\frac{V}{\Delta Z} + a\right)x_1 + \frac{V}{\Delta Z}x_0 + au \\
\dot{x}_2(t) &= -\left(\frac{V}{\Delta Z} + a\right)x_2 + \frac{V}{\Delta Z}x_1 + au \\
\dot{x}_3(t) &= -\left(\frac{V}{\Delta Z} + a\right)x_3 + \frac{V}{\Delta Z}x_2 + au \\
&\vdots \\
\dot{x}_k(t) &= -\left(\frac{V}{\Delta Z} + a\right)x_k + \frac{V}{\Delta Z}x_{k-1} + au \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= -\left(\frac{V}{\Delta Z} + a\right)x_n + \frac{V}{\Delta Z}x_{n-1} + au
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Sous la forme matricielle, le système (2.20) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\left(\frac{V}{\Delta Z + a}\right) & 0 & \dots & 0 \\ \left(-\frac{V}{\Delta Z}\right) & -\left(\frac{V}{\Delta Z} + a\right) & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{V}{\Delta Z}\right) & -\left(\frac{V}{\Delta Z} + a\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix} u \\
&\quad + \begin{bmatrix} \frac{V}{\Delta Z} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} x_0
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Pour simuler le comportement dynamique de l'échangeur en boucle ouverte, on applique une entrée du type échelon de  $50^\circ\text{C}$  (température de l'enveloppe). L'évolution de la température à certains points de l'échangeur est donnée par la **Figure 2.6**. On constate que l'évolution de la température est aperiodique et le système est stable en boucle ouverte.



**Figure 2.6** Evolution de la température de certains points de l'échangeur en boucle ouverte.

## 2.10 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation du procédé considéré dans ce mémoire. Il s'agit d'un échangeur de chaleur à double tube avec enveloppe chauffée à la vapeur. Ainsi, après avoir introduit certaines notions relatives au transfert de chaleur et des échangeurs de chaleur, on a axé notre étude sur la modélisation de l'échangeur de chaleur en se basant sur l'équilibre énergétique.

Le modèle final résultat obtenu est sous forme d'une équation aux dérivées partielles, linéaire hyperbolique de premier ordre.

Pour assurer un profil de température désiré pour la température du fluide, la commande géométrique constitue une approche de commande bien adaptée pour les systèmes hyperboliques. Cette étude fera l'objet du chapitre suivant.

### 3.1 Introduction

De nombreuses applications industrielles relèvent d'une modélisation par des EDP de premier ordre en temps, l'approche conventionnelle utilisée pour la commande des systèmes à paramètres distribués, se base sur la discrétisation spatiale du modèle, décrit par des équations aux dérivées partielles.

La théorie de la commande des systèmes linéaires est beaucoup plus développée que celle des systèmes non linéaires, mais les progrès réalisés dans le domaine non linéaire font que le concepteur d'un système de commande dispose actuellement d'un certain nombre d'outils efficaces, à condition qu'il possède lui-même un modèle de connaissance non linéaire, plus ou moins précis du procédé.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la synthèse d'une loi de commande géométrique pour l'échangeur de chaleur, décrit d'une manière approfondie et modélisé, dans le chapitre précédent, par une équation aux dérivées partielles hyperbolique de premier ordre. Dans le but de mettre en évidence les performances de cette loi de commande, des tests de simulation sont effectués et concernent principalement les problèmes de régulation.

### 3.2 Commande par retour d'état d'un système hyperbolique quasi-linéaire

#### 3.2.1 Système d'équations aux dérivées partielles hyperboliques de premier ordre

Le modèle d'état d'un système à paramètres distribués hyperbolique de premier ordre quasi-linéaire est donné comme suit [6] :

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= A(x) \frac{\partial x}{\partial z} + f(x) + g(x)u \\ y &= h(x), \\ q &= p(x)\end{aligned}\tag{3.1}$$

avec la condition aux limites suivantes :

$$R(t) = C_1 x(a, t) + C_2 x(a, t) \quad (3.2)$$

et la condition initiale :

$$x(z, 0) = x_0(z) \quad (3.3)$$

avec :  $A(x)$  est la matrice d'évolution,

$x(z, t) = [x_1(z, t) \cdots x_n(z, t)]$  est le vecteur des variables d'état,

$f(x), g(x)$  sont des fonctions vectorielles lisses,

$h(x), p(x)$  sont des fonctions scalaires,

$q$  est la sortie mesurée,

$u$  est l'entrée de commande,

$y$  est la sortie à commander,

$C_1, C_2$  sont des matrices constantes de dimension  $n \times n$ ,

$R(t)$  est un vecteur colonne fonction lisse du temps.

**Remarque :** le système d'équations peut être parabolique, elliptique ou hyperbolique, selon les valeurs propres de  $A(x)$ .

### 3.2.2 Développement de la procédure de commande

#### 3.2.2.1 Formulation générale du problème

Considérons le système d'équations différentielles aux dérivées partielles quasi linéaires de premier ordre de la forme de la relation (3.1), pour lequel la variable de commande  $u(z, t)$ , la variable mesurée  $q(z, t)$ , et la variable à commander  $y(z, t)$  sont distribuées dans l'espace.

On suppose que, pour commander la variable  $y(z, t)$ , il existe un nombre fini  $l$  de capteurs et d'actionneurs, il est clair qu'on ne peut pas commander la variable  $y(z, t)$  en tout

point de l'espace. Ainsi, il est plus commode de formuler une loi de commande dans un nombre fini d'intervalles spatiaux (sections) comme est indiqué dans la **Figure 3.1**. [6]

En particulier, en se référant à un intervalle spatial unidimensionnel  $[z_i, z_{i+1}]$ , on suppose que la commande est  $u^i(t)$ , avec  $u^i(t) \in R$ , la sortie mesurée est  $q^i(t)$ , avec  $q^i(t) \in R$ , et la sortie à commander est  $y^i(t)$ , avec  $y^i(t) \in R$  et les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \sum_{i=1}^l b^i(z) u^i(t) \\ y^i(t) &= C^i(t) y(z, t) \\ q^i(t) &= Q^i(t) q(z, t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

avec

$$z_i \leq z \leq z_{i+1}$$

où  $b^i(z)$  est une fonction lisse,  $C^i, Q^i$  Sont des opérateurs linéaires bornés.

Du point de vue pratique, la fonction  $b^i(z)$  caractérise la distribution de la variable de commande  $u^i(t)$  dans l'intervalle  $[z_i, z_{i+1}]$  et l'opérateur  $Q^i$  détermine la structure du capteur dans le même intervalle.

L'opérateur  $C^i$  dépend des performances désirées, et dans la majorité des applications pratiques, il prend la forme suivante :

$$y^i(t) = C^i h(x) = \int_{z_i}^{z_{i+1}} C^i(z) h(x(z, t)) dz \quad (3.5)$$

avec  $C^i(z)$  une fonction de  $z$  lisse (de classe  $C^\infty$ ) connue. Pour simplifier, considérons les fonctions normalisées  $b^i(z), C^i(z)$  pour  $i = 1 \dots l$  dans l'intervalle  $[a, b]$  :

$$\sum_{i=1}^l \int_{z_i}^{z_{i+1}} b^i(z) dz = \sum_{i=1}^l \int_{z_i}^{z_{i+1}} C^i(z) dz = 1 \quad (3.6)$$

En utilisant les relations (3.4) et (3.5), le système d'équation (3.1) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial t} &= A(x) \frac{\partial x}{\partial z} + f(x) + g(x)b(z)u \\
 y &= C h(x) \\
 q &= Q p(x) \\
 R(t) &= C_1 x(a, t) + C_2 x(b, t) \\
 u &= [u^1 \dots u^l], \quad y = [y^1 \dots y^l]
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

En posant dans le système d'équations décrit par la relation (3.7) :

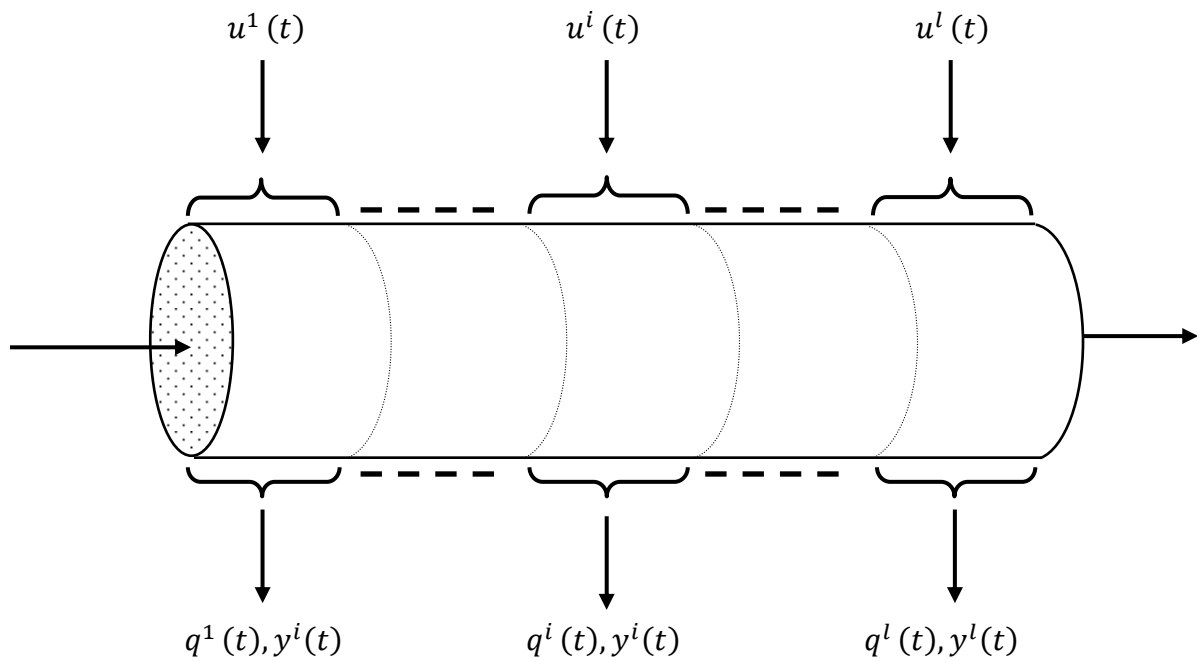
$$A(x) = A, \quad f(x) = Bx, \quad g(x) = w, \quad h(x) = kx, \quad P(x) = px$$

où  $A$  et  $B$  sont des matrices et  $w, k, p$  sont des vecteurs de dimensions appropriées [13].

La relation (3.7) se réduit au système d'équation aux dérivées partielles linéaires hyperboliques de premier ordre de la forme suivante [13] :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial t} &= A \frac{\partial x}{\partial z} + Bx + wb(z)u \\
 \bar{y} &= Ckx, \quad \bar{q} = Qpx
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

avec la condition aux limites est décrite par la relation (3.2), et la condition initiale est décrite par la relation (3.3).



**Figure 3.1** stratégie de commande d'un SPD

### 3.2.2.2 Application à l'échangeur thermique

Dans cette section, on s'intéresse à la commande géométrique de l'échangeur de chaleur. Pour ce type de système, la sortie à commander est la même que la sortie mesurée.

- **Rappel**

L'échangeur de chaleur est de longueur d'un mètre, son modèle est décrit par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -V \frac{\partial T}{\partial z} - a T + a T_{st} \quad (3.9)$$

avec  $a = 2.92 \text{ s}^{-1}$ .

et la condition initiale

$$T(z, 0) = 25^\circ\text{C} \quad (3.10)$$

et les conditions aux limites sont :

$$T(0, t) = T_0(t) \quad (3.11)$$

en considérant comme vecteur d'état  $x(z, t) = T(z, t)$ ; le modèle (3.9) s'écrit :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -V \frac{\partial x}{\partial z} - ax + au \quad (3.12)$$

avec la condition initiale :

$$x(z, 0) = 25$$

et les conditions aux limites :

$$x(0, t) = x_0$$

- **Synthèse de la loi de commande**

Pour obtenir la loi de commande géométrique, la première étape consiste à déterminer le degré relatif  $\sigma$  de l'échangeur de chaleur à contre courant.

Le degré relatif est défini comme le plus petit degré de dérivation de la sortie, qui dépend explicitement de l'entrée. Le concept du degré relatif permet de formuler et de solutionner le problème de commande par retour d'état [14].

Le degré relatif entre une sortie  $y^i$  et une entrée  $u^i$  du système d'équation aux dérivées partielles quasi linéaire de la forme donnée avec la relation (3.7) est défini comme le petit entier  $\sigma_i$  pour lequel :

$$C^i L_g \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial z} L_{a_j} + L_f \right)^{\sigma^{i-1}} h(x) b^i(z) \neq 0 \quad (3.13)$$

où  $a_j$  désigne le  $j^{\text{ème}}$  vecteur colonne de la matrice  $A(x)$ . Le degré relatif  $\sigma^i$  dépend des propriétés structurelles de la matrice  $A(x)$  et les fonctions  $f(x)$ ,  $g(x)$  et  $h(x)$  ainsi que du système de commande [6].

Notre but est de commander l'échangeur de chaleur de telle sorte à assurer une valeur désirée pour la sortie définie comme la moyenne spatiale, c'est-à-dire

$$y = \int_0^1 C(z)x(z, t) dz \quad (3.14)$$

$$C(z) = \frac{1}{z_l - z_0} = \frac{1}{1 - 0}$$

dans ce cas, on aura alors :

$$y(t) = \int_0^1 x(z, t) dz \quad (3.15)$$

En différentiant  $y$  par rapport aux temps, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^1 x(z, 1) dz \\ &= \int_0^1 \left( -V \frac{\partial x}{\partial z} - ax + au \right) dz \\ &= -V \int_0^1 \frac{\partial x}{\partial z} dz - a \int_0^1 x dz + a \int_0^1 u dz \\ \frac{dy}{dt} &= -V[x(1) - x(0)] - a \int_0^1 x dz - au \end{aligned} \quad (3.16)$$

La commande  $u(t)$  apparait explicitement dans la première dérivée de la sortie. Comme le coefficient de transfert de chaleur  $a \neq 0$ , le degré relatif du système est  $\sigma = 1$ , ceci signifie que la dynamique entrée-sortie en boucle fermée entre une entrée externe  $v$  et  $y$  sera une dynamique d'un système de premier ordre donnée comme suit :

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = y^d \quad (3.17)$$

avec  $y^d$  est une entrée externe ou de référence et  $\tau$  la constante de temps désirée en boucle fermée.

Cette représentation entrée-sortie est une équation différentielle de premier ordre, dont l'équivalent dans le domaine de Laplace :

$$\tau s y(s) + y(s) = y^d(s) \quad (3.18)$$

d'où :

$$\frac{y(s)}{y^d(s)} = \frac{1}{1 + \tau s} \quad (3.19)$$

Le but de la commande est d'imposer au fluide traversant le tube une température désirée, pour cela la température moyenne dans le tube doit être très proche de la consigne tout en assurant une stabilité de fonctionnement. On a :

$$y(t) = \int_0^1 x(z, t) dz \quad (3.20)$$

En différentiant  $y(t)$  par rapport au temps trouvé déjà précédemment, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -V[x(1) - x(0)] - a \int_0^1 x dz + au \\ \tau \frac{dy}{dt} &= -\tau V[x(1, t) - x(0, t)] - \tau a \int_0^1 x dz + \tau a u \end{aligned} \quad (3.21)$$

En sommant les deux égalités données par (3.20) et (3.21) on aura :

$$y + \tau \frac{dy}{dt} = \int_0^1 x dz - \tau V [x(1, t) - x(0, t)] - \tau a \int_0^1 x dz + \tau a u = y^d \quad (3.22)$$

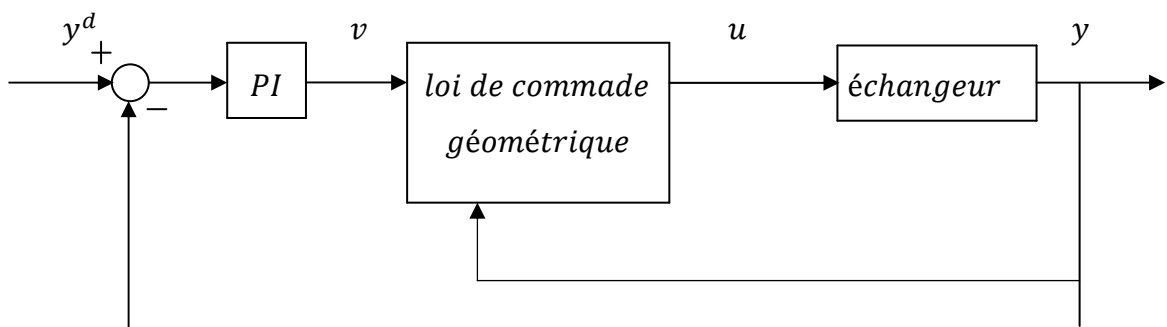
donc la loi de commande est :

$$u = \frac{1}{a\tau} \left[ y^d + \tau V [x(1, t) - x(0, t)] + (\tau a - 1) \int_0^1 x dz \right] \quad (3.23)$$

La loi de commande résultante est un retour d'état distribué, et assure au système la poursuite de la référence en boucle fermée.

### 3.3 Définition de la variable externe $v$

La loi de commande (3.23) assure une poursuite de consigne avec précision en absence des incertitudes, mais en présence de ces dernières, les performances de la loi de commande se dégradent. Ainsi, pour garantir une certaine robustesse, on propose de définir la variable externe  $v$  par un correcteur PI classique. La stratégie de commande adoptée est donnée par la **Figure 3.2**.



**Figure 3.2** Schéma bloc de la commande et du procédé.

Pour déterminer les paramètres du correcteur PI, on boucle le système obtenu :

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \quad (3.24)$$

avec un correcteur PI de fonction de transfert :

$$C(s) = k_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \quad (3.25)$$

où  $k_c$  est le gain proportionnel du régulateur et  $\tau_i$  est la constante de temps intégrale.

La fonction de transfert du système en boucle fermée est:

$$H(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)}$$

$$H(s) = \frac{k_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \times \frac{1}{(1 + \tau s)}}{1 + k_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \times \frac{1}{(1 + \tau s)}}$$

$$H(s) = \frac{k_c (1 + \tau_i s)}{\tau_i s (1 + \tau s) + k_c} = \frac{k_c (1 + \tau_i s)}{\tau_i \tau s^2 + (\tau_i + \tau) s + k_c} \quad (3.26)$$

Comme la dynamique de  $H(s)$  est de second ordre, par conséquent les performances désirées peuvent être spécifiées par les deux paramètres, qui sont le facteur d'amortissement  $\xi$  et la pulsation naturelle  $w_n$ . Ainsi, par identification :

$$\begin{cases} 2\xi w_n = \frac{(1 + k_c)}{\tau} \\ w_n^2 = \frac{(k_c)}{\tau \tau_i} \end{cases} \quad (3.27)$$

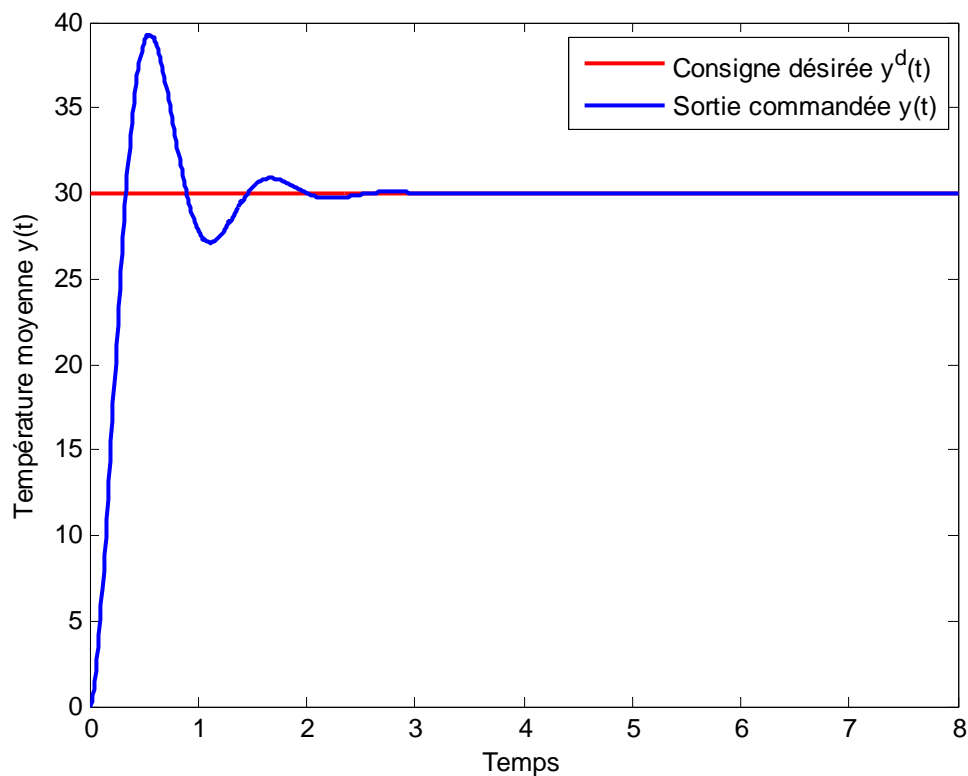
Les valeurs choisies pour la simulation (après vérification analytique) sont :

$$\begin{cases} \xi = 0.35 \\ w_n = 6 \text{ rad/s} \\ \tau = 0.25 \text{ s} \end{cases}$$

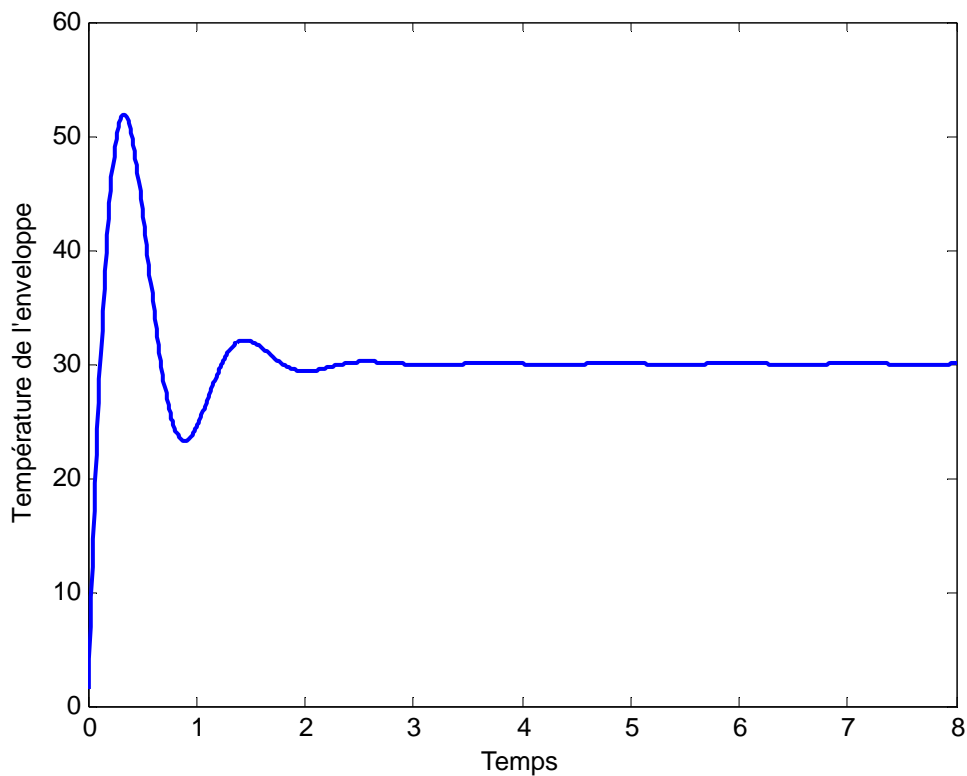
Les calculs conduisent aux paramètres suivants :

$$k_c = 0.05 \quad \text{et} \quad \tau_i = 0.0056 \text{ s}$$

Pour évaluer les performances de la loi de commande, on réalise un test de poursuite qui consiste à imposer une consigne de  $30^\circ\text{C}$  pour la sortie commandée  $y$ . On remarque que la sortie suit correctement la consigne imposée avec une dynamique d'un système de premier ordre. L'évolution de la sortie est donnée par la **Figure 3.3** et l'évolution de la commande est donnée par la **Figure 3.4**. On constate que la commande est physiquement admissible et de nature douce.

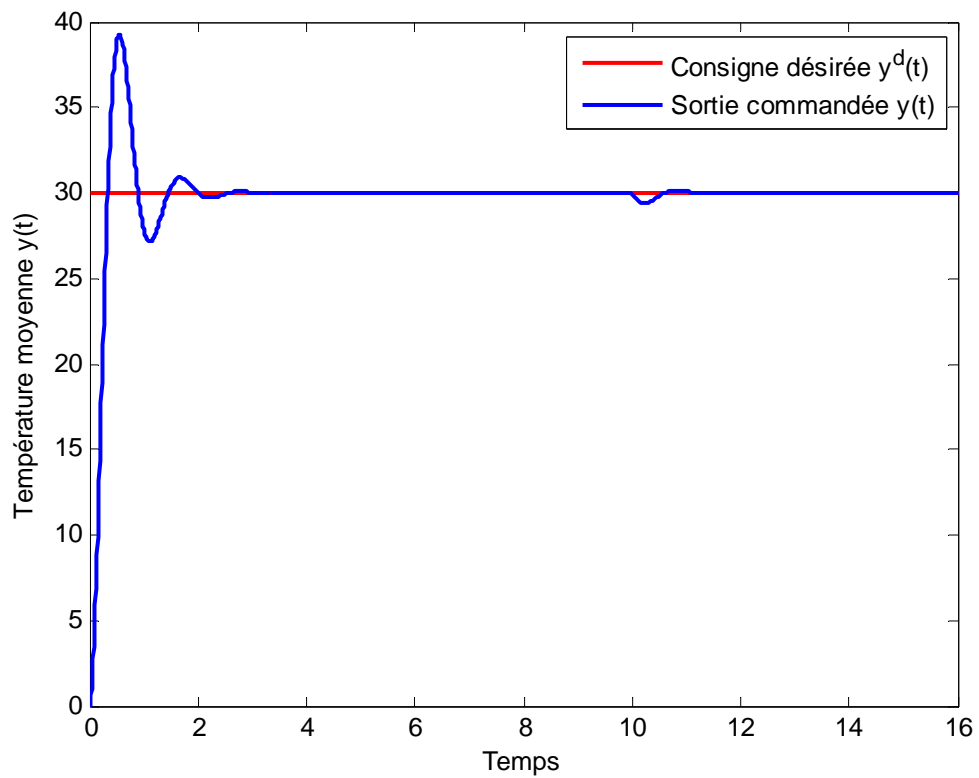


**Figure 3.3** Réponse à un échelon : évolution de la sortie commandée.

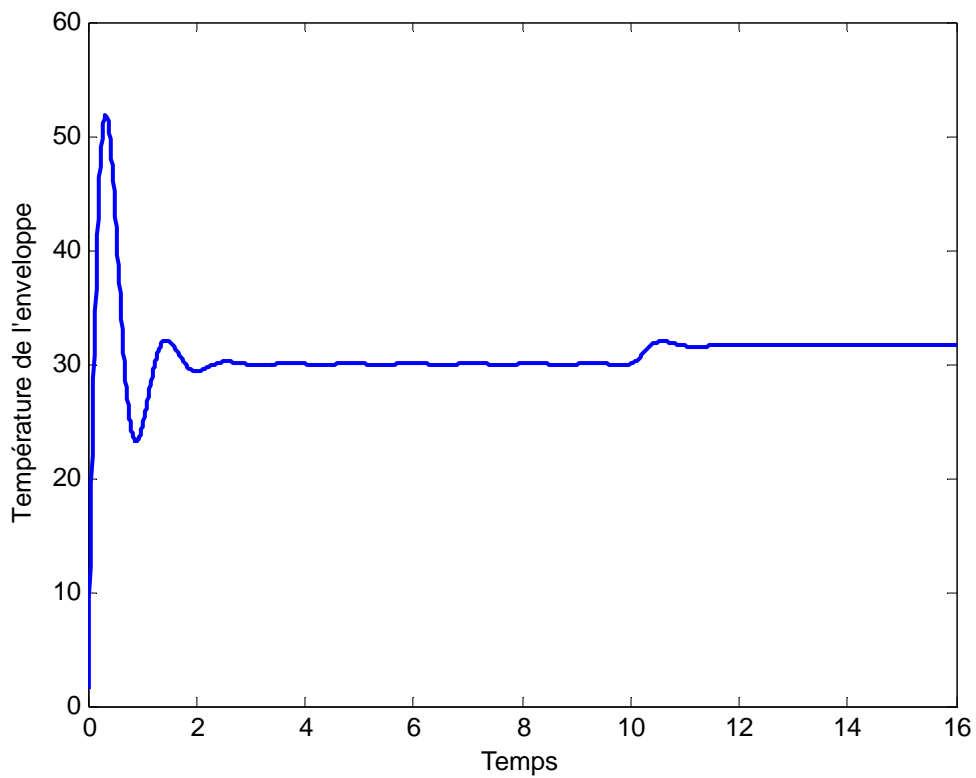


**Figure 3.4** Réponse à un échelon: évolution de la variable de commande.

Le deuxième test effectué concerne le rejet de perturbation, il consiste à faire varier la température d'entrée du fluide à la position  $z = 0$ . Ainsi, une perturbation de 10% a été appliquée à l'instant  $t = 10$  s après avoir imposé une consigne de  $30^{\circ}\text{C}$ . Les résultats obtenus sont donnés par les **Figures 3.5 et 3.6**. On constate que la stratégie de commande présentée assure un rejet de perturbation et l'évolution de la grandeur de commande reste toujours acceptable.



**Figure 3.5** Rejet de perturbation : évolution de la sortie commandée



**Figure 3.6** Rejet de perturbation : évolution de la variable de commande

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, une commande géométrique d'un échangeur de chaleur a été présentée. On a démontré qu'en utilisant un retour d'état, synthétisé en se basant sur la notion du degré relatif, une dynamique de premier ordre peut être obtenue en boucle fermée entre une grandeur externe et la sortie commandée. Pour faire face aux incertitudes, la grandeur externe a été définie par un correcteur de type PI.

Les performances du système en boucle fermée ont été évaluées par simulation en considérant les problèmes de poursuite et de régulation. Les résultats de simulation obtenus montrent que la stratégie de commande assure de bonnes performances. En effet, la consigne est correctement suivie et le rejet de perturbation s'effectue de manière rapide. L'évolution de la commande est acceptable et de nature douce.

## 4.1 Introduction

La linéarisation entrée-sortie d'un système non linéaire permet d'utiliser des techniques de commande, dédiées au système linéaire, réputées performantes et robustes. En effet, après la linéarisation, l'entrée externe peut être définie par un correcteur robuste pour faire face aux incertitudes (variations paramétriques et/ou erreurs de modélisation). Pour les systèmes linéaires, plusieurs approches de commande performantes existent dans la littérature, et la plupart sont de type linéaire (par exemple le correcteur PID), mais les performances d'un système linéaire peuvent être amplement améliorées en considérant un correcteur ayant une caractéristique non linéaire ou un effet non linéaire.

Dans ce chapitre, on présente un type de correcteur linéaire caractérisé par une remise à zéro de la commande pour certaines conditions bien déterminées, par exemple lorsque l'erreur de poursuite passe par le point zéro. Cette propriété procure pour ce correcteur linéaire, une caractéristique non linéaire ce qui permet d'avoir des effets de commande intéressants. Par la suite un correcteur PI avec remise à zéro sera intégré pour définir la variable externe dans la stratégie de commande de l'échangeur de chaleur.

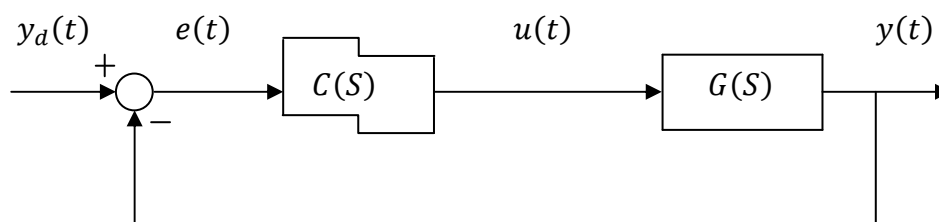
## 4.2 Limitation d'un correcteur linéaire

Bien que les correcteurs linéaires sont de plus en plus utilisés, à l'exemple du correcteur PID, mais leurs performances sont limitées pour certaines classes de systèmes. Par exemple, les systèmes linéaires contenant des intégrateurs, des retards importants, des pôles et des zéros instables, et les systèmes d'ordre élevé. Ces systèmes sont en général très difficiles à commander moyennant un correcteur ayant une caractéristique linéaire [12].

Pour pouvoir améliorer les performances du système et le commander correctement, l'utilisation d'un correcteur ayant un effet non linéaire permet d'améliorer leurs performances et de surmonter certaines difficultés. Ces dernières années, l'idée de remettre à zéro la sortie (la commande) d'un correcteur linéaire, une fois certaines conditions sont réunies, permet d'avoir un effet non linéaire qui permet d'améliorer d'avantage les performances du système. Ce correcteur est désigné par un correcteur linéaire avec remise à zéro.

### 4.3 Correcteur linéaire à remise à zéro

Un correcteur avec remise à zéro est une technique de commande non linéaire simple à mettre en œuvre. Elle s'adapte mieux pour les systèmes linéaires difficiles à commander. Ce type de correcteur est schématisé par le bloc donné par la **Figure 4.1**



**Figure 4.1** Correcteur avec remise à zéro appliqué à un système linéaire.

En effet un correcteur linéaire avec remise à zéro est un système dynamique doté d'un mécanisme de remise à zéro. Ce mécanisme est conçu en répondant aux deux problèmes suivants :

1. comment définir les conditions de remise à zéro, et
2. à quel instant, on doit appliquer cette remise à zéro.

En général, ces deux problèmes peuvent être rassemblés dans une seule condition en considérant comme condition de remise à zéro l'erreur de poursuite égale à zéro. Dans ce cas, la sortie du correcteur (commande) devient égale à zéro lorsque l'erreur de poursuite passe par zéro, donc les instants de la remise à zéro sont définis implicitement.

Ainsi, par l'ajout du mécanisme de remise à zéro à un correcteur linéaire  $C(s)$ , le nouveau correcteur obtenu est appelé correcteur avec remise à zéro. Par exemple, le correcteur avec remise à zéro correspondant au correcteur linéaire suivant :

$$C(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = \frac{k}{s+a} \quad (4.1)$$

est donné comme suit :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -a u(t) + k e(t), e(t) \neq 0 \\ u(t^+) = 0, e(t) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Pour illustrer l'apport d'un correcteur avec remise à zéro, considérons le système intégrateur à commander suivant :

$$G(s) = \frac{s + 1}{s(s + 0,2)} \quad (4.3)$$

commandé par le correcteur linéaire suivant :

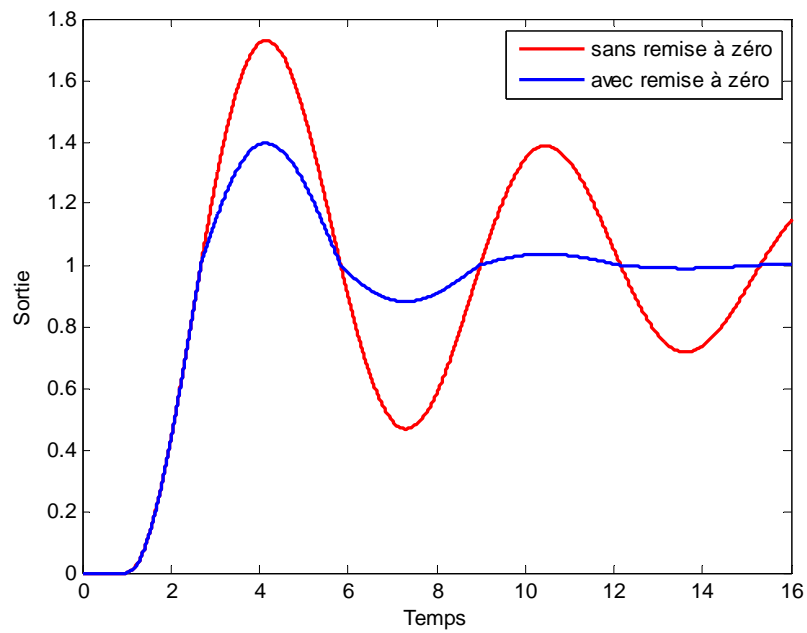
$$C(s) = \frac{1}{s + 1} \quad (4.4)$$

et par le même correcteur mais doté d'un mécanisme de remise à zéro basé sur l'erreur de poursuite, c'est-à-dire :

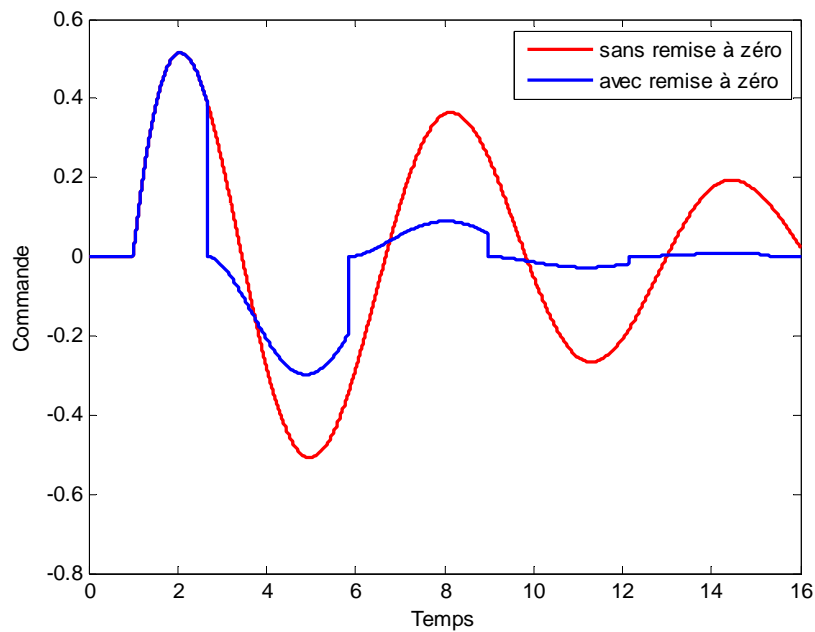
$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -u(t) + e(t), e(t) \neq 0 \\ u(t^+) = 0, e(t) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Le correcteur (4.4) est obtenu en éliminant la dynamique du zéro du système. L'objectif est d'avoir en boucle fermée un système de second ordre.

Les sorties et les commandes obtenues, pour le cas d'un échelon unitaire, sont données respectivement par la **Figure 4.2** et **4.3**.



**Figure 4.2** Sortie du système corrigé par le correcteur linéaire (en rouge) et sortie du système corrigé par le correcteur avec remise à zéro (en bleu).



**Figure 4.3** Commande par le correcteur linéaire (en rouge) et par le correcteur avec remise à zéro (en bleu).

La **Figure 4.2** montre que le correcteur avec remise à zéro donne une sortie bien amortie et rapide comparativement au correcteur linéaire qui donne une sortie oscillante et traînante.

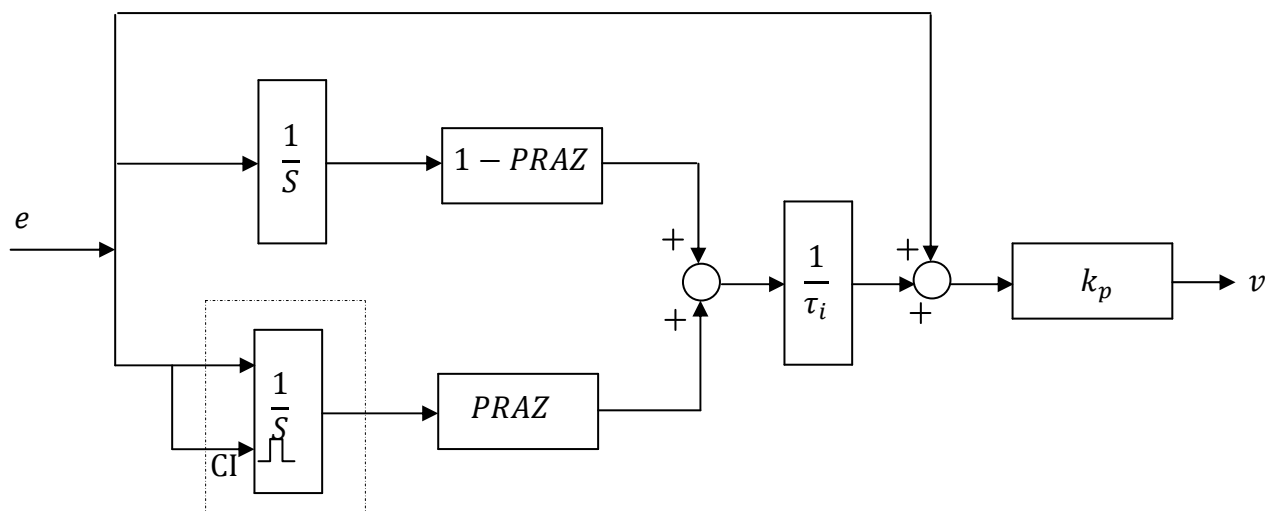
Pour le signal de commande (**Figure 4.3**), on constate que l'amplitude est très importante dans le cas du correcteur linéaire.

Cet exemple montre clairement que le mécanisme de remise à zéro ajouté produit des effets intéressants dont l'intérêt d'utiliser des correcteurs avec remise à zéro pour résoudre certains problèmes de commande linéaire.

Dans le domaine industriel, la quasi-totalité des correcteurs utilisés sont de type PID, dans la section suivante, on présentera le correcteur PI avec remise à zéro qui sera utilisé par la suite pour la commande de l'échangeur de chaleur.

#### 4.4 Synthèse d'un correcteur PI avec remise à zéro

La structure d'un correcteur PI avec remise à zéro est donnée par la **Figure 4.4**. On remarque que le correcteur PI linéaire (classique) sans remise à zéro est obtenu en prenant  $P_{RAZ} = 0$ . Par conséquent, le choix du paramètre  $P_{RAZ}$  permet d'améliorer les performances du système.



**Figure 4.4** Structure d'un PI avec remise à zéro.

La synthèse du correcteur PI avec remise à zéro passe par les deux étapes suivantes :

1. synthèse du correcteur PI linéaire classique en utilisant une méthode de synthèse,
2. détermination du paramètre  $P_{RAZ}$ .

Pour la deuxième étape, le choix du paramètre  $P_{RAZ}$  dépend du système à commander.

Dans la suite, comme la linéarisation entrée-sortie de l'échangeur de chaleur a donné un élément du premier ordre, alors on s'intéresse à la méthode de synthèse d'un correcteur PI avec remise à zéro pour ce type du système. Pour les autres systèmes des méthodes de synthèse existent dans la littérature.

#### 4.5 Synthèse dans le cas d'un système de premier ordre

Le retour d'état synthétisé par la notion du degré relative a permis d'avoir en boucle fermée (entrée externe  $v$  - sortie commandée  $y$ ) un transfert d'un système de premier ordre.

Ainsi, on propose de définir la variable externe  $v$  par un correcteur avec remise à zéro pour rendre robuste le système de commande. Dans cette section, on s'intéresse au réglage d'un correcteur PI avec remise à zéro d'un système de premier ordre.

La synthèse dans ce cas passe par les étapes suivantes :

1. synthèse d'un correcteur PI linéaire en déterminant les paramètres  $k_c$  et  $\tau_i$ ,
2. calculer les quantités  $\alpha$  et  $\beta$  en utilisant les formules suivantes :

$$\alpha = \frac{1 + k_c k}{2\tau} \quad (4.6)$$

$$\beta = \sqrt{\left| \alpha^2 - \frac{k_c k}{\tau \tau_i} \right|} \quad (4.7)$$

3. calculer le paramètre de remise à zéro  $P_{RAZ}$  comme suit :

$$P_{RAZ} = \frac{e^{-\frac{\alpha \pi}{\beta}}}{1 + e^{-\frac{\alpha \pi}{\beta}}} \quad (4.8)$$

Les paramètres du correcteur linéaire  $k_c$  et  $\tau_i$  sont calculés dans le chapitre précédent. Rappelons que les valeurs trouvées sont :

$$k_c = 0.05 \text{ et } \tau_i = 0.0056 \text{ s}$$

La dynamique du premier ordre désirée pour l'échangeur est spécifiée par les paramètres suivants :

$$k = 1 \text{ (gain du système) et } \tau = 0.25 \text{ s (constante du temps désirée)}$$

En appliquant les deux formules (4.6) et (4.7) pour calculer les quantités  $\alpha$  et  $\beta$ . Le calcul donne :

$$\alpha = 2.1 \text{ et } \beta = 5.62$$

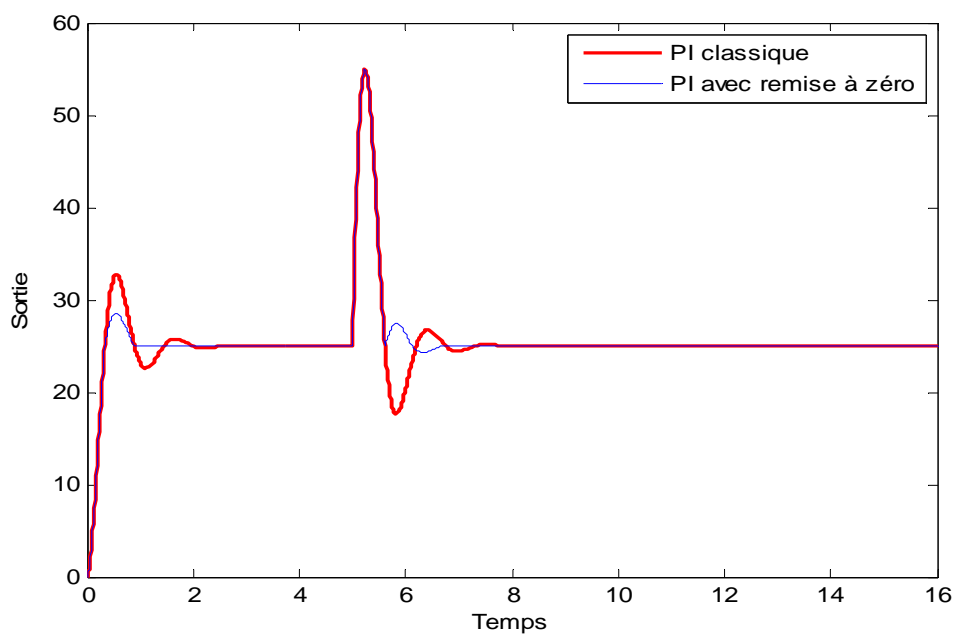
Par la suite, la valeur de  $P_{RAZ}$ , calculée d'après (4.8), est :

$$P_{RAZ} = 0.23$$

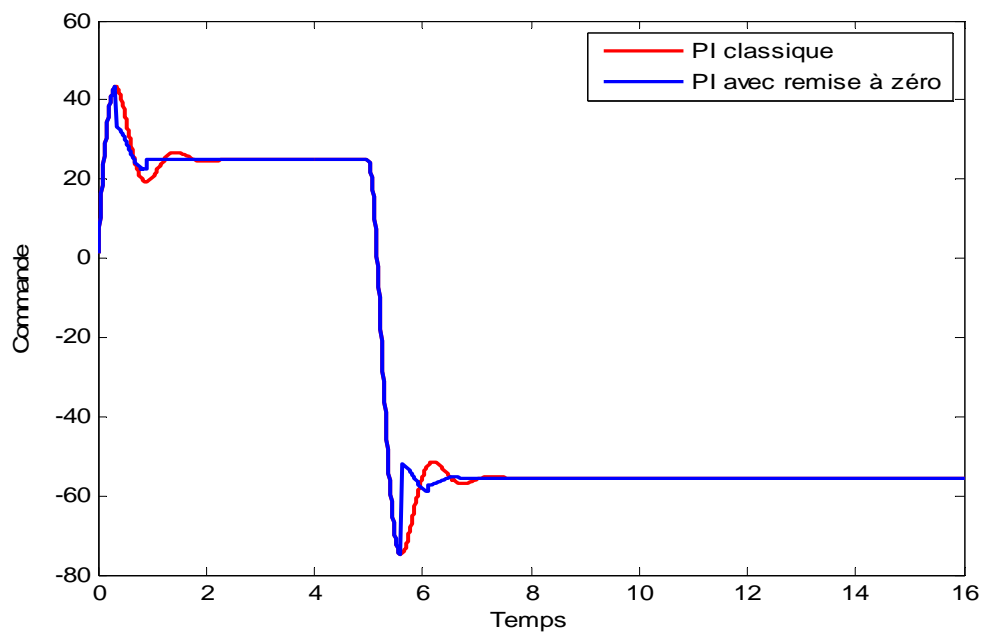
#### 4.6 Application à l'échangeur de chaleur

Dans cette section, on va évaluer les performances du système de commande de l'échangeur de chaleur basée sur l'utilisation d'un correcteur avec remise à zéro pour définir la variable externe  $v$  qui intervient dans le retour d'état. Egalement, pour montrer l'apport d'un correcteur PI avec remise à zéro, les résultats seront comparés à ceux obtenus par un correcteur PI classique.

Les tests de simulation considérés sont la poursuite et la régulation. Pour évaluer les performances du correcteur PI avec remise à zéro, on impose pour la température moyenne de l'échangeur de chaleur une consigne de  $25^{\circ}\text{C}$ , à l'instant  $t = 0$ , puis à l'instant  $t = 5\text{s}$ , on augmente la température du fluide à l'entrée de l'échangeur de 10%. Cette augmentation constitue une perturbation pour l'échangeur de chaleur. Les résultats obtenus sont donnés par les **Figures 4.5** et **4.6**.



**Figure 4.5** Evolution de la sortie commandée de l'échangeur de chaleur avec le correcteur PI classique (en rouge) et avec un PI avec remise à zéro (en bleu).



**Figure 4.6** Evolution de la commande de l'échangeur de chaleur avec le correcteur PI classique (en rouge) et avec un PI avec remise à zéro (en bleu).

La **Figure 4.5** montre que le correcteur PI avec remise à zéro donne une sortie très bien amortie et rapide contrairement au correcteur PI classique qui donne une sortie oscillante et lente.

Pour le rejet de perturbation effectué à  $t = 5s$ , les deux correcteurs assure le rejet de perturbation. Néanmoins, le rejet est amplement meilleur dans le cas du correcteur avec remise à zéro. En effet, le rejet de perturbation est lent avec un correcteur PI classique.

Pour le signal de commande, donné par la **Figure 4.6** on constate qu'il est plus énergique dans le cas d'un correcteur PI classique, c'est-à-dire le signal de commande présente des amplitudes très importantes.

L'apport du correcteur PI avec remise à zéro est remarquable. En somme, le correcteur PI avec remise à zéro accélère les réponses et rejette rapidement l'effet de la perturbation, avec des commandes faibles comparativement au correcteur PI classique.

#### 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué un correcteur PI classique avec une remise à zéro pour définir la variable externe du retour d'état synthétisé par la théorie de commande géométrique. L'objectif est d'assurer de bonnes performances en présence de perturbations.

Ainsi, après avoir présenté le correcteur avec remise à zéro, le reste du travail est focalisé sur un correcteur PI avec remise à zéro. La synthèse dans le cas d'un système de premier ordre a été présentée.

Pour démontrer l'intérêt d'un correcteur avec remise à zéro, des tests de simulation (poursuite et régulation) ont été effectuées. Les résultats obtenus ont été comparés à ceux obtenus par un PI classique.

L'étude comparative réalisée a démontré la supériorité du correcteur PI avec remise à zéro. En effet, le mécanisme de remise à zéro introduit un effet non linéaire, généralement souhaité, qui améliore davantage les performances désirées.

Le travail réalisé dans ce mémoire porte sur la commande hybride d'un échangeur de chaleur dont le comportement dynamique est décrit par une équation aux dérivées partielles. La stratégie de commande consiste à utiliser un retour d'état pour réduire le modèle, à paramètres distribués, à un modèle à paramètres répartis en utilisant la commande géométrique. Puis pour améliorer les performances du système en boucle fermée, on introduit un correcteur PI avec remise à zéro pour définir la variable externe.

Ainsi, après avoir présenté brièvement certaines notions relatives aux systèmes à paramètres distribués, nous avons présenté, par la suite, l'échangeur de chaleur à double tube à contre-courant, étudié dans ce mémoire, et sa modélisation en utilisant le bilan d'énergie. Ensuite, nous avons présenté les deux techniques de commande utilisées dans ce travail, en l'occurrence la commande géométrique et la commande avec remise à zéro. Les deux techniques ont été appliquées avec succès pour l'échangeur de chaleur considéré.

L'étude réalisée a permis de constater l'intérêt de la commande géométrique. En effet, cette méthode permet de ramener le modèle de l'échangeur de chaleur, à paramètres distribués, à un modèle à paramètres localisés, de premier ordre, facile à commander. Cette propriété permet d'exploiter des techniques de commande robustes pour améliorer les performances du système en boucle fermée. Ceci a été démontré par l'utilisation d'un correcteur PI avec remise à zéro. Ce correcteur dont la caractéristique est non linéaire permet d'améliorer les performances du système en boucle fermée. Les tests de simulation réalisés ont démontré l'efficacité de la stratégie de commande hybride. En effet, l'introduction du correcteur PI avec remise à zéro a amélioré de manière remarquable les performances du système en boucle fermée, dans le cas de la poursuite et de la régulation et les commandes générées sont moins énergiques et les réponses du système sont rapides et bien amorties.

Les résultats de cette étude ont montré l'apport d'un correcteur ayant un effet non linéaire dans l'amélioration des performances d'un système dynamique. Aussi, la combinaison de deux techniques, i.e. la commande géométrique et la commande avec remise à zéro, constitue une approche très intéressante qui peut être exploitée pour la commande des systèmes plus complexes. Ainsi, la combinaison de la commande géométrique avec d'autres techniques de commande réputées robustes, dotée d'un mécanisme de remise à zéro, constitue une voie prometteuse.

## **Bibliographie**

- [1] **J.P. BABRY et W. PELCZEWSKI**, «Commande optimale des systèmes continus déterministes », Editions Masson, Paris, 1985.
- [2] **ABDELHAQ EL JAI et MARCEL AMOUROUX**, « Automatique des systèmes distribués », Edition Hermès, Paris 1990.
- [3] **RENARDY M and ROGERS RC**. An introduction to partial differential equations, Texts in Applied Mathematics, vol. 13. Second edn., Springer: New York, 2004.
- [4] **M.ZELMAT**, « Introduction aux systèmes de commande », Editions OPU, Algérie.
- [5] **A. RACHID**, «système de régulation », Edition Masson, Paris 1996.
- [6] **PANAGIOTIS D. CHRISTOFIDES et PRODRAMOS DAOUTIDIS**, «Feedback control of hyperbolic PDE systems », in AICHE JOURNAL , Vol 42, No11.November 1996, pp. 3063-3070.
- [7] **H. REINHARD**, « Equation aux dérivées partielles », Editions Dunod, Paris , 1991.
- [8] **JEAN- PIERRE CORRIOU**, « Commande des procédés », Editions TEC&DOC, Paris ,1996.
- [9] **J.D. OUREGA**, «Résolution numérique des systèmes d'équations paraboliques par les Méthodes des Décentrage (UPWIND) », Ecole Polytechnique de Montréal, Aout 2002.
- [10] **J. CRABOL**, « Transfert de chaleur, Tome2 : Application industrielles », Editions, Masson, Paris.
- [11] **W.H. Ray and B.A. OUGONNIKE**, « Process dynamic, modeling and control » in Oxford University Press, 1994, pp. 376-380.

[12] **BANOS ALFONSO and BARREIRO ANTONIO.** « Reset Control systems », Edition Springer, 2012.

[13] **AIT-MOHAMED LYES et AKKOU OMAR** « Commande Non Linéaire d'un Echangeur Thermique. Mémoire d'ingénieur, département d'automatique, université Mouloud MAMMERI, Tizi-Ouzou, 2004.

[14] **ISIDORI A.** « Nonlinear control systems». Springer-Verlag: New York, 1995.

## **Résumé**

L'objectif de ce mémoire consiste à étudier une commande hybride qui est la combinaison de la commande géométrique et de la commande PI avec remise à zéro pour la commande de l'échangeur de chaleur dont le comportement dynamique est décrit par une équation aux dérivées partielles.

Le mémoire est décomposé comme suit :

Le premier chapitre est consacré à des généralités sur les systèmes à paramètres distribués.

Dans le deuxième chapitre, on présente le fonctionnement et la modélisation de l'échangeur de chaleur étudié dans ce mémoire.

Le troisième chapitre est réservé à la commande géométrique des systèmes paraboliques en particulier la commande de l'échangeur de chaleur.

Dans le dernier chapitre, on présente le principe de la commande avec remise à zéro et une application d'un correcteur PI avec remise à zéro pour améliorer les performances de l'échangeur de chaleur.

Le mémoire se termine par une conclusion sur l'étude réalisée et qui trace quelques voies possibles à explorer dans ce domaine.

L'introduction du correcteur PI avec remise à zéro améliore de manière remarquable les performances du système en boucle fermée, dans le cas de la régulation et les commandes générées sont moins énergiques et les réponses du système sont rapides et bien amorties.

Les résultats de cette étude ont montré l'apport d'un correcteur ayant un effet non linéaire dans l'amélioration des performances d'un système dynamique. Aussi, la combinaison de deux techniques, i.e. la commande géométrique et la commande avec remise à zéro, constitue une approche très intéressante qui peut être exploitée pour la commande des systèmes plus complexes. Ainsi, la combinaison de la commande géométrique avec d'autres techniques de commande réputées robustes, dotée d'un mécanisme de remise à zéro, constitue une voie prometteuse.

## **Mots clés**

Systèmes à paramètres distribués (SPD), équations aux dérivées partielles (EDP), Echangeur de chaleur, commande géométrique non linéaire par retour d'état, correcteur linéaire PI avec remise à zéro.